Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

El Teorema de Sharkovskii y sus consecuencias

TESIS
Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Elizabeth Ruth SALAZAR FLORES

ASESOR

Dr. Renato Mario BENAZIC TOME

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Salazar, E. (2025). *El Teorema de Sharkovskii y sus consecuencias*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Elizabeth Ruth Salazar Flores
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43313669
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-1533-7533
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Renato Mario Benazic Tomé
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445668
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-1897-4383
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Soledad Ramirez Carrasco
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	25795247
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43688114
Datos de investigación	
Línea de investigación	Sistemas Dinámicos

Grupo de investigación	
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2025
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10 : 35 *horas del miércoles 16 de julio del 2025, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dra. Soledad Ramírez Carrasco (PRESIDENTA), Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO) y el Dr. Renato Mario Benazic Tome (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada:* **«EL TEOREMA DE SHARKOVSKII Y SUS CONSECUENCIAS»** *presentada por la señorita Bachiller* ***Elizabeth Ruth Salazar Flores****, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, la presidenta invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación SOBRESALIENTE CON MENCIÓN *con un calificativo promedio de* DIECINUEVE (19).

A continuación, la presidenta del Jurado, Dra. Soledad Ramirez Carrasco, manifestó que la señorita Bachiller ***Elizabeth Ruth Salazar Flores****, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Siendo las 11 : 45 *horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.*

Dra. Soledad Ramírez Carrasco
Presidenta

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Miembro

Dr. Renato Mario Benazic Tome
Miembro Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. Renato Mario Benazic Tomé, en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N° 000971-2023-D-FCM/UNMSM, de la tesis cuyo título es **"EL TEOREMA DE SHARKOVSKII Y SUS CONSECUENCIAS"**, presentado por la bachiller Elizabeth Ruth Salazar Flores. para optar el título profesional de Licenciada en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 13% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciada en Matemática.

Lima, 26 de noviembre del 2025



Firma del Asesor

Nombres y Apellidos del asesor: Renato Mario Benazic Tomé

DNI: 06445668

FICHA CATALOGRÁFICA

ELIZABETH RUTH SALAZAR FLORES

El Teorema de Sharkovsky y sus consecuencias, (Lima) 2025. xiii, 53 p. 29,7 cm. (UNMSM, Licenciada, Matemática, 2025) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática. I. UNMSM/FdeCM II. Título (serie)

Agradecimiento

Agradezco profundamente a todas las personas que, de manera directa o indirecta, hicieron posible la realización de este trabajo. Expreso asimismo mi gratitud a Killa, Emilia y Orion, cuyos constantes demandas de atención y afecto acompañaron todo el proceso y contribuyeron a que la redacción se prolongara más de lo previsto.

Índice general

Resumen v

Abstract vii

Introducción vii

1. Preliminares 1

2. El Teorema de Sharkovsky 7
2.1. Teorema de Li-Yorke 8
2.2. El Teorema de Sharkovsky 12
2.2.1. El orden de Sharkovsky 14
2.2.2. El Teorema de Sharkovsky 15
2.3. Sharkovsky y algunas extensiones 20
2.3.1. En el círculo 20
2.3.2. En ecuaciones diferenciales no autónomas 21
2.3.3. En dimesiones $n \geq 2$ 22
2.3.4. En el plano complejo 22

3. El Recíproco del Teorema de Sharkovsky 25
3.1. Ejemplos 25
3.2. Teorema de Realización de Sharkovsky 31
3.2.1. Demostración alternativa 35

4. Caos 39
4.1. Tres definiciones 40
4.1.1. Caos según Devaney 40
4.1.2. Caos según Block y Coppel 43
4.1.3. Según Li-Yorke 45
4.2. Relaciones para mapas sobre intervalos 46
4.3. La función tienda truncada 47

Conclusiones **49**

Bibliografía **50**

Resumen

El Teorema de Sharkovsky establece un orden jerárquico entre los periodos de los puntos periódicos en funciones continuas definidas sobre intervalos, lo que permite predecir la existencia de ciertas órbitas a partir de otras. Este trabajo presenta una exposición detallada del teorema y su recíproco, junto con sus demostraciones y consecuencias, incluyendo su relación con distintas definiciones de caos y el Teorema de Li-Yorke. Se incluyen ejemplos concretos que ilustran estas relaciones, destacando el papel de los mapas tienda truncada.

El objetivo principal es ofrecer una presentación accesible y rigurosa del Teorema de Sharkovsky, subrayando su importancia en la dinámica unidimensional y sus implicaciones en la teoría del caos.

Palabras clave: Puntos periódicos, caos, Teorema de Sharkovsky.

Abstract

Sharkovsky's Theorem establishes a hierarchical order among the periods of periodic points for continuous functions defined on intervals. This order allows us to predict the existence of certain orbits based on others. This work provides a detailed presentation of the theorem and its converse, including their proofs and consequences, as well as the connection with different definitions of chaos and the Li-Yorke Theorem. Specific examples are included to illustrate these relationships, with a special focus on truncated tent maps.

The main goal is to offer an accessible and rigorous presentation of Sharkovsky's Theorem, highlighting its importance in one-dimensional dynamics and its implications in chaos theory

Keywords: Periodic points, chaos, Sharkovsky's Theorem.

Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos ha sido, y continúa siendo, un área de investigación fundamental en el análisis matemático. Las herramientas desarrolladas en este campo son esenciales para describir la evolución temporal de diversos procesos, tanto en la naturaleza como en aplicaciones científicas. Además, el estudio de los sistemas dinámicos ha encontrado en la caracterización de los puntos periódicos un aspecto central. Hoy en día, la existencia y distribución de estos puntos nos ofrecen información crucial sobre la estructura subyacente de cualquier sistema dinámico.

Es en este contexto donde el Teorema de Sharkovsky adquiere relevancia. Formulado en 1964 por Oleksandr Sharkovsky, este teorema estableció un orden jerárquico entre los periodos que puede tener una función continua definida sobre un intervalo. Este hallazgo, que en su momento pudo parecer una simple curiosidad matemática, resultó ser una herramienta poderosa que permite deducir la existencia de ciertos puntos periódicos a partir de otros. En consecuencia, el teorema ofrece una perspectiva estructural muy valiosa sobre la dinámica en una dimensión.

Sin embargo, la importancia del Teorema de Sharkovsky no se limita a lo que se vio en un comienzo. Con el tiempo, se hizo evidente que el teorema es una base fundamental para estudiar el caos. El caos es un fenómeno que se caracteriza por la gran sensibilidad a las condiciones iniciales y por el comportamiento complejo de las órbitas.

Curiosamente, el trabajo de Sharkovsky permaneció relativamente desconocido en Occidente durante varios años. No fue sino hasta la publicación del famoso artículo "Period Three Implies Chaos" en 1975 por Li y Yorke que se despertó el interés de la comunidad matemática. Al demostrar que la existencia de un punto de periodo tres implica un comportamiento caótico –un caso particular del Teorema de Sharkovsky–, este artículo impulsó un estudio sistemático de la teoría del caos en sistemas dinámicos unidimensionales que continúa hasta nuestros días.

Hoy en día, con la perspectiva que nos da el tiempo, resulta claro que el Teorema de Sharkovsky sentó las bases para comprender mejor los sistemas dinámicos y el fenómeno del caos. Pero, ¿qué es exactamente lo que hace a este teorema tan importante? ¿Cómo puede un simple orden entre periodos tener implicaciones tan profundas en la teoría de sistemas dinámicos? ¿Qué conexiones existen entre este teorema y el comportamiento caótico que observamos en tantos sistemas? Estas son

algunas de las preguntas que motivan este trabajo, y que iremos explorando a lo largo de los siguientes capítulos.

Para responder a estas preguntas, en este trabajo, nos proponemos desarrollar en detalle el Teorema de Sharkovsky y analizar sus consecuencias en la teoría de los sistemas dinámicos. En los siguientes capítulos, comenzaremos explorando los conceptos preliminares necesarios para comprender el teorema, como la dinámica unidimensional y los puntos periódicos. Luego, enunciaremos y demostraremos el Teorema de Sharkovsky, haciendo hincapié en su relación con el caos y otros resultados relevantes. Finalmente, analizaremos algunas extensiones del teorema y su impacto en el estudio del comportamiento dinámico en dimensiones superiores.

Este trabajo se estructura de la siguiente forma:

Capítulo 1: Se presentan los conceptos preliminares sobre espacios métricos y sistemas dinámicos discretos, necesarios para comprender los siguientes capítulos.

Capítulo 2: Se enuncian y demuestran el Teorema de Sharkovsky y el Teorema de Li-Yorke, que es un caso particular del anterior. En este capítulo, se establece el orden jerárquico entre los periodos.

Capítulo 3: Se analizan ejemplos concretos de funciones con diferentes estructuras periódicas y, a continuación, se presenta la demostración del recíproco del Teorema de Sharkovsky.

Capítulo 4: Se exploran tres definiciones clave de caos y su relación con las órbitas periódicas y, por lo tanto, con el Teorema de Sharkovsky.

Capítulo

1

Preliminares

En este capítulo, se presentan algunos conceptos fundamentales de topología y sistemas dinámicos que serán esenciales para comprender en profundidad los resultados que se desarrollarán en los siguientes capítulos, en particular, el Teorema de Sharkovsky. Estos conceptos, que pueden ser encontrados en diversos textos especializados (ver, por ejemplo, [14]), proveen el lenguaje y las herramientas necesarias para analizar la estructura y el comportamiento de los sistemas dinámicos discretos.

Definición 1.0.1. *Un espacio métrico es un par (M, d), donde M es un conjunto no vacío y $d : M \times X \to \mathbb{R}$ es una función, llamada métrica o función distancia, que satisface las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in M$:*

1. *$d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$ (no negatividad).*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ (simetría).*
3. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).*

Definición 1.0.2. *Una función $f : M \to M$ es continua en un espacio métrico (M, d) si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x \in M$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

En términos topológicos, la continuidad de f equivale equivale a que la preimagen de cualquier conjunto abierto sea un conjunto abierto. En otras palabras, una función continua preserva la "cercanía" entre puntos

Definición 1.0.3. *Dado M un espacio métrico, un sistema dinámico discreto en M es una función $F : \mathbb{Z} \times M \to M$ continua tal que:*

1. *$F(0, .) = Id$,*
2. *$F(n, F(m, x)) = F(n + m, x)$, para todo $, m, n \in \mathbb{Z}$, y todo $x \in M$.*

En este enfoque, $F(n, x)$ representa el estado del sistema después de n unidades de tiempo, partiendo del estado inicial x.

En adelante, cuando el contexto sea claro, nos referiremos al espacio métrico (M, d) simplemente como M.

Ejemplo 1.0.4. *Sea $M = \mathbb{R}$ con la métrica euclidiana $d(x, y) = |x - y|$. Definimos la función $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(n, x) = x + n.$$

Este sistema satisface las condiciones de la definición previa:

1. *$F(0, x) = x$, es decir, verifica la propiedad de identidad,*
2. *$F(n, F(m, x)) = F(n, x + m) = x + (m + n) = F(n + m, x)$, verificando la propiedad de composición.*

Dado que $F(n, x)$ es continua en ambas variables, se concluye que define un sistema dinámico discreto en $\mathbb{R}$.

Este es un ejemplo sencillo de un sistema dinámico lineal, donde la evolución del sistema es predecible y no presenta un comportamiento complejo. Es importante destacar que la ***dinámica*** de un sistema dinámico se refiere a la forma en que el sistema evoluciona con el tiempo, es decir, cómo cambian sus estados a medida que transcurren las iteraciones. La dinámica de un sistema dinámico puede ser lineal o no lineal. Los sistemas dinámicos no lineales, en cambio, pueden exhibir una gran variedad de comportamientos, incluyendo el caos.

Otra enfoque para definir un *sistema dinámico discreto* es mediante un par (M, F), o simplemente $F : M \to M$. Donde:

1. (M, d) es un espacio métrico,
2. $F : M \to M$ es una función continua.

En este caso, la dinámica del sistema está dada por las iteraciones de F, es decir,

$$F^n(x) = \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ veces}}(x), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $F^0(x) = x$ para todo $x \in M$.
2. $F^{n+m}(x) = F^n(F^m(x))$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ y $x \in M$.

Este enfoque considera la notación de $F^n(x)$ en lugar $F(n, x)$ manteniendo la consistencia con la definición de sistemas dinámicos discretos.

En adelante nos referimos al espacio métrico (M, d) simplemente como M para la fluidez de la lectura, donde se considera a d como la métrica usual.

Definición 1.0.5. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo y sea $x \in M$. Definimos los conjuntos:*

1. *La **órbita** de x bajo f es el conjunto $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.*
2. *La **órbita futura** de x se denota por $O^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$. Representa la evolución del sistema a partir del estado inicial x hacia el futuro.*
3. *La **órbita pasada** de x se denota por $O^-(x) = \{f^n(x) : n \leq 0\}$. Representa la evolución del sistema a partir del estado inicial x hacia el pasado.*

Observación: La órbita de un punto, que es la unión de su órbita futura y su órbita pasada, describe la trayectoria completa del sistema a lo largo del tiempo, tanto en el pasado como en el futuro. La órbita futura y la órbita pasada nos permiten analizar el comportamiento del sistema a partir de un estado inicial dado, lo que es fundamental para comprender su dinámica.

Definición 1.0.6. *Dada $f : M \to M$ continua. Un punto $p \in M$ es llamado punto fijo de f si $f(p) = p$.*

Los puntos fijos representan estados de equilibrio del sistema dinámico. Desde una perspectiva dinámica, son estados que permanecen invariantes bajo la acción de la función f.

Definición 1.0.7. *Un punto $p \in M$ es llamado **punto periódico** de $f : M \to M$ si existe un entero $k \geq 1$ tal que $f^k(p) = p$. El menor entero positivo k que cumple esta condición se llama el **periodo** de p. En este caso, la órbita de p está dada por el conjunto*

$$O(p) = \{p, f(p), ..., f^{k-1}(p)\}.$$

Observación: Los puntos periódicos representan estados que se repiten tras un número finito de iteraciones, generando ciclos en la dinámica del sistema. Su estudio es clave para comprender la dinámica global del sistema. El Teorema de Sharkovsky, que veremos en el siguiente capítulo, se centra en la existencia de estos ciclos.

Podemos notar que el si la periodicidad es exactamente $\mathbf{k = 1}$ estamos hablando de un punto fijo.

Definición 1.0.8. *Denotamos por* $\mathrm{Per}(f)$ *al conjunto de los puntos periódicos de f en M.*

Ejemplo 1.0.9 (Mapa tienda)**.** *Sea el mapa continuo $T : [0, 1] \to [0, 1]$ definido en el intervalo $[0, 1]$:*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & ; \quad 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

T tiene a $p = 2/7$ como punto periódico de periodo 3.

Ejemplo 1.0.10. *Consideremos la función constante* $f : [0,1] \to [0,1]$, *definida como:*

$$f(x) = c, \quad \text{con } c \in [0,1].$$

El único punto fijo de f *es* c. *Además, se cumple que* $f^n(x) = c$. *Es decir, bajo ninguna iteración de* f *mayor que 1, se obtiene órbitas de periodo superior. Esto demuestra que* f *no tiene puntos periódicos de orden superior a 1.*

A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran distintos comportamientos de los puntos periódicos en una dinámica.

Ejemplo 1.0.11. *Sea la función* $f(x) = x^3$ *definida en* $\mathbb{R}$. *Por la naturaleza de función, los puntos fijos de* f *son* $0, 1$ *y* -1 *y por tanto de periodo 1. Sin embargo,* f *no presenta puntos periodicos de otros periodos.*

Nota: En este texto, los términos "función" y "mapa" se utilizan de forma indistinta para referirse a una transformación entre espacios métricos. Si bien en algunos contextos matemáticos se puede hacer una distinción más sutil entre ambos términos, en este trabajo los consideraremos sinónimos para simplificar la notación.

Ejemplo 1.0.12. *Denotemos por* S^1 *al círculo unitario en el plano. Denotamos un punto en* S^1 *por su ángulo* $\alpha \in S^1$ *en radianes. Es decir, un punto es determinado por un ángulo de la forma* $\alpha + 2k\pi$ *para un entero* k. *Sea* $f : S^1 \to S^1$ *definida por*

$$f(\alpha) = 2\alpha, \quad \text{para todo} \alpha \in S^1.$$

Notemos que $f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha)$, *luego* f *está bien definida. Como* $f^n(\alpha) = 2^n\alpha$, *entonces* α *es periódico de periodo* n, *si y solo si,*

$$\alpha = \frac{2^n k\pi}{2^n - 1}.$$

Donde $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $0 \leq k \leq 2^n$. *En particular, un punto cuyo ángulo es* $\alpha = 0$ *es un punto fijo de* f.

El estudio de la presencia de orbitas periódicas es relevante debido a que proporciona información sobre su estructura. La densidad sugiere una dinámica compleja y posible presencia de caos. En contraste, si los puntos periódicos son aislados, la dinámica puede ser más rígida y predecible. Esta propiedad permite clasificar distintos tipos de dinámica y predecir la evolución del sistema bajo iteración.

