Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Flujos geodésicos de tipo Anosov en variedades no compactas

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Alexander Vidal CANTORAL VILCHEZ

ASESOR

Dr. Jorge Luis CRISÓSTOMO PAREJAS

Lima, Perú

2023



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Cantoral, A. (2023). *Flujos geodésicos de tipo Anosov en variedades no compactas*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Alexander Vidal Cantoral Vilchez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	73793222
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0004-7861-6080
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43688114
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9049-4125
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Renato Mario Benazic Tomé
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445668
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Yolanda Silvia Santiago Ayala
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445705
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales

Grupo de investigación	Dynamical systems, differential equations and their application.
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación y Posgrado. Código: B22141021
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.056445 Longitud: -77.085994
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2022-2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Virtual)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 15:00 horas del viernes 03 de noviembre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Renato Mario Benazic Tome (PRESIDENTE), Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (MIEMBRO) y el Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: ***"FLUJOS GEODÉSICOS DE TIPO ANOSOV EN VARIEDADES NO COMPACTAS",*** *presentado por el señor Bachiller Alexander Vidal Cantoral Vilchez, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación Sobresaliente con mención con un calificativo promedio de DIECINUEVE.(19).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Renato Mario Benazic Tome, manifestó que el señor Bachiller Alexander Vidal Cantoral Vilchez, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 4:00. pm horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Renato Mario Benazic Tome
PRESIDENTE

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
MIEMBRO

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Yo JORGE LUIS CRISÓSTOMO PAREJAS, en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 001125-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"FLUJOS GEODÉSICOS DE TIPO ANOSOV EN VARIEDADES NO COMPACTAS"**, presentado por el bachiller/magíster/egresado/licenciado/estudiante ALEXANDER VIDAL CANTORAL VILCHEZ, para optar el grado/título/especialidad de...Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 0% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorioinstitucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor _____

DNI: 43688114

Nombres y apellidos del asesor:

Jorge Luis Crisostomo Parejas



Dedicado a mi amigo geodésico Nestor.

Agradecimientos

A mi familia por su comprensión, especialmente a mis padres Facni y Juan por el apoyo incondicional en cada una de mis decisiones tomadas. A mis hermanos Elizabeth, Luis y Juan Carlos por creer en mí y en mis capacidades. A Jessica por estar siempre a mi lado apoyándome.

Al Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas por aceptar dirigir este proyecto bajo su dirección. Su apoyo y consejos académicos han sido un aporte invaluable.

A los miembros del jurado por aceptar evaluar este trabajo.

A los docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por contribuir en mi formación como matemático.

Al Dr. Sergio Augusto Romaña Ibarra por introducirme en el mundo de los flujos geodésicos.

A cada amigo que contribuyó directa o indirectamente en la conclusión de este trabajo.

La presente tesis fue desarrollada como parte del proyecto PCONFIGI B22141021, aprobado con Resolución Rectoral N° 05557-R-22, por ello agradecemos al VRIP-UNMSM.

Índice general

Resumen v

Abstract vi

Introducción vii

1. Variedades Riemannianas **1**

1.1. Variedades diferenciables 1

1.2. Métricas Riemannianas y conexiones afines 6

1.3. Geodésicas y la aplicación exponencial 11

1.4. Curvatura 14

1.5. Campos de Jacobi 16

2. Caracterización de los Flujos Geodésicos **22**

2.1. La métrica de Sasaki 22

2.2. El flujo geodésico 25

2.3. La diferencial del flujo geodésico 28

3. Flujo geodésico Anosov y su relación con la geometría de la variedad **31**

3.1. Flujos geodésicos de tipo Anosov 31

3.2. Variedades Riemannianas sin puntos conjugados 34

3.3. Ecuación de Ricatti 38

4. Relación entre la curvatura y el comportamiento hiperbólico de un flujo geodésico **41**

4.1. Propiedades geométricas obtenidas a partir de un flujo geodésico Anosov 41

4.2. Condiciones geométricas que implican flujo geodésico de tipo Anosov . 48

5. Ejemplos de flujos geodésicos de tipo Anosov en variedades no compactas **56**

5.1. Warped product 56

5.2. Ejemplos 57
5.3. Curvatura negativa no garantiza que un flujo geodésico sea Anosov . . 64

6. Conclusiones **66**

7. Apéndice: Teoría ergódica **68**
7.1. Medidas invariantes 68
7.2. Ergodicidad 69
7.3. Teorema Ergódico de Birkhoff 69

Referencias **71**

Resumen

En este trabajo presentaremos algunos teoremas que muestran la relación que existe entre el comportamiento hiperbólico del flujo geodésico y la geometría de la variedad. En la primera parte, daremos la demostración de los teoremas principales del texto, los cuales nos permiten caracterizar los flujos geodésicos Anosov para el caso de superficies sin puntos focales. Es importante destacar que estos resultados no requieren que la variedad sea compacta.
En la segunda parte, como consecuencia de los teoremas principales, construiremos ejemplos de superficies completas no compactas y con flujo geodésico Anosov.

Palabras clave: Flujo geodésico, métrica de Sasaki, flujo geodésico Anosov, puntos conjugados, ecuación de Ricatti, puntos focales, Warped product.

Abstract

In this work, we will present some theorems that show the relationship that exists between the hyperbolic behavior of the geodesic flow and the geometry of the manifold. In the first part, we will give the proof of the main theorems of the text, which allow us to characterize the Anosov geodesic flows for the case of surfaces without focal points. It is important to note that these results do not require the manifold to be compact. In the second part, as a consequence of the main theorems, we will build examples of non-compact complete surfaces with Anosov geodesic flow.

Key words: Geodesic flow, Sasaki metric, Anosov geodesic flow, conjugate points, Riccati equation, focal points, Warped product.

Introducción

El concepto de geodésicas se originó a partir del deseo de encontrar las trayectorias más cortas que conectaran dos puntos en una superficie curva, basándose en la intuición de la geometría euclidiana, donde una línea recta representa el camino más corto entre dos puntos. Sin embargo, en una superficie curva, la noción de distancia es más compleja y requiere un enfoque más sofisticado. Fue en el siglo XIX cuando el destacado matemático alemán, Bernhard Riemann, formalizó y desarrolló este concepto en el marco de la geometría Riemanniana, introduciendo el concepto de métrica que, en palabras simples, es una función que asigna una longitud o medida a los vectores tangentes en cada punto, proporcionando una herramienta fundamental para definir la longitud de curvas. Con el paso del tiempo, se ha descubierto que las geodésicas en variedades Riemannianas tienen una amplia gama de aplicaciones en la física y la geometría. Estas aplicaciones abarcan diversas áreas y proporcionan una comprensión profunda de fenómenos fundamentales en el universo.

Cuando consideramos una variedad Riemanniana conexa y completa, es decir, una variedad en la cual las geodésicas están definidas en todo el intervalo real, el teorema de Hopf-Rinow establece que existen geodésicas que conectan cualquier par de puntos en la variedad. Esta propiedad nos hace pensar que las geodésicas poseen un comportamiento de "órbitas". Sin embargo, surge un problema importante: las geodésicas en una variedad pueden cruzarse. Para abordar esta dificultad, se introduce el concepto de flujos geodésicos. Estos flujos se definen mediante el levantamiento de las geodésicas al fibrado tangente de la variedad. En lugar de seguir directamente las geodésicas en la variedad, se consideran las trayectorias de los vectores tangentes a lo largo de las geodésicas y sus propiedades están estrechamente relacionadas con la geometría de la variedad. Por ejemplo, la curvatura de la variedad puede afectar el comportamiento de las geodésicas y ciertas propiedades geométricas de la variedad pueden deducirse del comportamiento del flujo geodésico.

En (Anosov, 1967), Anosov notó que los flujos geodésicos en variedades compactas

de curvatura negativa son caóticos. Estos flujos son llamados sistemas uniformemente hiperbólicos o simplemente "*sistemas Anosov*". Cuando la variedad es compacta y de curvatura negativa, estos flujos geodésicos son establemente ergódicos, misturadores y tienen decaimiento exponencial de correlaciones. Cuando la variedad no es compacta, pero la curvatura es negativamente "*pinched*" (limitada entre dos constantes negativas), el mismo argumento de Anosov implica que el flujo geodésico también es Anosov (ver (Knieper, 2002)).

Por varios años se pensó que curvatura negativa era un requisito fundamental para tener dinámicas de tipo Anosov en un flujo geodésico. Sin embargo, en (Eberlein, 1973), Eberlein mostró que existen variedades compactas que contienen subconjuntos abiertos donde la curvatura es cero y que, a pesar de ello, exhiben un flujo geodésico de tipo Anosov. No obstante, en el mismo artículo, Eberlein probó que la curvatura negativa está siempre presente en métricas Anosov, pues toda geodésica debe tener puntos de curvatura negativa. Para el caso no compacto, el signo negativo de la curvatura no implica necesariamente que se tenga un flujo geodésico de tipo Anosov como veremos en el capítulo cinco.

Una pregunta natural que nos podemos hacer en la dirección contraria es la siguiente:
Pregunta: ¿Qué tipo de propiedades geométricas impone la propiedad de ser Anosov?

Esta pregunta es bastante general, pues la respuesta va a depender del tipo de propiedad geométrica que estemos buscando. Por ejemplo, Klingenberg en (Klingenberg, 1974) mostró que una variedad compacta con flujo geodésico Anosov no tiene puntos conjugados. Mañé, por su parte, mostró en (Mañé, 1987) el mismo resultado para variedades completas de volumen finito. En el caso de volumen infinito, Melo y Romaña en (Í. Melo y Romaña, 2020) extendieron el resultado de Mañé adicionando la condición de curvatura limitada inferiormente.

En esta tesis también presentaremos una posible respuesta a esta pregunta. De hecho, probaremos algunos resultados que nos muestran la relación que existe entre la geometría de la variedad y la dinámica de su flujo geodésico. Los resultados principales de este trabajo se basan en el artículo (I. Melo y Romaña, 2020).

En el primer capítulo, presentamos algunos conceptos importantes de la geometría Riemanniana, como conexiones, geodésicas, curvatura y los campos de Jacobi (herra-

mienta importante que relaciona las geodésicas con la curvatura de la variedad). Las demostraciones de los teoremas, proposiciones y corolarios mencionados en este capítulo se pueden encontrar en los libros (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992) y (Lee, 2018).

En el segundo capítulo, presentamos una forma de cómo construir una métrica en el fibrado tangente de una variedad. Estudiamos también los flujos geodésicos y sus propiedades. Al restringir la métrica de una variedad de volumen finito al fibrado tangente unitario, podemos construir una medida de probabilidad en dicho espacio conocida como la *medida de Liouville*. Finalizamos este capítulo mostrando que el comportamiento de la diferencial del flujo geodésico está determinado por el comportamiento de los campos de Jacobi.

En el tercer capítulo, introducimos el concepto de flujos geodésicos Anosov y estudiamos su relación con la geometría de la variedad. Mostramos que los subfibrados estable e inestable pueden ser vistos como gráficos de aplicaciones simétricas que satisfacen la ecuación de Ricatti (3.5).

El cuarto capítulo tiene como objetivo generalizar un resultado previamente obtenido por Eberlein en (Eberlein, 1973) para el caso no compacto. Específicamente, demostraremos el siguiente resultado:

Teorema A. Sea M una variedad Riemanniana completa, sin puntos conjugados y curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Si el flujo geodésico es Anosov, entonces existen dos constantes $B, t_0 > 0$ tales que para todo $\theta \in SM$ y para todo campo paralelo perpendicular unitario $V(t)$ a lo largo de γ_θ se tiene que

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma'_\theta(r), V(r))dr \leq -B, \qquad t > t_0. \tag{1}$$

Este resultado nos dice que cuando el flujo geodésico es Anosov, entonces la curvatura negativa está, en media, uniformemente distribuida a lo largo de las geodésicas. Recíprocamente, vamos a mostrar que las superficies completas sin puntos focales que satisfacen la condición (1) tienen un flujo geodésico de tipo Anosov. Más precisamente,

Teorema B. Sea M una superficie completa sin puntos focales y curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Suponga que existen dos constantes $B, t_0 > 0$ tales que para toda geodésica $\gamma(t)$ se tiene

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma(s))ds \leq -B$$

para todo $t > t_0$, entonces el flujo geodésico es de tipo Anosov.

Para demostrar este resultado, definimos los subespacios de Green estable e inestable, que serán los candidatos a ser los subespacios estable e inestable requeridos por la condición Anosov. La idea de la prueba es mostrar que las soluciones estables de la ecuación de Jacobi (3.2) tienen determinante que decae exponencialmente a partir de un tiempo positivo grande y, por lo tanto, la derivada del flujo geodésico, restringida al subespacio de Green estable, tendrá el mismo comportamiento. Luego, trasladamos esta información para el caso inestable y finalmente, mediante un argumento similar utilizado por Eberlein en (Eberlein, 1973), mostramos la contracción y expansión uniforme de la derivada del flujo geodésico en los subespacios de Green estable e inestable, respectivamente.

En el quinto capítulo usaremos el teorema B para construir una familia de superficies no compactas (en particular, no compactamente homogéneas) que poseen flujo geodésico de tipo Anosov. Para lograr esto, emplearemos el concepto de "Warped product" como herramienta principal.

Finalizamos este trabajo con un apéndice donde presentamos algunos conceptos de teoría ergódica usados en los capítulos anteriores. Además, en este apéndice, proporcionaremos una demostración del teorema de Birkhoff para flujos.

Capítulo 1

Variedades Riemannianas

En este primer capítulo, introduciremos algunos conceptos fundamentales de la geometría Riemanniana que serán usados a lo largo del texto. La geometría Riemanniana surgió con el propósito de definir algunos conceptos geométricos como longitud, ángulo y distancia en variedades diferenciables. Las referencias que usaremos son (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992) y (Lee, 2018).

1.1. Variedades diferenciables

Sea M un espacio topológico de Hausdorff con base numerable de abiertos. Decimos que M es una variedad diferenciable n-dimensional de clase $\mathcal{C}^k$ si existe una familia de homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \tilde{U}_\alpha$, llamadas cartas, donde $\alpha \in I$ es un conjunto de índices, U_α es un subconjunto abierto de M y $\tilde{U}_\alpha$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, con las siguientes propiedades:

i. $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

ii. Para cualquier par $\alpha, \beta \in I$, el dominio de la aplicación $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, es decir, $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y la aplicación

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^k$.

La familia de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es llamada atlas de clase $\mathcal{C}^k$.

Ejemplo 1.1.1. *Si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ y $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ son atlas de clase $\mathcal{C}^k$ para las variedades diferenciables M y N de dimensiones m y n respectivamente, entonces la colección de cartas*

$$\left\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta), \ \textit{donde } \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^{m+n}\right\}$$

es un atlas de clase $\mathcal{C}^k$ para $M \times N$. Por lo tanto, $M \times N$ es una variedad diferenciable de clase $\mathcal{C}^k$ de dimensión $m + n$.

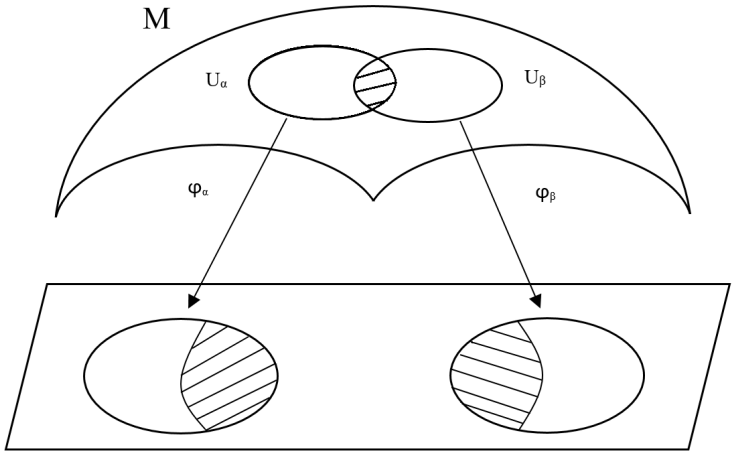


Figura 1.1: Variedad diferenciable.

Podemos ver que las variedades diferenciables son estructuras que, localmente, se asemejan a los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, podemos usar las cartas locales para introducir el concepto de aplicaciones diferenciables entre variedades.

Definición 1.1.2. *Sean N y M dos variedades diferenciables de dimensión n y m respectivamente. Una aplicación continua $F : N \to M$ es diferenciable en el punto $p \in N$ si existen cartas (V, ψ) en M, con $F(p) \in V$, y (U, φ) en N, con $p \in U$, tales que la composición $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, que es una aplicación definida en el conjunto abierto $\varphi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$, es diferenciable en $\varphi(p)$. Decimos que F es diferenciable en N si F es diferenciable en p, para todo $p \in N$. Análogamente definimos aplicaciones de clase $\mathcal{C}^k$.*

Si una aplicación diferenciable entre variedades $F : N \to M$ es biyectiva y su inversa F^{-1} es también diferenciable, decimos que F es un *difeomorfismo*.

Proposición 1.1.3. *Si (U, φ) es una carta local de la variedad diferenciable M de dimensión n, entonces $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.*

Podemos observar que, al utilizar cartas locales, las aplicaciones diferenciables entre variedades se comportan de manera similar a las funciones entre espacios euclidianos. De esta manera, es posible extender el cálculo diferencial a las variedades diferenciables. Para ello, necesitamos introducir un nuevo concepto llamado *espacio tangente*, que lo podemos considerar como una especie de "modelo lineal" de la variedad cerca de cada

punto. De ahora en adelante, el término "diferenciable" significará que el objeto es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

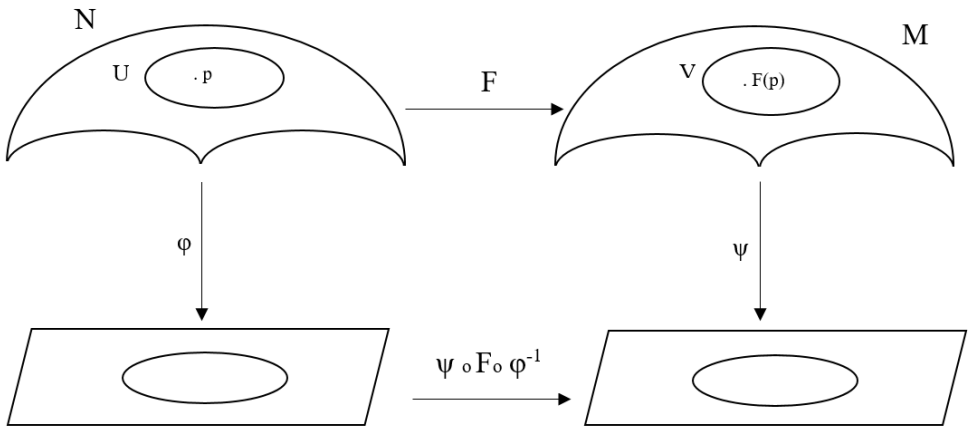


Figura 1.2: Aplicación diferenciable entre variedades.

Fijado un punto $p \in M$, denotemos por (f, U) a la función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, donde U es un subconjunto abierto de M con $p \in U$. Decimos que (f, U) es equivalente a (g, V) si existe un subconjunto abierto $W \subset U \cap V$, con $p \in W$, tal que $f = g$ en W. Ésto define una relación de equivalencia y a la clase de equivalencia de (f, U) la llamaremos *germen* de f en p. Denotemos por $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ al conjunto de todos los gérmenes de funciones $\mathcal{C}^\infty$ definidas en una vecindad de p.

Definición 1.1.4. *Una derivación en $p \in M$ es una aplicación lineal $D : \mathcal{C}_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg.$$

Definimos el espacio tangente de M en el punto p, denotado por T_pM, como el conjunto de todas las derivaciones en p. El conjunto T_pM tiene una estructura de espacio vectorial y sus elementos son llamados vectores tangentes a M en p.

Denotemos por $r^1, \ldots, r^n$ las coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Si $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ es una carta de M con $p \in U$, entonces $x^i = r^i \circ \varphi$. Dada una aplicación $f : M \to \mathbb{R}$, definimos la derivada parcial de f en relación a x^i en el punto p como

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)).$$

Si consideramos $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ una carta local de M con $p \in U$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$, tenemos que $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ cumple la propiedad de derivación y, por lo tanto, es un vector tangente a M en el punto p.

Definición 1.1.5. *Sea M una variedad diferenciable. Definimos el fibrado tangente de M como la unión de todos los espacios tangentes de M, esto es,*

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}.$$

Se consigue mostrar que, utilizando el atlas de M, podemos generar un atlas para TM. Esto implica que el fibrado tangente admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$, donde n es la dimensión de M. Una vez que hemos definido el espacio tangente en cada punto de una variedad diferenciable, podemos proceder a derivar aplicaciones diferenciables entre variedades.

Definición 1.1.6. *Sea $F : N \to M$ una aplicación diferenciable entre variedades. Definimos la diferencial de F en p como la aplicación lineal*

$$\begin{aligned} d_pF : T_pN &\to T_{F(p)}M \\ X_p &\to d_pF(X_p) \end{aligned}$$

donde $d_pF(X_p)f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R}$ para todo $f \in \mathcal{C}^\infty_{F(p)}(M)$.

En otras palabras, la derivada de una aplicación diferenciable en un punto estudia la transformación de los vectores tangentes en los espacios tangentes asociados.

Proposición 1.1.7. *Si $F : N \to M$ es un difeomorfismo entre variedades diferenciables, entonces $d_pF : T_pN \to T_{F(p)}M$ es un isomorfismo para todo $p \in N$.*

Sea $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ una carta local de M con $p \in U$. De la proposición 1.1.3 sabemos que φ es un difeomorfismo, entonces

$$d_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo por la proposición anterior. Por lo tanto, el espacio tangente T_pM tiene la misma dimensión que M. La siguiente proposición nos muestra una base del espacio tangente a partir de una carta local.

Proposición 1.1.8. *Sea $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ una carta local de M con $p \in U$, entonces el espacio tangente T_pM tiene como base*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p.$$

Una curva suave en M es una aplicación diferenciable $c : (a, b) \to M$. El vector velocidad $c'(t_0)$ de la curva en el tiempo $t_0 \in (a, b)$ se define como

$$c'(t_0) := d_{t_0}c\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{c(t_0)}M.$$

La siguiente proposición ofrece otra forma de calcular la diferencial de una aplicación diferenciable usando el concepto de curvas.

Proposición 1.1.9. *Sean $F : N \to M$ una aplicación diferenciable entre variedades, $p \in N$ y $X_p \in T_pN$. Si c es una curva suave tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = X_p$, entonces*

$$d_pF(X_p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F \circ c)(t).$$

Para concluir esta sección, presentamos el concepto de campos vectoriales en variedades, los cuales desempeñan un papel fundamental en el estudio de la geometría y la dinámica en estas estructuras.

