Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería Industrial
Unidad de Posgrado

Dinámica del crecimiento poblacional de *Acidithiobacillus ferrooxidans* durante la biolixiviación de sulfuros de cobre con presencia de arsénico

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Gestión de Empresas

AUTOR

Vladimir Alejandro ARIAS ARCE

ASESOR

Dr. Rolando REATEGUI LOZANO

Lima, Perú

2022



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Arias, V. (2022). *Dinámica del crecimiento poblacional de Acidithiobacillus ferrooxidans durante la biolixiviación de sulfuros de cobre con presencia de arsénico*. [Tesis de doctorado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ingeniería Industrial, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	VLADIMIR ALEJANDRO ARIAS ARCE
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	07009405
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-7053-9656
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	ROLANDO REATEGUI LOZANO
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06418510
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-2896-9193
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	OSCAR RAFAEL TINOCO GÓMEZ
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08606920
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	ALFONSO RAMÓN CHUNG PINZÁS
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09394397
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	WALTER DÍAZ CARTAGENA
Tipo de documento	DNI

Número de documento de identidad	25726173
Miembro del jurado 3	
Nombres y apellidos	HUGO ÍTALO ROMERO BONILLA
Tipo de documento	Carné de extranjería
Número de documento de identidad	CO / 000871136
Datos de investigación	
Línea de investigación	C.0.2.8. Ingeniería y Tecnología del medio Ambiente C.0.4.16. Lixiviación de Minerales C.0.6.1. Biotecnología
Grupo de investigación	Tecnologías Limpias para la Convivencia Medio Ambiental - TELICMA
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos y sus País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Ciudad Universitaria Calle: German Amezaga Nª 375 Latitud: -12.05833° o 12° 3' 30" sur Longitud: -77.08333° o 77° 5' oeste
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2012 - 2018
URL de disciplinas OCDE	Minería, Procesamiento de minerales https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#2.07.05 Tecnologías de bioprocesamiento, Biocatálisis, Fermentación https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#2.09.02 Ingeniería industrial https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#2.11.04

UNIVERSIDAD NACIONAL
MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMERICA

UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL Nº14-UPG-FII-2022

SUSTENTACIÓN DE TESIS VIRTUAL PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN GESTIÓN DE EMPRESAS

En la ciudad de Lima, del día trece del mes de diciembre del dos mil veintidós, siendo las diez horas, de forma virtual se instaló el Jurado Examinador para la Sustentación de la Tesis titulada: **"DINÁMICA DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL DE ACIDITHIOBACILLUS FERROOXIDANS DURANTE LA BIOLIXIVIACIÓN DE SULFUROS DE COBRE CON PRESENCIA DE ARSÉNICO",** para optar el Grado Académico de Doctor en Gestión de Empresas.

Luego de la exposición y absueltas las preguntas del Jurado Examinador se procedió a la calificación individual y secreta, habiendo sido **APROBADO** con la calificación de **DIECISEIS** (16) **BUENO**.

El Jurado recomienda que la Facultad acuerde el otorgamiento del Grado Académico de Doctor en Gestión de Empresas, al **Mg. VLADIMIR ALEJANDRO ARIAS ARCE.**

En señal de conformidad, siendo las **11:30** horas se suscribe la presente acta en cuatro ejemplares, dándose por concluido el acto.

UNMSM Firmado digitalmente por TINOCO GOMEZ Oscar Rafael FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 13.12.2022 11:56:25 -05:00

Dr. OSCAR RAFAEL TINOCO GÓMEZ
Presidente

UNMSM Firmado digitalmente por CHUNG PINZAS Alfonso Ramon FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 13.12.2022 12:09:53 -05:00

Dr. ALFONSO RAMÓN CHUNG PINZÁS
Miembro

Dr. WALTER DÍAZ CARTAGENA
Miembro

Firmado electrónicamente por: HUGO ITALO ROMERO BONILLA

Dr. HUGO ÍTALO ROMERO BONILLA
Miembro

Dr. ROLANDO REATEGUI LOZANO
Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL
MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMERICA

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

1. Facultad de Ingeniería Industrial.
2. Unidad de Posgrado.
3. Autoridad académica: Director (e) de la Unidad de Posgrado.
   Dr. Jorge Luis Inche Mitma.
4. Operador del programa informático de similitudes: Asistente de Tesis de la UPG.
5. Documento Evaluado: Tesis de posgrado para optar el Grado Académico de Doctor en Gestión de Empresas. Titulado **"DINÁMICA DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL DE ACIDITHIOBACILLUS FERROOXIDANS DURANTE LA BIOLIXIVIACIÓN DE SULFUROS DE COBRE CON PRESENCIA DE ARSÉNICO"**.
6. Autor del Documento: Mg. Vladimir Alejandro Arias Arce.
7. Fecha de recepción del documento: 15/06/2022.
8. Fecha de aplicación del programa de similitudes: 20/06/2022.
9. Software utilizado: Turnitin.
10. Configuración del programa detector de similitudes:
    a. Excluye textos entrecomillados.
    b. Excluye cadenas menores a 40 palabras.
    c. Excluye Índice
11. Porcentaje de similitudes encontradas: Seis por ciento (6%).
12. Fuentes originales de las similitudes encontradas (Ver informe de originalidad).
13. Sin observaciones.
14. Calificación de originalidad.
    a. Documento que cumple criterio de originalidad, sin observaciones.
15. Fecha del informe: 23 de junio del 2022.

UNMSM
Firmado digitalmente por INCHE MITMA Jorge Luis FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 27.06.2022 23:18:06 -05:00

Dr. Jorge Luis Inche Mitma
Director (e) de la Unidad de Posgrado

DEDICATORIA

A mis padres Oswaldo y Plácida

A mi esposa María Patricia

A mis hijos: Aday Vladimir, Jesu Alejandro y Kela Patricia

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber"

(Albert Einstein).

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis sinceros agradecimientos a todos los que colaboraron con sus invalorables aportes para el desarrollo y culminación de este proyecto, a los colegas docentes de la Facultad de Ciencias Biológicas y de la Facultad de Ingeniería Química.

Al Vicerrectorado de Investigación y Posgrado por el financiamiento de Proyectos: PMI2012L01, PMI 2014L02, C17162131 y C18160202. A cada uno de los integrantes del Grupo de Investigación "Tecnologías Limpias para la Convivencia Medioambiental (TELICMA) de la facultad de Ingeniería Geológica, Minera, Metalúrgica y Geográfica de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Al Dr. Rolando Reátegui Lozano, por su acertada dirección en el desarrollo del presente proyecto de investigación.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA 2
AGRADECIMIENTOS 3
ÍNDICE GENERAL 4
LISTA DE CUADROS 8
LISTA DE FIGURAS 8
LISTA DE ABREVIATURAS 11
RESUMEN 15
ABSTRACT 16
CAPITULO I: INTRODUCCION 17
1.1. Situación Problemática 17
1.2. Formulación del Problema 19
1.2.1. Problema General 19
1.2.2. Problemas Específicos 19
1.3. Justificación de la Investigación 20
1.4. Objetivos de la Investigación 21
1.4.1. Objetivo General 21
1.4.2. Objetivos Específicos 21
1.5. Limitaciones y Alcances 22
CAPITULO II: MARCO TEORICO 23
2.1. Marco Filosófico de la Investigación 23
2.2. Antecedentes de la Investigación 25
2.3. Bases Teóricas 29
2.3.1. Mecanismos de la Acción Bacteriana. 29
2.3.1.1. Mecanismo Directo. 30
2.3.1.2. Mecanismo Indirecto 31

2.3.2. Mecanismo de Reproducción Binaria 34
2.3.3. Ciclo de Crecimiento Poblacional (Modelo de Monod) 37
2.3.3.1. Fase de adaptación. 37
2.3.3.2. Fase exponencial o logarítmica. 38
2.3.3.3. Fase estacionaria. 38
2.3.3.4. Fase de muerte. 38
2.3.4. Factores Físicos y Químicos que Influyen en el Crecimiento Poblacional. 39
2.3.4.1. Nutrientes. 39
2.3.4.2. Temperatura. 40
2.3.4.3. El pH. 40
2.3.4.4. Potencial de oxido reducción (ORP). 41
2.3.4.5. Oxígeno. 41
2.3.5. Dinámica del Crecimiento Bacteriano 42
2.3.6. Ecuaciones de los Modelos de Crecimiento 46
2.3.6.1. Modelo Exponencial (Modelo Malthusiano) 47
2.3.6.2. Modelo de Gompertz. 49
2.3.6.3. Modelo Logístico 54
CAPITULO III: METODOLOGIA 66
3.1. Hipótesis 66
3.1.1. Hipótesis General 66
3.1.2. Hipótesis Específicas 67
3.2. Identificación de Variables 67
3.2.1. Variables Independientes. 67
3.2.2. Variables Dependientes. 68
3.2.3. Variables Influyentes 68
3.3. Tipo y Diseño de Investigación 70

3.4. Unidad de Análisis y Muestra de Estudio 73
3.5. Técnicas de Recolección de Datos 75
3.6. Análisis e Interpretación de la Información 75
3.7. Análisis de la Dinámica Poblacional 76
3.8. Ajuste de los Modelos en una Hoja de Cálculo (Excel) 77
CAPITULO IV: RESULTADOS Y DISCUSION…… ……78
4.1. Análisis e Interpretación de Resultados 78
4.1.1. Disolución Metálica. 78
4.1.1.1. Primera Etapa de Biolixiviación. 78
4.1.1.2. Segunda Etapa de Biolixiviación 81
4.1.1.3. Tercera Etapa de biolixiviación 84
4.1.2. Crecimiento de la Población Bacteriana. 87
4.1.2.1. Conteo de la Población. Primera Etapa de Biolixiviación. 88
4.1.2.2. Conteo de la Población. Segunda Etapa de Biolixiviación. 90
4.1.2.3. Conteo de la Población. Tercera Etapa de Biolixiviación. 92
4.2. Representación Matemática de la Dinámica del Crecimiento. 93
4.2.1. Aplicación del Modelo Gompertz 94
4.2.1.1. Análisis y Ajuste de la Tasa de Crecimiento 94
4.2.1.2. Ajuste y Control del Crecimiento Poblacional 96
4.2.2. Aplicación del Modelo Logístico 100
4.2.2.1. Análisis y Ajuste de la Tasa de Crecimiento. 101
4.2.2.2. Ajuste y control del Crecimiento Poblacional 103
4.3. Prueba de Hipótesis 109
4.3.1. Prueba de la Primera Hipótesis Específica 109
4.3.2. Prueba de la Segunda Hipótesis Específica 109
4.3.3. Prueba de la Tercera Hipótesis Específica 110
4.4. Presentación de Resultados 110

4.4.1. Aplicación del Modelo Gompertz. 110

4.4.2. Aplicación del Modelo Logístico 113

4.5. Discusión de Resultados..... 116

CONCLUSIONES..... 118

RECOMENDACIONES 119

REFERENCIAS. 120

APENDICES 127

Apéndice A. Matriz de Consistencia 128

Apéndice B. Población Bacteriana - Primera Etapa 129

Apéndice C. Población Bacteriana - Segunda Etapa..... 133

Apéndice D. Población Bacteriana - Tercera Etapa 137

Apéndice E. Reportes de Ensayos Químicos …… 126

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1: Incremento de la población a través de los periodos de generación. 35

Cuadro 2: Clasificación de los microorganismos en función a la temperatura. 40

Cuadro 3: Comparativo de los modelos Gompertz y Logístico. 65

Cuadro 4: Asociación de variables. 69

Cuadro 5: Operacionalización de Variables. 70

Cuadro 6: Identificación de la unidad experimental. 71

Cuadro 7: Diseño metodológico experimental. 72

Cuadro 8: Principales Componentes del Mineral Sulfurado. 73

Cuadro 9: Caracterización Mineralógica por Microscopía Óptica. 74

Cuadro 10: Medición y Control de las Variables Dependientes. 76

Cuadro 11: Contenido de cobre (ppm) en solución durante el periodo de biolixiviación. Primera Etapa. 79

Cuadro 12: Contenido de hierro (ppm) en solución durante el periodo de biolixiviación. Primera Etapa. 80

Cuadro 13: Contenido de Cobre (ppm) durante el periodo de biolixiviación. Segunda Etapa. 82

Cuadro 14: Contenido de hierro (ppm) durante el periodo de biolixiviación. Segunda Etapa. 83

Cuadro 15: Contenido de cobre (ppm) durante la biolixiviación. Tercera Etapa. 84

Cuadro 16: Contenido de hierro (ppm) durante la biolixiviación. Tercera Etapa. 86

Cuadro 17: Resumen de la disolución de Cu, Fe y As, alcanzadas en la biolixiviación del mineral sulfurado. 87

Cuadro 18: Crecimiento de la población de At. ferrooxidans. Primera Etapa de la biolixiviación. 88

Cuadro 19: Crecimiento de la población de At. ferrooxidans. Segunda Etapa de la biolixiviación. 90

Cuadro 20: Crecimiento de la población de At. ferrooxidans. Tercera Etapa de la biolixiviación. 92

Cuadro 21: Ajuste de parámetros para la obtención de la tasa de crecimiento. Modelo Gompertz. 95

Cuadro 22: Cálculo de Y correspondiente a la expresión lineal del ensayo sin adición de sulfato ferroso al medio de lixiviación. 97

Cuadro 23: Análisis efectuado mediante el uso de la función de Gompertz. 98

Cuadro 24: Ajuste de parámetros para la obtención de la tasa de crecimiento mediante el modelo Logístico. 101

Cuadro 25: Análisis efectuado mediante el uso de la función Logística. 103

Cuadro 26: Resumen de ecuaciones de la dinámica del crecimiento poblacional en la primera etapa del proceso de biolixiviación. 106

Cuadro 27: Resumen de ecuaciones de la dinámica del crecimiento poblacional en la segunda etapa del proceso de biolixiviación. 107

Cuadro 28: Resumen de ecuaciones de la dinámica del crecimiento poblacional en la tercera etapa del proceso de biolixiviación. 108

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Crecimiento de At. ferrooxidans RecB1a en sulfuro de cobre (CuS) al 1%. 27

Figura 2: Mecanismos simultáneos de la acción bacteriana. 32

Figura 3: Fases del crecimiento microbiano. 39

Figura 4: Representación de la población bacteriana en función del tiempo. 43

Figura 5: Modelo de crecimiento logístico. 45

Figura 6: Variación asimétrica de la tasa de crecimiento. 50

Figura 7: Variación de la tasa de crecimiento en el tiempo. 57

Figura 8: Recuperación de cobre a diferentes concentraciones de sulfato ferroso en solución. Primera Etapa de Biolixiviación. 80

Figura 9: Recuperación de cobre a diferentes concentraciones de sulfato ferroso en solución. Segunda Etapa de Biolixiviación. 82

Figura 10: Recuperación de cobre a diferentes concentraciones de sulfato ferroso en solución. Tercera Etapa de Biolixiviación. 85

Figura 11: Incremento de la población bacteriana durante la primera etapa de biolixiviación. 89

Figura 12: Incremento de la población bacteriana durante la segunda etapa de biolixiviación. 91

Figura 13: Incremento de la población bacteriana durante la tercera etapa de biolixiviación. 93

Figura 14: Tasa de crecimiento bacteriano durante la biolixiviación haciendo uso del Modelo Gompertz, con 0 gramos de FeSO4/L. Primera Etapa. 96

Figura 15: Representación lineal. Ensayo de crecimiento bacteriano con 0 grs. de sulfato ferroso. Primera Etapa. 98

Figura 16: Representación de la población haciendo uso de la Función de Gompertz para 0 grs. de sulfato ferroso. Primera Etapa. 99

Figura 17: Tasa de crecimiento bacteriano durante la biolixiviación haciendo uso de la función Logística, con 0 gramos de FeSO4/L. Primera Etapa. 102

Figura 18: Representación de la población haciendo uso de la Función Logística para 0 grs. de sulfato ferroso. Primera Etapa. 104

Figura 19: Consolidado de las curvas ajustadas. Primera Etapa de biolixiviación. 111

Figura 20: Consolidado de las curvas ajustadas. Segunda Etapa de Biolixiviación. 112

Figura 21: Consolidado de las curvas ajustadas. Tercera Etapa de biolixiviación. 112

Figura 22: Curvas ajustadas en la Primera Etapa de biolixiviación. 113

Figura 23: Curvas ajustadas en la Segunda Etapa de biolixiviación. 114

Figura 24: Curvas ajustadas en la Tercera Etapa de biolixiviación. 115

LISTA DE ABREVIATURAS

At. ferrooxidans	Acidithiobacillus ferrooxidans
At. thiooxidans	Acidithiobacillus thiooxidans
DP	Dinámica de Poblaciones
ORP	Potencial de óxido reducción
SMBL	Solubilización de minerales por biolixiviación
PPM	Partes por millón
Cel/mL	Células por milílitro
ICP	Difractometría con Plasma Acoplado Inductivamente
rpm	revoluciones por minuto
SEC	sumatoria del error cuadrático
SDE	sumatoria de la diferencia experimental

RESUMEN

En el presente estudio se lleva a cabo la biolixiviación de minerales sulfurados con alto contenido metálico, mediante cepas nativas de *Acidithiobacillus ferrooxidans* aisladas de efluentes ácido de mina de la región de Huancavelica. Las pruebas se llevaron a cabo en tres etapas de 24 días cada una, primero inoculando la bacteria adaptada en pulpa de mineral y en la segunda y tercera etapa inoculando las usadas en las etapas anteriores, respectivamente. Las principales condiciones fueron: temperatura ambiente (20°C), agitación 150 rpm, pH 2.0 y medio líquido con diversas concentraciones de sulfato ferroso y mineral sulfurado; teniendo como objetivo extraer el cobre y monitorear la dinámica del crecimiento poblacional bacteriano.

Mediante el uso de los modelos sigmoideos de Benjamín Gompertz y Pierre François Verhulst, se ha representado paramétrica y gráficamente el crecimiento poblacional de las bacterias *At. ferrooxidans* durante el proceso de biolixiviación al mineral sulfurado rico en cobre, oro y abundantes impurezas como el arsénico. Además, mediante análisis de regresión no lineal y con la herramienta Solver del Excel, se ha realizado el ajuste de los parámetros. El modelo que dio mejor performance al crecimiento poblacional fue el modelo de B. Gompertz, con un alto coeficiente de determinación.

Palabras clave: *A*juste de parámetros, *At. ferrooxidans*, crecimiento poblacional, ecuación sigmoidea, minerales sulfurados.

ABSTRACT

In the present study, the bioleaching of sulphide minerals with a high metallic content is carried out, using native strains of *Acidithiobacillus ferrooxidans* isolated from acid mine effluents in the Huancavelica Region. The tests were carried out in three stages of 24 days each, first inoculating the adapted bacteria in mineral pulp and in the second and third stages inoculating those used in the previous stages, respectively. The main conditions were: room temperature (20°C), agitation 150 rpm, pH 2.0 and liquid medium with various concentrations of ferrous sulfate and sulfur mineral; with the objective of extracting copper and monitoring the dynamics of bacterial population growth.

Using the sigmoid models of Benjamín Gompertz and Pierre Francois Verhulst, the population growth of *At. Ferrooxidans* bacteria has been parametrically and graphically represented during the bioleaching process to the sulfur ore rich in copper, gold and abundant impurities such as arsenic. In addition, by means of non-linear regression analysis and with the Excel Solver tool, the adjustment of the parameters has been carried out. The model that gave the best performance to population growth was the B. Gompertz model, with a high determination coefficient.

Keywords: Parameter adjustment, *At. ferrooxidans*, population growth, sigmoid equation, sulfide minerals.

CAPITULO I

INTRODUCCION

1.1. Situación Problemática

La economía del Perú está sustentada en parte, por la producción de concentrados sulfurados de cobre, acompañado de otros metales e impurezas como el arsénico; las que se extraen a través de procesos hidrometalúrgicos y pirometalúrgicos, vertiendo los residuos al medio ambiente y convirtiéndose en un problema ambiental. El efecto negativo sobre el medio ambiente se puede mitigar mediante el tratamiento de los recursos minerales con microorganismos en procesos biohidrometalúrgicos, que consiste en la lixiviación de metales a partir de los minerales, concentrados de minerales y materiales de desecho; también, mediante la biorremediación de drenajes ácidos (Maluckov, 2017) y el tratamiento de concentrados refractarios y minerales de baja ley (Watling, 2016), como proceso alternativo; ello requiere del conocimiento de los mecanismos físicos y químicos, así como la identificación de la dinámica de la población bacteriana durante su procesamiento, a fin de mitigar las implicancias tecnológicas y medioambientales causadas por el sector minero metalúrgico.

El crecimiento poblacional bacteriano durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre-arsénico, se ve favorecida por la presencia de un consorcio de microorganismos fierrooxidantes y azufreoxidantes; siendo el caso que, durante la biolixiviación de la pirita, la presencia de una comunidad bacteriana favorece el proceso (Xingyu L. et al., 2009). Por otro lado, la biolixiviación de la pirita con *At.*

ferrooxidans, permitió la obtención de una cepa con alta población bacteriana (Mora, 2010). Los factores físicos y químicos asociados al crecimiento bacteriano durante la oxidación y reducción de los minerales, deben ser identificadas y debidamente adecuadas; para que, a través de la aplicación de los modelos matemáticos, permitan desarrollar eficientemente los procesos de extracción de metales.

Los modelos matemáticos que se adecuan a los datos de crecimiento poblacional, proveen el uso de funciones exponenciales, como los modelos obtenidos a partir de las funciones propuestas por B. Gompertz y P. F. Verhulst. (Cayre et al., 2007), permitiendo relacionar la coherencia del proceso biológico. La representación algebraica del modelo matemático es el punto de partida para representar y analizar el proceso de evolución en un sistema bacteriano (Ulloa et al., 2016).

El enfoque holístico permite comprender integradamente el funcionamiento de los sistemas biológicos y profundizar en el entendimiento de las interacciones internas y externas, que conllevan a la aparición de otras propiedades o la consecución de resultados como el crecimiento microbiano (Briceño et al., 2010; Nannipieri et al., 2017). Dentro de esta tarea se encuentra el estudio de la dinámica de poblaciones como sistema biológico de interacciones. La dinámica de poblaciones fue, tradicionalmente el campo dominante de la biología matemática relacionada al estudio de enfermedades infecciosas que afectan a las poblaciones. (Miranda, 2014). Hoy, su interpretación es requerida por el sector industrial en diversas actividades del quehacer tecnológico.

Por lo tanto, se tiene la necesidad de identificar la dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias *At. ferrooxidans*, teniendo como variables independientes especificas a la densidad de pulpa y la concentración de sulfato ferroso durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre, evaluándose la disolución metálica,

el modelo matemático y la población bacteriana, identificadas como variables dependientes.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Cómo la identificación de la dinámica del crecimiento poblacional de la bacteria *Acidithibacillus ferrooxidans* permitirá evaluar la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico?

1.2.2. Problemas Específicos

1. ¿Cuáles son los principales factores que intervienen en el crecimiento de la población bacteriana para la oxidación de sulfuros de cobre durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados?
2. ¿Será posible representar la dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias *At. ferrooxidans* generada principalmente por la densidad de pulpa y la concentración de hierro durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico?
3. ¿Cómo se relaciona el incremento de la concentración de hierro en la solución de lixiviación, con el crecimiento de la población bacteriana durante la biolixiviación de minerales sulfurados?

1.3. Justificación de la Investigación

1.3.1. Justificación Teórica

Los modelos matemáticos de crecimiento poblacional utilizados en el área de las ciencias biológicas, se clasifican por un lado presentando el crecimiento poblacional ilimitado que se representa con un modelo exponencial en un medio muy favorable y por otro lado un crecimiento limitado representado principalmente por el modelo logístico y el modelo de Gompertz y, sus modificaciones.

La aplicación del cálculo diferencial en contextos biológicos permite generar escenarios de interpretación de los procesos y por ende escenarios enseñanza y aprendizaje (Parra et al., 2019) y la adquisición de conocimientos para la experimentación y simulación (Gordillo & Pino-Fan, 2016). Por ello, la dinámica de crecimiento poblacional de la bacteria *At. ferrooxidans*, ajustada a un sistema de ecuaciones diferenciales, permite identificar las etapas del ciclo de vida bacteriano y hacer deducciones y predicciones confiables del comportamiento durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados.

1.3.2. Justificación Práctica

Existe la necesidad de desarrollar modelos matemáticas para entender los problemas biológicos y que sirvan como herramientas que permitan esclarecer y resolver las dificultades en el desempeño bacteriano. Siendo necesario la identificación de factores matemáticos como ecológicos que influyen en el crecimiento poblacional y su evolución metabólica (Stucchi et al., 2020). También, el ajuste de un modelo en la dinámica poblacional permitirá incrementar el potencial biotecnológico (Ibargüen

et al., 2018). Por lo tanto, el estudio de la dinámica del crecimiento poblacional durante el proceso de lixiviación de minerales sulfurados, permitirá interpretar los procesos que actualmente se están realizando a escala industrial; además, permitirá potenciar su aplicación en nuevos proyectos de explotación de los recursos mineros.

1.4. Objetivos de la Investigación

1.4.1. Objetivo General

Identificar la dinámica del crecimiento poblacional de la bacteria *Acidithiobacillus ferrooxidans* durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Estudiar el efecto de la densidad de pulpa y la concentración de sulfato ferroso en el crecimiento de la población bacteriana y la oxidación de sulfuros de cobre durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados
2. Representar la dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias *At. Ferrooxidans,* generada principalmente por la densidad de pulpa y la concentración de hierro durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico mediante las ecuaciones diferenciales de los modelos de B. Gompertz y Logístico

3. Relacionar el incremento de la concentración de hierro en la solución de lixiviación, con el crecimiento de la población bacteriana durante la biolixiviación de minerales sulfurados.

1.5. Limitaciones y Alcances

Teniendo en consideración que durante el proceso de biolixiviación de los minerales existe la posibilidad de la aparición de diversos microorganismos, dando origen a la presencia de un consorcio de bacterias acidófilas del género thiobacillus; así como, *Acidithiobacillus thiooxidans, Leptospirilium ferriphilum, Acidiphilium cryptum* y *Ferroplasma acidiphilum*. (Galleguillos et al., 2009), entre otros. La identificación del consorcio no es parte del estudio.

La composición de las comunidades bacterianas y los compuestos que se generan en los procesos de biolixiviación (Xingyu, 2009), tendrán variación cuando son modificadas las condiciones del medio. El seguimiento de la comunidad microbiana es fundamental en los procesos de biolixiviación, a fin de identificar la taxonomía del consorcio (Hedrich et al., 2016). La modificación de las condiciones del medio no son parte de este estudio.

La eficiencia del proceso de biolixiviación se determina por el grado de disolución del cobre y el incremento de fierro en la solución. En el presente estudio se asumirá a la bacteria *At. ferrooxidans* como el principal y predominante microorganismo, teniendo en cuenta que en su actividad metabólica produce la oxidación del Fe (II) a Fe (III) y la conversión del sulfuro a compuestos reducidos y oxidados de azufre. Además, se efectuará el control y monitoreo del pH y Eh, respectivamente, como factores influyentes en la dinámica del crecimiento bacteriana.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

2.1. Marco Filosófico de la Investigación

Para la construcción de la teoría de la dinámica de poblaciones ecológicas basadas en la concepción semántica y haciendo uso de un modelo metateórico estructuralista (Diaz & Lorenzano, 2017), se identifican los elementos teóricos básicos de la dinámica de poblaciones (DP) y los modelos potenciales para su representación parcial y/o total a través de la identificación de sus condiciones vinculantes al interior y exterior; en este caso, permitiendo establecer lineamientos de comportamiento en el crecimiento continuo por 24 días y luego interrumpido.

Siendo la ecología una disciplina compleja por la diversidad de sus elementos y los patrones espaciales y temporales de distribución (Cordova & Zambrano, 2015) y la respectiva proliferación de teorías básica y compleja, como específicas y generales, han permitido la maduración de los saberes y la explicación epistemológica de los patrones de crecimiento y distribución de los organismos en general.

Por lo tanto, la biología utiliza las herramientas de la matemática para la exploración del mundo viviente, consolidada inicialmente por Thomas Malthus, marcando el inicio de la simbiosis epistemológica de la matemática biológica

fundamentada en el método hipotético-deductivo (Torres & Lugo, 2020). De esta manera los comportamientos poblacionales son trabajados con modelos hipotéticos y condiciones o ideas (Cortez et al., 2013), quien asegura que desde un punto de vista académico, es necesario tener un sustento matemático como el cálculo diferencial e integral a través de las ecuaciones diferenciales.

En el caso específico de la población bacteriana, existen trabajos realizados usando la concepción clásica de las teorías científicas que mencionan las dificultades en su identificación; así como, las que determinan patrones de comportamiento y predicción acertadas. El uso de concepciones actuales está permitiendo obtener una visión más clara y precisa de la estructura ecológica (Castle, 2005). Desde una perspectiva holística, el funcionamiento de los sistemas biológicos se puede concebir a partir de las observaciones internas y externas, que incluyen la indagación, organización, análisis y explicación de la realidad del sistema, permitiendo reforzar el conocimiento y perfeccionar los modelos de su representación y su articulación con la generación de teorías (Briceño et al, 2010).

La dinámica de poblaciones hace uso intensivo de la matemática numérica, para representar el comportamiento de las poblaciones en el tiempo, proveyendo ecuaciones estructuradas, siendo las primogénitas las propuestas por los académicos: Thomas Malthus, Benjamín Gompertz y Pierre François Verhulst; hoy en día, conocidos como: Modelo Malthusiano, Modelo de Gompertz y Modelo Logístico.

Las reconstrucciones o modificaciones realizadas acotando condiciones particulares o usando herramientas propias del investigador, está permitiendo la caracterización de metapoblaciones. El estudio de la dinámica de poblaciones como

una metateoría, nos permite dar un tratamiento adecuado a los problemas de las poblaciones (Diaz & Lorenzano, 2017).

El objetivo general de esta investigación ha sido identificar la dinámica de poblaciones de la bacteria *At. ferrooxidans* durante la biolixiviación de minerales azufrados, haciendo uso de los modelos de Gompertz y el Logístico y, determinar la potencialidad de su representación.

2.2. Antecedentes de la Investigación

Las bacterias acidófilas generadoras de acidez y por ende reductoras de sulfuros, fueron aisladas a partir de drenajes ácidos de mina (Johnson et al., 1992; Raheb et al., 2007; Vidyalakshmi & Sridar 2007) y, en la actualidad está siendo usada industrialmente para la extracción de cobre, cobalto, níquel, oro (Rawlings, 2005), a partir de los minerales y concentrados de alta ley. Existiendo un gran potencial para la recuperación de otros metales a partir de los minerales (Mejía et al., 2014), donde el arsénico está presente, este metaloide extremadamente tóxico posee cuatro estados de oxidación: -3, 0, +3, y +5 (Mateos, 2016). Los minerales más comunes que contienen arsénico son: arsenopirita (FeAsS), rejalgar (As_4S_4), enargita (Cu_3AsS_4), cobaltita (CoAsS), tennantita ($Cu_{12}As_4S_{13}$) y oropimente (As_2S_3). La disolución de estos compuestos produce alteraciones al ambiente y en la salud (Diaz et al., 2018), con pérdidas económicas.

En la determinación del comportamiento de la bacteria quimiolitotrófica en medios con sulfuro de cobre y en sulfato ferroso, el ion sulfuro (S^{2-}) constituye uno de las especies de azufre que tiene el estado de oxidación más reducido y reacciona espontáneamente con el oxígeno, formando una serie de productos entre los que se

identifican el tiosulfato y sulfito. A pH ácidos y a bajas concentraciones de ion sulfuro la oxidación biológica competiría con la siguiente reacción química:

$$S^{2-} + 2H^{+} + 1/2O_2 \rightarrow S^{o} + H_2O \qquad [1]$$

Por la elevada reactividad de los iones sulfuros libres y a pesar de la escasa información sobre la enzimología de su oxidación, se ha reportado que el primer paso de la oxidación del sulfuro por *At. thiooxidans* se iniciaría con la formación de azufre elemental o largas cadenas de polisulfuros (Zepeda, 2018). La oxidación de los sulfuros por *At. ferrooxidans* también seguiría esta vía y se efectuaría en el periplasma de la célula. Esta aseveración es consistente con los resultados de Hallberg et al., (1996) que al añadirle el desacoplador carbonil cianuro m-clorofenil-hidrazona durante la oxidación del tetrationato, acumula azufre elemental y politionatos.

Para la identificación plena de la cepa bacteriana de *At. Ferrooxidans*, esta se cultivó en el Medio 9k, conteniendo: 0.4 g/l de $MgSO_4 .7H_2O$, 0.1 de $(NH_4)_2SO_4$, y 0.04 de $KH_2PO_4 .3H_2O$, complementado con sulfuro de cobre al 1%. El cultivo fue incubado a temperatura ambiente en agitación rotatoria a 150 rpm por siete días, mediante recuento directo en una cámara de Petroff-Hauser (EMS®) en un microscopio de contraste de fases (Leica®) a 630 aumentos, se observó el crecimiento de *At. ferrooxidans* RecB1a en sulfato ferroso, alcanzando la fase estacionaria después de cinco días. La identificación molecular de organismos acidófilos que oxidan ion ferroso aislados, se llevó a cabo comparando las secuencias de los genes 16S rRNA (16S rDNA) de las cepas nativas con aquellas disponibles en las bases de datos usando el programa BlastN versión 2.0. Las secuencias rRNA 16S se obtuvieron de las bases de datos GenBank/EMBL/DDBJ. De acuerdo al porcentaje de similitud el aislado RecB1a resultó *At. ferrooxidans* al 98%. (Arias Arce V. A., 2012)

Figura 1: Crecimiento de At. ferrooxidans RecB1a en sulfuro de cobre (CuS) al 1%.



