Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Estudio analítico y numérico de la viga de Timoshenko amortiguada

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

Julio Román LOAYZA CERRÓN

ASESOR

Dr. Víctor Rafael CABANILLAS ZANNINI

Lima, Perú

2022



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Loayza, J. (2022). *Estudio analítico y numérico de la viga de Timoshenko amortiguada*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor 1	
Nombres y apellidos	Julio Román Loayza Cerrón
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09667354
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-4089-8049
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Víctor Rafael Cabanillas Zannini
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445770
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-2325-8824
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Martha Hilda Timoteo Sánchez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	25702279
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Pedro Espinoza Haro
Tipo de documento	DNI

Número de documento de identidad	08738119
Datos de investigación	
Línea de investigación	**A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales(Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional**
Grupo de investigación	**Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis y Aplicaciones- GEDAAp**
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: San Juan de Lurigancho Longitud: -11.976681 Latitud: -77.004907
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2018- 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA APLICADA CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Siendo las, 17:00 horas del martes dieciséis de agosto de dos mil veintidós, en la sala virtual meet.google.com/gmn-sicb-ybf, el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

PRESIDENTE	:	Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO	:	Dra. Martha Hilda Timoteo Sanchez
MIEMBRO EXTERNO	:	Dr. Pedro Espinoza Haro
MIEMBRO ASESOR	:	Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini

se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: **«ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE LA VIGA DE TIMOSHENKO AMORTIGUADA»** presentada por el Señor Bachiller Julio Román Loayza Cerrón, egresado de la Maestría en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Señor Bachiller **Julio Román Loayza Cerrón**, el calificativo **excelente**, con nota de **diecinueve (19)**.

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional** al Bachiller **Julio Román Loayza Cerrón**.

Siendo las 18:38 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:



Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE



Dra. Martha Hilda Timoteo Sanchez
MIEMBRO



Dr. Pedro Espinoza Haro
MIEMBRO EXTERNO



Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO

Informe de Evaluación de Originalidad

Vicedecano de Investigación y Posgrado: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Operador: Mag. José Luis Acuña Guillermo

Tesis: "ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE LA VIGA DE TIMOSHENKO AMORTIGUADA"

Tesista: JULIO ROMÁN LOAYZA CERRÓN

Recepción de documento: 27/12/2021

Aplicación del software: 27/12/2021

Software utilizado: Turnitin

Configuración del software:

- Excluir material bibliográfico
- Excluir material citado
- Excluir fuentes pequeñas N° palabras: 40
- Sin depósito

Resultado del análisis con el software: diez por ciento (10%)

Fuentes de originales de las similitudes encontradas:

- Ver abajo

Documento cumple con criterios de originalidad.

- **El documento cumple los criterios de originalidad. <u>Sin observaciones</u>.**

Fecha del informe: 18/12/2021

UNMSM

Firmado digitalmente por CABANILLAS LAPA Eugenio FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 23.12.2021 11:20:52 -05:00

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

VICEDECANO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Dedicatoria

A Gabriela Lucia Milagro Loayza Poma, mi amada hija.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por permitirme concretar la escritura de esta tesis al lado de mi corazoncito lindo: Gabriela Lucía Milagro, mi adorada hija, y de Rosana Milagro, el amor de mi vida.

Al Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini, por asesorarme en la elección del tema de esta tesis y la supervisión constante de cada fase de elaboración. Además, por sus enseñanzas, dedicación, tiempo, mucha paciencia e invalorable apoyo académico.

A mis padres Julia y Lucio, por sus enseñanzas, amor, apoyo moral y confianza, mi infinito agradecimiento. A mis hermanos y hermanas: Rosario, Rocío, Aristóteles, Mirko y Rosa, por su apoyo moral y constante ánimo y motivación hacia mi persona. A mis sobrinos: Lucio, Alonso, Franchesca, Haely, Jaeden, Mirkito y Alexandra, por sus alegrías, cariños y sonrisas.

Al Dr. Efraín Carbajal Peña, Dr. Pedro C. Espinoza Haro, Dr. Enrique Zuzua y al Dr. Jong-Shyong Wu, por su apoyo académico y moral, y por compartir sus conocimientos, sobre todo en la parte numérica del presente trabajo.

A mis estimados y recordados señores docentes de pregrado y posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, por sus enseñanzas no solo en la parte académica, sino también en valores. Una mención especial para el Mg. Tomás Nuñez Lay, hoy ya retirado de las aulas, por su gran aporte académico a lo largo de sus cuarenta años de cátedra, llenos de enseñanzas imborrables.

Al Mg. Ker vegas, por su constantes ánimos y apoyo para lograr terminar mi tesis.

RESUMEN

Estudio Analítico y Numérico de la Viga de Timoshenko Amortiguada

Julio Román Loayza Cerrón

Junio, 2022

Asesor : Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini

Grado obtenido : Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

---

En este trabajo, presentamos el estudio analítico y numérico de una ecuación debida a S. Timoshenko que describe la dinámica de una viga amortiguada. La primera parte del trabajo es dedicada al estudio analítico del problema. Utilizando la teoría de semigrupos de operadores lineales y herramientas del análisis funcional, demostramos la buena colocación del problema de valor inicial y frontera asociado. Usando la técnica introducida por Liu y Zheng, demostramos la analiticidad del semigrupo asociado a nuestro problema. Además, probamos la estabilidad exponencial del sistema. La segunda parte del trabajo es dedicada al estudio numérico del problema utilizando el Método de Diferencias Finitas. Demostramos la estabilidad, consistencia y convergencia del esquema numérico equivalente.

Palabras clave:

Viga de Timoshenko, estabilidad exponencial, analiticidad, Método de Diferencias Finitas, esquema numérico.

ABSTRACT

Analytical and Numerical Study of the Damped Timoshenko Beam

Julio Román Loayza Cerrón

June, 2022

Adviser : Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini

Degree Obtained : Master in Applied Mathematics with mention in Computational Mathematics

---

In this work, we present the analytical and numerical study of an equation due to S. Timoshenko that describes the dynamics of a damped beam. The first part of the work is devoted to the analytical study of the problem. Using the semigroup theory of linear operators and functional analysis tools, we prove the well-posedness of the initial and boundary value problem. Using the technique introduced by Liu and Zheng, we prove the analyticity of the semigroup associated with our problem. Furthermore, we show the exponential stability of the system. In the second part of the work, we concentrate on the numerical study of the problem using the Finite Difference Method. We prove the stability, consistency and convergence of the equivalent numerical scheme.

Key words: Timoshenko beam, exponential stability, analyticity, Finite Difference Method, numerical scheme.

Índice general

1. Introducción **4**

2. Preliminares **7**

2.1. Análisis Funcional 7

2.2. Semigrupos de clase C_0 11

2.3. El método de diferencias finitas 17

2.3.1. Consistencia, estabilidad y convergencia 18

2.3.2. Análisis de estabilidad de von Neumann 19

3. Estudio analítico de la viga de Timoshenko amortiguada **21**

3.1. Formulación del problema 21

3.2. El espacio de fase 22

3.3. Existencia y unicidad 25

3.3.1. El problema de Cauchy abstracto 25

3.3.2. El operador $\mathcal{A}$ es disipativo 27

3.3.3. El operador $\mathcal{A}$ genera un semigrupo de contracciones de clase C_0 30

4. Analiticidad y estabilidad exponencial del semigrupo **42**

4.1. Analiticidad del semigrupo 42

4.2. Estabilidad exponencial del semigrupo 51

5. Estudio numérico de la viga de Timoshenko amortiguada **55**

5.1. Esquema numérico en diferencias finitas 56

5.2. Estabilidad del esquema numérico 59

5.3. Consistencia del esquema numérico 64

5.4. Convergencia del esquema numérico 66
5.5. Solución numérica 66

6. Conclusiones **71**

Bibliografía **72**

Índice de figuras

3.1. Viga en posición de equilibrio. 22

5.1. Malla de puntos que consta de $(N-1) \times (M-1)$ rectángulos de lados de medidas Δx y Δt. 57

5.2. Porción de malla que muestra los nodos usados en (5.28). 67

5.3. Porción de malla que muestra los nodos usados en (5.29). 68

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas elásticos con amortiguación son una idea propuesta por primera vez por D. L. Russell [29]. Estos sistemas pertenecen a la familia de los sistemas dinámicos disipativos, cuya existencia y/o unicidad de soluciones se obtiene únicamente por procedimientos clásicos de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP).

El estudio del comportamiento asintótico de sistemas disipativos es una rama fértil para la investigación en EDP. En ese sentido, algunas técnicas analíticas para poder obtener el decaimiento de las soluciones de un sistema son los métodos de la energía, Nakao, Kormonik, Zuazua, Martínez y de Alabau-Boussouira.

En este trabajo, estudiamos la ecuación de la viga de Timoshenko

$$\rho w_{tt} - I_\rho \left(w_{xxx} + w_{tt}\right)_x + EI \left(w_x + r\right)_{xxx} = 0, \quad en \ [0, L] \times \mathbb{R}^+ \tag{1.1}$$

$$I_\rho \left(w_x + r\right)_{tt} + \alpha r - EI \left(w_x + r\right)_{xx} = 0, \quad en \ [0, L] \times \mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

donde w representa la deflexión lateral; r, el ángulo de corte; L, la longitud de la viga y ρ, I_p, E, I, α , son constantes positivas que describen las características físicas del problema.

Cuando se tiene en cuenta la fuerza viscosa que afecta la evolución de r, se debe agregar a la ecuación (1.2) un término $2\sigma \dfrac{\partial r}{\partial t}$ con $\sigma > 0$. Si asumimos, además, que la inercia rotatoria I_ρ es suficientemente pequeña, de modo que los términos correspondientes pueden hacerse cero (0), las ecuaciones se convierten en el modelo de difusión de corte propuesto por Russell [29] para las ecuaciones de corte de Euler-Bernoulli

$$\rho w_{tt} + EI\left(w_x + r\right)_{xxx} = 0, \tag{1.3}$$

$$2\sigma\frac{\partial r}{\partial t} + \alpha r - EI\left(w_x + r\right)_{xx} = 0. \tag{1.4}$$

Las condiciones de frontera y las condiciones iniciales que consideramos en este trabajo son

$$w = w_x + r = 0 \text{ , en } x = 0, \tag{1.5}$$

$$\left(w_x + r\right)_x = \left(w_x + r\right)_{xx} = 0 \text{ , en } x = L, \tag{1.6}$$

$$w(x,0) = w_0(x) \ , \quad w_t(x,0) = w_1(x) \ , \quad r(x,0) = r_0(x). \tag{1.7}$$

Con respecto al problema (1.3)-(1.7), estudiaremos su buena colocación y comportamiento asintótico, utilizando el método descrito por Zhuangyi Liu y Songmu Zheng [18]. Se trata de un método elegante y sotisficado que utiliza las herramientas de la teoría de semigrupos y que se utiliza en una enorme diversidad de problemas disipativos. Básicamente, la estrategia de estudio de los citados autores radica en investigar las propiedades disipativas que pueden tener los semigrupos de operadores lineales asociados al sistema a estudiar.

Cabe mencionar que, en 2005, C. A. Raposo et al. [28] publicaron el artículo *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*, en el cual estudiaron el sistema

$$\rho_1 u_{tt} - k\left(u_x + \psi\right)_x + u_t = 0, \quad en \ \ ]0, L[\times]0, \infty[\,, \tag{1.8}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(u_x - \psi\right) + \psi_t = 0, \quad en \ \ ]0, L[\times]0, \infty[\,, \tag{1.9}$$

$$u\left(0,t\right) = u\left(L,t\right) = \psi\left(0,t\right) = \psi\left(L,t\right) = 0 \ \ t > 0. \tag{1.10}$$

El sistema (1.8)-(1.10) modela la dinámica de una viga vibrante sometida a dos mecanismos de fricción. Los autores, utilizando el método de Liu-Zheng, probaron el decaimiento exponencial de la solución (u, ψ).

El objetivo de esta tesis es demostrar que el semigrupo, generado por el operador asociado a nuestro modelo, es analítico. Este resultado implica la estabilidad exponencial del semigrupo de contracciones de clase C_0, lo que nos permite concluir que las soluciones del sistema (1.3)-(1.7) son exponencialmente estables, sin embargo, para fines ilustrativos y de autocontenido daremos una demostración

de manera independiente que el semigrupo de contracciones de clase C_0 generado por el operador $\mathcal{A}$ es exponencialmente estable. También desarrollamos un estudio numérico de nuestro modelo al recurrir al método de diferencias finitas, herramienta que nos permite encontrar un esquema discreto aproximado, que, tras realizar el análisis cualitativo, demostramos que es estable, consistente y convergente.

Esta tesis está organizada en dos partes: la primera está dedicada al estudio analítico; y la segunda, al estudio numérico. Para su mejor desarrollo, consideramos, en total, seis capítulos, cada uno de los cuales se describe a continuación:

En el Capítulo 2, se presentan resultados básicos del análisis funcional, teoría de semigrupos de operadores lineales y de tópicos de diferencias finitas, a los que recurriremos en los próximos capítulos. En el Capítulo 3, realizamos el estudio analítico del sistema (1.3)-(1.7), construyendo el operador $\mathcal{A}$ asociado al modelo y presentando el problema de Cauchy abstracto. Además, calculamos la energía del sistema, lo que nos permite definir el espacio de fase y el dominio del operador $\mathcal{A}$. También, probamos la disipatividad del operador $\mathcal{A}$, y que este genera un semigrupo de contracciones de clase C_0. Finalizamos el capítulo probando la existencia y unicidad de las soluciones de nuestro modelo.

En el Capítulo 4, apoyándonos en el procedimiento propuesto por Liu-Zheng, demostramos el resultado principal del presente trabajo: la analiticidad del semigrupo asociado al modelo. También recurriendo al Teorema de Gearhart, probamos que el semigrupo de contracciones de clase C_0 generado por el operador $\mathcal{A}$ es exponencialmente estable. En el Capítulo 5, desarrollamos el análisis numérico de nuestro modelo, utilizando el método de diferencias finitas para encontrar el esquema aproximado (sobre un dominio discreto), el cual, vía el análisis de von Neumann, probamos que es estable. También probamos la consistencia del esquema, y, utilizando el Teorema de equivalencia de Lax, concluimos que el esquema es convergente. Por último, en el Capítulo 6, presentamos las conclusiones del trabajo.

Julio Román Loayza Cerrón
Lima, Perú.
2022

Capítulo 2

Preliminares

En el presente capítulo, se presentan de forma resumida, las herramientas teóricas que permitarán desarrollar y entender el estudio analítico y numérico de la viga de Timoshenko amortiguada, que estudiaremos en los siguientes capítulos. Este capítulo tiene la siguiente organización: en la sección 1, presentamos algunos resultados de Análisis Funcional; en la sección 2, recordamos resultados de Teoría de Semigrupos de clase C_0; y, en la sección 3, revisamos el Método de Diferencias Finitas.

2.1. Análisis Funcional

Teorema 2.1.1 *(Proyección ortogonal) Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces, $H = Y \oplus Y^{\perp}$.*

Demostración. Ver Kreyszig [14], pp. 146 y 147.

Lema 2.1.2 *Sea X un espacio de Banach y $S : X \to X$ un operador lineal y continuo con inversa continua. Si B es un operador lineal y continuo tal que*

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

entonces $S + B$ es un operador lineal continuo y inversible.

Demostración. Ver Muñoz [21], p. 37.

Proposición 2.1.3 *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle ., . \rangle_V$ y norma inducida $\|.\|_V$, entonces, para cada*

$u, v \in V$, se cumple que

$$|\langle u, v\rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V ,$$

donde $\|.\|_V^2 = \langle ., .\rangle_V$.

Demostración. Ver Kreyszig [14], p. 14.

Teorema 2.1.4 *(Desigualdad de Hölder) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $1 < p < \infty$ y q el exponente conjugado tales que satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, entonces, $uv \in L^1(\Omega)$, y*

$$\int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} .$$

Demostración. Ver Adams-Fournier [1], pp. 24 y 25.

Teorema 2.1.5 *(Lax-Milgram) Sea H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \to \mathbb{C}$ una forma bilineal acotada y coerciva, entonces, para todo funcional $T : H \to \mathbb{C}$ lineal y acotado, existe un único $u \in H$ tal que*

$$B(u, v) = T(v), \text{ para todo } v \in H.$$

Demostración. Ver Brezis [2], p. 140.

Definición 2.1.6 Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ las n-uplas de números enteros no negativos y escribimos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, denotemos por D^α al operador derivada de orden α, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n}}.$$

En el caso $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, el operador D^α estará representado por el operador identidad, es decir, $D^\alpha u := u$.

Definición 2.1.7 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua. El *soporte* de u es la adherencia en Ω del conjunto $\{x \in \Omega \ / \ u(x) \neq 0\}$. Denotamos el soporte de u con $supp(u)$. Así,

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega \ / \ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Definición 2.1.8 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Consideremos el espacio vectorial de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables y con soporte compacto en Ω, y este espacio es denotado por $C_0^\infty(\Omega)$.

Definición 2.1.9 Diremos que una sucesión de funciones $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge a $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, denotado por $\phi_n \to \phi$, cuando $n \to \infty$, si existe un subconjunto $K \subset \Omega$ tal que se verifican las siguientes condiciones

(1) $supp(\phi_n) \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $supp(\phi) \subset K$.

(2) Para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$, uniformemente sobre K.

El espacio $C_0^\infty(\Omega)$ unido con la convergencia definida anteriormente será denominado *espacio de funciones de prueba*, y es denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 2.1.10 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Una *distribución* sobre Ω es un funcional lineal y continuo de $\mathcal{D}(\Omega)$ sobre $\mathbb{K}$. Así, $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ es distribución si

(i) $T(\alpha\phi + \psi) = \alpha T(\phi) + T(\psi)$; $\alpha \in \mathbb{K}$, $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(ii) Si $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces, $T(\phi_n) \to T(\phi)$ en $\mathbb{K}$.

El conjunto de distribuciones sobre Ω se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Con las operaciones usuales de funciones, $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio vectorial. Por notación de Schwarz, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ significa que $T(\phi) \equiv \langle T, \phi \rangle$.

Definición 2.1.11 Se define la *derivada distribucional* o derivada débil de orden α de una distribución T, denotada por $D^\alpha T$, como

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \text{ para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definición 2.1.12 *(Espacios de Sobolev)* Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$, se define *el espacio de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ es la derivada de u en el sentido de las distribuciones.

Sea la norma

$$\|u\|_{W^{m,\,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

con esta norma, $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado *el espacio de Sobolev de orden m*. Para $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ es denotado por $H^m(\Omega)$, y este espacio es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \, D^\alpha v(x) \, dx$$

y norma dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

También se define el espacio de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Proposición 2.1.13 *(Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg) Sean j y m enteros que satisfacen $0 \leq j < m$, y sea $1 \leq q, r \leq \infty$, y $p \in \mathbb{R}$, $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$ tal que*

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q}.$$

Entonces,

(i) Para todo $u \in W^{m,r}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, existe una constante positiva C que depende solo de n, m, j, q, r y a tal que satisfacen la siguiente desigualdad

$$\left\|D^j u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\|D^m u\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^a \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-a} \tag{2.1}$$

con la siguiente excepción: si $1 < r < \infty$ y $m - j - \frac{n}{r}$ es un entero no negativo, entonces, la desigualdad (2.1) se satisface solo para $\frac{j}{m} \leq a < 1$.

(ii) Para todo $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ donde Ω es un dominio acotado con frontera regular, entonces existen dos constantes C_1 y C_2 tales que satisfacen la siguiente desigualdad

$$\left\|D^j u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \left\|D^m u\right\|_{L^r(\Omega)}^a \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} + C_2 \|u\|_{L^q(\Omega)} \tag{2.2}$$

con la misma excepción que en (i).

En particular, para todo $u \in W_0^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, la constante C_2 en (2.2) puede ser tomada como cero.

Demostración. Ver Nirenberg [24], pp. 125 y 126.

Proposición 2.1.14 *(Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces, existe una única constante positiva C_p que depende solo de Ω y de n tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,;\ \textit{para todo } u \in H_0^1(\Omega)\,,$$

donde C_p se denomina constante de Poincaré.