Definición 1.1.10. *Un campo vectorial X en una variedad diferenciable M es una aplicación continua definida como*

$$\begin{aligned} X : M &\to TM \\ p &\to X_p \in T_pM \end{aligned}$$

Si la aplicación es diferenciable decimos que X es un campo vectorial diferenciable.

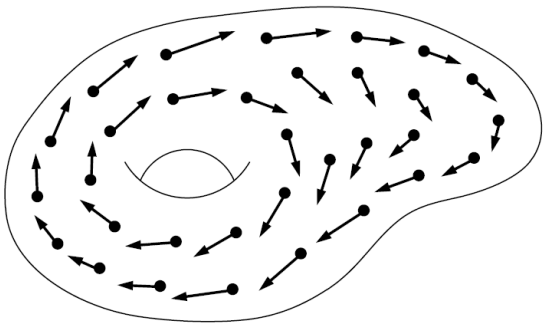


Figura 1.3: Campo vectorial.

Si consideramos la carta local $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ de M, el valor del campo vectorial X en el punto $p \in U$ es

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Al variar p en todo U, obtenemos que los coeficientes a^i son funciones definidas en U. Se consigue mostrar que el campo vectorial X es diferenciable en U si y solamente si los coeficientes a^i son funciones diferenciables en U, es decir, la suavidad del campo vectorial está determinada por la suavidad de sus coeficientes.
Un campo vectorial X en M induce una aplicación lineal en el álgebra de funciones diferenciables en M: para cada $f \in C^\infty(M)$, definimos Xf como la función

$$(Xf)(p) = X_pf.$$

Si consideramos la carta local $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ de M, tenemos que

$$(Xf)(p) = X_p f = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p .$$

Podemos proporcionar otra caracterización para los campos vectoriales diferenciables, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.1.11. *Un campo vectorial X en M es diferenciable si y solamente si para toda función $f \in C^\infty(M)$, la aplicación Xf es diferenciable en M.*

1.2. Métricas Riemannianas y conexiones afines

Una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable M de dimensión n es una correspondencia que asocia a cada $p \in M$ un producto interno $g_{(p)} = \langle ., . \rangle_p$ en el espacio tangente T_pM, que varía diferenciablemente, esto es, para todo par de campos de vectores diferenciables X, Y en una vecindad V de M, la función

$$(X, Y) : p \in V \to \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}$$

es diferenciable. La variedad M dotada de una métrica Riemanniana es llamada variedad Riemanniana y es denotada por (M, g).

Observación 1.2.1. *Una misma variedad puede tener varias métricas Riemannianas. En el caso de no haber confusión, lo denotaremos simplemente por M.*

Sea $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ una carta local de M en p, donde $\varphi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ es el sistema de coordenadas locales. Entonces una base del espacio tangente T_pM es

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p \right\}.$$

Sean X, Y dos campos vectoriales diferenciables en M. Localmente podemos escribir

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \qquad Y_p = \sum_{j=1}^{n} b_j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p .$$

Entonces,

$$\langle X_p, Y_p \rangle_p = \sum_{i,j=1}^{n} a_i(p) b_j(p) \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p , \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right\rangle_p .$$

Por lo tanto, la métrica Riemanniana en p puede ser escrito en términos de las funciones

$$g_{ij}(p) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p , \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right\rangle_p .$$

Podemos ver que $g_{ij} = g_{ji}$. Si consideramos la matriz $G = (g_{ij})$, sigue que G es una matriz simétrica y definida positiva.

Ejemplo 1.2.2. *Sea (N, g) una variedad Riemanniana y $f : M \to N$ una inmersión, esto es, una función diferenciable en M tal que para todo $p \in M$ la diferencial $d_p f : T_pM \to T_{f(p)}N$ es inyectiva. Entonces f induce una métrica en M dada por*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle d_p f(u), d_p f(v)\rangle_{f(p)}, \qquad \forall\, u, v \in T_pM.$$

La métrica de M es llamada la métrica inducida por f.

Ejemplo 1.2.3. *Sean (M, g) y $(\tilde{M}, \tilde{g})$ dos variedades Riemannianas. Podemos definir una métrica Riemanniana $\hat{g} = g \oplus \tilde{g}$ para la variedad producto $M \times \tilde{M}$, llamada la métrica producto, de la siguiente forma:*

$$\hat{g}_{(p,q)}((v, \tilde{v}), (w, \tilde{w})) = g_p(v, w) + \tilde{g}_q(\tilde{v}, \tilde{w})$$

para todo $(v, \tilde{v}), (w, \tilde{w}) \in T_pM \oplus T_q\tilde{M} \approx T_{(p,q)}(M \times \tilde{M})$.

Usando particiones de la unidad subordinadas a la cobertura de una variedad, se consigue mostrar el siguiente resultado:

Teorema 1.2.4. *Toda variedad diferenciable tiene por lo menos una métrica Riemanniana.*

La existencia de una métrica Riemanniana también permite definir una noción de volumen en variedades diferenciables orientadas, esto es, en variedades en las que se puede establecer una dirección coherente en cada punto.

Definición 1.2.5. *Sean M una variedad Riemanniana y $\Omega \subset M$ un subconjunto abierto, conexo y con cerradura compacta, tal que Ω está contenida en el dominio de una carta local $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ y la frontera de $\varphi(\Omega)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$. El volumen de Ω se define como*

$$vol\ (\Omega) = \int_{\varphi(\Omega)} \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \dots dx^n. \tag{1.1}$$

La expresión (1.1) está bien definida, esto es, no depende de la elección de la carta local. En el caso que Ω sea compacto, podemos considerar una cobertura finita $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_k, \varphi_k)$ de Ω y una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i=1}^k$ subordinada a esta cobertura. Entonces el volumen de Ω se define como

$$\text{vol } (\Omega) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi_i(\Omega)} \rho_i \sqrt{\det G}dx^1 \dots dx^n.$$

En el lenguaje de formas diferenciables, el elemento de volumen

$$dV_g = \sqrt{\det G}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

es una n-forma.

Definición 1.2.6. *Sea M una variedad Riemanniana.*

i. La norma de un vector tangente $v \in T_pM$ se define como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}.$$

ii. El ángulo entre dos vectores tangentes $v, w \in T_pM$ es el único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle_p}{\|v\|\|w\|}.$$

iii. Si $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva suave, definimos la longitud de γ como

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

iv. Dos campos vectoriales X, Y de M son llamados perpendiculares si $\langle X_p, Y_p \rangle_p = 0$ para todo $p \in M$.

De ahora en adelante, consideraremos variedades Riemannianas y denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ el espacio de los campos vectoriales diferenciables en M.

Definición 1.2.7. *Una conexión afín en una variedad M es una aplicación*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\to \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

i. $\nabla_{fX+gZ} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_Z Y$,

ii. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ y todas las funciones suaves f, g definidas en M y con valores en $\mathbb{R}$. Decimos que $\nabla_X Y$ es la derivada covariante de Y en la dirección de X.

La definición de conexión atiende a la necesidad de definir una noción de derivación intrínseca para campos vectoriales. El nombre conexión se refiere exactamente a la idea de conectar localmente los espacios tangentes de una variedad.

Proposición 1.2.8. *Sea ∇ una conexión afín en una variedad diferenciable M. Si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ se expresan en coordenadas locales como*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j,$$

donde $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ *, entonces*

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \sum_{j=1}^{n} X(b_j)\partial_j. \tag{1.2}$$

En particular, $(\nabla_X Y)_p$ *depende apenas de* X_p *y del valor de* Y *a lo largo de una curva que pasa por* p *y con vector tangente* X_p *en* p*.*

Si consideramos los símbolos de Christoffel $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$, tenemos de la ecuación (1.2) que

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \Gamma_{ij}^k + X(b_k) \right) \partial_k.$$

Definición 1.2.9. *Un campo vectorial* V *a lo largo de una curva* $\alpha : I \to M$ *es una aplicación que asocia a cada* $t \in I$ *un vector tangente* $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$*.*

La siguiente proposición muestra que la existencia de una conexión en una variedad diferenciable permite derivar campos vectoriales a lo largo de curvas suaves en la variedad. En particular, es posible hablar de aceleración de una curva suave y por lo tanto de geodésicas.

Proposición 1.2.10. *Sea* M *una variedad diferenciable con una conexión afín* ∇*. Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial* V *a lo largo de la curva suave* $\alpha : I \to M$*, un otro campo vectorial* $\dfrac{DV}{dt}$ *a lo largo de* α*, llamado la derivada covariante de* V *a lo largo de* α*, tal que*

i. $\dfrac{D}{dt}(V+W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$.

ii. $\dfrac{D}{dt}(fV) = f\dfrac{DV}{dt} + \dfrac{df}{dt}V$*, donde* f *es una función diferenciable en* I*.*

iii. Si V *es un campo inducido por un campo vectorial* $Y \in \mathcal{X}(M)$*, esto es,* $V(t) = Y(\alpha(t))$*, entonces* $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'} Y$*.*

Una vez definido el concepto de derivada a lo largo de curvas, la noción de paralelismo surge de manera natural.

Definición 1.2.11. *Sea* M *una variedad diferenciable con una conexión afín* ∇*. Un campo vectorial* V *a lo largo de una curva suave* $\alpha : I \to M$ *es llamado paralelo si* $\dfrac{DV}{dt} \equiv 0$*.*

Usando la existencia y unicidad de soluciones de una EDO, se consigue probar el siguiente resultado:

Proposición 1.2.12. *Sean M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇, $\alpha : I \to M$ una curva suave en M y V_0 un vector tangente a M en $\alpha(t_0)$, donde $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo paralelo V a lo largo de α tal que $V(t_0) = V_0$. Este campo es llamado el transporte paralelo de V_0 a lo largo de α.*

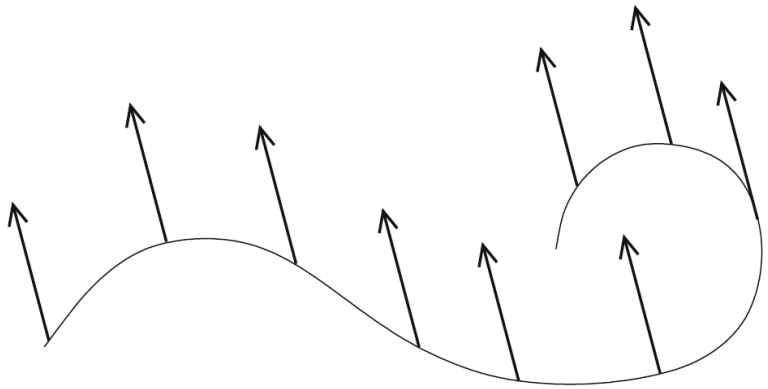


Figura 1.4: Transporte paralelo a lo largo de la curva.

Dados $t_0, t_1 \in I$, podemos definir la aplicación lineal

$$P^{\alpha}_{t_0,t_1} : T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t_1)}M$$

que asocia a cada $v \in T_{\alpha(t_0)}M$ el vector $P^{\alpha}_{t_0,t_1}(v) = V(t_1)$, donde V es el transporte paralelo de v a lo largo de α. Esta aplicación está bien definida por la proposición 1.2.12 y es un isomorfismo, donde el inverso es $P^{\alpha}_{t_1,t_0}$.

Definición 1.2.13. *Una conexión afín es compatible con la métrica si para todo par de campos vectoriales V, W a lo largo de una curva suave $\alpha : I \to M$ se tiene que*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \qquad \forall t \in I.$$

Siempre es posible encontrar una única conexión que sea compatible con la métrica de la variedad y que también sea simétrica, esto es, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = XY - YX$. Esta conexión es llamada *la conexión de Levi-Civita*, una herramienta importante que abre una puerta para el estudio de las geodésicas, curvatura y otros conceptos de la geometría Riemanniana.

Con la conexión de Levi-Civita, podemos obtener una fórmula simple para calcular los símbolos de Christoffel: Dada una carta local $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de M, tenemos

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) g^{km}, \tag{1.3}$$

donde (g^{km}) denota la matriz inversa de (g_{km}).

1.3. Geodésicas y la aplicación exponencial

Desde ahora, cada vez que hablemos de variedades Riemannianas, vamos a suponer que ellas están dotadas con su conexión de Levi-Civita.

Definición 1.3.1. *Una curva suave $\gamma : [a, b] \to M$ en una variedad Riemanniana M es llamada geodésica si*

$$\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0.$$

Geométricamente, una geodésica es una curva con campo de velocidad paralelo a lo largo de la curva. Sigue de la definición 1.2.13 que $\|\gamma'(t)\|$ es constante.

Definición 1.3.2. *Decimos que una geodésica $\gamma : I \to M$ es unitaria si*

$$\|\gamma'(t)\| = 1, \qquad \forall\, t \in I.$$

Toda geodésica $\gamma : I \to M$, que no es un punto, puede ser transformada a una geodésica unitaria a través de una reparametrización por longitud de arco

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(s)\| ds,$$

donde $t_0 \in I$.

Si escribimos la curva $\gamma(t)$ en coordenadas locales como $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, entonces de la ecuación (1.2) tenemos que γ es una geodésica si y solamente si

$$0 = \frac{D\gamma'}{dt} = \sum_k \left(\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) \partial_k. \tag{1.4}$$

Sigue de la ecuación (1.4) que las geodésicas de $\mathbb{R}^n$ son rectas. En la esfera $\mathbb{S}^2$, los grandes círculos, esto es, círculos cuyo centro es el centro de la esfera, son geodésicas. La ecuación (1.4), junto con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, nos permiten probar el siguiente resultado:

Teorema 1.3.3 (Existencia y unicidad)**.** *Sea M una variedad Riemanniana. Para cada $p \in M$, $v \in T_pM$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, existen un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ conteniendo t_0 y una única geodésica $\gamma_{(p,v)} : I \to M$ tales que $\gamma_{(p,v)}(t_0) = p$ y $\gamma'_{(p,v)}(t_0) = v$. La unicidad significa que si existe otra geodésica $\beta : J \to M$ tal que $\beta_{(p,v)}(t_0) = p$ y $\beta'_{(p,v)}(t_0) = v$, entonces $\gamma(t) = \beta(t)$ para todo $t \in I \cap J$.*

El siguiente lema muestra que si queremos aumentar la velocidad de la geodésica, tenemos que disminuir su intervalo de definición y viceversa.

Lema 1.3.4 (Homogeneidad de una geodésica)**.** *Si la geodésica $\gamma_{(p,v)}(t)$ está definida en el intervalo $(-\delta,\delta)$, entonces la geodésica $\gamma_{(p,av)}(t)$, donde $a>0$, está definida en el intervalo $\left(-\frac{\delta}{a},\frac{\delta}{a}\right)$ y*

$$\gamma_{(p,v)}(at)=\gamma_{(p,av)}(t).$$

El lema anterior es de mucha utilidad pues nos permite afirmar que, como veremos en la siguiente proposición, para puntos q próximos a p, si $v\in T_qM$ es tal que $\|v\|<\varepsilon$ entonces la geodésica $\gamma_{(q,v)}$ está definida en el intervalo $(-2,2)$, esto es, el intervalo de definición de una geodésica es uniformemente grande en una vecindad de p.

Proposición 1.3.5. *Sea M una variedad Riemanniana. Para cada $p\in M$ existen una vecindad V de p en M, un número $\varepsilon>0$ y una aplicación diferenciable $\gamma:(-2,2)\times\mathcal{V}\to M$, donde*

$$\mathcal{V}=\{(q,v):q\in V,v\in T_qM,\|v\|<\varepsilon\},$$

tales que $t\to\gamma(t,q,v)$, $t\in(-2,2)$, es la única geodésica de M que satisface las condiciones iniciales $\gamma(0,q,v)=q$ y $\gamma'(0,q,v)=v$ para todo $(q,v)\in\mathcal{V}$.

Este último resultado nos permite introducir el concepto de aplicación exponencial:

Definición 1.3.6. *Para cada $p\in M$, consideremos el conjunto*

$$\mathcal{E}_p=\left\{v\in T_pM:\gamma_{(p,v)}\text{ está definida en un intervalo que contiene }[0,1]\text{ con }\gamma_{(p,v)}(0)=p\right\}.$$

Definimos la aplicación exponencial $exp_p:\mathcal{E}_p\to M$ como

$$exp_p(v)=\gamma_{(p,v)}(1)=\gamma(1,p,v)=\gamma\left(\|v\|,p,\frac{v}{\|v\|}\right).$$

Geométricamente, $exp_p(v)$ es el punto de M obtenido recorriendo la geodésica, a partir de p y con velocidad inicial $\dfrac{v}{\|v\|}$, una longitud igual a $\|v\|$. Por el lema de homogeneidad tenemos que $exp_p(tv)=\gamma_{(p,tv)}(1)=\gamma_{(p,v)}(t)$ para todo t donde γ estuviera definida, esto es, la aplicación exponencial transforma líneas rectas de T_pM que pasan por el origen en geodésicas que en el tiempo $t=0$ pasan por p.

Proposición 1.3.7. *Dado $p\in M$, existe un $R>0$ tal que $exp_p:B_R(0)\subset T_pM\to M$ es un difeomorfismo de $B_R(0)$ sobre un subconjunto abierto de M.*

Demostración. Tenemos que

$$d_0(exp_p)(v)=\left.\frac{d}{dt}exp_p(tv)\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\gamma(1,p,tv)\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\gamma(t,p,v)\right|_{t=0}=v.$$

Por lo tanto $d_0(exp_p)=Id$. Por el teorema de la función inversa para funciones definidas en variedades, existe $R>0$ tal que exp_p es un difeomorfismo en la bola $B_R(0)\subset T_pM$ sobre un subconjunto abierto de M. □

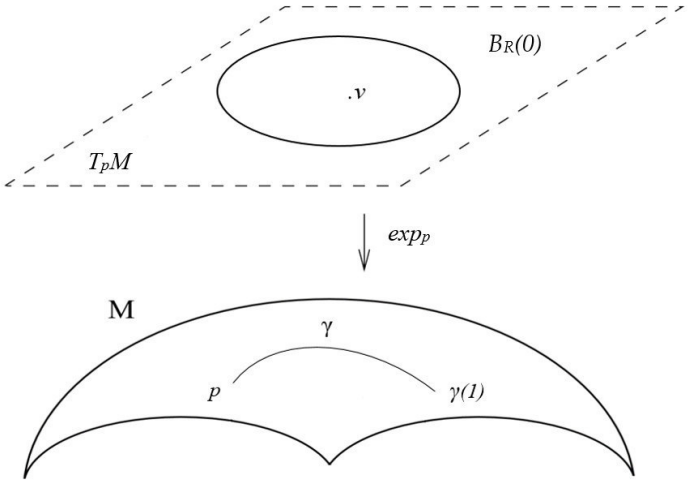


Figura 1.5: La aplicación exponencial.

Definición 1.3.8. *Si exp_p es un difeomorfismo de una vecindad U del origen de T_pM sobre una vecindad V de p en M, decimos que V es una vecindad normal de p. En el caso que $\overline{B_R(0)} \subset U$, llamamos $exp_p(B_R(0)) = B_R(p)$ la bola normal de centro p y radio R.*

La siguiente proposición muestra que las geodésicas minimizan distancias localmente:

Proposición 1.3.9. *Sean M una variedad Riemanniana, $p \in M$ y $B(p)$ una bola normal centrada en p. Sea $\gamma : [0,1] \to B(p)$ un segmento de geodésica con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Si $\alpha : [0,1] \to M$ es cualquier curva suave por partes que conecta los puntos p y q, entonces $l(\gamma) \leq l(\alpha)$. En el caso que $l(\gamma) = l(\alpha)$, entonces necesariamente $\gamma([0,1]) = \alpha([0,1])$.*

Enfatizamos el hecho que este resultado vale apenas localmente, esto es, un segmento de geodésica suficientemente grande puede no ser minimizante. Un claro ejemplo de eso se observa en las geodésicas de la esfera que parten de un punto p, ellas dejan de ser minimizantes después de pasar por la antípoda de p. Recíprocamente, la siguiente proposición muestra que si una curva suave por partes minimiza distancia, entonces es una geodésica.

Proposición 1.3.10. *Si una curva suave por partes $\alpha : [0,1] \to M$, con parámetro proporcional a longitud de arco, tiene longitud menor o igual a la longitud de cualquier curva suave por partes que conecta $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$, entonces α es una geodésica.*

Es posible definir una distancia en una variedad Riemanniana conexa M de la siguiente manera: Dados un par de puntos $p, q \in M$, definimos

$$d(p,q) = \text{ínf}\left\{l(\alpha) : \alpha \text{ es una curva suave por partes que conecta } p \text{ y } q\right\}.$$

La proposición 1.3.10 permite mostrar que (M, d) es un espacio métrico y que la topología inducida por la métrica d en M coincide con la topología inicial de M.

Definición 1.3.11. *Decimos que una variedad Riemanniana M es geodésicamente completa, o simplemente completa, si para todo $p \in M$ las geodésicas $\gamma(t)$ partiendo de p están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.*

El siguiente teorema ofrece un criterio simple para determinar cuándo una variedad Riemanniana es geodésicamente completa.

Teorema 1.3.12 (Hopf-Rinow)**.** *Sean M una variedad Riemanniana conexa y $p \in M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. exp_p está definida en todo T_pM.

ii. (M, d) es un espacio métrico completo.

iii. M es geodésicamente completa.

iv. Los subconjuntos cerrados y limitados de M son compactos.

Además, cada una de las afirmaciones de arriba implica que para todo $p, q \in M$ existe una geodésica minimizante que conecta p y q.

1.4. Curvatura

En esta sección presentamos la noción de curvatura, curvatura seccional y curvatura de Ricci de una variedad Riemanniana. Estas nociones generalizan el concepto de curvatura Gaussiana, el cual juega un papel fundamental en la geometría diferencial de superficies.

Definición 1.4.1. *La curvatura R de una variedad Riemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, una aplicación $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ tal que*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

donde $[X, Y] = XY - YX$.

Si consideramos $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual obtenemos $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos pensar en R como una manera de medir cuánto M deja de ser euclidiana. Se consigue mostrar que las variedades con $R = 0$ son aquellas variedades que son localmente isométricas a $\mathbb{R}^n$.