A continuación, veremos que el mapa tienda T es un ejemplo de una dinámica relativamente sencilla que exhibe este fenómeno.

Ejemplo 1.0.13. *Sea* $T : [0,1] \to [0,1]$ *el mapa tienda del ejemplo 1.0.9 . Afirmación:* $\mathrm{Per}(T)$ *es denso en* $[0,1]$. *En efecto, observemos que el n-ésimo iterado de* T

es de la forma:

$$T^n(x) = \begin{cases} 2^n x, & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n}, \\ 2 - 2^n x, & ; \frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{2}{2^n}, \\ \vdots & ; \ \vdots \\ 2^{n-1} - 2^n x, & ; \frac{2^n - 1}{2^n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es decir, el mapa T^n es lineal por partes y divide al intervalo $[0,1]$ en 2^n en subintervalos de la forma $I_k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. Donde $T_n|_{I_k}$ es una función lineal de pendiente $\pm 2^n$. Luego, su gráfico interseca a la diagonal en un punto. Esto implica que en I_k existe un punto periódico de T. Luego, dado un intervalo I abierto que contiene un $x \in [0,1]$, existe $I_k \subset I$. Por tanto, contiene un punto periódico.

Definición 1.0.14. *Dadas dos funciones $f : M \to M$ y $g : N \to N$, donde M y N son espacios métricos. Decimos que f y g son* ***topológicamente conjugadas*** *si existe una función $h : M \to N$ continua, con inversa continua, tal que $g \circ h = h \circ f$.*

Ejemplo 1.0.15. *El mapa cuadrático $q(x) = 2x^2 - 1$ y el mapa logítico $F_4(x) = 4x(1-x)$ son topológicamente conjugadas en $[0,1]$. En efecto, la función $\tilde{h} = \frac{1}{2}(1-t)$, es continua y tiene inversa continua. Además, $\tilde{h}$ es una conjugación topológica entre $q(x)$ y $F_4(x)$. En efecto,*

$$\begin{aligned} F_4 \circ \tilde{h}(x) &= 4(\frac{1}{2}(1-x))(1 - \frac{1}{2}(1-x)) \\ &= 1 - x^2 \\ &= \frac{1}{2}(2 - 2x^2) \\ &= \frac{1}{2}(1 - (2x^2 - 1)) \\ &= \tilde{h} \circ q(x). \end{aligned}$$

Definición 1.0.16. *Sea $X \subset M$, decimos que X es invariante por f si $f(X) \subset X$.*

Definición 1.0.17. *Dado $x \in M$, el conjunto $\omega(x,f) = \cap_{m \geq 0} \overline{\{f^n(x) : n \geq m\}}$ es llamado ω-limite de x.*

Definición 1.0.18. *Un punto $x \in M$ es llamado recurrente si $x \in \omega(x,f)$.*

El conjunto $\omega(x,f)$ es un ejemplo de conjunto invariante por f.

Definición 1.0.19. *Un punto $x \in M$ es asintóticamente periódico si existe $z \in \mathrm{Per}(f)$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(z)) = 0$.*

Definición 1.0.20. *Un punto $x \in M$ es aproximado periódicamente si para todo $\epsilon > 0$ existe $z \in \mathrm{Per}(f)$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(z)) < \epsilon$.*

Para nuestros fines consideramos $M = \mathbb{R}$ y la distancia entre dos puntos dada por $d(x, y) = |x - y|$. Enunciamos también un teorema del análisis en la recta $\mathbb{R}$ que será fundamental para el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.0.21 (Teorema de Valor intermedio)**.** *Dada una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) < c < f(b)$. Entonces existe un punto p tal que $f(p) = c$.*

Ejemplo 1.0.22. *Una rotación en el círculo es una transformación geométrica que mapea cada punto del círculo unitario a otro punto del círculo unitario al sumar un ángulo fijo.*

Formalmente, si se denota por S^1 al círculo unitario en el plano complejo, donde $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, una rotación de ángulo θ está dada por la función

$$R_\theta : S^1 \to S^1, \quad R_\theta(z) = e^{i\theta} z,$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$ es el ángulo de rotación y z es un punto en el círculo unitario.

Definición 1.0.23. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un mapa continuo, donde S^1 es el círculo unitario. El **levantamiento** de f es un mapa $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

donde la proyección $p : \mathbb{R} \to S^1$ está dada por $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$, y se cumple que:

$$p(F(x)) = f(p(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se demuestra que este levantamiento es único a menos de una constante.

Ejemplo 1.0.24. *Sea $\tau(x) = x + 2\pi\theta$ la traslación por el ángulo $2\pi\theta$. Para cada entero $k \in \mathbb{Z}$, el mapa $T_k(x) = x + \theta + k$ es un levantamiento de τ.*

Además, un levantamiento de f puede ser *caracterizado* por un número entero.

Proposición 1.0.25. *Dado un levantamiento F de f, existe un único $d = d(f) \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$F(x + 1) = F(x) + d \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

El número entero d en la proposición es llamado *grado de* f. Denotado muchas veces por $\deg(f)$, el grado de f se interpreta geométricamente como el número de veces que f recorre el círculo.

Capítulo

2

El Teorema de Sharkovsky

En 1975, Yien Li y James Yorke publicaron un artículo (ver [20]) en el que probaron que, dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con un punto de periodo 3, entonces existe un punto periódico de cualquier otro periodo. En su publicación, titulada **'Period three implies chaos'**, presentan una prueba basada en el orden de $\mathbb{R}$ y las iteraciones sucesivas de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ mediante f. Además, asocian este resultado a un nuevo concepto llamado 'caos', lo cual atraería la atención de muchos matemáticos de la época.

Este resultado, cuya demostración se basa principalmente en una generalización del Teorema del valor intermedio para funciones continuas, generó un gran impacto en la comunidad matemática y motivó la búsqueda de resultados relacionados. De hecho, en 1982, Li y Yorke, en colaboración con Misiurewicz y Pianigiani (ver [21]), presentaron una generalización más elegante, demostrando que la existencia de periodicidad impar implica caos.

Estos resultados relacionados no fueron los únicos en esta área. Sorprendentemente, el trabajo de Sharkovsky permaneció relativamente desconocido en Occidente durante varios años. Sin embargo, en una conferencia al este de Berlín, se dio a conocer que el resultado de Oleksandr Sharkovsky habia sido previamente probado en 1964 (ver [27]). Mas aún, que su trabajo era un caso particular de este. Esto era debido a que Sharkovsky había establecido un re-ordenamiento entre los números naturales, del cual hablaremos en la siguiente sección. Donde el tres tiene un papel fundamental en el orden definido por Sharkovsky.

Durante la Guerra Fría, las publicaciones científicas de la Unión Soviética enfrentaron barreras lingüísticas y políticas, lo que dificultó su difusión en el mundo occidental. El trabajo de Sharkovsky, publicado originalmente en ruso en 1964, fue uno de estos casos. Este aislamiento cultural retrasó más de una década el reconocimiento internacional de sus resultados. El trabajo de Sharkovsky comenzó a ser valorado en Occidente solo después de su encuentro con Yorke en Berlín Este. Este fenómeno, común para muchos matemáticos soviéticos, subraya la importancia del

acceso y la colaboración internacional en el avance de la ciencia. Según Burns y Hasselblatt (ver [12]), fue el mismo Sharkovsky quien los abordó y explicó su resultado a pesar de no hablar el mismo idioma. De esta forma, el trabajo de Li y Yorke no solo introdujo la idea de caos a una audiencia más amplia, sino que también dio inicio al reconocimiento del resultado de Sharkovsky diez años más tarde. Sin olvidar que también impulsó el interés en sistemas dinámicos unidimensionales en la época. En particular, la coexistencia de órbitas periódicas.

La publicación del trabajo de Sharkovsky, sumado al artículo de Li y Yorke, representó un punto de inflexión en el estudio de la dinámica unidimensional y el desarrollo de la teoría del caos. En las décadas de 1970 y 1980, numerosos matemáticos se dedicaron a expandir estos resultados, creando nuevas técnicas y demostraciones que hicieron la teoría más accesible y aplicable. Esto también condujo a un creciente interés en los sistemas dinámicos como herramientas esenciales para modelar fenómenos complejos en diversas disciplinas, desde la biología hasta la economía y la física. En particular, el Teorema de Sharkovsky se consolidó como un pilar fundamental en el estudio de sistemas no lineales, revelando la profunda conexión entre el orden y el aparente caos.

A continuación, en este capítulo, exploraremos en detalle tanto el Teorema de Li-Yorke, cuya demostración es independiente de la del Teorema de Sharkovsky, pero se apoya en el Teorema del valor intermedio, como el propio Teorema de Sharkovsky. En la primera sección presentaremos el Teorema de Li-Yorke para luego establecer el orden jerárquico de Sharkovsky y, finalmente, ofrecer una demostración rigurosa de este último.

2.1 Teorema de Li-Yorke

En esta sección presentamos la prueba del Teorema de Li y Yorke, donde las herramientas que serán de utilidad son el orden en los números reales, las iteraciones de intervalos cerrados y el ya mencionado Teorema de valor intermedio.

Lema 2.1.1. *Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si f tiene un punto de periodo $k \geq 2$. Entonces, f tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que a es un punto de periodo k y $f(a) > a$. Consideremos dos casos:

Caso 1: $k = 2$. Sea $b = f(a)$. Entonces, $f(b) = a < b$. Luego, $f(b) - b < 0 < f(a) - a$. Dado que la función $g(x) = f(x) - x$ es continua en el intervalo $[a, f(a)]$, el Teorema del valor intermedio garantiza la existencia de un punto $c \in [a, f(a)]$ tal que $g(c) = 0$, lo que implica que c es un punto fijo de f.

Caso 2: $k \geq 3$. Consideremos la sucesión:

$$a, f(a), f^2(a), ..., f^{k-1}(a).$$

Podemos notar que existe un elemento $b = f^m(a)$ con $m < k$ tal que $b > f(b)$. Caso contrario, no se podría volver a a al iterar por f. Aplicando nuevamente el Teorema del valor intermedio a la función $g(x) = f(x) - x$, tenemos que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, y por tanto c un punto fijo de f. □

Definición 2.1.2. *Dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sean los intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$. Decimos que I cubre J por f y lo denotamos por $I \to J$, si $J \subset f(I)$.*

Lema 2.1.3. *Dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sean los intervalos I, J tales que $I \subset J$ y $I \to J$. Entonces, existe un punto fijo c de f en I.*

Demostración. Consideremos los puntos $a \leq b \leq c \leq d$ de forma que $I = [b, c]$ y $J = [a, d]$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $f(b) \leq f(c)$. Como $f(I) \supset J$, tenemos que:

$$f(b) \leq a \leq b \leq c \leq d \leq f(c).$$

Lo que implica, $f(b) - b \leq 0 \leq f(c) - c$. De forma análoga a los lemas, consideramos la función continua $g(x) = f(x) - x$ en I. Por el Teorema de Valor Intermedio, existe un punto $c \in I$ tal que $f(c) = c$. □

Observación 2.1.4. *En particular, si I es un intervalo cerrado tal que $I \to I$ entonces existe un punto fijo de f en I.*

Lema 2.1.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, y los intervalos cerrados J y L tal que $f(J) \supset L$. Entonces, existe un subintervalo cerrado $J_0 \subset J$ tal que $f(J_0) = L$.*

Demostración. Si $L = [m, n]$, tenemos que $\{m, n\} \subset L \subset f(J)$. Entonces, existen puntos $p, q \in J$ tal que $m = f(p)$ y $n = f(q)$. Si $p < q$, definimos

$$c = \text{máx}\{p \leq x \leq q; f(x) = m\} \text{ y } d = \text{mín}\{c \leq x \leq q; f(x) = n\}.$$

Si $q < p$, consideramos $c = \text{máx}\{q \leq x \leq p; f(x) = n\}$ y $d = \text{mín}\{c \leq x \leq p; f(x) = m\}$. En cualquiera de los casos, si tomamos $J_0 = [c, d]$, tenemos que $f(J_0) = L$. En efecto, como $f(J_0)$ contiene a $\{m, n\}$, tenemos que $f(J_0) \supset [m, n]$. Recíprocamente, por la definición de c y d, el intervalo $f(J_0)$ es tal que alcanza su máximo y mínimo absoluto en los extremos c y d (ver Figura 2.1). Por tanto, $f(J_0) = L$. □

Definición 2.1.6. *Dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y la sucesión de intervalos cerrados $J_0, J_1, J_2, \ldots, J_n$ tales que $J_0 \to J_1 \to J_2 \to \ldots \to J_n$. Decimos que $J_0 \to J_1 \to J_2 \to \ldots \to J_n$ es un ciclo de intervalos de f, de tamaño n, si $J_n = J_0$.*

Definición 2.1.7. *Dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y la sucesión de intervalos cerrados $J_0, J_1, J_2, \ldots, J_n$ tales que $J_0 \to J_1 \to J_2 \to \ldots \to J_n$. Decimos que $J_0 \to J_1 \to J_2 \to \ldots \to J_n$ es un ciclo de intervalos de f, de tamaño n, si $J_n = J_0$.*

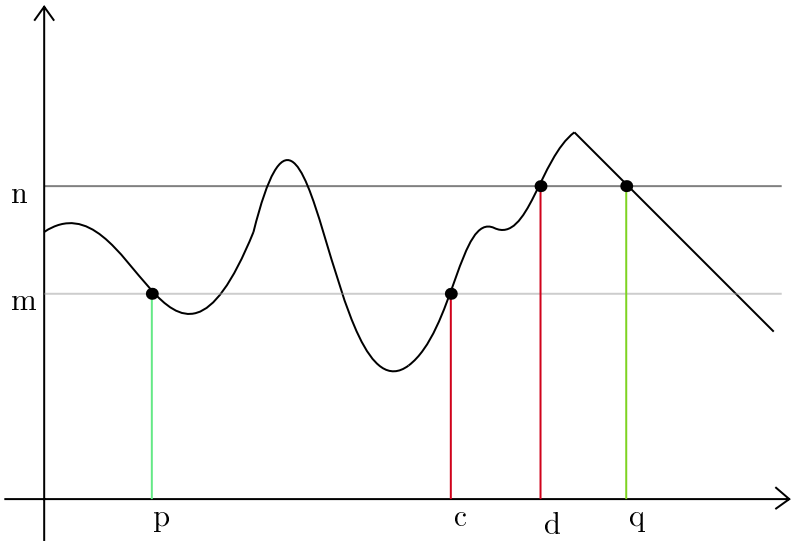


Figura 2.1: Una intervalo preimagen

Lema 2.1.8. *Dado el ciclo de intervalos* $A_0 \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{n-1} \to A_n$ *de tamaño* n*, existe un punto periódico* p *tal que* $f^i(p) \in A_i$ *para todo* $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *y* $f^n(p) = p$*.*

Demostración. Para comenzar, tomemos $J_n = A_0$. Dado que $A_{n-1} \to A_0$, el Lema 2.1.5 implica que existe un intervalo $J_{n-1} \subset A_{n-1}$ tal que $f(J_{n-1}) = A_0$. De forma análoga, si $A_{n-2} \to A_{n-1}$ existe un intervalo $B \subset A_{n-2}$ tal que $f(B) = A_{n-1} \supset J_{n-1}$. Luego, existe $J_{n-2} \subset B \subset A_{n-2}$ tal que:

$$f(J_{n-2}) = J_{n-1} \text{ y } f^2(J_{n-2}) = J_n.$$

Repitiendo este proceso para cada $0 \leq i \leq n-1$, tenemos que existe un subintervalo $J_i \subset A_i$ tal que $f(J_i) = J_{i+1}$. Por tanto, $f^i(J_0) = J_i$ para cada $0 \leq i \leq n$. En particular $f^n(J_0) = J_n = A_0 \supset J_0$. Ahora, por el Lema 2.1.3, la función continua f^n tiene un punto fijo $p \in J_0$ tal que $f^n(p) = p$. Desde que $p \in J_0$ y por la construcción de los intervalos J_i's, tenemos que $f^i(p) \in J_i$ para cada $0 \leq i \leq n-1$. □

Ahora estamos en las condiciones de enunciar y exhibir la prueba del Teorema de Li-Yorke.

Teorema 2.1.9 (Li-Yorke)**.** *Dada una función continua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Supongamos que* f *tiene un punto de periodo tres. Entonces,* f *tiene puntos periódicos de todos los periodos.*

Demostración. Sea a el punto de periodo tres de f, denotemos a los iterados por $b = f(a)$ y $c = f(b)$. Afirmamos que la prueba no depende del orden de a, b y c. En efecto, debido a que estos puntos son iterados entre si, la prueba se reduce a estudiar dos casos: $a < b < c$ o $a < c < b$. Supongamos entonces que $a < b < c$. Otro caso es

dado al considerar $f(a) = c$ y la prueba se realiza de forma análoga. Consideremos los intervalos cerrados:

$$I_0 = [a, b] \text{ y } I_1 = [b, c].$$

Note que por la continuidad de f: $f(I_0) \supset [b, c] = I_1$ y $f(I_1) \supset [a, c] = I_0 \cup I_1$. En particular, $I_1 \to I_1$, lo que implica (por el Lema 2.1.3) la existencia de un punto fijo en I_1, como se ilustra en la Figura 2.2.