Demostración. Ver Brezis [2], p. 218.

Observación 2.1.15 *La desigualdad de Poincaré sigue siendo válida para funciones que se anulan en apenas una parte de la frontera de $\partial\Omega$ y también para funciones que tienen media nula.*

2.2. Semigrupos de clase C_0

Definición 2.2.1 Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{L}(X)$ el álgebra de los operadores lineales acotados en X, $S : X \to X$, se denomina *semigrupo de operadores lineales y acotados* sobre X a una aplicación

$$\begin{array}{rccccccc} S: & [0,+\infty\rangle & \longrightarrow & \mathcal{L}(X) & & & \\ & t & \longmapsto & S(t): & X & \longrightarrow & X \\ & & & & x & \longmapsto & S(t)\,x \end{array}$$

que verifica las siguientes condiciones

(i) $S(0) = I$, donde I es el operador identidad de $\mathcal{L}(X)$.

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$; para todo $t, s \in \mathbb{R}_0^+$.

Se dice que el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es de *clase* C_0 si se verifica

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0$; para todo $x \in X$.

Proposición 2.2.2 *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0, entonces*

(i) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = \inf\limits_{t>0} \dfrac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = w_0.$

(ii) Para cada $w > w_0$, existe una constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt};\ \textit{para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Ver Gomes [10], pp. 12 y 13.

Definición 2.2.3 El número w_0 dado en la Proposición 2.2.2 es llamado *tipo* del semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. También se le denomina como el *límite del crecimiento exponencial* del semigupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Observación 2.2.4 Cuando $w_0 < 0$, existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M,\ \text{para todo } t \geq 0.$$

En efecto, pues si suponemos que $w_0 < 0$, entonces por la propiedad Arquimedeana, existe $w \in (w_0, 0)$, lo que implica que $e^{wt} < 1$, luego sigue que, existe $M \geq 1$ tal que para todo $t \geq 0$, se cumple

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt} \leq M,$$

concluyendo, así que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M,\ \text{para todo } t \geq 0.$$

En ese caso, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un *semigrupo uniformemente acotado de clase C_0*. Si, además de esto, $M = 1$, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado *semigrupo de contracciones de clase C_0*.

Definición 2.2.5 Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 en X. El operador $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq X \to X$ con dominio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X\ ;\ \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

y definido por

$$\mathcal{A}x = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x\ ,\quad \text{para todo}\quad x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

se denomina *generador infinitesimal*, o, simplemente, *generador* del semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Proposición 2.2.6 *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo de clase* C_0 *y* $\mathcal{A}$ *el generador infinitesimal de* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

(i) Si $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, *entonces,* $S(t)x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, *para todo* $t > 0$.

(ii) $\dfrac{d}{dt}S(t)\,x = \mathcal{A}S(t)\,x = S(t)\,\mathcal{A}x$.

Demostración. Ver Gomes [10], pp. 13 y 14.

Definición 2.2.7 Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{A} : X \to X$ un operador lineal. Definimos

(i) El *conjunto resolvente* de $\mathcal{A}$, denotado por $\rho(\mathcal{A})$, por

$$\rho(\mathcal{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; \text{Existe}\,(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ y es acotado}\right\}.$$

(ii) El *espectro* de $\mathcal{A}$, denotado por $\sigma(A)$, por

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} - \rho(\mathcal{A}).$$

(iii) El operador lineal $R(\lambda, \mathcal{A}), \lambda \in \rho(\mathcal{A})$, es llamado *resolvente* de $\mathcal{A}$. Es decir, el resolvente de $\mathcal{A}$ es

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}.$$

Teorema 2.2.8 *(Hille-Yosida) Para que un operador lineal* $\mathcal{A}$, *definido en su dominio* $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X$ *y con valores en* X, *sea el generador infinitesimal de un semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de clase* C_0, *es necesario y suficiente que*

(i) $\mathcal{A}$ *sea cerrado y su dominio sea denso en* X.

(ii) Existan números reales M *y* w *tales que para cada número real* $\lambda > w$, *se tiene*

$$\lambda \in \rho(\mathcal{A})$$

y

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Ver Gomes [10], pp. 32-35.

Definición 2.2.9

(i) Sea X un espacio de Banach complejo, X^* el dual de X y $\langle .,. \rangle$ la dualidad entre X y X^*, denotemos, para cada $x \in X$,

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle_{X \times X^*} = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}.$$

Observemos que se cumple, por el Teorema de Hahn-Banach, que, para todo $x \in X$, $J(x) \neq \varnothing$. Una *aplicación dualidad* es una aplicación $j : X \to X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$ para todo $x \in X$.

(ii) Decimos que el operador lineal $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ es *disipativo* si, para alguna aplicación dualidad j se tiene

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle_{X \times X^*} \leq 0; \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Teorema 2.2.10 *(Lumer-Phillips) Sea X un espacio de Banach y un operador lineal $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ con dominio denso $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ en X.*

(i) Si $\mathcal{A}$ es disipativo y $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces, $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 en X.

(ii) Si $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 en X, entonces, $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$, y $\mathcal{A}$ es disipativo. Más aun para todo $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, x^* \rangle_{X \times X^*} \leq 0$, para todo $x^* \in J(x)$.

Demostración. Ver Pazy [25], pp. 14 y 15.

Corolario 2.2.11 *Sea $\mathcal{A}$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{A}$ es disipativo y $0 \in \rho(\mathcal{A})$, entonces, $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$ de clase C_0.*

Demostración. Ver Muñoz [21], p. 38.

Definición 2.2.12 Sea X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un operador lineal en X y consideremos para cada $U_0 \in X$ el *problema de Cauchy abstracto*

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} = \mathcal{A}U(t) & t > 0 \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Llamaremos *solución* de (2.3), a toda función $U : [0, +\infty) \to X$, continua para todo $t \geq 0$, continuamente diferenciable para $t > 0$, tal que $U(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para todo $t > 0$ y que satisface (2.3). La segunda igualdad en (2.3) se denomina *condición inicial* del problema y U_0 es llamado su *valor inicial*.

Teorema 2.2.13 *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ su generador infinitesimal. Entonces, $U(t) = S(t)U_0$ es la única solución de (2.3), para $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Además de eso,*

$$U \in C^1([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})).$$

Demostración. Ver Muñoz [21], pp. 17 y 18.

Definición 2.2.14 Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y $\mathcal{A}$ su generador infinitesimal. Denotemos por $\mathcal{A}^0 = I$, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$ y, supongamos que $\mathcal{A}^{n-1}$ esté bien definido, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos el operador $\mathcal{A}^n$ por

$$\mathcal{A}^n x = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{n-1}x\right), \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n),$$

donde

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^n) = \left\{x \ ; \ x \in \mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{n-1}\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}^{n-1}x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\right\}.$$

Proposición 2.2.15 *Sea $\mathcal{A}$ el generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0, entonces, para todo $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, se cumple que*

$$S(t)x \in C^{n-k}\left([0, \infty); [\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^k\right)]\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Ver Gomes [10], p. 23.

Definición 2.2.16 Un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ decimos que es *exponencialmente estable* si existen constantes $\alpha > 0$ y $M \geq 1$ tales que satisfacen

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Me^{-\alpha t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Teorema 2.2.17 *(Gearhart) Sea $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ un semigrupo de contracciones de clase C_0 en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces, $S(t)$ es exponencialmente estable si y solo si*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{2.4}$$

y

$$\lim_{|\beta|\to\infty} sup \left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \tag{2.5}$$

Demostración. Ver Raposo [27], pp. 23 y 24.

Definición 2.2.18 *(Semigrupos analíticos)* Se designa por $\Delta(\alpha)$ al sector del plano complejo definido por

$$\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0, |\arg z| < \alpha, 0 < \alpha \leq \pi\}.$$

Se dice que una función

$$\begin{array}{rccccc} S: & \Delta(\alpha) \cup \{0\} & \longrightarrow & \mathcal{L}(X) & & \\ & z & \longmapsto & S(z): & X & \longrightarrow & X \\ & & & & x & \longmapsto & S(z)\,x \end{array}$$

donde $0 < \alpha \leq \pi/2$, es un semigrupo analítico de clase C_0 en $\Delta(\alpha)$, si

(i) $S(0) = I$;

(ii) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)\,S(z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in \triangle(\alpha)$;

(iii) $\lim\limits_{z\to 0} S(z)\,x = x$, para todo $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \alpha$;

(iv) S es analítico en $\Delta(\alpha)$.

Teorema 2.2.19 *Sea $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ un semigrupo de contracciones de clase C_0 en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Supongamos que*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Entonces, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es analítico si y solo si

$$\lim_{|\beta|\to\infty} sup \left\|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \tag{2.7}$$

Demostración. Ver Liu-Zheng [18], pp. 5-8.

Observación 2.2.20 De acuerdo al teorema anterior, si $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ es un semigrupo de contracciones de clase C_0 analítico sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ es exponencialmente estable.

2.3. El método de diferencias finitas

De acuerdo a Carrillo, Gonzáles y Mendoza (Ver [5], pp. 37 y 38):

El método de diferencias finitas consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un número finito de puntos seleccionados en el dominio. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en los puntos seleccionados. Los valores de la variable dependiente en los puntos seleccionados se convierten en las incógnitas. La solución del sistema de ecuaciones algebraicas permite obtener la solución aproximada en cada punto seleccionado de la malla.

El procedimiento general de solución numérica mediante el método de diferencias finitas, por lo general, sigue los siguientes pasos

(i) Generar una malla del dominio, donde una malla es un conjunto finito de puntos en los cuales buscaremos la solución aproximada de la ecuación diferencial parcial.

(ii) Sustituir las derivadas correspondientes con algunas de las fórmulas de diferencias finitas en un punto. De esta forma, obtendremos un sistema lineal algebraico de ecuaciones de la forma $Au = f$.

(iii) Resolver el sistema lineal algebraico de ecuaciones $Au = f$, y así obtener la solución aproximada en cada punto de la malla.

En el capítulo 5, necesitaremos de las aproximaciones para las derivadas espaciales y temporales de diferentes órdenes, y estos resultados se logran expresando las funciones por medio de sus series de Taylor y considerando el error de truncamiento. Algunos libros, donde se puede revisar las deducciones de las fórmulas para las aproximaciones de las derivadas, que usaremos son LeVeque [16], Strikwerda [32], Hoffmann y Chiang [13] y Carrillo et. al [5], entre otros. Necesitaremos de los siguientes resultados

$$\partial_t w_i^j = \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}\left(\Delta t\right) \tag{2.8}$$

$$\partial_x^2 w_i^j = \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right) \tag{2.9}$$

$$\partial_x^3 w_i^j = \frac{w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right) \tag{2.10}$$

$$\partial_x^4 w_i^j = \frac{w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j}{(\Delta x)^4} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right), \tag{2.11}$$

donde $w(x_i, t_j) = w_i^j$, $\triangle x$ y $\triangle t$ son los tamaños de paso de la malla, espacial y temporal respectivamente, y, además, los últimos sumandos de cada una de las fórmulas de (2.8) a (2.11) son los órdenes de aproximación.

Una vez que hemos obtenido el esquema numérico discreto asociado a nuestro modelo que estudiaremos conseguido aplicando aproximaciones usando las fórmulas (2.8)-(2.11), debemos determinar si podemos confiar en dicho esquema, y, para esto, debemos estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema.

2.3.1. Consistencia, estabilidad y convergencia

Las siguientes definiciones pueden ser encontradas en Hoffmann y Chiang [13], p. 23.

Definición 2.3.1 Una aproximación en diferencias finitas de una EDP es *consistente* si la ecuación en diferencias finitas tiende a la EDP cuando el tamaño de la malla tiende a cero.

Definición 2.3.2 Un esquema numérico es *estable* si cualquier error introducido en la ecuación en diferencias finitas no crece con la solución de la ecuación en diferencias finitas.

Definición 2.3.3 Un esquema en diferencias finitas es *convergente* si la solución de la ecuación en diferencias finitas tiende a la de la EDP cuando el tamaño de la malla tiende a cero.

Surge una pregunta natural: ¿habrá una relación entre consistencia, estabilidad y convergencia? La respuesta nos las da el siguiente teorema:

Teorema 2.3.4 *(Teorema de equivalencia de Lax) Un esquema numérico para un problema de valores iniciales bien planteado es convergente si y solo si es consistente y estable.*

Demostración. Ver Morton y Mayers [20], p. 159.

2.3.2. Análisis de estabilidad de von Neumann

Uno de los procedimientos más usados (por ser menos pesado matemáticamente) para determinar la estabilidad (o inestabilidad) del esquema numérico que se obtiene al usar el Método de Diferencias Finitas se llama *análisis de estabilidad de von Neumann*, que es especialmente útil en problemas definidos en todo el espacio con mallados regulares. En esencia, este método introduce una línea inicial de errores representada por una serie de Fourier y considera el crecimiento (o decaimiento) de estos errores a medida que x aumenta. El método se aplica, en un sentido teórico, solo a problemas de valor inicial con datos iniciales periódicos; como tal, separa completamente la influencia de las condiciones de frontera. Como el enfoque de von Neumann se basa en las series de Fourier, generalmente, se limita a EDP lineales con coeficientes constantes.

En la sección 5.2, aplicaremos el análisis de estabilidad de von Neumann al esquema discreto aproximado asociado al sistema (1.3)-(1.7).

El análisis de estabilidad de von Neumann sigue los siguientes pasos

(i) Supongamos que tenemos el esquema numérico de un determinado modelo obtenido por diferencias finitas, dado por

$$u^{n+1} = Bu^n, \tag{2.12}$$

donde u es el vector solución en el nivel de tiempo n y B es una matriz.

(ii) Expandir la solución u de (2.12) en una serie finita de Fourier de la forma $u^n(x) = \sum_k \overline{u}^n(k) e^{ikx}$ con $i = \sqrt{-1}$, la que, luego de reemplazar en (2.12), origina el siguiente resultado

$$\overline{u}^{n+1} = G\left(\triangle x, \triangle t, k\right) \overline{u}^n, \tag{2.13}$$

y a la matriz G se le denomina *factor de amplificación* o *matriz de amplificación de errores.*

(iii) Para controlar que ningún nodo de Fourier se amplifique, es decir, que el radio espectral de la matriz G deba ser menor o igual que 1, se utiliza el siguiente resultado:

Proposición 2.3.5 *(Condición de von Neumann) Una condición necesaria para la estabilidad de un esquema numérico en diferencias finitas es que exista una constante K' (independiente de $\triangle x$, $\triangle t$ y k) tal que se cumpla*

$$|\lambda_i(k)| \leq 1 + K' \triangle t, \tag{2.14}$$

para cada autovalor $\lambda_i(k)$ de la matriz de amplificación de errores G. Si cada autovalor es independiente de $\triangle x$ y $\triangle t$, la condición de estabilidad (2.14) *puede ser reemplazada por la condición de estabilidad restringida*

$$|\lambda_i(k)| \leq 1. \tag{2.15}$$

Demostración. Ver Morton y Mayers [20], p. 165.

Capítulo 3

Estudio analítico de la viga de Timoshenko amortiguada

3.1. Formulación del problema

El modelo de la viga de Timoshenko amortiguada que estudiaremos es

$$\rho w_{tt} + EI\left(w_x + r\right)_{xxx} = 0, \tag{3.1}$$

$$2\sigma r_t + \alpha r - EI\left(w_x + r\right)_{xx} = 0, \tag{3.2}$$

con condiciones de frontera e iniciales

$$w = w_x + r = 0 \text{ , en } x = 0, \tag{3.3}$$

$$\left(w_x + r\right)_x = \left(w_x + r\right)_{xx} = 0 \text{ , en } x = L, \tag{3.4}$$

$$w(x,0) = w_0(x) \text{ , } w_t(x,0) = w_1(x) \text{ , } r(x,0) = r_0(x), \tag{3.5}$$

donde t denota la variable temporal; y x, la variable espacial definida en $(0, L)$, siendo L la longitud de la viga. Las funciones $w = w(x,t)$ y $r = r(x,t)$ son la deflexión lateral y el ángulo de corte, respectivamente, aplicados en el punto x en el instante de tiempo t, y, además, ρ, E, I, σ y α son constantes positivas que describen las características físicas del modelo, más precisamente, ρ es la densidad del material, E es el módulo de Young, I es el momento de inercia, σ es la fatiga axial y α es el factor de corrección de corte.

Para nuestro modelo, consideramos la viga empotrada en un extremo y libre en el otro extremo, es decir, es una viga en voladizo (ver figura 3.1). Además,

supondremos que inicialmente se encuentra en equilibrio, y que está constituida de material isotrópico, es linealmente elástica y homogénea.

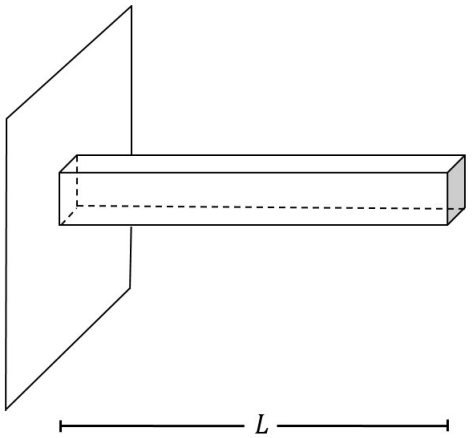


Figura 3.1: Viga en posición de equilibrio.

Nuestro principal interés en este capítulo es estudiar la generación del semigrupo de contracciones de clase C_0 a partir del operador diferencial asociado al sistema (3.1)-(3.5), y la principal herramienta que usaremos es el Corolario 2.2.11, del capítulo 2.

Este capítulo tiene la siguiente organización: en la sección 2, deduciremos el espacio de fase, mientras que en la sección 3, estudiaremos la existencia y unicidad de la solución del sistema acoplado (3.1)-(3.5), que equivale a encontrar la única solución del problema de Cauchy abstracto vinculado al sistema (3.1)-(3.5), y, para ello, definiremos un operador diferencial asociado al modelo, el cual probaremos que es disipativo, y que genera un semigrupo de contracciones de clase C_0.

3.2. El espacio de fase

Para poder deducir el espacio de fase donde resolveremos el modelo (3.1)-(3.5), calcularemos la energía del sistema. Supondremos regularidad suficiente para w y r.

Multiplicando la ecuación (3.1) por w_t e integrando de 0 a L

$$\rho \int_0^L w_{tt} w_t dx + EI \int_0^L (w_x + r)_{xxx} w_t dx = 0. \tag{3.6}$$

Integrando por partes la segunda integral de (3.6), a la que denotamos por I_1, y usando las condiciones de frontera (3.3) y (3.4), sigue que

$$I_1 = \left[w_t \left(w_x + r\right)_{xx}\right] |_0^L - \int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx} w_{tx} dx$$

$$I_1 = w_t|_{x=L} \underbrace{\left(w_x + r\right)_{xx} |_{x=L}}_{=0} - w_t|_{x=0} \underbrace{\left(w_x + r\right)_{xx} |_{x=0}}_{=0} - \int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx} w_{tx} dx$$

$$I_1 = - \int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx} w_{tx} dx.$$

Luego, reemplazando el resultado obtenido para I_1 en (3.6), tenemos

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |w_t|^2 \, dx - EI \int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx} w_{tx} dx = 0. \tag{3.7}$$

Ahora, multiplicando la ecuación (3.2) por r_t e integrando de 0 a L

$$2\sigma \int_0^L r_t r_t dx + \alpha \int_0^L r r_t dx - EI \int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx} r_t dx = 0$$

$$2\sigma \int_0^L \left(r_t\right)^2 dx + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |r|^2 \, dx - EI \int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx} r_t dx = 0. \tag{3.8}$$

Sumando (3.7) y (3.8), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho |w_t|^2 + \alpha |r|^2\right) dx\right] - EI \int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx} \left(w_x + r\right)_t dx + 2\sigma \int_0^L \left(r_t\right)^2 dx = 0. \tag{3.9}$$

Integrando por partes la segunda integral de (3.9), a la que denotamos por I_2, y usando las condiciones de frontera (3.4) y (3.3)

$$I_2 = \left[\left(w_x + r\right)_t \left(w_x + r\right)_x\right] |_0^L - \int_0^L \left(w_x + r\right)_x \left[\left(w_x + r\right)_x\right]_t dx$$

$$I_2 = \left(w_x + r\right)_t |_{x=L} \underbrace{\left(w_x + r\right)_x |_{x=L}}_{=0} - \left(w_x + r\right)_t |_{x=0} \underbrace{\left(w_x + r\right)_x |_{x=0}}_{=0}$$
$$- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left|\left(w_x + r\right)_x\right|^2 dx$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left|\left(w_x + r\right)_x\right|^2 dx.$$

Seguidamente, reemplazando el resultado obtenido para I_2 en (3.9), tenemos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho |w_t|^2 + \alpha |r|^2 + EI \left|\left(w_x + r\right)_x\right|^2\right) dx\right] + 2\sigma \int_0^L \left(r_t\right)^2 dx = 0. \tag{3.10}$$

La ecuación (3.10) nos motiva a definir la energía asociada al sistema (3.1)-(3.5) como

$$\mathbb{E}(t) := \frac{1}{2}\left[\int_0^L \left(\rho |w_t|^2 + \alpha |r|^2 + EI |(w_x + r)_x|^2\right) dx\right]. \tag{3.11}$$

Entonces, a partir de (3.10), se verifica que

$$\frac{d\mathbb{E}(t)}{dt} = -2\sigma \int_0^L (r_t)^2 \, dx. \tag{3.12}$$

Así, de (3.12), y siendo $\sigma > 0$, sigue que

$$\frac{d\mathbb{E}(t)}{dt} \leqslant 0.$$

Por lo tanto, la energía es no creciente.