Denotemos por $\mathcal{D}(M)$ el conjunto de las funciones diferenciables definidas en M y con valores en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.4.2. *R tiene las siguientes propiedades:*

i. R es bilineal en $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, esto es,

$$R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z),$$
$$R(X, fY + gZ) = fR(X, Y) + gR(X, Z)$$

para todo $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

ii. Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, el operador curvatura $R(X, Y)$ es lineal, esto es,

$$R(X, Y)(fZ + W) = fR(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

para todo $f \in \mathcal{D}(M)$.

iii. Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, R es antisimétrico, esto es,

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z.$$

iv. Para todo $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ se tiene

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y, X)Z, W\rangle,$$
$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(X, Y)W, Z\rangle,$$
$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle.$$

Definición 1.4.3. *Sean M una variedad Riemanniana y σ un subespacio bidimensional de T_pM. La curvatura seccional de M asociado a σ se define como*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

donde $X, Y \in T_pM$ son cualquier par de vectores que forman una base para σ.

Claramente, la curvatura determina la curvatura seccional. Recíprocamente, el conocimiento de $K(\sigma)$, para todo σ, determina completamente la curvatura R.

Proposición 1.4.4. *Si R_1 y R_2 son dos aplicaciones tri-lineales en un espacio vectorial V que satisfacen las propriedades listadas en la proposición 1.4.2 y también*

$$K_1(X, Y) = K_2(X, Y)$$

para todos los vectores linealmente independientes $X, Y \in V$, entonces $R_1 = R_2$.

Decimos que una variedad M tiene curvatura seccional constante si la curvatura seccional de todos los planos tangentes en todos los pontos son iguales. El siguiente lema muestra que en el caso de curvatura seccional constante, la curvatura está determinada por la curvatura seccional.

Lema 1.4.5. *Si M tiene curvatura seccional constante igual a K, entonces*

$$R(X,Y)Z = K(\langle X,Z\rangle\, Y - \langle Y,Z\rangle\, X).$$

Ejemplo 1.4.6. *El espacio $\mathbb{R}^n$ tiene curvatura seccional constante $K = 0$. La esfera $\mathbb{S}^n$ tiene curvatura seccional constante $K = 1$. El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ tiene curvatura seccional constante $K = -1$.*

En el caso que $S \subset \mathbb{R}^3$ sea una superficie regular, la curvatura seccional de S coincide con la curvatura Gaussiana, la cual solo depende del punto de la superficie.

Definición 1.4.7. *Sea $v \in T_pM$ un vector unitario y consideremos $\{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\}$ una base ortonormal del hiperplano de T_pM ortogonal a v. La curvatura de Ricci en la dirección v se define como*

$$Ric_p(v) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \langle R(v,z_i)v, z_i\rangle\,.$$

En otras palabras, para cada vector unitario $v \in T_pM$, la curvatura de Ricci es la media de la suma de las curvaturas seccionales de los planos generados por v y los otros vectores de la base ortonormal. No es difícil mostrar que esta definición no depende de la elección de la base ortonormal.

1.5. Campos de Jacobi

En esta sección presentamos la ecuación de Jacobi, que es una EDO de segunda orden cuyas soluciones son campos vectoriales a lo largo de una geodésica $\gamma : I \to M$. Estos campos contienen información importante sobre la geometría de la variedad M y establecen una conexión entre los conceptos de geodésicas y curvatura, como veremos más adelante. Desde ahora, denotaremos la derivada covariante de un campo J como J'.

Definición 1.5.1. *Un campo vectorial J a lo largo de una geodésica γ es llamado campo de Jacobi si satisface la ecuación diferencial*

$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0. \tag{1.5}$$

La existencia y unicidad de soluciones de una EDO nos permite mostrar que los campos de Jacobi están determinados por sus condiciones iniciales:

Proposición 1.5.2. *Sea $\gamma : I \to M$ una geodésica. Dados $t_0 \in I$ y $V, W \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe un único campo de Jacobi a lo largo de γ tal que $J(t_0) = V$ y $J'(t_0) = W$.*

Demostración. Sean $\{E_1, \ldots, E_n\}$ campos vectoriales paralelos a lo largo de γ tales que, para cada $t \in I$, $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ es una base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M$. Podemos escribir el campo J como

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)E_i(t).$$

Entonces la ecuación de Jacobi (1.5) se expresa de la siguiente forma

$$\sum_{j=1}^{n} \left(f_j''(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) f_i(t) \right) E_j(t) = 0, \tag{1.6}$$

donde $a_{ij}(t) = \langle R(\gamma'(t), E_i(t))\gamma'(t), E_j(t)\rangle$. Tenemos que (1.6) define un sistema lineal de n-ecuaciones de segunda orden, las cuales, juntos con las condiciones iniciales permiten mostrar la existencia y unicidad del campo J. □

Como consecuencia de la proposición anterior, el conjunto de los campos de Jacobi a lo largo de la geodésica γ, la que denotaremos como $\mathcal{J}(\gamma)$, tiene una estructura de espacio vectorial de dimensión $2n$.

Ejemplo 1.5.3. *Sea $\gamma : I \to M$ una geodésica. Tenemos que $J_0(t) = \gamma'(t)$ y $J_1(t) = t\gamma'(t)$ son campos de Jacobi (llamados triviales).*

Debido a esto, al estimar el crecimiento en norma de un campo de Jacobi, el único caso interesante solo ocurre cuando J es un campo de Jacobi perpendicular a $\gamma(t)$.

Proposición 1.5.4. *Sea $J \in \mathcal{J}(\gamma)$. Si $\langle J(t_1), \gamma'(t_1)\rangle = \langle J(t_2), \gamma'(t_2)\rangle = 0$ para $t_1, t_2 \in I$ con $t_1 \neq t_2$, entonces $\langle J(t), \gamma'(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$.*

Demostración. Considere la función $f(t) = \langle J(t), \gamma'(t)\rangle$ definida en I. Como J es un campo de Jacobi, tenemos

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d}{dt}\langle J'(t), \gamma'(t)\rangle \\ &= \langle J''(t), \gamma'(t)\rangle \\ &= \langle -R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $f(t) = at+b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Como $f(t_1) = f(t_2) = 0$ concluimos que $f(t) = 0$ para todo $t \in I$. □

Por lo tanto, cualquier campo de Jacobi perpendicular a γ en dos puntos es un campo perpendicular a γ. Otros ejemplos de campos de Jacobi son los campos variacionales asociados a las variaciones por geodésicas.

Definición 1.5.5. *Sea $\gamma : [a, b] \to M$ una geodésica. Una variación de γ por geodésicas es una aplicación diferenciable*

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$$

tal que

i. $F(0, t) = \gamma(t)$.

ii. La curva $t \to F(s, t)$ es una geodésica para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Esta curva es llamada curva principal de la variación.

Para cada t fijo, la curva $s \to F(s, t)$ es llamada curva transversal de la variación.

Definición 1.5.6. *Sea F una variación por geodésicas. Un campo vectorial a lo largo de F es una aplicación diferenciable*

$$V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to TM$$

tal que $V(s, t) \in T_{F(s,t)}M$.

Fijando s_0, la aplicación $t \to F(s_0, t)$ define una curva en M y $\dfrac{dF}{dt}$ es un campo vectorial a lo largo de esta curva. Esto define $\dfrac{dF}{dt}$ para todo (s, t). Análogamente podemos definir $\dfrac{dF}{ds}$.

Sea V un campo vectorial a lo largo de F, podemos calcular la derivada covariante de V a lo largo de las curvas principales o a lo largo de las curvas transversales. Estos campos serán denotados como $\dfrac{DV}{dt}$ y $\dfrac{DV}{ds}$ respectivamente.

Definición 1.5.7. *Sea F una variación de γ por geodésicas. El campo variacional de F es el campo vectorial a lo largo de γ dado por*

$$V(t) = \frac{dF}{ds}(0, t).$$

Ejemplo 1.5.8. *Consideremos la geodésica dada por la función exponencial* $\gamma(t) = exp_p(tv)$*, para* $t \in [0,1]$*. Sea* $w \in T_v(T_pM)$*, entonces existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $exp_p(u)$ *está definida para todo* $u = tv(s)$ *con* $0 \leq t \leq 1$ *y* $-\varepsilon < s < \varepsilon$*, donde* $v(s)$ *es una curva en* T_pM *con* $v(0) = v$ *y* $v'(0) = w$*. Entonces*

$$\begin{aligned} F :(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] &\to M \\ (s,t) &\to exp_p(tv(s)) \end{aligned}$$

es una variación de γ *por geodésicas y el campo variacional está dado por*

$$V(t) = \frac{dF}{ds}(0,t) = d_{tv}(exp_p)(tw).$$

Por otro lado, como las curvas $t \to F(s,t)$ *son geodésicas, tenemos que*

$$\frac{D}{dt}\frac{dF}{dt} = 0.$$

Con ayuda de los siguientes lemas vamos a probar que el campo variacional de una variación por geodésicas satisface la ecuación de Jacobi (1.5).

Lema 1.5.9 (Lema de simetría)**.** *Sea* $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ *una variación por geodésicas. Entonces*

$$\frac{D}{ds}\frac{dF}{dt} = \frac{D}{dt}\frac{dF}{ds}.$$

Lema 1.5.10. *Sea* $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ *una variación por geodésicas y* V *un campo vectorial a lo largo de* F*. Entonces*

$$\frac{D}{dt}\frac{DV}{ds} - \frac{D}{ds}\frac{DV}{dt} = R\left(\frac{dF}{ds}, \frac{dF}{dt}\right)V.$$

De los lema 1.5.9 y 1.5.10 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D}{ds}\left(\frac{D}{dt}\frac{dF}{dt}\right) &= \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{dF}{dt} - R\left(\frac{dF}{ds}, \frac{dF}{dt}\right)\frac{dF}{dt} \\ &= \frac{D}{dt}\frac{D}{dt}\frac{dF}{ds} + R\left(\frac{dF}{dt}, \frac{dF}{ds}\right)\frac{dF}{dt}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $V(t)$ es el campo variacional de una variación de γ por geodésicas, entonces es um campo de Jacobi. Recíprocamente:

Teorema 1.5.11. *Los campos de Jacobi a lo largo de una geodésica* γ *pueden ser obtenidos a través de variaciones de* γ *por geodésicas.*

La siguiente proposición es una propriedad de los campos de Jacobi que será usada en los próximos capítulos.

Proposición 1.5.12. *Sea J un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica $\gamma : [0, a] \to M$. Entonces,*

$$\langle J(t), \gamma'(t)\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle t + \langle J(0), \gamma'(0)\rangle, \qquad \forall t \in [0, a].$$

Demostración. Definimos la función $f(t) = \langle J(t), \gamma'(t)\rangle$, donde $t \in [0, a]$. Sabemos que

$$\langle J'(t), \gamma'(t)\rangle' = 0,$$

entonces $\langle J'(t), \gamma'(t)\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle$. Además, derivando f tenemos

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\langle J(t), \gamma'(t)\rangle = \langle J'(t), \gamma'(t)\rangle + \langle J(t), \gamma''(t)\rangle = \langle J'(t), \gamma'(t)\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle .$$

Integrando esta última igualdad de 0 hasta t, obtenemos

$$f(t) - f(0) = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle\, t.$$

Por lo tanto, $\langle J(t), \gamma'(t)\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle t + \langle J(0), \gamma'(0)\rangle$ para todo $t \in [0, a]$. □

Si la variedad Riemanniana M tiene curvatura seccional constante, existe una fórmula explícita para los campos de Jacobi: Lo podemos expresar como un múltiplo escalar de un campo vectorial paralelo. Para cada $c \in \mathbb{R}$, definamos una función $s_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$s_c(t) = \begin{cases} t, & \text{si} \quad c = 0; \\ R\sin(t/R), & \text{si} \quad c = 1/R^2 > 0; \\ R\sinh(t/R), & \text{si} \quad c = -1/R^2 < 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Proposición 1.5.13 (Campos de Jacobi en curvatura constante)**.** *Sean M una variedad Riemanniana de curvatura seccional constante c y γ una geodésica unitaria en M. Los campos de Jacobi perpendiculares a γ que se anulan en $t = 0$ son de la forma*

$$J(t) = d \cdot s_c(t) \cdot E(t),$$

donde E es un campo vectorial paralelo perpendicular unitario a lo largo de γ, d es una constante y s_c es la función definida en (1.7)*.*

El siguiente teorema establece que, debido a que los campos de Jacobi describen el comportamiento de familias de geodésicas, una cota superior en la curvatura implica que los campos de Jacobi deben ser al menos tan grandes como sus contrapartes en curvatura constante, mientras que una cota inferior en la curvatura implica que no pueden ser más grandes.

Teorema 1.5.14 (Comparación de Rauch)**.** *Sean $\gamma : [0, b] \to M$ un segmento de geodésica unitaria y J un campo de Jacobi perpendicular a γ tal que $J(0) = 0$. Para cada $c \in \mathbb{R}$, sea s_c la función definida en* (1.7)*.*

i. Si la curvatura seccional de M está limitada superiormente por una constante c, entonces

$$\|J(t)\| \geq s_c(t)\,\|J'(0)\|$$

para todo $t \in [0, b_1]$, donde $b_1 = b$ si $c \leq 0$ y $b_1 = \min\{b, \pi R\}$ si $c = 1/R^2 > 0$.

ii. Si la curvatura seccional de M está limitada inferiormente por una constante c, entonces

$$\|J(t)\| \leq s_c(t)\,\|J'(0)\|$$

para todo $t \in [0, b_2]$, donde b_2 es escogido tal que $\gamma(b_2)$ es el primer punto conjugado a $\gamma(0)$ a lo largo de γ si es que existe, en otro caso $b_2 = b$.

Existe una versión más general del teorema de comparación de Rauch que compara la curvatura de una variedad Riemanniana con la curvatura de sus subvariedades inmersas. Para más detalles, ver (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992).

Capítulo 2

Caracterización de los Flujos Geodésicos

En este capítulo, vamos a estudiar una métrica Riemanniana en el fibrado tangente TM, llamada *métrica de Sasaki*, que se define a partir de la métrica Riemanniana de M. También introducimos el concepto fundamental de flujo geodésico junto con sus propiedades y mostraremos la relación que existe entre la diferencial del flujo geodésico y los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas. A partir de ahora, vamos a considerar variedades Riemannianas completas, conexas, sin borde y de dimensión $n \geq 2$. Las referencias para este capítulo son (Paternain, 1999), (Burns y Gidea, 2005) y (Da Silva Filho, 2012).

2.1. La métrica de Sasaki

La métrica de Sasaki, inicialmente propuesta por Sasaki y desarrollada posteriormente por Dombrowski, se define en el fibrado tangente TM mediante la descomposición de $T(TM)$ como suma de dos subfibrados de igual dimensión. Estos subfibrados van a desempeñar un papel semejante al de los ejes coordenados en el plano cartesiano.

Considere la proyección canónica $\pi : TM \to M$, es decir, la aplicación diferenciable que transforma $\theta = (x, v) \in TM$ en el punto $\pi(\theta) = x \in M$.

Definición 2.1.1. *Sea $\theta = (x, v) \in TM$. El subespacio vertical $V(\theta)$ es el subespacio de $T_\theta TM$ cuyos elementos son vectores tangentes a las curvas*

$$\begin{aligned} \sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) &\to \quad TM \\ t \quad &\to (x, v + tw) \end{aligned}$$

en $t = 0$, donde $w \in T_xM$. En otras palabras,

$$V(\theta) := \ker(d_\theta \pi) = \{\xi \in T_\theta TM : d_\theta \pi(\xi) = 0\}.$$

Para definir el subespacio horizontal $H(\theta)$, necesitamos introducir la aplicación conexión K_θ inducida por la conexión de Levi-Civita en M.

Definición 2.1.2. *Sean $\theta \in TM$ y $\xi \in T_\theta TM$. Decimos que una curva suave $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ es adaptada a θ y ξ si satisface las condiciones iniciales*

$$z(0) = \theta \quad y \quad z'(0) = \xi.$$

Definición 2.1.3. *Sea $\theta = (x, v) \in TM$. Definimos la aplicación conexión*

$$K_\theta : T_\theta TM \to T_xM$$

de la siguiente forma. Sean $\xi \in T_\theta TM$ y $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ una curva adaptada a θ y ξ. Como $\pi \circ z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es una curva en M, podemos escribir $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$, donde Z es un campo vectorial a lo largo de α. Definimos:

$$K_\theta(\xi) := \nabla_{\alpha'} Z(0).$$

Lema 2.1.4. *K_θ tiene las siguientes propiedades:*

1. *K_θ está bien definida, es decir, no depende de la curva adaptada.*
2. *K_θ es lineal.*

Demostración. Ver (Da Silva Filho, 2012). □

El lema anterior nos permite definir el subespacio horizontal en θ como

$$H(\theta) := \ker(K_\theta) = \{\xi \in T_\theta TM : K_\theta(\xi) = 0\}.$$

Otra manera equivalente de construir el subespacio horizontal es a través de los levantamientos horizontales.

Definición 2.1.5. *Sea $\theta = (x, v) \in TM$. El levantamiento horizontal*

$$L_\theta : T_xM \to T_\theta TM$$

se define de la siguiente forma. Sean $v' \in T_xM$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una curva adaptada a x y v'. Sean $Z(t)$ el transporte paralelo de v a lo largo de α y $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ la curva dada por $\sigma(t) = (\alpha(t), Z(t))$. Entonces definimos

$$L_\theta(v') := \sigma'(0) \in T_\theta TM.$$

Sigue inmediatamente de la definición que $K_\theta(L_\theta(v')) = 0$, pues Z es un campo paralelo a lo largo de α.

Lema 2.1.6. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *L_θ está bien definida, esto es, no depende de la curva adaptada.*
2. *L_θ es lineal.*
3. $\ker(K_\theta) = \operatorname{im}(L_\theta)$ *y* $d_\theta\pi \circ L_\theta = Id_{T_xM}$.
4. *Las aplicaciones* $d_\theta\pi|_{H(\theta)} : H(\theta) \to T_xM$ *y* $K_\theta|_{V(\theta)} : V(\theta) \to T_xM$ *son isomorfismos lineales.*

Demostración. Ver (Da Silva Filho, 2012). □

Como el único vector $\xi \in H(\theta) \cap V(\theta)$ es el vector cero y $\dim H(\theta) + \dim V(\theta) = \dim T_\theta TM$, entonces del lema 2.1.6 concluimos que $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$ y que la aplicación

$$\begin{aligned} j_\theta : T_\theta TM &\to T_xM \times T_xM \\ \xi &\to (d_\theta\pi(\xi), K_\theta(\xi)) \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal. En efecto, como cada componente es lineal entonces j_θ es lineal. Si $j_\theta(\xi) = 0$ entonces $\xi \in H(\theta) \cap V(\theta) = \{0\}$ mostrando que j_θ es inyectiva. Finalmente, como $\dim T_\theta TM = \dim(T_xM \times T_xM)$ entonces j_θ es un isomorfismo. Por lo tanto, toda vez que escribamos $\xi = (\xi_h, \xi_v)$ significará que identificamos ξ con $j_\theta(\xi)$.

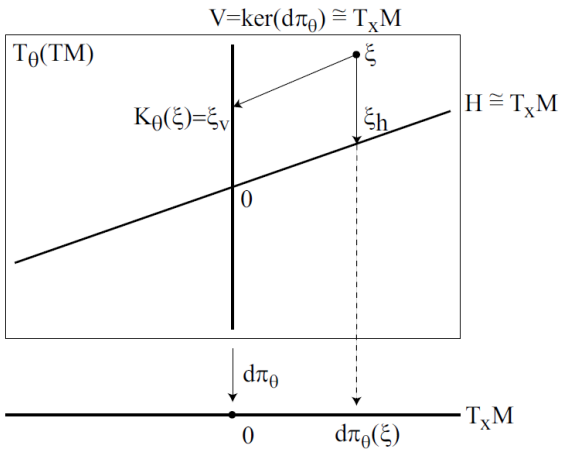


Figura 2.1: Subespacios horizontal y vertical de $T_\theta TM$.

Definición 2.1.7. *Usando la descomposición $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$, dotamos al fibrado tangente TM con una métrica Riemanniana especial que hace que los subespacios $H(\theta)$ y $V(\theta)$ sean ortogonales. Esta métrica es llamada la métrica de Sasaki y se define como*

$$\langle \xi, \eta \rangle_\theta := \langle d_\theta \pi(\xi), d_\theta \pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)}, \qquad \forall\, \xi, \eta \in T_\theta TM.$$

De la misma manera, podemos dotar a TM de otras estructuras más complejas. Para ello, vamos a recordar lo que es una forma simpléctica.

Definición 2.1.8. *Sea M una variedad diferenciable. Una 2-forma ω es llamada simpléctica si:*

i. ω es cerrada, esto es, $d\omega = 0$.

ii. ω es no degenerada, es decir, si $\omega_p(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_pM$ entonces $X = 0$.

El par (M, ω) es llamado variedad simpléctica.

Sigue de la definición que la existencia de una forma simpléctica en una variedad diferenciable M implica que ésta debe tener dimensión par.
Podemos dar a TM una estructura de variedad simpléctica con la 2-forma simpléctica

$$\omega_\theta(\xi, \eta) : = \langle d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} - \langle K_\theta(\xi), d_\theta \pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)}, \qquad \forall\, \xi, \eta \in T_\theta TM.$$

Definición 2.1.9. *Sea (V, Ω) un espacio vectorial simpléctico con $\dim V = 2n$. Un subespacio $E \subset V$ es llamado Lagrangiano si $\dim E = n$ y la forma simpléctica satisface $\Omega|_{E \times E} = 0$. Una subvariedad P de una variedad simpléctica es llamada Lagrangiana si el espacio tangente T_xP es un subespacio Lagrangiano para todo $x \in P$.*

Considerando la variedad simpléctica (TM, ω), concluimos que $H(\theta)$ y $V(\theta)$ son subespacios Lagrangianos.

2.2. El flujo geodésico

Un flujo geodésico es, en pocas palabras, un flujo en el fibrado tangente de la variedad M generado por un campo vectorial llamado el *campo geodésico*. La proyección natural $\pi : TM \to M$ de una órbita del flujo geodésico es una geodésica.

Sea M una variedad Riemanniana completa y sea $\gamma_{(x,v)}(t)$ la única geodésica con condiciones iniciales $\gamma_{(x,v)}(0) = x$ y $\gamma'_{(x,v)}(0) = v$.

Definición 2.2.1. *El flujo geodésico de M es una familia de difeomorfismos*

$$\begin{aligned} \phi^t : \quad TM \quad &\to \quad TM \\ (x,v) \quad &\to (\gamma_{(x,v)}(t), \gamma'_{(x,v)}(t)) \end{aligned}$$

donde $t \in \mathbb{R}$.

Geométricamente, el flujo geodésico coge un vector tangente de una geodésica y lo transporta una distancia t a lo largo de esa geodésica. El hecho de que el flujo geodésico actúe sobre el fibrado tangente TM y no sobre M implica que sus órbitas son campos vectoriales a lo largo de las geodésicas y no solo son geodésicas. Después de todo, las geodésicas pueden cruzarse entre sí, pero las órbitas nunca lo hacen.