Nota. La biolixiviación de CuS, con coloración azulada se debe a la formación de sulfato de cobre producto de la acción bacteriana.

Fuente: Informe Técnico Multidisciplinario 2012 (Arias, 2012).

La aplicación comercial de la biolixiviación para la extracción del cobre con un enfoque ecológico para el reciclaje de recursos minerales secundarios y de baja ley se ha incrementado en todo el mundo desde la década de 2000, proponiéndose mejoras tecnológicas y la protección del medio ambiente (Yin et al., 2018). Siendo un proceso alternativo a la pirometalurgia, en la biolixiviación de la calcopirita ($CuFeS_2$) la disolución va acompañada por la pasivación mediante la formación de polisulfuros, azufre elemental y sulfatos insolubles, habiéndose identificado el efecto de las propiedades fisicoquímicas (Zhao et al, 2019).

Por la catalización bacteriana y acción de oxidación del Fe^{3+} a los sulfuros, los metales ingresan a la fase líquida como iones, este proceso aún está evolucionando porque todavía hay muchos mecanismos que no están bien explicados, como el efecto sinérgico entre microorganismos, el papel de las sustancias poliméricas extracelulares, el fenómeno de pasivación, la fragmentación del mineral, el funcionamiento de la pila de mineral, entre otros ((Li et al., 2021). Los desafíos en la identificación teórica y experimental pueden direccionar en la mejora de los procesos de tratamiento comercial.

La característica más importante en el estudio de los microorganismos es la descripción del crecimiento (Gompertz, 1825), mediante la estimación de sus parámetros. Es así, como en la identificación de la curva de crecimiento de bacterias lácticas y *Brochothrix thermosphacta*, efectuado por Cayré et al. (2007), utilizando los modelos primarios Logístico, Gompertz y Baranyi, para estimar los parámetros cinéticos de crecimiento: tiempo de latencia (λ), máxima velocidad específica de crecimiento (μ máx.) y máxima densidad bacteriana (y máx.), compararon la bondad de ajuste de los modelos, la incertidumbre y precisión de las estimaciones, obteniendo mejores ajustes con los modelos de Gompertz y Baranyi y mejor estimación de λ con el modelo de Gompertz. Por otro lado, en estudios realizados por Castro et al. (2016), sobre el crecimiento bacteriano en alimentos utilizando los modelos de Gompertz, Logístico, Stannard y Richards y, mediante sus respectivos análisis de regresión, se encontró similitud en el ajuste, presentando mayores criterios de convergencia los modelos de Gompertz y Logístico. Recomendando su uso para modelar y predecir el crecimiento de microorganismos.

Para el estudio de la dinámica de los microorganismos en la biolixiviación de minerales sulfurados, se realizarán diversos experimentos. Se inició con estudios de

aislamiento y adaptación de cepas nativas, obteniendo *At. ferrooxidans* (Johnson et al., 1992, Arias et al., 2012) y luego se realizaron diversos ensayos de lixiviación de minerales sulfurados, monitoreando los parámetros de mayor influencia, como el pH, potencial de oxido reducción, oxígeno disuelto, entre otros.

Los modelos matemático exponenciales o de orden superior permiten interpretar la dinámica ecológica. Trabajos recientes como el de AlAdwani & Saavedra (2019), han demostrado que la dinámica de poblaciones permite incrementar la confianza y explicar los diversos sistemas ecológicos, mediante el uso de polinomios multivariantes o la adición de puntos de equilibrio que permitan representar la dimensión del sistema y verificar el modelo o determinar su restricción. La complejidad de los sistemas ecológicos puede dificultar la representación de la dinámica de las poblaciones.

2.3. Bases Teóricas

Las rutas hidrometalúrgicas, como la lixiviación asistida de bacterias permiten provisionar un medio sulfato ácido necesaria para la disolución metálica y en la mayoría de los casos se lleva a cabo a presión atmosférica, cuyas bases teóricas están sustentadas por diversas reacciones de óxido-reducción asociados al ciclo de crecimiento bacteriano, a los factores físicos y químicos y al mecanismo de la acción bacteriana en la disolución metálica.

2.3.1. Mecanismos de la Acción Bacteriana.

La Biolixiviación se ubica dentro de la clasificación de proceso tecnológico comercial de la Biominería, que es el término usado para explicar la participación de

los microorganismos en la extracción de metales desde minerales o concentrados sulfurados (Rawlings, 2004).

La oxidación bacteriana mediante la acción de la *At. ferrooxidans*, contribuye en la formación de los drenajes ácidos de mina y en la extracción de oro, cobre, uranio, etc., a partir de los sulfuros que los contienen, a través de la oxidación de iones ferrosos en solución y la reducción de compuestos de azufre (Harvey & Crundwell, 1997). A continuación, se describe cada uno de los mecanismos que explican los procesos de biooxidación.

La presencia del ion férrico (Fe^{+3}) contribuye a la lixiviación de gran parte de los sulfuros metálicos, siendo la *At. ferrooxidans* capaz de regenerar el ion férrico, es de suponer que ésta bacteria contribuirá a la lixiviación de los sulfuros manteniendo una alta concentración iónica en solución. El ataque oxidante del ion Fe^{+3} produce azufre elemental como subproducto, dicho producto puede permanecer en la superficie de las partículas del sulfuro formando así una barrera de difusión tanto para el ion Fe^{+3}, de cualquier otro agente oxidante o bien para la bacteria misma. En procesos estacionarios, la oxidación de la capa de azufre permite la difusión en la interface del sulfuro con la solución y sulfuro partícula de mineral. En presencia de las bacterias, oxígeno y pH ácido moderado, ocurre la oxidación de la capa del sulfuro; consiguientemente, la liberación de los metales (Ospina et al., 2012)

2.3.1.1. Mecanismo Directo.

En este caso, los componentes presentes en la membrana bacteriana (enzimas), atacan al sulfuro metálico de forma directa, adhiriéndose a la superficie del mineral y posteriormente lo oxida enzimáticamente por transporte de electrones desde la parte

reducida del mineral al oxígeno. La reacción general es:

$$MS + 2O_2 \xrightarrow{Bacterias} H_2SO_4 \qquad (2)$$

Oxidación del sulfuro con reducción del oxígeno, para favorecer la formación de ácido sulfúrico.

$$MS + 2H^+ + \frac{1}{2}O_2 \xrightarrow{Bacterias} M^{+2} + H_2O + S^O \qquad (3)$$

Representa el caso hipotético de formación de ion ferroso a partir de la oxidación del sulfuro, catalizado por bacterias.

Considerando, la presencia de las bacterias como condición necesaria para la lixiviación, la tasa de disolución de pirita con bacterias *At. ferrooxidans* fue mayor que sin ellas, en medios bajo las mismas concentraciones de iones férrico y mismo pH (Fowler, et al., 1999). Sin embargo, existen mecanismos indirectos donde las bacterias libres en solución pueden secretar un oxidante al medio y lixiviar al mineral en forma alternativa y complementaria.

2.3.1.2. Mecanismo Indirecto

El mecanismo indirecto tiene que ver con el ataque químico del ion férrico o del ácido sobre el mineral sulfurado, lo que resulta en la disolución del mineral y la formación de ion ferroso y varias formas de sulfuro

$$MS + 2Fe^{+3} \rightarrow M^{+2} + S^0 + 2Fe^{+2} \qquad (4)$$

A partir de esta reacción química se producen ion ferroso y azufre elemental,

los que posteriormente son oxidados biológicamente a ion férrico y ion sulfato, respectivamente. Las ecuaciones de este mecanismo son las siguientes:

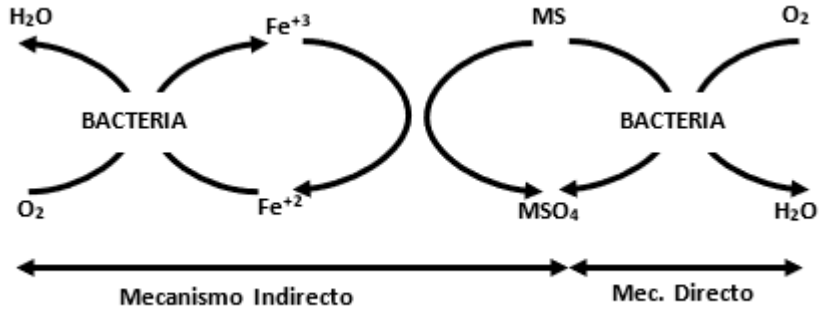
$$2Fe^{+2} + \frac{1}{2}O_2 \xrightarrow{Bacterias} 2Fe^{+3} + H_2O \quad (5)$$

$$S^O + \frac{3}{2}O_2 + H_2O \xrightarrow{Bacterias} H_2SO_4 \quad (6)$$

Según este modelo los iones férricos y/o los protones son los únicos agentes que disuelven el sulfuro; por lo tanto, el mecanismo es estrictamente indirecto (Sand et al., 1995). Por otro lado, las funciones de las bacterias son: regenerar los iones férricos y/o los protones; y concentrar estos iones en la interfase mineral/agua o mineral/célula bacteriana para favorecer la degradación del mineral (Maluckov, 2017).

La bacteria *At. ferrooxidans* oxida el ion ferroso a férrico en un proceso cíclico: 1) Por interacción del ion férrico con minerales sulfurosos y 2) Por regeneración del ion férrico a ferroso por el ácido sulfúrico liberado, ocasionando la disminución del pH y manteniendo el ciclo en acidez extrema (Fowler & Crundwell, 1998). La conjugación de ambos mecanismos (Figura 2) permite la disolución de los sulfuros metálicos.

Figura 2: Mecanismos simultáneos de la acción bacteriana.



Nota. Disolución de sulfuros metálicos en presencia de iones férrico y oxígeno, catalizada por microorganismos quimiolitotrofas.
Fuente: https://biolixiviacion.wordpress.com/mecanismos-de-biolixviacion/

A partir de los compuestos intermediarios, se diferencian dos tipos de mecanismos indirectos: vía tiosulfato y vía polisulfuro. Las dos vías se llevan a cabo en un mineral específico (Schippers & Sand., 1999). Sin embargo, la estructura cristalina de los sulfuros como el criterio más obvio no determina la vía de disolución, siendo la solubilidad ácida de sulfuros el criterio más relevante. La última propiedad se determina por la configuración electrónica (Schippers & Sand, 1999, Vera et al., 2013).

En el mecanismo vía tiosulfato, la solubilización es a través de ataque hierro férrico sobre los sulfuros del metal-ácido insoluble obteniéndose el tiosulfato como principal producto intermedio, y sulfato como principal producto final. En el caso de la disolución de la pirita, ocurren las siguientes reacciones:

$$FeS_2 + 6Fe^{3+} + 3H_2O \rightarrow S_2O_3^{2-} + 7Fe^{2+} + 6H^+ \quad [7]$$

$$S_2O_3^{2-} + 8Fe^{3+} + 5\,H_2O \rightarrow 2SO_4^{2-} + 8Fe^{2+} + 10H^+ \quad [8]$$

En el mecanismo vía polisulfuro, la solubilización del sulfuro de metal soluble en ácido es a través de un combinado ataque por el hierro férrico y los protones, obteniéndose azufre elemental como producto intermedio, oxidándose a sulfato por la acción bacteriana. Ocurren las siguientes reacciones:

$$MS + Fe^{3+} + H^{+} \rightarrow M^{2+} + 0.5\ H_2S_n + Fe^{2+}\ (n \geq 2) \qquad [9]$$

$$0.5\ H_2S_n + Fe^{3+} \rightarrow 0.125\ S_8 + Fe^{2+} + H^{+} \qquad [10]$$

$$0.125S_8 + 1.5O_2 + H_2O \xrightarrow{Bacterias} SO_4^{2-} + 2H^{+} \qquad [11]$$

El hierro ferroso producido en las reacciones (7) a (10) puede ser reoxidado a hierro férrico por microorganismos de hierro-oxidantes tales como la bacteria *At. ferrooxidans.*

$$2Fe^{2+} + 0.5O_2 + 2H^{+} \xrightarrow{Bacterias} 2Fe^{3+} + H_2O \qquad [12]$$

El rol de los microorganismos en la solubilización de metales sulfurados; es, por lo tanto, para proporcionar ácido sulfúrico (reacción 8 y 11) para un ataque de protones y para obtener el hierro en la forma de ion férrico (reacción 12), necesario para un ataque oxidativo del mineral sulfurado (Rawlings D., 2004; 2005). La presencia de nutrientes permite la reproducción de los microorganismos y paralelamente, el incremento de compuestos iónicos en solución. (Ospina et al., 2012).

2.3.2. Mecanismo de Reproducción Binaria

Considerando que el mecanismo de reproducción de las bacterias es por fisión

binaria y para determinar el modelo de reproducción, es preciso hallar el número de generaciones en un periodo de tiempo.

Designando

$\boldsymbol{x}$ = número de bacterias al tiempo cero

$\boldsymbol{y}$ = número de bacterias al tiempo t

Al tiempo cero $y = x$

Después de la primera generación la población $\boldsymbol{y}$ será igual a $\boldsymbol{2x}$, después de la segunda generación la población será $\boldsymbol{2(2x)}$. El incremento de población se puede apreciar en el cuadro 1.

Cuadro 1: Incremento de la población a través de los periodos de generación.

Generación	0	1	2	3	4	n
Población	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{2x}$	$\boldsymbol{2.2x=2^2x}$	$\boldsymbol{2.2^2x=2^3x}$	$\boldsymbol{2.2^3x=2^4x}$	$\boldsymbol{2^nx}$

Nota: Crecimiento de población bacteriana de la reproducción por fisión binaria.

Por lo tanto, después de *n* generaciones la población quedará representada por:

$$\boldsymbol{y = 2^n x} \qquad [13]$$

De donde se halla el número de generaciones

$$\boldsymbol{Lny} = \boldsymbol{Ln}\, x + n\, Ln2$$

$$\boldsymbol{nLn2 = Lny - Lnx}$$

$$nLn2 = Ln\frac{y}{x}$$

$$n = 3.32\ Ln\frac{y}{x} \qquad [14]$$

Ecuación que nos permite hallar el número de generaciones (*n*), el tiempo de cada generación *t(n)* partiendo de una población inicial conocida *(x)* y la población en función al tiempo transcurrido *y(t).*

El tiempo de cada generación se obtendrá dividiendo el tiempo transcurrido entre el número de generaciones:

$$t(n) = \frac{t}{n} \qquad [15]$$

La representación cinética del incremento de población en función al tiempo, estará representada por la ecuación 16.

$$\frac{dy}{dt} = k.y \qquad [16]$$

El incremento del número de población (*dy*) por unidad de tiempo (*dt*) es proporcional a la población existente (*y*), siendo *k* la constante de proporcionalidad denominada tasa de crecimiento. Su integración resulta:

$$y = y_0 e^{kt} \qquad [17]$$

Por otro lado, durante la fase exponencial, el logaritmo de número de células

está representada por la siguiente ecuación lineal:

$$\boldsymbol{Ln(y) = Ln(y_0) + kt} \qquad [18]$$

Donde $Ln(y_o)$ representa el intercepto al eje *y*/o población inicial, *k* es la constante de la velocidad de crecimiento especifico y *t* el tiempo en el periodo de la fase.

2.3.3. Ciclo de Crecimiento Poblacional (Modelo de Monod)

El comportamiento de crecimiento celular y la disminución del sustrato durante el cultivo, es representado a través de cuatro fases y cuantificado gracias a los estudios realizados por Jaques Monod en 1950 y es descrito por medio de ecuaciones diferenciales.

La reproducción de la bacteria *At. ferrooxidans* se da por fisión binaria, que consiste en el previo incremento de peso y tamaño hasta un máximo, a partir de ello se divide en dos nuevas células. El tiempo requerido es el tiempo del periodo generacional influenciado por las condiciones del medio (Mandelstam & McQuillen, 1968). En un cultivo en medio líquido y en los procesos de aplicación bacteriano, según Acevedo et al (2004), se puede identificar cuatro fases en constante evolución, estas se describen a continuación.

2.3.3.1. Fase de adaptación.

También llamada fase Lag, es la fase en que los microorganismos adaptan su metabolismo a las nuevas condiciones ambientales. El periodo de adaptación está

determinado a la severidad de las condiciones física y químicas del medio, luego estarán prestas a la reproducción y crecimiento exponencial. Existe una variedad de interpretaciones para estimar la duración de la fase, como la realizada por Baty & Delignette, (2004).

2.3.3.2. Fase exponencial o logarítmica.

En esta fase la velocidad de crecimiento es máxima y el tiempo de generación es mínimo. Durante esta fase las bacterias consumen los nutrientes del medio a velocidad máxima.

2.3.3.3. Fase estacionaria.

Donde no se aprecia incremento de la población bacteriana y las células desarrollan un metabolismo diferente que favorece la producción de enzimas que contribuyen a la disolución metálica. Se deduce que la tasa de reproducción y la tasa de muerte, se encuentran equiparadas

2.3.3.4. Fase de muerte.

Donde ocurre la reducción de la población bacteriana, atribuida a las siguientes posibles causas: 1. Agotamiento de algún nutriente esencial del medio, 2. Conversión a un medio no favorable o inhóspito para el crecimiento bacteriano y, 3. Presencia de competidores celulares que limitan su reproducción.

Para apreciar el ciclo de vida o ciclo de crecimiento bacteriano, se inocula la cepa en un medio de cultivo o medio de procesamiento, que estará sujeto a medición

constante de la población. Los datos nos permitirán identificar la evolución y determinar las fases del ciclo de vida, similar a la presentación de la figura 3.

Figura 3: Fases del crecimiento microbiano.



Nota. La duración de cada una de las fases del ciclo de vida microbiano está en función a las condiciones del medio donde se encuentra el microorganismo.

Fuente: Acevedo et al., 2004

2.3.4. Factores Físicos y Químicos que Influyen en el Crecimiento Poblacional.

2.3.4.1. Nutrientes.

Los nutrientes requeridos por la bacteria *At. ferrooxidans*, son suministrados en el medio 9k, cuya formulación provee los elementos necesarios que les permiten la obtención de energía que es vital para el crecimiento (Silverman & Lundgren, 1959).

2.3.4.2. Temperatura.

Es el factor de alta influencia en la función bacteriana. La velocidad de crecimiento como función de la temperatura de cultivo, se relaciona directamente en forma lineal y/o exponencial hasta alcanzar la temperatura óptima. Por encima de esta temperatura óptima la velocidad de crecimiento decae bruscamente por inhibición y muerte celular. La clasificación de los microorganismos en función a la temperatura de su hábitat, se puede observar en el cuadro 2.

Cuadro 2: Clasificación de los microorganismos en función a la temperatura.

Tipo de microorganismo	Temperatura (°C)		
	mínima	óptima	Máxima
Psicrófilo	-5 +5	12 - 15	15 – 20
Psicrótrofo	-5 +5	25 - 30	30 – 35
Mesófilo	5 - 15	30 - 45	35 – 47
Termófilo	40 - 40	55 - 75	60 – 90

Nota: La *At. ferrooxidans* es considerada como bacteria mesófila y su hábitat generalmente esta entre 10 y 20°C.

Fuente: Madigan et al. 2015

2.3.4.3. El pH.

Según Madigan et al. (2015), el pH es un parámetro crítico para el desarrollo de los microorganismos, estos tienen un rango reducido de pH en el que pueden vivir adecuadamente. En muchos casos, la función metabólica depende de la existencia de un diferencial de la concentración de protones y electrones al interior y exterior de la

membrana citoplásmica. Durante la biolixiviación, la disminución del pH acidificando el medio alrededor de 2.0, favorece la degradación del sustrato, proveyendo energía y por ende se produce el desarrollo bacteriano.

2.3.4.4. Potencial de óxido reducción (ORP).

Indica, la capacidad del medio para aceptar o donar electrones, ó sus características oxidantes y reductoras. En el caso de los microorganismos aerobios, uno de los factores que influyen en el ORP, es la concentración de oxígeno, desarrollando un metabolismo oxidativo. Durante la biooxidación en soluciones de ácido sulfúrico, las especies redox primarias son Fe^{+2}, Fe^{+3}, HSO_4^- y S^o (Duran Flores, 2019).

2.3.4.5. Oxígeno.

Las bacterias involucradas en los procesos de biolixiviación son aeróbicas y crecen autotróficamente, es decir son dependientes del oxígeno como receptor de electrones y del CO_2 como fuente de carbono, siendo esencial el permanente suministro.

Existen otros factores que podrían tener mucha influencia y ser determinantes en la disolución metálica por la acción bacteriana, los que se identifican previamente. Entre ellos tenemos a las características del mineral y del medio líquido. El mineral posee masa y peso, que determinan la densidad específica y la densidad del medio de trabajo.

La biooxidación de sulfuros con densidades de pulpa mayores de 20% en reactores de tanque agitado no han tenido buenos resultados (Deveci, 2004), en razón a que el incremento de la concentración de sólidos aumenta la fricción entre las partículas en el interior de la suspensión, causando daño celular. Altas concentraciones de sólidos también limitan las velocidades de transferencia de oxígeno, requeridas para oxidar a los sulfuros. Los intentos para mejorar la oxigenación resultan inevitablemente, en aumentar la velocidad de agitación, lo que genera una mayor fricción entre las partículas dentro de la suspensión (Loi et al., 2006).

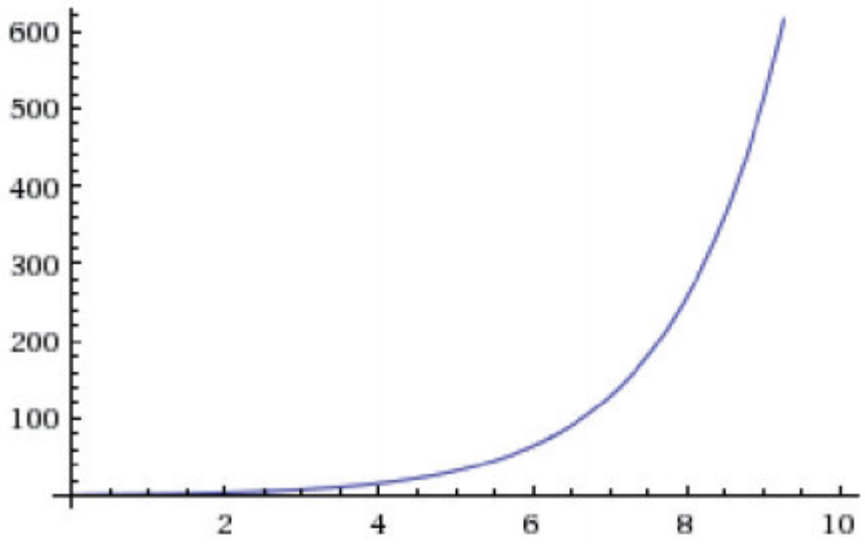
2.3.5. Dinámica del Crecimiento Bacteriano

La identificación de la dinámica de la población bacteriana implica el conocimiento del tamaño, la estructura, la forma y la intensidad en que ocurren los cambios. El estudio del crecimiento de población fue expuesto inicialmente por el matemático Th. Malthus, y a partir de la teoría malthusiana se han desarrollado muchos estudios para relacionar el crecimiento poblacional en diversos campos. Considerando los nacimientos y las muertes, la tasa (k) de crecimiento intrínseco de la población representará el constante incremento de la población; sin embargo, este modelo no puede ser indefinidamente válido al advertirse la escases o agotamiento de recursos alimenticios; así como, las inclemencias ambientales.

Gráficamente, los crecimientos son representados primero por una función exponencial (de crecimiento rápido); que, al ser afectados por ciertos factores se hacen más lento hasta llegar a la estabilidad, denotándose una curva sigmoide que es descrita por los modelos Logístico y Gompertz (Rodríguez & Ulloa, 2017).

Los criterios de interpretación pueden introducir imprecisión en el desarrollo de los procesos biológicos, sobre todo en la interpretación matemática, pero asumiendo la homogeneidad morfológica, genética y metabólica, se asume que el crecimiento bacteriano sigue un modelo determinístico (Chiappa, 2009), es decir sin la consideración del ruido ambiental, habiéndose demostrado que a través del tiempo y de las generaciones celulares, la tasa de crecimiento varia gradualmente. El crecimiento indefinido como una función exponencial se puede apreciar en la figura 4.

Figura 4: Representación de la población bacteriana en función del tiempo.



Nota: Crecimiento exponencial ilimitado de la función f(x) igual a 2x
Fuente: Argibay, 2012

En la identificación de la curva de crecimiento bacteriano, se comparan varias funciones sigmoidales y estadísticamente se definen la facilidad de uso (Zwietering et al., 1990). Los parámetros relevantes serán los que definen y describen el crecimiento de las bacterias. La realidad mostraba que la población no puede crecer indefinidamente, por la presencia de factores limitantes. Según describe Arenzana

(2019), la aparición del matemático Ingles Benjamin Gompertz (1825) proponiendo que la ecuación de Malthus sea más realista y que la población sea afectada por el logaritmo de la máxima población entre la población alcanzada. Luego la función logística propuesta por el matemático belga A. Quetelet (1835), menciona que la velocidad de crecimiento de una población, *P(t)*, debía estar sometido a una resistencia proporcional al cuadrado de dicha población, como resultado se tiene una función asimétrica, que indica que el crecimiento es más rápido al inicio que al final. En 1838, P.F. Verhulst (alumno de A. Quetelet), describe el proceso de crecimiento de la población mediante la ecuación propuesta por su profesor, efectivamente estaría afectada por un factor limitante de la densidad intrínseca de la población, $f(x) = n.P^2(t)$. Esto es identificado como competición indirecta intraespecífica, que modifica el crecimiento de la población en un valor asintótico asociado con la capacidad de máximo crecimiento (Bermejo, 2020).

Considerando a la población bacteriana como una población no estructurada de composición fija y simple y no segregada en razón de la consideración de población homogénea. Por estas y otras consideraciones descritas en la teoría descriptiva de la microbiología (McMeekin, et al., 2013), es necesario las correlaciones de los parámetros asociados al proceso, mediante modelos de crecimiento como los elegidos en su versión primogénita (Modelo de Gompertz y Modelo Logístico).

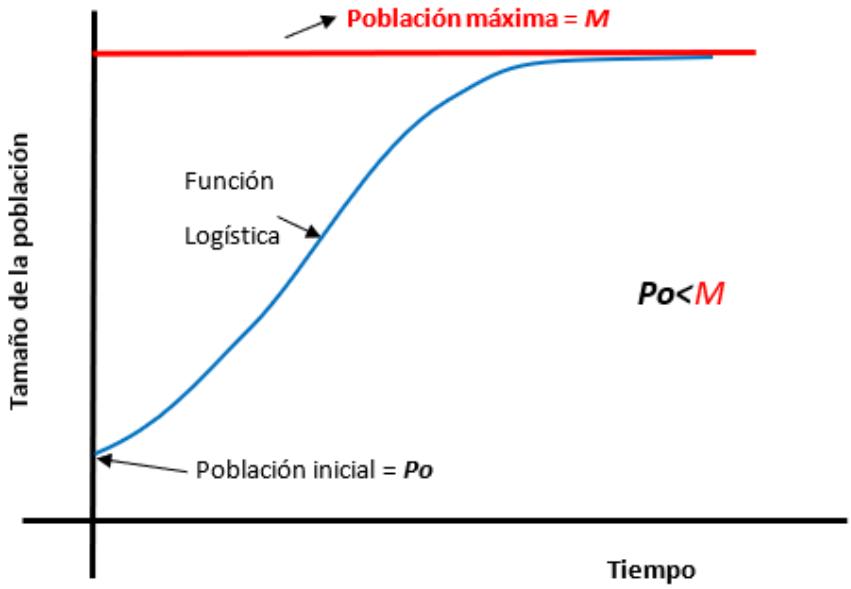
Teniendo en consideración, que las bacterias *At. ferrooxidans* se reproducen por fisión binaria y su cuantificación inicialmente en un medio ilimitado y constante, es de tipo exponencial (Chiappa et al., 2009) y en ello se identifican dos fases: la fase de adaptación o crecimiento lento y la fase de crecimiento exponencial y/o fase de intensa actividad.

En la biolixiviación, es importante la cuantificación bacteriana, así como la

identificación de la dinámica mediante la adecuación de un modelo matemático. La determinación de la tasa de crecimiento durante todo el proceso de su aplicación, desde el inicio en el tiempo cero, (t_0), a un valor máximo en determinado periodo de tiempo. La curva de crecimiento contiene una fase final en la que la tasa disminuye y en algún momento llegará a cero. Cuando la curva de crecimiento se define como el logaritmo del número de organismos representados frente al tiempo, estos cambios en la tasa de crecimiento dan como resultado una curva sigmoidea (Zwietering et al., 1990), con dos fases de retraso y una fase exponencial.

La modelación del crecimiento se describe en primera instancia bajo una función exponencial hasta llegar a un punto de ruptura o cambio (debido a factores que afectan el crecimiento); para luego, mediante un crecimiento lento llegar a una estabilidad (Ulloa et al., 2016), quedando la gráfica representada por una curva exponencial y una curva sigmoidea.

Figura 5: Modelo de crecimiento logístico.



Nota. El tamaño de población es determinado en función a la población inicial (P_0), y está sujeto a las condiciones fisicoquímicas del medio no advertidas en el modelo. Se desarrolla el comportamiento logístico acotado por la población de saturación (M).

Fuente: Ulloa et al., (2016) y Arenzana, V. (2019).

El modelo logístico en términos de una ecuación diferencial, explica el crecimiento de la población, teniendo en cuenta las fluctuaciones ambientales dadas en el tiempo, dándose variaciones de las constantes de la tasa de crecimiento y los efectos inhibitorios del crecimiento (Román & Torres, 2012; Cid-Martínez, 2018). Así mismo, por las interacciones mutualistas, la tasa de crecimiento de las poblaciones se correlaciona con la disponibilidad de recursos requeridos y la producción de sustancias o enzimas (García, et al., 2014; Gonzalo, 2019).

El desarrollo de una curva logística o sigmoidal ocurre cuando la población inicial es menor que la máxima población, condición necesaria para explicar la dinámica del crecimiento.

2.3.6. Ecuaciones de los Modelos de Crecimiento

Para la descripción de la dinámica del crecimiento poblacional a través de modelos matemáticos se consideran los principios químicos, físicos y biológicos, así como las interferencias a las condiciones favorables, permitiéndonos la elección de una función o modelo matemático que represente el proceso directamente o mediante ajustes en los parámetros; pero, con criterios válidos.

El desarrollo de los procesos biológicos tiene la necesidad de identificar modelos cinéticos de crecimiento enfocados a la descripción, evaluación y optimización. El estudio de la evolución de las poblaciones adquiere especial interés en la biotecnología. A partir de la teoría Maltusiana se han desarrollado muchas teorías que relaciona el crecimiento poblacional en diversos campos de la biología.

La dinámica del crecimiento de poblaciones puede ser representada mediante tres modelos continuos, descritos mediante las ecuaciones diferenciales: El modelo exponencial (Modelo Malthusiano), el modelo logístico y el modelo de Gompertz. El modelo exponencial predice un crecimiento ilimitado para la población y los modelos logístico y de Gompertz son las posibles alternativas que resuelven las limitaciones del modelo exponencial.

2.3.6.1. Modelo Exponencial (Modelo Malthusiano)

El modelo de crecimiento poblacional o la tasa de cambio respecto al tiempo está dada por la constante *k* que multiplica a la población en un periodo de tiempo. Es representada por la siguiente función:

$$\boldsymbol{P'(t) = kP(t)} \qquad [19]$$

La ecuación diferencial de crecimiento poblacional que representa la velocidad de cambio o de crecimiento está dada como la derivada de la población respecto al tiempo, influenciada por los respectivos factores de natalidad (*n*) y mortalidad (*m*), representadas por la tasa de crecimiento (*k*). Donde *n* y *m* son las constantes positivas.

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = nP - mP}$$

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = (n - m)P}$$

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = kP} \qquad [20]$$

Integrando la ecuación 20 considerando el incremento de la población en un periodo de tiempo, se tiene:

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

$$Ln\ P \int_{P_.}^{P} \frac{1}{P}\, dP = \int_{t.}^{t} k\, dt$$

$$LnP - LnP_0 = k(t - t_0)$$

$$Ln\left(\frac{P}{P_.}\right) P = k(t - t_0)$$

$$e^{ln(\frac{P}{P_.})} = e^{k(t-t_.)}$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{k(t-t_.)}$$

$$P(t) = P_0 e^{kt} \qquad [21]$$

Donde:

P es la población al tiempo *t*

P_0 es la población en el tiempo $t = 0$

k es la tasa de crecimiento.

Si $k > 0$, es propiamente de crecimiento y si $k < 0$, resulta ser la tasa de disminución o decrecimiento.

Este modelo es conocido como modelo exponencial de crecimiento poblacional. No brinda precisión puesto que no contempla ningún tipo de disturbios en el crecimiento y en la muerte de los microorganismos.

Una de las críticas al modelo de Malthus radica en que supone que los recursos del medio son inagotables y la población puede crecer de manera indefinida. Con un sentido más realista, se puede decir que efectivamente los recursos son limitados y que las poblaciones de ninguna manera pueden crecer indefinidamente al ritmo malthusiano.