Para probar la existencia de un punto de periodo 2, observemos que $I_0 \to I_1 \to I_0$. Entonces, el Lema 2.1.8 garantiza la existencia de un punto $x \in I_0$ tal que $f(x) \in I_1$ y $f^2(x) = x$. Por tanto, x es un punto de periodo 2 de f en I_0.

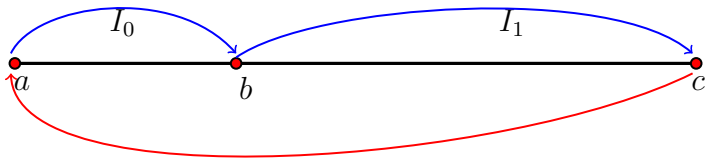


Figura 2.2: Punto de periodo 3.

Ahora, demostraremos que existe un punto de periodo n, para todo $n > 3$. Para esto, construiremos una sucesión de intervalos $A_0, \ldots, A_{n-2} \subset I_1$ similar a la que se hizo en la prueba del Lema 2.1.8. Tomemos inicialmente $A_0 = I_1$. Como $f(I_1) \supset I_1 = A_0$, existe $A_1 \subset A_0$ tal que $f(A_1) = A_0 = I_1$. De forma análoga, como $f(A_1) \supset A_1$. Existe $A_2 \subset A_1$ tal que $f(A_2) = A_1$ y por tanto $f^2(A_2) = A_0$. Así sucesivamente, para cada $n > 3$ tenemos:

$$A_{n-2} \subset A_{n-3} \text{ tal que } f(A_{n-2}) = A_{n-3} \text{ y } f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0.$$

Además $f^{n-1}(A_{n-2}) = f(I_1) \supset I_0$ y tomamos $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ tal que

$$f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0.$$

Por lo tanto, tenemos $f^n(A_{n-1}) \supset I_1$. Esto implica, por el Lema 2.1.3, la existencia de un punto fijo $p \in A_{n-1} \subset I_1$ de f^n. Notemos que, por construcción, para cualquier elemento $x \in A_{n-2}$, tenemos $f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-2}(x) \in A_0 = I_1$. Probemos que p es punto de periodo n, en $[a, c]$ respecto f, siendo n arbitrario. Es decir, no existe $m < n - 1$ tal que $f^m(p) = p$. En efecto, por la construcción dada $f(p), f^2(p), \ldots, f^{n-2}(p) \in I_1$, $f^{n-1}(p) \in I_0$ y $f^n(p) \in I_1$. Así mismo, $f^{n-1}(p)$ está en el interior de I_0. Caso contrario, $n = 2$ o $n = 3$, lo cual es imposible. Ver Figura 2.3. Esto implica que si $m < n$, los iterados $f^m(p) \neq p$. Por lo tanto, p es punto de periodo n.

□

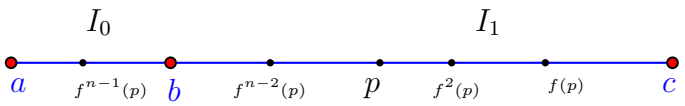


Figura 2.3: Punto de periodo n.

Ejemplo 2.1.10. *Consideremos la mapa continuo definido por*

$$\phi(x) = \begin{cases} x + 1/2 & ; \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ \\ 2 - 2x & ; \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En la Figura 2.4, podemos observar que $\phi(0) = 1/2$, $\phi^2(0) = \phi(1/2) = 1$ *y* $\phi^3(0) = \phi^2(1/2) = \phi(1) = 0$. *Por lo tanto, 0 es un punto de periodo 3, y el Teorema de Li-Yorke implica que* ϕ *tiene puntos periódicos de todos los periodos en el intervalo* $[0, 1]$. *Observe que* ϕ *es un mapa simple, sin embargo, exhibe el complicado fenómeno de tener puntos periódicos de todos los órdenes.*

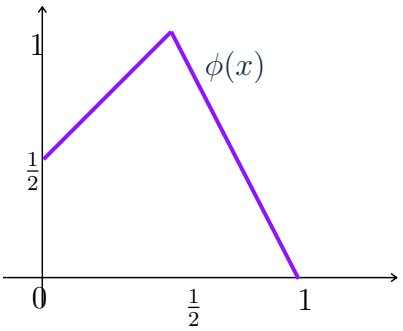


Figura 2.4: Ejemplo Li-Yorke.

2.2 El Teorema de Sharkovsky

Durante los años 1964 y 1965 el matemático ucraniano Alexander Sharkovsky obtuvo varios resultados en dinámica unidimensional (ver [27], [28]). Su trabajo más conocido aborda la siguiente pregunta fundamental: si una función continua f posee un punto de periodo m, ¿qué otros periodos deben existir necesariamente para f? Este resultado permaneció desconocido hasta que el trabajo de Li y Yorke impulsó una exploración más profunda del teorema de Sharkovsky. Tras lo que, para responder a dicha interrogante Sharkovsky tuvo antes que establecer un nuevo ordenamiento de los números naturales:

$$3, 5, 7, 9 \ldots, 3 \cdot 2, 5 \cdot 2, 7 \cdot 2, \ldots, 3 \cdot 2^2, 5 \cdot 2^2, 7 \cdot 2^2 \ldots, 2^3, 2^2, 2, 1.$$

Con este ordenamiento, el resultado más conocido de Sharkovsky establece que, si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un punto de periodo m, entonces también posee puntos de periodo n, para todo n que es precedido por m en orden mencionado. Implicando así, el Teorema de Li-Yorke para el caso $n = 3$. Además, en su publicación original, Sharkovsky no solo demostró este resultado, conocido como Sharkovsky Forcing Theorem, sino que también demostró la recíproca, la cual fue llamada en algunos artículos como Sharkovsky Realization Theorem.

Cabe mencionar que el teorema de Sharkovsky fue precedido por diversos resultados relacionados. Entre estos está el de Coppel en el año 1950 (ver [13]), que establece que todo punto converge a un punto fijo al ser iterado por un mapa continuo en un intervalo cerrado, si el mapa no tiene puntos periódicos de periodo dos.

Tras la divulgación del trabajo de Sharkovsky, que originalmente fue publicado en ruso y, por lo tanto, era de difícil acceso, su demostración fue calificada como extensa y compleja. Esto incentivó el desarrollo de pruebas alternativas más simples. Los primeros intentos de demostrar la condición suficiente fueron presentadas por Štefan en 1977 (ver [29]) y D. Straffin en 1978 (ver [30]). El método de esta última fue interesante por asociar conceptos de ciclos y grafos. Sin embargo, este presentaba algunas deficiencias. Gracias a estas ideas, Hu y Morris pudieron completar la prueba de la condición suficiente y, además, presentaron una prueba de la parte necesaria en 1981 (ver [19]). Poco después surgió una prueba, conocida como la estándar, presentada por Block, Guckenheimer, Misiurewicz and Young en 1980 (ver [7]). Otras demostraciones destacables son las de Burkart ([10]), Alsedá et al (ver [1]), Nitecki (ver [26]), entre otros.

En 2006, Bau-Sen Du presentó una demostración que calificó como "simple" (ver [16]), y en 2007 publicó una recopilación de demostraciones simples hasta ese entonces (ver [15]). Este motivaría posteriormente a que Burns y Hasselblatt´´ presenten en 2011 una prueba a la cual llaman "natural y cuyo nuevo ingrediente a ser usado son las sucesiones de Štefan (ver [11]).

La cantidad de trabajos dedicados a probar el Teorema de Sharkovsky impulsó el surgimiento de recopilaciones de pruebas como también lo fue establecer precisiones históricas, aplicaciones y la evolución del propio teorema (ver [15], [25] y [9]). Las colaboraciones posteriores fueron clave para su aceptación global: los matemáticos occidentales no solo refinaron las pruebas existentes, sino que también extendieron sus aplicaciones a campos como la dinámica poblacional y los sistemas no lineales. Estas contribuciones impulsaron la unificación del conocimiento en la teoría de sistemas dinámicos, consolidando el teorema como un resultado central en la teoría del caos. Además, la capacidad del teorema para describir patrones de periodicidad y la transición al caos atrajo la atención de investigadores de diversas disciplinas, convirtiéndolo en una herramienta esencial para modelar fenómenos complejos. En resumen, el Teorema de Sharkovsky no solo es una pieza fundamental en la dinámica unidimensional, sino que también ofrece una perspectiva única sobre la relación

entre los periodos de puntos periódicos, influyendo así en el desarrollo de las teorías modernas del caos.

En este capítulo presentaremos la prueba de Devaney (ver [14]), que se basa en la demostración de Block, Guckenheimer y Misiurewicz (1980, ver [7]). Esta demostración se popularizó gracias al libro An Introduction to Chaotic Dynamical Systems de Devaney (1989, [14]), y es considerada como la prueba estándar del Teorema de Sharkovsky.

2.2.1 El orden de Sharkovsky

Cuando se estudian los iterados de una función continua en un intervalo, se observa que la existencia de puntos periódicos de ciertas características puede implicar la existencia de otra clase de puntos periódicos . En el caso de las potencias de 2, si una función tiene un punto periódico con periodo 2^n, esta propiedad "fuerza" la existencia de puntos periódicos con periodos de la forma $2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 2, 1$.

Esto se debe a que, en una orbita con 2^n elementos, las iteraciones de la función dividen en sub-orbitas más pequeñas, correspondientes a las potencias decrecientes de 2. Por ejemplo:

- Si una función tiene un punto de periodo $2^3 = 8$, también tiene puntos de periodo 4, 2, y 1.

Por lo tanto, es natural ordenar las potencias de 2 en sentido descendente:

$$\ldots 2^n, 2^{n-1}, \ldots, 2^2, 2, 1,$$

Este orden refleja como la estructura de los puntos periódicos de mayor periodo "contiene" la de los periodos más pequeños.

Con esta idea es que Sharkovsky clasifica los números de acuerdo con la existencia de órbitas periódicas en funciones específicas, pero sin pretender abarcar las relaciones posibles entre números naturales. De esta forma, el orden está enfocado en describir patrones dinámicos y no en ordenar todos los números en términos absolutos.

El orden de Sharkovsky definido en el conjunto de los números naturales, es dado por:

$$\begin{gathered}
3 \prec 5 \prec 7 \prec \ldots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \ldots \\
\ldots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec \ldots \\
\prec 2^n \cdot 3 \prec 2^n \cdot 5 \prec 2^n \cdot 7 \prec \ldots \prec 2^{n+1} \cdot 3 \prec 2^{n+1} \cdot 5 \prec 2^{n+1} \cdot 7 \prec \ldots \\
\ldots \prec 2^k \prec 2^{k-1} \prec \ldots \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.
\end{gathered}$$

Es decir, los números en el orden de Sharkovsky comienzan con los impares: $3, 5, 7, \ldots$, seguidos de sus múltiplos por las potencias de 2: $2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 5, \ldots$; a

seguir los impares multiplicados por 2^2, 2^3, así sucesivamente. Finalizando con las potencias de 2 de mayor orden en orden decreciente, hasta el 1. Cubriendo así el conjunto de los números naturales en su totalidad. Podemos ver también que en este orden, 3 es el "menor" y el "máximo" es 1.

Una característica principal de este orden, que podemos notar, es que todo número distinto de una potencia de 2, es seguido por infinitos números naturales. En contraste, las potencias de 2 solo son seguidas por una cantidad finita de la misma forma. En particular, los números impares inducen la existencia de órbitas pares.

2.2.2 El Teorema de Sharkovsky

Teorema 2.2.1 (Sharkovsky)**.** *Si una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un punto periódico de periodo n, entonces tiene puntos de periodo k, para cada k tal que $n \prec k$.*

Observación:

1. Si n y k son enteros positivos tal que $n \prec k$ en el orden de Sharkovsky, se dice que la periodicidad n fuerza la existencia de periodo k. El Teorema 2.2.1 es también conocido como The Forcing Theorem

2. Dado que periodo 3 es el menor en el orden de Sharkovsky, su existencia implica la presencia de todos los otros periodos.

Demostración. Dado $n > 1$ la prueba será dividida en dos casos.

Caso n impar: Sin pérdida de generalidad, supongamos que f no tiene punto de periodo impar menor que n. Caso contrario, consideramos tal menor periodo. Sea x el punto de periodo n y su órbita $\mathcal{O}(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de forma que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. A partir de esto podemos notar que los puntos extremos x_1 y x_2 son tales que $f(x_n) < x_n$ y $f(x_1) > x_1$.

Denotamos ahora por $i = \text{máx}\{j;\ f(x_j) > x_j\}$ y al intervalo $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$. Ubicamos en la recta a estos elementos:

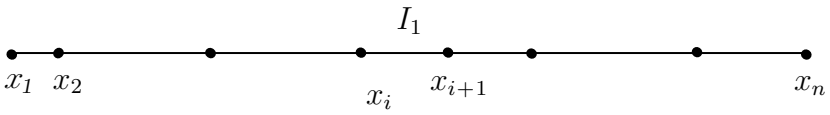


Figura 2.5: Órbita ordenada

De la definición de i podemos notar que $f(x_{i+1}) \leq x_i$ y que a su vez no puede ocurrir que $f(x_i) = x_{i+1}$ y $f(x_{i+1}) = x_i$. Si esto sucede, tendríamos que x_i es un punto de periodo 2, lo cual es absurdo. Esto implica que $f(I_1)$ contiene a I_1 y por lo menos otro intervalo de la forma $[x_j, x_{j+1}]$. Ahora, nos proponemos a construir ciclos de intervalos que generen puntos de periodo mayor que n en el sentido de Sharkovsky. Denotemos por $\mathcal{O}_2$ a la unión de intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ tal que

$I_1 \to [x_j, x_{j+1}]$. Análogamente, $\mathcal{O}_3$ la unión de intervalos de la forma $[x_k, x_{k+1}]$ que son cubiertos por algún intervalo contenido en $\mathcal{O}_2$. Así sucesivamente hasta obtener $\mathcal{O}_l$ y $\mathcal{O}_{l+1}$ con $l \geq 3$. Observe que por la construcción es posible escoger intervalos $I_l \subset \mathcal{O}_l$ tal que

$$I_1 \to I_2 \to \ldots \to I_{l-1} \to I_l \to I_{l+1}.$$

Por otro lado, la sucesión $\{\mathcal{O}_k\}_k$ es creciente debido a que O_k contiene más intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ mientras k crece. Por tanto, desde que tenemos finitos intervalos de dicha forma existe l tal que $\mathcal{O}_l = \mathcal{O}_{l+1}$, Donde $\mathcal{O}_l$ contiene necesariamente todos los intervalos I_j, con $1 \leq j \leq n$. Para verificar tal afirmación suponemos lo contrario, esto implica que x seria de periodo menor que n, lo cual es una contradicción. Podemos notar también que el intervalo I_1 puede ser cubierto por alguno de la forma $[x_j, x_{j+1}]$, sin embargo no podemos descartar que este intervalo sea exactamente I_1.

Afirmación: Existe al menos un intervalo $[x_j, x_{j+1}] \neq I_1$ en algún $\mathcal{O}_k$ tal que $f([x_j, x_{j+1}]) \supset I_1$. Para probar esta afirmación, notemos que si n es impar existen más x_j's a un lado de I_1 que de otro. Más claramente, un lado posee una cantidad impar y el otro una par. Sin perdida de generalidad supongamos que el lado a la derecha de I_1 tiene una cantidad impar de x_j's. Esto implica que existe un x_j que por f cambia de lado, es decir, $f(x_j) \leq x_i$ y por tanto $f([x_j, x_{j+1}]) \supset I_1$. Caso contrario, tendríamos un punto de periodo impar menor que n. Luego vemos que es posible obtener una sucesión de intervalos, un ciclo, de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ que verifican:

$$I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_k \to I_1.$$

Notemos que por construcción, $I_1 \neq I_2$ y que los intervalos I_j no son necesariamente tal que $I_j \subset \mathcal{O}_j$. Consideremos ahora k de forma que dicha sucesión de intervalos sea la más corta posible, notando además que esta sucesión es diferente de $I_1 \to I_1$. Afirmamos que $k = n - 1$. Para esto, suponemos que $k < n - 1$. Así siguientes sucesiones:

$$I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_k \to I_1$$

$$I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_k \to I_1 \to I_1.$$

Cuyas longitudes son k y $k+1$, respectivamente. Por el Lema 2.1.8, nos proporcionan puntos periódicos de periodo k y $k+1$ para f, respectivamente. Uno de estos puntos es necesariamente punto de periodo primo impar. Esto sucede debido a que cada iterado cae en el interior de distintos I_j's y no en alguna intersección que tiene periodo n mayor que k o $k+1$. Esto es absurdo, porque hemos supuesto que f no tiene ningún punto de periodo impar menor que n. Por otro lado, al ser esta la

sucesión más corta no es posible tener:

$$I_l \to I_j \text{ para cada } l < j. \tag{2.21}$$

Con esto podemos concluir que los iterados de x se pueden comportar de dos formas posibles. Ver Figuras 2.6 y 2.7.