Observación 2.2.2. *La familia de difeomorfismos $\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un flujo, pues satisface las condiciones $\phi^0 \equiv Id$ y $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$. En efecto, claramente $\phi^0 \equiv Id$. Sea $\theta = (x,v) \in TM$, entonces*

$$\phi^t \circ \phi^s(\theta) = \phi^t((\gamma_{(x,v)}(s), \gamma'_{(x,v)}(s))).$$

A la imagen de $(\gamma_{(x,v)}(s), \gamma'_{(x,v)}(s))$ por la aplicación ϕ^t, se le asocia la única geodésica que, en el tiempo $t = 0$, pasa por el ponto $\gamma_{(x,v)}(s)$ y con velocidad $\gamma'_{(x,v)}(s)$. Por unicidad, esta geodésica coincide con $\gamma_{(x,v)}(t+s)$, esto es, $\phi^t \circ \phi^s(\theta) = \phi^{t+s}(\theta)$.

Definición 2.2.3. *El campo vectorial geodésico $G : TM \to TTM$ se define como*

$$G(\theta) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi^t(\theta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t)).$$

En otras palabras, G es el campo vectorial con trayectorias de la forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$, donde γ es una geodésica en M.

El campo vectorial geodésico tiene una expresión simple en términos de la identificación j_θ. En efecto, como $\gamma'_\theta(t)$ es el transporte paralelo de v, entonces $G(\theta) = L_\theta(v)$. Por lo tanto, por el lema 2.1.6 y la identificación j_θ tenemos

$$G(\theta) = L_\theta(v) = (d_\theta\pi(L_\theta(v)), K_\theta(L_\theta(v))) = (v, 0).$$

Denotemos por SM el fibrado tangente unitario de M, esto es,

$$SM = \{(x,v) \in TM : \|v\| = 1\}.$$

Como las geodésicas viajan con velocidad constante, para $(x,v) \in SM$ tenemos que

$$\|\gamma'_{(x,v)}(t)\| = \|\gamma'_{(x,v)}(0)\| = \|v\| = 1,$$

entonces $\phi^t(x,v) \in SM$. Por lo tanto SM es invariante por el flujo geodésico ϕ^t.

Definición 2.2.4. *Sea $\theta = (x, v) \in TM$. Definimos una 1-forma α en TM como*

$$\alpha_\theta(\xi) := \langle \xi, G(\theta) \rangle_\theta = \langle d_\theta \pi(\xi), v \rangle_x.$$

Podemos ver que $V(\theta) \subset \ker(\alpha_\theta)$. La 2-forma simpléctica ω se relaciona con la 1-forma α de la siguiente manera:

$$\omega = -d\alpha.$$

Para $\theta \in SM$, denotemos por $S(\theta) = \ker(\alpha_\theta)$. Entonces $S(\theta)$ es el complemento ortogonal del subespacio de dimensión uno generado por $G(\theta)$ en relación a la métrica de Sasaki. La siguiente proposición, probada en (Eberlein, 1973), caracteriza los elementos de $T_\theta SM$.

Proposición 2.2.5. *Sea $\theta = (x, v) \in TM$. Entonces,*

i. $\xi \in T_\theta TM$ *pertenece a* $T_\theta SM$, *para* $\theta \in SM$, *si y solamente si* $\left\langle J'_\xi(t), \gamma'_\theta(t) \right\rangle = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

ii. $\langle \xi, G(\theta) \rangle = 0$ *para* $\theta \in SM$ *y* $\xi \in T_\theta SM$ *si y solamente si* $\langle J_\xi(t), \gamma'_\theta(t) \rangle = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

iii. $\langle d_\theta \phi^t(\xi), G(\phi^t(\theta)) \rangle = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *si* $\theta \in SM$ *y* $\xi \in T_\theta SM$ *satisfacen la condición* $\langle \xi, G(\theta) \rangle = 0$.

Consideremos el flujo geodésico restricto a SM y la proyección canónica $\pi : SM \to M$. La fibra $\pi^{-1}(p)$, para cada punto $p \in M$, es una esfera S^{n-1} de dimensión $n-1$, donde n es la dimensión de la variedad, esto es, vectores unitarios en el punto fijado $p \in M$. En el capítulo anterior, vimos que una métrica Riemanniana induce una forma de volumen en la variedad M. Entonces, se puede definir una forma de volumen en SM inducida por la métrica de Sasaki y por lo tanto dar origen a una medida definida en SM llamada la *medida de Liouville* y denotada por μ. En otras palabras, sea $B = (U, A) \subset SM$ un subconjunto medible, donde $U \subset M$ y A es la unión de esferas unitarias del espacio tangente T_xM con x variando en U, μ se define localmente como

$$\mu(B) = \int_U \int_{A_x} dS^{n-1} dvol(x),$$

donde dS^{n-1} es la medida de Lebesgue en la esfera unitaria. Cuando la variedad M tiene volumen finito, la medida de Liouville es finita y por lo tanto, puede ser normalizada.

Teorema 2.2.6. *La medida de Liouville es invariante por el flujo geodésico en SM.*

Demostración. Ver (Paternain, 1999). □

Con este resultado, podemos hacer uso de uno de los teoremas importantes en la teoría ergódica.

Teorema 2.2.7 (Teorema de Birkhoff)**.** *Sea $f \in L^1(\mu)$, donde μ es la medida de probabilidad de Liouville invariante por el flujo geodésico ϕ^t. Entonces el limite*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\phi^s(\theta))d\mu = g(\theta)$$

existe para μ-casi todo punto θ, $g \circ \phi^t = g$ μ-casi siempre, g es integrable y

$$\int_{SM} f d\mu = \int_{SM} g d\mu.$$

Anosov en (Anosov, 1967) mostró que el flujo geodésico en el fibrado tangente unitario de una variedad compacta con curvatura seccional negativa es ergódico con la medida de Liouville y que las órbitas periódicas son densas.

2.3. La diferencial del flujo geodésico

En esta sección, vamos a obtener una fórmula conveniente de la diferencial del flujo $d_\theta\phi^t$ a partir de la geometría de $T_\theta TM$ y los campos de Jacobi a lo largo de la geodésica γ_θ.

Sean $\xi \in T_\theta TM$ y $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ una curva adaptada a θ y ξ, con $z(s) = (c(s), Z(s))$. Entonces la función $F(s,t) = \pi \circ \phi^t(z(s))$ es una variación de la geodésica $\pi \circ \phi^t(\theta) = \gamma_\theta$ y por lo visto en el capítulo anterior, su campo variacional

$$J_\xi(t) := \frac{dF}{ds}(0,t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) = d_{\phi^t(\theta)}\pi \circ d_\theta\phi^t(\xi)$$

es un campo de Jacobi a lo largo de γ_θ con valores iniciales dados por

$$\begin{aligned}
J_\xi(0) &= d_\theta\pi(\xi), \\
J'_\xi(0) &= \left.\frac{D}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\
&= \left.\frac{D}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\
&= \left.\frac{D}{ds}\right|_{s=0} Z(s) \\
&= \nabla_{\alpha'} Z(0) \\
&= K_\theta(\xi).
\end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{J}(\gamma_\theta)$ al espacio vectorial de los campos de Jacobi a lo largo de γ_θ. Como los campos de Jacobi son soluciones de ecuaciones diferenciales de segunda orden, $\mathcal{J}(\gamma_\theta)$ tiene dimensión $2n$, esto es, coincide con la dimensión de $T_\theta TM$. Sigue de la proposición 1.5.2 que la aplicación

$$\begin{aligned} i_\theta : T_\theta TM &\to J(\gamma_\theta) \\ \xi &\to J_\xi \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal. Por otro lado, si restringimos la aplicación i_θ para el subespacio $S(\theta)$, con $\theta = (x, v) \in SM$, obtenemos un isomorfismo entre $S(\theta)$ y todos los campos de Jacobi perpendiculares a γ_θ. En efecto, sabemos que

$$\begin{aligned} \xi \in S(\theta) &\Leftrightarrow \xi \in T_\theta SM \text{ y } \langle d_\theta\pi(\xi), v\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle K_\theta(\xi), v\rangle = 0 \text{ y } \langle d_\theta\pi(\xi), v\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow J'_\xi(0) \perp \gamma'_\theta(0) \text{ y } J_\xi(0) \perp \gamma'_\theta(0). \end{aligned}$$

Sigue de la proposición 1.5.12 que $\xi \in S(\theta)$ si y solamente si J_ξ es un campo de Jacobi perpendicular a γ_θ.
El siguiente resultado describe la diferencial del flujo geodésico

$$d_\theta\phi^t : T_\theta TM \to T_{\phi^t(\theta)}TM$$

en función de los campos de Jacobi y la descomposición de $T(TM)$ en los fibrados horizontal y vertical. En otras palabras, muestra que el comportamiento de la diferencial del flujo geodésico está determinado por el comportamiento de los campos de Jacobi, y por lo tanto, por la curvatura seccional de M.

Teorema 2.3.1. *Sean $\theta \in TM$, $\xi = (\xi_h, \xi_v) \in T_\theta TM$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$d_\theta\phi^t(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t)),$$

donde J_ξ es el único campo de Jacobi a lo largo de γ_θ tal que $J_\xi(0) = \xi_h$ y $J'_\xi(0) = \xi_v$.

Demostración. Ya mostramos que $J_\xi(t) = d_{\phi^t(\theta)}\pi(d_\theta\phi^t(\xi))$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} J'_\xi(t) &= \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \frac{D}{ds}\bigg|_{s=0} \frac{d}{dt}\pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \frac{D}{ds}\bigg|_{s=0} \phi^t(z(s)) \\ &= K_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi)). \end{aligned}$$

Usando la identificación $j_\theta(\xi) = (d_\theta\pi(\xi), K_\theta(\xi))$ obtenemos que

$$\begin{aligned} d_\theta\phi^t(\xi) &= (d_{\phi^t(\theta)}\pi(d_\theta\phi^t(\xi)), K_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi))) \\ &= (J_\xi(t), J'_\xi(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d_\theta\phi^t(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t))$. □

Este teorema es muy importante pues relaciona la geometría de M y el comportamiento de la dinámica de su flujo geodésico. Como aplicación de este teorema, vamos a mostrar los siguientes resultados.

Corolario 2.3.2. *La 1-forma α restricta a SM es invariante por el flujo geodésico ϕ^t.*

Demostración. Sea $\xi \in T_\theta SM$, donde $\theta \in SM$. Por el teorema 2.3.1 tenemos que

$$\alpha_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi)) = \langle J_\xi(t), \gamma'_\theta(t)\rangle .$$

Considere la función $f(t) = \langle J_\xi(t), \gamma'_\theta(t)\rangle$. Sigue de la proposición 2.2.5 que $f'(t) = 0$ y por lo tanto f es una función constante. En particular,

$$\alpha_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi)) = f(t) = f(0) = \alpha_\theta(\xi),$$

mostrando que α es invariante por el flujo geodésico ϕ^t. □

Como consecuencia de este corolario tenemos que $S(\theta)$ es invariante por el flujo geodésico, esto es, $d_\theta\phi^t(S(\theta)) = S(\phi^t(\theta))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Corolario 2.3.3. *La forma simpléctica ω es invariante por el flujo geodésico ϕ^t.*

Demostración. Sean $\xi, \eta \in T_\theta TM$. Por el teorema 2.3.1 tenemos que

$$\omega_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi), d_\theta\phi^t(\eta)) = \left\langle J_\xi(t), J'_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J'_\xi(t), J_\eta(t)\right\rangle .$$

Considere la función $f(t) = \left\langle J_\xi(t), J'_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J'_\xi(t), J_\eta(t)\right\rangle$. Derivando en relación a t y por las propiedades de la curvatura tenemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left\langle J'_\xi(t), J'_\eta(t)\right\rangle + \left\langle J_\xi(t), J''_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J''_\xi(t), J_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J'_\xi(t), J'_\eta(t)\right\rangle \\ &= \left\langle J_\xi(t), J''_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J''_\xi(t), J_\eta(t)\right\rangle \\ &= -\langle J_\xi(t), R(\gamma'_\theta, J_\eta(t))\gamma'_\theta(t)\rangle + \langle R(\gamma'_\theta, J_\xi(t))\gamma'_\theta(t), J_\eta(t)\rangle \\ &= -\langle R(\gamma'_\theta, J_\xi(t))\gamma'_\theta(t), J_\eta(t)\rangle + \langle R(\gamma'_\theta, J_\xi(t))\gamma'_\theta(t), J_\eta(t)\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, f es una función constante. En particular,

$$\omega_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi), d_\theta\phi^t(\eta)) = f(t) = f(0) = \langle \xi_h, \eta_v\rangle - \langle \xi_v, \eta_h\rangle = \omega_\theta(\xi, \eta),$$

mostrando que ω_θ es invariante por el flujo geodésico ϕ^t. □

Capítulo 3

Flujo geodésico Anosov y su relación con la geometría de la variedad

Durante la década de los 60, Steve Smale realizó una visita a la Unión Soviética, donde planteó diversas conjeturas relacionadas con los flujos geodésicos en variedades con curvatura negativa. Poco después, Dmitri Anosov demostró todas las conjeturas propuestas por Smale. Los resultados fundamentales de Anosov sobre los flujos geodésicos en variedades con curvatura seccional estrictamente negativa se encuentran en su artículo (Anosov, 1967), el cual continúa siendo objeto de estudio y admiración en la comunidad matemática.

3.1. Flujos geodésicos de tipo Anosov

Los tipos de flujos geodésicos que analizaremos en este trabajo son los flujos geodésicos de tipo Anosov, cuya definición se muestra a continuación. Las referencias para esta sección son (Paternain, 1999) y (Knieper, 2002).

Definición 3.1.1. *Sean M una variedad Riemanniana completa y SM su fibrado tangente unitario. Decimos que el flujo geodésico $\phi^t : SM \to SM$ es de tipo Anosov si $T(SM)$ se puede descomponer continuamente como $T(SM) = E^s \oplus \langle G \rangle \oplus E^u$ tales que*

$$\begin{aligned} d_\theta\phi^t(E^s(\theta)) &= E^s(\phi^t(\theta)) \\ d_\theta\phi^t(E^u(\theta)) &= E^u(\phi^t(\theta)) \\ \left\| d_\theta\phi^t|_{E^s(\theta)} \right\| &\leq C\lambda^t \\ \left\| d_\theta\phi^{-t}|_{E^u(\theta)} \right\| &\leq C\lambda^t \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ y todo $\theta \in SM$, con $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$. La constante λ es llamada una constante de contracción del flujo y G denota el campo vectorial geodésico. Los subespacios E^s y E^u son llamados el fibrado estable e inestable de $T(SM)$ respectivamente.

Ejemplo 3.1.2. *Anosov en (Anosov, 1967) mostró que toda variedad Riemanniana compacta con curvatura seccional negativa tiene flujo geodésico Anosov.*

El ejemplo anterior fue demostrado por primera vez por Hedlund en (Hedlund, 1932) para superficies de curvatura constante negativa. Años después, Hopf en (Hopf, 1940) extendió este resultado para superficies compactas de curvatura negativa. Usando el teorema de comparación de Rauch se consigue probar lo siguiente:

Ejemplo 3.1.3. *Si la variedad Riemanniana M es completa y la curvatura seccional satisface la condición $-a^2 \geq K_M \geq -b^2$ para constantes $b \geq a > 0$, entonces el flujo geodésico es de tipo Anosov (ver (Knieper, 2002)).*

De los ejemplos anteriores, ¿será que la curvatura negativa es una condición necesaria para que un flujo geodésico sea Anosov? Por varios años se pensó que sí, hasta que:

- En 1973, Eberlein (ver (Eberlein, 1973)) construyó ejemplos de variedades compactas con curvatura no positiva cuyo flujo geodésico era Anosov y que poseían un subconjunto abierto donde la curvatura seccional era cero en todos los planos tangentes.
- En 2003, Donnay y Pugh (ver (Donnay y Pugh, 2003)) construyeron un ejemplo de una superficie compacta isométricamente inmersa en $\mathbb{R}^3$ tal que contenía puntos con curvatura positiva y cuyo flujo geodésico era Anosov.

Estos ejemplos muestran que todos los signos de la curvatura pueden aparecer en una variedad y, a pesar de ello, el flujo geodésico ser Anosov.

El siguiente resultado muestra que si el flujo geodésico es Anosov, entonces los subespacios estable e inestable tienen la misma dimensión en todo punto.

Proposición 3.1.4. *Si el flujo geodésico es Anosov, entonces para cada $\theta \in SM$, los subespacios $E^s(\theta), E^u(\theta)$ son Lagrangianos y $E^s(\theta) \oplus E^u(\theta) = S(\theta)$.*

Demostración. Vamos a mostrar que $E^s(\theta) \subset S(\theta)$, la prueba para el caso inestable es análoga. Sea $\xi \in E^s(\theta)$, sabemos que la 1-forma de contacto α es invariante por el flujo geodésico, esto es,

$$\alpha_\theta(\xi) = \alpha_{\phi^t(\theta)}(d_\theta \phi^t(\xi)).$$

Por otro lado, como $\xi \in E^s(\theta)$, por la definición de flujo geodésico Anosov tenemos que $\|d_\theta\phi^t(\xi)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|\alpha_\theta(\xi)| &= \left|\left\langle d_\theta\phi^t(\xi), G(\phi^t(\theta))\right\rangle\right| \\ &\leq \left\|d_\theta\phi^t(\xi)\right\| \cdot \left\|G(\phi^t(\theta))\right\|.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $t \to +\infty$ tenemos que $\alpha_\theta(\xi) = 0$, esto es, $\xi \in S(\theta)$. Como $E^s(\theta) \oplus E^u(\theta)$ y $S(\theta)$ son subespacios con la misma dimensión, concluimos que $E^s(\theta) \oplus E^u(\theta) = S(\theta)$. Para mostrar que $E^s(\theta)$ es Lagrangiano, considere $\xi, \eta \in E^s(\theta)$. Sabemos que la 2-forma simpléctica ω es invariante por el flujo geodésico, esto es,

$$\omega_\theta(\xi, \eta) = \omega_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi), d_\theta\phi^t(\eta)). \tag{3.1}$$

Como $\xi, \eta \in E^s(\theta)$, por la definición de flujo geodésico Anosov tenemos que $\|d_\theta\phi^t(\xi)\| \to 0$ y $\|d_\theta\phi^t(\eta)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Entonces, tomando limite cuando $t \to +\infty$ en (3.1) obtenemos que $\omega_\theta(\xi, \eta) = 0$ mostrando que $E^s(\theta)$ es Lagrangiano. De forma análoga se prueba que $E^u(\theta)$ es Lagrangiano. □

Para $\theta = (x, v) \in SM$, denotemos por $N(\theta) = \{w \in T_xM : \langle w, v\rangle_x = 0\}$. Por la identificación $\xi = (\xi_h, \xi_v)$ y la proposición 2.2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}\xi \in S(\theta) \quad &\Leftrightarrow \xi \in T_\theta SM \text{ y } \langle d_\theta\pi(\xi), v\rangle_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle K_\theta(\xi), v\rangle_x = 0 \text{ y } \langle d_\theta\pi(\xi), v\rangle_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi \in N(\theta) \times N(\theta). \\ \xi \in V(\theta) \cap S(\theta) &\Leftrightarrow \xi = (0, K_\theta(\xi)) \text{ y } \langle K_\theta(\xi), v\rangle_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi \in \{0\} \times N(\theta). \\ \xi \in H(\theta) \cap S(\theta) &\Leftrightarrow \xi = (d_\theta\pi(\xi), 0) \text{ y } \langle d_\theta\pi(\xi), v\rangle_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi \in N(\theta) \times \{0\}.\end{aligned}$$

Así, $S(\theta) = N(\theta) \times N(\theta)$, $V(\theta) \cap S(\theta) = N(\theta)$ y $H(\theta) \cap S(\theta) = N(\theta)$. Si $E \subset S(\theta)$ es un subespacio con $\dim E = \frac{1}{2}\dim S(\theta)$ y $E \cap (V(\theta) \cap S(\theta)) = \{0\}$, entonces existe una única aplicación lineal

$$T : H(\theta) \cap S(\theta) \to V(\theta) \cap S(\theta)$$

tal que E es el gráfico de T. En otras palabras, existe una única aplicación lineal $T : N(\theta) \to N(\theta)$ tal que $E = \{(v, Tv) : v \in N(\theta)\}$.

AFIRMACIÓN: La aplicación lineal T es simétrica si y solamente si E es Lagrangiano. En efecto, sean $\xi = (v, Tv), \eta = (w, Tw) \in E$. Tenemos que

$$E \text{ es Lagrangiano} \Leftrightarrow \omega|_{E\times E} = 0.$$

Desde que $\omega_\theta(\xi, \eta) = \langle v, Tw\rangle - \langle Tv, w\rangle$, obtenemos la equivalencia.

3.2. Variedades Riemannianas sin puntos conjugados

En esta sección, nos enfocaremos en analizar el comportamiento de los campos de Jacobi a lo largo de las geodésicas en variedades Riemannianas que no tienen puntos conjugados. Las referencias para esta sección son (Bolton, 1979) y (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992).

Definición 3.2.1. *Sea γ una geodésica en M. Los puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ son llamados puntos conjugados si existe un campo de Jacobi J a lo largo de γ, no idénticamente nulo, tal que $J(t_1) = J(t_2) = 0$.*

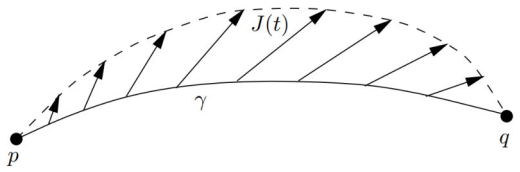


Figura 3.1: Puntos conjugados a lo largo de γ.

Ejemplo 3.2.2. *Los puntos antipodales en la esfera $\mathbb{S}^n$ son puntos conjugados.*

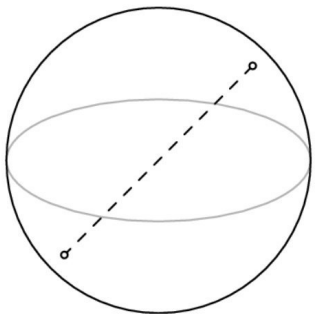


Figura 3.2: Puntos conjugados en $\mathbb{S}^2$.

Definición 3.2.3. *Una variedad Riemanniana M es una variedad sin puntos conjugados si toda geodésica de M no tiene puntos conjugados.*

La siguiente proposición nos permite encontrar campos de Jacobi que comienzan en un determinado lugar y se tornan 0 en un tiempo T en geodésicas sin puntos conjugados.