En la energía definida en (3.11), reemplazemos $v = w_t$, consiguiendo

$$\mathbb{E}(t) := \frac{1}{2}\left[\int_0^L \left(\rho |v|^2 + \alpha |r|^2 + EI |(w_x + r)_x|^2\right) dx\right]. \tag{3.13}$$

A partir de (3.13), observamos que, para que la energía $\mathbb{E}(t)$ esté bien definida, se requiere que w, v y r verifiquen las siguientes condiciones

$$v \in L^2(0, L), r \in L^2(0, L),$$

$$w \in H^1(0, L), (w_x + r) \in H^1(0, L),$$

y, si les agregamos las condiciones de frontera (3.3)

$$w|_{x=0} = 0, (w_x + r)|_{x=0} = 0,$$

nos permite definir el espacio de fase $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = \left\{ z = (w, v, r)^T \;\middle|\; \begin{array}{c} w \in H^1(0, L), w|_{x=0} = 0\ ,\ v, r \in L^2(0, L), \\ (w_x + r) \in H^1(0, L), (w_x + r)|_{x=0} = 0. \end{array} \right\}, \tag{3.14}$$

equipado con la norma

$$\|z\|_{\mathcal{H}} = \left(EI \|(w_x + r)_x\|_{L^2}^2 + \rho \|v\|_{L^2}^2 + \alpha \|r\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

que es inducida por el producto interno

$$\langle (w_1, v_1, r_1), (w_2, v_2, r_2) \rangle_{\mathcal{H}} = EI \int_0^L (w_{1,x} + r_1)_x \overline{(w_{2,x} + r_2)}_x dx + \rho \int_0^L v_1 \overline{v}_2 dx + \alpha \int_0^L r_1 \overline{r}_2 dx,$$

para todo $(w_1, v_1, r_1), (w_2, v_2, r_2) \in \mathcal{H}$. Con este producto interno, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

3.3. Existencia y unicidad

3.3.1. El problema de Cauchy abstracto

Usaremos la teoría de semigrupos de operadores lineales para demostrar la existencia y unicidad de la solución del modelo de Timoshenko (3.1)-(3.5). Para concretar ese objetivo, redefinimos el modelo inicial (3.1)-(3.5) como un sistema de primer orden en el tiempo. Procedemos a despejar

De (3.1): $w_{tt} = -\dfrac{EI}{\rho}(w_x + r)_{xxx}$.

De (3.2): $r_t = \dfrac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r$.

Ahora, sea $z = (w, v, r)^T$, donde $v = w_t$, entonces, $v_t = w_{tt}$. Luego tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ v \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \\ v_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w_{tt} \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\dfrac{EI}{\rho}(w_x + r)_{xxx} \\ \dfrac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r \end{pmatrix}.$$

De donde conseguimos que

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ v \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\dfrac{EI}{\rho}(.)_{xxxx} & 0 & -\dfrac{EI}{\rho}(.)_{xxx} \\ \dfrac{EI}{2\sigma}(.)_{xxx} & 0 & \dfrac{EI}{2\sigma}(.)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}(.) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ v \\ r \end{pmatrix}.$$

Definimos $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, el operador diferencial lineal asociado al sistema (3.1)-(3.5), dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\dfrac{EI}{\rho}(.)_{xxxx} & 0 & -\dfrac{EI}{\rho}(.)_{xxx} \\ \dfrac{EI}{2\sigma}(.)_{xxx} & 0 & \dfrac{EI}{2\sigma}(.)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}(.) \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Notemos que para cada $z = (w, v, r)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, se cumple

$$\mathcal{A}z = \begin{pmatrix} v \\ -\dfrac{EI}{\rho}(w_x + r)_{xxx} \\ \dfrac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Para definir el dominio de $\mathcal{A}$, recordemos que

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{z \in \mathcal{H} \ / \ \mathcal{A}z \in \mathcal{H}\}.$$

Observemos que $\mathcal{A}z \in \mathcal{H}$, implica que

$$\begin{pmatrix} v \\ -\dfrac{EI}{\rho}(w_x + r)_{xxx} \\ \dfrac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r \end{pmatrix} \in \mathcal{H},$$

de donde usando la definición del espacio de fase $\mathcal{H}$ (ver (3.14)), obtenemos

(i) $v \in H^1(0, L)$;

(ii) $v|_{x=0} = 0$;

(iii) $-\dfrac{EI}{\rho}(w_x + r)_{xxx} \in L^2(0, L)$;

(iv) $\left(\dfrac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r\right) \in L^2(0, L)$;

(v) $\left(v_x + \dfrac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r\right) \in H^1(0, L)$;

(vi) $\left(v_x + \dfrac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r\right)\Big|_{x=0} = 0.$

Observemos que

(1) De (3.14), (iv) y (iii), que, $(w_x + r) \in H^3(0, L)$;

(2) A partir de reescribir $v_x - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r$, como

$$v_x - \frac{\alpha}{2\sigma}r = \left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right) - \frac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx},$$

ya que cada término del segundo miembro pertenece a $H^1(0,L)$, conseguimos $\left(v_x - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right) \in H^1(0,L)$.

Ahora, considerando las relaciones (i), (ii), (1), (3.4), (2) y (vi), definimos el dominio del operador $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ z \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{array}{c} v \in H^1(0,L), v|_{x=0} = 0 \;, (w_x + r) \in H^3(0,L), \\ (w_x + r)_x|_{x=L} = (w_x + r)_{xx}|_{x=L} = 0 \;, \\ \left(v_x - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right) \in H^1(0,L), \\ \left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)\Big|_{x=0} = 0. \end{array} \right\}. \quad (3.17)$$

Las condiciones iniciales (3.5) nos llevan a definir

$$z_0 = z(0) = \begin{pmatrix} w(0) \\ w_t(0) \\ r(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el sistema (3.1)-(3.5) se reduce al siguiente problema de evolución de primer orden autónomo

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = \mathcal{A}z(t), \; t > 0 \\ z(0) = z_0 = (w_0, w_1, r_0)^T \end{cases}. \quad (3.18)$$

Se consigue así la formulación abstracta de nuestro modelo, es decir, el problema (3.1)-(3.5) es equivalente a (3.18). Lo siguiente es estudiar, usando la teoría de semigrupos, la existencia y unicidad de la solución de (3.18) empleando el Teorema 2.2.13.

3.3.2. El operador $\mathcal{A}$ es disipativo

Un requisito para probar que el operador $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 es la disipatividad del operador $\mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{A}$ goza de esta propiedad.

Lema 3.3.1 *El operador $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, definido en* (3.15) *con $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ definido en* (3.17)*, es disipativo.*

Demostración. Dado $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, usando (3.16) y la definición de producto interno en $\mathcal{H}$, tenemos

$$\langle \mathcal{A}z, z\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} v \\ -\dfrac{EI}{\rho}\left(w_x + r\right)_{xxx} \\ \dfrac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma}r \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} w \\ v \\ r \end{pmatrix}^T \right\rangle$$

$$= EI\int_0^L \left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)_x \overline{\left(w_x + r\right)_x} dx$$

$$- EI\int_0^L \left(w_x + r\right)_{xxx} \overline{v} dx + \ \alpha\int_0^L \left(\frac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)\overline{r} dx. \tag{3.19}$$

Integrando por partes la primera y la segunda integral de (3.19), a las que denotamos por I_3 y I_4, respectivamente, y usando las condiciones de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ definidas en (3.17), obtenemos

- Para I_3 :

$$I_3 = \left\{\overline{\left(w_x + r\right)_x}\left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)\right\}\Bigg|_0^L$$
$$- \int_0^L \left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)\overline{\left(w_x + r\right)}_{xx} dx$$

$$I_3 = \underbrace{\overline{\left(w_x + r\right)_x}|_{x=L}}_{=0}\left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)\Bigg|_{x=L}$$
$$- \overline{\left(w_x + r\right)_x}|_{x=0}\underbrace{\left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)\Bigg|_{x=0}}_{=0}$$
$$- \int_0^L \left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)\overline{\left(w_x + r\right)}_{xx} dx$$

$$I_3 = -\int_0^L \left(v_x + \frac{EI}{2\sigma}\left(w_x + r\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma}r\right)\overline{\left(w_x + r\right)}_{xx} dx$$

$$I_3 = -\int_0^L v_x\overline{\left(w_x + r\right)}_{xx} dx - \frac{EI}{2\sigma}\int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx}\overline{\left(w_x + r\right)}_{xx} dx + \frac{\alpha}{2\sigma}\int_0^L r\overline{\left(w_x + r\right)}_{xx} dx.$$

- Para I_4 :

$$I_4 = \left\{\overline{v}\left(w_x + r\right)_{xx}\right\}|_0^L - \int_0^L \left(w_x + r\right)_{xx}\overline{v}_x dx$$

$$I_4 = \overline{v}|_{x=L} \underbrace{(w_x + r)_{xx}|_{x=L}}_{=0} - \underbrace{\overline{v}|_{x=0}}_{=0} (w_x + r)_{xx}|_{x=0} - \int_0^L (w_x + r)_{xx} \overline{v}_x dx$$

$$I_4 = -\int_0^L (w_x + r)_{xx} \overline{v}_x dx.$$

Reemplazando en (3.19) los resultados obtenidos para I_3 e I_4, y efectuando operaciones indicadas

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}z, z\rangle_{\mathcal{H}} &= -EI\int_0^L v_x \overline{(w_x + r)}_{xx} dx - \frac{E^2I^2}{2\sigma}\int_0^L (w_x + r)_{xx} \overline{(w_x + r)}_{xx} dx \\
&\quad + \frac{\alpha EI}{2\sigma}\int_0^L r\overline{(w_x + r)}_{xx} dx + EI\int_0^L (w_x + r)_{xx} \overline{v}_x dx \\
&\quad + \frac{\alpha EI}{2\sigma}\int_0^L (w_x + r)_{xx} \overline{r} dx - \frac{\alpha^2}{2\sigma}\int_0^L r\overline{r} dx \\
&= \left(\int_0^L EI\overline{v}_x (w_x + r)_{xx} dx - \int_0^L EIv_x \overline{(w_x + r)}_{xx} dx\right) \\
&\quad - \frac{E^2I^2}{2\sigma}\int_0^L (w_x + r)_{xx} \overline{(w_x + r)}_{xx} dx + \frac{\alpha EI}{2\sigma}\int_0^L (w_x + r)_{xx} \overline{r} dx \\
&\quad + \frac{\alpha EI}{2\sigma}\int_0^L \overline{(w_x + r)}_{xx} r dx - \frac{\alpha^2}{2\sigma}\int_0^L r\overline{r} dx \\
&= \left(\int_0^L EI\overline{v}_x (w_x + r)_{xx} dx - \overline{\int_0^L EI\overline{v}_x (w_x + r)_{xx} dx}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma}\int_0^L \left[EI (w_x + r)_{xx} - \alpha r\right]\left[EI\overline{(w_x + r)}_{xx} - \alpha\overline{r}\right] dx \\
&= 2i \operatorname{Im}\left(\int_0^L EI\overline{v}_x (w_x + r)_{xx} dx\right) - \frac{1}{2\sigma}\left\|EI (w_x + r)_{xx} - \alpha r\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\langle \mathcal{A}z, z\rangle_{\mathcal{H}} = 2i \operatorname{Im}\left(\int_0^L EI\overline{v}_x (w_x + r)_{xx} dx\right) - \frac{1}{2\sigma}\left\|EI (w_x + r)_{xx} - \alpha r\right\|_{L^2}^2. \tag{3.20}$$

Tomando parte real a cada miembro de (3.20), sigue que

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}z, z\rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2\sigma}\left\|EI (w_x + r)_{xx} - \alpha r\right\|_{L^2}^2, \tag{3.21}$$

y, entonces, siendo $\sigma > 0$, tenemos

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}z, z\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0\ ,$$

para todo $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Por tanto, el operador $\mathcal{A}$ es disipativo. ■

3.3.3. El operador $\mathcal{A}$ genera un semigrupo de contracciones de clase C_0

Para probar el siguiente resultado, usaremos el Corolario 2.2.11.

Teorema 3.3.2 *El operador $\mathcal{A}$ definido en* (3.15) *y* (3.17) *genera un semigrupo de contracciones en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de clase C_0.*

Demostración. Acabamos de probar en el Lema 3.3.1 que el operador $\mathcal{A}$ es disipativo, y, para aplicar el Corolario 2.2.11, queda por demostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ y que el dominio del operador $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{H}$.

(i) Existe la inversa del operador $\mathcal{A}$.

Probaremos que, para todo $F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$, existe un único $z = (w, v, r)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ que satisface la ecuación resolvente

$$\mathcal{A}\, z \;=\; F. \tag{3.22}$$

Usando (3.16) y (3.22), en términos de sus componentes, se origina el sistema de ecuaciones diferenciales

$$v \;=\; f \in H^1(0, L) \tag{3.23}$$

$$-EI\,(w_x + r)_{xxx} \;=\; \rho g \in L^2(0, L) \tag{3.24}$$

$$EI\,(w_x + r)_{xx} - \alpha r \;=\; 2\sigma h \in L^2(0, L)\ . \tag{3.25}$$

Luego, nuestro objetivo será probar que existe una única solución $z = (w, v, r)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ del sistema (3.23)-(3.25). Observemos que no solo de (3.23) se cumple $v \in H^1(0, L)$, sino que, también, por la definición del espacio de fase $\mathcal{H}$ (ver (3.14)), se tiene $f|_{x=0} = 0$. Entonces, se verifica inmediatamente que existe un único $v \in H^1(0, L)$ verificando $v|_{x=0} = 0$. Luego, resta probar que existen únicos w y r, además de que se verifican las otras condiciones de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dadas en (3.17). Para eso, definiremos un adecuado espacio de Hilbert y usaremos el Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.1.5), para lo cual necesitamos encontrar una relación que nos permita descubrir cómo definir una forma bilineal y un funcional lineal.

Multiplicando (3.24) por $\phi \in C_0^\infty(0,L)$ e integrando por partes

$$-EI\int_0^L (w_x+r)_{xxx}\,\overline{\phi}dx = \rho\int_0^L g\overline{\phi}dx$$

$$-EI\left\{\overline{\phi}\,(w_x+r)_{xx}\right\}|_0^L + EI\int_0^L (w_x+r)_{xx}\,\overline{\phi}_x dx = \rho\int_0^L g\overline{\phi}dx$$

$$-EI\overline{\phi}|_{x=L}\underbrace{(w_x+r)_{xx}\,|_{x=L}}_{=0} + EI\underbrace{\overline{\phi}|_{x=0}}_{=0}(w_x+r)_{xx}\,|_{x=0} + EI\int_0^L (w_x+r)_{xx}\,\overline{\phi}_x dx$$
$$= \rho\int_0^L g\overline{\phi}dx$$

es decir,

$$EI\int_0^L (w_x+r)_{xx}\,\overline{\phi}_x dx = \rho\int_0^L g\overline{\phi}dx. \tag{3.26}$$

Integramos nuevamente por partes la integral del primer miembro de (3.26)

$$EI\left\{\overline{\phi}_x\,(w_x+r)_x\right\}|_0^L - EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{\phi}_{xx}dx = \rho\int_0^L g\overline{\phi}dx$$

$$EI\overline{\phi}_x|_{x=L}\underbrace{(w_x+r)_x\,|_{x=L}}_{=0} - EI\underbrace{\overline{\phi}_x|_{x=0}}_{=0}(w_x+r)_x\,|_{x=0} - EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{\phi}_{xx}dx$$
$$= \rho\int_0^L g\overline{\phi}dx$$

$$EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{\phi}_{xx}dx = -\rho\int_0^L g\overline{\phi}dx \tag{3.27}$$

Análogamente, multiplicamos (3.25) por $\psi \in C_0^\infty(0,L)$ e integrando por partes

$$EI\int_0^L (w_x+r)_{xx}\,\overline{\psi}dx - \alpha\int_0^L r\overline{\psi}dx = 2\sigma\int_0^L h\overline{\psi}dx$$

$$EI\left\{\overline{\psi}\,(w_x+r)_x\right\}|_0^L - EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{\psi}_x dx - \alpha\int_0^L r\overline{\psi}dx = 2\sigma\int_0^L h\overline{\psi}dx$$

$$EI\overline{\psi}|_{x=L}\underbrace{(w_x+r)_x\,|_{x=L}}_{=0} - EI\underbrace{\overline{\psi}|_{x=0}}_{=0}(w_x+r)_x\,|_{x=0} - EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{\psi}_x dx$$
$$-\alpha\int_0^L r\overline{\psi}dx = 2\sigma\int_0^L h\overline{\psi}dx$$

$$EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{\psi}_x dx + \alpha\int_0^L r\overline{\psi}dx = -2\sigma\int_0^L h\overline{\psi}dx. \tag{3.28}$$

Sumamos (3.27) con (3.28), y, luego, por la linealidad de la integral en los dos primeros términos del primer miembro, obtenemos

$$EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{\phi}_{xx}dx + EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{\psi}_x dx + \alpha\int_0^L r\overline{\psi}dx$$
$$= -\rho\int_0^L g\overline{\phi}dx - 2\sigma\int_0^L h\overline{\psi}dx$$

$$EI\int_0^L (w_x+r)_x\left(\overline{\phi}_{xx}+\overline{\psi}_x\right)dx + \alpha\int_0^L r\overline{\psi}dx = -\rho\int_0^L g\overline{\phi}dx - 2\sigma\int_0^L h\overline{\psi}dx$$

$$EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{(\phi_x+\psi)}_x dx + \alpha\int_0^L r\overline{\psi}dx = -\rho\int_0^L g\overline{\phi}dx - 2\sigma\int_0^L h\overline{\psi}dx. \quad (3.29)$$

Consideremos $\{\phi,\psi\} = \{\widetilde{w},\widetilde{r}\}$ para luego reemplazarlo en (3.29), y entonces

$$EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{(\widetilde{w}_x+\widetilde{r})}_x dx + \alpha\int_0^L r\overline{\widetilde{r}}dx = -\int_0^L \rho g\overline{\widetilde{w}}dx - \int_0^L 2\sigma h\overline{\widetilde{r}}dx. \quad (3.30)$$

Para probar que existe y es único el par de soluciones (w,r) de (3.24) y (3.25), definimos el espacio