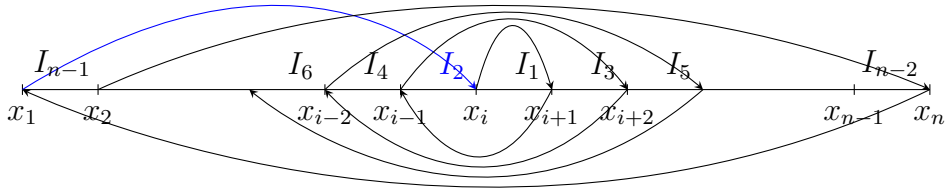


Figura 2.6: Dínamica de intervalos caso 1.

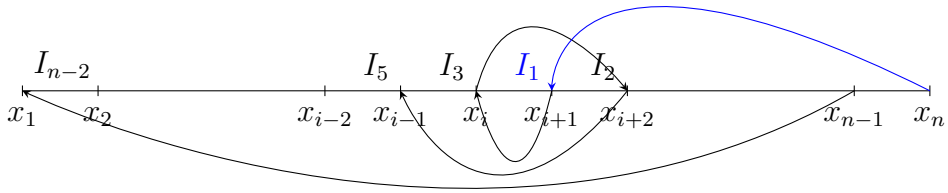
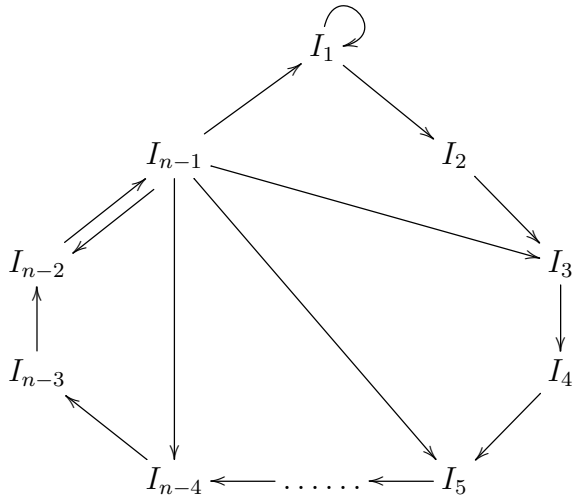


Figura 2.7: Dínamica de intervalos caso 2.

Para encontrar puntos cuyo periodo sea mayor que n, es suficiente considerar la secuencia de intervalos tan grandes como necesitemos:

$$I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_{n-1} \to I_1 \to I_1 \to \ldots \to I_1.$$

Finalmente, para encontrar puntos con periodo par menor que n, primero observamos que a partir del gráfico descrito en la Figura 2.6 (o 2.7), podemos obtener el siguiente diagrama:



Así, este último diagrama nos permite construir sucesiones de intervalos de la forma:

$$I_{n-2} \to I_{n-1} \to I_{n-2} \text{ y } I_{n-1} \to I_{n-4} \to I_{n-3} \to I_{n-2} \to I_{n-1}.$$

Los cuales generan puntos de periodo 2 y 4, respectivamente. De forma similar se pueden obtener los demás periodos de orden par inferiores a n. Con esto terminamos de probar el teorema cuando n es impar.

Segundo Caso: n es par. Como en el caso anterior consideremos la órbita de perio n: $\mathcal{O}(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de forma que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que no hay puntos periódicos de periodo impar menor que n. De hecho, si existiera tal punto, estaríamos en el caso anterior y no habría nada más que demostrar. Afirmamos que existe un punto de periodo dos en el interior de algún intervalo I_k. En efecto, notemos primero que existen tres posibilidades en el cambio de posición de los x_i al aplicar f, respecto el intervalo I_1.

i. Ningún x_j cambia de lado.

ii. Existen x_j´s que cambian de lado y otros que no.

iii. Todos los x_j´s cambian de lado.

Caso [i]: Si ninguno de los x_j cambia de lado, en el conjunto $\{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$ encontraremos un punto de periodo menor o igual que $i-1$. Lo cual es es un absurdo.
Caso [ii]: Si existe un x_j que cambia de lado, de forma análoga al caso n impar, existe un intervalo $I_k \to I_1$ y

$$I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_k \to I_1.$$

Más aún, el intervalo I_k cubre a $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$. Obteniendo así el ciclo $I_{k-1} \to I_k \to I_{k-1}$ que genera un punto de periodo dos.

Caso [iii]: Si suponemos que todos los puntos cambian de lado, $f(\{x_1, x_2, \ldots, x_i\}) \subset \{x_{i+1}, \ldots, x_n\}$.

Si tomamos $t \in [x_{i+1}, x_n]$, entonces $t \in [x_j, x_{j+1}]$. Como todos los x_j cambian de lado, existen $x_{k_j}, x_{k_{j+1}} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ tales que $f(x_{k_j}) = x_j$ y $f(x_{k_{j+1}}) = x_{j+1}$. Luego, $t \in [x_j, x_{j+1}] \subset f([x_{k_j}, x_{k_{j+1}}]) \subset f([x_1, x_i])$. Por tanto,

$$[x_{i+1}, x_n] \subset f([x_1, x_i]).$$

Análogamente, podemos obtener $[x_1, x_i] \subset f([x_{i+1}, x_n])$. Lo que implica la existencia de un punto de periodo dos en el intervalo $[x_1, x_i]$. Esto prueba de manera concluyente la afirmación en los tres casos. En general n tiene dos posibles formas: $n = 2^m$ o $n = p \cdot 2^m$ con p impar. Para cada caso probaremos la existencia periodicidad mayor en el orden de Sharkovsky.

Si $\mathbf{n = 2^m}$, con $n > 1$: tomemos $k = 2^l$ con $l < m$ y considere $g = f^{k/2} = f^{2^{l-1}}$. Esto implica que g tiene a x como punto de periodo 2^{m-l+1}. En efecto:

$$g^{2^{m-l+1}}(x) = f^{2^{l-1} \cdot 2^{m-l+1}}(x) = f^{2^m}(x) = x.$$

Por lo que demostrado anteriormente, g tiene punto de periodo dos igual a y. El cual tiene periodo 2^l respecto de f, para cada $l < m$. En efecto:

$$y = g^2(y) = f^{2^{l-1}}(f^{2^{l-1}}(y)) = f^{2^l}(y).$$

Como l es cualquier valor menor que m, hemos probado la existencia de todos los puntos de periodo: $2^{m-1}, 2^{m-2}, \ldots, 2^3, 2^2$. Lo cual termina la prueba para este caso.

Si $\mathbf{n = q \cdot 2^m}$. En este caso, la prueba de la existencia de periodicidad según el orden de Sharkovsky será dada en dos partes:

- Si q es impar y tomamos $g = f^{2^m}$, luego g tiene punto de periodo q impar. Por el primer caso, g tiene puntos de periodo impar $r > q$. Más aún, los mayores que q en el orden de Sharkovsky, es decir: $2^k \cdot t$ con $k \geq 1$ y t impar, y también las potencias de dos: $\ldots 2^3, 2^2, 2, 1$. Estos a su vez son puntos de periodo $\mathbf{r \cdot 2^m}$, $\mathbf{2^{m+k} \cdot t}$ y 2^{m+k}, respecto de f. Donde $r > q$, $t > 1$ son impares y $k \geq 1$. Ver Cuadro 2.1.

- Definimos ahora $g = f^q$, luego g tiene punto de periodo 2^m. Del caso anterior, g tiene puntos de todos lo periodos 2^k con $0 \leq k < m$. Asi, f tiene puntos de periodo $\mathbf{2^k \cdot q}$, con q impar. Luego f tiene puntos de periodo $\mathbf{2^k \cdot p}$, con $k \geq m+1$ y p impar. Tomando $M \geq m+1$ y $p = 1$, f tiene puntos de periodo 2^M con $k \leq m \leq M$. Finalmente, por el caso **potencia de 2**, f tiene puntos de periodo 2^s con $s \leq m$. Lo cual termina la prueba del Teorema de Sharkovsky.

□

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \ldots \prec 2\cdot 3 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 7 \prec \ldots\ldots$$
$$\prec 2^2\cdot 3 \prec 2^2\cdot 5 \prec 2^2\cdot 7 \prec \ldots\ldots \prec 2^3\cdot 3 \prec 2^3\cdot 5 \prec 2^3\cdot 7 \prec \ldots$$
$$\vdots$$
$$\prec 2^m\cdot 3 \prec 2^m\cdot 5 \prec 2^m\cdot \mathbf{q} \prec \ldots \prec \mathbf{2^m}\cdot \mathbf{r} \prec \ldots$$

$$\prec 2^{m+1}\cdot 3 \prec 2^{m+1}\cdot 5 \prec 2^{m+1}\cdot 7 \prec \ldots \prec 2^{m+k}\cdot 3 \prec 2^{m+k}\cdot 5 \prec \ldots \prec \mathbf{2^{m+k}}\cdot \mathbf{t} \prec$$
$$\ldots \prec 2^{m+k} \prec 2^{m+k-1} \prec \ldots \prec 2^{m+2} \prec 2^{m+1} \prec$$

$$2^m \prec 2^{m-1} \prec 2^{m-2} \prec \ldots \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$$

Cuadro 2.1: Caso par.

2.3 Sharkovsky y algunas extensiones

Gracias a que el ordenamiento Sharkovsky atrajo atención de muchos matemáticos, no solo surgieron nuevas versiones de la prueba. Sino que también se ha estudiado la posibilidad de extender los resultados a estructuras más complejas, a clases más amplias de funciones (discontinuas, aleatorias, etc.). Incluso, a diferentes tipos de espacios de fase unidimensionales: círculo, grafos; o incluso en mayores dimensiones.

Así, de las preguntas relativas a las posibles extensiones y generalizaciones del teorema de Sharkovsky, la primera es: ¿Bajo qué condiciones o para qué otras clases de mapas o espacios topológicos se pueden obtener resultados análogos al Teorema de Sharkovsky?

2.3.1 En el círculo

En el caso específico del Teorema de Sharkovsky, es natural preguntarse si resultados similares se cumplen para otros espacios topológicos. Una de las opciones más simples es considerar el círculo, que también es un espacio unidimensional. Sin embargo, al analizar los mapas continuos del círculo, se observa que el Teorema de Sharkovsky no se aplica directamente. Por ejemplo, la rotación del círculo por el ángulo $\theta = 2\pi/n$, genera órbitas periódicas de período n, pero no existen orbitas de otro periodos. Esto indica que no basta con simplemente reemplazar el orden de Sharkovsky por otro para obtener resultados análogos. Para entender cómo extender el Teorema de Sharkovsky al círculo, primero debemos comprender su verdadero significado. En palabras de Blokh y Misiurewicz: "*Este proporciona una descripción simple de todos los posibles conjuntos de órbitas periódicas para mapas continuos de intervalos. Por lo tanto, se debería intentar hacer un análogo para mapas continuos de círculo*".

Los primeros resultados en este contexto fueron estudiados por algunos matemáticos, ya mencionados previamente, tales como Block, Guckenheimer, Misiurewicz,

Young y Efremova; en la década de los 80. Estos descubrimientos presentaron un mismo teorema en [7] y [17] que envuelve el concepto de *grado*.

Para describir este resultado, es necesario clasificar los mapas continuos en el círculo, mediante el grado. Este, se obtiene mediante $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ inducido por $f : S^1 \to S^1$ es observar el mapa inducido por f en el primer grupo de homología del círculo S^1. Este mapa f_* se describe como una multiplicación por un cierto entero d, denominado grado de f.

Otro enfoque, estudiado por Block- Coppel en [8], es considerar a S^1 como el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y observar un levantamiento $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos $F(x+1) = F(x) + d$, donde d es el grado de f (ver Proposición 1.0.25).

El caso más simple es $|d| \geq 2$. Para esos mapas continuos en el círculo existen orbitas periódicas de todos los períodos. Sin embargo, existe una excepción $d = -2$.

Teorema 2.3.1. *Sea f un mapa en el círculo de grado d tal que $|d| \geq 2$. Entonces, el conjunto de periodos de f es $\mathbb{N}$. Excepto cuando $d = -2$, en cuyo caso puede ser $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N} \setminus \{2\}$, y ambas posibilidades pueden ocurrir.*

Los detalles de la demostración de este teorema pueden ser vistos en [7] o [17].

Otros casos que presentan similaridad a los mapas en el intervalo son cuando el grado de f es 0 y -1. En el primero, el resultado surge de concluir que su levantamiento F es periódico, lo cual no es obvio en el caso -1.

Teorema 2.3.2. *El Teorema de Sharkovsky se verifica para mapas continuos en el círculo de grado 0 y -1.*

En el caso de grado 0, Efremova [17] obtuvo resultados parciales, y el resultado completo fue obtenido por Block, Guckenheimer, Misiurewicz y Young [7]. En el caso de grado -1, el resultado completo fue obtenido independientemente por Efremova [17] y Block [6].

Otro caso que vale la pena mencionar es del grado igual a 1. Este es definitivamente el caso más complicado. Sin embargo, para entender lo que sucede debe introducirse la noción del intervalo de rotación y hacer un estudio extenso hasta llegar a su relación con el Teorema de Sharkovsky. Para más detalles sugerimos al lector revisar [22].

2.3.2 En ecuaciones diferenciales no autónomas

En el 2005, AlSharawi, Angelos, Elaydi y Rakesh extienden el Teorema de Sharkovsky al ámbito de las ecuaciones en diferencias periódicas (ver [2]). Para ello, introducen las nociones de ciclo geométrico y establecen un p-orden de Sharkovsky. Estas herramientas permiten analizar la periodicidad y la coexistencia de órbitas periódicas en sistemas dinámicos discretos con parámetros periódicos.

A través del uso de estas herramientas, los autores logran demostrar tanto el Teorema de Sharkovsky como también su recíproca en este marco ampliado. Estas generalizaciones no solo amplían el alcance del teorema original, sino que también proporcionan nuevos instrumentos teóricos para el análisis de dinámicas más complejas y del ámbito aplicado.

2.3.3 En dimesiones $n \geq 2$

Por lo estudiado hasta ahora se puede decir que el resultado de Sharkovsky establece una jerarquía específica en la existencia de órbitas periódicas en mapas continuos en intervalos. Sin embargo, su extensión a superficies bidimensionales, como el plano o el cilindro, resulta desafiante debido a la mayor complejidad topológica y dinámica en estos espacios. Vale mencionar que las generalizaciones no siempre son directas y pueden requerir condiciones adicionales específicas del sistema dinámico en estudio.

Un ejemplo de mapas en mayores dimensiones, son aquellos que son cercanos a los unidimensionales. En 1999, Zgliczynski (ver [32]) estudia una clase de este tipo de perturbaciones. Además, demostró que si un mapa unidimensional posee un punto periódico de periodo n, entonces ciertas perturbaciones multidimensionales cercanas también tienen puntos periódicos de todos los periodos admisibles por el Teorema de Sharkovskii.

Otro contexto se centra en los mapas de Lorenz derivados de *mapas unimodales*. En [3], Anušić et al, exploran una versión del Teorema de Sharkovsky para una clase de mapas de Lorenz. Identificando condiciones bajo las cuales se verifica la existencia de periodos .

2.3.4 En el plano complejo

Consideremos el mapa cuadrático en el espacio complejo, definido por:

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante y z representa un número en el plano complejo.

Es importante recordar que si un punto z_0 es periódico para $f_c(z)$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f_c^n(z_0) = z_0.$$

Dependiendo del valor de c, se pueden observar diversas dinámicas. A continuación, mencionamos algunos casos representativos:

- Para $c = -2$: Los puntos divergen hacia el infinito, lo que indica un comportamiento no periódico.

- Para $c = -1$: El sistema genera un ciclo de periodo 2 entre los puntos $z = 0$ y $z = -1$, es decir:
$$f_{-1}(0) = -1, \quad f_{-1}(-1) = 0.$$
- Para $c = i$: Se observa un ciclo estable de mayor periodo.

Ahora, consideremos el conjunto de Mandelbrot M, definido en el plano complejo mediante la iteración del mapa cuadrático $f_c(z)$. Para $z_0 = 0$, el conjunto M está formado por todos los valores de c tales que la sucesión:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

se mantiene acotada.

Si $c \in M$, el sistema posee puntos fijos o ciclos periódicos. Por otro lado, si $c \notin M$, las orbitas divergen al infinito. El conjunto de Mandelbrot es conocido por su estructura fractal, que incluye bifurcaciones que reflejan comportamientos tanto periódicos como caóticos.

En el plano complejo, tal estructura fractal del conjunto de Mandelbrot han motivado la generalización de este orden. Vieru (2008) (ver [31]) definió un orden generalizado que extiende el concepto del orden de Sharkovsky, adaptándolo a las bifurcaciones y ciclos periódicos en sistemas dinámicos complejos. Este orden generalizado de Sharkovsky ha permitido interpretar la dinámica de $f_c(z)$ en diferentes regiones del conjunto de Mandelbrot. Por ejemplo, en el conjunto de Mandelbrot, la bifurcación de periodo 3 presenta comportamientos caóticos en específicas regiones, lo que refleja el teorema de Sharkovsky y el teorema de Li y Yorke.