2.3.6.2. Modelo de Gompertz.

Se propone que la ecuación de Malthus sea más realista, y que la función de la velocidad de crecimiento al infinito sea afectada por el logaritmo de la máxima población dividida entre la población alcanzada o por la diferencia de logaritmos entre la máxima población (M) y la población alcanzada P(t) en el momento t, cuya función es la siguiente:

$$\boldsymbol{P'(t) = kP_{(t)}[Ln(M) - Ln\left(P_{(t)}\right)]} \qquad [22]$$

Las variaciones de este modelo han sido usadas en la biología para representar el crecimiento poblacional, conjuntamente con el modelo logístico.

La representación en la forma de ecuaciones diferenciales es la siguiente:

$$\boldsymbol{\frac{dP(t)}{dt} = kP(t).Ln\,\frac{M}{P(t)}} \qquad [23]$$

Donde:

P = Población bacteriana

k = es la tasa intrínseca de crecimiento y

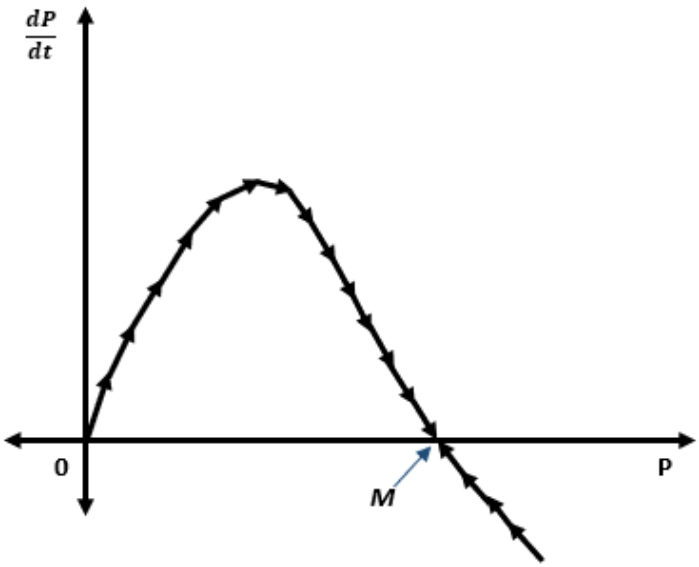
M = máxima población alcanzada.

Es de notar que todos los parámetros son positivos.

La tasa de crecimiento estaría representada por $\boldsymbol{kLn}\ \frac{M}{P(t)}$, de orden logarítmico. Considerando un tiempo inicial (t_0), la población será P_0

Si dP/dt > 0 entonces P aumenta, así como para poblaciones menores a la población de equilibrio M = k/n, y para poblaciones mayores al equilibrio la población decrece (no siendo caso de análisis), pero nunca alcanza la población de equilibrio, corroborable en el estudio de Riquelme (2015). Gráficamente puede demostrarse que mediante la ecuación de Gompertz se consigue la aproximación al equilibrio. Ver figura 6.

Figura 6: Variación asimétrica de la tasa de crecimiento.



Nota. La tasa de crecimiento vs. La población alcanzada a través del tiempo resulta en una curva asimétrica.

Fuente: Fonseca Riquelme, 2015

Resolviendo e integrando la ecuación 23, se tiene:

$$\frac{dP}{PLn(\frac{M}{P})} = kdt$$

$$\int \frac{dP}{PLn(\frac{M}{P})} = \int k\,dt$$

$$Ln(Ln(\frac{M}{P}) = -kt + C \qquad [24]$$

Sustituyendo variables y derivando nueva variable, se tiene:

$$U = Ln\left(\frac{M}{P}\right) \quad \rightarrow \quad U = LnM - LnP \qquad [25]$$

$$dU = -\frac{1}{P}dP \quad \rightarrow \quad dP = -PdU \qquad [26]$$

Sustituyendo las ecuaciones 25 y 26 n la ecuación 23, se tiene:

$$-PdU = kPLn\frac{M}{P}dt$$

$$dU = -kLn\frac{M}{P}dt$$

$$dU = kUdt$$

Integrando

$$\int \frac{dU}{U} = -k\int dt$$

$$LnU = -kt$$

Si $U = e^{-kt+C}$

Reemplazando U en la ecuación 24, se tiene:

$$\boldsymbol{Ln(e^{-kt+C}) = -kt + C} \qquad [27]$$

Igualando las ecuaciones 24 y 27 y resolviendo,

$$\boldsymbol{Ln(Ln(\frac{M}{P}) = Ln(e^{-kt+C})}$$

Aplicando exponencial, se obtiene

$$\boldsymbol{Ln\left(\frac{M}{P}\right) = e^{-kt+C} = e^{-kt}e^{C} = be^{-kt}}$$

$$\boldsymbol{Ln(\frac{M}{P}) = be^{-kt}}$$

Nuevamente aplicando exponencial

$$\boldsymbol{\frac{M}{P} = e^{be^{-kt}} \quad y \quad \frac{P}{M} = e^{-be^{-kt}}}$$

$$\boldsymbol{P = Me^{-be^{-kt}}} \qquad [28]$$

Para encontrar los puntos de equilibrio se iguala la función a cero

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = kPLn\frac{M}{P_{(t)}} = 0} \qquad [29]$$

Hallándose que los dos únicos puntos de equilibrio de la ecuación son cuando:

$$\boldsymbol{P(t) = 0 \quad y \quad P(t) = M}$$

El crecimiento de población se puede identificar mediante los puntos de equilibrio (P(t) = 0 y P(t) = M) que dividen el plano cartesiano en tres regiones: R1 para valores de tamaños poblacionales P(t) por encima de M; R2 para tamaños poblacionales P(t) entre 0 y M; y, R3, para valores negativos de P(t) que carece de significado biológico. En el interior de la región R2, la derivada no puede cambiar de signo, si 0 < P(t) < M, entonces se tiene que M/P(t) > 1, por lo tanto Ln (M/P(t)) > 0 y KP(t) Ln (M/P(t)) > 0, lo que implica que P(t) debe ser creciente en R2 .

Asimismo, para conocer la concavidad o punto de inflexión del modelo de Gompertz se recurre a la segunda derivada en función al tiempo, P"(t). La máxima velocidad de crecimiento se halla en el punto medio de población:

$$\frac{d}{dP}\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = \frac{d}{dP}\left[\boldsymbol{kP(t).Ln}\,\frac{M}{P(t)}\right] = \boldsymbol{k\,Ln}\,\frac{M}{P(t)} - kP(t)\frac{P(t)}{M}.\frac{M}{P(t)^2} = \boldsymbol{k}\left[\boldsymbol{Ln}\,\frac{M}{P(t)} - 1\right] = \mathbf{0} \quad [30]$$

De donde $\boldsymbol{P(t) = \frac{M}{e}}$

Hallando la segunda derivada se verifica la máxima velocidad de crecimiento y consiguientemente el cambio de signo, pasando a ser convexa. Se da la conversión de $\boldsymbol{P}''(t) > 0 \quad a \quad P''(\boldsymbol{t}) < \mathbf{0}$

La segunda derivada de la ecuación proporciona información del punto de inflexión que indica el punto a partir del cual la tasa de crecimiento disminuye gradualmente.

2.3.6.3. Modelo Logístico.

A partir del modelo logístico propuesto por Verhulst, donde los parámetros dependen de las condiciones del ambiente. La modelación del crecimiento a partir de una población inicial diferente de cero y el desarrollo de una curva sigmoidea con mayor población final o de saturación. La función se expresa continuación:

$$\boldsymbol{P'(t) = k.P(t) - n.P^2(t)} \qquad [31]$$

Es el modelo exponencial, afectada por una resistencia proporcional al cuadrado de dicha población, donde *k* es la tasa de crecimiento poblacional y nP^2 representa la inhibición, ambas son constantes positivas, n suele ser menor que k

La representación en forma de ecuaciones diferenciales es la siguiente:

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = P(k - nP)} \qquad [32]$$

Donde:

P = Población bacteriana

k = es la tasa intrínseca de crecimiento y

n = máxima población alcanzada.

Es de notar que todos los parámetros son positivos.

Integrando la ec. 31, se obtiene:

$$\boldsymbol{-\frac{1}{k}LnP(t) - Ln(k - nP(t) + C = t} \qquad [33]$$

Solución implícita paramétrica.

Donde intervienen tres constantes k, n y C, que podrían identificarse con la población en tres momentos distintos. Luego se tendrá la ecuación predictiva de la población en

cualquier momento.

La transformación de la ec. 32 resulta en:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)[\frac{k}{k} - \frac{n}{k}P(t)]$$

$$= k.P(t)[1 - \frac{n}{k}P(t)] \qquad [34]$$

Solución de la ec 32 por el método de separación de variables (solución explicita):

$$\frac{dP}{P(k-nP)} = dt$$

$$\int \frac{dP}{P(k-nP)} = \int dt$$

Convirtiendo a fracciones parciales se tiene

$$\frac{1}{P(k-nP)} = \frac{1}{k}\left[\frac{k-nP+nP}{P(k-nP)}\right] = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{P} + \frac{n}{nP}\right]$$

Por lo que

$$\int \frac{1}{k}\left[\frac{1}{P} + \frac{n}{nP}\right] dP = \int dt$$

$$\frac{1}{k}\left[\int \frac{dP}{P} - \int \frac{-ndP}{(k-nP)}\right] = \int dt$$

$$\frac{1}{k}[LnP - Ln(k - nP)] = t + C$$

$$\frac{1}{k}\, Ln\left(\frac{P}{k-nP}\right) = t + C \qquad [35]$$

El valor inicial de la población P_0 en tiempo igual al cero nos permite hallar el valor de la constante C

Para $t = 0$, $P = P_0$

$$\frac{1}{a}\ Ln\left(\frac{P_0}{a-mP_0}\right) = C$$

Entonces:

$$\frac{1}{k}\ Ln\left(\frac{P}{k-nP}\right) = t + \frac{1}{k}\ Ln\left(\frac{P_0}{k-nP_0}\right)$$

$$\frac{1}{k}\ Ln\left(\frac{P}{k-nP}\right) - \frac{1}{k}\ Ln\left(\frac{P_0}{k-nP_0}\right) = t$$

$$Ln\left(\frac{\frac{P}{k-nP}}{\frac{P_0}{k-nP_0}}\right) = at$$

$$Ln\left(\frac{P(k-nP_0)}{P_0(k-nP)}\right) = at$$

$$\frac{P(k-nP_0)}{P_0(k-nP)} = e^{kt}$$

$$P(k-nP_0) = P_0(k-nP)e^{kt}$$

$$P(k-nP_0) = kP_0e^{kt} - nPP_0\ e^{kt}$$

$$P = \frac{kP_0e^{kt}}{nP_0\ e^{kt} + (k-nP_0)}$$

$$P = \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k-nP_0}{nP_0}e^{-kt}}$$

La curva logística depende del conocimiento de los parámetros *a, m* y P_0

Resolución modificada la ec. 34, se tiene:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) \qquad [36]$$

Donde k se define como la tasa de crecimiento intrínseco, y M es la capacidad sustentable o sostenible de carga que es el máximo valor que puede alcanzar P. Para P<<M, P/M está próximo a cero, y por lo tanto, (1-P/M) está próximo a 1, con lo que se tiene que dP/dt ≈ kP y por tanto el crecimiento es del tipo que da el modelo exponencial, mientras que, cuando P tienda a M, es decir la población se encuentra muy próxima a su capacidad de carga, P/M ≈ 1 y también (1-P/M) próximo a 0, en consecuencia dP/dt ≈ 0

Donde:

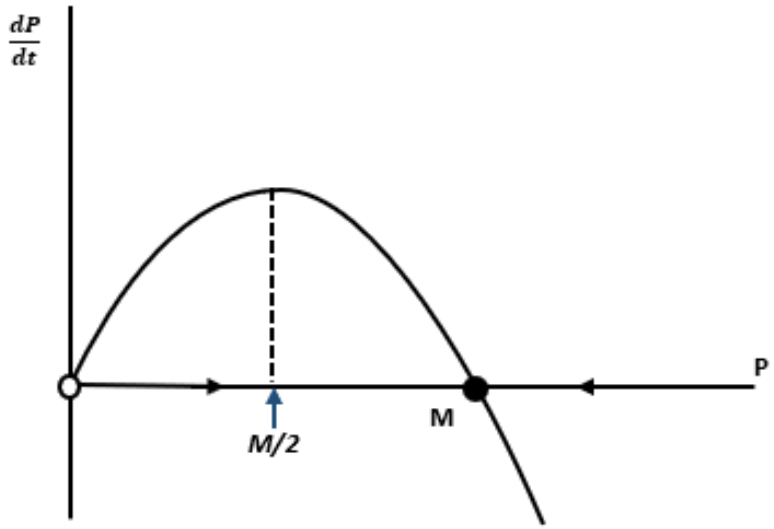
M representa la máxima población (Cel/mL)

k la tasa de crecimiento especifica (1/h)

También, k no puede tomar cualquier valor. Los valores admitidos de k en la ecuación de forma canónica están comprendidos entre 0 y 4

La variación de la población en el tiempo es directamente proporcional a la tasa de crecimiento *k*, al tamaño de la población en un momento dado y a un factor limitante resultante de restar a la unidad, el tamaño poblacional sobre su capacidad de carga. Si graficáramos la población *P* en función del tiempo t, tendríamos la figura 7, en la cual podemos observar que para $P_0 < M/2$, el crecimiento de la población en función del tiempo tiene una forma de S sigmoidea.

Figura 7: Variación de la tasa de crecimiento en el tiempo.



Nota. La población media es alcanzada a la máxima tasa de crecimiento, resultando una curva simétrica.

Fuente: Pablo Argibay (2012)

Si bien, la ecuación de Verhulst no se ha ajustado a situaciones reales; pero, es un modelo para el estudio del crecimiento de poblaciones en medios donde se pudiera identificar restricciones por diversas causas.

Transformando y resolviendo la Ec. 36 mediante el método de **separación de variables**:

$$\frac{dP}{P(1-\frac{P}{M})} = kdt$$

$$\frac{dP}{P(\frac{M-P}{M})} = kdt$$

$$\frac{MdP}{P(M-P)} = kdt$$

$$\boldsymbol{Ln\ |P| - Ln\ |M - P| = kt + C}$$

$$\boldsymbol{Ln\ \left|\frac{M-P}{P}\right| = -kt - C} \qquad [37]$$

$$\boldsymbol{\frac{M-P}{P} = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}} \quad ; \text{si } \boldsymbol{e^{-C} = B}$$

$$\boldsymbol{\frac{M-P}{P} = Be^{-kt}} \quad \rightarrow \boldsymbol{\frac{M}{P} - 1 = Be^{-kt}} \text{ es la solución implícita.}$$

Resulta:

$$\boldsymbol{P = \frac{M}{1+Be^{-kt}}} \qquad [38]$$

Ahora para $P_{(0)} = P_0$ $\boldsymbol{P_{(0)} = \frac{M}{1+B} \rightarrow B = \frac{M-P_0}{P_0}}$

Solución mediante la conversión en fracciones parciales e integración:

$$\boldsymbol{\frac{dP}{P(\frac{M-P}{M})} = kdt}$$

$$\boldsymbol{\frac{dP}{P(M-P)} = \frac{k}{M}\, dt}$$

La fracción se puede subdividir en 2 fracciones, método de resolución de funciones raciones para integrales, que nos permite resolver la función integral.

si $\boldsymbol{\frac{1}{P(M-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{M-P} = \frac{A(M-P)+BP}{P(M-P)} \implies 1 = A(M-P) + BP}$

Entonces si M = P $\boldsymbol{\implies 1 = A(P-P) + BP \quad y \quad 1 = BP}$

$$\Longrightarrow B = 1/P$$

Entonces si P = 0 $\Longrightarrow$ $\mathbf{1} = \boldsymbol{AM} + \boldsymbol{B}(\mathbf{0})$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbf{1} = \boldsymbol{AP}$

$$\Longrightarrow A = 1/P$$

Sustituyendo las fracciones e integrando

$$\int \left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{PM}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M(M-P)}}\right] \boldsymbol{dP} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{M}} \int \boldsymbol{dt}$$

$$\int \left[\frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{PM}} + \int \frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{M(M-P)}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{M}} \int \boldsymbol{dt}\right.$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \int \frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{P}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \int \frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{P-M}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{M}} \int \boldsymbol{dt}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}}\ \boldsymbol{Ln\ P} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}}\ \boldsymbol{Ln\ (P-M)} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{M}}\ \boldsymbol{t + C}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}}\ \boldsymbol{Ln}\ \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P-M}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{M}}\ \boldsymbol{t + C}$$

$$\boldsymbol{Ln}\ \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P-M}} = \boldsymbol{k\ t + CM}$$

$$\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P-M}} = \boldsymbol{e^{kt+CM}} = \boldsymbol{e^{kt}e^{CM}} = \boldsymbol{B}\ .\boldsymbol{e^{kt}}$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{M}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{Be^{-kt}}} \qquad [38a]$$

Solución explicita de la ecuación biparamétrica.

si $\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{P(M-P)}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{P}} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{M-P}} = \frac{\boldsymbol{A(M-P)+BP}}{\boldsymbol{P(M-P)}} = \frac{\boldsymbol{AM-AP+BP}}{\boldsymbol{P(M-P)}} = \frac{\boldsymbol{AM+P(B-A)}}{\boldsymbol{P(M-P)}}$

Resultando: *A = 1 y P(B-P) = 0* → *B = 1*

Reemplazando datos en la Ec. 25 e integrando, se tiene:

$$\int \frac{1}{\frac{1}{P}+\frac{1}{M-P}}\, dP = \int k\, dt$$

$$\int \left[\frac{1}{P}+\frac{1}{(M-P)}\right] dP = \int k dt$$

$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{(M-P)} = \int k dt$$

$$Ln \mid P \mid - Ln \mid M - P \mid = k\, t + C$$

$$Ln \mid M - P \mid - Ln \mid P \mid = -k\, t - C$$

$$Ln \left| \frac{M-P}{P} \right| = -k\, t - C$$

Aplicando exponencial a ambos miembros de la ecuación

$$\frac{M-P}{P} = e^{-Kt-C} = e^{-C} e^{-kt} = Be^{-kt}$$

$$\boxed{P(t) = \frac{M}{1+Be^{-kt}}} \qquad [38b]$$

Para T = 0

$$P_{(0)} = \frac{M}{1+B} \quad \rightarrow \quad B = \frac{M-P_0}{P_0} = \frac{M}{P_0} - 1$$

Para facilitar la solución de la función logística despejamos los valores de B y

k a partir de la ec. 38

Se tiene:

$\boldsymbol{B = \frac{\frac{M}{P}-1}{e^{-kt}}}$; esta constante no cambia.

$\boldsymbol{k = Ln(\frac{M-P}{BP})^{-\frac{1}{t}}}$; esta constante puede cambiar!!!

Para t_0, *B* se calcula fácilmente. Luego k se puede calcular para cualquier valor de t (amerita evaluar valores de k para cada t).

Reemplazando *B* y *k* en la ecuación 38 se puede generalizar un modelo logístico.

La solución explicita basado en el modelo de crecimiento exponencial de Malthus con *n* y *m* las constantes de natalidad y mortalidad respectivamente. Con un sentido más realista, se considera una nueva tasa de crecimiento intrínseca, r, depende de las variaciones de las tasas de natalidad y mortandad en relación directa al tamaño de a población, P, en el tiempo, t; donde *n(P)* y *m(P)* depende de otras variables, tenemos:

$$\boldsymbol{\frac{dP(t)}{dt} = (n-m)P(t) = kP(t)}$$

$$\boldsymbol{n(P) = a - bP(t)}$$

$$\boldsymbol{m(P) = c + dP(t)}$$

con: a, b, c, d, n y m constantes positivas densodependientes; es decir, cambian según la densidad poblacional.

Incorporando las diferencias en la ecuación inicial, se tiene un nuevo modelo:

$$\frac{dP(t)}{dt} = [(a - bP(t) - (c + dP(t))]P(t)$$

Reagrupando términos, se tiene:

$$\frac{dP(t)}{dt} = (a - c)P(t)[\frac{a-c}{a-c} - \frac{b-d}{a-d}]P(t)]$$

Ahora, considerando: $a - c = K \quad y \quad \frac{a-c}{b-d} = M$

$$\frac{dP(t)}{dt} = k[1 - \frac{P(t)}{M}]P_{(t)}$$

Donde:

k refiere a la tasa de crecimiento de Malthus,

M parámetro de crecimiento de máxima población. Este parámetro resume las condiciones adversas en el incremento de la población. Las condiciones adversas pueden ser: disponibilidad de nutrientes, saturación del medio, etcétera.

$k[1 - \frac{P(t)}{M}]$ es la nueva tasa se de crecimiento.

Los puntos de equilibrio son hallados igualando a cero la derivada. A igual que en la ecuación de Gompertz, el Crecimiento de la población se halla tomando 2 puntos en el modelo que dividen el plano en tres regiones: R1= Valores de P superiores a M en cuyo caso se dice que la situación de sobre población. R2 para población entre 0 y M (caso biológico estándar), con 0 < P < M, entonces: $[1 - \frac{P(t)}{M}] > 0 \quad y \quad kP(t)[1 - \frac{P(t)}{M}] > 0$ **y,** R3 donde la ecuación carece de sentido biológico.

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{M}\right] = 0 \implies P(t) = 0 \quad \text{ó} \quad P(t) = M$$

Entonces, los dos únicos puntos de equilibrio de la ecuación logística son:

$$P(t) = 0 \quad \text{ó} \quad P(t) = M$$

Para conocer la concavidad o el punto de inflexión del modelo logístico, se evalúa la segunda derivada en función al tiempo.

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k\left(1 - \frac{2P}{M}\right)\frac{dP}{dt} = 0 \qquad [39]$$

El factor multiplicativo 1-*2P/M* se anula cuando la población *P* se hace *M/2,* *u*bicando el punto de inflexión del crecimiento poblacional.

$$P''(t) = \left[kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)\right]'$$

$$= kP'(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right) + kP(t)\left(-\frac{P'(t)}{M}\right)$$

$$= kP'(t)\left(1 - 2\frac{P(t)}{M}\right)$$

$$= k^2P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)\left(1 - 2\frac{P(t)}{M}\right) = 0 \qquad [40]$$

Se determina que únicamente se anula cuando P(t) = 0, P(t) = M, o bien P(t) = M/2. Las dos primeras opciones no conducen a candidatos a punto de inflexión, pues

no son más que dos puntos de equilibrio del modelo. Por lo tanto, de existir algún punto de inflexión éste habría de ser P(t) = A/2

El modelo de Gompertz y el logístico presentan un carácter de crecimiento similar, aunque existen matices que los diferencian. Con diferente ubicación de los puntos de inflexión, entre el 35 y 40% de crecimiento para el modelo Gompertz y en el 50% en el modelo logístico de Verhlust.

Cuadro 3: Comparativo de los modelos Gompertz y Logístico.

Modelo	**Gompertz**	**Logístico**
Función	$\boldsymbol{P'(t) = kP_{(t)}[Ln(M) - Ln(P_{(t)})]}$	$\boldsymbol{P'(t) = k.P(t) - n.P^2(t)}$
Ecuación	$\boldsymbol{P = Me^{-Be^{-kt}}}$	$\boldsymbol{P = \frac{M}{1 + Be^{-kt}}}$
Constantes	M, B y k	M, B y k
Asíntotas	P = 0 P = M	P = 0 P = M
Puntos de inflexión	$\boldsymbol{x = \frac{a}{b}}$, $\boldsymbol{y = \frac{M}{e}}$	$\boldsymbol{x = \frac{a}{b}}$, $\boldsymbol{y = \frac{M}{2}}$
Ecuación linealizada	$\boldsymbol{Ln(Ln\left(\frac{M}{P}\right) = Ln(B) - kt}$	$\boldsymbol{Ln\left(\frac{M-P}{P}\right) = ln(B) - kt}$

Con los datos de crecimiento de un periodo de tiempo, se puede determinar los parámetros de la curva que ajusta los datos por completo, consiguiendo una forma de predecir el comportamiento del crecimiento poblacional mediante las ecuaciones diferenciales.

CAPITULO III

METODOLOGIA

Las pruebas experimentales de aislamiento, adaptación y biolixiviación de minerales, se desarrollaron en el laboratorio de Biometalurgia de la Escuela de Ingeniería Metalúrgica de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), Lima. La data adquirida permite evaluar la dinámica del crecimiento poblacional de la bacteria *At. ferrooxidans*, mediante ecuaciones diferenciales aplicadas a los modelos matemáticos de B. Gompertz y P. F. Verhulst.

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis General

La identificación de la dinámica del crecimiento poblacional de la bacteria *Acidithiobacillus ferrooxidans* durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados conteniendo cobre y arsénico como elementos de análisis, permiten evaluar el ciclo de crecimiento y su influencia en el proceso de recuperación del cobre.

3.1.2. Hipótesis Específicas

1. La densidad de pulpa y la concentración de sulfato ferroso, son los principales factores que determinan el crecimiento de la población bacteriana y la disolución de cobre, hierro y arsénico, durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados.

2. La dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias *At. ferrooxidans*, generada principalmente por la densidad de pulpa y la concentración de hierro durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico es representada por las ecuaciones diferenciales de los modelos de B. Gompertz y Logístico.

3. El incremento de la concentración de hierro en la solución de lixiviación, está relacionado directamente con el crecimiento de la población bacteriana en la biolixiviación de minerales sulfurados.

3.2. Identificación de Variables

3.2.1. Variables Independientes.

Identificadas por el alto grado de influencia durante la biolixiviación de minerales sulfurado. Estas son:

- Densidad de pulpa (% W/V)

- Concentración de sulfato ferroso (g/l de $FeSO_4 . 7H_2O$).

3.2.2. Variables Dependientes.

Las variables que se consideraron para determinar la dinámica del crecimiento poblacional bacteriano son las siguientes:

- Disolución metálica (cobre, hierro y arsénico).
- Modelo matemático (Función de Gompertz y Logístico)
- Población bacteriana de At. ferrooxidans

3.2.3. Variables Influyentes

Los factores físicos y químicos que ejercen influencia en menor o mayor grado, podemos mencionar a las características del mineral, como la composición química, reactividad química, mineralización, granulometría, entre otros. Los factores que se mantuvieron controlados durante la realización de los ensayos son los siguientes:

- Temperatura
- Velocidad de agitación
- pH

Cuadro 4: Asociación de variables.

HIPÓTESIS	VARIABLE INDEPENDIENTE	VARIABLE DEPENDIENTE
La densidad de pulpa y la concentración de sulfato ferroso, son los principales factores que determinan el crecimiento de la población bacteriana y la disolución de cobre, hierro y arsénico, durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados	Densidad de pulpa y Concentración de sulfato ferroso	Disolución de Cu, Fe y As
La dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias *At. ferrooxidans* generada principalmente por la densidad de pulpa y la concentración de hierro durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico es representada por las ecuaciones diferenciales de los modelos de B. Gompertz y Logístico.	Densidad de pulpa y Concentración de sulfato ferroso	Modelos Matemáticos.
El incremento de la concentración de hierro en la solución de lixiviación, está relacionado directamente con el crecimiento de la población bacteriana en la biolixiviación de minerales sulfurados.	Concentración de sulfato ferroso	Crecimiento de la Población.

Cuadro 5: Operacionalización de Variables.

	VARIA-BLES	DEFINICION CONCEPTUAL	DIMENSIO-NES	INDICA-DORES
Independientes	Densidad de pulpa	Cantidad de mineral mezclado con solución de tratamiento.	Porcentaje de mineral sulfurado	1, 2 y 4% (W/V)
	Concentra-ción de sulfato ferroso	La presencia de ion ferroso permitirá la oxidación al férrico y luego la disolución del sulfuro metálico.	Gramos x litro de solución	0, 3, 6, 9, 12 y 15 g/L de $FeSO_4.7H_2O$
Dependientes	Disolución de Cu, Fe y As	Proceso de disolución del Cu, Fe y As a partir del mineral o especie mineral que lo contiene.	Miligramos/ litro de solución	Cu: 72.6, 85.6 y 89.4% Fe: 35.8, 32.4 y 28.0% As: 70.7, 64.5 y 45.0%
	Modelos matemáticos	Los modelos matemáticos son funciones en forma de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento sigmoideo del crecimiento poblacional de las bacterias *At. Ferrooxidans.*	- Ecuación de Gompertz -Ecuación logística	Parámetros: *M*, *B* y *k*
	Población bacteriana	Tasa de crecimiento y crecimiento bacteriano durante cada una de las etapas del ensayo de biolixiviación.	- Tasa de crecimiento. - Población bacteriana.	$4.75x10^7$, $6.40x10^7$ y $4.55x10^7$Cel/mL

3.3. Tipo y Diseño de Investigación

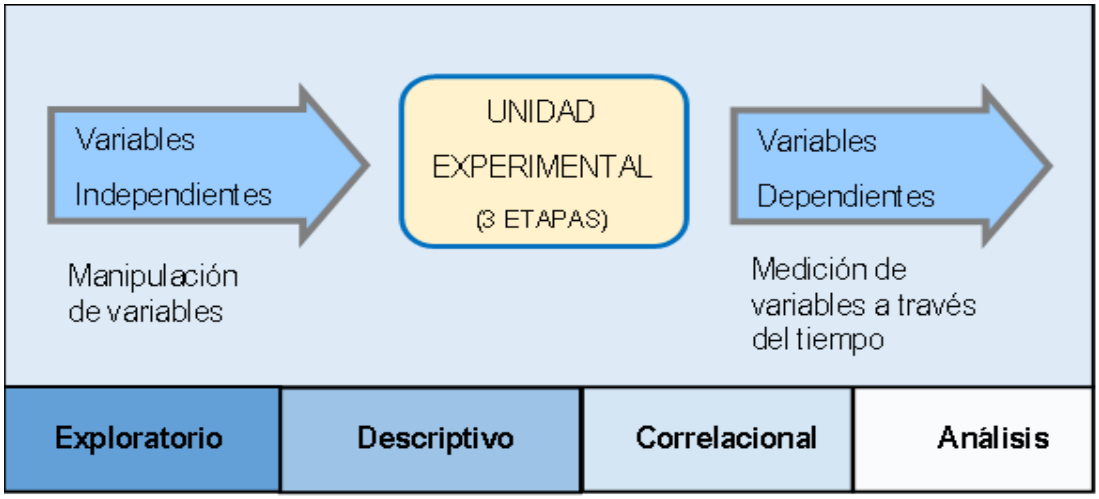
La investigación realizada sigue el método hipotético-deductivo, basado en la observación de las fases de adaptación y crecimiento que implica la lixiviación bacteriana, permitiéndose el planteamiento de las hipótesis para identificar la

influencia de la provisión de sulfato ferroso y la variación de la densidad de pulpa en el crecimiento bacteriano, la disolución del cobre y hierro y otros elementos.

La investigación es de tipo experimental, correlacional y cuantitativo, para ello se ha diseñado la realización de ensayos en tres etapas, variando la concentración del mineral sulfurado (1, 2 y 4% en W/V) y la adición de sulfato ferroso (3, 6, 9, 12 y 15 g/L) y sin adición (considerado grupo control) en cada etapa; además, usando la cepa de la etapa previa. Durante el periodo de biolixiviación se extrajeron muestras periódicamente para controlar el pH y medir las concentraciones de cobre, hierro y arsénico en solución.

La verificación experimental, buscó identificar la dinámica del crecimiento poblacional durante el proceso viable de biolixiviación de minerales, que permite establecer relaciones de causalidad en la disolución del cobre, hierro y arsénico. El desarrollo experimental está acorde al Cuadro 6

Cuadro 6: Identificación de la unidad experimental.



Se establece el seguimiento de las variables dependientes (Y) realizando mediciones periódicas (O), principalmente de las disoluciones de cobre, hierro y

arsénico. El diagrama corresponde al tipo de diseño de series de tiempo para el grupo control y grupo experimental y en cada una de las etapas.

$$E_1 \quad X_1 \quad O_1 \quad O_2 \quad O_3 \ldots \quad O_n \quad Y_1$$

Donde:

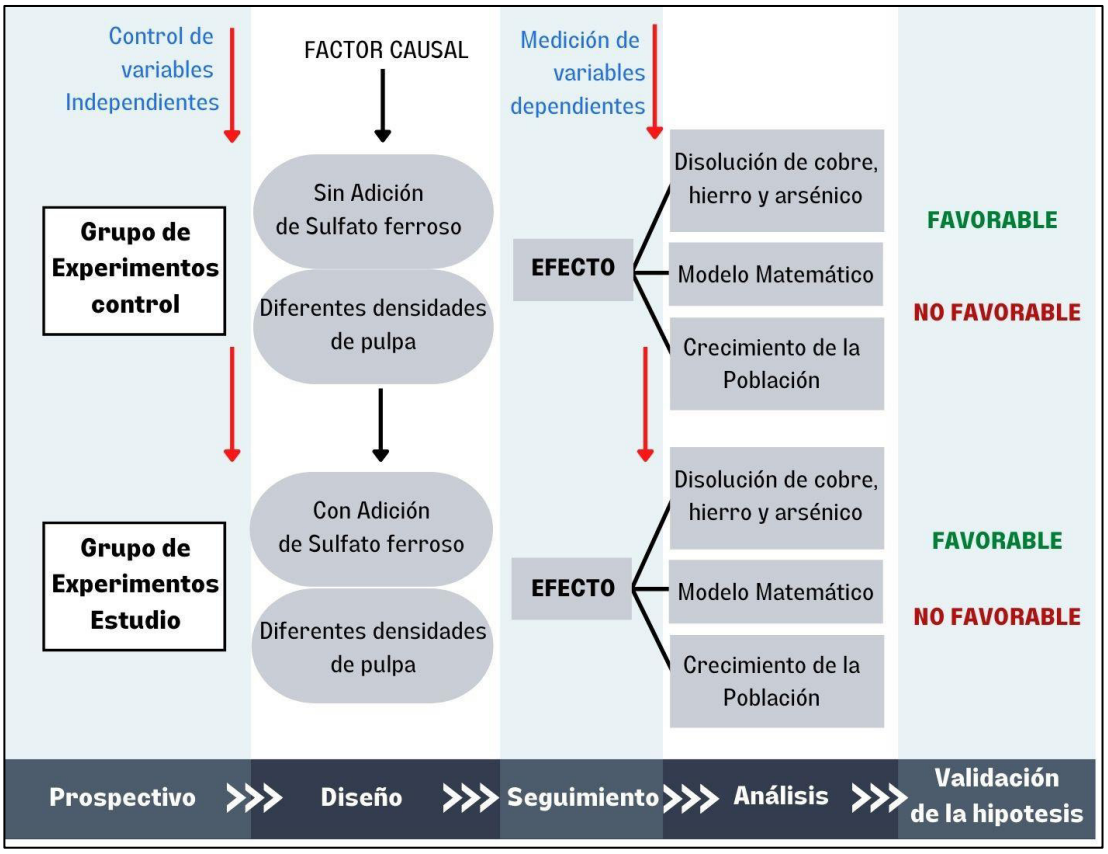
E_1 es el ensayo 1

$O_{1\text{-}n}$ son las observaciones

X_1 es la variable independiente

Y_1 es la variable dependiente

Cuadro 7: Diseño metodológico experimental.