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ (w,r) \;\middle|\; \begin{array}{l} w\in H^1(0,L), w|_{x=0}=0\ ,\ r\in L^2(0,L)\,, \\ (w_x+r)\in H^1(0,L), (w_x+r)\,|_{x=0}=0\ . \end{array} \right\}, \quad (3.31)$$

equipado con el producto interno

$$\langle (w,r),(\widetilde{w},\widetilde{r})\rangle_{\mathcal{H}_1} = EI\,\langle (w_x+r)_x, (\widetilde{w}_x+\widetilde{r})_x\rangle_{L^2} + \alpha\,\langle r,\widetilde{r}\rangle_{L^2},$$

que induce la norma $\|.\|_{\mathcal{H}_1}:\ \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|(w,r)\|_{\mathcal{H}_1} = \left(EI\,\|(w_x+r)_x\|_{L^2}^2 + \alpha\,\|r\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que $\mathcal{H}_1$ es un espacio de Hilbert. Luego, para poder usar el Teorema de Lax-Milgram, motivados por (3.30), definimos la forma sesquilineal

$$B:\mathcal{H}_1\times\ \mathcal{H}_1\ \longrightarrow\ \mathbb{C}$$

considerando la expresión del primer miembro de (3.30), es decir, por

$$B\left((w,r),(\widetilde{w},\widetilde{r})\right) = EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{(\widetilde{w}_x+\widetilde{r})}_x dx + \alpha\int_0^L r\overline{\widetilde{r}}dx.$$

Observemos que, $B(.,.)$ es coerciva, pues, para $(w,r)\in\mathcal{H}_1$, se verifica

$$\begin{aligned} B\left((w,r),(w,r)\right) &= EI\int_0^L (w_x+r)_x\,\overline{(w_x+r)}_x dx + \alpha\int_0^L r\overline{r}dx \\ &= EI\int_0^L |(w_x+r)_x|^2\,dx + \alpha\int_0^L |r|^2\,dx \\ &= EI\,\|(w_x+r)_x\|_{L^2}^2 + \alpha\,\|r\|_{L^2}^2 \\ &= \|(w,r)\|_{\mathcal{H}_1}^2. \end{aligned}$$

También $B(.,.)$ es continua, pues, usando la desigualdad triangular y la de Hölder para $(w,r),(\widetilde{w},\widetilde{r}) \in \mathcal{H}_1$, se cumple

$$\begin{aligned}
|B((w,r),(\widetilde{w},\widetilde{r}))| &= \left| EI\int_0^L (w_x+r)_x \overline{(\widetilde{w}_x+\widetilde{r})}_x dx + \alpha\int_0^L r\overline{\widetilde{r}}dx \right| \\
&\leq \left| EI\int_0^L (w_x+r)_x \overline{(\widetilde{w}_x+\widetilde{r})}_x dx \right| + \left| \alpha\int_0^L r\overline{\widetilde{r}}dx \right| \\
&\leq \left(\sqrt{EI}\,\|(w_x+r)_x\|_{L^2}\right)\left(\sqrt{EI}\,\|(\widetilde{w}_x+\widetilde{r})_x\|_{L^2}\right) \\
&+ \left(\sqrt{\alpha}\,\|r\|_{L^2}\right)\left(\sqrt{\alpha}\,\|\widetilde{r}\|_{L^2}\right).
\end{aligned}$$

Pero, por definición de la norma $\|.\|_{\mathcal{H}_1}$, se verifican para $(w,r),(\widetilde{w},\widetilde{r}) \in \mathcal{H}_1$

$$\begin{aligned}
\sqrt{EI}\,\|(w_x+r)_x\|_{L^2} &= \left(EI\int_0^L (w_x+r)_x\overline{(w_x+r)}_x dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|(w,r)\|_{\mathcal{H}_1}, \\
\sqrt{EI}\,\|(\widetilde{w}_x+\widetilde{r})_x\|_{L^2} &= \left(EI\int_0^L (\widetilde{w}_x+\widetilde{r})_x\overline{(\widetilde{w}_x+\widetilde{r})}_x dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|(\widetilde{w},\widetilde{r})\|_{\mathcal{H}_1}, \\
\sqrt{\alpha}\,\|r\|_{L^2} &= \left(\alpha\int_0^L r\overline{r}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|(w,r)\|_{\mathcal{H}_1}, \\
\sqrt{\alpha}\,\|\widetilde{r}\|_{L^2} &= \left(\alpha\int_0^L \widetilde{r}\overline{\widetilde{r}}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|(\widetilde{w},\widetilde{r})\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}$$

Así, conseguimos

$$\begin{aligned}
|B((w,r),(\widetilde{w},\widetilde{r}))| &\leq \|(w,r)\|_{\mathcal{H}_1}\|(\widetilde{w},\widetilde{r})\|_{\mathcal{H}_1} + \|(w,r)\|_{\mathcal{H}_1}\|(\widetilde{w},\widetilde{r})\|_{\mathcal{H}_1} \\
&\leq 2\|(w,r)\|_{\mathcal{H}_1}\|(\widetilde{w},\widetilde{r})\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}$$

Ahora, nuevamente teniendo en cuenta (3.30), definimos el funcional $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{H}_1$

$$\mathcal{T} \;:\; \mathcal{H}_1 \;\longrightarrow\; \mathbb{C}$$

considerando la expresión del segundo miembro de (3.30), es decir, por

$$\mathcal{T}(\widetilde{w},\widetilde{r}) = -\langle \rho g, \widetilde{w}\rangle_{L^2} - \langle 2\sigma h, \widetilde{r}\rangle_{L^2}.$$

Observemos que, por la linealidad del producto interno en $L^2(0,L)$, $\mathcal{T}$ es un funcional lineal. Para probar que $\mathcal{T}$ es continuo, usamos las desigualdades de Cauchy-Schwarz, de Poincaré, triangular y $a+b \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$; para todo $a,b \in$

$\mathbb{R}^+$, es decir,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}(\widetilde{w},\widetilde{r})| &= |-\langle \rho g,\widetilde{w}\rangle_{L^2} - \langle 2\sigma h,\widetilde{r}\rangle_{L^2}| \\
&\leq |\langle \rho g,\widetilde{w}\rangle_{L^2}| + |\langle 2\sigma h,\widetilde{r}\rangle_{L^2}| \\
&\leq \rho \|g\|_{L^2} \|\widetilde{w}\|_{L^2} + 2\sigma \|h\|_{L^2} \|\widetilde{r}\|_{L^2} \\
&\leq K_1 (\|\widetilde{w}\|_{L^2} + \|\widetilde{r}\|_{L^2}) \\
&\leq K_1 (C_{P_1} \|\widetilde{w}_x\|_{L^2} + \|\widetilde{r}\|_{L^2}) \\
&= K_1 (C_{P_1} \|\widetilde{w}_x + \widetilde{r} - \widetilde{r}\|_{L^2} + \|\widetilde{r}\|_{L^2}) \\
&\leq K_1 (C_{P_1} \|\widetilde{w}_x + \widetilde{r}\|_{L^2} + (1 + C_{P_1}) \|\widetilde{r}\|_{L^2}) \\
&\leq K_1 \left(C_{P_1} C_{P_2} \|(\widetilde{w}_x + \widetilde{r})_x\|_{L^2} + (1 + C_{P_1}) \|\widetilde{r}\|_{L^2}\right) \\
&\leq C \left(EI \|(\widetilde{w}_x + \widetilde{r})_x\|_{L^2}^2 + \alpha \|\widetilde{r}\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \\
&= C \|(\widetilde{w},\widetilde{r})\|_{\mathcal{H}_1},
\end{aligned}$$

donde $C = máx \left\{ \dfrac{\sqrt{2} K_1 C_{P_1} C_{P_2}}{\sqrt{EI}}, \dfrac{\sqrt{2} K_1 (1 + C_{P_1})}{\sqrt{\alpha}} \right\}$.

Es decir, que para todo $(\widetilde{w},\widetilde{r}) \in \mathcal{H}_1$, tenemos

$$|\mathcal{T}(\widetilde{w},\widetilde{r})| \leq C \|(\widetilde{w},\widetilde{r})\|_{\mathcal{H}_1},$$

y se concluye que $\mathcal{T}$ es un funcional continuo.

Así, por los resultados obtenidos para la forma $B(.,.)$ y el funcional lineal $\mathcal{T}(.)$, por el Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.1.5), concluimos que existe un único $(w,r) \in \mathcal{H}_1$ tal que, para todo $(\widetilde{w},\widetilde{r}) \in \mathcal{H}_1$, se cumple

$$B((w,r),(\widetilde{w},\widetilde{r})) = \mathcal{T}(\widetilde{w},\widetilde{r}).$$

Es decir, tenemos que, para todo $(\widetilde{w},\widetilde{r}) \in \mathcal{H}_1$, existe un único $(w,r) \in \mathcal{H}_1$, tal que se cumple

$$EI \langle (w_x + r)_x, (\widetilde{w}_x + \widetilde{r})_x \rangle_{L^2} + \alpha \langle r,\widetilde{r}\rangle_{L^2} = -\langle \rho g,\widetilde{w}\rangle_{L^2} - \langle 2\sigma h,\widetilde{r}\rangle_{L^2}. \qquad (3.32)$$

Por lo tanto, hemos probado que existe $z = (w,v,r)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, y es la única solución del sistema (3.23)-(3.25), es decir, hemos probado que existe la inversa del operador $\mathcal{A}$.

En lo que sigue, usaremos el enfoque variacional para discutir la propiedad de regularidad del par (w, r) y verificar que satisface las otras condiciones de frontera especificadas en la definición de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ y dadas en (3.17). Para este propósito, primero tomamos $\widetilde{w} = 0$ y $\widetilde{r} \in C_0^\infty(0, L)$ en (3.32), y obtenemos

$$EI \left\langle (w_x + r)_x , \widetilde{r}_x \right\rangle_{L^2} + \alpha \left\langle r, \widetilde{r} \right\rangle_{L^2} = - \left\langle 2\sigma h, \widetilde{r} \right\rangle_{L^2} . \tag{3.33}$$

Entonces, usando la definición de derivada débil, se tiene

$$-EI \left\langle (w_x + r)_{xx} , \widetilde{r} \right\rangle_{L^2} + \left\langle \alpha r, \widetilde{r} \right\rangle_{L^2} = - \left\langle 2\sigma h, \widetilde{r} \right\rangle_{L^2} ,$$

de donde conseguimos

$$\left\langle EI \, (w_x + r)_{xx} , \widetilde{r} \right\rangle_{L^2} = \left\langle 2\sigma h, \widetilde{r} \right\rangle_{L^2} + \left\langle \alpha r, \widetilde{r} \right\rangle_{L^2} . \tag{3.34}$$

Se sigue de (3.34) que $(w_x + r)$ es una solución débil de

$$EI \, (w_x + r)_{xx} = 2\sigma h + \alpha r \in L^2 \, (0, L) \tag{3.35}$$

en el sentido de las distribuciones. Así, se sigue que

$$(w_x + r) \in H^2 \, (0, L) . \tag{3.36}$$

Similarmente, tomamos $\widetilde{r} = 0$ en (3.32), y obtenemos

$$EI \left\langle (w_x + r)_x , \widetilde{w}_{xx} \right\rangle_{L^2} = - \left\langle \rho g, \widetilde{w} \right\rangle_{L^2} \tag{3.37}$$

para todo $\widetilde{w} \in C_0^\infty(0, L)$.

Nuevamente, por definición de derivada débil, se tiene

$$EI \left\langle (w_x + r)_{xxx} , \widetilde{w} \right\rangle_{L^2} = \left\langle -\rho g, \widetilde{w} \right\rangle_{L^2} . \tag{3.38}$$

Así, también de (3.38), tenemos que $(w_x + r)$ es una solución débil de

$$- EI \, (w_x + r)_{xxx} = \rho g \in L^2 \, (0, L) \tag{3.39}$$

en el sentido de las distribuciones, lo cual implica que

$$(w_x + r) \in H^3 \, (0, L) , \tag{3.40}$$

es decir, se verificó otra condición de $\mathcal{D} \, (\mathcal{A})$ dada en (3.17).

Por otro lado, desde que se cumple (3.37) para todo $(\widetilde{w},\ 0) \in \mathcal{H}_1$, sigue por integración por partes

$$EI \left\langle (w_x + r)_x , \widetilde{w}_{xx} \right\rangle_{L^2} = - \left\langle \rho g, \widetilde{w} \right\rangle_{L^2}$$

$$EI \int_0^L (w_x + r)_x \widetilde{w}_{xx} dx = - \int_0^L \rho g \widetilde{w} dx$$

$$EI \left\{ (w_x + r)_x \widetilde{w}_x \right\} |_0^L - EI \int_0^L \widetilde{w}_x (w_x + r)_{xx} dx = - \int_0^L \rho g \widetilde{w} dx,$$

e, integrando nuevamente por partes, viene que

$$EI \left\{ (w_x + r)_x \widetilde{w}_x \right\} |_0^L - EI \left\{ (w_x + r)_{xx} \widetilde{w} \right\} |_0^L + EI \int_0^L (w_x + r)_{xxx} \widetilde{w} dx$$
$$= - \int_0^L \rho g \widetilde{w} dx,$$

y entonces

$$EI \left\{ (w_x + r)_x \widetilde{w}_x \right\} |_0^L - EI \left\{ (w_x + r)_{xx} \widetilde{w} \right\} |_0^L = - \int_0^L \underbrace{\left\{ EI (w_x + r)_{xxx} + \rho g \right\}}_{=0 \text{ por (3.24)}} \widetilde{w} dx.$$

Así, tenemos

$$\left\{ (w_x + r)_x \widetilde{w}_x \right\} |_0^L - \left\{ (w_x + r)_{xx} \widetilde{w} \right\} |_0^L = 0,$$

y, utilizando la condición de $\mathcal{H}_1$ dada en (3.31), para $\widetilde{w}$ sigue que

$$(w_x + r)_x |_{x=L} \widetilde{w}_x (L) - (w_x + r)_x |_{x=0} \widetilde{w}_x (0)$$
$$- (w_x + r)_{xx} |_{x=L} \widetilde{w}(L) + (w_x + r)_{xx} |_{x=0} \underbrace{\widetilde{w} (0)}_{=0} = 0.$$

Luego, para todo $(\widetilde{w},\ 0) \in \mathcal{H}_1$, logramos

$$(w_x + r)_x |_{x=L} \widetilde{w}_x(L) - (w_x + r)_x |_{x=0} \widetilde{w}_x (0) - (w_x + r)_{xx} |_{x=L} \widetilde{w}(L) = 0. \quad (3.41)$$

En particular, si en (3.41) tomamos $\widetilde{w}(x) = x^3 - Lx^2$, nos queda

$$(w_x + r)_x |_{x=L} = 0,$$

resultado que, al reemplazar en (3.41), nos permite obtener

$$(w_x + r)_x |_{x=0} \widetilde{w}_x (0) + (w_x + r)_{xx} |_{x=L} \widetilde{w}(L) = 0. \quad (3.42)$$

Análogamente, si en (3.42) tomamos $\widetilde{w}(x) = x^3$, entonces

$$(w_x + r)_{xx} |_{x=L} = 0.$$

Por lo tanto, se logró verificar otra condición de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dada en (3.17), que

$$(w_x + r)_x |_{x=L} = (w_x + r)_{xx} |_{x=L} = 0.$$

Observemos que, usando (3.25) y como $(w_x + r) \in H^3(0, L)$, se tiene

$$\frac{\alpha}{2\sigma} r_x + h_x = \left(\frac{\alpha}{2\sigma} r + h\right)_x = \left[\frac{EI}{2\sigma} (w_x + r)_{xx}\right]_x = \frac{EI}{2\sigma} (w_x + r)_{xxx} \in L^2(0, L).$$

Luego $\left(\frac{\alpha}{2\sigma} r + h\right)_x \in L^2(0, L)$, y, entonces, $\left(\frac{\alpha}{2\sigma} r + h\right) \in H^1(0, L)$.

Además, como $F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$ (ver (3.14)), se tiene $(f_x + h) \in H^1(0, L)$, pero, por (3.23), $v = f \in H^1(0, L)$, y así sigue que $(v_x + h) \in H^1(0, L)$.

Notemos que podemos expresar

$$v_x + h = \left(v_x - \frac{\alpha}{2\sigma} r\right) + \left(\frac{\alpha}{2\sigma} r + h\right),$$

de donde se consigue probar que $\left(v_x - \frac{\alpha}{2\sigma} r\right) \in H^1(0, L)$. Esta es otra condición de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dada en (3.17). También, como $F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$ (ver relación (3.14)) y $v = f \in H^1(0, L)$, tenemos que se cumple $(v_x + h) |_{x=0} = 0$, pero, por (3.25), $h = \frac{EI}{2\sigma}(w_x + r)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r$, y entonces

$$\left(v_x + \frac{EI}{2\sigma} (w_x + r)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r\right) \Bigg|_{x=0} = 0.$$

Esta es la última condición de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dada en (3.17).

Por lo tanto, hemos verificado todas las condiciones de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ definidas en (3.17).

(ii) El inverso del operador $\mathcal{A}$ es acotado.

Probaremos que, para todo $F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$ y $z = (w, v, r)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, existe una constante C positiva que satisface $\|\mathcal{A}^{-1} F\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}$.

Observemos que para todo $F \in \mathcal{H}$, ya que $\mathcal{A}$ es invertible, existe un único $z = (w, v, r)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}z = F$, con esto, probar que el inverso del operador $\mathcal{A}$ es acotado, equivale a probar que para todo $F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$ y $z = (w, v, r)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, existe una constante $C > 0$ que satisface $\|z\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}$. Entonces, recordando la definición de norma en $\mathcal{H}$, luego aplicando la desigualdad de Poincaré, las relaciones (3.23) y (3.25), la desigualdad triangular y la

desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$, para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$, se consigue

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\mathcal{H}}^2 &= EI \|(w_x + r)_x\|_{L^2}^2 + \rho \|v\|_{L^2}^2 + \alpha \|r\|_{L^2}^2 \\
&\leq EIC_1 \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}^2 + \rho C_2 \|f_x\|_{L^2}^2 + \|EI (w_x + r)_{xx} - 2\sigma h\|_{L^2}^2 \\
&\leq EIC_1 \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}^2 + \rho C_2 \|(f_x + h) - h\|_{L^2}^2 + 2EI \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}^2 + 4\sigma \|h\|_{L^2}^2 \\
&\leq EI (C_1 + 2) \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}^2 + 2\rho C_2 \|f_x + h\|_{L^2}^2 + 2\rho C_2 \|h\|_{L^2}^2 + 4\sigma \|h\|_{L^2}^2 \\
&\leq EI (C_1 + 2) \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}^2 + 2\rho C_2 C_3 \|(f_x + h)_x\|_{L^2}^2 + 2 (\rho C_2 + 2\sigma) \|h\|_{L^2}^2 ,
\end{aligned}$$

y, entonces, se tiene

$$\|z\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_4 \left[EI \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}^2 + \|(f_x + h)_x\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2\right] , \tag{3.43}$$

donde $C_4 = \text{máx}\{C_1 + 2, 2\rho C_2 C_3, 2 (\rho C_2 + 2\sigma)\}$. Por otro lado, observemos que, usando integración por partes y la relación (3.24), tenemos

$$\begin{aligned}
EI \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}^2 &= EI \langle (w_x + r)_{xx} , (w_x + r)_{xx} \rangle_{L^2} \\
&= -EI \langle (w_x + r)_{xxx} , (w_x + r)_x \rangle_{L^2} \\
&= \langle -EI(w_x + r)_{xxx}, (w_x + r)_x \rangle_{L^2} \\
&= \langle \rho g, (w_x + r)_x \rangle_{L^2} .
\end{aligned}$$

Luego, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la de Poincaré

$$\begin{aligned}
EI \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}^2 &\leq \|\rho g\|_{L^2} \|(w_x + r)_x\|_{L^2} \\
&\leq \rho \|g\|_{L^2} \left(C_5 \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2}\right) \\
&= C_6 \|g\|_{L^2} \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2} .
\end{aligned}$$

Entonces

$$EI \|(w_x + r)_{xx}\|_{L^2} \leq C_6 \|g\|_{L^2} , \tag{3.44}$$

donde $C_6 = \rho C_5$.