En recientes estudios, Zheng (2024) (ver [33] y [34]) explora cómo los patrones que surgen en las bifurcaciones del conjunto de Mandelbrot reflejan la esencia del teorema de Sharkovsky. Sus investigaciones muestran que, aunque originalmente formulado para el caso real, el orden de Sharkovsky se manifiesta de forma análoga en el plano complejo.

En resumen, aunque el Teorema de Sharkovsky se aplica específicamente a funciones continuas en intervalos reales, su esencia se manifiesta de forma similar en el conjunto de Mandelbrot. Todo esto a través de bifurcaciones y comportamientos caóticos en el plano complejo.

Capítulo

3

El Recíproco del Teorema de Sharkovsky

Si bien la literatura sobre el Teorema de Sharkovsky suele centrarse en el teorema 2.2.1 presentado en el capítulo 2. Sin embargo, el resultado original de Sharkovsky es más amplio. Además de establecer el 2.2.1, ambién afirma que: si k es menor que n en el orden de Sharkovsky, entonces existe una función continua con periodo n que carece de periodicidad de orden k. Este enunciado más general se conoce como el Teorema de Realización de Sharkovsky. El propio Sharkovsky lo demostró parcialmente en su artículo más célebre (ver [27]), pero sus argumentos fueron completados posteriormente en [28] además de otros autores

Aunque varios autores ofrecieron sus propias demostraciones del Teorema de Realización, la demostración de Stefan (ver [29]) la que motivó a Misiurewicz y otros matemáticos a a desarrollar una prueba estándar. Esta prueba estándar, más sencilla de seguir, fue obtenida casi simultáneamente por destacados matemáticos de la época (ver [7], [10], [19], [30]).

En palabras de Misiurewicz (ver [24]), la prueba estándar se basa en ejemplos de funciones cuyo gráfico se encuentra dentro de un cuadrado. Estas funciones exhiben puntos de periodo impar, pero carecen de periodos menores en el orden de Sharkovsky. Algunas demostraciones son simplemente modificaciones menores de la prueba original de Sharkovsky [27], mientras que otras se presentan como ejemplos, dejando los detalles como ejercicio para el lector. En este capítulo, presentaremos con detalle la demostración del Teorema de Realización dada por Elaydi ver ([18]).

3.1 Ejemplos

Los siguientes ejemplos ilustran la idea principal detrás de la demostración: la construcción de funciones que tienen un periodo específico en el orden de Sharkovsky, pero que carecen de periodos que las preceden en dicho orden. Uno de los ejemplos

más comunes y sencillos que se encuentran en la literatura es es el un mapa continuo con periodicidad 5 pero sin periodicidad 3. El cual se hizo popular debido a Devaney (ver [14]).

Comenzamos con un caso fundamental: la construcción de un periodo impar que carece de otro periodo impar menor según el orden de Sharkovsky.

Ejemplo 3.1.1. *Consideremos la construcción de un mapa continuo con puntos periódicos de periodo 5 pero sin puntos de periodo 3. Sea* $f : [1,5] \to [1,5]$ *que satisface:*

$$f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 4,\ f(4) = 2,\ f(5) = 1.$$

Es inmediato verificar que los enteros 1, 2, 3, 4 y 5 son puntos de periodo 5. Supongamos f es lineal por partes, es decir, en cada intervalo $[j, j+1]$, su gráfico es un segmento de recta que une los puntos $(j, f(j))$ y $(j+1, f(j+1))$ para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

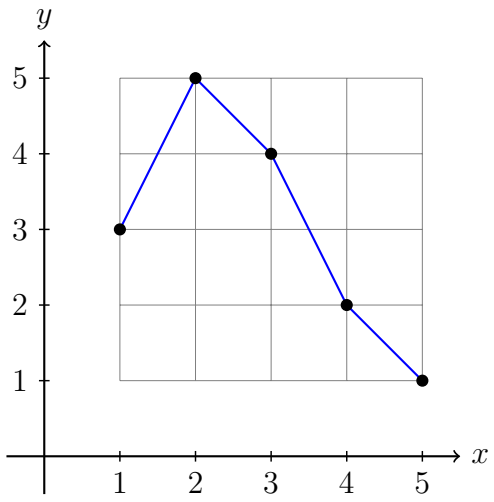


Figura 3.1: Ejemplo caso impar $n = 3$.

Para demostrar que f no tiene puntos de periodo 3, calculamos los iterados de cada uno de los intervalos $[1,2], [2,3]$ y $[4,5]$ bajo f.

$$\begin{array}{lll} f([1,2]) = [3,5] & f^2([1,2]) = [1,4] & f^3([1,2]) = [2,5] \\ f([2,3]) = [4,5] & f^2([2,3]) = [1,2] & f^3([2,3]) = [3,5] \\ f([4,5]) = [1,2] & f^2([4,5]) = [3,5] & f^3([4,5]) = [1,4]. \end{array}$$

De esto podemos notar que en los intervalos $[1,2]; [2,3]; [4,5]$:

$$\begin{aligned} f^3([1,2]) \cap [1,2] &= \{2\} \\ f^3([2,3]) \cap [2,3] &= \{3\} \\ f^3([4,5]) \cap [4,5] &= \{4\}. \end{aligned}$$

De esta forma, los intervalos $[1,2];[2,3]$ y $[4,5]$ tienen como únicos puntos fijos respecto f^3 a 2, 3 y 4, respectivamente. Los cuales sabemos no son periodo 3. En el caso del intervalo $[3,4]$ aparece una diferencia. Observemos los iterados:

$$f([3,4]) = [2,4],\ f^2([3,4]) = [2,5],\ f^3([3,4]) = [1,5].$$

Vemos que por el Lema 2.1.3 existe un punto fijo en $[3,4]$ respecto f^3. Debido a la linealidad de f, y por tanto la inyectividad, este punto es también fijo y único respecto f. Por tanto, f no tiene puntos periódicos de periodo 3.

La idea dada en el ejemplo 3.1.1 es la referencia para la prueba del Teorema 3.2.1 principalmente para el caso impar. Para el caso par, el siguiente ejemplo nos mostrará una idea de la prueba cuando el periodo es múltiplo de un impar. Específicamente, será construido un mapa continuo con periodo 10 pero que no posee periodicidad 6 a partir del ejemplo anterior.

Ejemplo 3.1.2. *Para construir un mapa con periodo* $10 = 2 \times 5$ *a partir del mapa* f *con periodo 5 del ejemplo anterior, utilizaremos una técnica constructiva que llamaremos* ***mapa doble****. La estrategia consiste en tomar el mapa original definido en* $[1,5]$ *y usar versiones escaladas y trasladadas de él para definir el nuevo mapa* g *en un intervalo mayor* $[1,13]$ *Específicamente,* $g(x)$ *se basará en* $f(x)$ *para* $x \in [1,5]$ *y en* $x-8$ *para* $x \in [9,13]$*, mientras se define una conexión lineal en el intervalo central* $(5,9)$ *para lograr la dinámica deseada. Definamos explícitamente* $g : [1,13] \to [1,13]$ *como:*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 8 & si \quad 1 \leq x \leq 5 \\ -2x + 19 & si \quad 5 < x < 9 \\ x - 8 & si \quad 9 \leq x \leq 13. \end{cases}$$

El mapa g así definido es el *mapa doble de* f. Aquí todos enteros con excepción de 6,7 y 8, tienen periodo igual a 10. Estudiamos g en los intervalos $[1,5]$, $[5,9]$ y $[9,13]$. En primer lugar, podemos observar que para todo $x \in [1,5]$:

$$g(x) \in [9,13] \ \text{ y } g^2(x) = f(x).$$

Como f no tiene puntos de periodo 3, g no tiene puntos de periodo 6 en $[1,5]$. En el intervalo $[9,13]$ tampoco existen puntos de periodo 6 desde que $g([9,13]) = [1,5]$. Para el intervalo $[5,9]$ necesitamos un argumento distinto. Notemos que,

$$g([5,9]) = [1,9] \quad g^2([5,9]) = [1,9] \quad g^3([5,9]) = [1,13].$$

Iterando, vemos que $g^6([5,9]) = [1,13]$ contiene a $[5,9]$. Por la Proposición 2.1.3, existe un punto fijo $p \in (5,9)$ de g^6. Analicemos la orbita de este punto p. Supongamos que para algún $1 \leq n \leq 5$ se tiene que $g^n(p) \notin (5,9)$. Entonces, sus siguientes

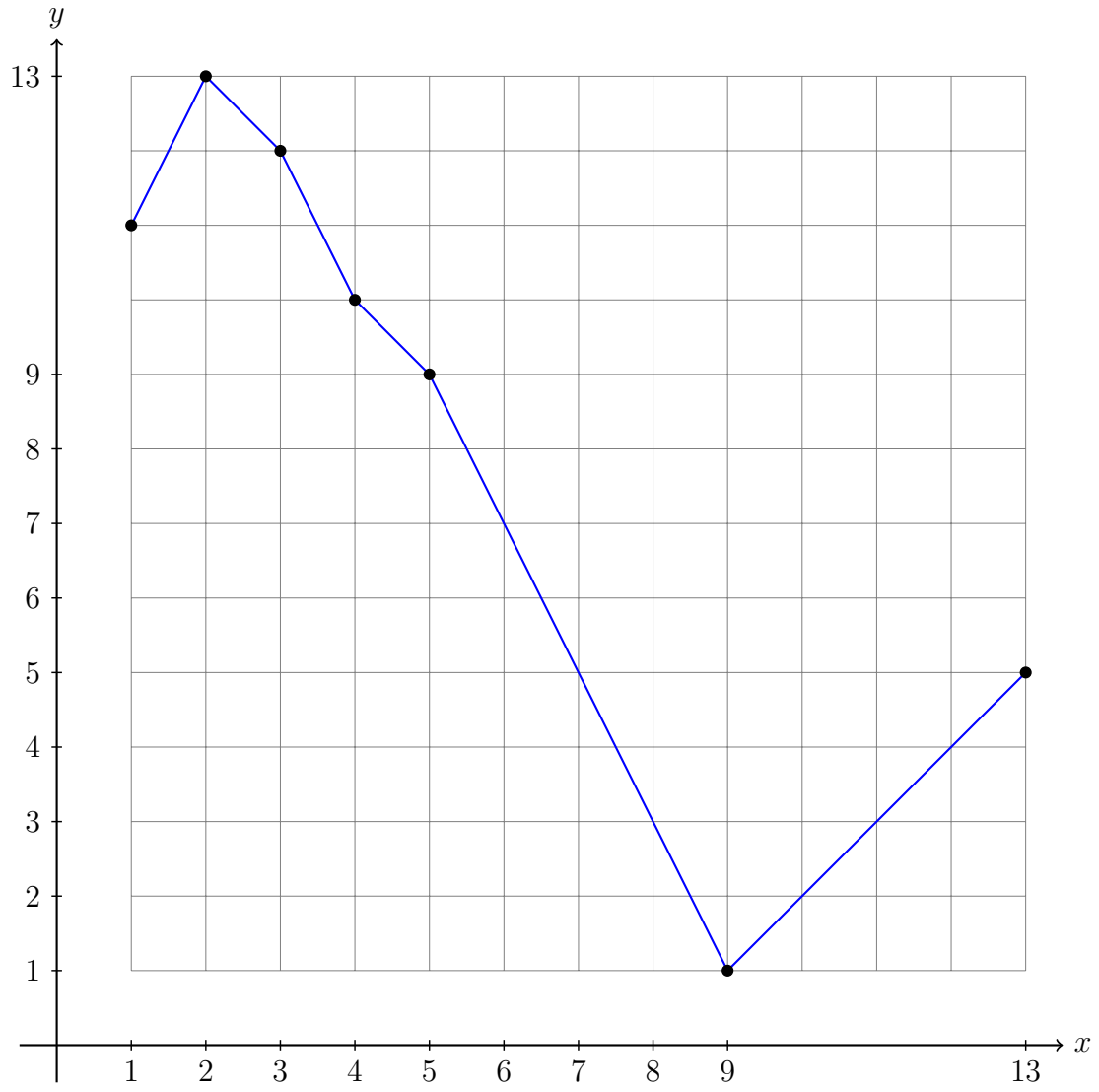


Figura 3.2: Ejemplo caso par

iterados verifican

$$g^{n+r}(p) \in [1,5] \cup [9,13], \text{ para todo } r > 0.$$

En particular, $g^6(p)$ no cae en $(5,9)$ y por tanto $g^6(p) \neq p$, lo cual es una contradicción. Así tenemos que, $p, g(p), \ldots, g^5(p) \in (5,9)$.

Sin embargo, en el intervalo $(5,9)$ la función es estrictamente $-2x + 19$. Para esta función lineal, el único punto periódico posible es su punto fijo $p = 19/3$, que también es el punto fijo de g. Por tanto, no existen puntos de periodo 6 en $(5,9)$.

A continuación, nos enfocamos en los periodos que son potencias de 2, comenzando por construir un mapa con periodo 2 que claramente carece de periodo 4.

Ejemplo 3.1.3. *Ejemplo de un mapa continuo de periodo dos pero no con periodo*

2^2. *Sea* $f : [1,2] \to [1,2]$ *definido por* $f(x) = -x + 3$ *aquí todo punto, excepto 3/2 que es fijo, es de periodo 2. Claramente, no existen puntos de periodo* 2^2.

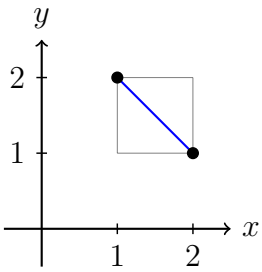


Figura 3.3: Ejemplo caso par

Siguiendo con las potencias de 2, construimos ahora un mapa con periodo 4 pero sin periodicidad 8.

Ejemplo 3.1.4. *Un mapa continuo de periodo* 2^2 *pero no de periodo* 2^3.

Sea $f : [1,4] \to [1,4]$ *definido como* $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 2$ *y* $f(4) = 1$ *y de forma lineal en los intervalos cuyos extremos son estos números enteros.*

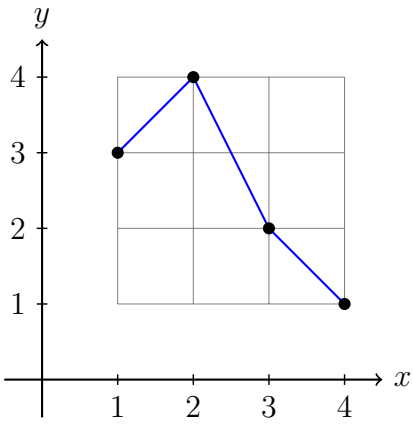


Figura 3.4: Ejemplo con periodo 2^2 y no 2^3

De la figura podemos notar que

$$f([1,2]) = [3,4], f([3,4]) = [1,2], f^2([1,2]) = [1,2], f([3,4]) = [3,4].$$

Además, por su forma f^2 es creciente y f^4 es decreciente. Lo que implica que:

$$f^4(x) = x \text{ para todo } x \in [1,2] \cup [3,4].$$

Así, todo punto

$$x \in [1,2]$$

tiene periodo 4 con excepción de $3/2$ que tiene periodo primo 2, por f ser lineal. De forma análoga, todo punto en $[3,4]$ tiene periodo 4 con excepción de $7/2$ que tiene periodo 2. Para el intervalo $[2,3]$ tenemos que $f([2,3]) = [3,4]$. Es decir, los puntos en $[2,3]$ eventualmente van a salir tras varias iteraciones o todos los iterados se quedan. Si $x \in [2,3]$ y $f^k(x) \in [1,2] \cup [3,4]$ para algún k, entonces su órbita tendrá periodo 4 o 2. Por otro lado, si su órbita está contenida en $[2,3]$ tenemos que $f^n(x) = F(x)$, donde $F(x) = -2x + 8$. Sin embargo $F^8(x) = 256x - 680$ tiene a $8/3$ como punto fijo, que es también punto fijo de f. Por tanto, f no tiene puntos de periodo 8 u otros que lo precedan en el orden de Sharkovsky.

Regresamos a la técnica del mapa doble para generar un periodo 2^k a partir de 2^{k-1}, construyendo un mapa con periodo 2^3 pero sin periodo 2^4.

Ejemplo 3.1.5. *Un mapa con periodo* 2^3 *pero no de periodo* 2^4*. Definimos el mapa* $g : [1,10] \to [1,10]$ *como*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 6 & si \quad 1 \leq x \leq 4 \\ -2x + 15 & si \quad 4 < x < 7 \\ x - 6 & si \quad 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

En este caso la órbita de periodo 2^3 *es dada por* $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$.

Otro ejemplo a ser visto es un mapa que presenta puntos de periodo $2^n \times 3$ pero no periodos de la forma $2^{n-1} \times impar$. Como antes la idea es construir un mapa doble a partir de un mapa f.