3.4. Unidad de Análisis y Muestra de Estudio

El estudio se realizó con una muestra de 50 kilos de mineral caracterizado como mineral aurífero refractario de alto valor comercial, proveniente de la zona andina del departamento de Ancash. Mineral de alta sulfuración conteniendo valores de cobre, hierro y demás contaminantes como el arsénico.

El análisis químico de los principales elementos se realizó por Espectrometría de Masas (ICP) y por Espectroscopia de Absorción Atómica, cuyos resultados parciales se presenta en el cuadro 8

Cuadro 8: Principales Componentes del Mineral Sulfurado.

Au	Cu	Fe	As	S
g/t	ppm	%	%	%
13.9	7389	22.69	9.37	20.38

Nota: Los elementos del cuadro conforman alrededor del 52% en la composición del mineral. Hallándose 9.37% de arsénico y por lo tanto se considera un mineral con gran potencial contaminante.

El mineral en estudio presenta la siguiente composición mineralógica, determinada mediante microscopia óptica, realizada en el laboratorio de mineralogía de la Escuela de Ingeniería Geológica, UNMSM. Las especies minerales predominantes son la pirita, arsenopirita y esfalerita, con altos grados de liberación. Se

encontró oro microscópico (2 a 5 micras) en la fractura de la pirita y encapsulado en la arsenopirita.

Cuadro 9: Caracterización Mineralógica por Microscopía Óptica.

ESPECIES MINERALES	FÓRMULA	ABREV.	% VOLUMEN	% DE LIBERACIÓN
Pirita	FeS_2	Py	45.30	95.06
Arsenopirita	$AsFeS_2$	Apy	13.12	93.90
Esfalerita	ZnS	Ef	8.90	79.28
Galena	PbS	Gn	3.69	71.20
Calcopirita	$CuFeS_2$	Cp	1.90	84.21
Boulangerita	$Pb_5Sb_4S_{11}$	Boul	1.15	76.90
Enargita	Cu_3AsS_4	En	0.12	0.00
Tenantita	$Cu_3AsS_{3,25}$	tn	0.95	85.10
Gangas		GGs	25.48	97.50

Nota. Los compuestos predominantes son la pirita, arsenopirita y esfalerita, constituyen alrededor del 66.3 % de la mineralización. Las especies portadoras del cobre son la calcopirita, enargita y tenantita.

Fuente: Informe Técnico Proyecto Multidisciplinario 2012 (Arias, 2012).

3.5. Técnicas de Recolección de Datos

Los ensayos experimentales de biolixiviación se realizarán en matraces de 500 mL de capacidad, al que se adicionaron 200 mL de solución liquida conteniendo diferentes concentraciones de sulfato ferroso y también, distintas cantidades de mineral. La lectura de datos, así como de contenido metálico y población bacteriana durante el desarrollo de los ensayos, nos permitió identificar las ventajas en la disolución de cobre, hierro y arsénico y también determinar la cinética de crecimiento de las bacterias, que ha permitido identificar la dinámica del crecimiento bacteriano mediante el uso de los modelos primigenios de B. Gompertz y P. F. Verhulst (modelo Logístico).

3.6. Análisis e Interpretación de la Información

La revisión bibliográfica permitió la identificación de modelos matemáticos bastante adecuados para modelar el crecimiento bacteriano. Siendo ellas la función exponencial, la función de Gompertz y la función logística, ajustándose a los datos obtenidos.

Se hallaron las curvas de comportamiento y los parámetros en función a los condiciones físicas y químicas de la realización de los ensayos, contrastando los resultados experimentales a los modelos, la realización de ajustes al modelo y el establecimiento de posibles limitaciones. Finalmente, se han formulado las ecuaciones o sistemas de ecuaciones que describan el proceso de biolixiviación en los ensayos realizados para el mineral sulfurado que contiene cobre como principal elemento valioso y arsénico como principal elemento con potencial de contaminación.

El coeficiente de determinación (R^2) es hallada de la sumatoria del error cuadrático (SEC) de la población observada y población estimada y, la sumatoria de la diferencia experimental (SDE), o sea la suma de los errores de la población observada y el promedio del mismo.

$$R^2 = \left(1 - \frac{SEC}{SDE}\right) x\ 100 \qquad [42]$$

Cuadro 10: Medición y Control de las Variables Dependientes.

Variable dependiente	Indicador	Escala de medición	Estadísticos descriptivos	Contraste
Contenido de Cu, Fe y As	Disolución de Cu, Fe y As	Razón	Tendencia y dispersión	% de Disolución
Modelos matemáticos	Modelos matemáticos de Gompertz y Logístico	Intervalo	Funciones de Gompertz y Logístico	Porcentaje de Correlación (R^2)
Población bacteriana	Crecimiento de la población bacteriana	Razón	Funciones de Gompertz y Logístico	Cel/mL de solución

3.7. Análisis de la Dinámica Poblacional

Para el análisis de la dinámica se ha considerado como una población celular homogénea segregada morfológicamente e identificada por su crecimiento en número de células, como resultado de las características concurrentes del medio acuoso. Siendo la concentración del sulfato ferroso y la densidad de pulpa, los parámetros de

evaluación durante las fases de adaptación y crecimiento exponencial.

Basados en la función o modelo de Gompertz y la función logística, se han determinado las ecuaciones que representan el crecimiento exponencial y sigmoidal de las poblaciones celulares en cada uno de los ensayos de las etapas de biolixiviación de minerales sulfurados.

3.8. Ajuste de los Modelos en una Hoja de Cálculo (Excel)

A partir de la data de conteo de población bacteriana y la ayuda del software complemento Solver de Excel, se hallaron las ecuaciones con sus parámetros ajustados para cada uno de los modelos matemáticos. Con el ajuste de la función a los datos experimentales se consiguió los mejores valores posibles para los parámetros involucrados, realizado minimizando el error o discrepancia entre los valores observados y los valores predichos por el modelo tal como se menciona en el estudio realizado por Ginovart (2015).

Para el cálculo, se añadió una columna con el valor absoluto de la diferencia entre valor observado y valor predicho en la resolución del modelo, cuya suma es usada para realizar el ajuste o minimización de las discrepancias. Esto, es lo que nos proporciona el complemento Solver de la hoja de cálculo como solución en la minimización de los errores.

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSION

4.1. Análisis e Interpretación de Resultados

4.1.1. Disolución Metálica.

Realizada la biolixiviación en tres etapas, variando el contenido de sulfato ferroso en la solución de procesamiento y a distintas concentraciones de mineral, se logra la disolución de los elementos de interés: cobre, hierro y arsénico.

4.1.1.1. Primera Etapa de Biolixiviación.

El proceso se realizó en medio 9k a diferentes concentraciones de sulfato ferroso (3.0, 6.0, 9.0, 12.0 y 15.0 g/L) en frascos Erlenmeyer de 500 mL, agregando 300 mL de solución 9k, 30 mL de cepa bacteriana de *At. ferrooxidans* (conteniendo $7.05x10^7$ Cel/mL) y 3 gramos de mineral (1% W/V). Sometida a agitación a 150 RPM en plataforma Orbit Shaker, por un periodo limitado a la consecución de la mayor población bacteriana (Arias et al., 2021). Durante el proceso se mantuvo el pH alrededor de 1.8 regulado con solución de ácido sulfúrico.

La concentración de iones ferrosos en la biolixiviación de los sulfuros como la pirita y la calcopirita, varían en relación al contenido de compuestos azufrados que contiene el mineral (Zepeda 2018), consecuentemente, la disolución de cobre en solución, a distintas concentraciones de sulfato ferroso se incremente lentamente. Ver el cuadro 7.

Cuadro 11: Contenido de cobre (ppm) en solución durante el periodo de biolixiviación. Primera Etapa.

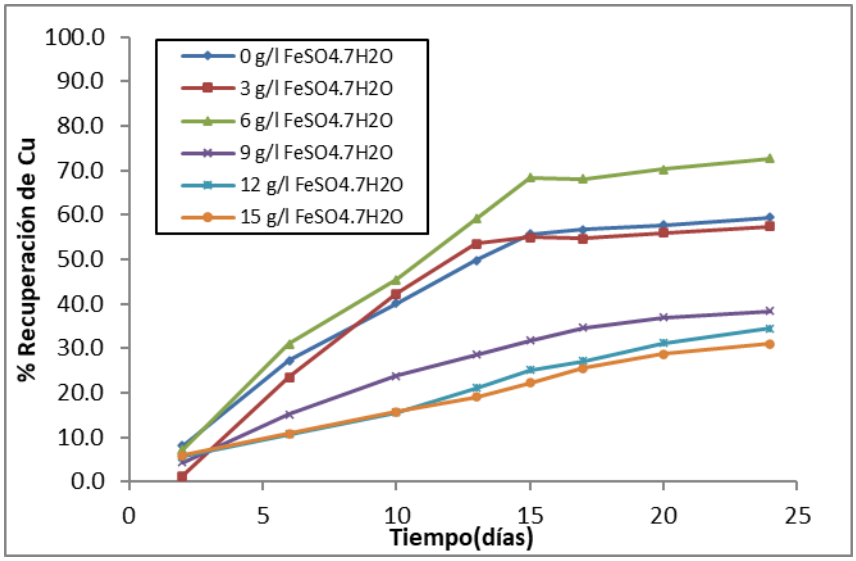
Día	Conc. de $FeSO_4.7H_20$					
	0	3	6	9	12	15
2	6.00	1.09	5.36	3.147	4.11	4.37
6	21.10	18.40	24.06	11.80	8.12	8.22
10	31.80	34.25	36.33	19.14	12.27	12.30
13	40.35	44.52	48.79	23.60	17.13	15.26
15	45.92	45.89	57.84	26.86	21.17	18.30
17	46.91	45.63	57.57	29.83	23.23	21.82
20	48.06	47.02	60.14	32.66	27.9	25.36
24	50.04	48.80	63.06	34.49	31.83	28.19

Nota: La mayor disolución del contenido de cobre alcanza a 63.06 ppm en el ensayo con 6 gramos por litro de sulfato ferroso.

Los resultados de la disolución del cobre de cada uno de los ensayos fueron calculados para determinar el porcentaje de recuperación. Se observa que la máxima

recuperación obtenida para esta etapa es de 72.64% a 6g/L de $FeSO_4.7H_2O$ y la recuperación mínima de 30.96 % a 15 g/L de $FeSO_4.7H_2O$. Ver la Figura 8

Figura 8: Recuperación de cobre a diferentes concentraciones de sulfato ferroso en solución. Primera Etapa de Biolixiviación.



Nota: La mayor disolución se da aproximadamente en los primeros 15 días y luego disminuye, con tendencia a mantenerse constante hasta la finalización del ensayo.

Fuente: Elaboración propia.

Igualmente, el contenido y la disolución del hierro está en relación directa al sulfato ferroso suministrado. El mayor contenido de hierro al inicio y al final del proceso, se encuentra en el ensayo con 15 gramos por litro de sulfato ferroso. Ver el cuadro 11

Cuadro 12: Contenido de hierro (ppm) en solución durante el periodo de biolixiviación. Primera Etapa.

Día	Conc. de $FeSO_4.7H_2O$					
	0	3	6	9	12	15
0	0	604	1208	1812	2417	3021
2	241	831	1430	1990	2574	3080
6	700	1100	1659	2378	3258	3200
10	1025	1320	1875	2450	3300	3189
13	1191	1500	1979	2549	3260	3090
18	1270	1590	1990	2300	3360	2930
24	1225	1650	2000	2339	2640	2947

Nota: El incremento de hierro en la solución es paulatino, llegando a un máximo de 3360 ppm en 18 días. En el ensayo con adición de 15 gramos de sulfato ferroso, la disolución es escasa o pueda que no haya disolución de hierro a partir del mineral.

4.1.1.2. Segunda Etapa de Biolixiviación

En esta etapa se realizó con 0, 3.0, 6.0, 9.0 y 12.0 g/L de sulfato ferroso en frascos Erlenmeyer de 500 mL, agregándose 300 mL de solución 9k, 30 mL de solución de la etapa anterior, conteniendo $4.75x10^7$ Cell/mL y 6 gramos de mineral (2% W/V). La agitación se efectuó en plataforma giratoria (Orbit Shaker) a150 rpm, por un periodo limitado a la consecución de la mayor población bacteriana. Durante el proceso se mantuvo el pH alrededor de 1.8 regulado con solución de ácido sulfúrico.

La mayor disolución del contenido de cobre alcanza a 165 ppm en el ensayo sin adición de sulfato ferroso. Ver Cuadro 13

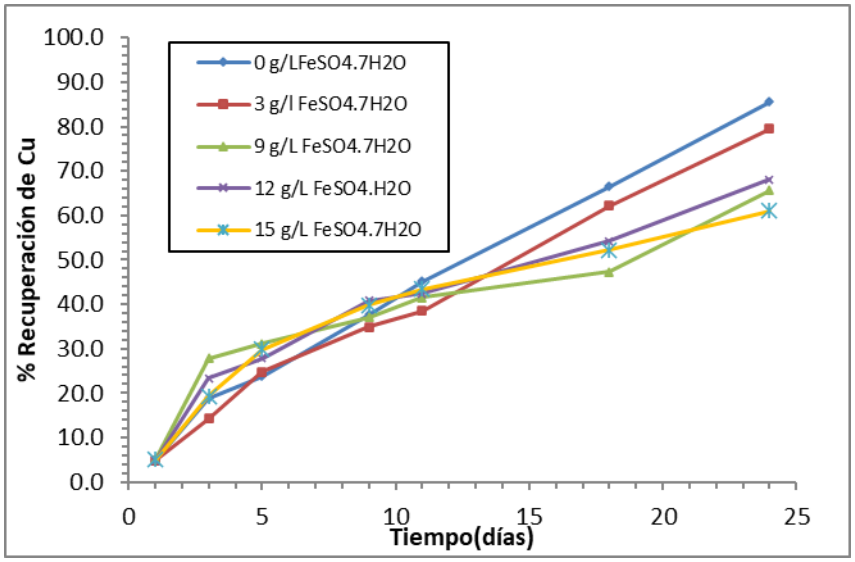
Cuadro 13: Contenido de Cobre (ppm) durante el periodo de biolixiviación. Segunda Etapa.

Días	Conc. de $FeSO_4$				
	0	3	9	12	15
2	15.1	13.2	11.9	9.8	8.4
5	36.9	39.6	49.0	45.9	47.4
9	60.8	57.6	59.8	62.5	66.0
12	74.6	64.5	68.63	69.3	71.8
18	116.0	112.0	91.0	87.6	89.5
24	165	149	123	128	130

Nota: La mayor disolución del contenido de cobre alcanzada es de 165 ppm en el ensayo sin aporte de sulfato ferroso.

La mayor recuperación alcanzada es de 85.6% para el ensayo sin adición de sulfato ferroso y la mínima recuperación (61.09%) para el ensayo con 15 g/L de $FeSO_4.7H_2O$. las recuperaciones tienen un comportamiento ascendente a través del tiempo.

Figura 9: Recuperación de cobre a diferentes concentraciones de sulfato ferroso en solución. Segunda Etapa de Biolixiviación.



Nota: La disolución de cobre es casi regular y contante a través del tiempo.

Fuente: Elaboración propia.

Igualmente, el contenido y la disolución del hierro está en relación directa al sulfato ferroso suministrado, El incremento ocurre gradualmente en relación a la adicionada y más rápidamente, en comparación a la etapa anterior.

Cuadro 14: Contenido de hierro (ppm) durante el periodo de biolixiviación. Segunda Etapa.

Días	Conc. de $FeSO_4$				
	0	3	9	12	15
0	0	604	1812	2430	3021
1	371	909	2150	2805	3290
2	620	1220	2430	3150	3540
6	788	1490	2700	3420	3760

9	1100	1770	3150	3680	4100
11	1200	1820	3320	3852	4300
18	1450	2160	2980	3950	4440
24	1650	2200	3250	4020	4410

Nota: El mayor contenido de hierro al inicio y al final, se encuentra en el ensayo con 15 gramos por litro de sulfato ferroso. En comparación a la primera etapa, se observa que si hubo disolución de sulfuros ferrosos existente en el mineral.

4.1.1.3. Tercera Etapa de biolixiviación

En esta etapa se realizó con 0, 3.0, 9.0, 12.0 y 15.0 g/L de $FeSO_4.7H_2O$ en frascos Erlenmeyer de 500 mL, agregándose 300 mL de solución 9k, 30 mL de solución de la etapa anterior, conteniendo $4.75x10^7$ Cell/mL y 12 gramos de mineral (4% W/V), de la misma manera, la agitación se realiza en plataforma Orbit Shaker a 150 rpm, por un periodo limitado a la consecución de la mayor población bacteriana.

La mayor disolución del contenido de cobre alcanza a 429 ppm en el ensayo sin adición de sulfato ferroso. Ver cuadro 14

Cuadro 15: Contenido de cobre (ppm) durante la biolixiviación. Tercera Etapa.

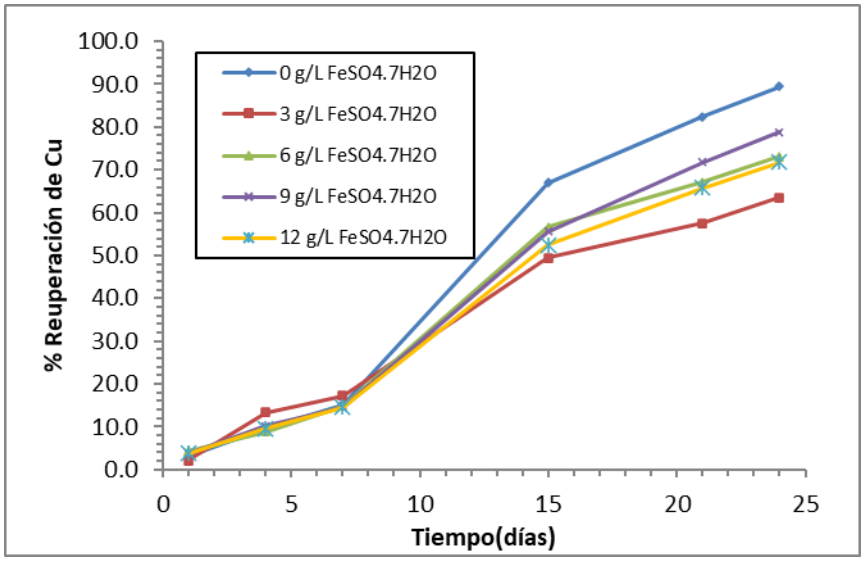
Días	$FeSO_4.7H_2O$				
	0	3	6	9	12
2	25	19	14	12	9
7	67	76	66	65	35

10	200	100	150	180	120
15	309	227	261	265	210
21	325	352	350	350	320
24	419	296	362	370	350

Nota: La mayor disolución del contenido de cobre alcanzada es de 419 ppm en el ensayo sin aporte de sulfato ferroso.

Se obtiene mayor recuperación (89.38%) en el ensayo sin adición de $FeSO_4.7H_2O$ y mínima recuperación (71.83%) en ensayo con adición de 3 g/L de $FeSO_4.7H_2O$. A igual que en los ensayos de la segunda etapa, el incremento en la recuperación es constante a través del tiempo.

Figura 10: Recuperación de cobre a diferentes concentraciones de sulfato ferroso en solución. Tercera Etapa de Biolixiviación.



Nota: La disolución de cobre es creciente a través del tiempo.

Fuente: Elaboración propia.

Igualmente, el contenido y la disolución del hierro está en relación directa al sulfato ferroso suministrado. El incremento de fierro en el medio lixiviante ocurre gradualmente en relación a la adicionada y más rápidamente, en comparación a la etapa anterior.

Cuadro 16: Contenido de hierro (ppm) durante la biolixiviación. Tercera Etapa.

Días	Conc. de $FeSO_4$				
	0	3	6	9	12
0	0	403	806	1209	2150
2	430	680	1580	2080	2620
7	737	1700	1870	2190	2920
15	1590	2180	2498	2540	3175
21	2230	2490	2660	2710	3325
24	2050	2390	2720	2680	3220

Nota: El mayor contenido de hierro al inicio y al final, se encuentra en el ensayo con 12 gramos por litro de sulfato ferroso. De forma similar a la segunda etapa, se observa que si hubo disolución de sulfuros ferrosos existente en el mineral.

Las recuperaciones logradas en cada una de las etapas de biolixiviación se resumen en el Cuadro 16, donde se puede observar los porcentajes de disolución de los principales elementos que constituye el mineral que ha sido sometido a estudio. El cobre incrementa la solubilidad de 72.6 a 89.4%, con la razonabilidad del incremento

en la densidad de pulpa desde la primera a la tercera etapa. El arsénico, el fierro y el azufre, contrariamente disminuyen su disolución o recuperación a pesar del incremento del mineral en el proceso.

Cuadro 17: Resumen de la disolución de Cu, Fe y As, alcanzadas en la biolixiviación del mineral sulfurado.

Elemento	Porcentaje de Solubilización		
	1º Etapa	2º Etapa	3º Etapa
Cu	72.6	85.6	89.4
Fe	35.8	32.4	28.0
As	70.7	64.5	45.0

Nota: Considerando el incremento de mineral por etapa de tratamiento, también se obtiene incremento en el porcentaje de solubilización de cada uno de los elementos citados, observándose incremento objetivo tan solo en la disolución del cobre.

4.1.2. Crecimiento de la Población Bacteriana.

El incremento de la población bacteriana en función al tiempo es representado a través de los modelos matemáticos descritos y sus parámetros *M, B* y *k*, obtenidas mediante regresión no lineal y ajustadas con el complemento Solver de Excel. Representándose la dinámica del crecimiento poblacional de la bacteria *At. ferrooxidans* durante la biolixiviación del mineral sulfurado.

Durante el proceso de biolixiviación, inicialmente ocurre el periodo de adaptación; ésta es progresiva y simultanea al incremento de población (Arias 2015).

La presencia de nutrientes permitió la reproducción de los microorganismos y paralelamente, el incremento de compuestos iónicos metálicos y no metálicos en solución. La cuantificación de la población bacteriana en cada una de las etapas de la biolixiviación, se realizó por conteo directo en un microscopio óptico (Leica modelo DM750)

4.1.2.1. Conteo de la Población. Primera Etapa de Biolixiviación.

Se realiza por conteo directo sobre cámara de recuento Neubauer (Marienfeld, DIN 12874).

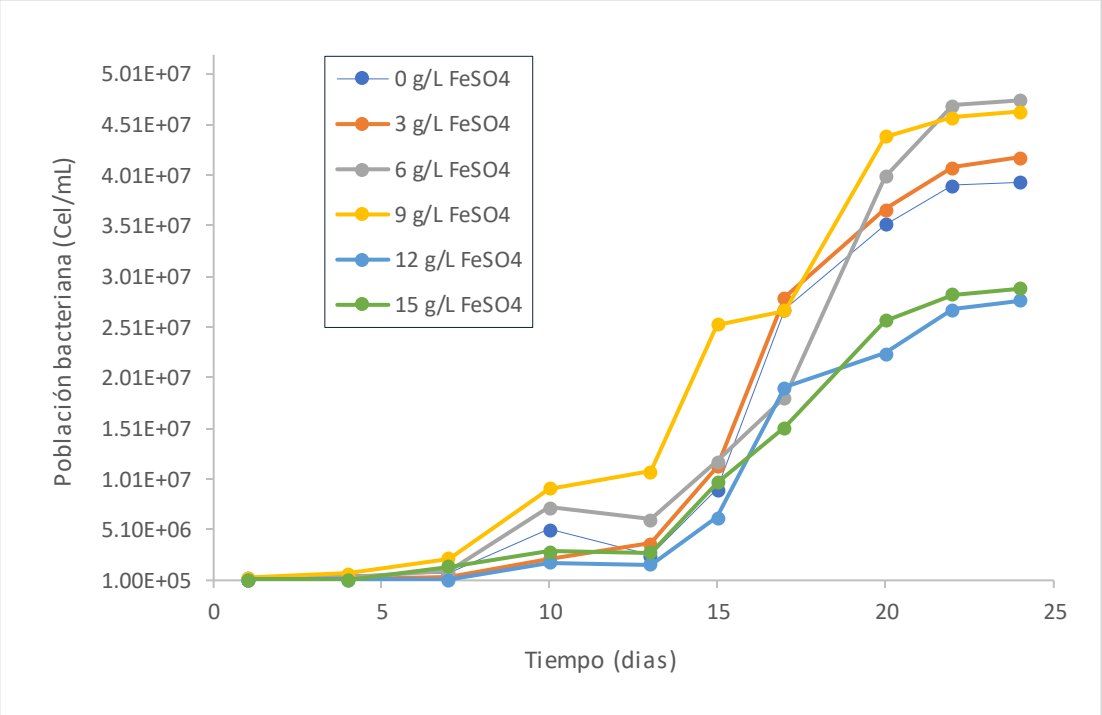
Cuadro 18: Crecimiento de la población de At. ferrooxidans. Primera Etapa de la biolixiviación.

Días	Conc. de $FeSO_4$(g/l)					
	0	3	6	9	12	15
1	2.35E+05	1.90E+05	2.90E+05	3.80E+05	2.10E+05	1.87E+05
4	5.35E+05	2.40E+05	4.90E+05	7.80E+05	2.03E+05	1.57E+05
7	7.50E+05	3.89E+05	9.89E+05	2.25E+06	1.79E+05	1.50E+06
10	5.15E+06	2.25E+06	7.25E+06	9.20E+06	1.87E+06	2.91E+06
13	2.60E+06	3.70E+06	6.10E+06	1.09E+07	1.70E+06	2.85E+06
15	9.10E+06	1.13E+07	1.18E+07	2.54E+07	6.30E+06	9.75E+06
17	2.68E+07	2.80E+07	1.82E+07	2.67E+07	1.91E+07	1.52E+07
20	3.52E+07	3.67E+07	4.00E+07	4.39E+07	2.25E+07	2.58E+07
22	3.91E+07	4.09E+07	4.70E+07	4.58E+07	2.68E+07	2.83E+07
24	3.94E+07	4.19E+07	4.75E+07	4.64E+07	2.77E+07	2.89E+07

Nota: Se observa incremento de la población en forma regular, alcanzando la mayor población de 4.75 x 10^7 Cel/mL con 6 gramos de sulfato ferroso por litro de solución, así como menor población de 2.77 x 10^7 Cel/mL con 12 gramos de sulfato ferroso.

El crecimiento fue menor para las mayores concentraciones de sulfato ferroso y en general el crecimiento acelerado se logra aproximadamente entre el 12vo. y 24vo. día, luego se produce el quiebre indicando la finalización de la etapa de crecimiento. La máxima poblacional alcanzada al cabo de 24 días fue inferior a la población del inoculo en 33%. La representación gráfica se observa a continuación.

Figura 11: Incremento de la población bacteriana durante la primera etapa de biolixiviación.



Nota: Se observa mayores crecimientos con menores suministros de sulfato ferroso.

Fuente: Elaboración propia.

4.1.2.2. Conteo de la Población. Segunda Etapa de Biolixiviación.

En esta etapa se realizó con 0, 3.0, 6.0, 9.0 y 12.0 g/L de sulfato ferroso en frascos Erlenmeyer de 500 mL, agregándose 300 mL de solución 9k, 30 mL de solución de la etapa anterior, conteniendo $4.75x10^7$ Cell/mL y 6 gramos de mineral (2% W/V). La agitación se efectuó en plataforma giratoria (Orbit Shaker) a150 rpm, por un periodo limitado a la consecución de la mayor población bacteriana.

Cuadro 19: Crecimiento de la población de At. ferrooxidans. Segunda Etapa de la biolixiviación.

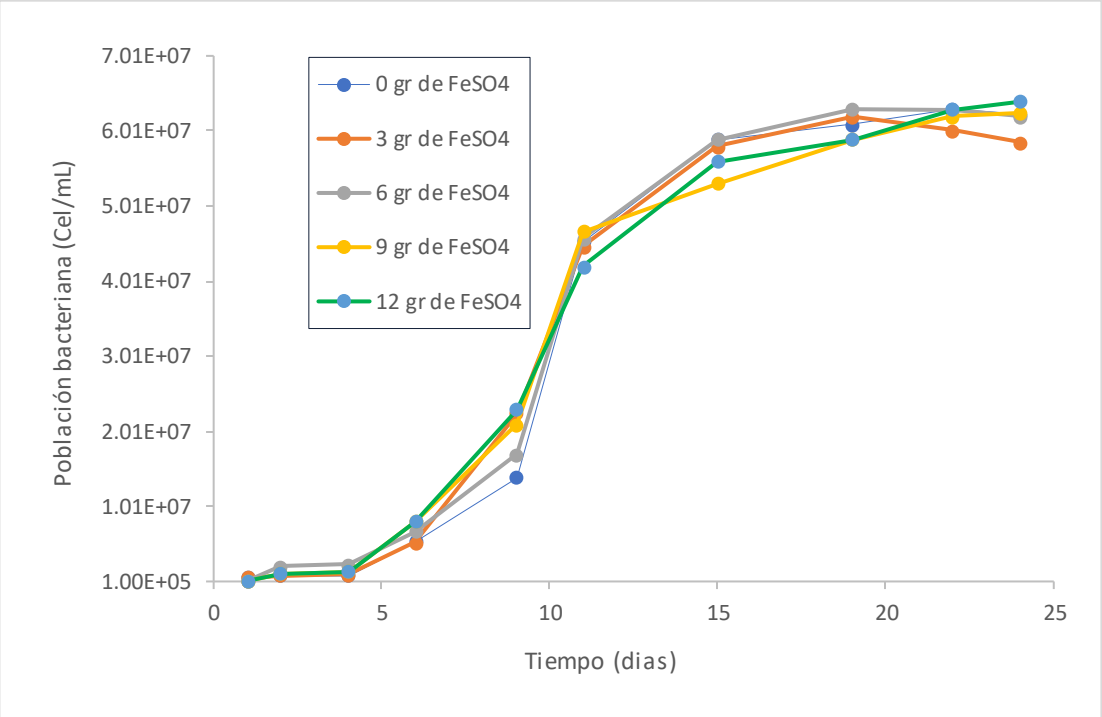
Días	Conc. de $FeSO_4$(g/l)				
	0	3	6	9	12
1	7.50E+05	6.05E+05	1.95E+05	1.80E+05	1.80E+05
2	8.50E+05	8.50E+05	2.10E+06	1.20E+06	1.20E+06
4	9.50E+05	1.05E+06	2.35E+06	1.45E+06	1.45E+06
6	5.40E+06	5.25E+06	6.70E+06	8.10E+06	8.10E+06
9	1.40E+07	2.25E+07	1.70E+07	2.10E+07	2.30E+07
11	4.54E+07	4.47E+07	4.58E+07	4.67E+07	4.20E+07
15	5.90E+07	5.80E+07	5.90E+07	5.31E+07	5.60E+07
19	6.10E+07	6.20E+07	6.30E+07	5.90E+07	5.90E+07
22	6.30E+07	6.01E+07	6.28E+07	6.20E+07	6.30E+07

24	6.23E+07	5.85E+07	6.20E+07	6.25E+07	6.40E+07

Nota: Concentración de inoculo: 4.75 x 10^7 Cel/mL. Máxima población alcanzada: 6.40 x 10^7 cel/mL a 12 gramos por litro de sulfato ferroso.

Observándose en las fases de adaptación y crecimiento bacteriano mucha similitud. La fase exponencial se inicia aproximadamente al 8vo. día y concluye aproximadamente, a los 20 días. Ver figura 12.

Figura 12: Incremento de la población bacteriana durante la segunda etapa de biolixiviación.



Nota: En todos los casos, se puede observar similitud en el crecimiento bacteriano, independiente a la concentración de sulfato ferroso.

Fuente: Elaboración propia.

4.1.2.3. Conteo de la Población. Tercera Etapa de Biolixiviación.

Realizada solución enriquecida de la etapa anterior, conteniendo $4.75x10^7$ Cell/mL

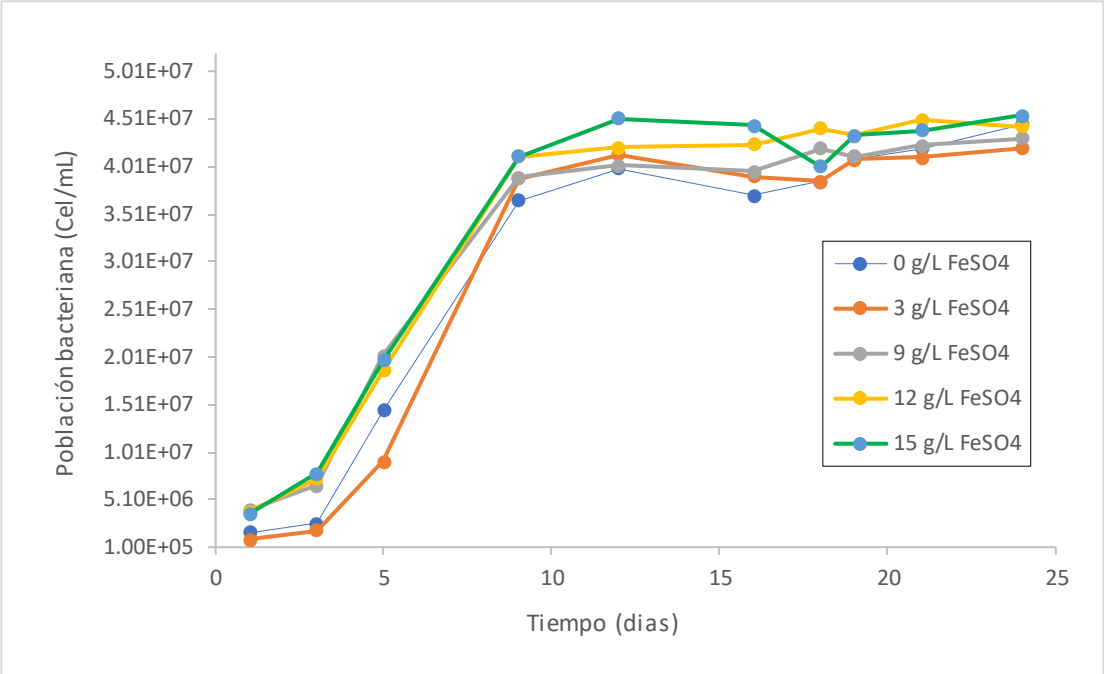
Cuadro 20: Crecimiento de la población de At. ferrooxidans. Tercera Etapa de la biolixiviación.

	Conc. de $FeSO_4$(g/L)				
Días	0	3	9	12	15
1	1.60E+06	9.50E+05	4.00E+06	3.83E+06	3.60E+06
3	2.60E+06	1.84E+06	6.60E+06	7.30E+06	7.80E+06
5	1.45E+07	9.15E+06	2.02E+07	1.87E+07	1.97E+07
9	3.65E+07	4.08E+07	3.89E+07	4.11E+07	4.11E+07
12	3.99E+07	4.14E+07	4.02E+07	4.21E+07	4.51E+07
16	3.70E+07	3.80E+07	3.96E+07	4.24E+07	4.44E+07
18	3.85E+07	3.85E+07	4.20E+07	4.41E+07	4.01E+07
19	4.09E+07	4.08E+07	4.11E+07	4.33E+07	4.33E+07
21	4.20E+07	4.10E+07	4.23E+07	4.50E+07	4.39E+07
24	4.45E+07	4.20E+07	4.30E+07	4.43E+07	4.55E+07

Nota: Concentración de inoculo: 6.40 x 10^7 Cel/mL. Máxima población alcanzada: 4.55 x 10^7 Cel/mL a 15 gramos por litro de sulfato ferroso.

Se logra un crecimiento exponencial aproximadamente después del segundo día de iniciada la experimentación. A diferencia de la primera etapa, se logra reducir 8 días y comparado a la segunda etapa, en 5 días. Ver figura 13

Figura 13: Incremento de la población bacteriana durante la tercera etapa de biolixiviación.



Nota: El crecimiento exponencial finaliza aproximadamente a los 10 días. En esta etapa se logra mayor crecimiento (4.45×10^7 Cel/mL) en la prueba que carece de la sal ferrosa.

Fuente: Elaboración propia.

4.2. Representación Matemática de la Dinámica del Crecimiento.

La dinámica del crecimiento es presentada a través de los modelos matemáticos obtenidos de las ecuaciones diferenciales y son representados en gráficas con sus parámetros, producto de los datos obtenidos experimentalmente y con el ajuste del complemento Solver de la hoja de cálculo Excel.

4.2.1. Aplicación del Modelo Gompertz

Con la representación del crecimiento de la población bacteriana en función de tres variables:

$$\boldsymbol{P(t) = Me^{-Be^{-kt}}}$$

Esta expresión es sometida a validación por regresión lineal y no lineal.

4.2.1.1. Análisis y Ajuste de la Tasa de Crecimiento

Dada la expresión de la función de Gompertz:

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = kPLn\frac{M}{P}}$$

El ajuste de la ecuación a los datos experimentales para conseguir los mejores valores posibles para los parámetros involucrados, es decir los que minimizaran el error o discrepancia entre valores observados y valores predichos por el modelo, se logra añadiendo una columna más con el valor absoluto de la diferencia entre valor observado y valor predicho por la función de Gompertz y calculamos la suma de todas estas discrepancias, para luego minimizar y representar gráficamente, al igual que la gráfica de los valores observados.

Se sitúa el valor de los parámetros que recoge la función en un rango de celdas de la hoja de cálculo, el cual se resuelve de forma reiterativa hasta conseguir una combinación de valores para los parámetros que minimice la suma de los errores.

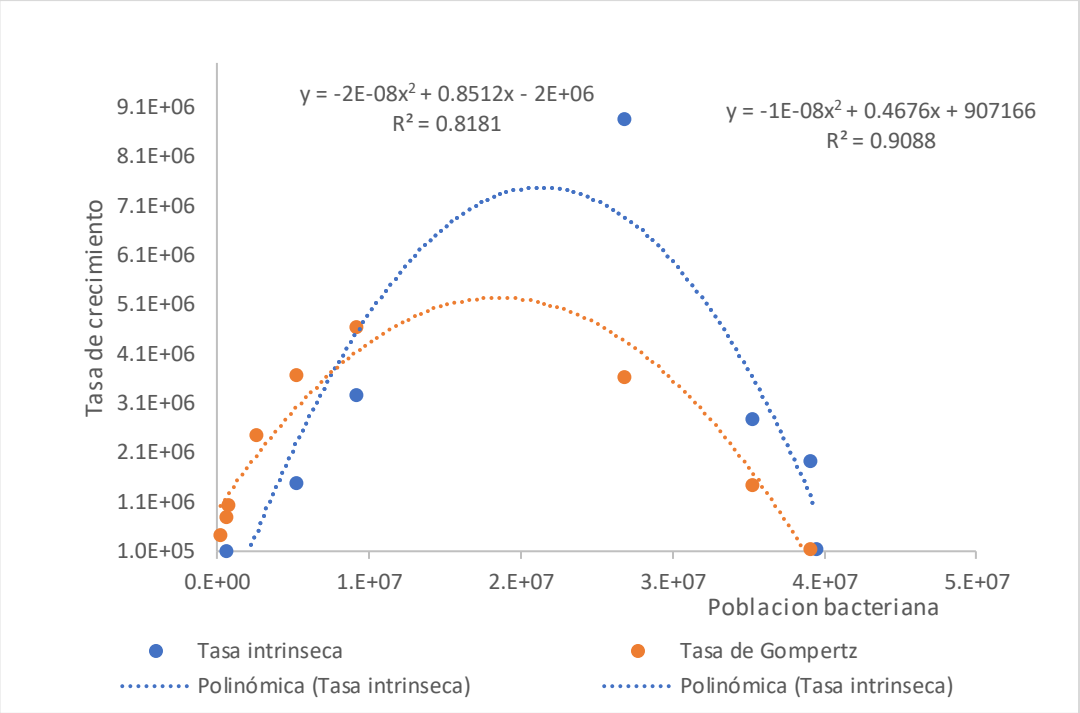
Igualmente se halla y se grafica la tasa de crecimiento en función de la población bacteriana.

Cuadro 21: Ajuste de parámetros para la obtención de la tasa de crecimiento. Modelo Gompertz.

t(días)	Población	dP/dt	kP.Ln(M/P)	Error Cuad.
1	2.35E+05		4.20E+05	1.77E+11
4	5.35E+05	1.00E+05	8.03E+05	4.94E+11
7	7.50E+05	7.17E+04	1.04E+06	9.33E+11
10	5.15E+06	1.47E+06	3.66E+06	4.82E+12
13	2.60E+06	-8.50E+05	2.47E+06	1.10E+13
15	9.10E+06	3.25E+06	4.66E+06	2.00E+12
17	2.68E+07	8.85E+06	3.63E+06	2.72E+13
20	3.52E+07	2.80E+06	1.42E+06	1.90E+12
22	3.91E+07	1.95E+06	1.47E+05	3.25E+12
24	3.94E+07	1.50E+05	4.33E+04	1.14E+10
			Suma E. C. :	5.16E+13

Nota: Los cálculos se efectúan a partir de los valores observados de la población bacteriana durante la experimentación.

Figura 14: Tasa de crecimiento bacteriano durante la biolixiviación haciendo uso del Modelo Gompertz, con 0 gramos de FeSO4/L. Primera Etapa.



Nota. Se observa la concavidad en las tasas de crecimiento y la ecuación de regresión para la tasa intrínseca (color azul) con 0.8181 de correlación y la taza en función al modelo de Gompertz (color naranja) con 0.9088 de correlación.

Fuente: Elaboración propia.

4.2.1.2. Ajuste y Control del Crecimiento Poblacional

Para el análisis de regresión lineal, se transforma el modelo, obteniéndose la expresión de la siguiente forma:

$$Ln(Ln\frac{M}{P}) = Ln(B) - kt$$

Luego, con los datos de población correspondiente al primer ensayo de la

primera etapa de la biolixiviación, se obtiene el valor de *Y* para cada periodo de tiempo considerado, hallándose los respectivos valores mostrados en el cuadro 22

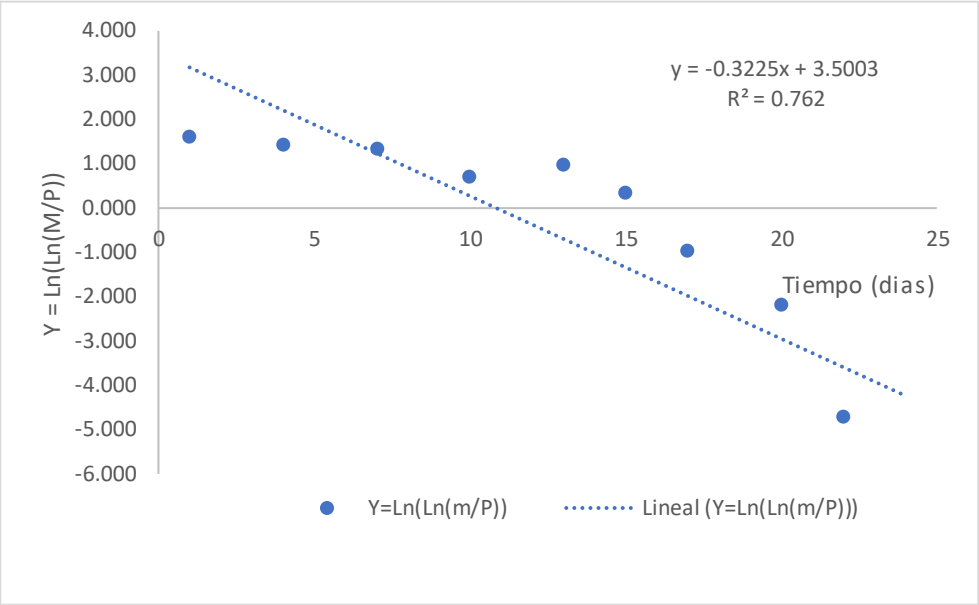
Cuadro 22: Cálculo de Y correspondiente a la expresión lineal del ensayo sin adición de sulfato ferroso al medio de lixiviación.

t(días)	Población	$Y = (\ln(\ln(M/P)$
1	2.35E+05	1.634
4	5.35E+05	1.459
7	7.50E+05	1.377
10	5.15E+06	0.711
13	2.60E+06	1.000
15	9.10E+06	0.383
17	2.68E+07	-0.950
20	3.52E+07	-2.171
22	3.91E+07	-4.712
24	3.94E+07	-6.614

Nota: Los valores negativos de Y corresponden a la disminución de la tasa de crecimiento.

La grafica del tiempo versus la tercera columna del cuadro 22 permite identificar la dispersión de los puntos. Ver figura 15.

Figura 15: Representación lineal. Ensayo de crecimiento bacteriano con 0 grs. de sulfato ferroso. Primera Etapa.



Nota: La ecuación de regresión resultante (y = -0.3225x + 3.5003), se calculan las variables del modelo, obteniéndose: b = 33.13 y k = 0.3225

Fuente: Elaboración propia.

La carencia de linealidad y la baja correlación (0.762), determina la no aplicación de ajuste al modelo lineal.

El análisis de la ecuación (no lineal) se efectúa por la técnica de los mínimos cuadrados. Los datos procesados se presentan en el cuadro 19, donde el error cuadrático resulta de la diferencia elevada al cuadrado, de la población observada y la población estimada.

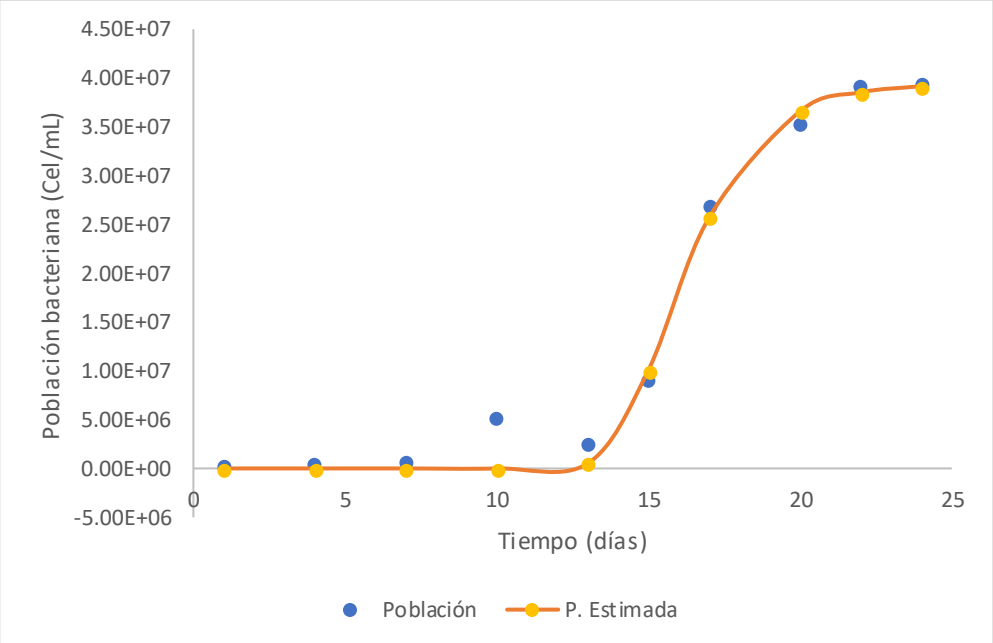
Cuadro 23: Análisis efectuado mediante el uso de la función de Gompertz.

t(días)	Población	P Estimado	Error Cuad.	Difer. Exp.
1	2.35E+05	0.00E+00	5.52E+10	2.45E+14

4	5.35E+05	0.00E+00	2.86E+11	2.36E+14
7	7.50E+05	4.52E-54	5.63E+11	2.29E+14
10	5.15E+06	7.45E-04	2.65E+13	1.15E+14
13	2.60E+06	5.12E+05	4.36E+12	1.77E+14
15	9.10E+06	1.01E+07	9.63E+11	4.61E+13
17	2.68E+07	2.57E+07	1.20E+12	1.19E+14
20	3.52E+07	3.66E+07	1.93E+12	3.73E+14
22	3.91E+07	3.85E+07	3.25E+11	5.39E+14
24	3.94E+07	3.92E+07	5.73E+10	5.53E+14
Prom.	1.59E+07	Suma:	3.63E+13	2.63E+15

Nota: La sumatoria de los errores cuadráticos es minimizado mediante el complemento Solver de la hoja de cálculo Excel, obteniéndose la optimización de los parámetros del modelo.

Figura 16: Representación de la población haciendo uso de la Función de Gompertz para 0 grs. de sulfato ferroso. Primera Etapa.



Nota. El trazo con puntos azules corresponde a los valores reales de la población y el trazo continuo de color amarillo corresponde al ajuste en los errores.

Fuente: Elaboración propia.

Obteniéndose los parámetros: B = 8086.86 y k = 0.5791. La ecuación resultante de la dinámica de crecimiento de la población bacteriana de *At. ferrooxidans*, queda representada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{P = 3.95 * 10^{7} * e^{-8086.83 * e^{-0.5791t}}} \quad [43]$$

La bondad de ajuste del modelo del modelo de crecimiento poblacional es hallada haciendo uso de la Ec. 42, donde la SEC = 3.63E+12 es la sumatoria de los cuadrados de la diferencia de la población observada y la población estimada y, SDE = 2.63E+15 es la sumatoria de los cuadrados de la diferencia de la población observada y el promedio del mismo con un coeficiente de determinación de 98.62%. Resultando un modelo altamente fiable.

Las gráficas del crecimiento de población correspondientes a mayores concentraciones de sulfato ferroso se presentan en el apéndice B tabla B2 y las ecuaciones en el Cuadro 26

Las gráficas de la tasa de crecimiento y las respectivas ecuaciones para mayores concentraciones de sulfato ferroso se presentan en el apéndice B tabla B1

4.2.2. Aplicación del Modelo Logístico

Con la representación del crecimiento de la población bacteriana en función de tres variables:

$$\boldsymbol{P = \frac{M}{1 + Be^{-kt}}}$$

Igualmente, esta expresión es sometida a validación por regresión lineal y no lineal.

4.2.2.1. Análisis y Ajuste de la Tasa de Crecimiento.

Dada la expresión de la función logística:

$$\frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{M})$$

El ajuste de la función o modelo a los datos experimentales para conseguir los mejores valores posibles para los parámetros involucrados, es decir los que minimizaran el error o discrepancia entre valores observados y valores predichos por el modelo, se logra añadiendo una columna más con el valor absoluto de la diferencia entre valor observado y valor predicho por la función logística y calculando la suma de todas estas discrepancias, para luego minimizar y representar gráficamente, al igual que la gráfica de los valores observados.

Cuadro 24: Ajuste de parámetros para la obtención de la tasa de crecimiento mediante el modelo Logístico.

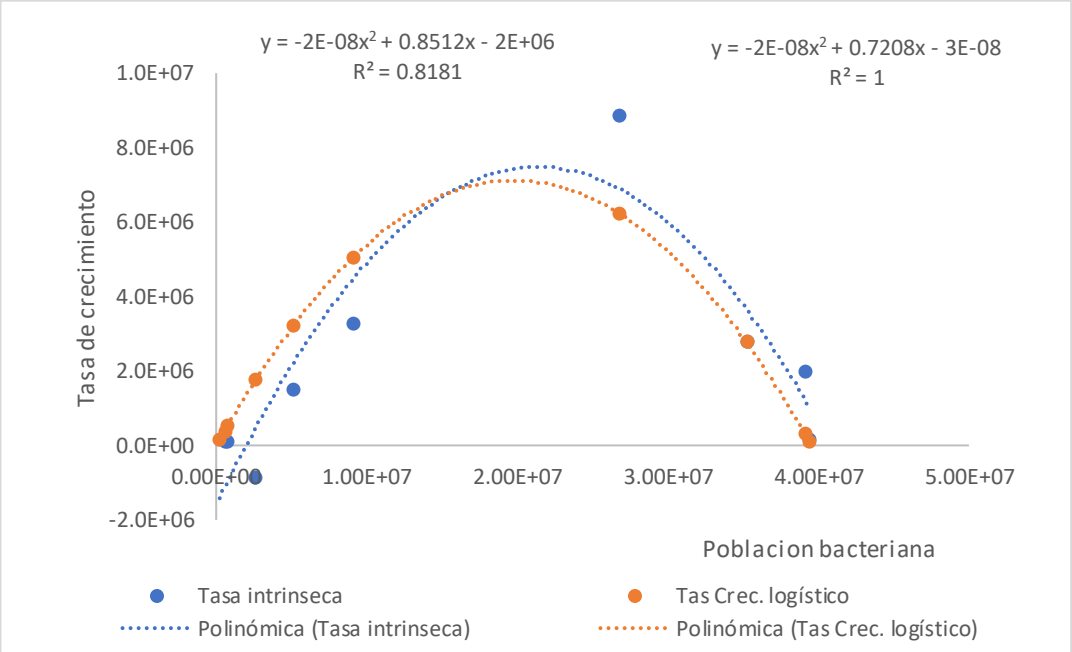
t(días)	Población	dP/dt	kP(1-(P/M)	Error Cuad.
1	2.35E+05		1.68E+05	2.84E+10
4	5.35E+05	1.00E+05	3.80E+05	7.86E+10
7	7.50E+05	7.17E+04	5.30E+05	2.10E+11
10	5.15E+06	1.47E+06	3.23E+06	3.10E+12

13	2.60E+06	-8.50E+05	1.75E+06	6.76E+12
15	9.10E+06	3.25E+06	5.05E+06	3.24E+12
17	2.68E+07	8.85E+06	6.22E+06	6.92E+12
20	3.52E+07	2.80E+06	2.78E+06	5.83E+08
22	3.91E+07	1.95E+06	3.03E+05	2.71E+12
24	3.94E+07	1.50E+05	8.93E+04	3.68E+09
			Suma E. C.	2.30E+13

Nota: Los cálculos se efectúan a partir de los valores observados de población durante la experimentación.

Igualmente se calcula y se gráfica la tasa de crecimiento en función de la población bacteriana.

Figura 17: Tasa de crecimiento bacteriano durante la biolixiviación haciendo uso de la función Logística, con 0 gramos de FeSO4/L. Primera Etapa.



Nota. Se observa la concavidad en las tasas de crecimiento y la ecuación de regresión para la tasa intrínseca (color azul) con 0.8181 de correlación y la taza en función al modelo de Logístico (color azul) con correlación perfecta.

Fuente: Elaboración propia.

Las gráficas de la tasa de crecimiento y las respectivas ecuaciones de regresión para cada una de las concentraciones de sulfato ferroso se presentan en el Apéndice B tabla B1

4.2.2.2. Ajuste y control del Crecimiento Poblacional

El ajuste de la ecuación a los datos experimentales para conseguir los mejores valores posibles para los parámetros involucrados, es decir los que minimizaran el error o discrepancia entre valores observados y valores predichos por el modelo, ello se logra añadiendo una columna más con el valor absoluto de la diferencia entre valor observado y valor predicho por el modelo Logístico y calcularemos la suma de todas estas discrepancias, para luego minimizar y representada gráficamente, al igual que la gráfica de los valores observados.

Cuadro 25: Análisis efectuado mediante el uso de la función Logística.

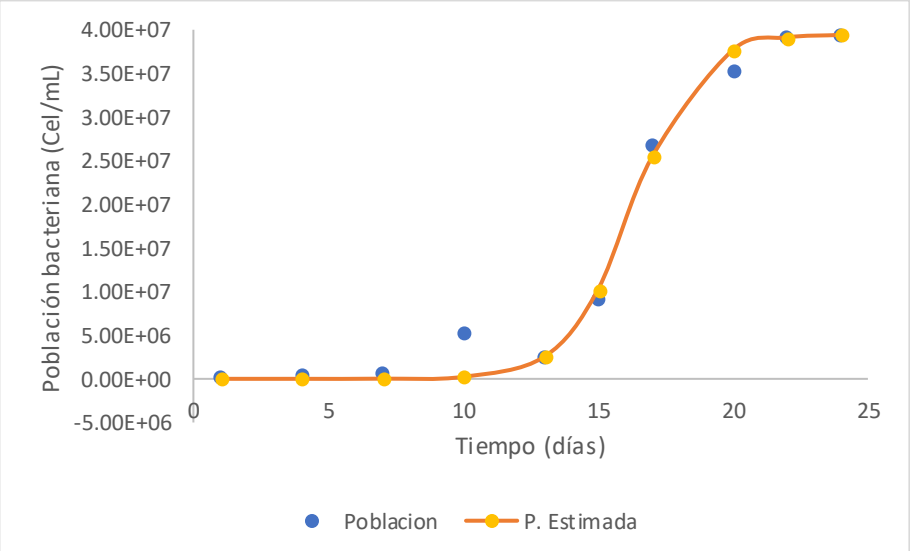
t(días)	Población	P Estimado	Error Cuad.	Difer. Exp
1	2.35E+05	1.45E+02	5.52E+10	2.45E+14
4	5.35E+05	1.69E+03	2.84E+11	2.36E+14
7	7.50E+05	1.98E+04	5.33E+11	2.29E+14
10	5.15E+06	2.30E+05	2.42E+13	1.15E+14
13	2.60E+06	2.52E+06	5.68E+09	1.77E+14

15	9.10E+06	1.03E+07	1.37E+12	4.61E+13
17	2.68E+07	2.54E+07	1.89E+12	1.19E+14
20	3.52E+07	3.77E+07	6.22E+12	3.73E+14
22	3.91E+07	3.91E+07	3.35E+08	5.39E+14
24	3.94E+07	3.94E+07	5.94E+07	5.53E+14
Prom.	1.59E+07	Suma:	3.46E+13	2.63E+15

Nota: La sumatoria de los errores cuadráticos es minimizado mediante el complemento Solver de la hoja de cálculo Excel. Obteniéndose la optimización de los parámetros del modelo.

El análisis de la ecuación (no lineal) se efectúa por la técnica de los mínimos cuadrados. Los datos procesados se presentan en el Cuadro 25, donde el error cuadrático resulta de la diferencia elevada al cuadrado, entre la población experimental y la población estimada. La sumatoria de los valores cuadráticos es minimizado mediante el complemento Solver de la hoja de cálculo Excel, obteniéndose la optimización de los parámetros del modelo.

Figura 18: Representación de la población haciendo uso de la Función Logística para 0 grs. de sulfato ferroso. Primera Etapa.



Nota. El trazo con puntos azules corresponde a los valores reales de la población y el trazo continuo de color amarillo corresponde al ajuste en los errores.

Fuente: Elaboración propia.

Obteniéndose los parámetros: B = 616856.29 y k = 0.8191. La ecuación resultante de la dinámica de crecimiento de la población bacteriana de *At. ferrooxidans*, queda representada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{P = \frac{3.95*10^{7}}{1+616856.62*e^{-0.8191t}}} \qquad [44]$$

De forma similar, la correlación es hallada haciendo uso de la Ec. 42, donde la SEC = 3.46E+13 es la sumatoria de los cuadrados de la diferencia de la población observada y la población estimada y, SDE = 2.63E+15 es la sumatoria de los cuadrados de la diferencia de la población observada y el promedio del mismo. Obteniéndose un coeficiente de determinacion de 98.69%.

Las gráficas del crecimiento de población correspondientes a mayores concentraciones de sulfato ferroso se presentan en el apéndice B tabla B2 y las ecuaciones en el cuadro 26

Las gráficas de la tasa de crecimiento y las respectivas ecuaciones para mayores concentraciones de sulfato ferroso se presentan en el apéndice B tabla B1

Las ecuaciones que representa a la población en función al tiempo son identificadas para cada uno de los casos, proveyendo los parámetros. Así mismo, en todos los casos los coeficientes de determinación son bastante fiables.

Cuadro 26: Resumen de ecuaciones de la dinámica del crecimiento poblacional en la primera etapa del proceso de biolixiviación.

Parámetros			Modelo Gompertz Modelo Logístico	R^2
M	B	k		
3.95E+7	8086.83	0.5791	$P = 3.95 * 10^7 * e^{-8086.83 * e^{-0.5791t}}$	98.62
3.95E+7	616856.62	0.8191	$P = \frac{3.95 * 10^7}{(1 + 616856.62 * e^{-0.8191t})}$	98.69
4.26E+7	1151.54	0.4582	$P = 4.26 * 10^7 * e^{-1151.54 * e^{-0.4582t}}$	99.53
4.20E+7	40990962.29	0.7447	$P = \frac{4.20 * 10^7}{(1 + 40990962.29 * e^{-0.7447t})}$	99.50
5.86E+7	454.78	0.3781	$P = 4.86 * 10^7 * e^{-454.78 * e^{-0.3781}}$	96.51
5.28E+7	8127.17	0.5172	$P = \frac{5.28 * 10^7}{(1 + 8127.17 * e^{-0.5172t})}$	98.11
4.67E+7	46.30	0.2824	$P = 4.67 * 10^7 * e^{-46.30 * e^{-0.2824t}}$	96.37
5.11E+7	398.94	0.33942	$P = \frac{5.11 * 10^7}{(1 + 398.94.07 * e^{-0.3942t})}$	97.86
2.71E+7	4649.16	0.5457	$P = 2.71 * 10^7 * e^{-4649.16 * e^{-0.5457t}}$	98.80
2.62E+7	1878368.58	0.8972	$P = \frac{2.62 * 10^7}{(1 + 1878368.58 * e^{-0.8972t})}$	98.71
3.19E+7	144.07	0.3165	$P = 3.19 * 10^7 * e^{-144.07 * e^{-0.3165t}}$	98.91
3.03E+7	3533.09	0.4868	$P = \frac{3.03 * 10^7}{(1 + 3533.09 * e^{-0.4868t})}$	98.34

El ajuste de las funciones matemáticas a los datos experimentales se realiza para cada uno de los ensayos de la segunda y tercera etapa del proceso de biolixiviación, obteniéndose el valor de cada uno de los parámetros y las ecuaciones correspondientes consignadas en los cuadros 27 y 28, respectivamente.

Cuadro 27: Resumen de ecuaciones de la dinámica del crecimiento poblacional en la segunda etapa del proceso de biolixiviación.

Parámetros			Modelo Gompertz Modelo Logístico	R^2
M	*B*	*k*		
6.16E+7	*1567.86*	*0.7746*	$P = 6.16 * 10^7 * e^{-1567.86 * e^{-0.7746t}}$	*99.51*
6.24E+7	*38050.80*	*0.7804*	$P = \frac{6.24 * 10^7}{(1 + 38050.80 * e^{-0.7804t})}$	*99.56*
6.06E+7	*76.05*	*0.4910*	$P = 6.06 * 10^7 * e^{-76.05 * e^{-0.4910t}}$	*99.53*
6.07E+7	*4645.64*	*0.6486*	$P = \frac{6.07 * 10^7}{(1 + 4645.64 * e^{-0.6486t})}$	*99.38*
6.21E+7	*723.27*	*0.7038*	$P = 6.21 * 10^7 * e^{-723.27 * e^{-0.7038t}}$	*99.18*
6.29E+7	*16140.93*	*0.7242*	$P = \frac{6.29 * 10^7}{(1 + 16140.93 * e^{-0.7242t})}$	*99.24*
6.19E+7	*19.07*	*0.3462*	$P = 6.19 * 10^7 * e^{-19.07 * e^{-0.3462t}}$	*98.73*
6.13E+7	*2265.73*	*0.5913*	$P = \frac{6.13 * 10^7}{(1 + 2265.73 * e^{-0.5913t})}$	*98.75*
6.37E+7	*14.62*	*0.3108*	$P = 6.37 * 10^7 * e^{-14.62 * e^{-0.3108t}}$	*99.63*
6.73E+7	*41.23*	*0.2956*	$P = \frac{6.73 * 10^7}{(1 + 41.23 * e^{-0.2956t})}$	*99.00*

Nota: Para ambos modelos matemáticos, los coeficientes de determinación están muy cercanos al 100%

Cuadro 28: Resumen de ecuaciones de la dinámica del crecimiento poblacional en la tercera etapa del proceso de biolixiviación.

Parámetros			Modelo Gompertz Modelo Logístico	
M	***B***	***k***		***R^2***
4.07E+7	*13.89*	*0.5237*	$P = 4.07 * 10^7 * e^{-13.89 * e^{-0.5237t}}$	*98.55*
4.07E+7	*13.91*	*0.5240*	$P = \frac{4.07 * 10^7}{(1 + 13.91 * e^{-0.5240t})}$	*98.55*
4.24E+7	*45.30*	*0.6796*	$P = 4.24 * 10^7 * e^{-45.30 * e^{-0.6796t}}$	*98.71*
4.24E+7	*715.07*	*0.9000*	$P = \frac{4.24 * 10^7}{(1 + 715.07 * e^{-0.9000t})}$	*97.73*
4.18E+7	*7.07*	*0.4610*	$P = 4.18 * 10^7 * e^{-7.07 * e^{-0.4610t}}$	*99.00*
4.21E+7	*14.10*	*0.4643*	$P = \frac{4.21 * 10^7}{(1 + 14.10 * e^{-0.4643t})}$	*96.85*
4.41E+7	*6.98*	*0.4391*	$P = 4.41 * 10^7 * e^{-6.98 * e^{-0.4391t}}$	*99.78*
4.44E+7	*14.52*	*0.4547*	$P = \frac{4.44 * 10^7}{(1 + 14.52 * e^{-0.4547t})}$	*99.11*
4.41E+7	*7.41*	*0.4652*	$P = 4.41 * 10^7 * e^{-7.41 * e^{-0.4652t}}$	*99.65*
4.37E+7	*412.18*	*0.900*	$P = \frac{4.37 * 10^7}{(1 + 412.18 * e^{-0.900t})}$	*99.11*

Nota: Para ambos modelos matemáticos, los coeficientes de determinación están muy cercanos al 100%. Observándose, ligera disminución en la aplicación del modelo logístico para los ensayos con 3 y 9 g/L de sulfato ferroso, 97.73% y 96.85%, respectivamente.