Seguidamente, usamos (3.44) en (3.43), y resulta

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C_4 \left[C_7 \|g\|_{L^2}^2 + \|(f_x + h)_x\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2\right] \\
&\leq EIC_4\rho\alpha \left[C_7 \|g\|_{L^2}^2 + \|(f_x + h)_x\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2\right] \\
&\leq (EI\alpha C_4 C_7) \left(\rho \|g\|_{L^2}^2\right) + (C_4\rho\alpha) \left(EI \|(f_x + h)_x\|_{L^2}^2\right) + (EI\rho C_4) \left(\alpha \|h\|_{L^2}^2\right) \\
&\leq C \left(\rho \|g\|_{L^2}^2\right) + C \left(EI \|(f_x + h)_x\|_{L^2}^2\right) + C \left(\alpha \|h\|_{L^2}^2\right) \\
&= C \left(\rho \|g\|_{L^2}^2 + EI \|(f_x + h)_x\|_{L^2}^2 + \alpha \|h\|_{L^2}^2\right) \\
&= C \|(f, g, h)\|_{\mathcal{H}}^2 .
\end{aligned}$$

Así, hemos probado que

$$\|z\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}},$$

donde $C = \text{máx}\{EI\alpha C_4 C_7, C_4\rho\alpha, EI\rho C_4\}$. Entonces, $\mathcal{A}^{-1}$ es acotado.

Por lo tanto, de (i) y de (ii), tenemos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

(iii) El dominio del operador $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{H}$, es decir, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

En efecto, supongamos que $W \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^{\perp}$. Entonces,

$$\langle W, F\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ , \quad \text{para todo} \quad F \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}.$$

En particular, como $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$, tenemos

$$\langle W, F\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ , \quad \text{para todo} \quad F \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{3.45}$$

Como veremos, la densidad de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ en $\mathcal{H}$ será consecuencia de la siguiente:

Afirmación: $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ es invertible y acotado para todo $\lambda_0 \in \left(0, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}\right)$.

En efecto, para probar esta afirmación, usaremos el Lema 2.1.2. Notemos que podemos rescribir $\lambda I - \mathcal{A}$ como

$$\lambda I - \mathcal{A} = \left(\lambda \mathcal{A}^{-1} - I\right)\mathcal{A}. \tag{3.46}$$

Si tomamos $S := -I$ y $B := \lambda\mathcal{A}^{-1}$, se cumple que S es lineal y continuo con inversa continua y que B es lineal y acotado, pues $0 \in \rho(\mathcal{A})$, con $|\lambda| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$. Luego, sigue, por el Lema 2.1.2, que $\lambda\mathcal{A}^{-1} - I$ es lineal, acotado y invertible para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$. Recordemos que existe $\mathcal{A}^{-1}$ y es acotado, pues $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Entonces, sigue de (3.46), que

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\left(\lambda\mathcal{A}^{-1} - I\right)^{-1},$$

de donde concluimos que $\lambda I - \mathcal{A}$ existe, es invertible y es acotado, pues es composición de operadores acotados, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, y, por lo tanto, existe $\lambda_0 I - \mathcal{A}$, y es invertible y acotado, para todo $\lambda_0 \in \left(0, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}\right)$.

Retomemos la prueba de la densidad de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ en $\mathcal{H}$. La afirmación anterior implica que, dado $\lambda_0 \in \left(0, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}\right)$, para el elemento $W \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^{\perp} \subset \mathcal{H}$, existe un único $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, tal que $(\lambda_0 I - \mathcal{A})U = W$, es decir, tenemos

$$\lambda_0 U - \mathcal{A}U = W. \tag{3.47}$$

Reemplazando (3.47) en (3.45), para todo $F \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, obtenemos

$$\langle \lambda_0 U - \mathcal{A}U, F\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Lo que implica

$$\lambda_0 \langle U, F\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}U, F\rangle_{\mathcal{H}} = 0. \tag{3.48}$$

Luego, en particular, consideramos $F = U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, y, entonces, sigue, de (3.48), que

$$\lambda_0 \|U\|^2_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{3.49}$$

Tomando la parte real en (3.49), tenemos

$$\lambda_0 \|U\|^2_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{3.50}$$

Y, como en el Lema 3.3.1, probamos que el operador $\mathcal{A}$ es disipativo, de (3.50), sigue que

$$0 \leq \lambda_0 \|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq 0,$$

lo que implica que $U = 0$. Luego, reemplazando en (3.47), concluimos que $W = 0$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^{\perp} = \{0\}$, donde 0 representa el elemento nulo del espacio $\mathcal{H}$. Luego, aplicando el Teorema 2.1.1, tenemos que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, probando así que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{H}$.

Por lo tanto, al verificar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ y que el dominio del operador $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{H}$, entonces, por el Corolario 2.2.11, concluimos que $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$ de clase C_0. ■

Teorema 3.3.3 *Sea $z_0 = (w_0, w_1, r_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Entonces, existe una única solución $z(t) = S(t) z_0$ del problema de Cauchy abstracto* (3.18)*, satisfaciendo*

$$z \in C^1([0,\infty); \mathcal{H}) \cap C([0,\infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})).$$

Demostración. Como $z_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ y por el Teorema 3.3.2 $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0, y, entonces, por el Teorema 2.2.13, se concluye que existe una única solución: $z(t) = S(t) z_0$ del problema de Cauchy abstracto (3.18), satisfaciendo

$$z \in C^1([0,\infty); \mathcal{H}) \cap C([0,\infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})).$$

Por lo tanto, existe y es única la solución (w, r) del problema (3.1)-(3.5) con la siguiente regularidad

$$(w, r) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C([0, \infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})).$$

■

Capítulo 4

Analiticidad y estabilidad exponencial del semigrupo

En este capítulo, probaremos el resultado central de nuestro trabajo, es decir, la analiticidad del semigrupo $S(t)$ generado por el operador $\mathcal{A}$, el cual es conseguido usando el Teorema 2.2.19. Este resultado principal nos permite concluir directamente por la Observación 2.2.20, la estabilidad exponencial del semigrupo de contracciones $S(t)$ de clase C_0 generado por $\mathcal{A}$, lo que implica que las soluciones del sistema (3.1)-(3.5) son exponencialmente estables, sin embargo, para fines ilustrativos y de autocontenido daremos una demostración de manera independiente usando el Teorema de Gearhart que el semigrupo de contracciones $S(t)$ de clase C_0 generado por $\mathcal{A}$ es exponencialmente estable.

Este capítulo tiene la siguiente organización: en la sección 1, demostraremos que el semigrupo asociado al sistema es analítico, y, en la sección 2, probaremos que dicho semigrupo es exponencialmente estable.

4.1. Analiticidad del semigrupo

Para probar el próximo resultado, usaremos el Teorema 2.2.19.

Teorema 4.1.1 *El semigrupo de contracciones $S(t)$ de clase C_0, generado por $\mathcal{A}$, es analítico.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 2.2.19, para concluir que el semigrupo de contracciones $S(t)$ de clase C_0, generado por $\mathcal{A}$, es analítico, debemos verificar

las condiciones

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}, \tag{4.1}$$

y

$$\lim_{|\beta|\to\infty} sup \left\|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\| < \infty. \tag{4.2}$$

(i) Supongamos que la condición (4.1) no se verifica. Desde que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, entonces existe $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$ con $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\omega| < \infty$ tal que se cumple $\{i\beta \,/\, |\beta| < |\omega|\} \subset \rho(\mathcal{A})$ y, además, $\sup\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|; |\beta| < |\omega|\right\} = \infty$. Así, existe una sucesión $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\beta_n \to \omega$ con $|\beta_n| < |\omega|$, y una sucesión vectorial de funciones complejas $z_n = (w_n, v_n, r_n)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ con $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A})z_n\|_{\mathcal{H}} \to 0, \text{cuando } n \to \infty. \tag{4.3}$$

En efecto, como $\lim\limits_{|\beta|\to\infty} \sup \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| = \infty$, existe $\beta_n \in \mathbb{R}$ y $y_n \in \mathcal{H}$, tal que

$$\frac{\|(i\beta_n I - \mathcal{A})^{-1} y_n\|_{\mathcal{H}}}{\|y_n\|_{\mathcal{H}}} \geq n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea, tenemos

$$\left\|(i\beta_n I - \mathcal{A})^{-1} y_n\right\|_{\mathcal{H}} \geq n \|y_n\|_{\mathcal{H}}.$$

Como $i\beta_n \in \rho(\mathcal{A})$ y ya que $y_n \in \mathcal{H}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única sucesión $z_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, tal que

$$i\beta_n z_n - \mathcal{A}z_n = y_n,$$

con $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Luego, $z_n = (i\beta_n I - \mathcal{A})^{-1} y_n$, y, por tanto,

$$1 = \|z_n\|_{\mathcal{H}} \geq n \|i\beta_n z_n - \mathcal{A}z_n\|_{\mathcal{H}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A})z_n\|_{\mathcal{H}} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

Al expresar $(i\beta_n I - \mathcal{A})z_n$ en términos de sus componentes, obtenemos

$$\begin{bmatrix} i\beta_n w_n \\ i\beta_n v_n \\ i\beta_n r_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n \\ -\dfrac{EI}{\rho}(w_{n,x} + r_n)_{xxx} \\ \dfrac{EI}{2\sigma}(w_{n,x} + r_n)_{xx} - \dfrac{\alpha}{2\sigma} r_n \end{bmatrix} \longrightarrow 0 \text{ en } \mathcal{H},$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} i\beta_n w_n - v_n \\ i\beta_n v_n + \dfrac{EI}{\rho}\left(w_{n,x} + r_n\right)_{xxx} \\ i\beta_n r_n - \dfrac{EI}{2\sigma}\left(w_{n,x} + r_n\right)_{xx} + \dfrac{\alpha}{2\sigma} r_n \end{bmatrix} \longrightarrow 0 \text{ en } \mathcal{H},$$

lo cual, por definición de norma en $\mathcal{H}$, implica que

$$i\beta_n \left(w_{n,x} + r_n\right)_x - \left(v_{n,x} + \frac{EI}{2\sigma}\left(w_{n,x} + r_n\right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r_n\right)_x \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \quad (4.4)$$

$$i\beta_n v_n + \frac{EI}{\rho}\left(w_{n,x} + r_n\right)_{xxx} \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \quad (4.5)$$

$$i\beta_n r_n - \frac{EI}{2\sigma}\left(w_{n,x} + r_n\right)_{xx} + \frac{\alpha}{2\sigma} r_n \to 0 \text{ en } L^2(0,L). \quad (4.6)$$

Ya que $(i\beta_n I - \mathcal{A}) z_n \to 0$ en $\mathcal{H}$ y $\{z_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{H}$, y, entonces

$$\langle (i\beta_n I - \mathcal{A})\, z_n, z_n \rangle_{\mathcal{H}} \to 0, \quad (4.7)$$

es decir,

$$i\beta_n \|z_n\|^2_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A} z_n, z_n \rangle_{\mathcal{H}} \to 0.$$

Tomando la parte real, obtenemos

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A} z_n, z_n \rangle_{\mathcal{H}} \to 0. \quad (4.8)$$

Siendo $\mathcal{A}$ un operador disipativo, la identidad (3.21) implica

$$\frac{1}{2\sigma} \left\| EI\left(w_{n,x} + r_n\right)_{xx} - \alpha r_n \right\|^2_{L^2} \to 0, \quad (4.9)$$

es decir,

$$\left\| EI\left(w_{n,x} + r_n\right)_{xx} - \alpha r_n \right\|_{L^2} \to 0, \quad (4.10)$$

que, además, implica que $\|\beta_n r_n\|_{L^2} \to 0$, debido a (4.6), y esto nos hace concluir que

$$r_n \to 0, \text{ en } L^2(0,L), \quad (4.11)$$

pues $\{\beta_n\}$ es una sucesión acotada.

Sigue de (4.11) en (4.10), que

$$(w_{n,x}+r_n)_{xx}\to 0,\ \text{en } L^2(0,L), \tag{4.12}$$

que, además, nos lleva a

$$(w_{n,x}+r_n)_{x}\to 0,\ \text{en } L^2(0,L), \tag{4.13}$$

debido a la desigualdad de Poincaré.

En lo que sigue, probaremos que $\{v_n\}$ converge a cero en $L^2(0,L)$. Para ello, tomamos primero el producto interno de (4.5) con $\dfrac{v_n}{\beta_n}$ en $L^2(0,L)$

$$\left\langle i\beta_n v_n+\frac{EI}{\rho}(w_{n,x}+r_n)_{xxx},\frac{v_n}{\beta_n}\right\rangle_{L^2}\to 0$$

$$\rho\left\langle i\beta_n v_n,\frac{v_n}{\beta_n}\right\rangle_{L^2}+\left\langle EI(w_{n,x}+r_n)_{xxx},\frac{v_n}{\beta_n}\right\rangle_{L^2}\to 0$$

$$i\rho\langle v_n,v_n\rangle_{L^2}+EI\int_0^L(w_{n,x}+r_n)_{xxx}\frac{\overline{v}_n}{\beta_n}dx\to 0. \tag{4.14}$$

Calculamos la integral de (4.14), a la que denotamos por I_5, usando integración por partes y las condiciones de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dadas en (3.17), y tenemos

$$I_5=\left\{\left(\frac{\overline{v}_n}{\beta_n}\right)(w_{n,x}+r_n)_{xx}\right\}\Big|_0^L-\int_0^L(w_{n,x}+r_n)_{xx}\left(\frac{\overline{v}_{n,x}}{\beta_n}\right)dx$$

$$I_5=\frac{1}{\beta_n}\overline{v}_n|_{x=L}\underbrace{(w_{n,x}+r_n)_{xx}|_{x=L}}_{=0}-\frac{1}{\beta_n}\underbrace{\overline{v}_n|_{x=0}}_{=0}(w_{n,x}+r_n)_{xx}|_{x=0}$$
$$-\int_0^L(w_{n,x}+r_n)_{xx}\left(\frac{\overline{v}_{n,x}}{\beta_n}\right)dx$$

y, así, conseguimos que

$$I_5=-\left\langle(w_{n,x}+r_n)_{xx},\frac{v_{n,x}}{\beta_n}\right\rangle_{L^2}. \tag{4.15}$$

Luego, reemplazando (4.15) en (4.14), tenemos

$$i\rho\|v_n\|_{L^2}^2-EI\left\langle(w_{n,x}+r_n)_{xx},\frac{v_{n,x}}{\beta_n}\right\rangle_{L^2}\to 0. \tag{4.16}$$

Por otro lado, ya que $(w_{n,x}+r_n)_x\to 0$ por (4.13), la relación (4.4) implica que

$$\left(\frac{v_{n,x}}{\beta_n}+\frac{EI}{2\sigma\beta_n}(w_{n,x}+r_n)_{xx}-\frac{\alpha}{2\sigma\beta_n}r_n\right)_x\to 0,\quad\text{en } L^2(0,L). \tag{4.17}$$

Ahora, tomamos el producto interno de (4.17) con $(w_{n,x}+r_n)_x$ en $L^2(0,L)$

$$\left\langle \left(\frac{v_{n,x}}{\beta_n} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n}(w_{n,x}+r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \right)_x, (w_{n,x}+r_n)_x \right\rangle_{L^2} \to 0.$$

Luego, integrando por partes y usando las condiciones de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dadas en (3.17),

$$\int_0^L \left(\frac{v_{n,x}}{\beta_n} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n}(w_{n,x}+r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \right)_x \overline{(w_{n,x}+r_n)_x} dx \to 0$$

$$\left\{ \overline{(w_{n,x}+r_n)_x} \left(\frac{v_{n,x}}{\beta_n} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n}(w_{n,x}+r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \right) \right\} \Bigg|_0^L$$

$$- \int_0^L \left(\frac{v_{n,x}}{\beta_n} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n}(w_{n,x}+r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \right) \overline{(w_{n,x}+r_n)_{xx}} dx \to 0$$

$$\underbrace{\overline{(w_{n,x}+r_n)_x}\Big|_{x=L}}_{=0} \left(\frac{v_{n,x}}{\beta_n} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n}(w_{n,x}+r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \right) \Bigg|_{x=L}$$

$$-\overline{(w_{n,x}+r_n)_x}\Big|_{x=0} \frac{1}{\beta_n} \underbrace{\left(v_{n,x} + \frac{EI}{2\sigma}(w_{n,x}+r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r_n \right) \Bigg|_{x=0}}_{=0}$$

$$- \int_0^L \left(\frac{v_{n,x}}{\beta_n} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n}(w_{n,x}+r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \right) \overline{(w_{n,x}+r_n)_{xx}} dx \to 0$$

$$\left\langle \frac{v_{n,x}}{\beta_n} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n}(w_{n,x}+r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n, (w_{n,x}+r_n)_{xx} \right\rangle_{L^2} \to 0,$$

de donde obtenemos

$$\left\langle \frac{v_{n,x}}{\beta_n}, (w_{n,x}+r_n)_{xx} \right\rangle_{L^2} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n} \left\| (w_{n,x}+r_n)_{xx} \right\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} \left\langle r_n, (w_{n,x}+r_n)_{xx} \right\rangle_{L^2} \to 0. \tag{4.18}$$

Sigue de (4.18) que, a partir de (4.12) y (4.11), los términos segundo y tercero convergen a cero, y, entonces, nos queda

$$\left\langle \frac{v_{n,x}}{\beta_n}, (w_{n,x}+r_n)_{xx} \right\rangle_{L^2} \to 0. \tag{4.19}$$

Así, combinando (4.19) con (4.16), tenemos

$$\|v_n\|_{L^2} \to 0, \tag{4.20}$$

es decir,

$$v_n \to 0, \text{ en } L^2(0,L). \tag{4.21}$$

Ahora, observemos que, por definición de norma en $\mathcal{H}$, tenemos

$$\|z_n\|_{\mathcal{H}}^2 = EI \left\|(w_{n,x} + r_n)_x\right\|_{L^2}^2 + \rho \|v_n\|_{L^2}^2 + \alpha \|r_n\|_{L^2}^2,$$

de donde, de (4.13), (4.21) y de (4.11), obtenemos $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \to 0$, cuando $n \to \infty$, lo que contradice a $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Por lo tanto, la condición (4.1) es válida.