Ejemplo 3.1.6. *Definamos* $f : [1,3] \to [1,3]$ *tal que* $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$ *y en cada intervalo cuyos extremos son enteros* f *se define de forma lineal por partes. Aquí claramente* $1,2,3$ *tienen periodo 3 y el mapa doble* $g : [1,7] \to [1,7]$ *es el siguiente:*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 4 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ lineal & si \quad 3 < x < 5 \\ x - 4 & si \quad 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Notamos que g tiene puntos de periodo 2×3 pero no periodo impar. En general, a partir del mapa f con periodo 3 definido aquí, y aplicando la técnica del mapa doble m veces, podemos construir una función g que posea puntos de periodo $2^m \times 3$, pero sin de puntos de periodo $2^{m-1} \times k$ para cualquier impar k. Esto ilustra la construcción general necesaria para periodos de la forma *potencia de* $2 \times impar$.

Estos ejemplos ilustran las dos estrategias fundamentales que se emplearán en la demostración formal del Teorema de Realización (3.2.1). Por un lado, la definición de funciones lineales por partes, como en el Ejemplo 3.1.1 permite construir directamente mapas con un periodo impar específico que actúa como el 'menor' en el orden de Sharkovsky entre los impares presentes. Por otro lado, la técnica del 'mapa doble', vista en los Ejemplos 3.1.2, 3.1.5 y 3.1.6 proporciona el mecanismo

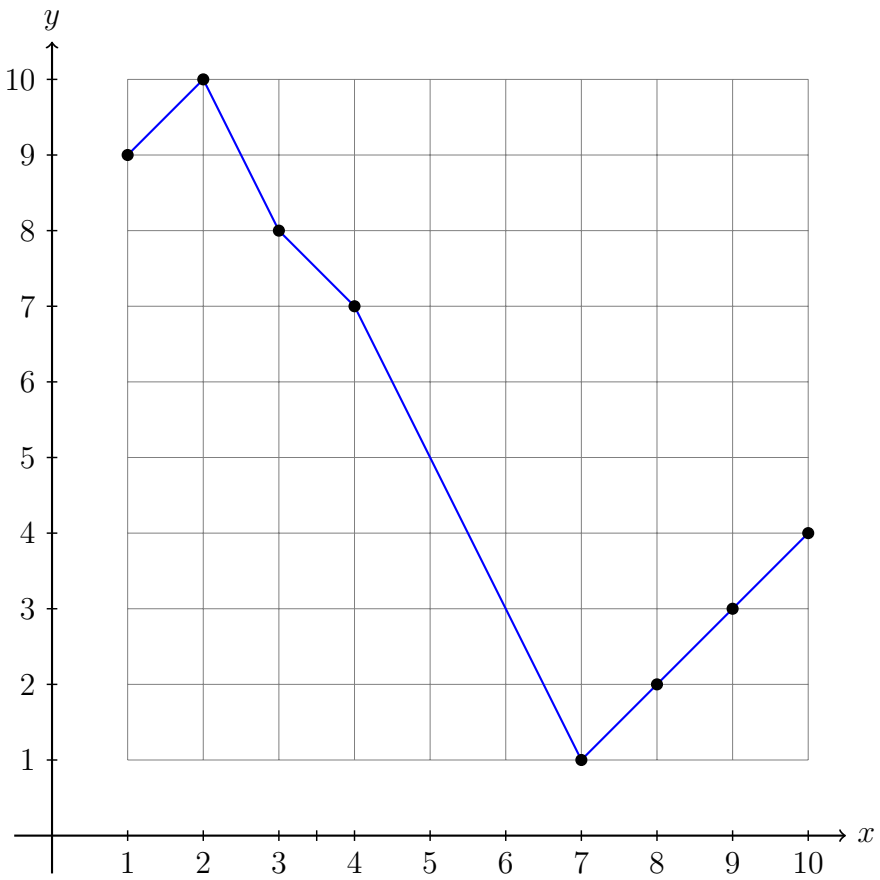


Figura 3.5: Periodicidad 2^3 y no 2^4

inductivo para construir funciones con periodos $2k$ o $2^m \times p$ (donde p es impar) a partir de funciones con periodos k o p, respectivamente, asegurando la ausencia de las periodicidades 'inferiores' según el orden de Sharkovsky.

3.2 Teorema de Realización de Sharkovsky

Teorema 3.2.1. *Para cada n existe una función continua $f : I \to I$ que tiene una órbita de periodo n, pero que no tiene orbitas de periodo k con $k \prec n$.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, construiremos un mapa continuo con orbita de periodo n pero que no presenta periodicidad de orden k, para $n \prec k$ en el orden de Sharkovsky. Dividiremos la prueba de esto en casos según la estructura de n en el orden de Sharkovsky.

Caso 1: Este es el caso trivial. La función identidad $f(x) = x$ en cualquier intervalo I tiene periodo 1 (todos los puntos son fijos) y no tiene periodo $k < 1$.

Caso 2: Dado n, existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que tiene órbita de periodo $2n + 1$ y no de periodo $2n - 1$. Construimos primero un mapa continuo en un intervalo

$f : [1, 2n+1] \to [1, 2n+1]$, que luego será extendida a todo $\mathbb{R}$.

Definimos f en los enteros del intervalo $[1, 2n+1]$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(1) = n+1, f(2) = 2n+1, f(3) = 2n, f(4) = 2n-1 \\ \ldots, f(n-1) = n+4, f(n) = n+3, \\ f(n+1) = n+2, f(n+2) = n, f(n+3) = n-1, \\ f(n+4) = n-2, f(n+5) = n-3, \ldots \\ \ldots, f(2n-1) = 3, f(2n) = 2, f(2n+1) = 1. \end{aligned}$$

Extendemos f para que sea lineal por en cada intervalo $[j, j+1]$ para $j = 1, ..., 2n$. Es decir, como la recta que une los puntos $(j, f(j))$ y $(j+1, f(j+1))$. Por construcción, los enteros $1, 2, \ldots, 2n+1$ forman una orbita de periodo $2n+1$.

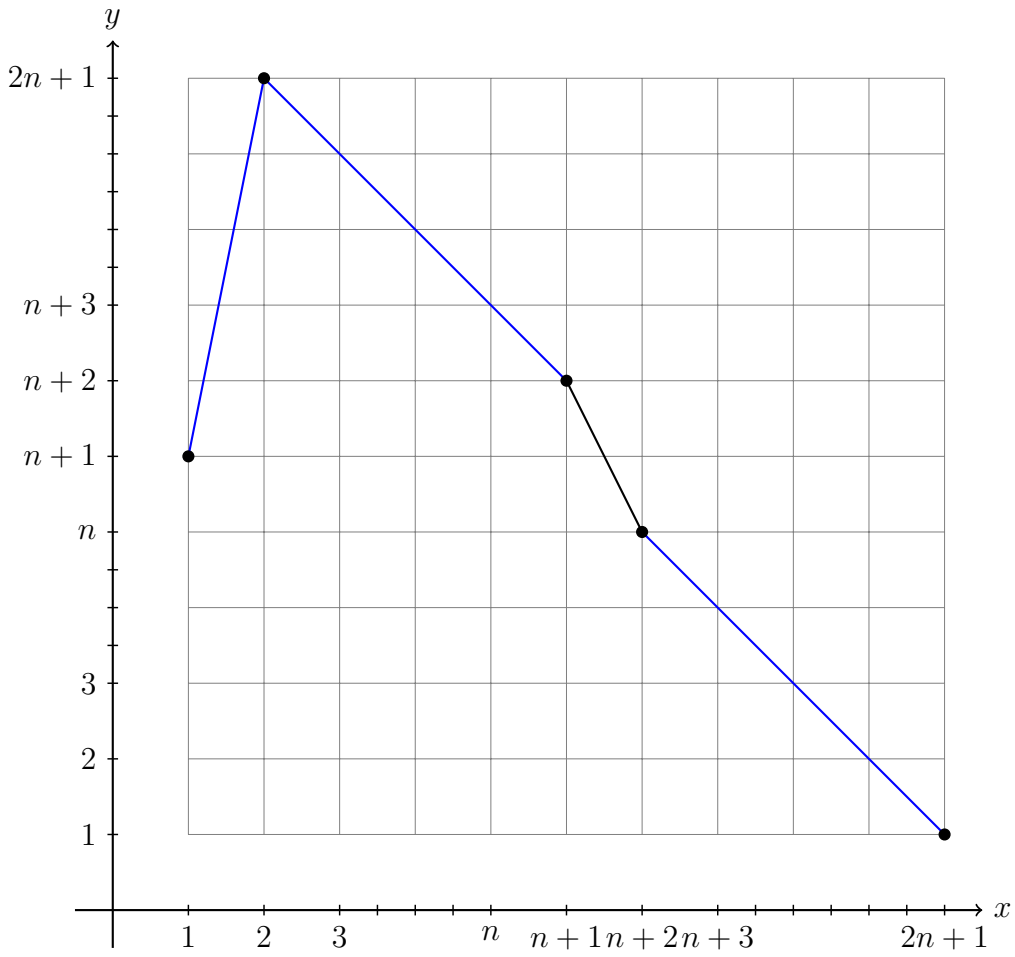


Figura 3.6: Función de periodo $2n+1$

Para probar que f no tiene puntos periódicos de periodo $2n-1$ en $[1, 2n+1]$. Observemos primero que f no tiene puntos de periodo $2n-1$ en el intervalo $[1, 2]$.

Para esto, iteramos $2n-1$ veces por f:

$$\begin{aligned} f([1,2]) = [n+1, 2n+1],\ f^2([1,2]) = [1, n+2], \\ f^3([1,2]) = [n, 2n+1],\ f^4([1,2]) = [1, n+3], \\ f^5([1,2]) = [n-1, 2n+1],\ f^6([1,2]) = [1, n+4], \\ f^7([1,2]) = [n-2, 2n+1],\ f^8([1,2]) = [1, n+5], \\ \vdots \\ \ldots, f^{2n-2}([1,2]) = [1, 2n], \\ f^{2n-1}([1,2]) = [2, 2n+1]. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que, $f^{2n-1}([1,2]) \cap [1,2] = \{2\}$ es el único candidato a ser punto periódico de f. Sin embargo, sabemos que 2 tiene periodo $2n+1$. Por tanto, en $[1,2]$ no existe punto de periodo $2n-1$.

Consideremos ahora los intervalos de la forma $[j, j+1]$ donde $j \neq n+1$. Tras suficientes iteraciones, estos pueden ser mapeados eventualmente por f en $[1,2]$. Para verificar esto, podemos separar tales intervalos en dos sub-casos (ver Figura[3.6]):

- $[j, j+1]$; $j < n+1$, tal que $f([j, j+1]) = [k, k+1]$; y $k > n+2$
- $[j, j+1]$; $j > n+2$, tal que $f([j, j+1]) = [k, k+1]$; y $k < n$.

En cualquiera de los dos casos, los intervalos son llevados por un iterado de f en el intervalo $[2n, 2n+1]$ y posteriormente en $[1,2]$. Esto significa que en cada $[j, j+1]$ no existe algún punto de periodo $2n-1$. En efecto, si existe p tal que $f^{2n-1}(p) = p \in [j, j+1]$. Luego $f^{m+1}(p) \in [1,2]$ es punto de periodo $2n-1$. Lo cual es absurdo.

El intervalo que no hemos considerado aún es $[n+1, n+2]$. Para este caso notemos que:

$$\begin{aligned} f([n+1, n+2]) &= [n, n+2] = [n, n+1] \cup [n+1, n+2], \\ f([n, n+2]) &= [n, n+3] = [n, n+1] \cup [n+1, n+2] \cup [n+2, n+3], \\ f([n, n+3]) &= [n-1, n+3] = [n-1, n] \cup [n, n+1] \cup [n+1, n+2] \cup [n+2, n+3], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es decir, el tamaño de $[n+1, n+2]$, como el de sus iterados, es expandido por f y eventualmente, la imagen cubrirá todo el intervalo $[1, 2m+1]$. Esto significa que cada elemento $x \in [n+1, n+2]$, puede ser tal que existe un $k > 1$ que $f^k(x) \in [n+1, n+2]$ o en intervalos de la forma $[j, j+1]$ con $j < n+1$ o $j > n+2$. Por el análisis previo, si $j \neq n+1$, un iterado de $f^k(x)$ cae en $[1,2]$. Lo cual implica que x no puede tener periodo $2n-1$. Si $x \in [n+1, n+2]$ es tal que todos sus iterados están en $[n+1, n+2]$. Notemos que $[n+1, n+2]$ cubre $[n, n+2]$. Por la Proposición 2.1.3, existe un único punto fijo de f en $[n+1, n+2]$. Esto es debido a que f es lineal y creciente ($|f'| = 2$),

es decir, no existen otros puntos periódicos. Por tanto, $[n+1, n+2]$ no tiene puntos de periodo $2n-1$. La extensión a todos los reales es dada de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2n+1 \\ \\ x & \text{si} \quad 1 < x \text{ o } x > 2n+1 \end{cases}$$

Claramente, F es continua en todo $\mathbb{R}$ y sus órbitas de periodo mayor que 1 están necesariamente en $[1, 2n+1]$. Así, hemos construido un mapa lineal por partes en todos los reales con órbitas de periodo $2n+1$ pero que no tiene periodo $2n-1$.

Caso 3: Dado n existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con órbita de periodo $2^k(2n+1)$ y no con órbita de periodo $2^k(2n-1)$. Comenzamos con el sub-caso $k = 1$. Definimos el mapa continuo $g(x)$ con periodicidad $2 \times (2n+1)$ pero no de $2 \times (2n-1)$. A partir del mapa $f : [1, 2n+1] \to [1, 2n+1]$ de periodo $2n+1$ se define el mapa $g : [1, 1+6n] \to [1, 6n+1]$, donde:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 4n & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 1+2n \\ 8n+3-2x & \text{si} \quad 1+2n < x < 1+4n \\ x - 4n & \text{si} \quad 1+4n \leq x \leq 1+6n \end{cases}$$

Esta presenta órbita de periodo $2(2n+1)$ dada por $\{1, 2, 3, \ldots, 1+2n, 1+4n, \ldots, 1+6n\}$. En efecto, basta observar que

$$\begin{aligned} f(1+2n) = 1, g(1+2n) = f(2n+1) + 4n = 1 + 4n \\ \ldots, f(n-1) = n+4, f(n) = n+3, \\ f(n+1) = n+2, f(n+2) = n, f(n+3) = n-1, \\ f(n+4) = n-2, f(n+5) = n-3, \ldots \\ \ldots, f(2n-1) = 3, f(2n) = 2, f(2n+1) = 1. \end{aligned}$$

Vale mencionar que la definición de g en el intervalo $[1+2n, 1+4n]$ no es más que el mapa lineal cuyo gráfico es el segmento de recta que une los puntos $(1+2n, g(1+2n))$ y $(1+4n, g(1+4n))$. Así, por definición de g , tenemos:

$$g([1, 1+2n]) = [4n+1, 6n+1] \ , \ g([4n+1, 6n+1]) = [1, 1+2n] \tag{3.21}$$

y por tanto $g^2 = f(x)$ en los intervalos $[1, 1+2n]$ y $[4n+1, 6n+1]$. Desde que f no tiene puntos de periodo $2n-1$, g no presenta periodicidad de orden $2(2n-1)$ en dichos intervalos.

Si queremos estudiar la periodicidad de g en el intervalo $[1+2n, 1+4n]$ observemos que g expande, efecto:

$$[1+2n, 1+4n] \xrightarrow{g} [1, 1+4n] \xrightarrow{g} [1, 1+6n] \xrightarrow{g} \ldots$$

De forma que:

$$g^{2(2n-1)}([1+2n, 1+4n]) = [1, 1+6n] = [1, 1+2n] \cup [1+2n, 1+4n] \cup [1+4n, 1+6n]$$

Por el Lema 2.1.3 existe un punto fijo p de $g^{2(2n-1)}$ en el intervalo $[1+2n, 1+4n]$. Afirmación: todos lo iterados de p:

$$g(p),\, g^2(p), \ldots,\, g^{2(2n-1)-1} \in [1+2n, 1+4n].$$

En efecto, supongamos que existe r tal que $g^r(p) \in [1, 1+2n] \cup [1+4n, 1+6n]$ con $1 < r < 2(2n-1)$. Por 3.21 tenemos que:

$$g^{r+k}(p) \in [1, 1+2n] \cup [1+4n, 1+6n] \text{ para todo } k > 1$$

Sin embargo, $g^{2(2n-1)}(p) = p \in [1+2n, 1+4n]$. Por tanto, se verifica la afirmación. Notemos también que

$$g(p),\, g^2(p), \ldots,\, g^{2(2n-1)-1} \in [1+2n, 1+4n].$$

son puntos fijos de $g^{2(2n-1)}$ desde que $g\big|_{[1+2n,1+4n]}$ es la recta $y = -2x + 8n + 3$es inyectiva y cuyo único punto fijo es la intersección con la diagonal $p = \dfrac{8}{3}n + 1$. Por tanto, g no presenta punto de periodo $2(2n-1)$.

Caso 4: periodo de la forma 2^k para $k \geq 3$. Una prueba en este caso, puede ser dada al construir un mapa doble del anterior. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = 3 - x$ del ejemplo 3.1.3, definida en $[1, 2]$. Todos los puntos en ese intervalo tienen un periodo 2, excepto el punto fijo $3/2$. Aplicando el mapa doble $k-1$ veces a f, obtenemos la función deseada g, ya que genera una función con un punto de período $n = 2^k$ pero ninguno de $n = 2^{k+1}$, ya que de lo contrario f habría tenido un punto de período 4. Con esto se termina con la prueba del teorema de Realización de Sharkovsky.