Proposición 3.2.4. *Sean $\gamma : [0, a] \to M$ una geodésica, $V \in T_{\gamma(0)}M$ y $W \in T_{\gamma(a)}M$. Si los puntos $\gamma(0)$ y $\gamma(a)$ no son conjugados entonces existe un único campo de Jacobi J a lo largo de γ tal que $J(0) = V$ y $J(a) = W$.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{J}_1$ al espacio de los campos de Jacobi J tal que $J(0) = 0$. Por el teorema de existencia y unicidad, la dimensión de $\mathcal{J}_1$ coincide con la dimensión de M. Definimos la siguiente aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \Theta: & \mathcal{J}_1 & \to & T_{\gamma(a)}M \\ & J & \to & J(a) \end{array}$$

Suponga que existen dos campos $J_1 \neq J_2$ en $\mathcal{J}_1$ tal que $\Theta(J_1) = \Theta(J_2)$, esto es, $J_1(a) = J_2(a)$. Tendríamos un campo de Jacobi $J_1 - J_2$, no idénticamente nulo, tal que

$$(J_1 - J_2)(0) = 0 = (J_1 - J_2)(a),$$

lo que contradice el hecho de que $\gamma(0)$ no es conjugado con $\gamma(a)$. Por lo tanto, la aplicación Θ es inyectiva y como $\dim \mathcal{J}_1 = \dim T_{\gamma(a)}M$, entonces Θ es un isomorfismo. Luego, existe un único campo de Jacobi $J_1 \in \mathcal{J}_1$ tal que $J_1(0) = 0$, $J_1(a) = W$.
Análogamente, considerando $\mathcal{J}_2$ el espacio de los campos de Jacobi J tal que $J(a) = 0$ y la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{J}_2 & \to & T_{\gamma(0)}M \\ & J & \to & J(0) \end{array}$$

obtenemos un único campo de Jacobi $J_2 \in \mathcal{J}_2$ tal que $J_2(a) = 0$, $J_2(0) = V$. Luego, el campo de Jacobi buscado está dado por $J = J_1 + J_2$ y es único. □

La ausencia de puntos conjugados en una geodésica permite construir campos de Jacobi perpendiculares. Más precisamente, sea γ una geodésica sin puntos conjugados y $V \in T_{\gamma(0)}M$ perpendicular a $\gamma'(0)$. Por la proposición 3.2.4 existe un único campo de Jacobi J_T tal que $J_T(0) = V$ y $J_T(T) = 0$. Desde que

$$\langle J_T(t), \gamma'(t)\rangle = \langle J_T'(0), \gamma'(0)\rangle t + \langle J_T(0), \gamma'(0)\rangle,$$

la función $f(t) = \langle J_T(t), \gamma'(t)\rangle$ tiene dos ceros en $t = 0$ y $t = T$. Por lo tanto, f es la función constante cero y $J_T(t)$ es perpendicular a $\gamma'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

El siguiente resultado ofrece una herramienta importante para dar ejemplos de variedades Riemannianas sin puntos conjugados.

Proposición 3.2.5. *Sea M una variedad Riemanniana con curvatura seccional no positiva, entonces M no tiene puntos conjugados.*

Demostración. Suponga que M tiene puntos conjugados, esto es, existe una geodésica γ, existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y un campo de Jacobi J a lo largo de γ, no idénticamente nulo, tal que $t_1 \neq t_2$ y $J(t_1) = J(t_2) = 0$. Definimos la función $f(t) = \|J(t)\|^2 \geq 0$ para $t \in [t_1, t_2]$, entonces

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \langle J(t), J(t) \rangle \\ &= \langle J'(t), J(t) \rangle + \langle J(t), J'(t) \rangle \\ &= 2 \langle J'(t), J(t) \rangle . \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2\frac{d}{dt} \langle J'(t), J(t) \rangle \\ &= 2 \langle J''(t), J(t) \rangle + 2 \langle J'(t), J'(t) \rangle \\ &= -2 \langle R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t), J(t) \rangle + 2\|J'(t)\|^2 \\ &= -2K(\gamma'(t), J(t)) \left(\|\gamma'(t)\|^2 \|J(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), J(t) \rangle^2 \right) + 2\|J'(t)\|^2. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $f''(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, esto es, f es una función convexa. Desde que $f(t_1) = f(t_2) = 0$ se tiene que $f(t) = 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, esto es, $J(t) = 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, M no tiene puntos conjugados. □

Observación 3.2.6. *Es importante resaltar que el recíproco de la proposición 3.2.5 no es verdadero, ni para superficies compactas (para más detalles ver (Ballmann, Brin, y Burns, 1987)).*

En los ejemplos de la sección 3.1 vimos algunas condiciones geométricas que necesitaba una variedad para tener flujo geodésico Anosov. En la dirección opuesta, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Qué condiciones geométricas nos puede ofrecer un flujo geodésico Anosov? Una respuesta satisfactoria fue dada por Klingenberg (ver (Klingenberg, 1974)), quien mostró que una variedad Riemanniana compacta con flujo geodésico Anosov no tiene puntos conjugados. Años después, Mañé (ver (Mañé, 1987)) generalizó ese resultado, mostrando que si M es una variedad Riemanniana completa de volumen finito y con flujo geodésico Anosov entonces M no tiene puntos conjugados. En el caso

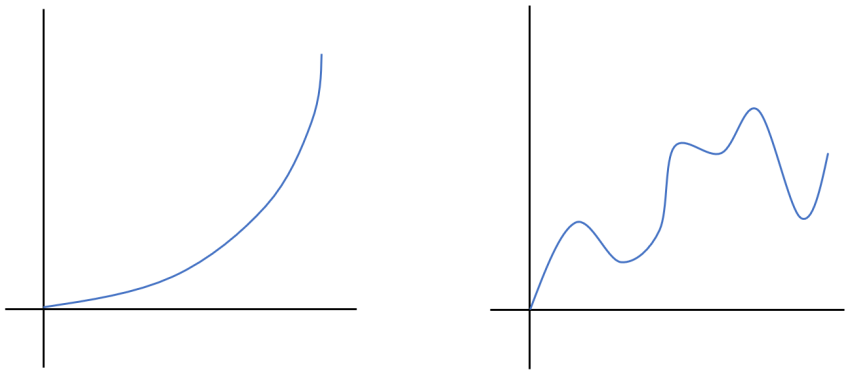
de volumen infinito, Melo y Romaña en (Í. Melo y Romaña, 2020) extendieron el resultado de Mañé adicionando la condición de curvatura limitada inferiormente. Estos resultados muestran la relación que existe entre la geometría y dinámica de los flujos geodésicos de tipo Anosov.

Definición 3.2.7. *Decimos que una variedad M no tiene puntos focales si para cualquier geodésica unitaria γ en M y para cualquier campo de Jacobi J a lo largo de γ tal que $J(0) = 0$ y $J'(0) \neq 0$ se tiene que*

$$\frac{d}{dt}\langle J(t), J(t)\rangle > 0, \qquad \forall\, t > 0.$$

Estos conceptos geométricos se relacionan de la siguiente forma:

$$\text{curvatura no positiva} \;\Rightarrow\; \text{sin puntos focales} \;\Rightarrow\; \text{sin puntos conjugados.}$$



(a) Sin puntos focales (b) Sin puntos conjugados

Figura 3.3: Comportamiento de los campos de Jacobi en norma.

Sea M una variedad Riemanniana completa, sin puntos conjugados y con curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Bolton (ver (Bolton, 1979)) mostró el siguiente resultado:

Teorema 3.2.8. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i. El flujo geodésico es Anosov.

ii. Existe una constante positiva δ tal que para todo $\theta \in SM$, el ángulo entre los subespacios $E^s(\theta)$ y $E^u(\theta)$ es mayor que δ.

iii. Existen constantes positivas A y s_0 tales que para cualquier campo de Jacobi J perpendicular a γ_θ con $J(0) = 0$, se tiene $\|J(t)\| \geq A\|J(s)\|$ para $t \geq s \geq s_0$.

Observación 3.2.9. *Las equivalencias entre (i) y (iii) del teorema 3.2.8 fueron demostrados por Eberlein en 1973 (ver (Eberlein, 1973)) para variedades compactas (o compactamente homogéneas). Años después, Bolton consiguió generalizarlo para el caso no compacto.*

En las mismas condiciones del teorema 3.2.8, suponga que el flujo geodésico es Anosov y sean $\xi \in E^s(\theta)$ y $\eta \in E^u(\theta)$. Por el teorema 2.3.1 tenemos que $\|J_\xi(t)\| \to 0$ si $t \to +\infty$ y $\|J_\eta(t)\| \to 0$ si $t \to -\infty$. Si $J_\xi(0) = 0$, entonces por el teorema anterior existen constantes positivas A y s_0 tal que

$$\|J_\xi(t)\| \geq A\|J_\xi(s)\| \text{ para } t \geq s \geq s_0.$$

Tomando limite para $t \to +\infty$ tenemos que $\|J_\xi(s_0)\| = 0$ y por lo tanto tendríamos puntos conjugados lo que es una contradicción. Así, $J_\xi(0) \neq 0$ y de la misma forma, se prueba que $J_\eta(0) \neq 0$. En particular, como $J_\xi(0) = d_\theta\pi(\xi)$ y $J_\eta(0) = d_\theta\pi(\eta)$, tenemos que

$$E^s(\theta) \cap V(\theta) = \{0\} \quad \text{y} \quad E^u(\theta) \cap V(\theta) = \{0\} \qquad \forall\, \theta \in SM.$$

Además, de la proposición 3.1.4 tenemos que $E^s(\theta)$ y $E^u(\theta)$ son subespacios Lagrangianos. Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$d_\theta\phi^t(E^s(\theta)) = E^s(\phi^t(\theta)) = \text{ graf } U_{\theta,s}(t),$$
$$d_\theta\phi^t(E^u(\theta)) = E^u(\phi^t(\theta)) = \text{ graf } U_{\theta,u}(t),$$

donde $U_{\theta,s}(t) : N(\phi^t(\theta)) \to N(\phi^t(\theta))$ y $U_{\theta,u}(t) : N(\phi^t(\theta)) \to N(\phi^t(\theta))$ son aplicaciones lineales simétricas por la afirmación dada en la sección anterior.

3.3. Ecuación de Ricatti

En esta sección, vamos a describir el método de Green para ver qué propiedades satisfacen las aplicaciones $U_{\theta,s}(t)$ y $U_{\theta,u}(t)$. Desde ahora, consideraremos variedades Riemannianas completas sin puntos conjugados. Las referencias para esta sección son (Green, 1958) y (Eberlein, 1973).

Fije $\theta \in SM$. Sea γ_θ una geodésica unitaria y consideremos $\{V_1, V_2, \ldots, V_n = \gamma'_\theta\}$ campos vectoriales paralelos a lo largo de γ_θ tal que $\{V_1(t), V_2(t), \ldots, V_n(t)\}$ es una base ortonormal de $T_{\gamma_\theta(t)}M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $Z(t)$ es un campo vectorial perpendicular a lo largo de $\gamma_\theta(t)$, entonces podemos escribir $Z(t)$ de la forma:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)V_i(t).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d}{dt}(a_i(t)V_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i'(t)V_i(t). \end{aligned}$$

Podemos ver que $Z(t)$ se puede identificar con la curva $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{n-1}(t))$ y la derivada covariante $Z'(t)$ se identifica con la curva $\alpha'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), \ldots, a_{n-1}'(t))$. Recíprocamente, cualquier curva en $\mathbb{R}^{n-1}$ puede ser identificada con un campo vectorial perpendicular a lo largo de γ_θ. Por la notación usada en la sección 3.1, podemos identificar $N(\phi^t(\theta))$ con $\mathbb{R}^{n-1}$ y considerar las aplicaciones $U_{\theta,s}(t)$ y $U_{\theta,u}(t)$ definidas en $\mathbb{R}^{n-1}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos la matriz simétrica $R(t) = (R_{ij}(t))$, donde

$$R_{ij}(t) = \langle R(\gamma_\theta'(t), V_i(t))\gamma_\theta'(t), V_j(t)\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

y R es la curvatura de M. Usando las bases ortonormales podemos escribir la ecuación de Jacobi (1.5) como una EDO de segundo orden en $\mathbb{R}^{n-1}$

$$Y''(t) + R(t)Y(t) = 0, \tag{3.2}$$

donde las derivadas son tomadas en cada componente. Si $Y(t)$ es una solución de (3.2), entonces para cada $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ la curva $\beta(t) = Y(t)x$ corresponde a un campo de Jacobi perpendicular a γ_θ por la identificación.

Dado $r \in \mathbb{R}$, sea $Y_{\theta,r}(t)$ la única solución de (3.2) satisfaciendo $Y_{\theta,r}(0) = Id$ y $Y_{\theta,r}(r) = 0$. Esta solución es única ya que M no tiene puntos conjugados. Green (ver (Green, 1958)) mostró que $\lim_{r\to-\infty} Y_{\theta,r}(t)$ existe para todo $\theta \in SM$ y $t \in \mathbb{R}$. Además, mostró que si definimos

$$Y_\theta^u(t) := \lim_{r\to-\infty} Y_{\theta,r}(t) \tag{3.3}$$

obtenemos una solución de la ecuación de Jacobi (3.2) tal que $\det Y_\theta^u(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. También es probado en (Eberlein, 1973) y (Green, 1958) que $\frac{dY_\theta^u}{dt}(t) = \lim_{r\to-\infty} \frac{dY_{\theta,r}}{dt}(t)$. Si para $t = 0$ definimos

$$U_r(\theta) = \frac{dY_{\theta,r}}{dt}(0) \quad ; \quad U^u(\theta) = \frac{dY_\theta^u}{dt}(0),$$

entonces

$$U^u(\theta) = \lim_{r\to-\infty} U_r(\theta).$$

Ahora consideremos $\phi^h(\theta) \in SM$ y $Y_{\phi^h(\theta),r-h}(t)$ la única solución de (3.2). Mostraremos que $Y_{\theta,r}(t+h)Y_{\theta,r}^{-1}(h)$ también es una solución de (3.2). En efecto, desde que $\gamma_{\phi^h(\theta)}(t) =$

$\gamma_\theta(t+h)$ tenemos que

$$Y''_{\theta,r}(t+h)Y^{-1}_{\theta,r}(h) + R(t+h)Y_{\theta,r}(t+h)Y^{-1}_{\theta,r}(h) = (Y''_{\theta,r}(t+h) + R(t+h)Y_{\theta,r}(t+h))Y^{-1}_{\theta,r}(h)$$
$$= 0.$$

También, para $t = 0$ y $t = r - h$ tenemos que

$$Y_{\theta,r}(h)Y^{-1}_{\theta,r}(h) = Id \quad \text{y} \quad Y_{\theta,r}(r)Y^{-1}_{\theta,r}(h) = 0.$$

Por lo tanto, por unicidad de soluciones se tiene que

$$Y_{\phi^h(\theta),r-h}(t) = Y_{\theta,r}(t+h)Y^{-1}_{\theta,r}(h).$$

Entonces, tomando limite cuando $r \to -\infty$

$$Y^u_{\phi^h(\theta)}(t) = Y^u_\theta(t+h)(Y^u_\theta)^{-1}(h).$$

Derivando en relación a t y tomando $t = 0$ concluimos que

$$U_{\theta,u}(h) := U^u(\phi^h(\theta)) = \frac{dY^u_\theta}{dt}(h)(Y^u_\theta)^{-1}(h) \tag{3.4}$$

para todo $h \in \mathbb{R}$. Sigue que $U_{\theta,u}$ es una solución simétrica de la ecuación de Ricatti

$$U'(t) + U^2(t) + R(t) = 0. \tag{3.5}$$

En efecto, si denotamos como $J(t) = Y^u_\theta(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} U' + U^2 + R &= J'' \cdot J^{-1} - J' \cdot J^{-1} \cdot J' \cdot J^{-1} + J' \cdot J^{-1} \cdot J' \cdot J^{-1} + R \\ &= J'' \cdot J^{-1} + R \cdot J \cdot J^{-1} \\ &= (J'' + R \cdot J) \cdot J^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De manera similar, tomando límite cuando $r \to +\infty$ obtenemos $U_{\theta,s}$ con las mismas propiedades. Además, Green mostró que, para el caso en que la curvatura seccional esté limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$, las soluciones simétricas de la ecuación de Ricatti (3.5) definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ están limitadas por c, esto es,

$$\sup_t \|U_{\theta,u}(t)\| \leq c \quad \text{y} \quad \sup_t \|U_{\theta,s}(t)\| \leq c. \tag{3.6}$$

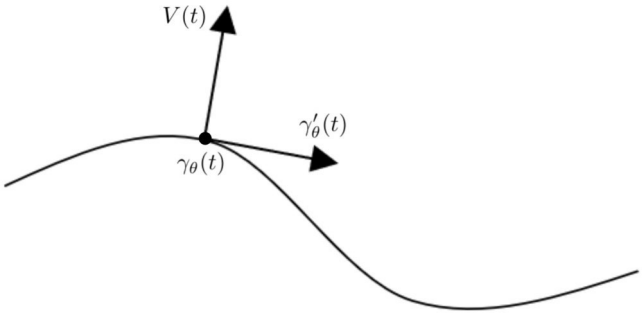
Capítulo 4

Relación entre la curvatura y el comportamiento hiperbólico de un flujo geodésico

En este capítulo veremos algunas consecuencias geométricas que un flujo geodésico Anosov nos puede ofrecer. De la misma forma, veremos que a partir del comportamiento de la integral de la curvatura, en media, a lo largo de geodésicas en una superficie podemos obtener un flujo geodésico Anosov. Los resultados principales de este capítulo están basados en (I. Melo y Romaña, 2020).

4.1. Propiedades geométricas obtenidas a partir de un flujo geodésico Anosov

Consideremos $\theta \in SM$ y $V(t)$ un campo perpendicular, no idénticamente nulo, a lo largo de la geodésica γ_θ. Definimos $K(\gamma'_\theta(t), V(t))$ como la curvatura seccional del plano generado por los vectores $\gamma'_\theta(t)$ y $V(t)$ en el punto $\gamma_\theta(t)$. En el caso que M sea una superficie, denotamos por $K(\gamma_\theta(t))$ a la curvatura seccional en el punto $\gamma_\theta(t)$.



Cuando M es una variedad Riemanniana compacta (o compactamente homogénea), Eberlein (ver (Eberlein, 1973)) probó el siguiente resultado:

Teorema 4.1.1. *Suponga que M no tiene puntos conjugados. Si el flujo geodésico es de tipo Anosov, entonces para todo $\theta \in SM$ y para todo campo paralelo perpendicular $V(t)$, no idénticamente nulo, a lo largo de γ_θ existe un t_0 tal que $K(\gamma'_\theta(t_0), V(t_0)) < 0$.*

El teorema anterior quiere decir que siempre que el flujo geodésico sea Anosov, el signo negativo de la curvatura aparece en algún punto de las geodésicas. No obstante, dicho resultado no proporciona información acerca de la cantidad de curvatura negativa que aparece cuando el flujo geodésico es Anosov. El resultado principal de esta sección generaliza lo probado por Eberlein:

Teorema 4.1.2. *Sea M una variedad Riemanniana completa, sin puntos conjugados y curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Si el flujo geodésico es Anosov, entonces existen dos constantes $B, t_0 > 0$ tales que para todo $\theta \in SM$ y para todo campo paralelo perpendicular unitario $V(t)$ a lo largo de γ_θ se tiene*

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma'_\theta(r), V(r))dr \leq -B, \quad t > t_0.$$

Es importante resaltar que este teorema es aplicable incluso en variedades que no son compactas. Para demostrarlo, requerimos del siguiente lema:

Lema 4.1.3. *Sea M una variedad Riemanniana completa, sin puntos conjugados y curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Si el flujo geodésico es Anosov, entonces existe una constante $D > 0$ tal que para todo $\theta \in SM$ y para todo campo paralelo perpendicular unitario $V(t)$ a lo largo de γ_θ se tiene que*

$$\|U_{\theta,s}(t)(V(t))\|^2 + \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\|^2 \geq D, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. De acuerdo al teorema 3.2.8, existe una constante $\delta > 0$ tal que el ángulo entre los subespacios $E^s(\phi^t(\theta))$ y $E^u(\phi^t(\theta))$ es mayor a δ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como vimos en el capítulo anterior, $E^s(\phi^t(\theta)) = \text{Gr } U_{\theta,s}(t)$ y $E^u(\phi^t(\theta)) = \text{Gr } U_{\theta,u}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, podemos escribir

$$(V(t), U_{\theta,s}(t)(V(t))) \in E^s(\phi^t(\theta)) \quad \text{y} \quad (V(t), U_{\theta,u}(t)(V(t))) \in E^u(\phi^t(\theta)).$$

Según la definición de la métrica de Sasaki, para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\frac{|\langle (V(t), U_{\theta,s}(t)(V(t))), (V(t), U_{\theta,u}(t)(V(t)))\rangle|}{\|(V(t), U_{\theta,s}(t)(V(t)))\| \cdot \|(V(t), U_{\theta,u}(t)(V(t)))\|} = \frac{|1 + \langle U_{\theta,s}(t)(V(t)), U_{\theta,u}(t)(V(t))\rangle|}{\sqrt{1 + \|U_{\theta,s}(t)(V(t))\|^2}.\sqrt{1 + \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\|^2}}.$$

Entonces,

$$|1 + \langle U_{\theta,s}(t)(V(t)), U_{\theta,u}(t)(V(t))\rangle| \leq \sqrt{1 + \|U_{\theta,s}(t)(V(t))\|^2} \cdot \sqrt{1 + \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\|^2} \cos\delta. \tag{4.1}$$

Sea $0 < D < 1$ tal que $\dfrac{1-D}{1+D} > \cos\delta$. Afirmamos que

$$\|U_{\theta,s}(t)(V(t))\|^2 + \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\|^2 \geq D$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto, por contradicción, suponga que existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|U_{\theta,s}(t)(V(t))\|^2 + \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\|^2 < D.$$

Entonces,

- $\|U_{\theta,s}(t)(V(t))\|^2 < D$,
- $\|U_{\theta,u}(t)(V(t))\|^2 < D$,
- $\|U_{\theta,s}(t)(V(t))\| \cdot \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\| < D$.