(ii) Supongamos que la condición (4.2) es falsa. Entonces, existe una sucesión $\beta_n \to \infty$, ($\beta_n > 0$ sin pérdida de generalidad) y una sucesión vectorial de funciones complejas $z_n = (w_n, v_n, r_n)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ con $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left\| \left(iI - \frac{1}{\beta_n}\mathcal{A} \right) z_n \right\|_{\mathcal{H}} \to 0, \text{cuando } n \to \infty. \tag{4.22}$$

Al expresar $\left(iI - \frac{1}{\beta_n}\mathcal{A} \right) z_n$ en términos de sus componentes, conseguimos

$$\begin{bmatrix} iw_n \\ iv_n \\ ir_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_n} v_n \\ -\frac{EI}{\rho\beta_n} (w_{n,x} + r_n)_{xxx} \\ \frac{EI}{2\sigma\beta_n} (w_{n,x} + r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \end{bmatrix} \longrightarrow 0 \text{ en } \mathcal{H},$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} iw_n - \frac{1}{\beta_n} v_n \\ iv_n + \frac{EI}{\rho\beta_n} (w_{n,x} + r_n)_{xxx} \\ ir_n - \frac{EI}{2\sigma\beta_n} (w_{n,x} + r_n)_{xx} + \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \end{bmatrix} \longrightarrow 0 \text{ en } \mathcal{H}.$$

Aplicando la definición de norma en $\mathcal{H}$, obtenemos

$$i(w_{n,x} + r_n)_x - \left(\frac{1}{\beta_n} v_{n,x} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n} (w_{n,x} + r_n)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} r_n \right)_x \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{4.23}$$

$$iv_n + \frac{EI}{\rho\beta_n} (w_{n,x} + r_n)_{xxx} \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{4.24}$$

$$ir_n - \frac{EI}{2\sigma\beta_n}\left(w_{n,x}+r_n\right)_{xx} + \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n}r_n \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{4.25}$$

Ya que $\left(iI - \frac{1}{\beta_n}\mathcal{A}\right) z_n \to 0$ en $\mathcal{H}$ y $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, y, entonces

$$\left\langle iIz_n - \frac{1}{\beta_n}\mathcal{A}z_n, z_n\right\rangle_{\mathcal{H}} = i\|z_n\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{1}{\beta_n}\langle \mathcal{A}z_n, z_n\rangle_{\mathcal{H}} \to 0.$$

Por la disipatividad del operador $\mathcal{A}$ y la relación (3.21), tenemos

$$\frac{1}{\beta_n}\left\|EI\left(w_{n,x}+r_n\right)_{xx} - \alpha r_n\right\|_{L^2}^2 \to 0, \tag{4.26}$$

que, al reemplazar en (4.25), nos permite obtener

$$\|r_n\|_{L^2} \to 0. \tag{4.27}$$

Ahora de (4.27) en (4.26), nos lleva a

$$\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left\|\left(w_{n,x}+r_n\right)_{xx}\right\|_{L^2} \to 0. \tag{4.28}$$

Como $\|v_n\|_{L^2} \leq 1$, pues $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, entonces, $\|v_n\|_{L^2}$ es acotada y, luego, por (4.24), $\left\{\frac{1}{\beta_n}\left\|\left(w_{n,x}+r_n\right)_{xxx}\right\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada. Entonces, se sigue de (4.28) que $\left\{\frac{1}{\beta_n}\left\|\left(v_{n,x} - \frac{\alpha}{2\sigma}r_n\right)_x\right\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada. Por otro lado, ya que $\left\|\left(w_{n,x}+r_n\right)_x\right\|_{L^2} \leq 1$, pues $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, por la desigualdad de Poincaré, $\left\{\|w_{n,x}+r_n\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, lo cual conduce a que $\left\{\|w_{n,x}\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, pues $\|r_n\|_{L^2} \to 0$. Sigue de

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta_n}\left\|\left(v_{n,x} + \frac{\alpha}{2\sigma}w_{n,x}\right)_x\right\|_{L^2} &= \frac{1}{\beta_n}\left\|\left[\left(v_{n,x} - \frac{\alpha}{2\sigma}r_n\right) + \left(\frac{\alpha}{2\sigma}r_n + \frac{\alpha}{2\sigma}w_{n,x}\right)\right]_x\right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{\beta_n}\left[\left\|\left(v_{n,x} - \frac{\alpha}{2\sigma}r_n\right)_x\right\|_{L^2} + \frac{\alpha}{2\sigma}\left\|\left(w_{n,x}+r_n\right)_x\right\|_{L^2}\right]\end{aligned}$$

que $\left\{\frac{1}{\beta_n}\left\|\left(v_{n,x} + \frac{\alpha}{2\sigma}w_{n,x}\right)_x\right\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, es decir, tenemos que $\left\{\frac{1}{\beta_n}\left\|\left(v_n + \frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right)_{xx}\right\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada. Por otra parte, como $z_n = (w_n, v_n, r_n)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$, tenemos, por (3.14), que $w_n \in H^1(0,L)$ y $w_n|_{x=0} = 0$, y, entonces, por desigualdad de Poincaré: $\|w_n\|_{L^2} \leq C\|w_{n,x}\|_{L^2}$, de donde $\left\{\|w_n\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, pues $\left\{\|w_{n,x}\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo es. Así, considerando

$$\left\|v_n + \frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right\|_{L^2} \leq \|v_n\|_{L^2} + \frac{\alpha}{2\sigma}\|w_n\|_{L^2},$$

concluimos que $\left\|v_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right\|_{L^2}$ es acotada.

Observemos que como $z_n=(w_n,v_n,r_n)^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}$, por (3.17) y (3.14) sigue respectivamente que $v_n\in H^1(0,L)$ y $w_n\in H^1(0,L)$, entonces tenemos que $\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(v_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right)\in H^1(0,L)$. Por otro lado, reescribimos $\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(v_{n,x}+\frac{\alpha}{2\sigma}w_{n,x}\right)$, como

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(v_{n,x}+\frac{\alpha}{2\sigma}w_{n,x}\right)&=\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(v_{n,x}-\frac{\alpha}{2\sigma}r_n\right)+\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\alpha}{2\sigma}r_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_{n,x}\right)\\&=\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(v_{n,x}-\frac{\alpha}{2\sigma}r_n\right)+\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\frac{\alpha}{2\sigma}\left(w_{n,x}+r_n\right),\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(v_{n,x}+\frac{\alpha}{2\sigma}w_{n,x}\right)\in H^1(0,L)$ pues el primer y segundo término del segundo miembro de la relación inmediata anterior por (3.17) y (3.14) respectivamente pertenecen a $H^1(0,L)$, lo que nos hace concluir que $\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(v_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right)\in H^2(0,L)$.

Ahora, para $j=1$, $p=2$, $m=2$, $r=2$, $q=2$, $a=\frac{1}{2}$ y $n=1$, que satisfacen $0\leq j\leq m$ y $1\leq q,r\leq\infty$, tales que $\frac{1}{p}-\frac{j}{n}=a\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-a)\frac{1}{q}$, entonces, por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (ver Proposición 2.1.13), para todo $\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left(v_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right)\in H^2(0,L)=W^{2,2}(0,L)\cap L^2(0,L)$, existen $C_1>0$ y $C_2>0$, tales que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left\|\left(v_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right)_x\right\|_{L^2}&\leq C_1\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left\|\left(v_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right)_{xx}\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|v_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\\&\quad+C_2\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left\|v_n+\frac{\alpha}{2\sigma}w_n\right\|_{L^2},\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\left\{\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left\|v_{n,x}+\frac{\alpha}{2\sigma}w_{n,x}\right\|_{L^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también uniformemente acotada. Por lo tanto,

$$\frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{2}}}\left\|v_{n,x}\right\|_{L^2}\leq K,\tag{4.29}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$ y para alguna constante $K>0$.

Ahora multiplicamos (4.24), en $L^2(0,L)$ por ρv_n, y sigue que

$$\left\langle i\rho v_n+\frac{EI}{\beta_n}\left(w_{n,x}+r_n\right)_{xxx},v_n\right\rangle_{L^2}\to 0$$

$$i\rho\left\langle v_n,v_n\right\rangle_{L^2}+\left\langle\frac{EI}{\beta_n}\left(w_{n,x}+r_n\right)_{xxx},v_n\right\rangle_{L^2}\to 0$$

$$i\rho \left\| v_n \right\|_{L^2}^2 + \int_0^L \frac{EI}{\beta_n} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xxx} \overline{v}_n dx \to 0. \tag{4.30}$$

Calculamos la integral de (4.30), a la que denotamos por I_6, usando integración por partes y las condiciones de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dadas en (3.17), y conseguimos

$$I_6 = \left\{ \overline{v}_n \frac{EI}{\beta_n} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx} \right\} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{EI}{\beta_n} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx} \overline{v}_{n,x} dx$$

$$I_6 = \overline{v}_n|_{x=L} \frac{EI}{\beta_n} \underbrace{\left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx}|_{x=L}}_{=0} - \underbrace{\overline{v}_n|_{x=0}}_{=0} \frac{EI}{\beta_n} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx}|_{x=0}$$
$$- \frac{EI}{\beta_n} \left\langle \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx}, v_{n,x} \right\rangle_{L^2},$$

obteniendo así

$$I_6 = -\frac{1}{\beta_n} EI \left\langle \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx}, v_{n,x} \right\rangle_{L^2}. \tag{4.31}$$

Luego, reemplazando (4.31) en (4.30), se cumple

$$i\rho \left\| v_n \right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\beta_n} EI \left\langle \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx}, v_{n,x} \right\rangle_{L^2} \to 0. \tag{4.32}$$

Por lo tanto, de (4.28) y (4.29) en (4.32), se consigue que

$$\left\| v_n \right\|_{L^2} \to 0. \tag{4.33}$$

Análogamente, tomamos el producto interno de (4.23) con $\left(w_{n,x} + r_n \right)_x$ en $L^2(0, L)$, integrando por partes, y usando las condiciones del dominio de $\mathcal{A}$ definidas en (3.17), también se tiene

$$\left\langle i \left(w_{n,x} + r_n \right)_x - \frac{1}{\beta_n} \left(v_{n,x} + \frac{EI}{2\sigma} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r_n \right)_x, \left(w_{n,x} + r_n \right)_x \right\rangle_{L^2} \to 0$$

$$i \left\| \left(w_{n,x} + r_n \right)_x \right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\beta_n} \int_0^L \left(v_{n,x} + \frac{EI}{2\sigma} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r_n \right)_x \overline{\left(w_{n,x} + r_n \right)_x} dx \to 0$$

$$i \left\| \left(w_{n,x} + r_n \right)_x \right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\beta_n} \left\{ \overline{\left(w_{n,x} + r_n \right)_x} \left(v_{n,x} + \frac{EI}{2\sigma} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r_n \right) \right\} \Big|_0^L$$
$$+ \frac{1}{\beta_n} \int_0^L \left(v_{n,x} + \frac{EI}{2\sigma} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r_n \right) \overline{\left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx}} dx \to 0$$

$$i \left\| \left(w_{n,x} + r_n \right)_x \right\|_{L^2}^2 - \underbrace{\frac{1}{\beta_n} \overline{\left(w_{n,x} + r_n \right)_x} \Big|_{x=L}}_{=0} \left(v_{n,x} + \frac{EI}{2\sigma} \left(w_{n,x} + r_n \right)_{xx} - \frac{\alpha}{2\sigma} r_n \right) \Big|_{x=L}$$

$$+\frac{1}{\beta_n}\overline{(w_{n,x}+r_n)}_x|_{x=0}\underbrace{\left(v_{n,x}+\frac{EI}{2\sigma}(w_{n,x}+r_n)_{xx}-\frac{\alpha}{2\sigma}r_n\right)\Big|_{x=0}}_{=0}$$

$$+\frac{1}{\beta_n}\int_0^L\left(v_{n,x}+\frac{EI}{2\sigma}(w_{n,x}+r_n)_{xx}-\frac{\alpha}{2\sigma}r_n\right)\overline{(w_{n,x}+r_n)}_{xx}dx\to 0,$$

es decir, tenemos

$$i\left\|(w_{n,x}+r_n)_x\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\beta_n}\left\langle v_{n,x}+\frac{EI}{2\sigma}(w_{n,x}+r_n)_{xx}-\frac{\alpha}{2\sigma}r_n,(w_{n,x}+r_n)_{xx}\right\rangle_{L^2}\to 0,$$

de donde, aplicando (4.27), (4.28) y (4.29), sigue

$$\left\|(w_{n,x}+r_n)_x\right\|_{L^2}\to 0. \tag{4.34}$$

Observemos que, por definición de norma en $\mathcal{H}$, tenemos

$$\|z_n\|_{\mathcal{H}}^2=EI\left\|(w_{n,x}+r_n)_x\right\|_{L^2}^2+\rho\|v_n\|_{L^2}^2+\alpha\|r_n\|_{L^2}^2.$$

Ahora, usando (4.34), (4.33) y (4.27), obtenemos $\|z_n\|_{\mathcal{H}}\to 0$, cuando $n\to\infty$, lo que contradice a $\|z_n\|_{\mathcal{H}}=1$, y, por lo tanto, (4.2) es verificado. Así, la prueba queda completa. ■

4.2. Estabilidad exponencial del semigrupo

Para probar el próximo resultado, aplicaremos el Teorema 2.2.17 de Gearhart, y usaremos un argumento de contradicción.

Teorema 4.2.1 *El semigrupo de contracciones $S(t)$ de clase C_0, generado por $\mathcal{A}$, es exponencialmente estable.*

Demostración. De acuerdo al Teorema de Gearhart, debemos verificar que $\mathcal{A}$ satisface las condiciones

$$\rho(\mathcal{A})\supseteq\{i\beta,\beta\in\mathbb{R}\}=i\mathbb{R} \tag{4.35}$$

y

$$\lim_{|\beta|\to\infty}sup\left\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}\right\|<\infty. \tag{4.36}$$

En el Teorema 4.1.1, probamos que $i\mathbb{R}\subset\rho(\mathcal{A})$, es decir, se verifica la condición (4.35) y, entonces, solo necesitamos probar la condición (4.36). Supongamos que (4.36) es falso, es decir,

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \sup \left\| (i\beta I - \mathcal{A})^{-1} \right\| = \infty. \tag{4.37}$$

Entonces, existe una sucesión de números reales positivos $\{\beta_n\}$ con $\beta_n \to \infty$ y una sucesión vectorial de funciones complejas $z_n = (w_n, v_n, r_n)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ con $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}) z_n\|_{\mathcal{H}} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

Observemos que, análogamente a la demostración de la parte (i) del Teorema 4.1.1, tenemos que son válidos los resultados (4.4), (4.5), (4.6) y (4.9). Multiplicando (4.6) por $\dfrac{1}{\beta_n}$ y luego usando (4.9), sigue que

$$r_n \to 0, \text{ en } L^2(0, L), \tag{4.38}$$

pues $\left\{ \dfrac{1}{\beta_n} \right\}$ es una sucesión acotada.

Luego de reemplazar (4.38) en (4.9), tenemos

$$(w_{n,x} + r_n)_{xx} \to 0, \text{ en } L^2(0, L), \tag{4.39}$$

que implica

$$(w_{n,x} + r_n)_x \to 0, \text{ en } L^2(0, L), \tag{4.40}$$

debido a la desigualdad de Poincaré.

Ahora probaremos que $\{v_n\}$ converge a cero en $L^2(0, L)$. Para ello, multiplicamos (4.5) por $\dfrac{1}{\beta_n}$ y luego, con el resultado obtenido, efectuamos el producto interno con $\{v_n\}$ en $L^2(0, L)$

$$\left\langle iv_n + \frac{EI}{\rho\beta_n} (w_{n,x} + r_n)_{xxx}, v_n \right\rangle_{L^2} \to 0.$$

A continuación, luego de efectuar cuentas análogas a lo hecho en la parte (i) del Teorema 4.1.1, obtenemos una relación similar a (4.16), a saber

$$i\rho \|v_n\|_{L^2}^2 - \frac{EI}{\beta_n} \left\langle (w_{n,x} + r_n)_{xx}, v_{n,x} \right\rangle_{L^2} \to 0. \tag{4.41}$$

Por otro lado, multiplicamos por $\dfrac{1}{\beta_n}$ a (4.4) y utilizando (4.39), y procediendo de forma similar a lo conseguido en (4.18), obtenemos

$$\left\langle v_{n,x}, (w_{n,x} + r_n)_{xx} \right\rangle_{L^2} + \frac{EI}{2\sigma\beta_n} \left\| (w_{n,x} + r_n)_{xx} \right\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha}{2\sigma\beta_n} \left\langle r_n, (w_{n,x} + r_n)_{xx} \right\rangle_{L^2} \to 0. \tag{4.42}$$

Utilizando en (4.42) las relaciones (4.39) y (4.38), nos queda

$$\left\langle v_{n,x}, \left(w_{n,x} + r_n\right)_{xx} \right\rangle_{L^2} \to 0. \tag{4.43}$$

Luego, viene de (4.43) en (4.41) y usando nuevamente que $\left\{ \dfrac{1}{\beta_n} \right\}$ es acotada, que

$$\|v_n\|_{L^2} \to 0, \tag{4.44}$$

es decir,

$$v_n \to 0, \text{ en } L^2(0, L). \tag{4.45}$$

Para obtener la contradicción deseada, recordemos que

$$\|z_n\|^2_{\mathcal{H}} = EI \left\|\left(w_{n,x} + r_n\right)_x\right\|^2_{L^2} + \rho \|v_n\|^2_{L^2} + \alpha \|r_n\|^2_{L^2},$$

de donde, usando (4.40), (4.45) y (4.38), concluimos que $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \to 0$, cuando $n \to \infty$, lo que contradice a $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Por lo tanto, la condición (4.37) es verdadera. Así, la prueba queda completa. ■

Observación 4.2.1 El Teorema 4.2.1 asegura el decaimiento exponencial de la solución del modelo (3.1)-(3.5), pues, cuando se considera el estudio del decaimiento exponencial del modelo disipativo, el problema es establecer una estimativa para la energía $\mathbb{E}$ del sistema. Probaremos a continuación que dicha estimativa para la energía es obtenida de la estabilidad exponencial.

Como el semigrupo $S(t)$ es exponencialmente estable, por la definición 2.2.16, existen constantes $\beta > 0$ y $C \geq 1$ tales que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\beta t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Por otro lado, recordemos que la energía $\mathbb{E}$ del sistema fue definida en (3.13), por

$$\mathbb{E}(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^L \left(\rho |v|^2 + \alpha |r|^2 + EI \left|\left(w_x + r\right)_x\right|^2\right) dx\right],$$

de donde

$$\mathbb{E}(t) = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} w \\ v \\ r \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\|z\|^2_{\mathcal{H}},$$

es decir, tenemos

$$2\mathbb{E}(t) = \|z\|^2_{\mathcal{H}},$$

para todo $z = (w, v, r)^T \in \mathcal{H}$. Además, por el Teorema 3.3.3, sabemos que la única solución del sistema (3.1)-(3.5) es $z(t) = S(t) z_0$, donde $z_0 = (w_0, w_1, r_0)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, entonces

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}(t) &= \|z\|_{\mathcal{H}}^2 = \|S(t) z_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \|z_0\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq C^2 e^{-2\beta t} \|z_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \left(C^2 e^{-2\beta t}\right) (2\mathbb{E}(0)) \\ &= 2\mathbb{E}(0) C^2 e^{-2\beta t} \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Así, conseguimos la siguiente estimativa para la energía $\mathbb{E}(t)$ del sistema

$$\mathbb{E}(t) \leq M e^{-\lambda t},$$

donde $M = \mathbb{E}(0) C^2$ y $\lambda = 2\beta$ para todo $t \geq 0$.

A partir de esta estimativa, concluimos que la energía $\mathbb{E}(t)$ del sistema decae exponencialmente.

Capítulo 5

Estudio numérico de la viga de Timoshenko amortiguada

Recordemos que el modelo de Timoshenko que estudiamos en el capítulo 3 fue

$$\rho w_{tt} + EI\left(w_x + r\right)_{xxx} = 0, \tag{5.1}$$

$$2\sigma r_t + \alpha r - EI\left(w_x + r\right)_{xx} = 0, \tag{5.2}$$

con condiciones de frontera e iniciales

$$w = w_x + r = 0 \text{ , en } x = 0, \tag{5.3}$$

$$\left(w_x + r\right)_x = \left(w_x + r\right)_{xx} = 0 \text{ , en } x = L, \tag{5.4}$$

$$w(x,0) = w_0(x) \text{ , } w_t(x,0) = w_1(x) \text{ , } r(x,0) = r_0(x), \tag{5.5}$$

donde t denota la variable temporal; y x, la variable espacial definida en $(0, L)$, siendo L la longitud de la viga. Las funciones $w = w(x,t)$ y $r = r(x,t)$ son la deflexión lateral y el ángulo de corte, respectivamente, aplicados en el punto $x \in (0, L)$ en el instante de tiempo t. Además, ρ, E, I, σ y α son constantes positivas que describen las características físicas del modelo.

Se demostró, en el Teorema 3.3.3 del capítulo 3, que existe una única solución (w, r) del sistema (5.1)-(5.5), tal que

$$(w, r) \in C^1\left([0,\infty); \mathcal{H}\right) \cap C\left([0,\infty); \mathcal{D}\left(\mathcal{A}\right)\right),$$

donde el espacio de fase $\mathcal{H}$ y $\mathcal{D}\left(\mathcal{A}\right)$ fueron definidos en (3.14)-(3.17) respectivamente.

Para el estudio numérico de nuestro modelo, usaremos el método de diferencias finitas, y para ello necesitaremos mayor regularidad de nuestra solución, entonces por la Proposición 2.2.15, basta tomar un valor inicial z_0 que pertenece a $\mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ para n suficientemente grande para poder obtener la regularidad de la solución de clase $C^{n-k}\left([0,\infty);[\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^k\right)]\right), k = 0,1,2,\ldots,n, n \in \mathbb{N}$, lo cual garantiza la existencia de las aproximaciones de las derivadas parciales que usaremos. Luego, podremos construir un esquema aproximado con un error mínimo. Seguidamente, utilizando resultados de la sección 2.3, realizaremos el estudio cualitativo de dicho esquema.