4.3. Prueba de Hipótesis

4.3.1. Prueba de la Primera Hipótesis Específica

La disolución de cobre, hierro y arsénico, ocurren favorablemente. Las recuperaciones de cobre en cada una de las etapas alcanzan a 72.6, 85.6 y 89.4% en razón directa a la densidad de pulpa o concentración del mineral en el medio, estos son presentados en las Figuras 8, 9 y 10. En las disoluciones de hierro y arsénico, se observa disminución a medida que se incrementa la densidad de pulpa. Por lo tanto, la densidad de pulpa considerada en cada una de las etapas del proceso de biolixiviación, determina el grado de disolución de los elementos Cu, Fe, As, entre otros; y paralelamente, ocurre el crecimiento bacteriano y por ende la oxidación de los sulfuros metálicos.

4.3.2. Prueba de la Segunda Hipótesis Específica

La dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias At. Ferrooxidans son representadas por los modelos matemáticos de B. Gompertz y Logístico. Ellos permiten identificar el ciclo de crecimiento; observándose, inicialmente un crecimiento exponencial seguido de un crecimiento retardado hasta establecer un parámetro de máximo incremento y estabilidad de la población bacteriana, describiéndose un comportamiento sigmoideo de alta correlación, cuya primera descripción matemática de la población bacteriana está dada por las ecuaciones:

$$\boldsymbol{P = 3.95 * 10^{7} * e^{-8086.83 * e^{-0.5791t}}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{P = \frac{3.95 * 10^{7}}{(1 + 616856.62 * e^{-0.8191t})}}$$

Contrastadas estadísticamente mediante la relación de la sumatoria de los errores cuadráticos de la diferencia de la población observada y la población estimada y, la sumatoria de los cuadrados de la diferencia de la población observada y el promedio del mismo; cuyos coeficientes de determinación son de 97.73% y 96.85% para la función de B. Gompertz y la función Logística, respectivamente.

4.3.3. Prueba de la Tercera Hipótesis Específica

La adición de sulfato ferroso y la disolución de los sulfuros de hierro y arsénico en el medio acuosos durante el proceso de biolixiviación, está directamente relacionado con el crecimiento de la población bacteriana en los periodos, aproximadamente entre los 12 a 20 días, entre los 8 a 15 días y entre los 2 a 9 días, de la primera, segunda y tercera etapa, representadas en las figuras 19, 20 y 21, respectivamente. Observándose que la cinética se va mejorando; a su vez, la disolución de los sulfuros de cobre se va incrementando.

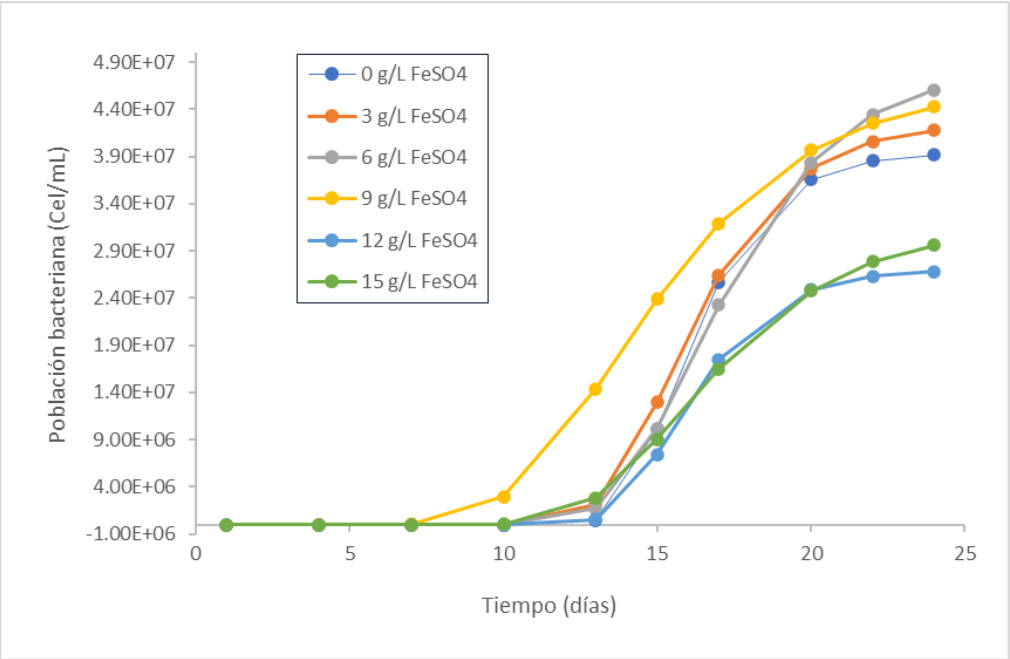
4.4. Presentación de Resultados

4.4.1. Aplicación del Modelo Gompertz.

El ajuste de las ecuaciones permite identificar la dinámica de crecimiento en cada una de las etapas del proceso de biolixiviación.

En la primera etapa, los ensayos sin y con menores cantidades de sulfato ferroso presentan mayores poblaciones bacterianas. Se obtiene mayor población en el ensayo con 9 gramos de sulfato ferroso.

Figura 19: Consolidado de las curvas ajustadas. Primera Etapa de biolixiviación.

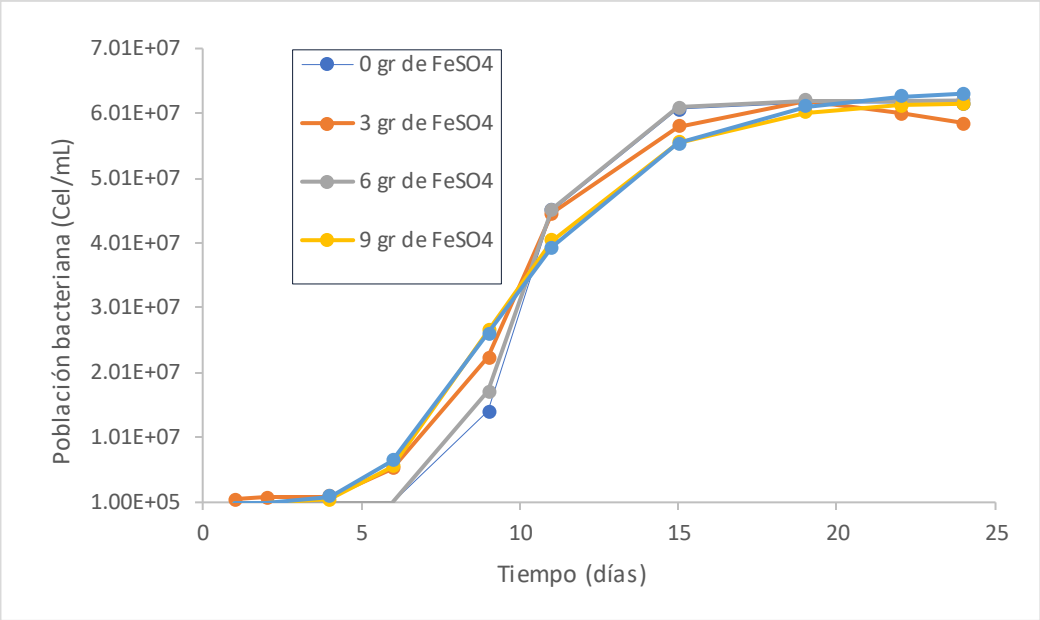


Nota. El crecimiento acelerado ocurre aproximadamente entre los 12 a 20 días del proceso de biolixiviación.

Fuente: Elaboración propia.

En la segunda etapa, los todos los ensayos, independientemente a la adición de sulfato ferroso, presentan crecimientos semejantes durante todo el periodo ensayado.

Figura 20: Consolidado de las curvas ajustadas. Segunda Etapa de Biolixiviación.

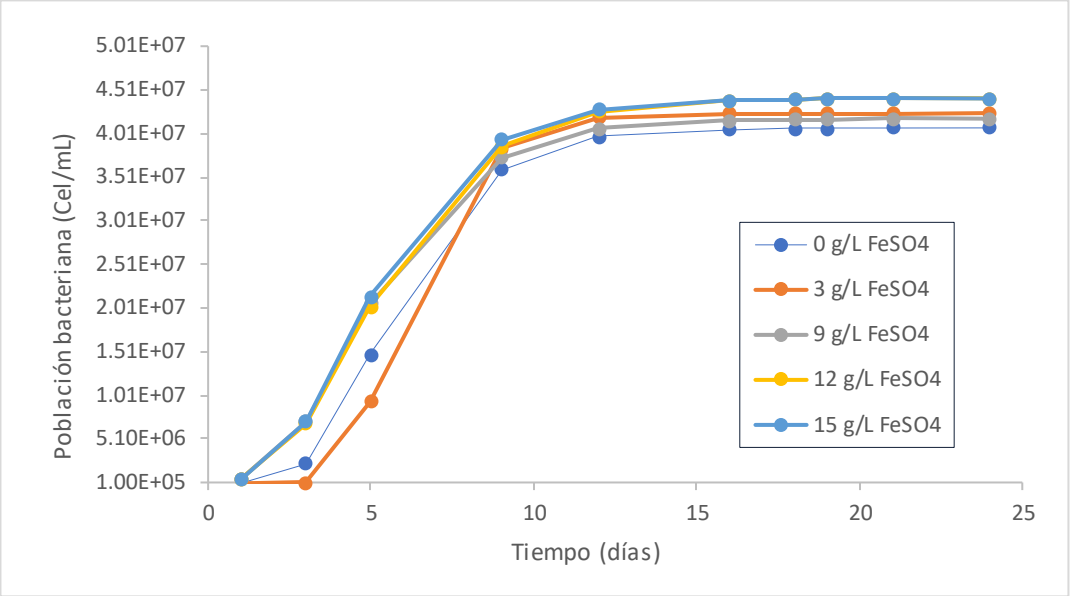


Nota. El crecimiento acelerado ocurre aproximadamente entre los 8 a 15 días del proceso de biolixiviación.

Fuente: Elaboración propia.

En la tercera etapa a igual que la anterior todos los ensayos, independientemente a la adición de sulfato ferroso, presentan crecimientos semejantes durante todo el periodo ensayado.

Figura 21: Consolidado de las curvas ajustadas. Tercera Etapa de biolixiviación.



Nota. El crecimiento acelerado ocurre aproximadamente entre los 2 a 9 días del proceso de biolixiviación.

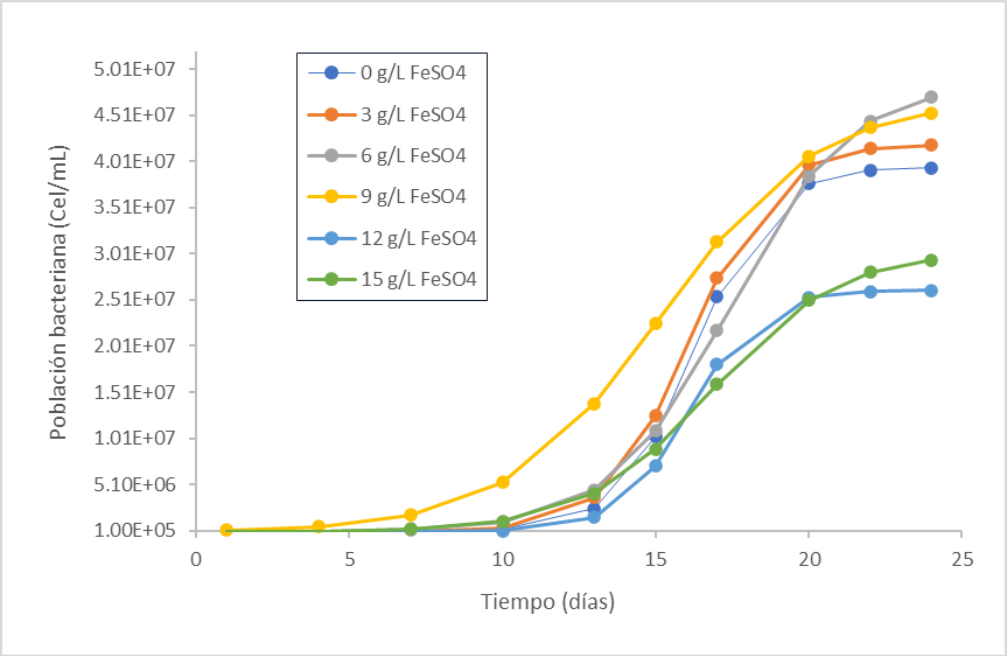
Fuente: Elaboración propia.

4.4.2. Aplicación del Modelo Logístico

A igual que con el modelo Gompertz, el ajuste de las ecuaciones y su alto grado de correlación, permite identificar la dinámica de crecimiento con en cada una de los ensayos de las tres etapas de biolixiviación.

En la primera etapa, los ensayos sin y con menores cantidades de sulfato ferroso presentan mayores poblaciones bacterianas. El ensayo con 9 gramos de sulfato ferroso tiene diferenciación en cuanto al crecimiento y población. El ensayo con 6 gramos de sulfato ferroso consigue mayor población.

Figura 22: Curvas ajustadas en la Primera Etapa de biolixiviación.

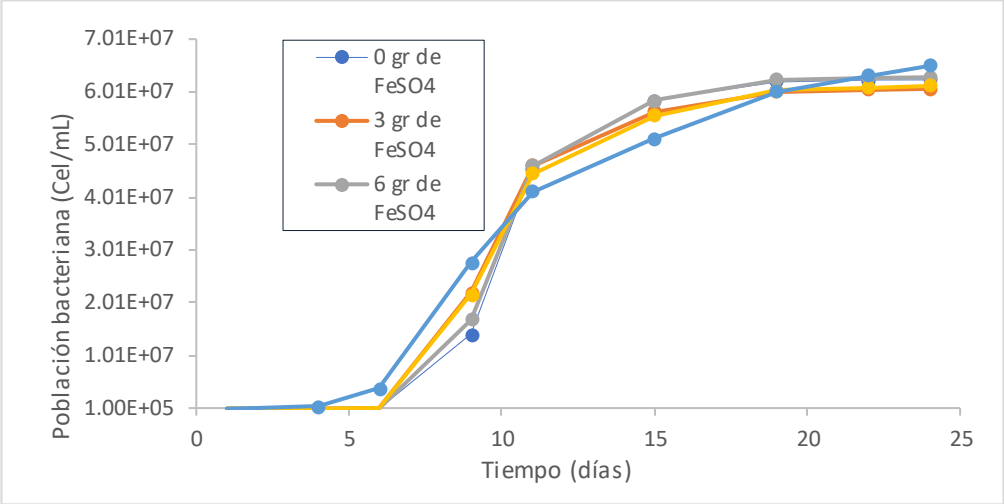


Nota. El crecimiento acelerado ocurre aproximadamente entre los 12 a 20 días del proceso de biolixiviación.

Fuente: Elaboración propia.

En la segunda etapa, todos los ensayos, independientemente a la adición de sulfato ferroso, presentan crecimientos semejantes durante todo el periodo ensayado.

Figura 23: Curvas ajustadas en la Segunda Etapa de biolixiviación.

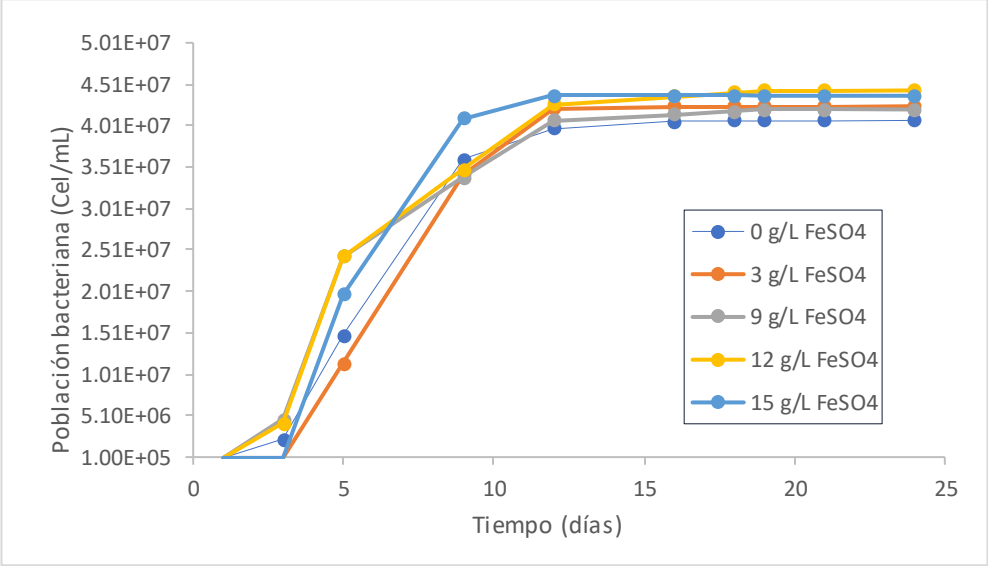


Nota. El crecimiento acelerado ocurre aproximadamente entre los 6 a 15 días del proceso de biolixiviación.

Fuente: Elaboración propia.

En la tercera etapa, todos los ensayos, independientemente a la adición de sulfato ferroso, presentan crecimientos semejantes durante todo el periodo ensayado.

Figura 24: Curvas ajustadas en la Tercera Etapa de biolixiviación.



Nota. El crecimiento acelerado ocurre aproximadamente entre los 3 a 11 días del proceso de biolixiviación.

Fuente: Elaboración propia.

4.5. Discusión de Resultados

El estudio de las poblaciones se remonta al principio del siglo XIX con las ecuaciones exponenciales de Malthus (1809), por el interés de identificar la población a partir de las características de la especie y los factores externos como la concentración de iones de hierro y la densidad de pulpa, en un periodo de tiempo tomado en etapas. La dinámica del crecimiento poblacional como núcleo central tiene al modelo de Malthus y de especializaciones o ramificaciones, los modelos de Gompertz y logístico, según la interpretación o aserción empírica sustentada en elemento teóricos básicos (Diaz & Lorenzano, 2017).

La validación de las ecuaciones es uno de los pasos necesarios para realizar la comparación de los modelos matemáticos, para ello se utilizan los parámetros obtenidos en cada una de las ecuaciones estudiados. Consiguiéndose determinar la dinámica de crecimiento bacteriano en función al tiempo y a través de la bondad de ajuste expresados con los respectivos coeficientes de determinación, obteniendo significancias cercanas al 100%.

En función al tipo de reproducción, en este caso por fisión binaria, la curva de crecimiento es exponencial, independientemente de los factores físico químicos del medio (Chiappa et al., 2009),

El estudio del modelo de crecimiento de Gompertz con un análisis gráfico e

interpretativo aporta elementos para el desarrollo matemático en las ciencias biológicas que soporta los aprendizajes (Ulloa et al. (2016); asimismo, la aplicación del modelo logístico en la conversión de medios específicos a costa de la evolución favorable en la dinámica de poblaciones de bacterias. Estudio realizado por Ibarguen (2018), para identificar la dinámica de dos poblaciones de bacterias termófilas. Sin embargo, es importante considerar de forma contextualizado los medios con condiciones limitadas e ilimitadas que, definirán la valides de las teorías resultantes en los modelos sigmoideos.

Siendo objeto matemático del cálculo diferencial, la función, asociada al modelamiento de fenómenos biológicos, en particular para el crecimiento poblacional, identificadas con aplicación de modelos en tiempo discreto para proyectar el tamaño de una población bacteriana y predecir su evolución y su acción en tiempo determinado (Parra et al., 2019).

La versión factorizada del modelo general sigmoideo donde los factores M, B y k, representan un significado ecológico como resultado de condiciones estacionarias de interacciones interespecíficas o sea de las interacciones de células de la misma especie con soluciones lineales de baja significancia (de 0.762 en el análisis muestral) optándose por el análisis de mínimos cuadrados, teniendo como resultado, alta significancia (de 0.9862 en el análisis muestral) y correlaciones cercanas al 100%. Contrariamente, a lo obtenido por Stucchi et al. (2020), al estudiar sistemas multiespecíficos reales, identifica soluciones estacionarias resolviendo ecuaciones lineales.

Las ventajas del uso de modelos matemático exponenciales como el de Gompertz y logístico en la representación y explicación de la dinámica de la población de *At. Ferrooxidans* durante la biolixiviación de sulfuros de cobre, es corroborada con

el estudio de AlAdwani & Saavedra (2019), quienes mediante el uso de polinomios de orden superior y la adición de puntos de equilibrio demostraron que se puede incrementar la confianza y explicar los sistemas ecológicos como la dinámica de poblaciones.

CONCLUSIONES

El incremento de la recuperación de cobre en la biolixiviación de minerales sulfurados está relacionado directamente con la densidad de pulpa empleada; contrariamente, la tasa de disolución va decreciento en razón a la unidad de tiempo, atribuyendo a la capacidad degradadora de las bacterias cuando se logra su adaptación a un medio controlado y semi constante. Corroborada con la recuperación conseguida en la tercera etapa del estudio de investigación.

Las constantes paramétricas M, B y k de las funciones de los modelos de Gompertz y Logístico, permitieron identificar la congruencia con la familia de las funciones sigmoideas y la variación de los mismos permiten describir y representar el crecimiento poblacional; así como, identificar los puntos de inflexión o cambio en la velocidad de crecimiento a través del tiempo identificado en el estudio.

A través de las ecuaciones diferenciales aplicadas en la representación de la dinámica del crecimiento de la bacteria *At. ferrooxidans*, se puede identificar las etapas del ciclo de vida y entender el comportamiento durante el proceso de biolixiviación, ello permite aseverar que el modelado con las ecuaciones sigmoideas de Benjamín Gompertz y Pierre François Verhulst, son de gran utilidad.

La adaptación y crecimiento bacteriano logrado con provisión de mineral como medio proveedor de nutrientes, es característica de los microorganismos

quimiolitotróficos, siendo verificado el crecimiento en cada una de las etapas de procesamiento de la biolixiviación de minerales sulfurados.

RECOMENDACIONES

La estimación de los parámetros durante el crecimiento poblacional a través de los modelos usados y/o cualquier otro, puede ser afectado por un factor aleatorio no advertido o evento climático; siendo recomendable el uso de modelos estocásticos, que a través de las ecuaciones diferenciales estocásticas podrían brindar nuevos alcances que permitan profundizar el estudio de la dinámica bacteriana durante las aplicaciones biotecnológicas.

Considerando que la presencia de iones en el medio determina el potencial de óxido reducción (ORP), se recomienda su evaluación en función a la disolución de los metales de interés y a la adición de iones de plata y plomo.

REFERENCIAS.

Acevedo, F., Juan Carlos Gentina M., & Illanes, A. (2004). Fundamentos de ingeniería bioquímica (pp. 155-157). Eds. Universitarias de Valparaíso de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.euv.cl/archivos_pdf/bioquimica.pdf

AlAdwani, M., & Saavedra, S. (2019). Is the addition of higher-order interactions in ecological models increasing the understanding of ecological dynamics? Mathematical Biosciences, 315, 108222. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2019.108222

Arenzana Hernández, Victor (2019). CONTEXTO HISTÓRICO DE LA APARICIÓN DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA: P.F. VERHULST. https://vicmat.com/contexto-historico-la-aparicion-la-ecuacion-logistica-p-f-verhulst/

Argibay, P. (2012). Metodología de la investigación avanzada: introducción al estudio de los sistemas complejos y sus aplicaciones. Parte III: Dinámicas complejas. Rev. Hosp. Ital. B. Aires (2004), 140-147. https://pesquisa.bvsalud.org/portal/resource/pt/lil-658225

Arias Arce Vladimir A. (2012). Informe Técnico de Proyecto Multidisciplinario, Vicerrectorado de Investigacion. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Arias, V., Rodríguez, C., Ramírez, P., Nonones, E., Salazar, D., Gil, J., ... & Jamanca, G. (2012). Aislamiento de bacterias acidófilas a partir del drenaje ácido proveniente de las inmediaciones a las unidades mineras de Julcani y Recuperada, Huancavelica. Revista IIgeo, UNMSM. 15(30), 59-66. https://doi.org/10.15381/iigeo.v15i30.3450

Arias, V., Lovera, D., Quiñones, J., Flores, A., Gil, J., Ramírez, L., & Cayo, H. (2015). Biolixiviación de cobre a partir de minerales sulfurados con altos tenores de pirita y arsenopirita. *Revista Del Instituto de Investigación de La Facultad de Ingeniería Geológica, Minera, Metalurgica y Geográfica*, *18*(36). https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/iigeo/article/view/12164

Arias-Arce, V. A., Lovera Dávila, D. F., Paucarima, A. F., & Rojas, T. L. (2021). Correlación del potencial óxido reducción y la población bacteriana durante el estudio de biolixiviación de sulfuros de cobre. Revista del Instituto de investigación de la Facultad de minas, metalurgia y ciencias geográficas, 24(47), 19-28. https://doi.org/10.15381/iigeo.v24i47.20639

Baty, F., & Delignette-Muller, M. L. (2004). Estimating the bacterial lag time: which model, which precision? International journal of food microbiology, 91(3), 261-277. https://doi.org/10.1016/j.ijfoodmicro.2003.07.002

Bermejo Ruiz, M. (2020). Modelo de dinámica de poblaciones con interacción intraespecífica aplicado a comunidades bacterianas. https://oa.upm.es/65728/1/TFG_MARCOS_BERMEJO_RUIZ.pdf

Briceño, J., Cañizales, B., Rivas, Y., Lobo, H., Moreno, E., Velásquez, I., & Ruzza, I. (2010). La holística y su articulación con la generación de teorías. Educere, 14(48), 73-83. https://www.redalyc.org/pdf/356/35616720008.pdf

Castle, D. G. A. (2005). A Semantic View of Ecological Theories⋆. Dialéctica, 55(1), 51–66. https://doi.org/10.1111/j.1746-8361.2001.tb00206.x

Cayré, M. E., Vignolo, G. M., & Garro, O. A. (2007). Selección de un modelo primario para describir la curva de crecimiento de bacterias lácticas y Brochothrix thermosphacta sobre emulsiones cárnicas cocidas. Información tecnológica, 18(3), 23-29. https://repositorioslatinoamericanos.uchile.cl/handle/2250/391331

Chiappa, C. X., Galindo, S. M. C., & Cervantes, S. A. (2009). Introducción a los modelos matemáticos de crecimiento con aplicación en sistemas biológicos. México: UNAM--UMDI--Sisal. http://www.sisal.unam.mx/labeco/LAB_ECOLOGIA/Produccion_academica_de_Xavier_files/PAPIME_Manual_Modelos.pdf

Cid Martínez, G. (2018). Análisis de la dinámica del crecimiento poblacional de la Daphnia magna: Un modelo para su uso den bioensayos (Bachelor's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla). https://hdl.handle.net/20.500.12371/7786

Córdova-Tapia, F., & Zambrano, L. (2015). La diversidad funcional en la ecología de comunidades. Ecosistemas, 24(3), 78-87. https://doi.org/10.7818/ECOS.2015.24-3.10

Cortés López, J. C., Romero Bauset, J. V., Roselló Ferragud, M. D., & Villanueva Micó, R. J. (2013). Modelos continuos de crecimiento: del modelo exponencial al modelo logístico. https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/30892/Modelos%20continuos%20de%20crecimiento%20Malthus.pdf?sequence=1

Deveci, H. A. C. I. (2004). Effect of particle size and shape of solids on the viability of acidophilic bacteria during mixing in stirred tank reactors. Hydrometallurgy, 71(3-4), 385-396. https://doi.org/10.1016/S0304-386X(03)00112-9

Díaz, J. A., Serrano, J., & Leiva, E. (2018). Bioleaching of arsenic-bearing copper ores. Minerals, 8(5), 215. https://doi.org/10.3390/min8050215

Díaz, M., & Lorenzano, P. (2017). La red teórica de la dinámica de poblaciones. Scientiae Studia, 15(2). https://doi.org/10.11606/51678-31662017000200006

Duran Flores, J. L. (2019). Factores asociados al incremento de población bacteriana que intervienen en la oxidación de sulfuros de cobre de baja ley en tanques bioreactores. http://repositorio.unjbg.edu.pe/handle/UNJBG/3723

Fowler, T. A., & Crundwell, F. K. (1998). Leaching of zinc sulfide by Thiobacillus ferrooxidans: experiments with a controlled redox potential indicate no direct bacterial mechanism. Applied and Environmental Microbiology, 64(10), 3570-3575. https://doi.org/10.1128/AEM.64.10.3570-3575.1998

Fowler, T. A., Holmes, P. R., & Crundwell, F. K. (1999). Mechanism of pyrite dissolution in the presence of Thiobacillus ferrooxidans. Applied and environmental microbiology, 65(7), 2987–2993. https://doi.org/10.1128/AEM.65.7.2987-2993.1999

Galleguillos, P. A., Hallberg, K. B., & Johnson, D. B. (2009). Microbial diversity and genetic response to stress conditions of extremophilic bacteria isolated from the Escondida copper mine. In Advanced Materials Research (Vol. 71, pp. 55-58). Trans Tech Publications Ltd. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.71-73.55

García-Algarra, J., Galeano, J., Pastor, J. M., Iriondo, J. M., & Ramasco, J. J. (2014). Rethinking the logistic approach for population dynamics of mutualistic interactions. Journal of Theoretical Biology, 363, 332–343. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2014.08.039

Ginovart, M. (2015). ¿Cómo ilustrar con la ayuda del ordenador la construcción de diferentes tipos de modelos para describir datos reales de crecimiento poblacional? http://funes.uniandes.edu.co/22215/

Gompertz, B. (1825). XXIV. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. In a letter to Francis Baily, Esq. FRS &c. Philosophical transactions of the Royal Society of London, (115), 513-583. http://www.medicine.mcgill.ca/epidemiology/hanley/c609/Material/Gompertz-1825.pdf. https://doi.org/10.1098/rstl.1825.0026

Gonzalo Fernández, A. (2019). Sistemas dinámicos discretos y la ecuación logística.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. R. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30, 535-558. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a12

Hallberg, K. B., Dopson, M., & Lindström, E. B. (1996). Reduced sulfur compound oxidation by Thiobacillus caldus. Journal of Bacteriology, 178(1), 6-11. https://doi.org/10.1128/jb.178.1.6-11.1996

Harvey, P. I., & Crundwell, F. K. (1997). Growth of Thiobacillus ferrooxidans: a novel experimental design for batch growth and bacterial leaching studies. Applied and environmental microbiology, 63(7), 2586-2592. https://doi.org/10.1128/aem.63.7.2586-2592.1997

Hedrich, S., Guézennec, A. G., Charron, M., Schippers, A., & Joulian, C. (2016). Quantitative monitoring of microbial species during bioleaching of a copper concentrate. Frontiers in microbiology, 7, 2044. https://doi.org/10.3389/fmicb.2016.02044

Ibargüen-Mondragón, E., Mármol, M., Burbano, E., Reina, A., & Pantoja, M. (2018). Modelamiento matemático de la dinámica de dos poblaciones bacterianas termófilas y amiloliticas aisladas del volcán Chiles. http://sired.udenar.edu.co/4558/

Johnson, D. B., Ghauri, M. A., & Said, M. F. (1992). Isolation and characterization of an acidophilic, heterotrophic bacterium capable of oxidizing ferrous iron. Applied and Environmental Microbiology, 58(5), 1423-1428. https://doi.org/10.1128/aem.58.5.1423-1428.1992

Li, J., Yang, H., Tong, L., & Sand, W. (2021). Some Aspects of Industrial Heap Bioleaching Technology: From Basics to Practice. *Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review*, 1-19. https://doi.org/10.1080/08827508.2021.1893720

Loi, G., Rossi, A., Trois, P., & Rossi, G. (2006). Continuous revolving barrel bioreactor tailored to the bioleaching microorganisms. Mining, Metallurgy & Exploration, 23(4), 196-202. https://doi.org/10.1007/BF03403347

Madigan, Michael T., Martinko, John M., Bender, Kelly S., Buckley, Daniel H. & Stahl, David A. (2015). Brock. Biología de los microorganismos. © 2015 PEARSON EDUCACIÓN. ISBN ebook: 9788490352809

Maluckov, B. S. (2017). The catalytic role of Acidithiobacillus Ferrooxidans for metals extraction from mining-metallurgical resource. Biodivers. Int. J, 1(3), 109-119. https://doi.org/10.15406/bij.2017.01.00017

Mandelstam, J., & McQuillen, K. (1968). Biochemistry of bacterial growth. Biochemistry of bacterial growth.

Mateos, Luis. (2016). El arsénico, ese conocido tan desconocido. Ambiociencias – Revista de Divulgación Científica. Facultad de Ciencias Biológicas y Ambientales. Universidad de León. http://dx.doi.org/10.18002/ambioc.v0i7.4916

McMeekin, T., Olley, J., Ratkowsky, D., Corkrey, R., & Ross, T. (2013). Predictive microbiology theory and application: Is it all about rates? *Food Control*, *29*(2), 290-299. https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2012.06.001

Mejía, E., Osorno, L., & Ospina, J. (2014). Microorganismos Hierro–Azufre Oxidantes Una Alternativa Biotecnológica. Revista Cintex, 19, 63-77. https://revistas.pascualbravo.edu.co/index.php/cintex/article/view/40

Miranda, Ileana. (2014). Modelación matemática de la dinámica de poblaciones: desarrollo histórico y uso práctico en Cuba. Revista de Protección Vegetal, 29(3), 157-167. http://scielo.sld.cu/pdf/rpv/v29n3/rpv01314.pdf

Mora Matus, A. (2010). Estudio de la Dinámica de Poblaciones Bacterianas en Procesos de Biolixiviación Mediante CARD-FISH. Disponible en http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/103910

Nannipieri, P., Ascher, J., Ceccherini, M. T., Landi, L., Pietramellara, G., & Renella, G. (2017). Microbial diversity and soil functions. European Journal of Soil Science, 68(1), 12-26. https://doi.org/10.1111/ejss.4_12398

Ospina, J. D., Mejía Restrepo, E., Osorno Bedoya, L., Márquez, M. A., & Morales, A. L. (2012). Biooxidación de concentrados de arsenopirita por Acidithiobacillus ferrooxidans en erlenmeyer agitados. *Revista Colombiana de Biotecnología*, *XIV*(1), 135–145. https://revistas.unal.edu.co/index.php/biotecnologia/article/view/31851#textoCompletoHTML

Parra, E., Gordillo, W., & Pinzón, W. J. (2019). Modelos de Crecimiento Poblacional: Enseñanza-Aprendizaje desde las Ecuaciones Recursivas. Formación universitaria, 12(1), 25-34. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000100025

Raheb, J., KHOSH, R. H., Azimi, A., NASERNEZHAD, B., Sanati, M. H., Naghdi, S., & Arabnezhad, M. (2007). Isolation and Characterization of a New Acidothiobacillus ferrooxidans from the Aliabad Copper Mine in Yazd Using 16s-23s Spacer Gene Nucleotide Sequencing Method. https://www.sid.ir/en/Journal/ViewPaper.aspx?ID=106011

Rawlings, D. E. (2004). Microbially assisted dissolution of minerals and its use in the mining industry. Pure Appl. Chem, 76(4), 847-859. https://doi.org/10.1351/pac200476040847

Rawlings, D. E. (2005). Characteristics and adaptability of iron-and sulfur-oxidizing microorganisms used for the recovery of metals from minerals and their concentrates. Microbial cell factories, 4(1), 1-15. https://doi.org/10.1186/1475-2859-4-13

Riquelme, F. (2015). Modelos matemáticos en dinámica de poblaciones. http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1267/1/Fonseca_Riquelme_Wilson.pdf

Rodríguez, J., & Ulloa, J. (2017). Alternativa didáctica para el estudio del modelo Gompertz. Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 2, 98-114. http://funes.uniandes.edu.co/15530/

Román-Román, P., & Torres-Ruiz, F. (2012). Modelling logistic growth by a new diffusion process: application to biological systems. Biosystems, 110(1), 9-21. https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2012.06.004

Sand, W., Gerke, T., Hallmann, R., & Schippers, A. (1995). Sulfur chemistry, biofilm, and the (in)direct attack mechanism? a critical evaluation of bacterial leaching. Applied Microbiology and Biotechnology, 43(6), 961–966. doi:10.1007/bf00166909

Schippers, A., & Sand, W. (1999). Bacterial leaching of metal sulfides proceeds by two indirect mechanisms via thiosulfate or via polysulfides and sulfur. Applied and environmental microbiology, 65(1), 319-321. https://doi.org/10.1128/AEM.65.1.319-321.1999

Silverman, M. P., & Lundgren, D. G. (1959). Studies on the chemoautotrophic iron bacterium Ferrobacillus ferrooxidans: I. An improved medium and a harvesting procedure for securing high cell yields. Journal of bacteriology, 77(5), 642.

Stucchi, L., Pastor, J. M., García-Algarra, J., & Galeano, J. (2020). A general model of population dynamics accounting for multiple kinds of interaction. Complexity, 2020. https://doi.org/10.1155/2020/7961327

Torres López, A. & Lugo Jiménez A. A. (2020). Concepción epistemológica de la matemática biológica evolutiva. Agroindustria, Sociedad y Ambiente, 2(15), 102-113. https://revistas.uclave.org/index.php/asa/article/view/2856

Ulloa, J. T., Carrillo, J. A. R., & Vera, J. L. A. (2016). Una alternativa para el estudio del modelo Gompertz. Acta Pesquera, 2(4). http://cimateuan.education/revistav2/index.php/AP/article/view/21

Vera, M., Schippers, A., & Sand, W. (2013). Progress in bioleaching: fundamentals and mechanisms of bacterial metal sulfide oxidation—part A. https://doi.org/10.1007/s00253-013-4954-2

Vidyalakshmi, R., & Sridar, R. (2007). Isolation and characterization of sulphur oxidizing bacteria. Journal of culture collections, 5(1), 73-77. http://www.nbimcc.org/JCC/2007/JCC07510/JCC07510.pdf

Watling, H. (2016). Microbiological advances in biohydrometallurgy. Minerals, 6(2), 49.

Xingyu, L., Rongbo, S., Bowei, C., Biao, W., & Jiankang, W. (2009). Bacterial community structure change during pyrite bioleaching process: effect of pH and aeration. Hydrometallurgy, 95(3-4), 267-272. https://doi.org/10.1016/j.hydromet.2008.06.008

Yin, S., Wang, L., Kabwe, E., Chen, X., Yan, R., An, K., ... & Wu, A. (2018). Copper bioleaching in China: review and prospect. Minerals, 8(2), 32. https://doi.org/10.3390/min8020032

Zepeda Álvarez, V. (2018). Biolixiviación de minerales sulfurados de cobre de baja ley. https://eprints.ucm.es/id/eprint/49979/

Zhao, H., Zhang, Y., Zhang, X., Qian, L., Sun, M., Yang, Y., ... & Qiu, G. (2019). The dissolution and passivation mechanism of chalcopyrite in bioleaching: An overview. Minerals Engineering, 136, 140-154. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2019.03.014

Zwietering, M. H., Jongenburger, I., Rombouts, F. M., & Van't Riet, K. J. A. E. M. (1990). Modeling of the bacterial growth curve. Applied and environmental microbiology, 56(6), 1875-1881. https://doi.org/10.1128/aem.56.6.1875-1881.1990

APENDICES

Apéndice A. Matriz de Consistencia

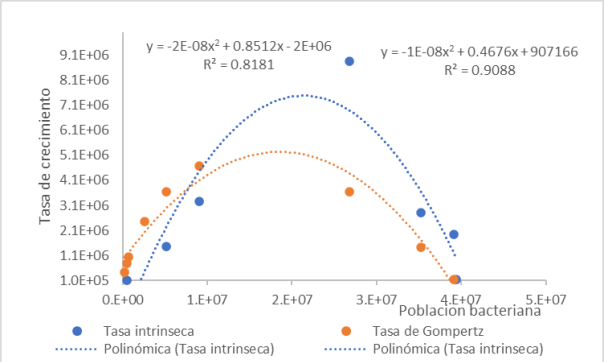
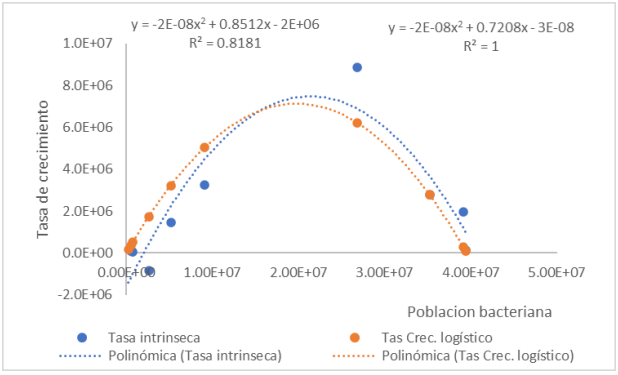
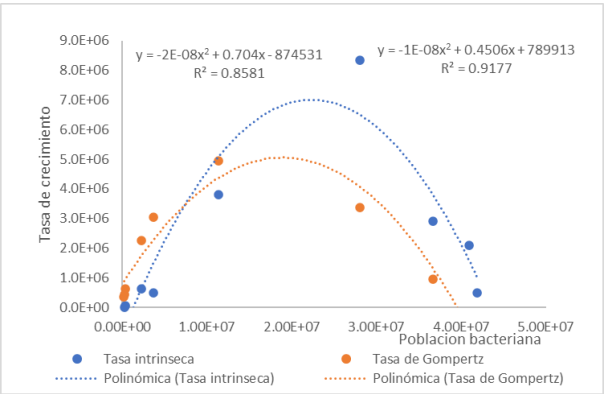
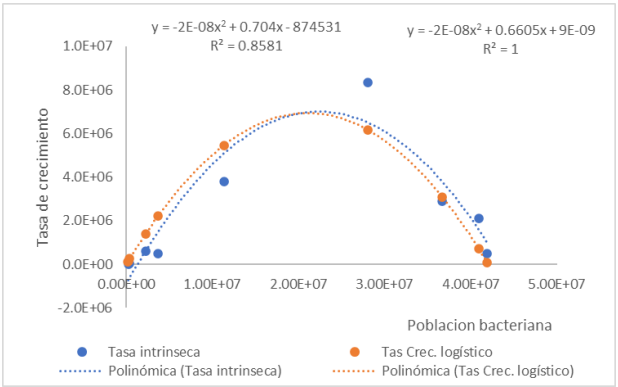
Dinámica del crecimiento poblacional de *Acidithiobacillus ferrooxidans* durante la biolixiviación de sulfuros de cobre con presencia de arsénico

PROBLEMA GENERAL	OBJETIVO GENERAL	MARCOS CONCEPTUALES	HIPÓTESIS GENERAL	VARIABLES	DIMENSIONES	Rango de Variabilidad
¿Cómo la identificación de la dinámica del crecimiento poblacional de la bacteria *Acidithibacillus ferrooxidans* permitirá evaluar la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico?	Identificar la dinámica del crecimiento poblacional de la bacteria *Acidithiobacillus ferrooxidans* durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico.	***Lixiviación bacteriana*** Es el proceso de disolución de los metales, catalizada por las enzimas producidas por las bacterias. ***Biolixiviación*** Proceso natural de disolución, ejecutado por un grupo de bacterias que tienen la habilidad de oxidar minerales sulfurados.	La identificación de la dinámica del crecimiento poblacional de la bacteria *Acidithiobacillus ferrooxidans* durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados conteniendo cobre y arsénico como elementos de análisis, permite evaluar el ciclo de crecimiento y su influencia en el proceso de recuperación del cobre.	Dinámica del crecimiento **Variables independientes:** - Densidad de pulpa - Concentración de sulfato ferroso	Porcentaje de sólidos (% W/V) Gramos x litro de solución	1, 2 y 4 % 0, 3, 6, 9. 12 y 15 g/L de $FeSO_4.7H_2O$
PROBLEMAS ESPECÍFICOS	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**	***Acidithiobacillus Ferrooxidans*** Son bacterias quimiolitoautotróficas que viven en condiciones extremas, en este caso: pH ácido y altas concentraciones de iones metales. ***Sulfuros de cobre*** Llamados como tal, a los minerales constituidos por el enlace entre el azufre y el cobre; además, pueden estar presentes el hierro, plomo, y zinc, entre otros. ***Acción bacteriana*** La oxidación, reducción u otro tipo de deterioro en la superficie del mineral, generalmente son producidas por las bacterias. ***Dinámica de crecimiento*** Es el comportamiento del incremento y decremento de la población, influenciado por las condiciones físicas y químicas del medio y descritas en el tiempo. ***Modelo logístico*** Sugiere que la población no crece ilimitadamente, sino que sigue un crecimiento hasta alcanzar un valor máximo de k; en población, carga o capacidad, simulando una curva logística a través del tiempo.	**HIPÓTESIS ESPECÍFICAS**	Biolixiviación de sulfuros **Variables dependientes:** -Disolución de cobre, hierro y arsénico -Modelo matemático -Población bacteriana	% de recuperación de Cobre % de disolución de hierro y arsénico, % Función de Gompertz Función logística. Tasa de crecimiento bacteriano Población bacteriana (Cel/mL)	Cu: 72.6, 85.6 y 89.4% Fe: 35.8, 32.4 y 28.0% As: 70.7, 64.5 y 45.0% Parámetros: *M, B y k* $4.75x10^7$, $6.40x10^7$ y $4.55x10^7$Cel/mL
▪ ¿Cuáles son los principales factores que intervienen en el crecimiento de la población bacteriana para la oxidación de sulfuros de cobre durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados?	▪ Estudiar el efecto de la densidad de pulpa y la concentración de sulfato ferroso en el crecimiento de la población bacteriana y la oxidación de sulfuros de cobre durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados.		▪ La densidad de pulpa y la concentración de sulfato ferroso, son los principales factores que determinan el crecimiento de la población bacteriana y la disolución de cobre, hierro y arsénico, durante el proceso de biolixiviación de minerales sulfurados			
▪ ¿Será posible representar la dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias *At. ferrooxidans,* generada principalmente por la densidad de pulpa y la concentración de hierro durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico?	▪ Representar la dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias *At. ferrooxidans,* generada principalmente por la densidad de pulpa y la concentración de hierro durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico mediante las ecuaciones diferenciales de los modelos de B. Gompertz y Logístico?		▪ La dinámica del crecimiento poblacional de las bacterias *At. ferrooxidans,* generada principalmente por la densidad de pulpa y la concentración de hierro durante la biolixiviación de minerales sulfurados de cobre con presencia de arsénico es representada por las ecuaciones diferenciales de los modelos de B. Gompertz y Logístico.	**Variables Influyentes:** - Temperatura (°C) - Velocidad de agitación - pH	Constante (20°C) Constante (150rpm) Constante (pH 2.0)	
▪ ¿Cómo se relaciona el incremento de la concentración de hierro en la solución de lixiviación, con el crecimiento de la población bacteriana durante la biolixiviación de minerales sulfurados?	▪ Relacionar el incremento de la concentración de hierro en la solución de lixiviación, con el crecimiento de la población bacteriana durante la biolixiviación de minerales sulfurados.		▪ El incremento de la concentración de hierro en la solución de lixiviación, está relacionado directamente con el crecimiento de la población bacteriana en la biolixiviación de minerales sulfurados.			

Apéndice B. Población Bacteriana - Primera Etapa

Las representaciones gráficas de las tasas de crecimiento son presentadas en la Tabla B1; así, también las respectivas gráficas de la dinámica del crecimiento son presentadas en la Tabla B2

Tabla B1. Gráficas de la tasa de crecimiento intrínseco.

Función Gompertz	*Función Logística*
	
0 gramos de sulfato ferroso	
	
3 gramos de sulfato ferroso	

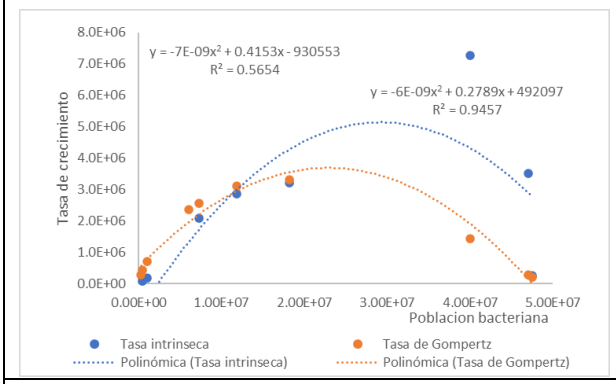
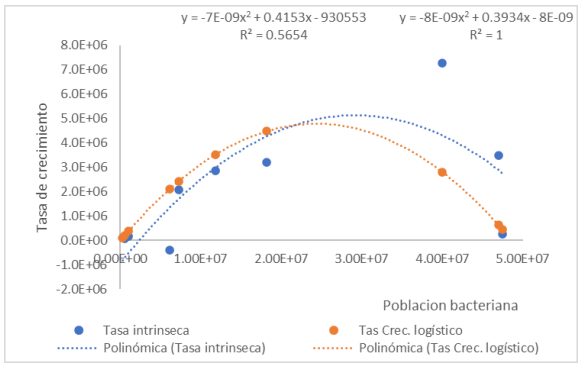
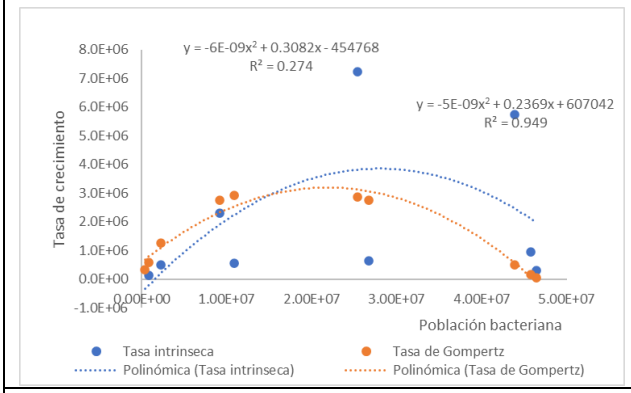
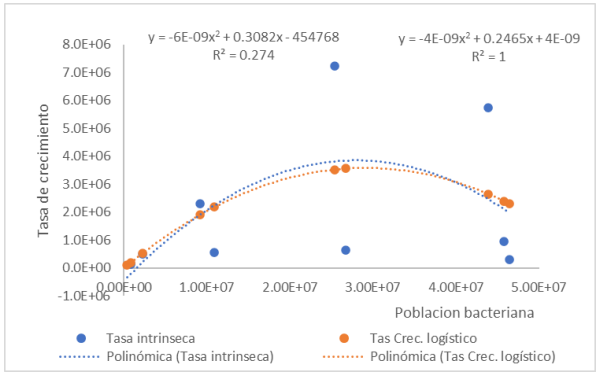
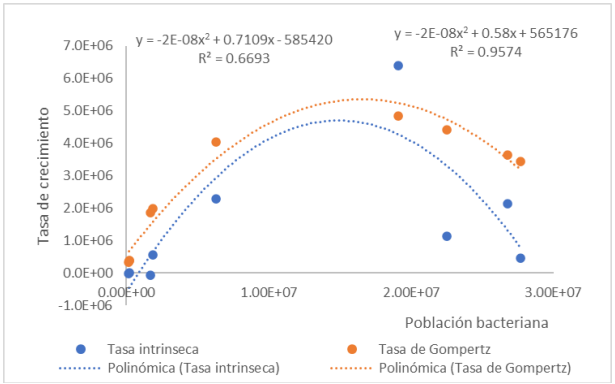
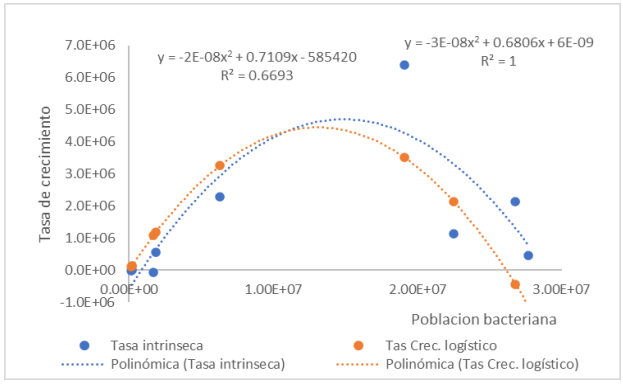
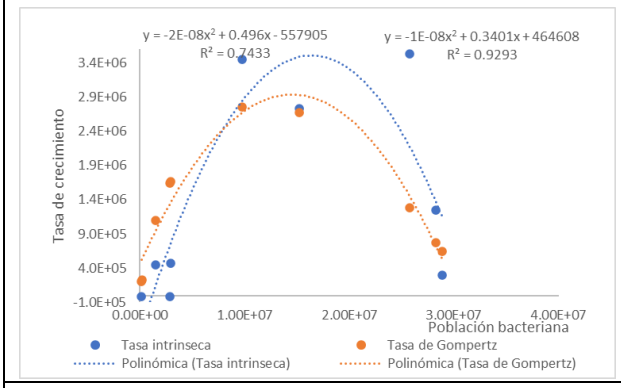
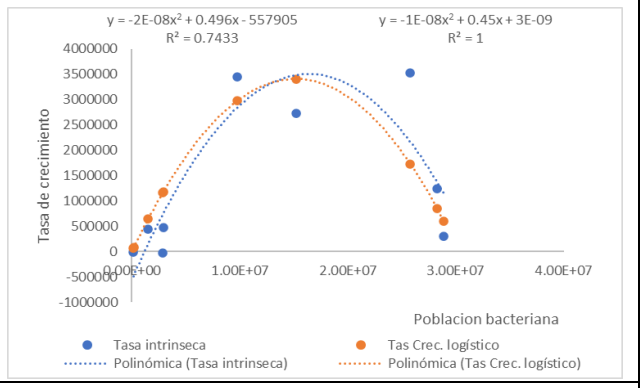
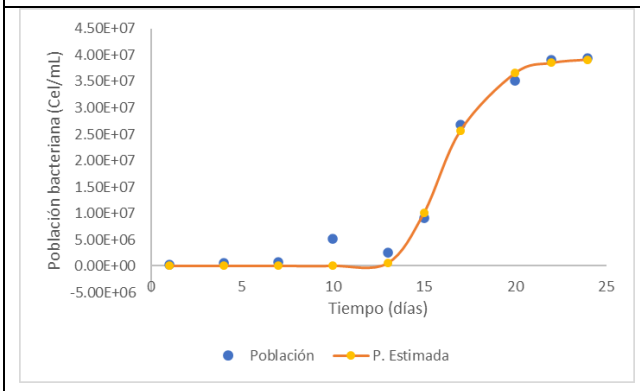
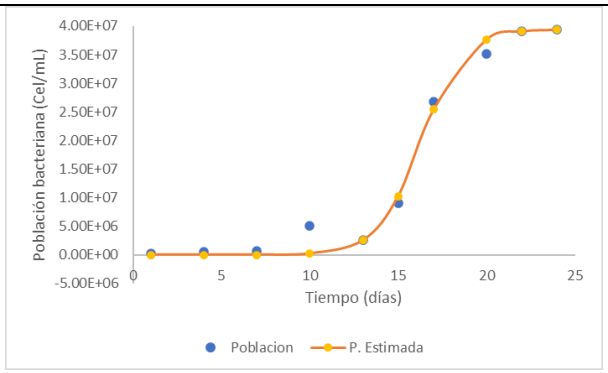
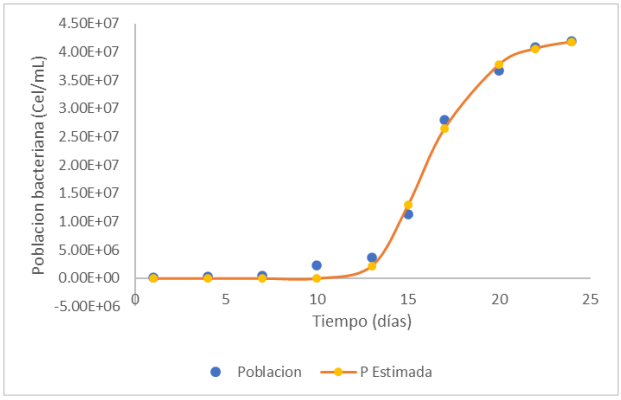
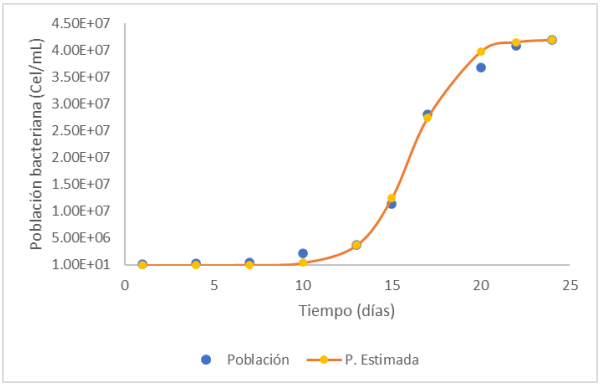
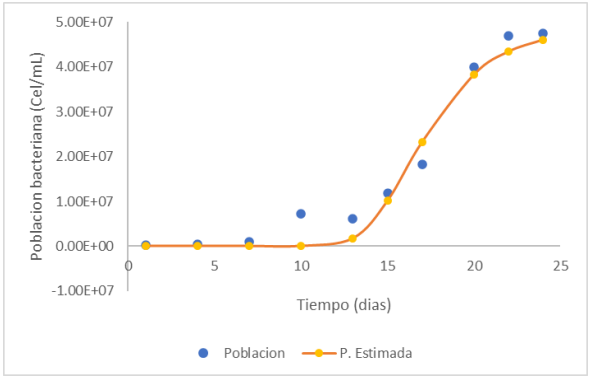
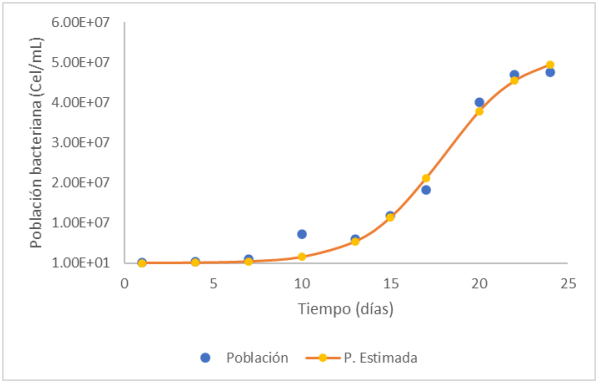
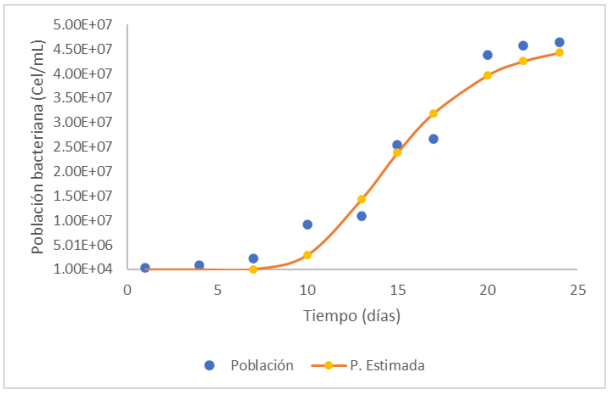
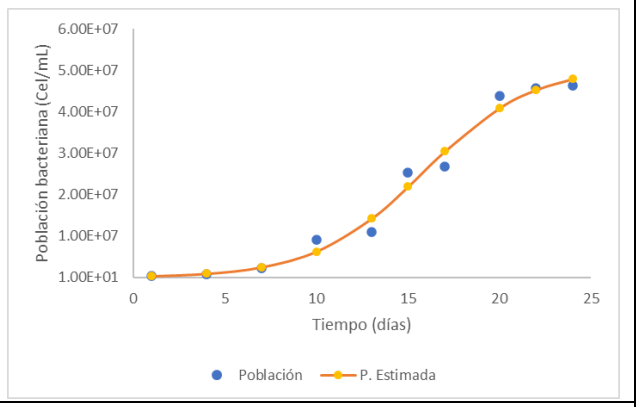
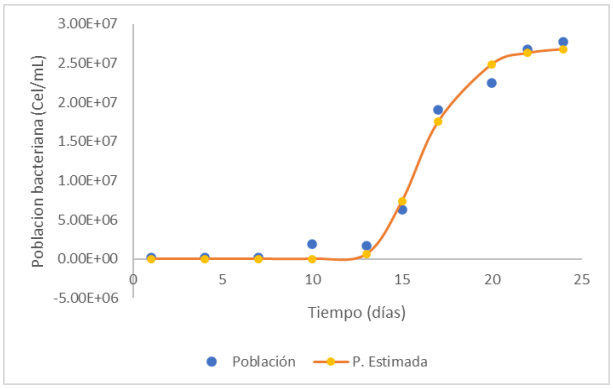
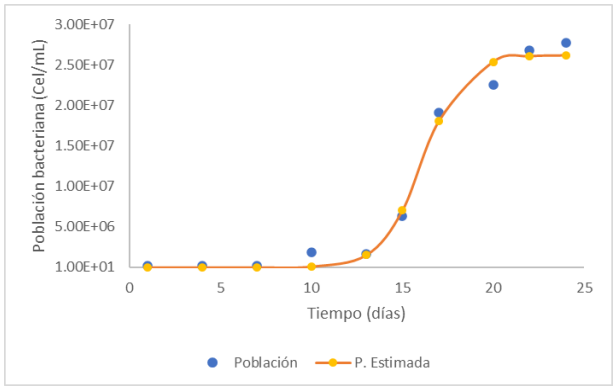
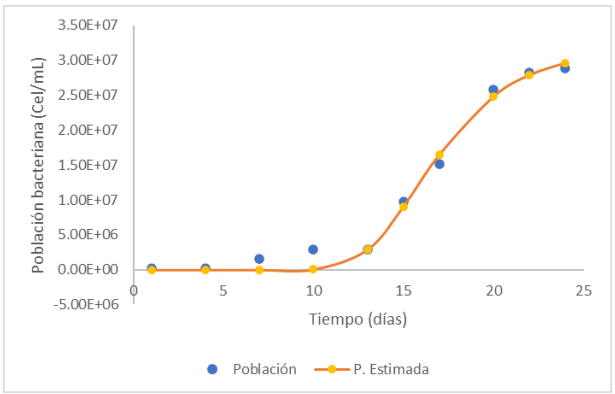
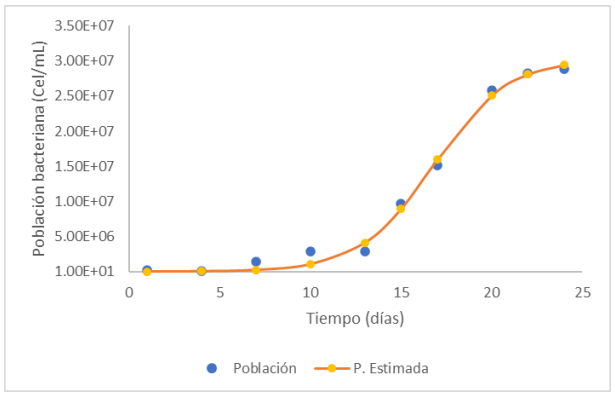
Función Gompertz	*Función Logística*
	
6 gramos de sulfato ferroso	
	
9 gramos de sulfato ferroso	
	
12 gramos de sulfato ferroso	
	
15 gramos de sulfato ferroso	

Tabla B2.

Crecimiento de población utilizándolos modelos sigmoideos.

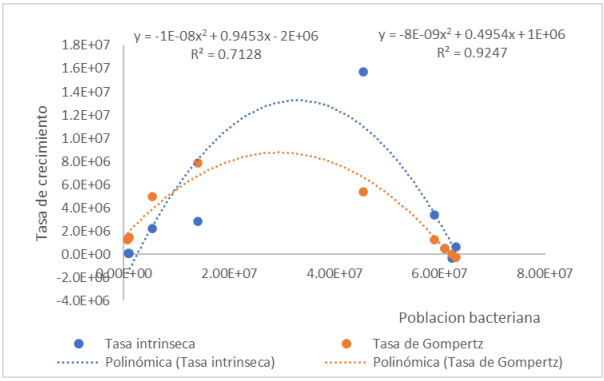
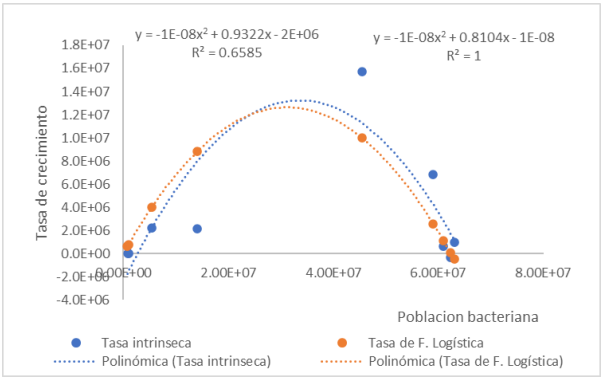
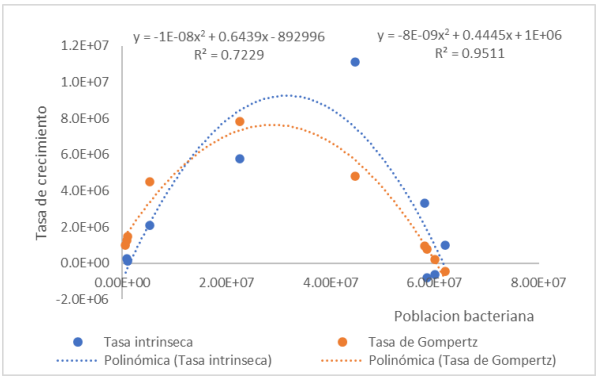
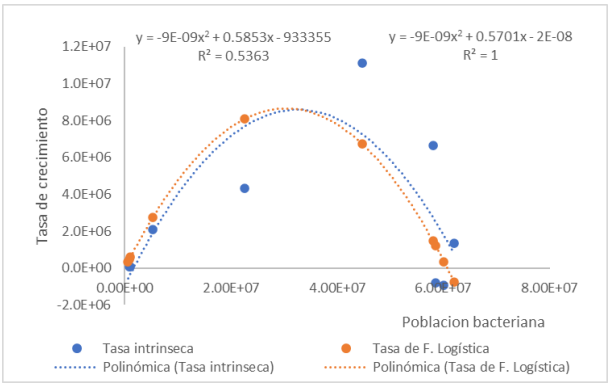
Función Gompertz	*Función Logística*
	
0 gramos de sulfato ferroso	
	
3 gramos de sulfato ferroso	
	
6 gramos de sulfato ferroso	

Función Gompertz	*Función Logística*
	
9 gramos de sulfato ferroso	
	
12 gramos de sulfato ferroso	
	
15 gramos de sulfato ferroso	

Apéndice C. Población Bacteriana - Segunda Etapa

Las representaciones gráficas de las tasas de crecimiento son presentadas en la Tabla C1; así como, la dinámica del crecimiento es presentadas en la Tabla C2

Tabla C1. Gráficas de la tasa de crecimiento intrínseco.

Función Gompertz	*Función Logística*
	
0 gramos de sulfato ferroso	
	
3 gramos de sulfato ferroso	

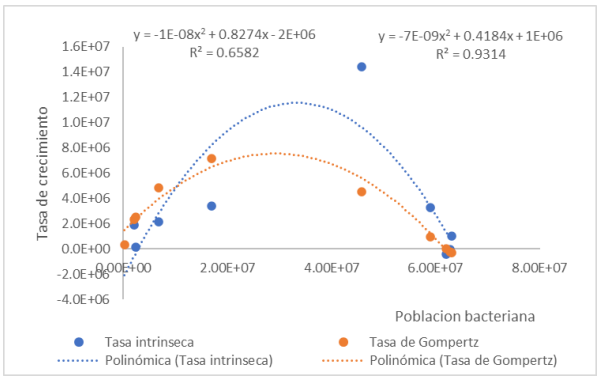
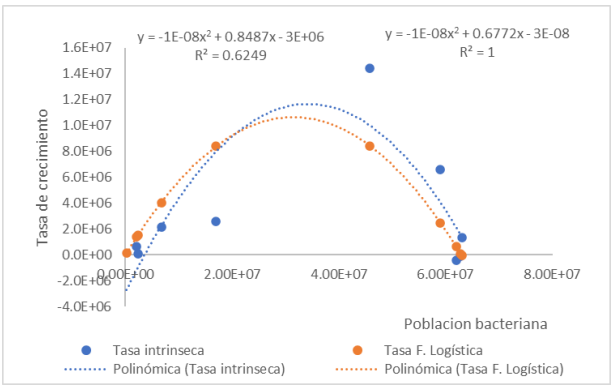
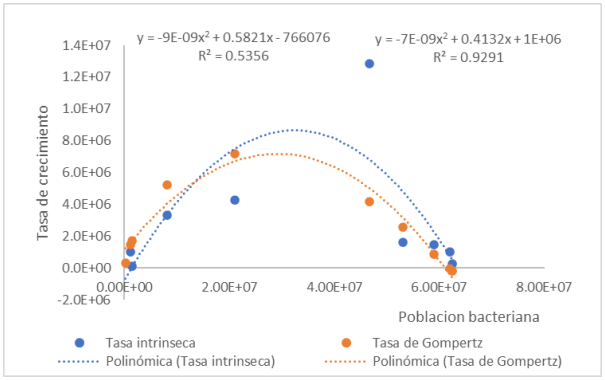
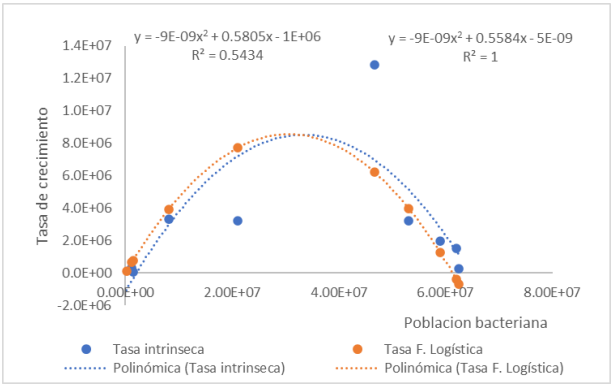
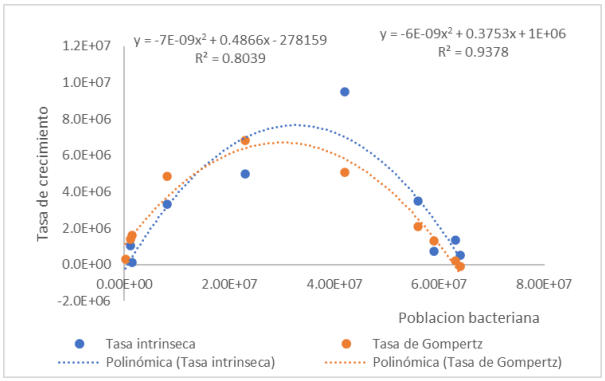
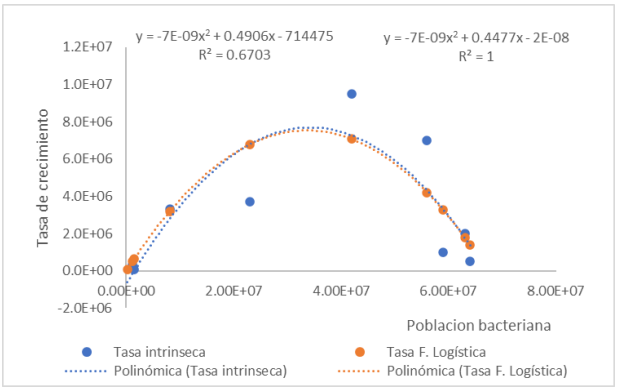
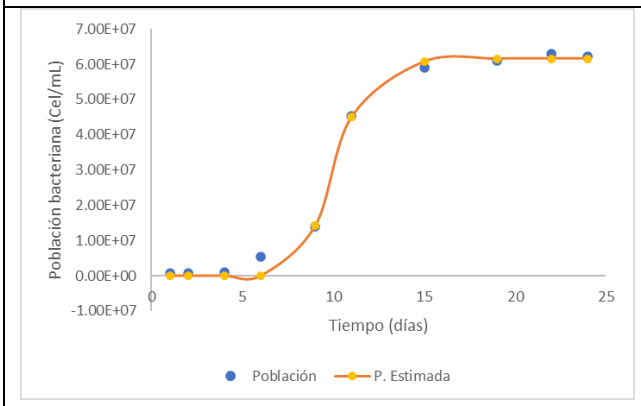
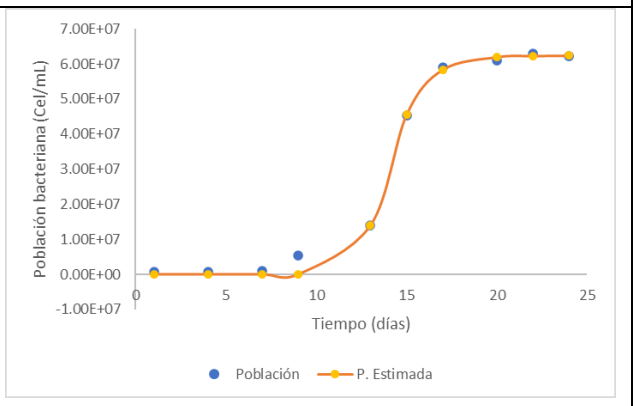
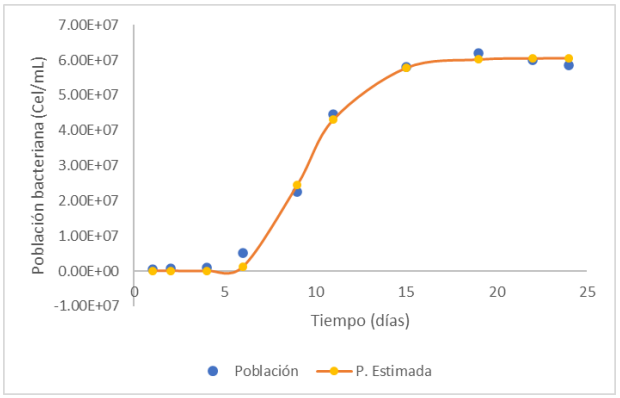
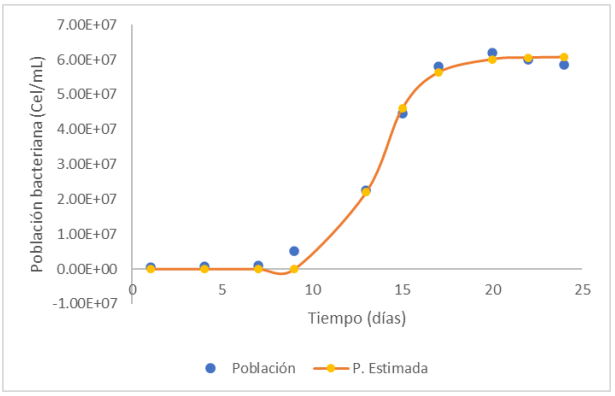
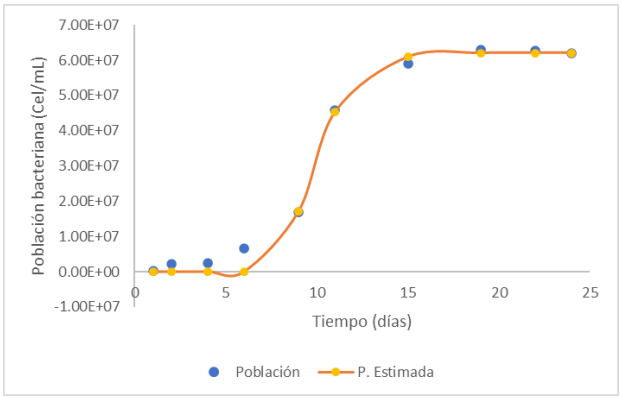
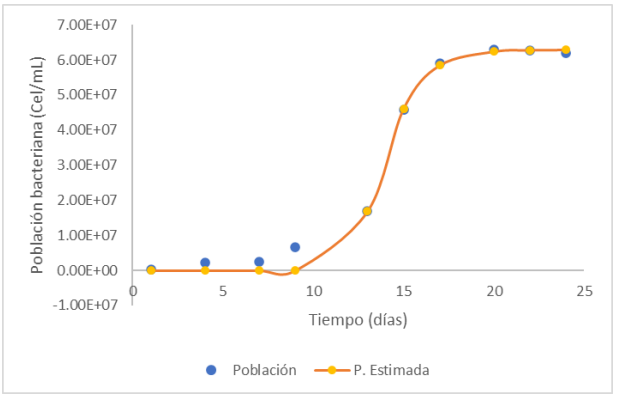
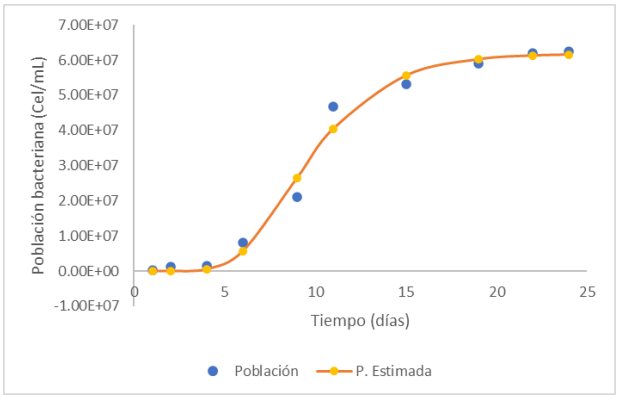
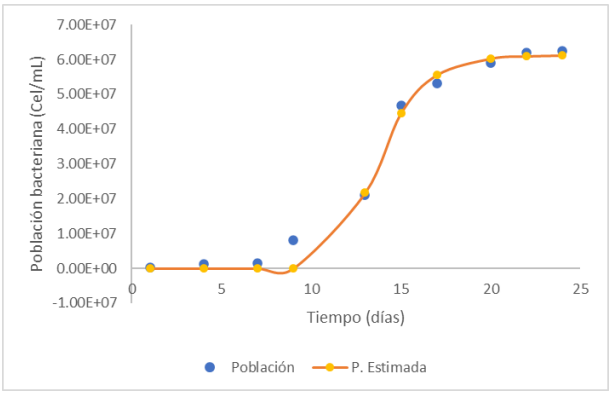
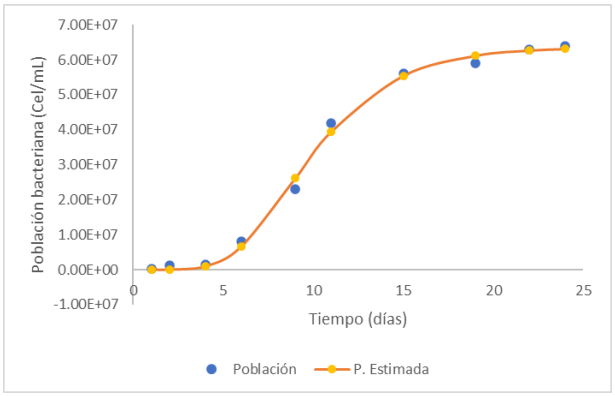
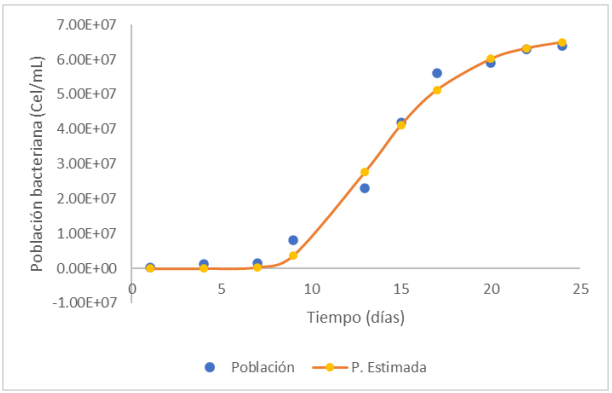
Función Gompertz	*Función Logística*
	
6 gramos de sulfato ferroso	
	
9 gramos de sulfato ferroso	
	
12 gramos de sulfato ferroso	

Tabla C2.

Crecimiento de población utilizándolos modelos sigmoideos.

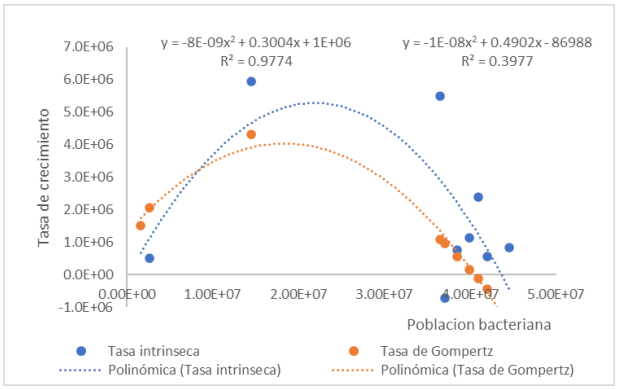
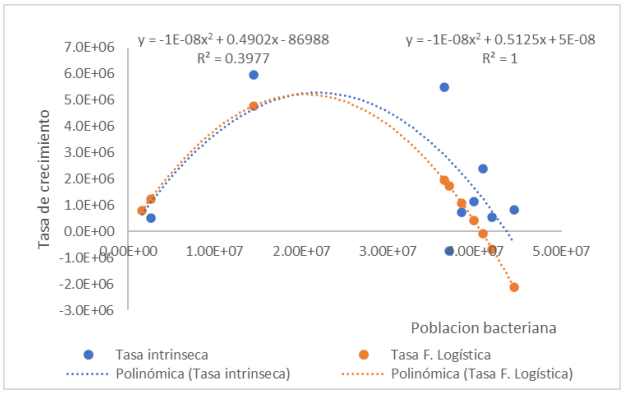
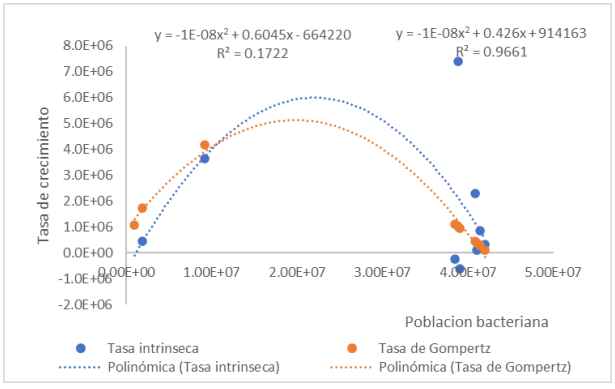
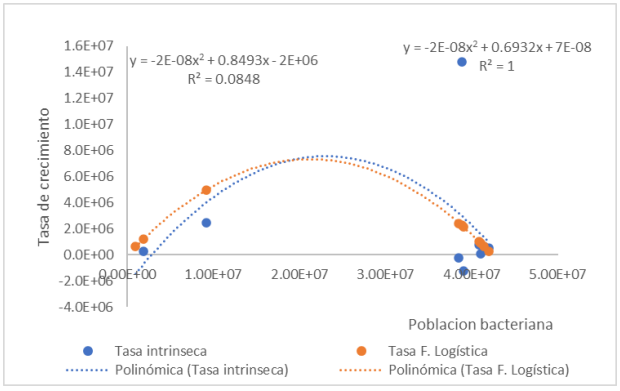
Función Gompertz	***Función Logística***
	
0 gramos de sulfato ferroso	
	
3 gramos de sulfato ferroso	
	
6 gramos de sulfato ferroso	

Función Gompertz	*Función Logística*
	
9 gramos de sulfato ferroso	
	
12 gramos de sulfato ferroso	

Apéndice D. Población Bacteriana - Tercera Etapa

Las representaciones gráficas de las tasas de crecimiento son presentadas en la Tabla D1; así, también las respectivas gráficas de la dinámica del crecimiento son presentadas en la Tabla D2

Tabla D1. Gráficas de la tasa de crecimiento intrínseco.

Función Gompertz	***Función Logística***
	
0 gramos de sulfato ferroso	
	
3 gramos de sulfato ferroso	

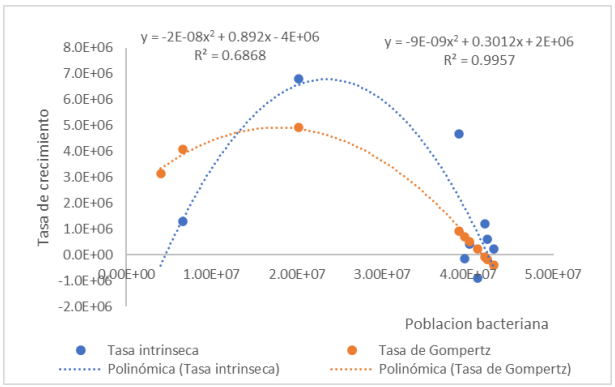
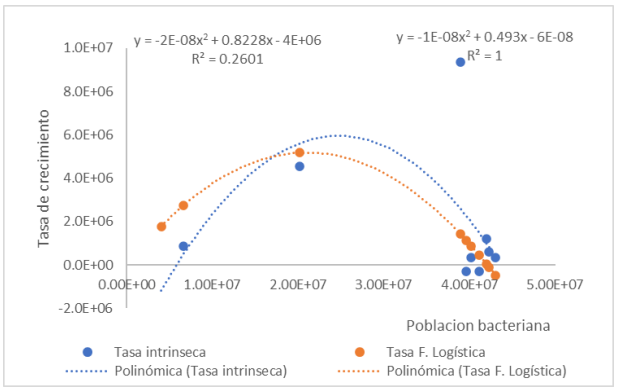
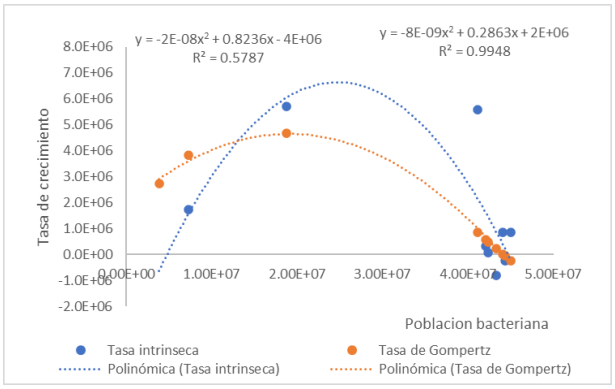
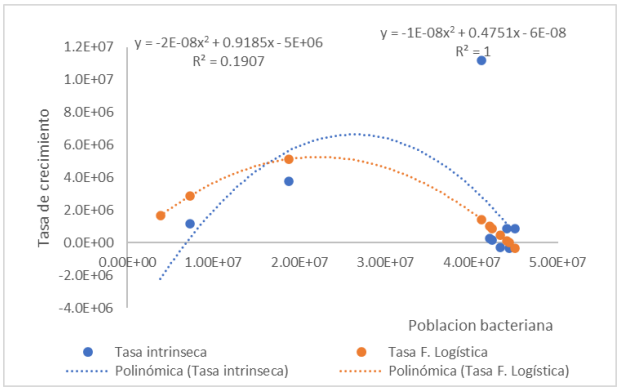
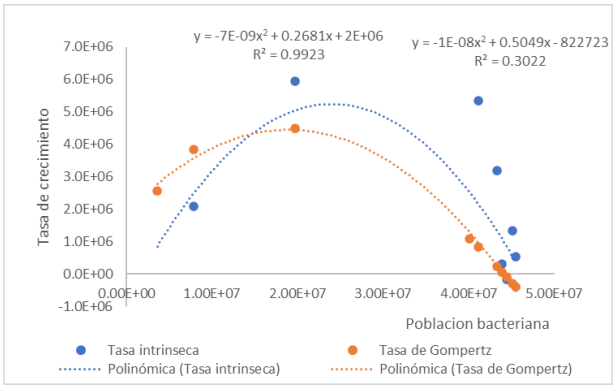
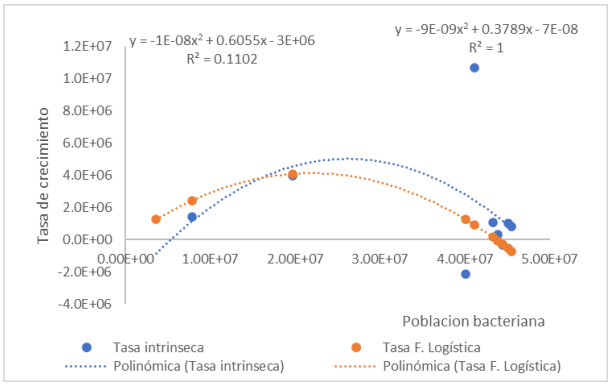
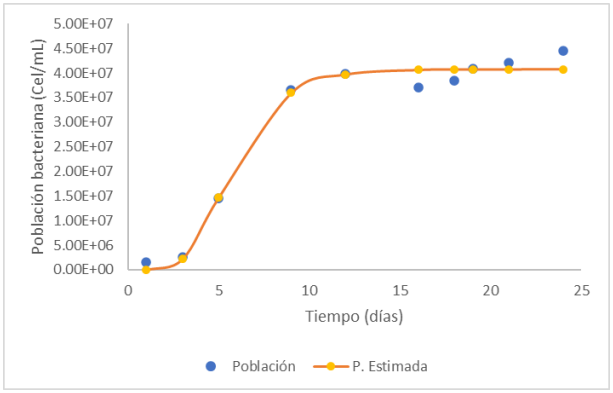
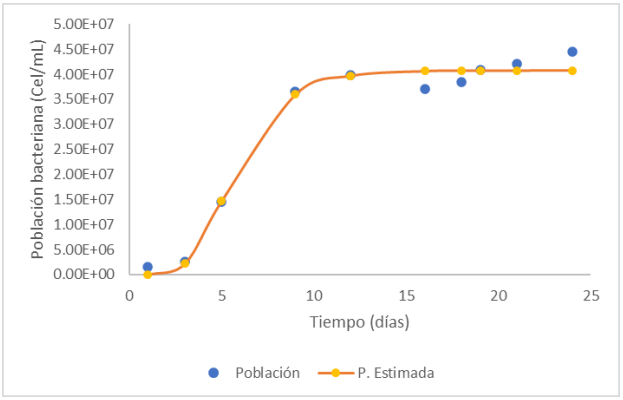
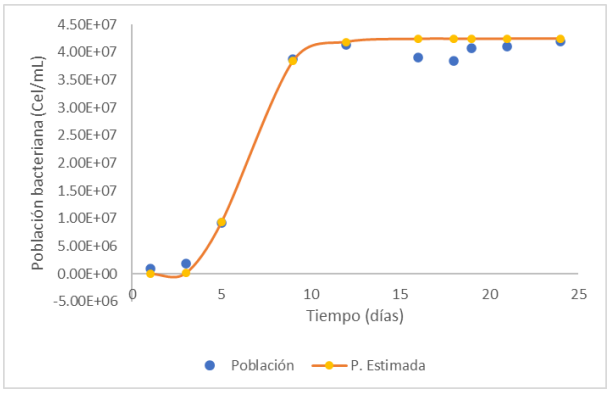
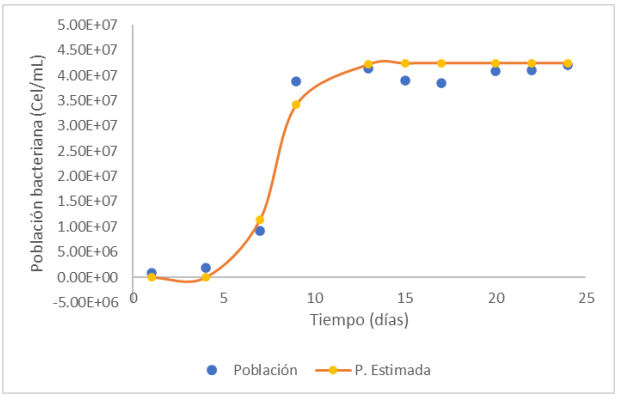
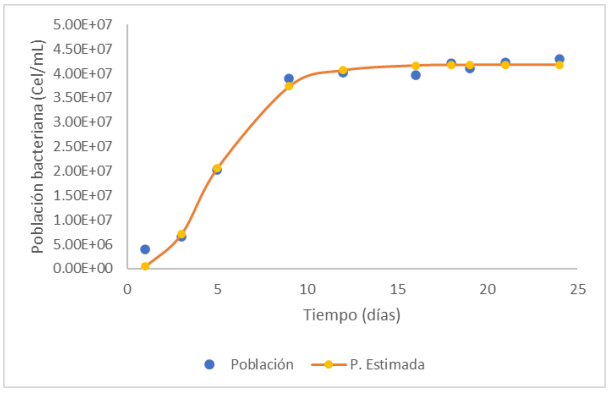
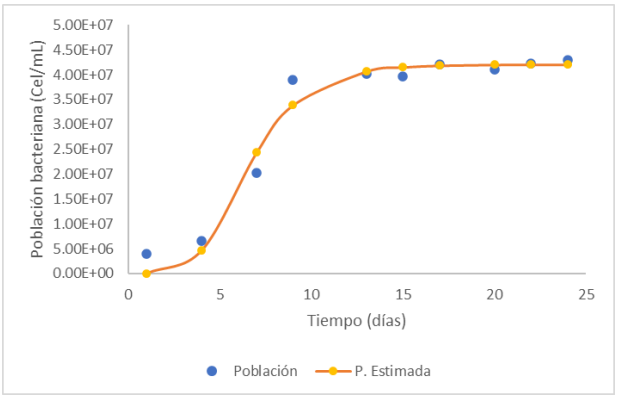
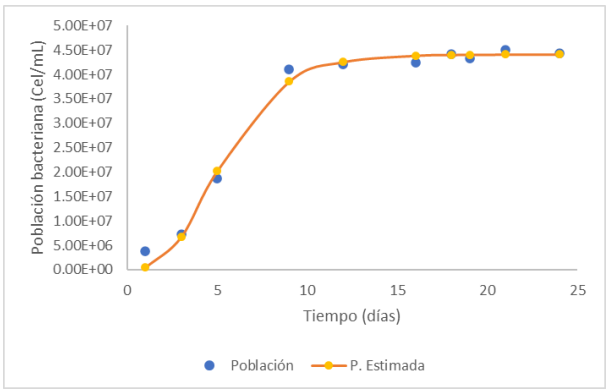
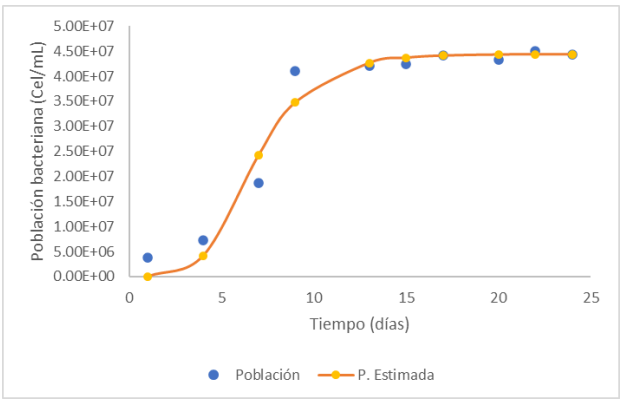
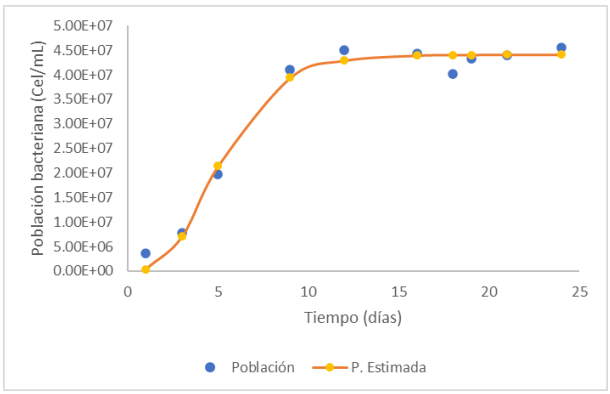
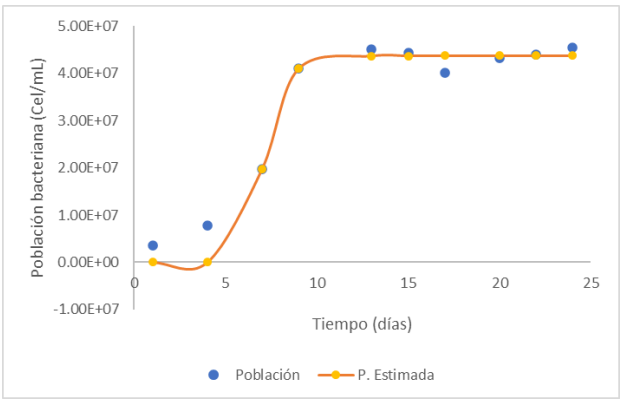
Función Gompertz	*Función Logística*
	
9 gramos de sulfato ferroso	
	
12 gramos de sulfato ferroso	
	
15 gramos de sulfato ferroso	

Tabla D2.

Crecimiento de población utilizándolos modelos sigmoideos.

Función Gompertz	*Función Logística*
	
0 gramos de sulfato ferroso	
	
3 gramos de sulfato ferroso	
	
9 gramos de sulfato ferroso	

Función Gompertz	*Función Logística*
	
12 gramos de sulfato ferroso	
	
15 gramos de sulfato ferroso	

Apéndice E. Reportes de Ensayos Químicos

Consultoría, Capacitación, Investigación y Laboratorio de Caracterización Mineralógica - Metalúrgica Aplicados a la Minería, Geotecnia y Medio Ambiente.

INFORME DE LABORATORIO

ANÁLISIS QUIMICO DE ORO, DE ABSORCION ATOMICA DE PLATA, COBRE, HIERRO, PLOMO, ZINC, ANTIMONIO Y ARSENICO (Ag, Cu, Fe, Pb, Zn, Sb, As) , ANALISIS DE GRADO DE LIBERACION Y ANALISIS MINERALOGICO POR DIFRACCIÓN DE RAYOS X (DRX) CON TUBO DE COBALTO DE UNA MUESTRA.

PARA:

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

CSM-307-2017_Rev.0
IL-OTSM-180-2017_Rev.0

Octubre, 2017.

MSc. José Andrés Yparraguirre
CIP N° 128651
Gerente de Laboratorio

Ing. Fanny Blas Rodríguez
CIP N° 84066
Gerente General

FAINGENIEROS
Av. Angélica Gamarra 1385 Urb. Santa Rosa Mz "M" Lote 03 Lima 39 – Perú T. (511) 5318475
www.faingenieros.com

Quality Analysis...

Actlabs

Innovative Technologies

INFORME DE ENSAYO

P15-042

A SOLICITUD DE:	**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS** Av. Venezuela s/n Lima Peru
POR CUENTA DE:	**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS** Av. Venezuela s/n Lima Peru
ASUNTO:	Análisis Químico
CONTACTO:	Ramirez Sr. Luis
TIPO DE MUESTRA(S):	Pulpas
CANTIDAD DE MUESTRA(S):	2
ORDEN DE SERVICIO:	VISITA DEL CLIENTE: 22/01/15
CARACTERISTICAS DE LAS MUESTRAS:	SECAS
CONDICIONES DE RECEPCION:	EN SOBRES DE PAPEL.
FECHA DE RECEPCIÓN:	viernes, 23 de enero de 2015
FECHA DE REPORTE:	viernes, 30 de enero de 2015
INSTRUCCIONES DE ENSAYO:	Code Au-EF3 Au 30gr FA-GRAV Code ME2-Ag Plata por Digestion Regia Menas Code ME2-As Arsenico por Digestion Regia Menas Code ME2-Fe Hierro por Digestion Regia Menas Code VH-ME-ICP2 Análisis por ICP-OES Agua Regia

TOTAL DE PAGINAS: 13 (Incluida esta)

Quality Analysis...

Actlabs

Innovative Technologies

RESULTADOS

	Símbolo de Analito	Au	Ag	As	Fe	Ag	Al	As	Ba
	Código de Análisis	Au-EF3	ME2	ME2	ME2	VH-ME-ICP2	VH-ME-ICP2	VH-ME-ICP2	VH-ME-ICP2
	Símbolo de Unidad	g/t	ppm	%	%	ppm	%	ppm	ppm
	Límite Detección	0.04	20	0.01	0.01	0.2	0.01	3	1
1	Mineral K	8.90	87	0.41	16.29	77.9	1.72	3876	31
2	Mineral S	13.90	616	9.37	22.69	> 100.0	0.18	> 10000	8