□

3.2.1 Demostración alternativa

Una elegante demostración del Teorema de Realización de Sharkovsky fue dada por Álseda en [1], donde se considera la familia paramétrica de **mapas tienda truncados** T_h, definida de la siguiente forma:

$$T_h : [0,1] \to [0,1],\ x \to \text{mín}\{h, 1 - |2x-1|\} \text{ para } 0 \leq h \leq 1.$$

Esta familia tiene diversas propiedades importantes asociadas a la presencia de puntos periódicos. El caso $h = 1$, T_1 coincide con el mapa tienda estándar visto en el Ejemplo 1.0.9 y también puede verse en la Figura 3.8.

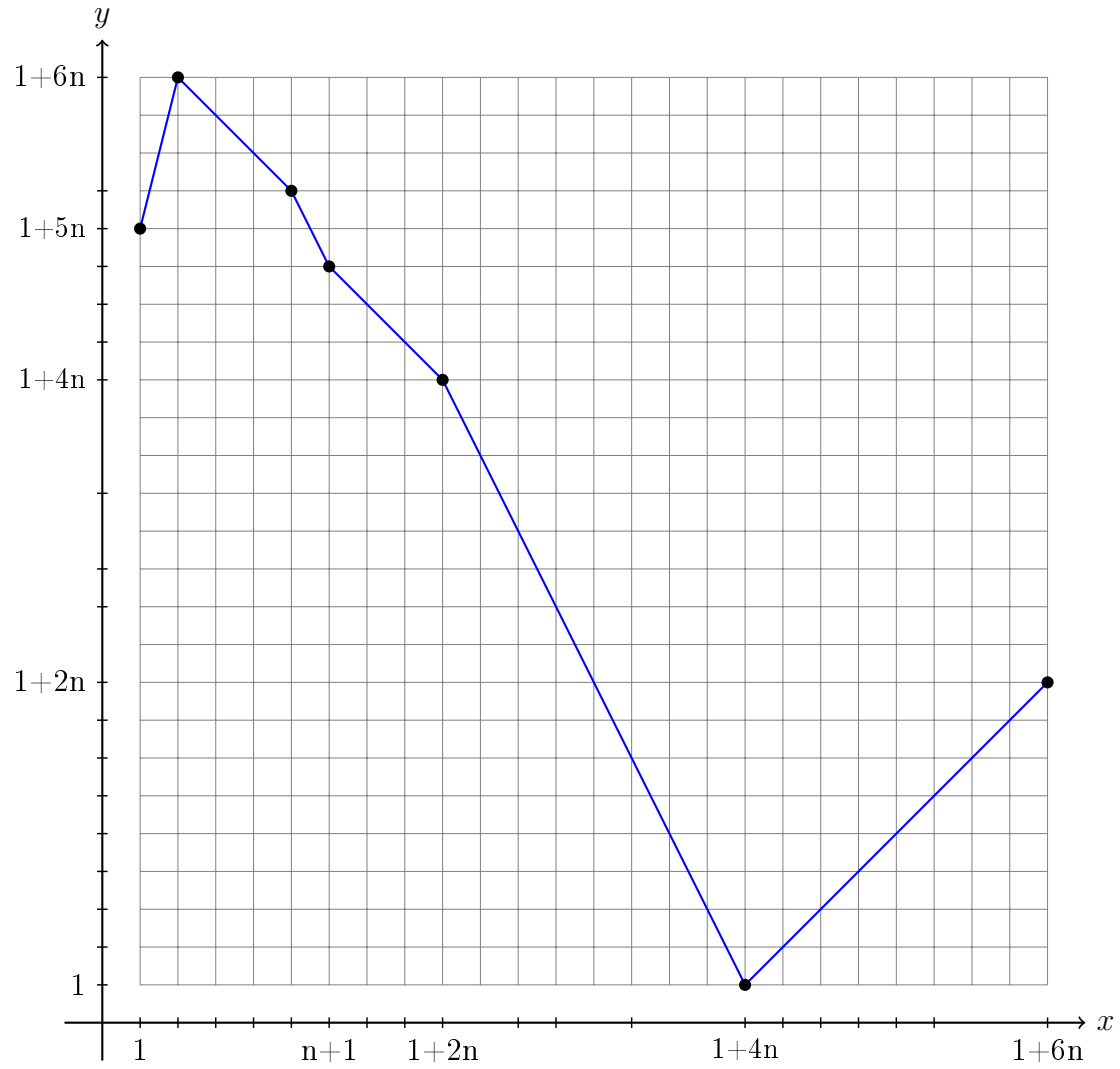


Figura 3.7: Función de periodo $6n + 1$

Las funciones tienda truncadas tienen tres propiedades clave:

(a) T_0 tiene un único punto periódico en 0, mientras que la función tienda T_1 tiene un ciclo de periodo 3: $\{2/7, 4/7, 6/7\}$ y, por lo tanto, tiene todos los números naturales como periodos por el Teorema de Sharkovsky.

(b) T_1 tiene un número finito de puntos periódicos para cada periodo mínimo.

(c) Si $h \prec k$, toda orbita periódica de T_h es una órbita de T_k, y toda orbita periódica de T_k con máximo cae en la altura h es una órbita de T_h.

Lo que hace esta demostración particularmente elegante y digna de mención es que h desempeña tres roles fundamentales: como parámetro, como el valor máximo

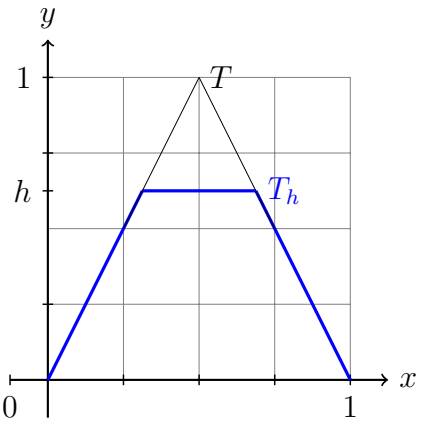


Figura 3.8: Tienda truncada T_h

de T_h, y simultáneamente como punto de una órbita. Dado que el objetivo de este capítulo no es exponer distintas demostraciones del Teorema de Realización de Sharkovsky, motivamos al lector a consultar la demostración completa en [1].

Capítulo

4

Caos

Los resultados presentados en los capítulos anteriores, específicamente el Teorema de Sharkovsky 2.2.1 y el Teorema de Realización 3.2.1, establecen la estructura jerárquica completa de los periodos para funciones continuas $f : I \to I$. El presente capítulo analiza una consecuencia fundamental de dicha estructura: el fenómeno del **caos**.

La relación entre la estructura periódica y la dinámica ganó gran interés al ser mencionado en el trabajo de Li-Yorke ([20]) bajo el título "*Periodic three implies chaos*". Desde entonces se han propuesto diversas definiciones, pero no hubo una definición aceptada de forma universal hasta varios después. Este capítulo se centrará en tres definiciones principales aplicadas a sistemas dinámicos unidimensionales:

1. La definición de **caos según Devaney** [14], que requiere dependencia sensible a condiciones iniciales, transitividad topológica y densidad de puntos periódicos.

2. La definición de **caos según Block y Coppel** [8], basada en el concepto de *turbulencia*.

3. La definición de **caos según Li-Yorke** [20], caracterizada por la existencia de un conjunto *scrambled* no numerable.

Presentaremos y analizaremos formalmente estas definiciones de caos, estableciendo sus relaciones lógicas para mapas continuos en intervalos compactos. El objetivo es demostrar cómo el orden de Sharkovsky condiciona la aparición de caos en cada sentido, lo cual se ilustrará analizando cómo varía la dinámica caótica de la familia de **mapas tienda truncadas** T_h (introducida en la Sección 3.2.1) con su parámetro h, conectando con las propiedades relevantes ([8, 14]).

4.1 Tres definiciones

4.1.1 Caos según Devaney

La definición de caos propuesta por Devaney en el año 1986 presenta un enfoque topológico de este fenómeno y consta de tres conceptos fundamentales que describiremos a continuación.

Definición 4.1.1. *Dado un espacio métrico (X, d) sin puntos aislados, un sistema dinámico $F : X \to X$ tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales si existe algún $\delta > 0$ tal que $\forall x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ con $d(x, y) < \epsilon$ tal que para algún $n \geq 0$, $d(F^n(x), F^n(y)) > \delta$.*

Aquí, δ es llamada constante de sensibilidad de F y d representa a la métrica usual. En particular, para el caso unidimensional es dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Antes de continuar, queremos enfatizar que la dependencia sensible no significa que todos los puntos cerca de x se alejan después de iterar f, sino que existe *al menos un punto cerca a* x que eventualmente se aleja al menos en una distancia δ bajo algún iterado de f.

Ejemplo 4.1.2. *Consideremos el mapa $T : [0, 1] \to [0, 1]$ definido por $T(x) = 2x$* mód 1. *T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = 1/4$. En efecto, si $x \in [0, 1]$ y $\epsilon > 0$, el intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ siempre contiene dos puntos distintos y_1 y y_2. Por la definición expansiva de T (duplica distancias, si $x \neq 1/2$), podemos encontrar un $n \geq 0$ tal que $T^n(y_1)$ y $T^n(y_2)$ caen en mitades diferentes del intervalo $[0, 1]$. De forma que si distancia es significativa. Por ejemplo, se puede afirmar que para un n, $|T^n(y_1) - T^n(y_2)| \geq 1/2 > 1/4$. esto demuestra la dependencia sensible con constante $\delta = 1/4$*

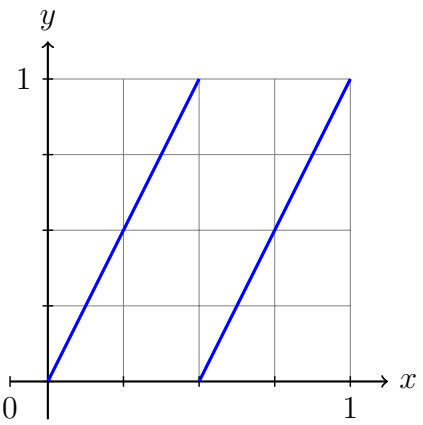


Figura 4.1: Ejemplo dependencia sensible

El segundo ingrediente esencial para la definición caos exige que el mapa T empalme los subconjuntos no triviales de X. Este concepto es conocido como transitividad topológica.

Definición 4.1.3. *Sea T mapa continuo es topológicamente transitiva o simplemente transitiva, si y solo si, para abiertos cualquiera U y V existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Observación 4.1.4. *Intuitivamente, un mapa transitivo T tiene puntos cuya orbita, con el tiempo, se traslada bajo iteración desde una vecindad arbitraria a cualquier otra vecindad. En consecuencia, el sistema dinámico no puede descomponerse en dos conjuntos abiertos disjuntos que sean invariantes bajo T. Además, si T tiene una órbita densa, entonces es claramente transitiva. La afirmación recíproca también es cierta para subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ o S^1. Debido a que la prueba requiere de otras herramientas como el Teorema de Categoría de Baire, no presentaremos tal demostración aquí.*

Observación 4.1.5. *La transitividad topologica es una propiedad invariante por conjugación topológica. Es decir: si dos sistemas dinámicos $T : M \to M$ y $L : N \to N$ son topológicamente conjugadas. Entonces, T es topológicamente transitiva, si y solo si, L es topológicamente transitiva.*

Ejemplo 4.1.6. *Toda rotación $R_\theta : S^1 \to S^1$ irracional, es decir, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es transitiva. Para esto, basta observar que dado $x \in S^1$ su órbita es infinita y densa en S^1. Y por tanto es transitiva.*

En este ejemplo podemos notar que si bien la rotación irracional es topológicamente transitiva, no necesariamente es sensible a condiciones iniciales. Esto sucede por que R_θ preserva distancia entre puntos.

Definición 4.1.7 (Devaney)**.** *Sea $T : X \to X$ un sistema dinámico en un espacio métrico sin puntos aislados se dice caótico en el sentido de Devaney, o simplemente D-caótico, si satisface las siguientes condiciones:*

1. *T tiene dependencia sensible a condiciones iniciales,*
2. *T es topológicamente transitiva,*
3. *T posee un conjunto denso de puntos periódicos.*

La última condición exige que el sistema debe contener muchas órbitas con un comportamiento asintótico, o sea, que exista un conjunto denso con órbitas periódicas.

Ejemplo 4.1.8. *Sea $f : S^1 \to S^1$ definida por $f(\alpha) = 2\alpha$ es D-caótica según 4.1.7. En efecto, al iterar dos puntos en S^1 por f la diferencia entre sus ángulos se duplica.*

Entonces, f es sensible a condiciones iniciales.
Para verificar la transitividad, consideremos un arco abierto en $V \subset S^1$ suficientemente pequeño. Al iterar V por f, notamos que para algún k, $f^k(V)$ cubre todo S^1. La densidad de puntos periódicos se sigue de que los puntos de la forma $\alpha = 2\pi k/(2^n - 1)$, donde $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, son periódicos (como se vio en el Ejemplo 1.0.12) y forman un conjunto denso en S^1.

Después de que esta definición haya sido introducida, en 1992 Banks, Brooks, Cairns, Davis y Stacey (ver [5]) probaron que se puede prescindir de la dependencia sensible. Así, la definición de caos queda reducida a:

Definición 4.1.9 (Devaney reducida)**.** *Sea $T : X \to X$ un sistema dinámico en un espacio métrico **sin puntos aislados** se dice caótico si satisface las siguientes condiciones:*

1. *T es topológicamente transitiva,*

2. *T posee un conjunto denso de puntos periódicos.*

Recordamos al lector que existen muchas posibles definiciones de caos en un sistema dinámico, algunas más fuertes y otras más débiles que la de Devaney. Sin embargo, en el libro *An introduction to chaotic dynamical systems* ([14]), el autor destaca la elección de esta definición porque se aplica a un gran número de casos.

Ejemplo 4.1.10. *La función en el intervalo $[0, 1]$ dada por $F_4(x) = 4x(1 - x)$. es D-caótica.*

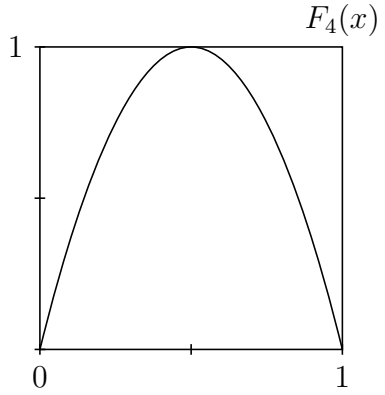


Figura 4.2: Mapa logístico $r = 4$

Demostración. Consideremos la función $f(\theta)$ del ejemplo 4.1.8. Consideremos $h : S^1 \to [-1, 1]$ tal que $h_1(\theta) = \cos\theta$ y $q(x) = 2x^2 - 1$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} h_1 \circ f(\theta) &= \cos(2\theta) \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= q \circ h_1(\theta). \end{aligned}$$

Lo que significa que h_1 es una conjugación entre q y f. Recordemos que q y F_4 son conjugadas por $\tilde{h}(t) = \frac{1}{2}(1-t)$ (ver ejemplo 1.0.15). Por tanto, F_4 y f son topológicamente conjugados.

Además, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ [-1,1] & \xrightarrow{q} & [-1,1] \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}} \\ [0,1] & \xrightarrow{F_4} & [0,1]. \end{array}$$

Así, de la observación 4.1.5 se deduce inmediatamente que F_4 es topológicamente transitivo.

Para verificar la densidad de puntos periódicos respecto F_4, consideramos un abierto U en $[0,1]$. Por la densidad de puntos periódicos respecto f existe un punto p de periodo k en $\hat{U} \subset S^1$. Donde $\hat{U}$ es tal que $\hat{h} \circ h_1(\hat{U}) = U$. Luego

$$F_4^k(\hat{h} \circ h_1(p)) = \hat{h} \circ h_1 \circ f^k(p) = \hat{h} \circ h_1(p)$$

Lo que implica que existe un punto periódico en U. De acuerdo a la definición 4.1.9 no es necesario demostrar la dependencia sensible. Sin embargo, en este caso, la propiedad se puede verificar fácilmente. En efecto, notemos que dada una vecindad U, existe n tal que $f^n(\tilde{U})$ cubre todo S^1. Por tanto $F_4^n(U)$ cubre $[0,1]$. Lo que implica que dos puntos cualquiera en $[0,1]$ pueden alejarse al menos $\delta > 0$.

□

4.1.2 Caos según Block y Coppel

La siguiente definición, propuesta por Block y Coppel en 1992 (ver [8]) para el caso unidimensional, se caracterizada por un nuevo concepto llamado turbulencia.

Definición 4.1.11 (Turbulencia)**.** *Sea $f : I \to I$ mapa continuo en un intervalos no nulo, es llamada turbulenta si existen sub-intervalos compactos J, K cuja intersección consiste de a lo más un punto tal que:*

$$J \cup K \subseteq f(J) \cap f(K).$$

Y es llamada estrictamente turbulenta si los intervalos J y K son disjuntos.