El presente capítulo está organizado como sigue: en la sección 1, plantearemos el esquema numérico aproximado de la solución de nuestro modelo usando diferencias finitas, mientras que, en la sección 2, estudiaremos la estabilidad del esquema numérico planteado vía la condición de von Neumann (ver Proposición 2.3.5). Luego, en la sección 3, estudiaremos la consistencia del esquema numérico, en la sección 4, aplicando el Teorema de equivalencia de Lax (ver Teorema 2.3.4) garantizamos la convergencia del esquema numérico, y finalizaremos este capítulo en la sección 5, mostrando la solución numérica para nuestro modelo (5.1)-(5.5).

5.1. Esquema numérico en diferencias finitas

Para poder construir un esquema discreto en diferencias finitas, supondremos que w y r son lo suficientemente regulares (debido a la Proposición 2.2.15), y esto nos permite representar de manera aproximada por medio de series de Taylor cada una de las derivadas que necesitemos, con lo que, de esta forma, conseguiremos aproximarnos a las soluciones de nuestro modelo. Para esto, consideremos el problema de Cauchy equivalente al sistema (5.1)-(5.5), dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dZ(t)}{dt} = \mathcal{A}Z(t) \quad t > 0 \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}, \tag{5.6}$$

donde

$$Z = (w, w_t, r)^T \in \mathcal{H}, \qquad Z_0 = (w_0, w_1, r_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

y el operador diferencial $\mathcal{A}$ es definido como

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -\dfrac{EI}{\rho}\partial_x^4 & 0 & -\dfrac{EI}{\rho}\partial_x^3 \\ \dfrac{EI}{2\sigma}\partial_x^3 & 0 & \dfrac{EI}{2\sigma}\partial_x^2 - \dfrac{\alpha}{2\sigma} \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

reduciendo, de esta manera, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas (5.1)-(5.5), al problema de evolución de primer orden autónomo (5.6).

La ecuación (5.6) es válida en el dominio espacio-tiempo $\Omega = (0, L) \times (0, T)$. Para discretizar el dominio Ω en un conjunto finito de puntos, consideraremos particiones uniformes de tamaños de paso Δx para la variable espacial x y Δt para la variable temporal t, con lo que se generará una malla de puntos o red computacional. Estos puntos son llamados *puntos de malla* o *nodos*, y están representados por (x_i, t_j) con $1 \leq i \leq N-1$ y $1 \leq j \leq M-1$, donde M y N son números enteros positivos.

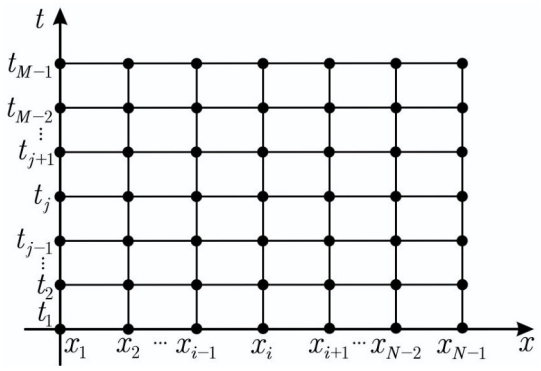


Figura 5.1: Malla de puntos que consta de $(N-1)\times(M-1)$ rectángulos de lados de medidas Δx y Δt.

Así, para un punto de malla arbitrario y fijo (i, j), se tendrá una solución aproximada de la forma $Z_i^j = Z\left(i\Delta x, j\Delta t\right)$, es decir, cada una de estas soluciones verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} Z_i^j & = \mathcal{A} Z_i^j, \qquad 1 \leq i \leq N-1, \qquad 1 \leq j \leq M-1 \\ Z_i^0 & = Z_0(i\Delta x), \qquad 0 \leq i \leq N, \end{cases} \tag{5.8}$$

donde $N = \frac{L}{\Delta x}$ y $M = \frac{T}{\Delta t}$ son los números de puntos de malla considerados en el dominio discreto. Entonces, resolver el sistema (5.6) es equivalente a resolver el sistema discreto (5.8).

Usando la fórmula (2.8), sin considerar su error de truncamiento, es decir, usando la fórmula en diferencias finitas progresiva

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_i^j \approx \frac{Z_i^{j+1} - Z_i^j}{\Delta t},$$

donde, en la primera relación de (5.8), se consigue una expresión algebraica semidiscreta de la solución aproximada en el instante $j+1$, la cual es

$$Z_i^{j+1} = (I + \Delta t \mathcal{A})\, Z_i^j. \tag{5.9}$$

Notemos que (5.9) requiere tener conocido la solución aproximada en un tiempo anterior j.

Con el objetivo de obtener un esquema numérico totalmente discreto, a partir de (5.9), observamos que debemos conseguir un equivalente discreto para el operador $\mathcal{A}$, definido en (5.7), y, por eso, utilizaremos las fórmulas (2.9)-(2.11) aplicadas a Z_i^j, sin considerar sus respectivos errores de truncamiento, es decir, tenemos las siguientes aproximaciones

$$\partial_x^2 Z_i^j \approx \frac{Z_{i+1}^j - 2Z_i^j + Z_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} := \widehat{d}_x^2 Z_i^j, \tag{5.10}$$

$$\partial_x^3 Z_i^j \approx \frac{Z_{i+2}^j - 2Z_{i+1}^j + 2Z_{i-1}^j - Z_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} := \widehat{d}_x^3 Z_i^j, \tag{5.11}$$

$$\partial_x^4 Z_i^j \approx \frac{Z_{i+2}^j - 4Z_{i+1}^j + 6Z_i^j - 4Z_{i-1}^j + Z_{i-2}^j}{(\Delta x)^4} := \widehat{d}_x^4 Z_i^j. \tag{5.12}$$

Además, si denotamos: $a = -\dfrac{EI}{\rho}$, $b = \dfrac{EI}{2\sigma}$ y $c = -\dfrac{\alpha}{2\sigma}$, y, teniendo en cuenta (5.7), podemos considerar

$$\mathcal{A} \approx \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ a\widehat{d}_x^4 & 0 & a\widehat{d}_x^3 \\ b\widehat{d}_x^3 & 0 & b\widehat{d}_x^2 + c \end{bmatrix} := \mathcal{A}_h \tag{5.13}$$

y, entonces, usando (5.9), el esquema discreto aproximado será

$$Z_i^{j+1} = B Z_i^j, \tag{5.14}$$

donde la matriz B es dada por

$$B = I + \Delta t \mathcal{A}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta t & 0 \\ a\Delta t\widehat{d}_x^4 & 0 & a\Delta t\widehat{d}_x^3 \\ b\Delta t\widehat{d}_x^3 & 0 & b\Delta t\widehat{d}_x^2 + c\Delta t \end{bmatrix},$$

de donde se tiene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ a\Delta t\widehat{d}_x^4 & 1 & a\Delta t\widehat{d}_x^3 \\ b\Delta t\widehat{d}_x^3 & 0 & b\Delta t\widehat{d}_x^2 + c\Delta t + 1 \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Observemos que, si aplicamos (5.14), a Z_i^j, resulta

$$Z_i^j = BZ_i^{j-1} = B^2Z_i^{j-2} = B^3Z_i^{j-3} = \cdots = B^jZ_i^0,$$

que al reemplazarlo en (5.14), origina

$$Z_i^{j+1} = B^jZ_i^0. \tag{5.16}$$

Por lo tanto, gracias a la relación (5.16), podremos calcular la aproximación de la solución para cada punto de malla del dominio discreto, siempre y cuando sea conocido el valor inicial aproximado Z_i^0 y calculado B^j.

En las siguientes tres secciones, haremos el estudio cualitativo del esquema numérico (5.14).

5.2. Estabilidad del esquema numérico

El estudio de la estabilidad del esquema discreto (5.14), se hará utilizando el análisis de estabilidad de von Neumann presentado en la subsección 2.3.2. Entonces, considerando una solución de la forma

$$Z_i^j = f_je^{\eta ik\Delta x}; \quad k = \sqrt{-1}, \tag{5.17}$$

y utilizando (5.10), (5.11) y (5.12), obtenemos

- $\widehat{d}_x^2Z_i^j = \dfrac{f_je^{\eta(i+1)k\Delta x} - 2f_je^{\eta ik\Delta x} + f_je^{\eta(i-1)k\Delta x}}{(\Delta x)^2}$

$$= \frac{f_je^{\eta ik\Delta x}}{(\Delta x)^2}\left(e^{\eta k\Delta x} - 2 + e^{-\eta k\Delta x}\right)$$

$$= \frac{Z_i^j}{(\Delta x)^2}\left(e^{\frac{\eta k\Delta x}{2}} - e^{-\frac{\eta k\Delta x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{Z_i^j}{(\Delta x)^2}\left[2ksen\left(\frac{\eta\Delta x}{2}\right)\right]^2$$

$$= -\frac{4Z_i^j}{(\Delta x)^2} sen^2\left(\frac{\eta \Delta x}{2}\right).$$

- $\widehat{d}_x^3 Z_i^j = \dfrac{f_j e^{\eta(i+2)k\Delta x} - 2f_j e^{\eta(i+1)k\Delta x} + 2f_j e^{\eta(i-1)k\Delta x} - f_j e^{\eta(i-2)k\Delta x}}{2(\Delta x)^3}$

$$= \frac{f_j e^{\eta i k \Delta x}}{2(\Delta x)^3}\left(e^{2\eta k\Delta x} - 2e^{\eta k\Delta x} + 2e^{-\eta k\Delta x} - e^{-2\eta k\Delta x}\right)$$

$$= \frac{Z_i^j}{2(\Delta x)^3}\left\{2ksen(2\eta\Delta x) - 2\left[2ksen(\eta\Delta x)\right]\right\}$$

$$= \frac{kZ_i^j}{(\Delta x)^3}\left[sen(2\eta\Delta x) - 2sen(\eta\Delta x)\right].$$

- $\widehat{d}_x^4 Z_i^j = \dfrac{f_j e^{\eta(i+2)k\Delta x} - 4f_j e^{\eta(i+1)k\Delta x} + 6f_j e^{\eta i k\Delta x} - 4f_j e^{\eta(i-1)k\Delta x} + f_j e^{\eta(i-2)k\Delta x}}{(\Delta x)^4}$

$$= \frac{f_j e^{\eta i k \Delta x}}{(\Delta x)^4}\left(e^{2\eta k\Delta x} - 4e^{\eta k\Delta x} + 6 - 4e^{-\eta k\Delta x} + e^{-2\eta k\Delta x}\right)$$

$$= \frac{Z_i^j}{(\Delta x)^4}\left(e^{\frac{\eta k\Delta x}{2}} - e^{-\frac{\eta k\Delta x}{2}}\right)^4$$

$$= \frac{Z_i^j}{(\Delta x)^4}\left[2ksen\left(\frac{\eta\Delta x}{2}\right)\right]^4$$

$$= \frac{16Z_i^j}{(\Delta x)^4} sen^4\left(\frac{\eta\Delta x}{2}\right),$$

con lo cual podemos escribir

$$\widehat{d}_x^2 = -\frac{4}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) \quad ; \quad \widehat{d}_x^3 = \frac{k}{(\Delta x)^3}\left[sen(4\theta) - 2sen(2\theta)\right] \quad ; \quad \widehat{d}_x^4 = \frac{16}{(\Delta x)^4} sen^4(\theta), \tag{5.18}$$

donde: $\theta = \frac{\eta\Delta x}{2}$. Seguidamente, reemplazamos (5.18) en (5.15), y obtenemos la matriz de amplificación de errores $G(\Delta x, \Delta t, \theta) = G$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ 16a\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^4} sen^4(\theta) & 1 & ka\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^3}\left[sen(4\theta) - 2sen(2\theta)\right] \\ kb\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^3}\left[sen(4\theta) - 2sen(2\theta)\right] & 0 & -4b\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) + c\Delta t + 1 \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Con el objetivo de consolidar la estabilidad del esquema numérico en diferencias finitas (5.14), es prioridad encontrar los requisitos que respalden que el radio espectral de la matriz $G(\Delta x, \Delta t, \theta)$ sea menor que la unidad. Para la prueba del siguiente resultado, necesitamos verificar la condición de estabilidad de von Neumann (ver Proposición 2.3.5).

Teorema 5.2.1 *(Estabilidad) Sean los parámetros reales positivos σ, ρ, α, E e I. Si los tamaños de paso Δx y Δt satisfacen*

$$(\Delta x)^2 > \frac{4EI}{\alpha} \qquad y \qquad \Delta t < \frac{\sigma}{\alpha}, \tag{5.20}$$

entonces el esquema discreto aproximado del sistema de Timoshenko amortiguado (5.14) *es un esquema estable.*

Demostración. Definamos las matrices de componentes reales $G_{\Re}$ y $G_{\Im}$ por

$$G_{\Re} = \mathrm{Re}\left[G(\Delta x, \Delta t, \theta)\right] \quad \text{y} \quad G_{\Im} = \mathrm{Im}\left[G(\Delta x, \Delta t, \theta)\right].$$

Luego, usando (5.19), distinguimos que

$$G_{\Re} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ 16a\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^4} sen^4(\theta) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4b\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) + c\Delta t + 1 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

y

$$G_{\Im} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^3}\left[sen(4\theta) - 2sen(2\theta)\right] \\ b\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^3}\left[sen(4\theta) - 2sen(2\theta)\right] & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.22}$$

Si $\xi = \xi_{\Re} + k\xi_{\Im}$ es un autovalor de la matriz $G = G(\Delta x, \Delta t, \theta)$, con $\xi_{\Re}, \xi_{\Im} \in \mathbb{R}$, tenemos que la igualdad $GZ = \xi Z$, se verifica si y solo si

$$G_{\Re}Z + kG_{\Im}Z = \xi_{\Re}Z + k\xi_{\Im}Z. \tag{5.23}$$

Observemos que (5.23) se cumple siempre que las partes reales e imaginarias de ambos miembros sean respectivamente iguales, lo que implica que cada autovalor $\xi \in \mathbb{C}$ de G es combinación de los autovalores de $G_{\Re}$ y $G_{\Im}$.

(i) **Hallando los autovalores de la matriz real $G_{\Im}$**

Si suponemos que $\xi_{\Im} \in \mathbb{R}$ es un autovalor de la matriz $G_{\Im}$, entonces, para calcularlo, debemos resolver

$$\det(\xi_{\Im} I - G_{\Im}) = 0,$$

la cual, usando (5.22), equivale a resolver

$$\begin{vmatrix} \xi_{\Im} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{\Im} & -a\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^3}\left[sen(4\theta) - 2sen(2\theta)\right] \\ -b\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^3}\left[sen(4\theta) - 2sen(2\theta)\right] & 0 & \xi_{\Im} \end{vmatrix} = 0,$$

de donde, obtenemos: $\xi_{\Im}^3 = 0$, lo que implica que $\xi_{\Im} = 0$ con multiplicidad algebraica 3, es el autovalor de $G_{\Im}$.

(ii) **Hallando los autovalores de la matriz real $G_{\Re}$**

Sea $\xi_{\Re} \in \mathbb{R}$ un autovalor de la matriz $G_{\Re}$, entonces, para hallarlo, debemos resolver

$$\det(\xi_{\Re} I - G_{\Re}) = 0,$$

la cual, teniendo en cuenta a (5.21), nos lleva a resolver

$$\begin{vmatrix} \xi_{\Re} - 1 & -\Delta t & 0 \\ -16a\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^4} sen^4(\theta) & \xi_{\Re} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{\Re} + 4b\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) - c\Delta t - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde, luego de calcular el determinante, tenemos

$$\left[\xi_{\Re} + 4b\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) - c\Delta t - 1\right]\left[(\xi_{\Re} - 1)^2 - 16a\Delta t\right] = 0.$$

Entonces, sigue

$$\xi_{\Re} + 4b\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) - c\Delta t - 1 = 0,$$

pues, como $a < 0$, tenemos que $\left[(\xi_{\Re} - 1)^2 - 16a\Delta t\right] > 0$, y, despejando, obtenemos

$$\xi_{\Re} = -4b\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) + c\Delta t + 1.$$

(iii) **Hallando los autovalores de la matriz de amplificación de errores G**

Conociendo los autovalores de las matrices $G_{\Re}$ y $G_{\Im}$, obtenemos el autovalor $\xi_1 \in \mathbb{C}$ de la matriz compleja G, siendo

$$\xi_1 = -4b\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) + c\Delta t + 1,$$

pero, como $b = \dfrac{EI}{2\sigma}$ y $c = -\dfrac{\alpha}{2\sigma}$, donde $\sigma, \alpha, E, I \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\xi_1 = -2\frac{EI}{\sigma}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) - \frac{\alpha}{2\sigma}\Delta t + 1.$$

Ahora, teniendo en cuentas las hipótesis (5.20) del presente teorema

$$(\Delta x)^2 > \frac{4EI}{\alpha} \qquad \text{y} \qquad \Delta t < \frac{\sigma}{\alpha},$$

nos permite afirmar que el módulo (en nuestro caso, es en realidad el valor absoluto) de ξ_1 es menor que la unidad. En efecto,

$$\begin{aligned}
|\xi_1| &= \left|2\frac{EI}{\sigma}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) + \frac{\alpha}{2\sigma}\Delta t - 1\right| \\
&\leq \left|2\frac{EI}{\sigma}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta) + \frac{\alpha}{2\sigma}\Delta t\right| \\
&\leq \left|2\frac{EI}{\sigma}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} sen^2(\theta)\right| + \left|\frac{\alpha}{2\sigma}\Delta t\right| \\
&= 2\frac{EI}{\sigma}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left|sen^2(\theta)\right| + \frac{\alpha}{2\sigma}\Delta t \\
&\leq 2\frac{EI}{\sigma}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha}{2\sigma}\Delta t = \left(2\frac{EI}{\sigma}\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha}{2\sigma}\right)\Delta t \\
&< \left(2\frac{EI}{\sigma}\frac{\alpha}{4EI} + \frac{\alpha}{2\sigma}\right)\Delta t = \left(\frac{\alpha}{2\sigma} + \frac{\alpha}{2\sigma}\right)\Delta t \\
&= \frac{\alpha}{\sigma}\Delta t < \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right) = 1,
\end{aligned}$$

con lo que así verificamos la condición de estabilidad de von Neumann (2.14), y, por lo tanto, logramos asegurar que el radio espectral de la matriz de amplificación de errores $G(\Delta x, \Delta t, \theta)$ es menor que 1, lo que garantiza que el esquema discreto (5.14) es estable. ■

5.3. Consistencia del esquema numérico

El esquema numérico presentado en (5.14) es una aproximación que se origina al expresar los operadores diferenciales de la ecuación diferencial parcial descrita en (5.8), como cocientes algebraicos, usando series de Taylor sin considerar los errores de truncamiento correspondientes. Para garantizar la consistencia de dicho esquema, de acuerdo a la definición 2.3.1, será indispensable calcular el error total de aproximación y asegurar que dicho error se aproxime a 0 cuando los tamaños de paso tienden a cero, es decir, cuando $\Delta x, \Delta t \to 0$.

Asumiendo suficiente regularidad para la función w y usando las fórmulas para las aproximaciones de las derivadas parciales de diferentes órdenes de $w(x_i, t_j) = w_i^j$ presentadas en la sección 3 del capítulo 2 (ver los resultados (2.8)-(2.11)), tenemos

$$\partial_t w_i^j = \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \tag{5.24}$$

$$\partial_x^2 w_i^j = \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right) := \widehat{d}_x^2 w_i^j + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right),$$

$$\partial_x^3 w_i^j = \frac{w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right) := \widehat{d}_x^3 w_i^j + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right),$$

$$\partial_x^4 w_i^j = \frac{w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j}{(\Delta x)^4} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right) := \widehat{d}_x^4 w_i^j + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right).$$

Con estas consideraciones, el operador diferencial $\mathcal{A}$, presentado en (5.7)

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -\dfrac{EI}{\rho}\partial_x^4 & 0 & -\dfrac{EI}{\rho}\partial_x^3 \\ \dfrac{EI}{2\sigma}\partial_x^3 & 0 & \dfrac{EI}{2\sigma}\partial_x^2 - \dfrac{\alpha}{2\sigma} \end{bmatrix},$$

puede ser expresado como

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -\dfrac{EI}{\rho}\widehat{d}_x^4 & 0 & -\dfrac{EI}{\rho}\widehat{d}_x^3 \\ \dfrac{EI}{2\sigma}\widehat{d}_x^3 & 0 & \dfrac{EI}{2\sigma}\widehat{d}_x^2 - \dfrac{\alpha}{2\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{EI}{\rho} & 0 & -\dfrac{EI}{\rho} \\ \dfrac{EI}{2\sigma} & 0 & \dfrac{EI}{2\sigma} \end{bmatrix} \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right). \quad (5.25)$$

Ahora, notemos que la primera matriz de (5.25) (ver la relación (5.13)) es $\mathcal{A}_h$, y denotemos la segunda matriz de (5.25) por $\mathcal{M}$, es decir,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{EI}{\rho} & 0 & -\dfrac{EI}{\rho} \\ \dfrac{EI}{2\sigma} & 0 & \dfrac{EI}{2\sigma} \end{bmatrix}.$$

Entonces, conseguimos

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_h + \mathcal{M}\mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right). \quad (5.26)$$

Los resultados que se obtienen al aplicar (5.24) para Z_i^j, junto con (5.26), se reemplazan en la primera relación de (5.8), y obtenemos

$$\frac{Z_i^{j+1} - Z_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = \left(\mathcal{A}_h + \mathcal{M}\mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right)\right) Z_i^j,$$

de donde, despejando, sigue que

$$Z_i^{j+1} - (I + \Delta t \mathcal{A}_h) Z_i^j = \mathcal{M}\Delta t \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right) Z_i^j - \Delta t \mathcal{O}(\Delta t). \quad (5.27)$$

Observemos que las expresiones del primer y segundo miembro de (5.27) son, respectivamente, el esquema discreto (5.14), y el error de truncamiento de dicho esquema. El mencionado error se origina al no considerar el error de aproximación presente en cada una de las fórmulas de diferencias finitas (5.10)-(5.12).

De acuerdo con lo que acabamos de mencionar, entonces, el error de truncamiento, e_T, es

$$e_T = \mathcal{M}\Delta t \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right) Z_i^j - \Delta t \mathcal{O}(\Delta t),$$

y, observemos que dicho error cumple

$$||e_T||_\infty \to 0, \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \to 0,$$

donde el vector error e_T está definido por

$$e_T = e_{T_j} = \begin{bmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ \vdots \\ e_{Nj} \end{bmatrix},$$

con $1 \leq j \leq M-1$, y, además, $||e_T||_\infty$, es la norma del máximo, es decir,

$$\|e_T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |e_{ij}| .$$

Por lo tanto, concluimos que el esquema numérico (5.14) es consistente.

5.4. Convergencia del esquema numérico

Como hemos probado que el esquema numérico es consistente y estable, entonces, podemos concluir, por el Teorema de equivalencia de Lax (ver Teorema 2.3.4), que el esquema numérico (5.14) es convergente, lo que nos garantiza que la solución numérica aproximada tienda a la solución exacta en cada punto de malla de la red computacional cuando los tamaños de paso se aproximan a 0, como i.e., cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$.

5.5. Solución numérica

En esta sección, conseguiremos expresar usando las aproximaciones de las derivadas parciales en diferencias finitas, cada una de las ecuaciones (5.1) y (5.2), así como de cada una de las condiciones de frontera (5.3) y (5.4). Permitiéndonos con datos iniciales $w_0(x)$, $w_1(x)$ y $r_0(x)$ conocidos (ver (5.5)), resolver numéricamente nuestro modelo, por lo tanto, podremos obtener fórmulas para la deflexión lateral w y el ángulo de corte r. Denotaremos a la solución aproximada para la deflexión lateral en el nodo (i, j) por w_i^j y a la solución aproximada del ángulo de corte en el nodo (i, j) por r_i^j, y, también, para facilitar los cálculos, de ahora en adelante, denotaremos el tamaño de paso espacial por h y por k el tamaño de paso temporal.

- Para la ecuación (5.1):

Retirando los órdenes de aproximación de cada una de las fórmulas en diferencias finitas, reemplazamos w_{tt}, w_{xxxx} y w_{xxx} por sus respectivos equivalentes (2.9), (2.11) y (2.10), en (5.1), es decir,

$$\rho\left(\frac{w_i^{j+1}-2w_i^j+w_i^{j-1}}{k^2}\right)+EI\left(\frac{w_{i+2}^j-4w_{i+1}^j+6w_i^j-4w_{i-1}^j+w_{i-2}^j}{h^4}\right)$$

$$+EI\left(\frac{r_{i+2}^j-2r_{i+1}^j+2r_{i-1}^j-r_{i-2}^j}{2h^3}\right)=0,$$

de donde, si hacemos $\dfrac{EIk^2}{\rho h^4}=k_2$ y $\dfrac{EIk^2}{2\rho h^3}=k_3$, sigue que

$$w_i^{j+1}-2w_i^j+w_i^{j-1}+k_2\left(w_{i+2}^j-4w_{i+1}^j+6w_i^j-4w_{i-1}^j+w_{i-2}^j\right)$$

$$+k_3\left(r_{i+2}^j-2r_{i+1}^j+2r_{i-1}^j-r_{i-2}^j\right)=0.$$

Recordemos que las condiciones iniciales son datos conocidos. Así, la incógnita en la relación anterior es w_i^{j+1}. Despejando este término, nos queda

$$w_i^{j+1}=k_1w_i^j-w_i^{j-1}-k_2(w_{i+2}^j-4w_{i+1}^j-4w_{i-1}^j+w_{i-2}^j)-k_3(r_{i+2}^j-2r_{i+1}^j+2r_{i-1}^j-r_{i-2}^j), \tag{5.28}$$

donde $k_1=2\,(3k_2-1)$. Notemos que, en (5.28), se utilizan para el $j-$ésimo nivel de tiempo, cinco valores de deflexión lateral, y cuatro valores de ángulo de corte entre los niveles $i-2$ e $i+2$. También se utiliza el valor de la deflexión lateral en el $(j-1)\,-$nivel de tiempo. Así, (5.28) es una fórmula de tres niveles.

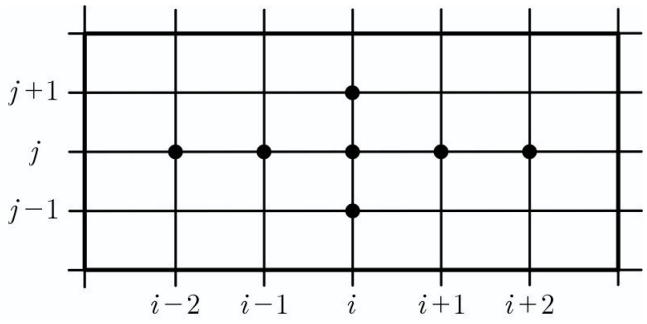


Figura 5.2: Porción de malla que muestra los nodos usados en (5.28).

- Para la ecuación (5.2):

Reemplazamos las funciones r_t, w_{xxx} y r_{xx} por (2.8), (2.9) y (2.10), sin considerar sus órdenes de aproximación, es decir,

$$2\sigma\left(\frac{r_i^{j+1}-r_i^j}{k}\right)+\alpha r_i^j-EI\left(\frac{w_{i+2}^j-2w_{i+1}^j+2w_{i-1}^j-w_{i-2}^j}{2h^3}\right)$$

$$-EI\left(\frac{r_{i+1}^j - 2r_i^j + 2r_{i-1}^j}{h^2}\right) = 0,$$

de donde, con $\frac{\alpha k}{2\sigma} = k_8$, $\frac{EIk}{2\sigma h^3} = k_6$ y $\frac{EIk}{2\sigma h^2} = k_7$, obtenemos

$$r_i^{j+1} - r_i^j + k_8 r_i^j - k_6\left(w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j\right) - k_7\left(r_{i+1}^j - 2r_i^j + r_{i-1}^j\right) = 0,$$

y, de esta ecuación, como los datos iniciales son conocidos, despejamos r_i^{j+1}

$$r_i^{j+1} = k_5 r_i^j + k_6\left(w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j\right) + k_7\left(r_{i+1}^j + r_{i-1}^j\right), \qquad (5.29)$$

con $k_5 = 1 - 2k_6 - 2k_7$. Observemos que en (5.29) se utiliza para el $j-$ésimo paso del tiempo, cuatro valores de la deflexión lateral entre los puntos $i-2$ e $i+2$, y tres valores del ángulo de corte entre los puntos $i-1$ e $i+1$. Así, (5.29) es una fórmula de dos niveles.

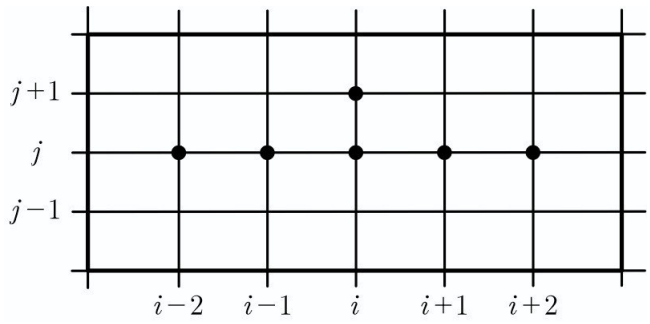


Figura 5.3: Porción de malla que muestra los nodos usados en (5.29).

Las ecuaciones (5.28) y (5.29) son las ecuaciones generales para calcular las soluciones aproximadas de la deflexión lateral w_i^j y el ángulo de corte r_i^j.

En lo que resta por calcular, seguiremos usando aproximaciones por diferencias finitas para las derivadas parciales que necesitemos, para encontrar relaciones numéricas que representen las condiciones de frontera (5.3) y (5.4).

- Para $w = 0$ en $x = 0$:

$$0 = w(0,t) = w(0,j) = w_0^j,$$

es decir, tenemos para cada $j = 1, 2, \cdots, M-1$

$$w_0^j = 0.$$

- Para $w_x + r = 0$ en $x = 0$:

$$0 = w_x|_0 + r|_0 = \frac{w_{0+1}^j - w_0^j}{h} + r_0^j,$$

de donde, para cada $j = 1, 2, \cdots, M-1$, sigue que

$$w_1^j - w_0^j + hr_0^j = 0,$$

pero como $w_0^j = 0$, entonces, para cada $j = 0, 1, \cdots, M-1$, obtenemos

$$w_1^j = -hr_0^j.$$

- Para $w = w_x + r$ en $x = 0$:

$$w_0^j = \frac{w_{0+1}^j - w_0^j}{h} + r_0^j, j = 1, 2, \cdots, M-1,$$

$$0 = w_1^j + hr_0^j, \text{ pues } w_0^j = 0, j = 1, 2, \cdots, M-1.$$

Verificando que $0 = 0$, pues $w_1^j = -hr_0^j, j = 1, 2, \cdots, M-1$.

- Para $(w_x + r)_x = 0$ en $x = L$, i.e., $w_{xx} + r_x = 0$, en $x = L$:

$$w_{xx}|_L + r_x|_L = 0, j = 1, 2, \cdots, M-1.$$

A partir de lo cual, para cada $j = 1, 2, \cdots, M-1$, obtenemos

$$\frac{w_{L+2}^j - 2w_L^j + w_{L-1}^j}{h^2} + \frac{r_{L+1}^j - r_L^j}{h} = 0,$$

lo que nos permite encontrar para cada $j = 1, 2, \cdots, M-1$

$$w_{L+2}^j - 2w_L^j + w_{L-1}^j = -h\left(r_{L+1}^j - r_L^j\right).$$

- Para $(w_x + r)_{xx} = 0$ en $x = L$, i.e., $w_{xxx} + r_{xx} = 0$, en $x = L$:

$$w_{xxx}|_L + r_{xx}|_L = 0, j = 1, 2, \cdots, M-1.$$

Entonces, para $j = 1, 2, \cdots, M-1$, sigue que

$$\frac{w_{L+2}^j - 2w_{L+1}^j + 2w_{L-1}^j - w_{L-2}^j}{2h^3} + \frac{r_{L+1}^j - 2r_L^j + r_{L-1}^j}{h^2} = 0.$$

Concluimos que, para $j = 1, 2, \cdots, M-1$, se tiene

$$w_{L+2}^j - 2w_{L+1}^j + 2w_{L-1}^j - w_{L-2}^j = -2h\left(r_{L+1}^j - 2r_L^j + r_{L-1}^j\right).$$

- Para $(w_x + r)_x = (w_x + r)_{xx}$ en $x = L$, i.e., $w_{xx} + r_x = w_{xxx} + r_{xx}$, en $x = L$:

$$\frac{w_{L+1}^j - 2w_L^j + w_{L-1}^j}{h^2} + \frac{r_{L+1}^j - r_L^j}{h}$$

$$= \frac{w_{L+2}^j - 2w_{L+1}^j + 2w_{L-1}^j - w_{L-2}^j}{2h^3} + \frac{r_{L+1}^j - 2r_L^j + r_{L-1}^j}{h^2}, j = 0, 1, \cdots, M-1.$$

Para cada $j = 1, 2, \cdots, M-1$, obtenemos

$$2h\left(w_{L+1}^j - 2w_L^j + w_{L-1}^j\right) + 2h^2\left(r_{L+1}^j - r_L^j\right)$$

$$= w_{L+2}^j - 2w_{L+1}^j + 2w_{L-1}^j - w_{L-2}^j + 2h\left(r_{L+1}^j - 2r_L^j + r_{L-1}^j\right).$$

Todas estas condiciones de frontera, expresadas en diferencias finitas para los valores de $i = 1, 2, \cdots, N-1$ y $j = 1, 2, \cdots, M-1$, nos permitirán poder calcular cada solución w_i^j y r_i^j, siempre que se sean conocidas las condiciones iniciales $w_0(x)$, $w_1(x)$ y $r_0(x)$ dadas en (5.5), y además, sean conocidos la longitud de la viga $x = L$ y el tiempo $t = T$.

Capítulo 6

Conclusiones

Con respecto al estudio analítico del sistema de Timoshenko, hemos demostrado que el método descrito en el libro de Liu y Zheng [19], basado en el famoso Teorema de Gearhart-Huang-Prüss, permite probar la estabilidad exponencial del sistema. Este método se emplea en una gran diversidad de problemas disipativos. Se trata de un método muy elegante y consiste, grosso modo, en explorar las propiedades disipativas del semigrupo de operadores lineales asociado al sistema.

Siguiendo el procedimiento propuesto por Liu y Zheng en [19], logramos demostrar que el semigrupo generado por el operador asociado a nuestro modelo es analítico.

Con respecto al estudio numérico de nuestro modelo, a partir de los resultados presentados en el Capítulo 5, con el soporte de los métodos numéricos, y, específicamente, con el uso del Método de Diferencias Finitas, que nos permite trabajar con aproximaciones para las derivadas parciales de diferentes órdenes, logramos construir un esquema numérico para la solución aproximada del problema de Cauchy abstracto, equivalente al modelo estudiado, sobre un dominio discretizado. Posteriormente, al hacer el análisis cualitativo del esquema aproximado, investigando las propiedades del radio espectral de la matriz de amplificación de errores, demostramos que el esquema numérico es estable. Asimismo, probamos que el esquema numérico es consistente, y, gracias al Teorema de equivalencia de Lax, demostramos la convergencia de nuestro esquema numérico. Finalmente, obtuvimos fórmulas númericas generales para la deflexión lateral y el ángulo de corte.

Los métodos estudiados para la elaboración de esta tesis son bastante generales, lo cual nos permitirá abordar otros problemas de evolución utilizando las técnicas aquí expuestas.

Bibliografía

[1] Adams R., Founier F., *Sobolev Spaces*. Academic Press, Second Edition, 2003.

[2] Brezis H., *Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer. New York, 2011.

[3] Burden R., Faires J., Burden A., *Análisis Numérico*. Iberoamericana. México D. F. Décima Edición, 2017.

[4] Carbajal E., *Una clase de algoritmos de alta precisión para un sistema acoplado*. PESQUIMAT. Revista de la Unidad de Post Grado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vol. 3, Nro 1. Lima, Junio 1999.

[5] Carrillo A., González K., Mendoza O., *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*. México D.F. México: Facultad de Ciencias, UNAM, 2020-2021.

[6] Carrillo E., Nuñez T., *Análisis Complejo, una introduccion*. Centro de Producción Imprenta de la UNMSM. Lima, Diciembre de 2019.

[7] Chapra S., Canale R., *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw-Hill. México D. F. Quinta Edición, 2015.

[8] Engel K., Nagel R., *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer Science + Bussines Media LLC. New York. USA, 2006.

[9] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., *Partial Differential Equations of Second Order*, Second Edition, SpringerVerlag, New York, 1998.

[10] Gomes, A.M., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Segunda. Edição. Rio do Janeiro, 1999.

[11] Gomes de Souza C., Guimarães G., *Análise Comparativa das Teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko via Método das Diferenças Finitas com Implementação Computacional em Scilab*. Rev. Tecnol. Fortaleza, v. 39, n. 1, p. 1-12, jun. 2018.

[12] Hirsch C., *Computation of Internal and External Flows. Volume 1. Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. John Wiley and Sons. Second Edition. USA, 2007.

[13] Hoffmann K.A., Chiang S.T., *Computational Fluid Dynamics. Volume I*. Engineering Education System. Fourth Edition. USA, 2000.

[14] Kreyszig E., *Functional Analysis with Applications*. University of Windsor. New York, 1989.

[15] Lapidus G., *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engienering*. Jhon Wiley Sons. USA, 1999.

[16] LeVeque R.J., *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM. Philadelphia, 2007.

[17] Liu D., Chen Y., Xu G., *Stabilization of Timoshenko Beam Using Disturbance Observer Based Boundary controls*. Proceedings of the 35th Chinese Control Conference July 27-29, 2016, Chengdu, China.

[18] Liu Z., Zheng S., *Semigroups Associated with Dissipative Systems*. Chapman & HALL/CRC, 1999.

[19] Medeiros L.A., Miranda M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos)*. Primeira Edição. UFRJ / IM, 2011.

[20] Morton K.W., Mayers D.F., *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press. Second Edition. USA, 2005.

[21] Muñoz J.E., *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. Textos avanzados. LNCC, Petrópolis, 2007.

[22] Muñoz J.E., *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Primeira Edição. Textos Avanzados. LNCC, Petrópolis, 1999.

[23] Naz R., Mahomed F. M., *Euler - Bernoulli Beam Equation*. Centre of Excellence in Mathematical and Statistical Sciences, School of Computer Science and Applied Mathematics, University of the Witwatersrand, Johannesburg, Wits 2050, South Africa, 2015.

[24] Nirenberg L., *Elliptic Partial Differential Equations.*, Annali della Scoula Norm. Sup. Pisa, 13, pp. 115-162, 1959.

[25] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag. Applied Math. Sc., vol. 44, New York, 1983.

[26] Quarteroni A., Sacco R. , Saleri F., *Numerical Mathematics*. Second Edition. Springer Berlin. Heildelberg, 2007.

[27] Raposo C.A., *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. São Carlos - SP, Brasil, 2007.

[28] Raposo, C.A., Ferreira, J., Santos, M.L., Castro, N.N.O. *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak damping*. Appl. Math. Lett., 18 (2005), pp. 535-541.

[29] Russell D.L., *A general framework for the study of indirect dampings mechanisms in elastic systems*. J. of Math. Anal. Appl., Vol. 173, No. 2(1993), 339-358.

[30] Renardy M., Rogers R., *An Introduction to Partial Differential Equations*. Second Edition. Springer - Verlag New York, Inc., 2004.

[31] Sinha K., Srisvastava S., *Theory of Semigroups and Applications*. Springer Nature Singapore Pte. Ltd. 2017 and Hindustan Book Agency, 2017.

[32] Strikwerda J.C., *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Second Edition. SIAM, Philadelphia, 2004.

[33] Timoshenko S., Gere J., *Mechanics of Materials*. D. Van Nostrand Company, 1972.

[34] Thomas J.W., *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. First Edition. Springer. New York, 1995.

[35] Wu J.S., *Analytical and Numerical Methods for Vibration Analyses*. First Edition. John Wiley and Sons Singapore Pte. Ltd. 2013.

[36] Zuazua E., *Métodos Numéricos de resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Basque Center for Applied Mathematics (BCAM), Bilbao, Spain. January, 2009.