Luego, en (4.1) podemos observar que

$$1 - |\langle U_{\theta,s}(t)(V(t)), U_{\theta,u}(t)(V(t))\rangle| \leq |1 + \langle U_{\theta,s}(t)(V(t)), U_{\theta,u}(t)(V(t))\rangle| \leq (1+D)\cos\delta.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos deducir que

$$1 - \|U_{\theta,s}(t)(V(t))\| \,.\, \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\| \leq 1 - |\langle U_{\theta,s}(t)(V(t)), U_{\theta,u}(t)(V(t))\rangle| \leq (1+D)\cos\delta.$$

Entonces,

$$\frac{1-D}{1+D} \leq \cos\delta,$$

lo que es una contradicción con la elección de D. Por lo tanto,

$$\|U_{\theta,s}(t)(V(t))\|^2 + \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\|^2 \geq D$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Demostración del Teorema 4.1.2. Fije un $\theta \in SM$ y considere un campo paralelo perpendicular unitario $V(t)$ a lo largo de la geodésica γ_θ. Sabemos que $U_{\theta,s}$ y $U_{\theta,u}$ son soluciones simétricas de la ecuación de Ricatti (3.5), esto es,

$$U'_{\theta,s}(t)(V(t)) + U^2_{\theta,s}(t)(V(t)) + R(t)(V(t)) = 0,$$
$$U'_{\theta,u}(t)(V(t)) + U^2_{\theta,u}(t)(V(t)) + R(t)(V(t)) = 0.$$

Al tomar producto interno con $V(t)$ en cada una de esas igualdades y usando el hecho que $U_{\theta,s}$ y $U_{\theta,u}$ son simétricas tenemos que

$$\langle U_{\theta,s}(t)(V(t)), V(t)\rangle' + \|U_{\theta,s}(t)(V(t))\|^2 + K(\gamma'_\theta(t), V(t)) = 0,$$
$$\langle U_{\theta,u}(t)(V(t)), V(t)\rangle' + \|U_{\theta,u}(t)(V(t))\|^2 + K(\gamma'_\theta(t), V(t)) = 0.$$

Integrando la suma de ambas ecuaciones de 0 hasta t,

$$\sum_{*=s,u} (\langle U_{\theta,*}(t)(V(t)), V(t)\rangle - \langle U_{\theta,*}(0)(V(0)), V(0)\rangle)$$
$$+ \int_0^t \sum_{*=s,u} \|U_{\theta,*}(r)(V(r))\|^2 \, dr + 2\int_0^t K(\gamma'_\theta(r), V(r))dr = 0.$$

De (3.6) tenemos que $\left\|U_{\theta,s(u)}(t)\right\| \leq c$, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{*=s,u} (\langle U_{\theta,*}(t)(V(t)), V(t)\rangle - \langle U_{\theta,*}(0)(V(0)), V(0)\rangle) = 0.$$

De acuerdo con el lema 4.1.3, existe una constante $D > 0$ tal que

$$\frac{1}{t}\int_0^t \left[\|U_{\theta,s}(r)(V(r))\|^2 + \|U_{\theta,u}(r)(V(r))\|^2\right] dr \geq D.$$

Por lo tanto, existe un $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma'_\theta(r), V(r))dr \leq -\frac{D}{2}$$

para todo $t > t_0$. Considerando $B = \dfrac{D}{2}$ concluimos la demostración del teorema. □

Como consecuencia del Teorema 4.1.2, podemos ver que si el flujo geodésico es de tipo Anosov, entonces la curvatura negativa es, en media, uniformemente distribuida a lo largo de las geodésicas. Teniendo en cuenta la definición de curvatura de Ricci en $\gamma_\theta(t)$, que fue estudiada en el capítulo 1, obtenemos automáticamente el siguiente corolario:

Corolario 4.1.4. *Sea M una variedad Riemanniana completa, sin puntos conjugados y curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Si el flujo geodésico es Anosov, entonces existen dos constantes $B, t_0 > 0$ tales que para todo $\theta \in SM$ se tiene*

$$\frac{1}{t}\int_0^t Ric_{\gamma_\theta(r)}(\gamma'_\theta(r))dr \leq -B \tag{4.2}$$

para todo $t > t_0$.

Si reemplazamos la hipótesis de "sin pontos conjugados" por "volumen finito" en el corolario anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.1.5. *Sea M una variedad Riemanniana completa de volumen finito y curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Si el flujo geodésico es Anosov, entonces*

$$\int_{SM} Ric\, d\mu \leq -B \cdot \mu(SM) < 0,$$

donde Ric denota la curvatura de Ricci y μ es la medida de Liouville en SM.

Demostración. Por lo probado por Mañé en (Mañé, 1987), la variedad M no tiene puntos conjugados. Por otro lado, como la curvatura está limitada inferiormente por $-c^2$, entonces la curvatura de Ricci tiene parte negativa integrable con respecto a la medida de Liouville en SM. Entonces la curvatura de Ricci es integrable en SM (ver teorema A en (Guimaråes, 1992)). Para cada $\theta \in SM$, la desigualdad (4.2) puede escribirse como

$$\frac{1}{t}\int_0^t Ric(\phi^r(\theta))dr \leq -B$$

para todo $t > t_0$. Como M tiene volumen finito, por el teorema ergódico de Birkhoff aplicado a la función curvatura de Ricci, tenemos que

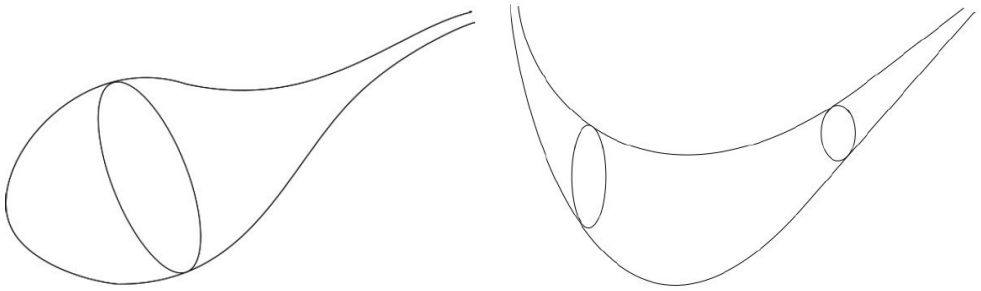
$$-c^2 \cdot \mu(SM) \leq \int_{SM} \text{Ric}\, d\mu \leq -B \cdot \mu(SM) < 0$$

con lo que concluimos la demostración del corolario. □

Si consideramos una superficie compacta M con característica de Euler no negativa, entonces no existe una métrica Riemanniana en M cuyo flujo geodésico sea de tipo Anosov. En efecto, si el flujo geodésico de una superficie compacta es Anosov, Klingenberg demostró en (Klingenberg, 1974) que la superficie no tiene puntos conjugados. Por lo tanto, según un resultado de Hopf (ver (Hopf, 1948)) la integral de la curvatura Gaussiana es no positiva y es cero en el caso de que la curvatura sea cero. El teorema 4.1.2 nos indica que la curvatura no es cero en todas partes, entonces el Teorema de Gauss-Bonnet implica que la característica de Euler debe ser negativa, lo cual es una contradicción. En el caso de superficies no compactas, se sabe que el teorema de Gauss-Bonnet es válido para superficies de volumen finito (ver (Rosenberg, 1982)). Entonces una consecuencia inmediata del corolario 4.1.5 es el siguiente resultado:

Corolario 4.1.6. *Sea M una superficie completa de volumen finito y característica de Euler no negativa. Entonces M no admite una métrica Riemanniana de curvatura limitada inferiormente tal que el flujo geodésico sea de tipo Anosov.*

Sabemos que la característica de Euler de la esfera $\mathbb{S}^2$ es 2. Entonces cualquier superficie completa M de volumen finito y homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ con uno o dos puntos eliminados no admiten flujo geodésico Anosov (ver figura 4.1).



(a) $\mathcal{X}(M) = 1$. (b) $\mathcal{X}(M) = 0$.

Figura 4.1: Superficies que no admiten flujo geodésico Anosov.

Corolario 4.1.7. *Sea M una variedad Riemanniana completa, sin puntos conjugados y curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Si existen una geodésica $\gamma(t)$, un campo paralelo perpendicular $V(t)$, no idénticamente nulo, a lo largo de $\gamma(t)$ y un $t_1 > 0$ tales que $K(\gamma'(t), V(t)) \geq 0$ para todo $t \geq t_1$, entonces el flujo geodésico de M no es de tipo Anosov.*

Demostración. Por contradicción, vamos a suponer que el flujo geodésico es de tipo Anosov. Según el teorema 4.1.2 existen constantes $B, t_0 > 0$ tales que

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma'(r), V(r))dr \leq -B, \qquad t > t_0.$$

Considere $t > t_1$, donde t_1 es la constante dada en la hipótesis del corolario. Entonces,

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma'(r), V(r))dr = \frac{1}{t}\int_0^{t_1} K(\gamma'(r), V(r))dr + \frac{1}{t}\int_{t_1}^t K(\gamma'(r), V(r))dr. \tag{4.3}$$

Sea $\delta < B$ y consideremos un $t > \text{máx}\{t_0, t_1\}$ lo suficientemente grande tal que

$$-\delta < \frac{1}{t}\int_0^{t_1} K(\gamma'(r), V(r))dr < \delta.$$

Por hipótesis,

$$\frac{1}{t}\int_{t_1}^t K(\gamma'(r), V(r))dr \geq 0.$$

Por lo tanto, en (4.3) tenemos que $-\delta < -B$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, el flujo geodésico de M no es de tipo Anosov. □

Este corolario implica, en particular, que si M es el producto de dos variedades Riemannianas de curvatura limitada inferiormente, dotada con la métrica producto, la curvatura seccional cero aparece entonces su flujo geodésico nunca puede ser de tipo Anosov. Por lo tanto, cuando se trata del producto de dos variedades, este resultado sugiere que es necesario modificar la métrica del producto para que el flujo geodésico

se vuelva de tipo Anosov.

Para cada $x \in M$ y cada plano $P \subset T_xM$, denotemos por $K(P)$ la curvatura seccional del plano P. Considere

$$K(x) = \sup_{P \subset T_xM} K(P).$$

Dado un punto fijado $O \in M$, definimos

$$\mathcal{K}(t) := \sup_{x \in M \setminus B_t(O)} K(x),$$

donde $B_t(O)$ es la bola abierta centrada en O y radio t.

Definición 4.1.8. *Una variedad Riemanniana completa M, no compacta, es asintóticamente plana si*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathcal{K}(t) = 0.$$

Para finalizar esta sección, presentamos el siguiente resultado que permite construir una gran cantidad de variedades no compactas cuyo flujo geodésico no es de tipo Anosov.

Corolario 4.1.9. *Sea M una variedad Riemanniana asintóticamente plana con curvatura limitada inferiormente y sin puntos conjugados. Entonces su flujo geodésico no es de tipo Anosov.*

Demostración. Es sabido que una variedad Riemanniana completa no compacta posee rayo, esto es, existe $\theta \in SM$ tal que la geodésica $\gamma_\theta : [0, +\infty) \to M$ satisface

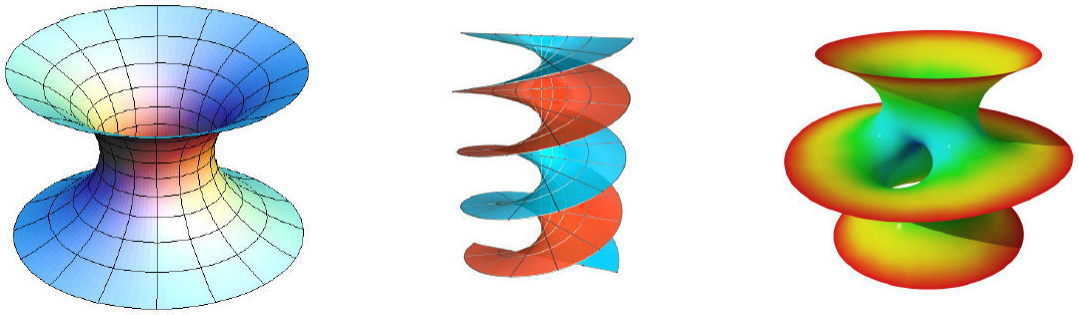
$$d(\gamma_\theta(s), \gamma_\theta(t)) = |s - t|.$$

Como $\mathcal{K}(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, entonces $Ric_{\gamma_\theta(t)}(\gamma'_\theta(t)) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. En particular,

$$\lim_{t \to +\infty} \left| \frac{1}{t} \int_0^t Ric_{\gamma_\theta(r)}(\gamma'_\theta(r)) dr \right| = 0.$$

Sigue del corolario 4.1.4 que el flujo geodésico de M no es de tipo Anosov. □

Por ejemplo, cualquier superficie completa mínima inmersa en $\mathbb{R}^3$ con curvatura total finita es asintóticamente plana (ver (Schoen, 1983)). Además, dado que las superficies mínimas tienen curvatura no positiva, entonces no tienen puntos conjugados y por el corolario 4.1.9 estas superficies mínimas no pueden tener flujo geodésico de tipo Anosov. En particular, el flujo geodésico de las superficies mínimas como Catenoide, Helicoide, la superficie de Costa y la superficie de Costa-Homan-Meeks no son de tipo Anosov (ver algunas figuras a continuación).



(a) Catenoide. (b) Helicoide. (c) Superficie de Costa.

Figura 4.2: Superficies que no admiten flujo geodésico Anosov.

4.2. Condiciones geométricas que implican flujo geodésico de tipo Anosov

En el mismo artículo (Eberlein, 1973), Eberlein probó el siguiente resultado para variedades compactas o compactamente homogéneas:

Teorema 4.2.1. *Suponga que M no posee puntos focales. Si para todo $\theta \in SM$ y para todo campo paralelo perpendicular $V(t)$, no idénticamente nulo, a lo largo de $\gamma_\theta(t)$ existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $K(\gamma'_\theta(t_0), V(t_0)) < 0$, entonces el flujo geodésico es de tipo Anosov.*

El teorema principal de esta sección es una versión más general, para el caso de superficies no compactas, del resultado de Eberlein. Específicamente, vamos a mostrar lo siguiente:

Teorema 4.2.2. *Sea M una superficie completa, sin puntos focales y con curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Suponga que existen constantes $B, t_0 > 0$ tales que para toda geodésica $\gamma(t)$,*

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma(s))ds \leq -B \tag{4.4}$$

para todo $t > t_0$, entonces el flujo geodésico es de tipo Anosov.

Lo que nos dice el teorema 4.2.2 es que si la media de la curvatura en planos tangentes a lo largo de las geodésicas es negativa y uniformemente alejada de cero, entonces el flujo geodésico es Anosov. Para demostrar este teorema, lo primero que probaremos es que las soluciones estables de la ecuación de Jacobi (3.2) tienen determinante que decae exponencialmente a partir de un tiempo positivo grande. Análogamente, se obtiene un resultado similar para el caso inestable.

Proposición 4.2.3. *Sea M una variedad Riemanniana completa, sin puntos focales y con curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Suponga que existen constantes $B, t_0 > 0$ tales que, para todo $\theta \in SM$ y para todo campo paralelo perpendicular unitario $V(t)$ a lo largo de $\gamma_\theta(t)$ se tiene que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma'_\theta(s), V(s))ds \leq -B \tag{4.5}$$

para todo $t > t_0$. Entonces existen constantes positivas E y t_1 tales que

(a) $|\det Y_{\theta,s}(t)| \leq e^{-Et}$ *para todo* $t > t_1$,

(b) $|\det Y_{\theta,u}(t)| \geq e^{Et}$ *para todo* $t > t_1$.

Demostración. Probaremos el caso (a), ya que el caso (b) se demuestra de manera análoga. Sea $Y_{\theta,s}(t)$ la solución estable de la ecuación de Jacobi (3.2). Denotemos por

$$U_{\theta,s}(t) = Y'_{\theta,s}(t).Y^{-1}_{\theta,s}(t)$$

que, como se sabe, es una solución simétrica de la ecuación de Ricatti (3.5). Dado que M es una variedad Riemanniana sin puntos focales, para cada $x \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, la función $t \to \|Y_{\theta,s}(t)x\|^2$ es no creciente (ver (Eberlein, 1973)). Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|Y_{\theta,s}(t)x\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle Y_{\theta,s}(t)x, Y_{\theta,s}(t)x\rangle \\ &= 2\left\langle Y'_{\theta,s}(t)x, Y_{\theta,s}(t)x\right\rangle \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos $y = Y_{\theta,s}(t)x$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle y, U_{\theta,s}(t)y\rangle &= \langle Y_{\theta,s}(t)x, U_{\theta,s}(t)Y_{\theta,s}(t)x\rangle \\ &= \left\langle Y_{\theta,s}(t)x, Y'_{\theta,s}(t)x\right\rangle \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Como $U_{\theta,s}(t)$ es simétrica, la última desigualdad implica que los autovalores de $U_{\theta,s}(t)$ son no positivos. Denotemos por $-\lambda_{n-1}(t) \leq -\lambda_{n-2}(t) \leq \ldots \leq -\lambda_1(t) \leq 0$ los autovalores de $U_{\theta,s}(t)$. De (3.6) tenemos que $\|U_{\theta,s}(t)\| \leq c$, lo que implica que $0 \leq \lambda_i(t) \leq c$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}U^2_{\theta,s}(t) &= \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) + \ldots + \lambda_{n-1}^2(t) \\ &\leq c(\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \ldots + \lambda_{n-1}(t)) \\ &= -c \cdot \mathrm{tr}U_{\theta,s}(t).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Tomando la traza a la ecuación de Ricatti (3.5) e integrando de 0 hasta t obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}U'_{\theta,s}(r)dr + \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}U^2_{\theta,s}(r)dr + \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}R(r)dr \\ &= \frac{\mathrm{tr}U_{\theta,s}(t) - \mathrm{tr}U_{\theta,s}(0)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}U^2_{\theta,s}(r)dr + \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}R(r)dr. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como $\|U_{\theta,s}(t)\| \leq c$, el primer término de (4.7) converge para 0 cuando $t \to +\infty$. Por otro lado, por definición de la matriz $R(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}R(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(\gamma'_\theta(t), V_i(t))\gamma'_\theta(t), V_i(t)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} K(\gamma'_\theta(t), V_i(t)). \end{aligned}$$

Sigue de la hipótesis (4.5) que

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}R(r)dr = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma'_\theta(r), V_i(r))dr \leq -(n-1)B$$

para todo $t > t_0$. Por lo tanto, se deduce de la ecuación (4.7) que existe $t_1 > 0$ tal que

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}U^2_{\theta,s}(r)dr > \frac{(n-1)B}{2}$$

para todo $t > t_1$. En particular, integrando lo obtenido en (4.6) obtenemos que

$$\int_0^t \mathrm{tr}U_{\theta,s}(r)dr \leq -\frac{(n-1)Bt}{2c}, \quad t > t_1. \tag{4.8}$$

Recordemos la fórmula de Liouville (ver (Freire y Mané, 1982)) que nos dice que

$$\frac{d}{dt}\log|\det Y_{\theta,s}(t)| = \mathrm{tr}U_{\theta,s}(t), \quad Y_{\theta,s}(0) = Id.$$

Integrando la última ecuación, obtenemos de (4.8) que

$$|\det Y_{\theta,s}(t)| \leq e^{-Et}, \quad t > t_1,$$

donde $E = (n-1)B/2c$, concluyendo la demostración de la proposición. □

Para cada $\theta = (x, v) \in SM$, en la sección 3.1 definimos el conjunto $N(\theta)$ como todos los vectores de T_xM perpendiculares a v. Denotemos por

$$\begin{aligned} X^s(\theta) &:= \mathrm{Graf}\, U_{\theta,s}(0) = \{(x, U_{\theta,s}(0)x) : x \in N(\theta)\}, \\ X^u(\theta) &:= \mathrm{Graf}\, U_{\theta,u}(0) = \{(x, U_{\theta,u}(0)x) : x \in N(\theta)\}. \end{aligned}$$

Los subespacios $X^s(\theta)$ y $X^u(\theta)$ son llamados los subespacios de Green estable e inestable de $T_\theta SM$, respectivamente. La siguiente proposición (demostrado en (Eberlein, 1973)) resume las principales propiedades de $X^s(\theta)$ y $X^u(\theta)$ que serán usadas para probar el teorema 4.2.2.

Proposición 4.2.4. *Los subespacios $X^s(\theta)$ y $X^u(\theta)$ tienen las siguientes propiedades:*

1. *$X^s(\theta)$ y $X^u(\theta)$ son subespacios $(n-1)$-dimensionales de $T_\theta SM$ y son invariantes por la diferencial $d\phi^t$, esto es,*

$$d_\theta\phi^t(X^{s(u)}(\theta)) = X^{s(u)}(\phi^t(\theta)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. *Si M no posee puntos focales, entonces para cada $\xi \in X^s(\theta)$ (respectivamente, $\xi \in X^u(\theta)$), la función $t \to \|J_\xi(t)\|$ es no creciente (respectivamente, no decreciente).*

3. *Si M no posee puntos focales, entonces $X^s(\theta)$ y $X^u(\theta)$ varían continuamente en $\theta \in SM$.*

4. *$\|K_\theta(\xi)\| \leq c\|d_\theta\pi(\xi)\|$ para todo $\xi \in X^s(\theta)$ o $\xi \in X^u(\theta)$.*

Es importante remarcar que cuando el flujo geodésico es del tipo Anosov, $E^s(\theta) = X^s(\theta)$ y $E^u(\theta) = X^u(\theta)$. Por lo tanto, estos subespacios $X^{s(u)}(\theta)$ son los candidatos a ser los subespacios estable e inestable requeridos por la condición de Anosov.

A partir de la proposición 4.2.3, obtenemos que la derivada del flujo geodésico, restringida al subespacio de Green estable (respectivamente, inestable), presenta determinante exponencialmente decreciente (respectivamente, creciente), como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 4.2.5. *En las mismas condiciones de la proposición 4.2.3, existe un $t_2 > 0$ tal que para todo $\theta \in SM$ se tiene*

$$\frac{1}{t}\log\left|\det d_\theta\phi^t \mid_{X^s(\theta)}\right| \leq -\frac{E}{2} \quad y \quad \frac{1}{t}\log\left|\det d_\theta\phi^t \mid_{X^u(\theta)}\right| \geq \frac{E}{2}$$

para todo $t > t_2$.

Demostración. Sea $\theta = (x, v) \in SM$. Por la construcción hecha en el capítulo 3, tenemos que para todo $w \in N(\theta)$, el campo de Jacobi $Y_{\theta,s(u)}(t)w$ es un campo de Jacobi estable (respectivamente, inestable). Sea $\pi_{\theta,s(u)} : X^{s(u)}(\theta) \to N(\theta)$ la proyección a la primera coordenada. Entonces,

$$\pi^{-1}_{\theta,s(u)}(w) = (w, U_{\theta,s(u)}(0)w).$$

Para $w \in N(\theta)$ con $\|w\| = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|\pi^{-1}_{\theta,s(u)}(w)\| &= \|(w, U_{\theta,s(u)}(0)w)\| \\ &= \sqrt{\|w\|^2 + \|U_{\theta,s(u)}(0)w\|^2} \\ &\leq \sqrt{1+c^2}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sup_{\theta\in SM}\|\pi^{-1}_{\theta,s(u)}\|\leq\sqrt{1+c^2}.$$

También, para $(w,z)\in X^{s(u)}(\theta)$ tenemos por (3.4) que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\circ Y_{\theta,s(u)}(t)\circ\pi_{\theta,s(u)}(w,z)&=\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}(Y_{\theta,s(u)}(t)w)\\&=(Y_{\theta,s(u)}(t)w,U_{\theta,s(u)}(t)Y_{\theta,s(u)}(t)w)\\&=(Y_{\theta,s(u)}(t)w,Y'_{\theta,s(u)}(t)w).\end{aligned}$$

Sigue del teorema 2.3.1 que

$$\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\circ Y_{\theta,s(u)}(t)\circ\pi_{\theta,s(u)}(w,z)=d_\theta\phi^t(w,z),$$

esto es,

$$d_\theta\phi^t\big|_{X^{s(u)}(\theta)}=\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\circ Y_{\theta,s(u)}(t)\circ\pi_{\theta,s(u)}. \tag{4.9}$$

Aplicando la función determinante en la igualdad (4.9) obtenemos que

$$|\det d_\theta\phi^t\big|_{X^{s(u)}(\theta)}|=|\det\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}|\cdot|\det Y_{\theta,s(u)}(t)|\cdot|\det\pi_{\theta,s(u)}|.$$

Entonces, para $t\neq 0$,

$$\frac{1}{t}\log\left|\det d_\theta\phi^t\big|_{X^{s(u)}(\theta)}\right|=\frac{1}{t}\log\left|\det\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right|+\frac{1}{t}\log\left|\det Y_{\theta,s(u)}(t)\right|+\frac{1}{t}\log\left|\det\pi_{\theta,s(u)}\right|. \tag{4.10}$$

Usando argumentos del álgebra lineal, vamos a mostrar que si A es una matriz invertible de dimensión $m\times m$, entonces

$$\frac{1}{(|\det A^{-1}|)^{\frac{1}{m}}}\leq\|A\|\leq\frac{m\|A^{-1}\|^{m-1}}{|\det A^{-1}|}. \tag{4.11}$$

En efecto, sabemos que $|\det A|\leq\|A\|^m$, entonces

$$\frac{1}{(|\det A^{-1}|)^{\frac{1}{m}}}\leq\|A\|\ .$$

Por otro lado, sea adj$A$ la adjunta de la matriz A, esto es, la matriz transpuesta de la matriz de cofactores (c_{ij}) definida por

$$c_{ij}=(\mathrm{adj}A)_{ji}=(-1)^{i+j}\det A^{ij},$$

donde A^{ij} es la submatriz de A eliminando la fila i y la columna j. Entonces

$$\begin{aligned}\|\mathrm{adj}A^{-1}\|^2&=\sum_{i,j=1}^m(\det(A^{-1})^{ij})^2\\&\leq\sum_{i,j=1}^m\|(A^{-1})^{ij}\|^{2(m-1)}\\&\leq\sum_{i,j=1}^m\|A^{-1}\|^{2(m-1)}\\&=m^2\|A^{-1}\|^{2(m-1)}.\end{aligned}$$

Así tenemos que $\|\text{adj}A^{-1}\| \leq m\|A^{-1}\|^{m-1}$. Como

$$\|A\| = \frac{1}{|\det A^{-1}|}\|\text{adj}A^{-1}\|,$$

sigue que

$$\|A\| \leq \frac{m\|A^{-1}\|^{m-1}}{|\det A^{-1}|},$$

mostrando (4.11). Como $\dim X^{s(u)}(\theta) = n-1$, $\|\pi_{\theta,s(u)}\| \leq 1$ y $1 \leq \|\pi^{-1}_{\theta,s(u)}\| \leq \sqrt{1+c^2}$ para todo $\theta \in SM$, de la desigualdad (4.11) sigue que si consideramos $A = \pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}$ se tiene

$$\frac{1}{\left|\det \pi_{\phi^t(\theta),s(u)}\right|^{\frac{1}{n-1}}} \leq \left\|\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right\| \leq \frac{(n-1)\left\|\pi_{\phi^t(\theta),s(u)}\right\|^{n-2}}{\left|\det \pi_{\phi^t(\theta),s(u)}\right|}.$$

Entonces,

$$1 \leq \left\|\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right\| \leq (n-1)\left\|\pi_{\phi^t(\theta),s(u)}\right\|^{n-2} \cdot \left|\det \pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right| \leq (n-1)\left|\det \pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right|,$$

esto es,

$$\frac{1}{n-1} \leq \left|\det \pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right|. \tag{4.12}$$

Por otro lado, como $\left|\det \pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right| \leq \left\|\pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right\|^{n-1}$ entonces de (4.12) se tiene que

$$\frac{1}{n-1} \leq \left|\det \pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s(u)}\right| \leq (1+c^2)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{4.13}$$

Las ecuaciones (4.10) y (4.13), junto con la proposición 4.2.3, nos permiten concluir que

. **Caso estable:** Como $|\det \pi_{\theta,s}| \leq \|\pi_{\theta,s}\|^{n-1} \leq 1$, entonces existe un $s_1 > t_1$ tal que para todo $t > s_1$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\log\left|\det d_\theta\phi^t\big|_{X^s(\theta)}\right| &= \frac{1}{t}\log\left|\det \pi^{-1}_{\phi^t(\theta),s}\right| + \frac{1}{t}\log|\det Y_{\theta,s}(t)| + \frac{1}{t}\log|\det \pi_{\theta,s}| \\ &\leq \frac{(n-1)\log(1+c^2)}{2t} - E \\ &\leq -\frac{E}{2}.\end{aligned}$$

. **Caso inestable:** Como $|\det \pi_{\theta,u}| = \left|\det \pi^{-1}_{\theta,u}\right|^{-1} \geq (1+c^2)^{\frac{1-n}{2}}$ entonces existe un $s_2 > t_1$ tal que para todo $t > s_2$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\log\left|\det d_\theta\phi^t\big|_{X^u(\theta)}\right| &= \frac{1}{t}\log\left|\det \pi^{-1}_{\phi^t(\theta),u}\right| + \frac{1}{t}\log|\det Y_{\theta,u}(t)| + \frac{1}{t}\log|\det \pi_{\theta,u}| \\ &\geq \frac{E}{2}.\end{aligned}$$

Si consideramos $t_2 > \max\{s_1, s_2\}$ obtenemos lo pedido. □

Finalmente, para probar el teorema 4.2.2, vamos a usar el corolario 4.2.5 y el siguiente lema, que es una versión más débil del lema 3.12 en (Eberlein, 1973).

Lema 4.2.6. *Sea $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ una función limitada tal que*

(i) $f(t + s) \leq f(t) \cdot f(s)$ para todo $t, s > 0$,

(ii) existe $r > 0$ tal que $f(r) < 1$.

Entonces, existen constantes $C > 0$ y $\lambda \in (0, 1)$ tales que

$$f(t) \leq C\lambda^t, \quad t > 0.$$

Demostración. Sea $t > 0$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $m \in (0, r)$ tales que $t = kr + m$. Por hipótesis,

$$f(t) = f(kr + m) \leq f(kr)f(m) \leq f(r)^k f(m). \tag{4.14}$$

Sea F una cota superior de f y denotemos por $b = f(r) < 1$. Entonces en (4.14),

$$f(t) \leq F \cdot b^k = F \cdot b^{\frac{t-m}{r}} = F \cdot b^{-\frac{m}{r}} \cdot (b^{\frac{1}{r}})^t \leq F \cdot b^{-1}(b^{\frac{1}{r}})^t.$$

Considerando $C = F \cdot b^{-1}$ y $\lambda = b^{\frac{1}{r}}$ queda demostrado el lema. □

Demostración del teorema 4.2.2. Como M es una superficie, tenemos que

$$\left|\det d_\theta\phi^t \mid_{X^{s(u)}(\theta)}\right| = \left\|d_\theta\phi^t \mid_{X^{s(u)}(\theta)}\right\|.$$

Por el corolario 4.2.5 existe un $t_2 > 0$ tal que para todo $\theta \in SM$ y todo $t > t_2$

$$\left\|d_\theta\phi^t \mid_{X^s(\theta)}\right\| \leq e^{-\frac{E}{2}t} \quad \text{y} \quad \left\|d_\theta\phi^{-t} \mid_{X^u(\theta)}\right\| \leq e^{-\frac{E}{2}t}. \tag{4.15}$$

Dado que M no posee puntos focales, la norma de los campos de Jacobi estables es no creciente y la norma de los campos de Jacobi inestables es no decreciente por la proposición 4.2.4. Además, como la curvatura está acotada inferiormente por $-c^2$, entonces $\left\|U_{\theta,s(u)}\right\| \leq c$. Por lo tanto, sigue del teorema 2.3.1 que existe $G > 0$ tal que

$$\left\|d_\theta\phi^t \mid_{X^s(\theta)}\right\| \leq e^G \quad \text{y} \quad \left\|d_\theta\phi^{-t} \mid_{X^u(\theta)}\right\| \leq e^G, \quad \forall\, t \in [0, t_2]. \tag{4.16}$$

Para concluir la prueba, consideremos las siguientes funciones definidas para $t \geq 0$

$$f_s(t) = \sup_{\theta \in SM} \left\|d_\theta\phi^t \mid_{X^s(\theta)}\right\| \quad \text{y} \quad f_u(t) = \sup_{\theta \in SM} \left\|d_\theta\phi^{-t} \mid_{X^u(\theta)}\right\|.$$

De (4.15) y (4.16) tenemos que ambas funciones están limitadas superiormente. Además,

$$\begin{aligned}\left\|d_\theta\phi^{t+r}\mid_{X^s(\theta)}\right\| &= \left\|d_{\phi^r(\theta)}\phi^t\circ d_\theta\phi^r\mid_{X^s(\theta)}\right\| \\ &\leq \left\|d_{\phi^r(\theta)}\phi^t\mid_{X^s(\phi^r(\theta))}\right\|\cdot\left\|d_\theta\phi^r\mid_{X^s(\theta)}\right\|,\end{aligned}$$

lo que implica que $f_s(t)$ satisface el ítem (i) del lema 4.2.6 y de forma análoga la función $f_u(t)$ también satisface el ítem (i). Por otro lado, sigue de (4.15) que existe $r>0$ tal que para todo $\theta\in SM$

$$\left\|d_\theta\phi^r\mid_{X^s(\theta)}\right\|, \left\|d_\theta\phi^{-r}\mid_{X^u(\theta)}\right\| < 1,$$

lo que implica que las funciones $f_s(t), f_u(t)$ satisfacen el ítem (ii) del lema 4.2.6. Entonces existen constantes $C_{s(u)}>0$ y $\lambda_{s(u)}\in(0,1)$ tales que

$$f_{s(u)}(t)\leq C_{s(u)}\lambda_{s(u)}^t, \quad t>0.$$

Tomando $C=\max\{C_s,C_u\}$ y $\lambda=\max\{\lambda_s,\lambda_u\}$ obtenemos que para todo $\theta\in SM$

$$\left\|d_\theta\phi^t\mid_{X^s(\theta)}\right\|\leq C\lambda^t \quad \text{y} \quad \left\|d_\theta\phi^{-t}\mid_{X^u(\theta)}\right\|\leq C\lambda^t, \quad t\geq 0.$$

Esto último nos muestra que los subespacios $X^{s(u)}(\theta)$ son linealmente independientes. Además, dado que M no posee puntos focales, los subespacios $X^s(\theta)$ y $X^u(\theta)$ varían continuamente en $\theta\in SM$ por la proposición 4.2.4. Por lo tanto, concluimos que el flujo geodésico es Anosov. □

En el próximo capítulo, usaremos el teorema 4.2.2 para construir una familia de superficies no compactas que poseen curvatura no positiva y cuyo flujo geodésico es de tipo Anosov. Para lograr nuestro propósito, definiremos un *warped product* entre la recta real $\mathbb{R}$ y el círculo $\mathbb{S}^1$ para construir estas superficies. Finalmente, juntando los teoremas 4.1.2 y 4.2.2, obtenemos una caracterización geométrica de los flujos geodésicos Anosov en superficies no compactas sin puntos focales. Más precisamente, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.2.7. *Sea M una superficie completa, sin puntos focales y con curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c>0$. El flujo geodésico es Anosov si y solamente si existen constantes $B, t_0>0$ tales que para toda geodésica $\gamma(t)$,*

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma(s))ds\leq -B$$

para todo $t>t_0$.

Capítulo 5

Ejemplos de flujos geodésicos de tipo Anosov en variedades no compactas

En este capítulo, usaremos el teorema 4.2.2 para construir una familia de superficies no compactas (en particular, no compactamente homogéneas) que poseen flujo geodésico de tipo Anosov. La herramienta principal para construir esta familia de superficies es el "Warped product".

5.1. Warped product

Para el producto de dos variedades, siempre aparece curvatura seccional cero si consideramos la métrica producto, por lo que es necesario modificar la estructura Riemanniana en el producto de variedades si queremos obtener flujo geodésico Anosov debido al teorema 4.1.2. La referencia para esta sección es (Bishop y O'Neill, 1969).

Definición 5.1.1. *Sean (M, g_M), (N, g_N) variedades Riemannianas y $f > 0$ una función suave definida en M. El warped product $M \times_f N$ es la variedad $M \times N$ dotada con la métrica Riemanniana*

$$g = \pi_M^*(g_M) + (f \circ \pi_M)^2 \pi_N^*(g_N),$$

donde π_M y π_N son las proyecciones de $M \times N$ sobre M y N, respectivamente.

Ejemplo 5.1.2. *Toda superficie de revolución (que no cruza el eje de revolución) es isométrico a un warped product, donde M es la curva generadora, N es el círculo unitario y $f(x)$ es la distancia de $x \in M$ al eje de revolución.*

Una de las propiedades importantes preservadas por el warped product es la completitud, esto es, $M \times_f N$ es completa si y solamente si M y N son completas.
Sea X un campo vectorial en M. El levantamiento horizontal de X para la variedad producto $M \times_f N$ es el campo vectorial $\overline{X}$ tal que $d_{(p,q)}\pi_M(\overline{X}(p,q)) = X(p)$ y $d_{(p,q)}\pi_N(\overline{X}(p,q)) = 0$. Si Y es un campo vectorial en N, el levantamiento vertical de Y para $M \times_f N$ es el campo vectorial $\overline{Y}$ tal que $d_{(p,q)}\pi_M(\overline{Y}(p,q)) = 0$ y $d_{(p,q)}\pi_N(\overline{Y}(p,q)) = Y(q)$. El conjunto de todos los levantamientos son denotados, usualmente, por $\mathcal{L}(M)$ y $\mathcal{L}(N)$, respectivamente.
Denotemos por R_P, R y S los tensores de curvatura en $P = M \times_f N$, M y N, respectivamente. El siguiente lema, probado en (Bishop y O'Neill, 1969), describe la relación entre el tensor de curvatura de P con los de M y N.

Lema 5.1.3. *En la variedad $P = M \times_f N$, si $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \mathcal{L}(M)$ y $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W} \in \mathcal{L}(N)$, entonces*

i. $R_P(U,V)W = S(U,V)W - \|G\|^2 [(U,V)V - (V,W)U]$, *donde G es el gradiente de f y $(,)$ es la métrica Riemanniana en N.*

ii. $R_P(X,V)Y = -\dfrac{1}{f}\langle \nabla_X G, Y\rangle V$, *donde G es el gradiente de f.*

iii. $R_P(\overline{X},\overline{Y})\overline{V} = R_P(\overline{V},\overline{W})\overline{X} = 0$.

iv. $R_P(\overline{X},\overline{V})\overline{W} = R_P(\overline{X},\overline{W})\overline{V} = f(V,W)\nabla_X G$, *donde G es el gradiente de f.*

v. $R_P(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z} = R(X,Y)Z$.

Denotemos por K_P, K y L las curvaturas seccionales en $P = M \times_f N, M$ y N respectivamente. Usando el lema 5.1.3 podemos calcular la curvatura seccional de P de la siguiente forma: Sea Π un plano tangente a P en el punto (p,q) y sean $x+v, y+w$ una base ortonormal de Π, donde x, y son vectores horizontales y v, w son vectores verticales. La curvatura seccional de P está dada por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} K_P(\Pi) =& K(x,y)\|x \wedge y\|^2 - f(p)\Big\{(w,w)\nabla^2 f(x,x) - 2(v,w)\nabla^2 f(x,y) \\ &+ (v,v)\nabla^2 f(y,y)\Big\} + f^2(p)\Big[L(v,w) - \|G(p)\|^2\Big](v \wedge w, v \wedge w). \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2. Ejemplos

En esta sección, vamos a construir una superficie (difeomorfa al cilindro) de curvatura no positiva y con flujo geodésico de tipo Anosov. Para eso, considere el warped product $M = \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^1$, donde $f(x) = e^{g(x)}$ y $g(x)$ es una función suave tal que

(A) $g''(x) + (g'(x))^2 \geq 0$ para todo x;

(B) $g'' + (g')^2$ es una función periódica con periodo $T > 0$;

(C) Existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1/2 < g'(x) < C_2/2$ para todo x.

No es difícil encontrar funciones que satisfagan estas condiciones. Por ejemplo, podemos considerar $g(x) = ax - \cos x + \sin x$, para algún $a > 0$.
Como M es una superficie, la curvatura seccional coincide con la curvatura Gaussiana y por lo tanto solo depende del punto en la superficie. En otras palabras, de (5.1) sigue que la curvatura seccional de M en el punto (x, y) está dado por

$$K(x, y) = K(x) = -\frac{f''(x)}{f(x)} = -(g''(x) + (g'(x))^2) \leq 0. \tag{5.2}$$

En particular, de las propiedades (A) y (B) tenemos que la curvatura seccional de M está limitada inferiormente y la superficie no posee puntos focales, ya que la curvatura seccional es no positiva. El objetivo de esta sección será probar que M satisface (4.4). Considere una geodésica $\gamma(t)$ en $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^1$ con $|\gamma'(t)| = 1$ y la carta

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0} : \mathbb{R} \times (t_0, t_0 + 2\pi) \to &\quad \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) \qquad\quad \to &\quad (x, \cos y, \sin y) \end{aligned}$$

tal que $\varphi_{t_0}(\mathbb{R} \times (t_0, t_0 + 2\pi)) \cap \gamma(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Sea $(x(t), y(t))$ la representación local de $\gamma(t)$ por φ_{t_0}. Entonces, sigue de (5.2) que lo que tenemos que probar es que la expresión

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma(s))ds = \frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds \tag{5.3}$$

está uniformemente lejos de cero. Usando la fórmula para calcular los símbolos de Christoffel (1.3) obtenemos que

. $\Gamma^1_{22} = -f' \cdot f = -g' \cdot e^{2g}$.

. $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{f'}{f} = g'$.

. $\Gamma^k_{ij} = 0$ en los demás casos.

Como γ es una geodésica con $|\gamma'(t)| = 1$, las funciones $x(t), y(t)$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

(a) $x''(t) - e^{2g(x(t))}g'(x(t))(y'(t))^2 = 0$.

(b) $y''(t) + 2g'(x(t))x'(t)y'(t) = 0$.

(c) $(x'(t))^2 + e^{2g(x(t))}(y'(t))^2 = 1$.

Sigue de (a) y (c) que

$$x''(t) = g'(x(t))(1 - (x'(t))^2). \tag{5.4}$$

Además, $|x'(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, desde que la igualdad (5.4) no depende del punto t_0. Si existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $|x'(a)| = 1$, por la propiedad de unicidad de las geodésicas, sigue que $\gamma(t) = (x(a) - a + t, y(a))$ o $\gamma(t) = (x(a) + a - t, y(a))$. Ahora suponga que $|x'(t)| < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y denote por $b(t) = x'(t)$. De (5.4) tenemos que

$$\frac{b'(t)}{1 - (b(t))^2} = g'(x(t)), \tag{5.5}$$

esto es,

$$\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1 + b(t)}{1 - b(t)}\right)\right)' = g'(x(t)).$$

Integrando desde 0 hasta t obtenemos

$$\log\left(\frac{1 + b(t)}{1 - b(t)}\right) - \log\left(\frac{1 + b(0)}{1 - b(0)}\right) = 2\int_0^t g'(x(s))ds.$$

Por la propiedad (C) de la función g' tenemos

$$B_0 e^{C_1 t} < \frac{1 + b(t)}{1 - b(t)} < B_0 e^{C_2 t},$$

donde $B_0 = \dfrac{1 + b(0)}{1 - b(0)} > 0$, pues $|x'(0)| < 1$. Esto implica que

$$1 - \frac{2}{B_0 e^{C_1 t} + 1} < b(t) < 1 - \frac{2}{B_0 e^{C_2 t} + 1}. \tag{5.6}$$

Dividiremos el análisis de (5.3) en varios casos, considerando la posición de $b(0)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Caso 1: $b(0) = 1$ o $b(0) = -1$.
Suponga que $b(0) = 1$. Esto implica que $x(t) = x(0) + t$ y $x'(t) = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &= \frac{1}{t}\int_0^t K(x(0) + s)ds \\ &= \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(0)+t} K(u)du.\end{aligned}$$

Tome $t > 2T$, donde T es el periodo de la función K. Podemos escribir $t = n_t T + a$, donde n_t es un número entero positivo y $0 \leq a < T$. Sea $\eta = \int_0^T K(s)ds < 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &= \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(0)+t} K(u)du \\ &= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n_t}\int_{x(0)+(i-1)T}^{x(0)+iT} K(u)du + \frac{1}{t}\int_{x(0)+n_tT}^{x(0)+t} K(u)du \\ &\leq \frac{\eta n_t}{t} \\ &= \frac{\eta}{T} - \frac{a\eta}{tT} \\ &\leq \frac{\eta}{2T}.\end{aligned}$$

Procediendo de la misma forma, si $b(0) = -1$ obtenemos que

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds \leq \frac{\eta}{2T}, \qquad t > 2T.$$

Caso 2: $1/2 \leq b(0) < 1$.

De (5.5) tenemos que $b'(t) > 0$, esto es, $b(t)$ es una función estrictamente creciente. Además, por (5.6), $1/2 < b(t) < 1$ para todo $t > 0$. En particular, $x(t)$ es una función estrictamente creciente. Considere el cambio de variable $u = x(s)$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &= \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{K(u)}{x'(x^{-1}(u))}du \\ &\leq \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(t)} K(u)du.\end{aligned}$$

Tome $t > 4T$, donde T es el periodo de la función K. Podemos escribir $t/2 = n_tT + a$, donde n_t es un número entero positivo y $0 \leq a < T$. Como $x'(t) > 1/2$ para $t > 0$, sigue que $x(t) > x(0) + t/2$ para $t > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &\leq \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(t)} K(u)du \\ &= \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(0)+t/2} K(u)du + \frac{1}{t}\int_{x(0)+t/2}^{x(t)} K(u)du \\ &\leq \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(0)+t/2} K(u)du \\ &= \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(0)+n_tT} K(u)du + \frac{1}{t}\int_{x(0)+n_tT}^{x(0)+t/2} K(u)du \\ &\leq \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(0)+n_tT} K(u)du \\ &= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n_t}\int_{x(0)+(i-1)T}^{x(0)+iT} K(u)du \\ &= \frac{n_t\eta}{t} \\ &= \frac{\eta}{2T} - \frac{a\eta}{tT} \\ &\leq \frac{\eta}{4T}.\end{aligned}$$

Caso 3: $-1/2 \leq b(0) < 1/2$.

Sigue de (5.6) que $\lim_{t\to+\infty} b(t) = \lim_{t\to+\infty} x'(t) = 1$. Entonces, como la función $b(t)$ es estrictamente creciente, existe un único $T_1 > 0$ tal que $b(T_1) = 1/2$. Considerando $t = T_1$ en (5.6) tenemos

$$1 - \frac{2}{B_0 e^{C_1 T_1} + 1} < \frac{1}{2}.$$

Esto implica que $T_1 < \dfrac{1}{C_1}\log\left(\dfrac{3}{B_0}\right) \leq \dfrac{2}{C_1}\log 3$, pues $B_0 \geq \dfrac{1}{3}$. Considere

$$t > \text{máx}\left\{\frac{2}{C_1}\log 3 + 4T, \frac{4}{C_1}\log 3\right\}.$$

Desde que la curvatura seccional es no positiva, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &= \frac{1}{t}\int_0^{T_1} K(x(s))ds + \frac{1}{t}\int_{T_1}^t K(x(s))ds \\ &\leq \frac{1}{t}\int_{T_1}^t K(x(s))ds.\end{aligned}$$

Ahora considere la geodésica $\beta(t) = \gamma(t + T_1)$. Aplicando la desigualdad obtenida en el caso 2, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &\leq \frac{1}{t}\int_{T_1}^t K(x(s))ds \\ &= \frac{1}{t}\int_0^{t-T_1} K(x(s+T_1))ds \\ &\leq \frac{\eta}{4T}\left(1 - \frac{T_1}{t}\right) \\ &< \frac{\eta}{8T}.\end{aligned}$$

Caso 4: $-1 < b(0) < -1/2$.

Como $b(t)$ es una función estrictamente creciente, existe un único $T_2 > 0$ tal que $b(T_2) = -1/2$. Considerando $t = T_2$ en (5.6) tenemos

$$-\frac{1}{2} < 1 - \frac{2}{B_0 e^{C_2 T_2} + 1}.$$

Esto implica que $T_2 > \dfrac{1}{C_2}\log\left(\dfrac{1}{3B_0}\right)$. Note que $B_0 \to 0$ cuando $b(0) \to -1$. En particular, $T_2 \to +\infty$ cuando $b(0) \to -1$. Por lo tanto, empezamos primero suponiendo que $T_2 \leq 4T$. En este caso, considere

$$t > 4T + \text{máx}\left\{\frac{2}{C_1}\log 3 + 4T, \frac{4}{C_1}\log 3\right\}.$$

Desde que la curvatura seccional es no positiva, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &= \frac{1}{t}\int_0^{T_2} K(x(s))ds + \frac{1}{t}\int_{T_2}^t K(x(s))ds \\ &\leq \frac{1}{t}\int_{T_2}^t K(x(s))ds.\end{aligned}$$

Ahora considere la geodésica $\beta(t) = \gamma(t + T_2)$. Note que

$$t - T_2 > \text{máx}\left\{\frac{2}{C_1}\log 3 + 4T, \frac{4}{C_1}\log 3\right\}.$$

Entonces, como $t > 8T \geq 2T_2$, aplicando la desigualdad obtenida en el caso 3 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &\leq \frac{1}{t}\int_{T_2}^t K(x(s))ds \\
&= \frac{1}{t}\int_0^{t-T_2} K(x(s+T_2))ds \\
&\leq \frac{\eta}{8T}\left(1 - \frac{T_2}{t}\right) \\
&< \frac{\eta}{16T}.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $T_2 > 4T$. Como $b(t)$ es una función estrictamente creciente, tenemos que $-1 < x'(t) \leq -1/2$ para $4T < t \leq T_2$. En particular, $x(t) \leq x(0) - t/2$ para $4T < t \leq T_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &= \frac{1}{t}\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{K(u)}{x'(x^{-1}(u))}du \\
&= \frac{1}{t}\int_{x(t)}^{x(0)} -\frac{K(u)}{x'(x^{-1}(u))}du \\
&\leq \frac{1}{t}\int_{x(t)}^{x(0)} K(u)du \\
&= \frac{1}{t}\int_{x(t)}^{x(0)-t/2} K(u)du + \frac{1}{t}\int_{x(0)-t/2}^{x(0)} K(u)du \\
&\leq \frac{1}{t}\int_{x(0)-t/2}^{x(0)} K(u)du.
\end{aligned}$$

Podemos escribir $t/2 = n_t T + a$, donde n_t es un número entero positivo y $0 \leq a < T$. Entonces, como $t > 4T$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &\leq \frac{1}{t}\int_{x(0)-t/2}^{x(0)} K(u)du \\
&= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n_t}\int_{x(0)-iT}^{x(0)-(i-1)T} K(u)du + \frac{1}{t}\int_{x(0)-t/2}^{x(0)-n_tT} K(u)du \\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n_t}\int_{x(0)-iT}^{x(0)-(i-1)T} K(u)du \\
&= \frac{n_t\eta}{t} \\
&= \frac{\eta}{2T} - \frac{a\eta}{tT} \\
&< \frac{\eta}{4T}.
\end{aligned}$$

Si $T_2 < t \leq T_2 + \text{máx}\left\{\frac{2}{C_1}\log 3 + 4T, \frac{4}{C_1}\log 3\right\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &\leq \frac{1}{t}\int_0^{T_2} K(x(s))ds \\ &< \frac{\eta T_2}{4Tt}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Sea $A = \frac{2}{C_1}\log 3$. Como $T_2 > 4T$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{T_2 + 2A + 4T}{T_2} &= 1 + \frac{2A}{T_2} + \frac{4T}{T_2} \\ &< 2 + \frac{2A}{T_2} \\ &< 2 + \frac{2A}{4T} \\ &= \frac{8T + 2A}{4T}.\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{T_2}{t} \geq \frac{T_2}{T_2 + \text{máx}\left\{\frac{2}{C_1}\log 3 + 4T, \frac{4}{C_1}\log 3\right\}} \geq \frac{T_2}{T_2 + 2A + 4T} > \frac{4T}{8T + 2A}.$$

Por lo tanto, en (5.7)

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds < \frac{\eta}{8T + 2A}.$$

Si $t > T_2 + \text{máx}\left\{\frac{2}{C_1}\log 3 + 4T, \frac{4}{C_1}\log 3\right\}$, considere la geodésica $\beta(t) = \gamma(t + T_2)$. Aplicando la desigualdad obtenida en el caso 3 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds &= \frac{1}{t}\int_0^{T_2} K(x(s))ds + \frac{1}{t}\int_{T_2}^t K(x(s))ds \\ &< \frac{\eta T_2}{4Tt} + \frac{\eta(t - T_2)}{8Tt} \\ &= \frac{\eta T_2}{8Tt} + \frac{\eta}{8T} \\ &< \frac{\eta}{8T}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado que si $t > 4T + \text{máx}\left\{\frac{2}{C_1}\log 3 + 4T, \frac{4}{C_1}\log 3\right\}$ entonces

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(x(s))ds < \text{máx}\left\{\frac{\eta}{16T}, \frac{\eta}{8T + 2A}\right\} < 0,$$

para toda geodésica $\gamma(t)$ en M. Por lo tanto, podemos concluir del teorema 4.2.2 que el flujo geodésico de $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^1$ es de tipo Anosov.

Observación 5.2.1. *Considere la familia de funciones* $g_a(x) = ax - \cos x + \sin x$. *Tenemos que*

$$\begin{aligned} h_a(x) &:= g_a''(x) + (g_a'(x))^2 \\ &= 1 + a^2 + 2a(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + \cos x - \sin x. \end{aligned}$$

Claramente las funciones h_a *son periódicas con periodo* 2π. *Además, si consideramos* $a > 0$ *suficientemente grande, obtenemos que* $h_a(x) > 0$ *para todo* x. *De este modo, en el intervalo* $[0, 2\pi]$ *la función* h_a *es positiva y posee un mínimo. Por continuidad de la familia de funciones* h_a *en el parámetro* a, *existe el parámetro*

$$\overline{a} = \text{ínf}\left\{a > 0 : h_a|_{[0,2\pi]} \geq 0 \text{ y su valor mínimo es } 0\right\}.$$

En conclusión, la función $h_{\overline{a}}$ *es no negativa y posee infinitos ceros como consecuencia de su periodicidad. Por lo tanto, de* (5.2) *la superficie* $M = \mathbb{R} \times_{f_{\overline{a}}} \mathbb{S}^1$, *donde* $f_{\overline{a}}(x) = e^{g_{\overline{a}}(x)}$, *tiene curvatura no positiva con infinitos puntos de curvatura* 0 *y su flujo geodésico es Anosov. Además, como la propiedad de ser Anosov es abierta, podemos perturbar la métrica localmente en un punto de curvatura 0 obteniendo curvatura positiva en un subconjunto abierto pequeño y una nueva superficie con flujo geodésico Anosov.*

5.3. Curvatura negativa no garantiza que un flujo geodésico sea Anosov

Sabemos que una variedad con curvatura negativa pinched, su flujo geodésico es de tipo Anosov. Sin embargo, en el caso no compacto, el signo negativo de la curvatura no implica que tengamos un flujo geodésico de tipo Anosov, como veremos en el siguiente ejemplo.

Considere la superficie $M = \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^1$, donde $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. La curvatura en cada punto $(x, y) \in M$ está dada por

$$-1 \leq K(x, y) = K(x) = -\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{1}{(1 + x^2)^2} < 0.$$

Ahora considere el rayo $\gamma : [0, +\infty) \to M$, donde $\gamma(t) = (t, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{S}^1$. Observe que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t K(\gamma(s))ds = 0.$$

Por el corolario 4.2.7, tenemos que el flujo geodésico de M no es de tipo Anosov. Esto nos permite concluir que, desde el punto de vista de la dinámica, una variedad

de curvatura negativa y una variedad de curvatura negativa pinched son totalmente diferentes.

Capítulo 6

Conclusiones

A partir del teorema 4.1.2 obtenemos una importante herramienta para construir variedades que no admiten una métrica donde el flujo geodésico sea de tipo Anosov, como podemos ver en los corolarios 4.1.6 y 4.1.9. En contraste, el teorema 4.2.2 nos permite construir una amplia gama de superficies no compactas que exhiben un flujo geodésico de tipo Anosov. Estos resultados nos brindan la oportunidad de explorar y comprender la dinámica de flujos geodésicos Anosov en contextos más generales, más allá de las variedades compactas tradicionales.

Combinando los teoremas 4.1.2 y 4.2.2 se concluye que en una superficie completa sin puntos focales, el flujo geodésico es Anosov si y solamente si la curvatura a lo largo de las geodésicas es, en media, uniformemente negativa y lejos de cero, obteniendo una caracterización geométrica de los flujos geodésicos Anosov para el caso de superficies.

Una pregunta relevante que surge es si el teorema 4.2.2 se puede extender a dimensiones superiores. Recientemente, en (Cantoral y Romaña, 2023), como parte de mi trabajo de investigación de doctorado, conseguimos generalizar dicho teorema en dimensión mayor. Específicamente,

Teorema C. Sea M una variedad Riemanniana completa de dimensión $n \geq 2$, sin puntos focales y curvatura limitada inferiormente por $-c^2$, para algún $c > 0$. Suponga que existen constantes $B, t_0 > 0$ tales que, para todo $\theta \in SM$ y para una base ortonormal $\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ de $X^s(\theta)$ se tiene que

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma'_\theta(s), J_i(s))ds \leq -B, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

para todo $t > t_0$, donde J_i denota el campo de Jacobi estable a lo largo de γ_θ asociado a ξ_i. Entonces el flujo geodésico de M es Anosov.

Este resultado representa un avance significativo, ya que relaja un poco las hipótesis del teorema 4.2.2. Ahora solo se requiere que la curvatura de los planos tangentes generados por los campos de Jacobi estables y las geodésicas sean, en media, uniformemente negativa y lejos de cero.

Empleando técnicas similares a las presentadas en el quinto capítulo, conseguimos construir una métrica Anosov para el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^n$, usando como herramienta principal el *warped product* (para más detalles, ver (Cantoral y Romaña, 2023)).

Este tipo de resultados son importantes pues permiten usar técnicas y estrategias de sistemas dinámicos y de teoría ergódica para obtener invariantes geométricos de una variedad. Además, ofrecen nuevas herramientas para resolver uno de los problemas mencionados en (Knieper, 2002):

Problema: ¿Toda variedad Riemanniana compacta que admite una métrica Anosov también admite una métrica de curvatura negativa?

En las dimensiones 2 y 3, este problema ya ha sido resuelto utilizando el Teorema de Uniformización y el Teorema de Geometrización de Thurston (para más detalles, ver (Burns y Matveev, 2021)). Sin embargo, para dimensiones mayores a 3, este problema aún permanece en abierto. Es posible que los resultados principales presentados en este trabajo puedan ayudarnos a abordar este problema, incluso para el caso no compacto. Esto se debe a que tenemos un control uniforme de la media de la curvatura a lo largo de las geodésicas y esta media es negativa después de un tiempo uniforme. Podría ser viable usar dichos teoremas para construir una métrica u obtener una métrica a partir de un límite donde la curvatura es negativa. Sin embargo, la implementación práctica de este enfoque puede requerir una mayor investigación y desarrollo.

Capítulo 7

Apéndice: Teoría ergódica

En este capítulo, vamos a definir algunos conceptos relacionados a la teoría ergódica asociada a flujos que fueron usados a lo largo del texto. Vamos a denotar por λ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

7.1. Medidas invariantes

Un espacio de medida es la tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, donde X es un conjunto, $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra de X y μ es una medida. Recordemos que un flujo ϕ en X es una función $\phi : X \times \mathbb{R} \to X$ que satisface

i. $\phi(x, 0) = x$,

ii. $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, s + t)$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, vamos a considerar las funciones $\phi^t : X \to X$ definidas como $\phi^t(x) = \phi(x, t)$.

Definición 7.1.1. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Un flujo ϕ es llamado medible si ϕ es una función medible con respecto a la medida producto $\mu \times \lambda$ en $X \times \mathbb{R}$.*

Definición 7.1.2. *Decimos que una medida μ es invariante por el flujo ϕ si es invariante para cada una de las transformaciones ϕ^t, esto es,*

$$\mu(A) = \mu(\phi^t(A))$$

para todo $A \in \mathcal{B}$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

De la misma forma como en el caso discreto, el teorema de Bogolubov-Krylov garantiza la existencia de medidas invariantes.

Teorema 7.1.3 (Bogolubov-Krylov)**.** *Todo flujo continuo definido en un espacio métrico compacto posee una medida de probabilidad de Borel invariante.*

Decimos que un flujo continuo en un espacio métrico compacto es únicamente ergódico si tiene exactamente una medida de probabilidad de Borel invariante.

7.2. Ergodicidad

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es llamada ϕ-invariante módulo 0 si existe un conjunto de medida nula N tal que $f \circ \phi^t = f$ en el complemento de N. Es importante resaltar que el conjunto N no depende de t. Un conjunto es llamado ϕ-invariante módulo 0 si su función característica lo es.

Definición 7.2.1. *Un flujo medible ϕ en un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es llamado ergódico si para todo conjunto medible $A \subset X$ con $\phi^{-t}(A) = A$, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $\mu(A) = 0$ o $\mu(X \setminus A) = 0$.*

No es difícil probar que la definición anterior es equivalente a que toda función ϕ-invariante módulo 0 es constante módulo 0.

7.3. Teorema Ergódico de Birkhoff

En esta sección daremos la prueba del teorema de Birkhoff para flujos. Para eso, vamos a usar dicho resultado para el caso discreto probado en (Viana y Oliveira, 2016).

Teorema 7.3.1 (Birkhoff para Flujos)**.** *Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad, con μ invariante para un flujo ϕ y $f \in L^1(\mu)$. Entonces la función*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi^t(x))dt$$

está definida μ-casi todo punto y $\int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que $f \geq 0$. Para el caso general solo tenemos que separar la función en parte positiva y negativa. Definimos la siguiente función

$$\psi(x) = \int_0^1 f(\phi^t(x))dt.$$

Por hipótesis $f \in L^1(\mu)$, entonces por el teorema de Tonelli

$$\int_X \int_0^1 f(\phi^t(x))dtd\mu = \int_0^1 \int_X f(\phi^t(x))d\mu dt = \int_X f d\mu < \infty.$$

Así, $\psi(x) < \infty$ está bien definida μ-casi siempre, $\psi \in L^1(\mu)$ y $\int \psi d\mu = \int f d\mu$. Para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que

$$\psi \circ \phi^j(x) = \int_0^1 f(\phi^t(\phi^j(x)))dt = \int_0^1 f(\phi^{t+j}(x))dt = \int_j^{j+1} f(\phi^t(x))dt.$$

Entonces,

$$\sum_{j=0}^{[T]-1} \psi \circ \phi^j(x) = \sum_{j=0}^{[T]-1} \int_j^{j+1} f(\phi^t((x)))dt = \int_0^{[T]} f(\phi^t((x)))dt,$$

donde [.] denota el máximo entero. Luego, tenemos que

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\phi^t(x))dt = \frac{[T]}{T}\frac{1}{[T]}\sum_{j=0}^{[T]-1} \psi \circ \phi^j(x) + \frac{1}{T}\int_{[T]}^T f(\phi^t(x))dt. \tag{7.1}$$

Vamos a limitar el segundo término de la suma (7.1). Se tiene que

$$\left|\frac{1}{T}\int_{[T]}^T f(\phi^t(x))dt\right| \leq \frac{1}{T}\int_{[T]}^{[T]+1} f(\phi^t(x))dt \leq \frac{1}{[T]}\psi(\phi^{[T]}(x)) \to 0$$

μ-casi siempre cuando $T \to +\infty$. Aplicando el teorema de Birkhoff para el caso discreto ϕ^1 obtenemos que el primer término de la suma (7.1) converge μ-casi siempre. Entonces el límite

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\phi^t(x))dt = \tilde{f}(x)$$

existe μ-casi siempre y $\int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu$. □

Corolario 7.3.2. *En las mismas condiciones del teorema 7.3.1, si el flujo ϕ es ergódico entonces*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\phi^t(x))dt = \int_X f d\mu.$$

Referencias

Anosov, D. V. (1967). Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova*, *90*, 3–210.

Ballmann, W., Brin, M., y Burns, K. (1987). On surfaces with no conjugate points. *Journal of Differential Geometry*, *25*(2), 249–273.

Bishop, R. L., y O'Neill, B. (1969). Manifolds of negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, *145*, 1–49.

Bolton, J. (1979). Conditions under which a geodesic flow is Anosov. *Mathematische Annalen*, *240*, 103–113.

Burns, K., y Gidea, M. (2005). *Differential geometry and topology: With a view to dynamical systems*. CRC Press.

Burns, K., y Matveev, V. S. (2021). Open problems and questions about geodesics. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, *41*(3), 641–684.

Cantoral, A., y Romaña, S. (2023). Geometric conditions to obtain Anosov geodesic flow in non-compact manifolds. *arXiv preprint arXiv:2304.10606*.

Da Silva Filho, P. C. I. (2012). Aplicações de campos de jacobi aos sistemas dinâmicos. *Tese de mestrado*.

Do Carmo, M. P., y Flaherty Francis, J. (1992). *Riemannian geometry* (Vol. 6). Springer.

Donnay, V. J., y Pugh, C. C. (2003). Anosov geodesic flows for embedded surfaces. En (pp. xviii, 61–69). (Geometric methods in dynamics. II)

Eberlein, P. (1973). When is a geodesic flow of Anosov type? i. *Journal of Differential Geometry*, *8*(3), 437–463.

Freire, A., y Mané, R. (1982). On the entropy of the geodesic flow in manifolds without conjugate points. *Inventiones mathematicae*, *69*(3), 375–392.

Green, L. W. (1958). A theorem of E. Hopf. *Michigan Math. J.*, *5*, 31–34. Descargado de `http://projecteuclid.org/euclid.mmj/1028998009`

Guimaråes, F. F. (1992). The integral of the scalar curvature of complete manifolds without conjugate points. *Journal of Differential Geometry*, *36*(3), 651–662.

Hedlund, G. A. (1932). Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients. *Annals of Mathematics*, 719–739.

Hopf, E. (1940). Statistik der lösungen geodätischer probleme vom unstabilen typus. ii. *Mathematische Annalen*, *117*(1), 590–608.

Hopf, E. (1948). Closed surfaces without conjugate points. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *34*(2), 47–51.

Klingenberg, W. (1974). Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type. *Annals of Mathematics*, *99*(1), 1–13.

Knieper, G. (2002). Hyperbolic dynamics and Riemannian geometry. En *Handbook of dynamical systems* (Vol. 1, pp. 453–545). Elsevier.

Lee, J. M. (2018). *Introduction to Riemannian manifolds* (Vol. 2). Springer.

Mañé, R. (1987). On a theorem of Klingenberg. En *Dynamical systems and bifurcation theory (Rio de Janeiro, 1985)* (Vol. 160, pp. 319–345). Longman Sci. Tech., Harlow.

Melo, I., y Romaña, S. (2020). Contributions to the study of Anosov geodesic flows in non-compact manifolds. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, *40*(9), 5149–5171. Descargado de `https://doi.org/10.3934/dcds.2020223` doi: 10.3934/dcds.2020223

Melo, Í., y Romaña, S. (2020). Riemannian manifolds with Anosov geodesic flow do not have conjugate points. *arXiv preprint arXiv:2008.12898*.

Paternain, G. P. (1999). *Geodesic flows* (Vol. 180). Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. Descargado de `https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1600-1` doi: 10.1007/978-1-4612-1600-1

Rosenberg, S. (1982). Gauss-Bonnet theorems for noncompact surfaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *86*(1), 184–185.

Schoen, R. M. (1983). Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *Journal of Differential Geometry*, *18*(4), 791–809.

Viana, M., y Oliveira, K. (2016). *Foundations of ergodic theory* (n.º 151). Cambridge University Press.