Ejemplo 4.1.12. *Considere el mapa tienda $T : [0,1] \to [0,1]$ de la sección 3.2.1. En este caso, los intervalos $J = [0, 1/2]$ y $K = [1/2, 1]$ verifican que $T(J) = T(K) = [0,1]$ y por tanto T es turbulenta pero no estrictamente turbulenta.*

Si bien la presencia de puntos periódicos no es explícita en la definición de turbulencia, en [8], Block y Coppel demostraron que existe una conexión entre la turbulencia y la periodicidad. En particular:

- Si $f : I \to I$ es turbulenta, entonces f posee un punto de periodo 3.
- Si $f : I \to I$ es turbulenta, entonces f tiene puntos periódicos de todos los periodos.
- Si f tiene un punto de periodo impar $n > 1$, entonces f^2 es estrictamente turbulenta.

Estos resultados conducen a la siguiente definición de caos en el sentido de Block y Coppel:

Definición 4.1.13 (Block-Coppel)**.** *Un mapa es caótico en el sentido Block-Coppel si alguna de las tres condiciones, que son equivalentes, se verifica:*

1. *f tiene punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2.*
2. *f^m es estrictamente turbulenta para algún entero positivo m.*
3. *f^n es turbulenta para algún entero positivo n.*

Un resultado adicional que refuerza la relación entre el caos y los puntos periódicos es el siguiente:

f es caótico en el sentido de Block-Coppel si y solo si existe $x \in I$ tal que $\omega(x, f)$ contiene una orbita periódica como subconjunto propio.

Ejemplo 4.1.14. ***Mapa logístico***

Consideremos el mapa $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definido por:

$$f(x) = rx(1 - x),$$

donde r es un parámetro .

- *Turbulencia: Para valores de r suficientemente grandes, el mapa ese turbulento. En este caso, podemos elegir dos subintervalos $J = [0, 1/2]$ y $K = [1/2, 1]$, y se cumple que:*

$$f(J) = [0, 1] \quad y \quad f(K) = [0, 1],$$

  lo que implica que $J \cup K = [0, 1] \subseteq f(J) \cap f(K)$, mostrando que f es turbulento.

- *Punto periódico de periodo 3: Para ciertos valores de r, como por ejemplo $r = 3{,}9$, el mapa logístico tiene un punto periódico de periodo 3.*
- *Caos según Block y Coppel: Si f tiene un punto periódico de periodo 3 (como en el caso de $r = 3{,}9$), entonces el mapa logístico es caótico en el sentido Block-Coppel.*

4.1.3 Según Li-Yorke

En [20], Li y Yorke introducen el concepto de caos mediante una definición que establece dos condiciones fundamentales: la existencia de órbitas de todos los periodos y la presencia de un conjunto sin puntos aproximadamente periódicos.

Definición 4.1.15 (Li-Yorke). *Sea $f : X \to X$ un mapa continuo en un espacio métrico compacto (X, d). Se dice que f es caótico en el sentido de Li-Yorke si existe un subconjunto no numerable $S \subset X$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$ *para todo* $x, y \in S$, *con* $x \neq y$.
2. $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ *para todo* $x, y \in S$, *con* $x \neq y$.
3. $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) > 0$ *para todo* $x \in S$ *y cada* $p \in X$ *periódico.*
4. f *tiene puntos periódicos de todos los periodos* $n \in \mathbb{N}$.

El conjunto S que satisface las condiciones (1), (2) y (3) se denomina **scrambled**.

Observación 4.1.16.
1. *La condición (4), que establece la existencia de puntos periódicos de todos los periodos, no es estrictamente necesaria para definir el caos en el sentido de Li-Yorke. Diversos autores han señalado que la existencia de un conjunto scrambled no numerable implica, en muchos casos, la presencia de puntos periódicos [8], Cap. VI, Sec. 3.*
2. *La condición (3) suele considerarse redundante, ya que, de acuerdo con Block y Coppel [8], si dos puntos aproximadamente periódicos x y y están suficientemente próximos, no pueden satisfacer simultáneamente las condiciones (1) y (2).*

Debido a estas observaciones, una versión reducida y frecuentemente utilizada de la definición de caos en el sentido de Li-Yorke es la siguiente:

Definición 4.1.17 (Li-Yorke reducida). *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es caótica en el sentido de Li-Yorke si existe un conjunto $S \subset X$ scrambled no numerable.*

El resultado principal de Li y Yorke [20] establece que si f tiene un punto de periodo tres, entonces existen subintervalos $[a, b]$ y $[b, c]$ en los cuales la dinámica de f induce un comportamiento caótico. La construcción del conjunto scrambled S se basa en la iteración de intervalos adecuados, generando una sucesión de subconjuntos encajados cuyas órbitas presentan sensibilidad a las condiciones iniciales y ausencia de periodicidad.

En particular, se demuestra que para cada par de puntos $x, y \in S$, las iteraciones $f^n(x)$ y $f^n(y)$ pueden acercarse arbitrariamente para ciertos valores de n y alejarse

significativamente en otros, lo que garantiza que S satisface las condiciones de la Definición 4.1.15. Además, se observa que S no contiene puntos aproximadamente periódicos, reforzando así la caracterización del caos en este contexto. Para una discusión más detallada de los conjuntos scrambled, el lector puede revisar [8], Capítulo VI.

En el caso de $X = I$ con I un intervalo compacto, es posible caracterizar la noción de caos en el sentido de Li-Yorke en términos de la presencia de puntos no aproximadamente periódicos:

Proposición 4.1.18. *Sea un mapa continuo $f : I \to I$ con I un intervalo compacto. Entonces f es caótica en el sentido de Li-Yorke si y sólo si no todo punto en I es aproximadamente periódico.*

4.2 Relaciones para mapas sobre intervalos

Para completitud de este trabajo, en esta sección enunciamos las relaciones mutuas entre las tres nociones de caos descritas en la sección anterior, considerando el caso particular de mapas definidos en intervalos. Nos enfocaremos en mapas continuos $f : I \to I$ definidos sobre un intervalo compacto $I = [a, b]$, con $a < b$.

El resultado principal de esta sección establece que, en este contexto, el caos en el sentido de Block-Coppel y el caos en el sentido de Devaney son equivalentes. Además, se demuestra que el caos en el sentido de Block-Coppel o Devaney implica el caos en el sentido de Li-Yorke. Sin embargo, la recíproca no siempre es cierta. Para ver que no se cumple la necesidad en esta última afirmación, presentamos al lector un contra-ejemplo en la siguiente sección.

Teorema 4.2.1. *f es caótico en el sentido **Devaney**, si y solo si, f es caótico en el sentido **Block-Coppel**.*

Además, la noción de caos de Li-Yorke resulta ser la más débil de las tres:

Teorema 4.2.2. *Si f es caótico en el sentido **Block-Coppel**, entonces f **Li-Yorke** caótico.*

Los detalles de las demostraciones de estos resultados pueden ser vistos en [4]. Finalmente, el siguiente resultado proporciona un criterio para descartar la presencia de caos en el sentido de Li-Yorke y, por lo tanto, en ninguno de los otros dos sentidos considerados.

Lema 4.2.3. *Si f es caótico en el sentido **Li-Yorke**, entonces f posee infinitos puntos periódicos.*

Para concluir esta sección, queremos destacar la relación entre la noción de caos y el *Teorema de Sharkovsky*. La demostración presentada por Aulbach y Kieninger

en [4], distingue entre los casos en los que f es caótico en el sentido de Block-Coppel o no. Por el **Teorema de Sharkovsky**, si f es caótico en este sentido, entonces, al poseer órbitas de periodo distinto de una potencia de 2, tiene puntos periódicos de periodo 2^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.3 La función tienda truncada

Un caso que ilustra la relación entre las tres definiciones de caos es la función *tienda truncada* vista en la Sección 3.2.1. Esta función fue introducida en [23] y estudiada por Block y Coppel en [8]. Se obtiene modificando la función tienda estándar al restringir su altura máxima. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función tienda clásica definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dado un parámetro $\lambda \in [0,1]$, reescribimos la familia de funciones tienda truncadas dada en la Sección 3.2.1 como:

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & \text{si } T(x) > \lambda, \\ T(x), & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para $\lambda = 1$, la función coincide con la tienda estándar T. A medida que λ disminuye, se introduce una región de valores constantes en la parte superior del gráfico de la función, lo que altera su dinámica de forma significativa.

Para distinguir los valores de λ que determinan distintos tipos de caos, se define la sucesión:

$$\lambda_n := \text{mín}\,\{\lambda \in [0,1]; T \text{ tiene un punto de periodo } 2^n \text{ en } [0,\lambda]\}$$

Aquí, el *Teorema de Sharkovsky* tiene una papel fundamental para concluir que tal sucesión es creciente (ver [4]) y limitada por 1. Se considera entonces el límite:

$$\lambda^* := \lim_{n\to\infty} \lambda_n.$$

Observación 4.3.1. *A continuación, se describe el comportamiento caótico de cada miembro de la familia de mapas tienda truncada según el valor de λ.*

1. *Para $0 \leq \lambda < \lambda^*$, la función T_λ no es caótica en el sentido de Li-Yorke, y por tanto ninguno de los otros sentidos considerados (Block-Coppel y Devaney).*

2. *Existe un valor crítico λ^* tal que T_{λ^*} es caótica en el sentido de Li-Yorke, pero no en los otros dos sentidos.*

3. *Para $\lambda > \lambda^*$, la función caótica en el sentido Block-Coppel y por tanto es caótica en los tres sentidos.*

En el caso de la función tienda truncada T_λ, la presencia de ciertos periodos depende del valor de λ:

Este ejemplo muestra cómo la relación entre los diferentes tipos de caos está directamente influenciada por la estructura de los puntos periódicos de la función. Esta, a su vez, está gobernada por el orden de Sharkovsky. Por lo tanto, este ejemplo ilustra de manera concreta cómo el Teorema de Sharkovsky actúa como un criterio fundamental: al determinar qué periodos deben coexistir, predice si las condiciones requeridas por las definiciones de caos de Li-Yorke, Block-Coppel o Devaney pueden ser satisfechas por un sistema dinámico unidimensional dado.

Para un estudio detallado de la conexión entre periodos y caos en sistemas unidimensionales, sugerimos al lector revisar [28], [8] y [4].

Conclusiones

El *Teorema de Sharkovsky* y su recíproco han demostrado ser una herramienta fundamental en la comprensión de la estructura periódica de los sistemas dinámicos unidimensionales. A lo largo de este trabajo, hemos explorado sus implicaciones en la caracterización del caos, estableciendo cómo el orden de periodos establecida por Sharkovsky influye en las tres definiciones principales de caos: Li-Yorke, Devaney y Block-Coppel. En particular, hemos visto que la presencia de ciertos periodos condiciona la aparición de caos en distintos sentidos, y que la función tienda truncada ofrece un ejemplo ilustrativo de esta relación.

Estos resultados confirman que la clasificación de los periodos establecida por el Teorema de Sharkovsky no solo describe la estructura periódica de un sistema dinámico unidimensional, sino que también condiciona la aparición de caos en distintos sentidos. En particular, el orden impuesto por este teorema permite predecir la presencia de puntos periódicos de todos los periodos cuando existe un punto de periodo tres. Lo que resulta crucial para el estudio del caos en el sentido de Li-Yorke. Además, la estructura periódica impuesta por Sharkovsky facilita la transitividad topológica y la sensibilidad a las condiciones iniciales, propiedades esenciales en el caos en el sentido de Devaney y Block-Coppel. El mapa tienda truncada es un ejemplo concreto de cómo los diferentes tipos de caos dependen de la organización de los periodos establecida por Sharkovsky, proporcionando un modelo concreto para comprender la interacción entre periodicidad y caos.

En resumen, este trabajo subraya el poder predictivo del Teorema de Sharkovsky. Su ordenamiento no solo describe qué periodos pueden coexistir, sino que fundamentalmente organiza la aparición y determina el tipo de comportamiento caótico en sistemas dinámicos unidimensionales, revelando una conexión esencial entre el orden periódico y la complejidad de la dinámica.

Bibliografía

[1] Alsedà, L., Llibre, J., and Misiurewicz, M. (2000). *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one* (2nd ed., Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol. 5). World Scientific.

[2] AlSharawi, Z., Angelos, J., Elaydi, S., and Rakesh, L. (2006). An extension of Sharkovsky's theorem to periodic difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 316*(1), 128–141. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.059

[3] Anušić, A., Bruin, H., and Činč, J. (2020). Topological properties of Lorenz maps derived from unimodal maps. *Journal of Difference Equations and Applications, 26*(8), 1174–1193.

[4] Aullabach, B., and Kieninger, B. (2001). Three definitions of chaos. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 1*, 23–37.

[5] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., and Stacey, P. (1992). On Devaney's Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly, 99*(4), 332–334. https://doi.org/10.2307/2324899

[6] Block, L. (1981). Periods of periodic points of maps of the circle which have a fixed point. *Proceedings of the American Mathematical Society, 82*, 481–486.

[7] Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M., and Young, L. (1980). Periodic points and topological entropy of one-dimensional maps. In Z. Nitecki and C. Robinson (Eds.), *Global theory of dynamical systems* (pp. 18–34). Springer.

[8] Block, L., and Coppel, W. (1992). *Dynamics in one dimension* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1513). Springer.

[9] Blokh, A., and Misiurewicz, M. (2024). Evolution of the Sharkovsky theorem. *Ukrainian Mathematical Journal, 76*, 51–64. https://doi.org/10.1007/s11253-024-02306-x

[10] Burkart, K. (1982). Interval mapping graphs and periodic points of continuous functions. *Journal of Combinatorial Theory, Series B, 32*, 57–68.

[11] Burns, K., and Hasselblatt, B. (2011). The Sharkovsky theorem: A natural direct proof. *The American Mathematical Monthly, 118*(3), 229–244. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.03.229

[12] Burns, K., and Hasselblatt, B. (2007). Sharkovsky's theorem.

[13] Coppel, W. A. (1950). On the iteration of real continuous functions. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 46*(2), 215–233.

[14] Devaney, R. L. (2021). *An introduction to chaotic dynamical systems* (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9780429280801

[15] Du, B.-S. (2007). A collection of simple proofs of Sharkovsky's theorem. *arXiv*. https://arxiv.org/abs/math/0703592v3

[16] Du, B.-S. (2004). A simple proof of Sharkovsky's theorem. *The American Mathematical Monthly, 111*, 595–599.

[17] Efremova, L. S. (1978). Periodic orbits and the degree of a continuous map of the circle (in Russian). *Differential and Integral Equations (Gor'kii)*, 2, 109–115.

[18] Elaydi, S. (1996). On a converse of Sharkovsky's theorem. *The American Mathematical Monthly, 103*(5), 386–392. https://doi.org/10.2307/2974928

[19] Ho, C., and Morris, C. (1981). A graph-theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions. *Pacific Journal of Mathematics, 96*, 361–370.

[20] Li, T., and Yorke, J. A. (1975). Periodic three and chaos. *The American Mathematical Monthly, 82*, 985–992.

[21] Li, T., Yorke, J. A., Misiurewicz, M., and Pianigiani, G. (1982). No division implies chaos. *Transactions of the American Mathematical Society, 273*, 191–199.

[22] Misiurewicz, M. (1982). Periodic points of maps of degree one of a circle. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*.

[23] Misiurewicz, M., and Smítal, J. (1989). Smooth chaotic maps with zero topological entropy. *Ergodic Theory and Dynamical Systems, 8*(3), 421–424.

[24] Misiurewicz, M. (1997). Remarks on Sharkovsky's theorem. *Department of Mathematical Sciences, Indiana University*.

[25] Napoles, J. (2005). Funciones continuas, órbitas y caos: El teorema de Sarkovskii. *ResearchGate*. https://www.researchgate.net/publication/28127784

[26] Nitecki, Z. (1982). Topological dynamics on the interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems.*

[27] Sarkovskii, A. N. (1964). Coexistencia de ciclos de una transformación continua de la recta en sí misma. *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, 16*(1), 61–71.

[28] Sarkovskii, A. N. (1965). On cycles and structure of a continuous mapping. *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, 17*, 865–870.

[29] Štefan, P. (1977). A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line. *Communications in Mathematical Physics, 54*, 237–248.

[30] Straffin, P. (1978). Periodic points of continuous functions. *Mathematical Magazine, 51*, 99–105.

[31] Vieru, A. (2008). *Generalized iteration, catastrophes and generalized Sharkovsky's ordering.* arXiv preprint arXiv:0801.3755.

[32] Zgliczyński, P. (1999). Sharkovskii's theorem for multidimensional perturbations of one-dimensional maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems, 19*(6), 1655–1684.

[33] Zheng, R. (2024). Sharkovsky ordering on the Mandelbrot set.

[34] Zheng, R. (2024). The appearance of Sharkovsky ordering in the Mandelbrot set. Presentation at "Women in Dynamical Systems and Ergodic Theory,Çentro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi.