Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

El teorema de Poincaré-Bendixson: generalizaciones y aplicaciones

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Miguel Angel HUAYLLA SALOMÉ

ASESOR

Dr. Renato Mario BENAZIC TOMÉ

Lima, Perú

2023



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Huaylla, M. (2023). *El teorema de Poincaré-Bendixson: generalizaciones y aplicaciones*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Académico Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Miguel Angel Huaylla Salomé
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	72764567
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-7848-3538
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Renato Mario Benazic Tomé
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445668
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-1897-4383
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43688114
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional.
Grupo de investigación	Dyamical Systems, Differential Equations and their Applications - EQUATION
Agencia de financiamiento	No aplica
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.0603526554608 Longitud: 77.0821112394333
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Febrero 2022 – Marzo 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras **https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01**

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 4:00 horas del lunes 24 de julio del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (PRESIDENTE), Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO) y el Dr. Renato Mario Benazic Tome (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: **"EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON: GENERALIZACIONES Y APLICACIONES"**, presentado por el señor Bachiller Miguel Angel Huaylla Salomé, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación Sobresaliente con mención con un calificativo promedio de Diecinueve (19).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, manifestó que el señor Bachiller Miguel Angel Huaylla Salomé, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis de manera virtual, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 5:15 pm horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
PRESIDENTE

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
MIEMBRO

Dr. Renato Mario Benazic Tomé
MIEMBRO ASESOR

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Renato Mario Benazic Tomé en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 000399-2022-D-FCM/UNMSM de la tesis de investigación/trabajo académico, cuyo título es “El Teorema de Poincaré-Bendixson: Generalizaciones y aplicaciones”, presentado por el bachiller Miguel Angel Huaylla Salomé, para optar el título de Licenciado en Matemáticas, CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y deSimilitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documentoevaluado cuenta con el porcentaje de 10% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.



Firma del Asesor
DNI: 06445668
Nombres y apellidos del asesor: Renato Mario Benazic Tomé



DEDICATORIA

La presente tesis lo dedico a mis padres Wilfredo Santos Huaylla Meza y Teresa Mercedes Salomé Gómez, ya que sin ellos ninguno de mis logros personales y profesionales estarían completos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por guiar mis pasos día a día y ser mi fortaleza en todo momento. Agradezco a mis padres, Teresa Mercedes Salomé Gómez y Wilfredo Santos Huaylla Meza, por su apoyo constante a lo largo de toda mi vida, enseñándome a dar lo mejor de mi y nunca rendirme.

Al Dr. Renato Benazic por su tiempo, dedicación y asesoría brindada a lo largo del presente trabajo, así mismo por su paciencia y múltiples sugerencias para concluir con éxito esta trabajo de tesis.

RESUMEN

El teorema de Poincaré-Bendixson: Generalizaciones y aplicaciones

Miguel Angel, Huaylla Salomé

Abril - 2023

Asesor : Dr. Renato Mario, Benazic Tome.
Título obtenido : Licenciado en Matemática.

El primer objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar la demostración del teorema de Poincaré-Bendixson en el plano para flujos de clase C^1. Como un segundo objetivo principal, presentamos y demostramos el teorema de Denjoy-Schwartz, el cual es "en cierto sentido" una generación del teorema de Poincaré-Bendixson para flujos de clase C^2 en variedades compactas bidimensionales. Así mismo, como un tercer y último objetivo principal se muestran varias aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson en distintas ramas de la matemática, para esto requerimos detallar algunos conceptos y presentar lemas que nos permitan estar en condiciones de hacer esto posible.

Palabras claves: Ciclo límite, Flujo, Órbita, teorema de Poincaré-Bendixson, conjunto límite, teorema de Denjoy-Schwartz, conjunto minimal.

ABSTRACT

The Poincaré-Bendixson Theorem: Generalizations and Applications
Huaylla, Miguel

April - 2023

Adviser : Dr. Renato Mario, Benazic Tome.
Obtained : Graduate in Mathematics.

The first main objective of this thesis work is to present the proof of the Poincaré-Bendixson theorem in the plane for flows of class C^1. As a second main objective, we present and prove the Denjoy-Schwartz theorem, which is "in a certain sense" a generation of the Poincaré-Bendixson theorem for flows of class C^2 in two-dimensional compact manifolds. Furthermore, as a third and last main objective, several applications of the Poincaré-Bendixson theorem are shown in different branches of mathematics, for this we need to detail some concepts and present lemmas that allow us to be in a position to make this possible.

Keywords: Limit cycle, flow, orbit, Poincaré-Bendixson theorem, limit set, Denjoy-Schwartz theorem, minimal set.

INDICE GENERAL

Introducción **8**

1. Preliminares **9**

2. Teorema de Poincaré-Bendixson en el plano **18**
2.1. Ciclos límite 26
2.2. Aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson 29
2.2.1. Aplicación 1 29
2.2.2. Aplicación 2 31
2.2.3. Aplicación 3 32
2.2.4. Aplicación 4 34

3. Preliminares variedades **35**
3.1. Teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera $\mathbb{S}^2$ 42
3.1.1. Algunos ejemplos en la esfera 45
3.1.2. Aplicación 5 49
3.1.3. Aplicación 6 50
3.2. Flujo en el Toro 56
3.3. Índice de un campo vectorial en un punto 60
3.4. Característica de Euler-Poincaré 63
3.5. Recubrimiento doble orientable 66

4. Teorema de Poncaré-Bendixson en variedades bidimensionales **70**

5. Conclusiones **83**

6. Bibliografía **84**

Introducción

Henri Poincaré desarrolló la teoría del análisis cuantitativo de ecuaciones diferenciales a fines del siglo XIX, inspirado en el problema de los tres cuerpos, con el objetivo de describir los diagramas de fase de ecuaciones diferenciales autónomas. El concepto de ciclo límite fue definido por primera vez como una órbita periódicas y aislada que puede aparecer en el diagrama de fase, suele ser difícil demostrar analíticamente la existencia y unicidad de ciclos límite incluso en ejemplos concretos. El 21 de enero de 1889, Henri Poincaré recibió el premio del Rey Oscar II de Suecia y Noruega, lo que supuso una importante contribución al progreso de las matemáticas en general y a la comprensión del problema de los tres cuerpos en particular. En la literatura existen numerosos resultados que se centran en la existencia y/o unicidad de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales en el plano. Se pone especial énfasis a un resultado que fue probado en 1886 por Henri Poincaré [30] y, más rigurosamente, en 1901 por Ivar Bendixson [4], ahora se conoce como el teorema de Poincaré-Bendixson. Este resultado establece una clasificación del conjunto $\omega-$límite de cualquier órbita difeomorfa a un intervalo no acotado, en el contexto de un campo de vectores de clase C^1 definido en un conjunto abierto del plano con un número finito de puntos singulares y donde la órbita positiva esté contenida en un compacto. El impacto que tuvo este resultado en muchas áreas de la matemática es asombroso, en este trabajo se presentan varias aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson no solo en ecuaciones diferenciales. Por otro lado, en la demostración de este teorema se nota la importancia de la validez del teorema de la curva de Jordan en el plano, así que pensar en una generalización natural de este teorema necesita al menos tener una herramienta equivalente. Sin embargo es posible demostrar que una curva de Jordan en la esfera bidimensional divide a la esfera en dos componentes conexas, ambas acotadas, cuyas fronteras coinciden con la curva de Jordan. Haciendo uso de este hecho, presentamos el teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera bidimensional, como una primera generalización natural. Parece ser lógico pensar que este resultado se puede generalizar a variedades compactas bidimensionales, pero esto no es del todo cierto pues el flujo irracional en el toro muestra un tipo de conjunto $\omega-$límite distinto a los ya descritos en el teorema de Poincaré-Bendixson. Debemos introducir un nuevo concepto para así lograr una versión equivalente del teorema de Poincaré-Bendixson que pueda ser generalizado a variedades bidimensionales compactas, este concepto es el de conjunto minimal. En 1963 Arthur Schwartz, en [34], demostró que los flujos de clase C^2 sobre variedades bidimensionales compactas pueden tener conjuntos minimales únicamente de tres tipos: singularidades, órbita periódica o toda la variedad (en este último caso la variedad es todo el toro).

1

Preliminares

El objetivo que tiene este capítulo es el de establecer la notación básica y la terminología que se utilizará a lo largo de toda la tesis. Por otro lado, se presentan algunos resultados que serán usados de forma auxiliar.

Definición 1.1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Un *campo vectorial de clase* C^k en U, donde $0 \leq k \leq +\infty$, es una función

$$\begin{array}{rccl} X: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & X(x) := \big(X_1(x), X_2(x), \ldots, X_n(x)\big) \end{array}$$

que satisface las siguiente condiciones:

1) Si $x \in U$, entonces $X(x) \in \mathbb{R}^n$ es un vector cuyo punto de aplicación es x.

2) $X_j : U \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^k en U, para todo $1 \leq j \leq n$. Las funciones X_j son llamadas *funciones coordenadas* del campo X.

Definición 1.2. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y X un campo vectorial de clase C^k en U, donde $1 \leq k \leq +\infty$.

1) La *ecuación diferencial ordinaria* (E.D.O.) asociada al campo X es dada por

$$x' = X(x) \tag{1.1}$$

2) Una *solución* de la ecuación diferencial ordinaria (1.1) es una función $\varphi : I \to U$ diferenciable en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que:

$$\varphi'(t) = X\big(\varphi(t)\big), \quad \forall t \in I.$$

Notemos que si X es un campo vectorial de clase C^k, entonces la solución $\varphi : I \to U$ de la ecuación diferencial ordinaria (1.1) es un camino de clase C^{k+1}.

Definición 1.3. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, X un campo vectorial de clase C^k en U donde $1 \leq k \leq +\infty$, $p \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$.

1) El *problema de valor inicial* (P.V.I.) asociado al campo X, es dado por

$$\left| \begin{array}{rcl} x' & = & X(x) \\ x(0) & = & p. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

2) Una *solución* del P.V.I. (1.2) es una función $\varphi : I \to U$ diferenciable en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tal que

   a) $t_0 \in I$,

   b) $\varphi(t_0) = p$,

   c) $\varphi'(t) = X\big(\varphi(t)\big), \quad \forall t \in I.$

Una solución $\varphi_M : I_M \to U$ de (1.2) es llamada *solución maximal* y su intervalo I_M es llamado *intervalo maximal* si, y solamente si, toda solución $\psi : J \to U$ del P.V.I. (1.2) tal que $I_M \subset J$ y $\psi|_{I_M} = \varphi_M$ implica que $I_M = J$. En este caso denotaremos a dicha solución maximal del P.V.I. (1.2) de la siguiente manera

$$\varphi_p : I(p) =]\omega_-(p), \omega_+(p)[\longrightarrow U.$$

Definamos $D_X = \{(t,p) : t \in I(p) \wedge p \in U\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi_X : & D_X & \longrightarrow & U \\ & (t,p) & \mapsto & \varphi_X(t,p) := \varphi_p(t). \end{array}$$

La función φ_X es llamada *flujo asociado al campo vectorial* X. Por otro lado la *órbita de* X *que pasa por el punto* p, denotada por $\mathcal{O}_X(p)$ es el conjunto

$$\mathcal{O}_X(p) = \big\{\varphi_X(t,p) : t \in I(p)\big\}$$

donde $\varphi_X : D_X \to U$ es el flujo generado por el campo X. De no existir ambigüedad respecto al campo vectorial con el cual estamos trabajando, denotaremos $\mathcal{O}(p)$ en vez de $\mathcal{O}_X(p)$.

Teorema 1.1. Dado un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ y $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k. Sea $\varphi_p :]\omega_-(p), \omega_+(p)[\to U$ solución maximal del problema de valor inicial (1.2). Si $\omega_+(p) \in \mathbb{R}$ (respectivamente $\omega_-(p) \in \mathbb{R}$), entonces para todo compacto $K \subset U$, existe $V_+ \subset \mathbb{R}$ un entorno de $\omega_+(p)$ (respectivamente $V_- \subset \mathbb{R}$ un entorno de $\omega_-(p)$) tal que $\varphi_p(t) \notin K$ para $t \in V_+ \cap [t_0, \omega_+(p)[$ (respectivamente $t \in V_- \cap]\omega_-(p), t_0]$).

Demostración. Véase [2, p. 191]. □

Proposición 1.1. Sean un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k, $p \in U$ y $\varphi_p : I(p) \to U$ solución maximal del problema de valor inicial (1.2). Si existen $t_1, t_2 \in I(p)$ con $t_1 \neq t_2$ tales que $\varphi_p(t_1) = \varphi_p(t_2)$, entonces $I(p) = \mathbb{R}$ y existe $T > 0$ tal que $\varphi_p(t + T) = \varphi_p(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, esto quiere decir que φ_p es una función periódica.

Demostración. Véase [2, p. 224]. □

Proposición 1.2. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $p \in U$, entonces las órbitas $\mathcal{O}(p)$ son de uno de los tres tipos siguientes:

1. Difeomorfas a un intervalo no acotado.
2. Un punto (cuando p es singularidad de X).
3. Difeomorfas a un círculo ($\mathcal{O}(p)$ es una órbita periódica).

Demostración. Véase [2, p. 226]. □

Definición 1.4. Dado un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$. Llamaremos por *sección transversal local*, de clase C^k, al campo X en $p \in U$ es una aplicación $f : A \to U$ de clase C^k (donde A es un abierto conexo de $\mathbb{R}^{n-1}$) que satisface las siguiente propiedades:

1) $f : A \to U$ es una inmersión homeomorfa, es decir
   a) f es una inmersión, esto es $Df(x) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $x \in A$.
   b) $f : A \to f(A) := \Sigma$ es un homeomorfismo.
2) $p \in \Sigma$.
3) $Df(x)(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus \text{Span}\big\{X(f(x))\big\} = \mathbb{R}^n$ para todo $x \in A$.

La siguiente proposición garantiza la existencia de secciones transversales en entornos de puntos regulares de campos vectoriales de clase C^k.

Proposición 1.3. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$. Si p es un punto regular de X, entonces existe una sección transversal local f, de clase C^∞, al campo X en el punto p de modo que $f(0) = p$.

Demostración. Como p es un punto regular de X, tenemos que $X(p) \neq 0$. De modo que podemos extender a una base de $\mathbb{R}^n$, es decir existen vectores $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\beta_p = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, X(p)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Veamos que β_q sigue siendo una base de $\mathbb{R}^n$ para q próximo de p, en U. Pues caso contrario para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ existiría $q_k \in B(p, 1/k) \subset U$ tal que $X(q_k) \in \text{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$. De esta manera, hemos construido una sucesión $(q_k)_k \subset U$ que converge para p cuando $k \to +\infty$. Luego por la continuidad del campo X, tenemos

$$X(p) = \lim_{k \to +\infty} X(q_k) \in \overline{\text{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}} = \text{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto existe $\delta > 0$ tal que β_q es base de $\mathbb{R}^n$ para todo $q \in B(p, \delta)$. Sea ahora $M = \max\limits_{1 \leq j \leq n-1} \big\{\|v_j\|\big\} > 0$ y tomemos $\varepsilon < \delta/M$.

Definamos

$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : \sum_{j=1}^{n-1} |x_j| < \varepsilon \right\}$ y la función $f : A \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = p + \sum_{j=1}^{n-1} x_j v_j$.

Notemos además que

$$\|f(x) - p\| = \left\| \sum_{j=1}^{n-1} x_j v_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |x_j| \cdot \|v_j\| \leq M \cdot \sum_{j=1}^{n-1} |x_j| < \delta,$$

en consecuencia $f(x) \in B(p, \delta)$ para todo $x \in A$. Por tanto $\beta_{f(x)} = \Big\{ v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, X(f(x)) \Big\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Es sencillo ver que f es de clase C^∞. Dado $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ y sabiendo que la $j-$ésima columna de $Df(x)$ está formada por las coordenadas de v_j, tenemos

$$\begin{aligned} Df(x)(z) &= \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_{n-1}^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{n-1} & v_2^{n-1} & \cdots & v_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} z_j v_j. \end{aligned}$$

Luego, en particular tenemos que $Df(x)(e_i) = v_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$, entonces $Df(x)(\mathbb{R}^{n-1}) = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Por tanto,

$$Df(x)(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus \text{Span}\Big\{ X(f(x)) \Big\} = \text{Span}\Big\{ \beta_{f(x)} \Big\} = \mathbb{R}^n.$$

Además notamos que

$$Df(x)(z) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-1} z_j v_j = 0 \Leftrightarrow z_j = 0 \text{ para todo } j = 1, 2 \ldots, (n-1) \Leftrightarrow z = 0,$$

es decir $Df(x)$ es inyectiva para todo $x \in A$. Tomemos $g : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x, y) = f(x) + y \cdot X(p)$ la cual es de clase C^∞. Por otro lado tenemos que

$$Dg(0)\big(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\big) = Df(0)\big(\mathbb{R}^{n-1}\big) \text{ y } Dg(0)\big(\{0\} \times \mathbb{R}\big) = \text{Span}\{X(p)\}.$$

Luego $Dg(0)\big(\mathbb{R}^n\big) = Df(0)\big(\mathbb{R}^{n-1}\big) \oplus \text{Span}\Big\{ X(p) \Big\} = \text{Span}\Big\{ \beta_p \Big\} = \mathbb{R}^n$. Entonces $Dg(0)$ es un isomorfismo lineal. Por el teorema de la función inversa existe $V \times W \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ un entorno de 0 tal que $g : V \times W \to g(V \times W)$ es un difeomorfismo. Tomemos ahora ε suficientemente pequeño de modo que $\varepsilon < \delta / M$ y $A = \Big\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : \sum_{j=1}^{n-1} |x_j| < \varepsilon \Big\} \subset V$.

Luego como $f(x) = g(x, 0)$ para todo $x \in A$ tenemos que f es un homeomorfismo sobre su imagen. $\square$

Teorema 1.2 (Teorema del flujo tubular)**.** Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $p \in U$ un punto regular. Dada una sección transversal local $f : A \to \Sigma$ de clase C^k al campo X en p, con $0 \in A$ y $f(0) = p$, entonces existe un entorno V_p de p en U y un difeomorfismo de clase C^k $h : V_p \to]-\varepsilon, \varepsilon[\times B$, donde $\varepsilon > 0$ y B es una bola abierta de $\mathbb{R}^{n-1}$ centrada en el origen, que satisfacen:

a) $h(\Sigma \cap V_p) = \{0\} \times B$.

b) el difeomorfismo h es en realidad una conjugación de clase C^k entre el campo $X|_{V_p}$ y $Y :]-\varepsilon, \varepsilon[\times B \to \mathbb{R}^n$ el campo constante $Y = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

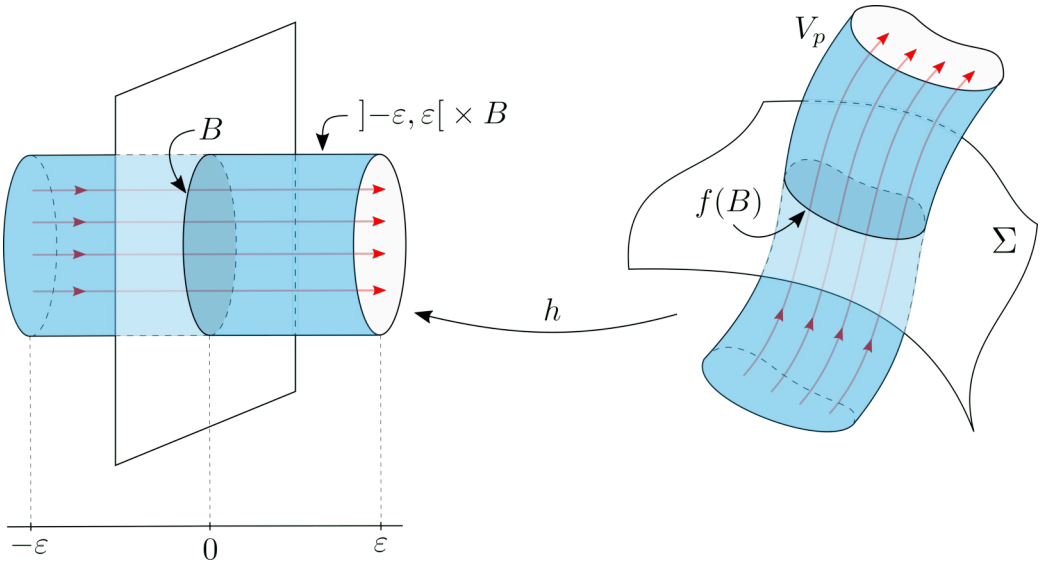


Figura 1.1: Flujo tubular.

Demostración. Véase [37, p. 222]. □

Corolario 1.1. Sean un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $f : A \to \Sigma$ una sección transversal local de clase C^∞ al campo X en p. Entonces existen $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, V_p un entorno de $p \in U$ y una aplicación $\tau : V_p \to \mathbb{R}$, de clase C^k que satisface:

1) $\tau(V_p \cap \Sigma) = \{0\}$.

2) Dado $q \in V_p$, la trayectoria $\varphi(t, q) \in X|_{V_p}$ es una aplicación inyectiva, bien definida, en el intervalo $J_q =]-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q)[$.

3) El único punto de intersección de la trayectoria $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ con la sección transversal local Σ es $\varphi\big(\tau(q), q\big)$ a la cual denotaremos por $\zeta(q)$.

4) $\zeta : V_p \to \Sigma$ es una C^k-submersión, es decir $D\zeta(q)$ es suryectiva para cualquier $q \in V_p$.

Demostración. Véase [37, p. 223]. □

Definición 1.5. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $p \in U$. Denotemos por $\varphi_p : I(p) :=]\omega_-(p), \omega_+(p)[\to U$ a la solución maximal del problema de valor inicial $\left| \begin{array}{rcl} x' & = & X(x) \\ x(0) & = & p. \end{array} \right.$

1) Si $\omega_+(p) = +\infty$, el *conjunto $\omega-$límite de p*, denotado por $\omega_X(p)$ se define como

$$\omega_X(p) = \big\{q \in U : \exists (t_n)_n \subset I(p) \text{ con } t_n \to +\infty \text{ y } \varphi_p(t_n) \to q \text{ cuando } n \to +\infty\big\}.$$

2) Si $\omega_-(p) = -\infty$, el *conjunto $\alpha-$límite de p*, denotado por $\alpha_X(p)$ se define como

$$\alpha_X(p) = \big\{q \in U : \exists (t_n)_n \subset I(p) \text{ con } t_n \to -\infty \text{ y } \varphi_p(t_n) \to q \text{ cuando } n \to +\infty\big\}.$$

Una observación interesante es que el conjunto $\alpha-$límite de p asociado al campo X, es igual al conjunto $\omega-$límite de p asociado al campo $-X$, y viceversa. Es decir, $\alpha_X(p) = \omega_{-X}(p)$. Por tal motivo, para poder estudiar las propiedades que poseen los conjuntos $\alpha-$límite y $\omega-$límite es suficiente centrarnos en el estudio del conjunto $\omega-$límite. De no existir ambigüedad respecto al campo vectorial con el cual estamos trabajando, denotaremos $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ en lugar de $\omega_X(p)$ y $\alpha_X(p)$, respectivamente.

Proposición 1.4. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $p \in U$.

1) Si p es una singularidad del campo X, entonces $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$.

2) Si $\mathcal{O}(p)$ es una órbita periódica, entonces $\alpha(p) = \omega(p) = \mathcal{O}(p)$.

3) Si $q \in \mathcal{O}(p)$, entonces $\omega(q) = \omega(p)$ y $\alpha(q) = \alpha(p)$.

Demostración.

1) En este caso la solución maximal φ_p está definida para todo $\mathbb{R}$ y está dada por $\varphi_p(t) = p$. Con esto el resultado es inmediato.

2) Por hipótesis, tenemos que $\mathcal{O}(p)$ es una órbita periódica, es decir existe $T > 0$ tal que $\varphi_p(t + T) = \varphi_p(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $q \in \omega(p)$, existe una sucesión $(t_n) \in \mathbb{R}$ con $t_n \to +\infty$ y $\varphi_p(t_n) \to q$ cuando $n \to +\infty$. Como $\big(\varphi_p(t_n)\big)_n \subset \mathcal{O}(p)$, entonces $q \in \overline{\mathcal{O}(p)} = \mathcal{O}(p)$ y por tanto $\omega(p) \subset \mathcal{O}(p)$. Si $q \in \mathcal{O}(p)$, entonces existe $t_0 \in [0, T]$ tal que $\varphi_p(t_0) = q$. Definamos $t_n = t_0 + nT$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Haciendo $n \to +\infty$ es claro que $(t_n)_n \subset \mathbb{R}$ satisface que $t_n \to +\infty$ y además $\varphi_p(t_n) = \varphi_p(t_0 + nT) = \varphi_p(t_0) = q$. De modo que $q \in \omega(p)$, por tanto $\mathcal{O}(p) = \omega(p)$. De manera análoga tomando $s_n = t_0 - nT$ podemos obtener $\mathcal{O}(p) = \alpha(p)$.

3) Como $q \in \mathcal{O}(p)$ entonces existe $t_0 \in I(p)$ tal que $\varphi(t_0, p) = q$. Sea $r \in \omega(q)$, entonces existe una sucesión $(t_n)_n \subset I(q)$ con $t_n \to +\infty$ y $\varphi_q(t_n) \to r$ cuando $n \to +\infty$. Definamos $s_n = t_0 + t_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Haciendo $n \to +\infty$ es claro que la sucesión $(s_n)_n \subset I(p)$ satisface que $s_n \to +\infty$ y además

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_p(s_n) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_0 + t_n, p) = \lim_{n\to+\infty} \varphi\big(t_n, \varphi(t_0, p)\big) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n, q) = r.$$

De modo que $r \in \omega(p)$, y por tanto $\omega(q) \subset \omega(p)$. De manera análoga $\omega(p) \subset \omega(q)$. $\square$

En virtud del item 3 de la proposición anterior, el cual establece que dos puntos cualesquiera de una misma órbita tienen el mismo conjunto $\alpha-$límite y el mismo conjunto $\omega-$límite, podemos tener la siguiente definición.

Definición 1.6. Dado un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, un campo vectorial $X : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $\mathcal{O}$ una órbita de X.

1) El *conjunto $\omega-$límite de la órbita* $\mathcal{O}$, es el conjunto $\omega(p)$ donde p es un punto arbitrario de $\mathcal{O}$.

2) El *conjunto $\alpha-$límite de la órbita* $\mathcal{O}$, es el conjunto $\alpha(p)$ donde p es un punto arbitrario de $\mathcal{O}$.

Las proposiciones 1.2 y 1.4 junto con la definición 1.6 dan a conocer cuales son los conjuntos $\alpha-$límite y $\omega-$límite de una singularidad y de una órbita periódica. Resta conocer lo que ocurre cuando la órbita es difeomorfa a un intervalo no acotado.

Teorema 1.3. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $\mathcal{O}^+(p) := \{\varphi(t,p) : t \geq 0\}$ la *semi-órbita positiva* (respectivamente $\mathcal{O}^-(p) := \{\varphi(t,p) : t \leq 0\}$ la *semi-órbita negativa*) del campo X pasando por p. Si existe un compacto $K \subset U$ tal que $\mathcal{O}^+ \subset K$, entonces:

1) $\omega(p) \neq \emptyset$.

2) $\omega(p)$ es compacto.

3) $\omega(p)$ es conexo.

4) $\omega(p)$ es invariante por X, es decir si $q \in \omega(p)$ entonces $\mathcal{O}(q) \subset \omega(p)$.

Demostración.

1) Dada cualquier sucesión $(t_n)_n \subset [0, +\infty[$ tal que $t_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$ y además $\{\varphi_p(t_n) : t_n \geq 0\} \subset \mathcal{O}^+(p) \subset K$. Como K es compacto, entonces existe una subsucesión $(t_{n_k})_k \subset (t_n)_n$ tal que $\left(\varphi_p(t_{n_k})\right)_k$ converge para un punto q en K. De modo que $q \in \omega(p)$, es decir $\omega(p) \neq \emptyset$.

2) Como $\omega(p) \subset \overline{\mathcal{O}^+(p)} \subset K$, entonces basta mostrar que $\omega(p)$ es cerrado, para esto mostraremos que su complemento es abierto. Dado $q \in \mathbb{R}^n - \omega(p)$, por definición sabemos que no existe sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $\varphi_p(t_n) \to q$. Por tanto podemos encontrar $\varepsilon > 0$ y $t_0 > 0$ tales que $\varphi_p(t) \notin B(q,\varepsilon)$ con $t \geq t_0$. En consecuencia $B(q,\varepsilon) \cap \omega(p) = \emptyset$, de modo que $B(q,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n - \omega(p)$ y por lo tanto $\mathbb{R}^n - \omega(p)$ es abierto.

3) Supongamos por reducción al absurdo, que $\omega(p)$ no es conexo. Entonces existen abiertos disjuntos A y B tales que $\omega(p) \subset A \cup B$, $\omega(p) \cap A \neq \emptyset$ y $\omega(p) \cap B \neq \emptyset$. Tomemos $q_A \in \omega(p) \cap A$ y $q_B \in \omega(p) \cap B$. Por definición existen sucesiones $(t_n)_n, (s_n)_n \in [0, +\infty[$ con $t_n \to +\infty$, $s_n \to +\infty$, $\varphi_p(t_n) \to q_A$ y $\varphi_p(s_n) \to q_B$ cuando $n \to +\infty$.

Podemos suponer que $\varphi_p(t_n) \in A$, $\varphi_p(s_n) \in B$ y que además $t_n < s_n < t_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, de ser necesario tomando subsucesiones de $(t_n)_n$ y $(s_n)_n$.

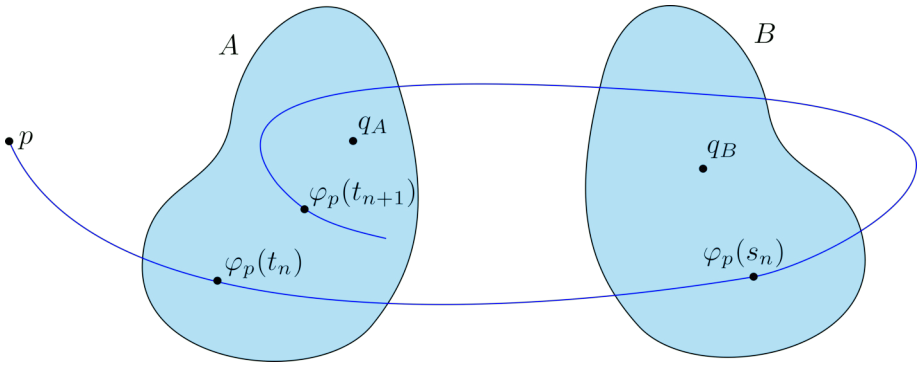


Figura 1.2: Sucesiones tales que $t_n < s_n < t_{n+1}$.

Justifiquemos la suposición anterior, como $\varphi_p(t_n) \to q_A$ y A es abierto, entonces existe $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\varphi_p(t_{n_1}) \in A$. Como $s_n \to +\infty$, entonces existe $n^1 \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $s_{n^1} > t_{n_1}$ y $\varphi_p(s_{n^1}) \in B$. Como $t_n \to +\infty$, entonces existe $n_2 \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $t_{n_2} > s_{n^1} > t_{n_1}$ y $\varphi_p(t_{n_2}) \in A$. Siguiendo este proceso obtenemos las subsucesiones $(t_{n_k})_k \subset (t_n)_n$ y $(s_{n^k})_k \subset (s_n)_n$ tales que $\varphi_p(t_{n_k}) \in A$, $\varphi_p(s_{n^k}) \in B$ y que además satisfacen $t_{n_k} < s_{n^k} < t_{n_{k+1}}$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

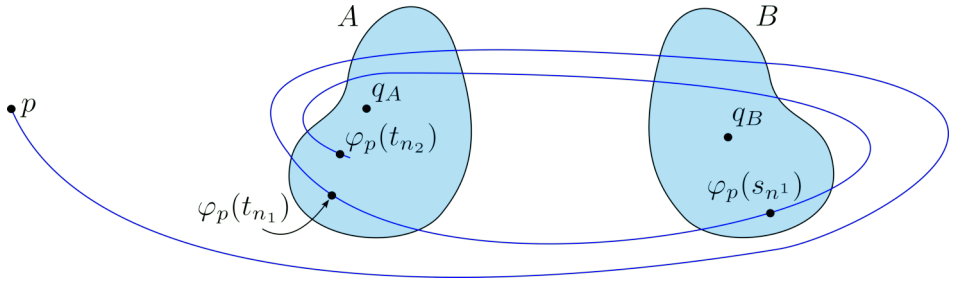


Figura 1.3: Subsucesiones tales que $t_n < s_n < t_{n+1}$.

Así podemos suponer que $\varphi_p(t_n) \in A$, $\varphi_p(s_n) \in B$ y que además $t_n < s_n < t_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $\{\varphi_p(t) : t_n < t < s_n\}$ es conexo, entonces podemos encontrar $u_n \in]t_n, s_n[$ tal que $\varphi_p(u_n) \in (A \cup B)^c$. Es sencillo notar que $u_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Como $\big(\varphi_p(u_n)\big)_n \subset \mathcal{O}^+(p) \subset K$, podemos asegurar la existencia de, al menos, un punto de acumulación $r \in K$. En consecuencia tenemos que $r \in \omega(p)$ y $r \notin A \cup B$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\omega(p)$ es conexo.

4) Por hipótesis tenemos que q pertenece al conjunto $\omega(p)$, entonces podemos encontrar una sucesión $(s_n)_n \in [0, +\infty[$ con $s_n \to +\infty$ y $\varphi_p(s_n) \to q$ cuando $n \to +\infty$. Tomemos $r \in \mathcal{O}(q)$, entonces existe $s_0 \in I(q)$ tal que $\varphi(s_0, q) = r$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definamos $t_n = s_n + s_0$. Es claro que $t_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Además

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_p(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(s_n + s_0, p) = \lim_{n\to+\infty} \varphi\big(s_0, \varphi(s_n, p)\big) = \varphi(s_0, q) = r.$$

Por tanto $r \in \omega(p)$, mostrando de esta manera que $\mathcal{O}(p) \subset \omega(p)$. □

Ejemplo 1.1. Tengamos en cuenta también que una órbita regular acotada puede tener un conjunto $\omega-$límite vacío. Eso puede ocurrir si la cerradura de la órbita no estuviera contenida en el abierto U. Por ejemplo, sea el campo vectorial definido en la bola abierta U centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$ y de radio 1, dada por

$$\begin{cases} x' &= -y + x(1-x^2-y^2) \\ y' &= x + y(1-x^2-y^2). \end{cases}$$

A través del cambio de coordenadas cartesianas a polares tenemos

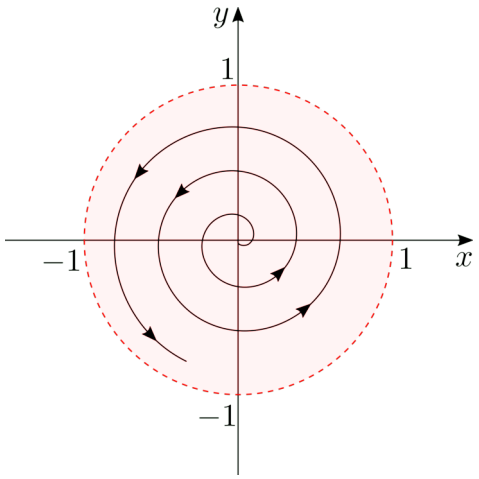
$$\begin{cases} r' &= r(1-r^2) \\ \theta' &= 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones (con $r > 0$), las cuales pueden ser encontradas por integración son:

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1+c_1 e^{-2t}}} \quad \text{y} \quad \theta(t) = t + c_2,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Volviendo a coordenadas cartesianas, la solución general del sistema está dada por:

$$x(t) = \frac{\cos(t+c_2)}{\sqrt{1+c_1 e^{-2t}}} \quad \text{y} \quad y(t) = \frac{\operatorname{sen}(t+c_2)}{\sqrt{1+c_1 e^{-2t}}}.$$



Como podemos notar la órbita de cualquier punto regular en U está espiralando para la circunferencia unitaria, pero el conjunto $\omega-$límite de esa órbita es vacío.

Corolario 1.2. Sea un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$. Si existe un compacto $K \subset U$ tal que $\mathcal{O}^+(p) \subset K$ entonces $I(q) = \mathbb{R}$, para todo $q \in \omega(p)$.

Demostración. Supongamos que existe $q \in \omega(p)$ tal que $I(q) \subsetneq \mathbb{R}$, entonces $\omega_+(q) < +\infty$ o $\omega_-(q) > -\infty$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\omega_+(q) < +\infty$. Como $\omega(p)$ es compacto, entonces por el teorema 1.1 debe existir un $\varepsilon > 0$ tal que si $t \in [\omega_+(q) - \varepsilon, \omega_+(q)[$ entonces $\varphi_q(t) \notin \omega(p)$ lo cual contradice que $\mathcal{O}(q) \subset \omega(p)$. $\square$

2

Teorema de Poincaré-Bendixson en el plano

Dado un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, $X : U \to \mathbb{R}^2$ un campo de vectores de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ tal que posee un número finito de puntos singulares, $p \in U$ un punto regular de X y supongamos que existe un compacto $K \subset U$ tal que $\mathcal{O}^+(p) \subset K$. En estas condiciones, el teorema de Poincaré-Bendixson clasifica el conjunto $\omega-$límite de cualquier órbita difeomorfa a un intervalo no acotado. Para demostrar el teorema de Poincaré-Bendixson, precisamos de algunos resultados previos enunciados como lemas.

Lema 2.1. Dado un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo de vectores de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$, q un punto regular de X en $\omega(p)$ y $f : A \to \Sigma$ una sección transversal local al campo X en q. Entonces existe una sucesión $(t_n)_n \subset [0, +\infty[$ con $t_n \to +\infty$, $\varphi_p(t_n) \to q$ cuando $n \to +\infty$ y $\big(\varphi_p(t_n)\big)_n \subset \Sigma$.

Demostración. Como $q \in \omega(p)$, entonces existe una sucesión $(s_n)_n \in [0, +\infty[$ con $s_n \to +\infty$ y $\varphi_p(s_n) \to q$ cuando $n \to +\infty$. Por el corolario 1.1 existe un entorno V_q en U y una aplicación $\tau : V_q \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que $\tau(V_q \cap \Sigma) = \{0\}$. La función τ se puede interpretar como el tiempo que necesita cualquier punto suficientemente próximo de q en llegar a la sección transversal Σ recorriendo el flujo. Luego existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\varphi_p(s_n) \in V_q$ para todo $n \geq n_0$.

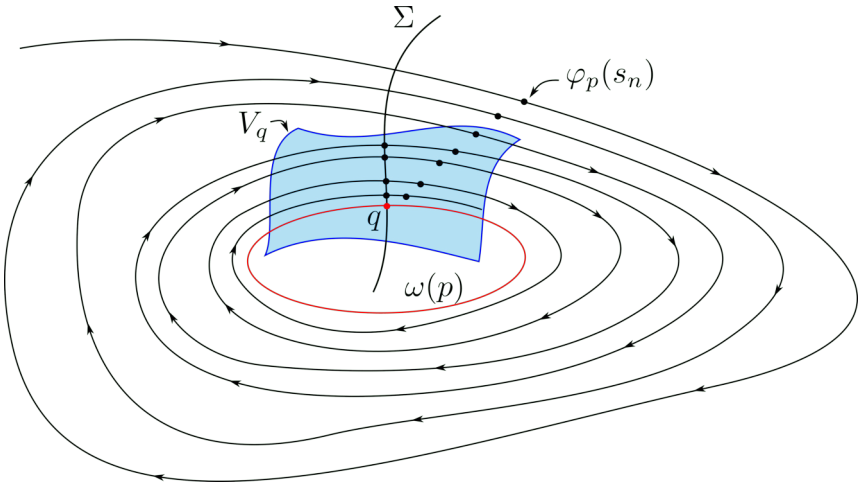


Figura 2.1: $\varphi_p(s_n) \in V_q$ para todo $n \geq n_0$.

Para todo $n \geq n_0$, definamos $t_n = s_n + \tau\big(\varphi_p(s_n)\big)$, de modo que

$$\varphi_p(t_n) = \varphi\Big(s_n + \tau\big(\varphi_p(s_n)\big), p\Big) = \varphi\Big(\tau\big(\varphi_p(s_n)\big), \varphi_p(s_n)\Big) \in \Sigma.$$

Además como $\lim_{n\to+\infty} \tau\big(\varphi_p(s_n)\big) = \tau(q) = 0$, entonces $\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. En consecuencia tenemos $\big(\varphi_p(t_n)\big)_n \subset \Sigma$ y

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_p(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \varphi\Big(\tau\big(\varphi_p(s_n)\big), \varphi_p(s_n)\Big) = \varphi\big(\tau(q), q\big) = \varphi(0, q) = q.$$

□

Cabe resaltar que en el lema anterior se usó un enunciado general donde U es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, si U es un abierto de $\mathbb{R}^2$, $X : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y p un punto regular de X, el teorema 1.3 garantiza la existencia de $f : I \to \Sigma \subset U$ una sección transversal local de clase C^∞ al campo X en p, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, la cual es un homeomorfismo entre I y Σ. De modo que podemos inducir un orden en Σ, de la siguiente manera: dados $p_1, p_2 \in \Sigma$, existen únicos $s_1, s_2 \in I$ tales que $f(s_1) = p_1$ y $f(s_2) = p_2$. Diremos que $p_1 \leq p_2$ si, y solamente si, $s_1 \leq s_2$. De esta manera Σ posee un orden total "$\leq$" la cual es inducida por el orden del intervalo I. Basados en este orden, podemos recién hablar de sucesiones monótonas, estrictamente monótonas, etc. en Σ.

En la demostración del siguiente lema usaremos un resultado topológico de $\mathbb{R}^2$, el teorema de la curva de Jordan, el cual garantiza que toda curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ cerrada simple divide a $\mathbb{R}^2$ en dos regiones abiertas disjuntas, una acotada R_i y la otra no R_e tales que $\partial R_i = \partial R_e = \gamma$.

Lema 2.2. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^2$, p un punto regular del campo vectorial X y $f : I \to \Sigma$ cualquier sección transversal local al campo X, entonces $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma$ o bien es un conjunto finito o bien es una sucesión monótona.

Demostración. Sea $A = \{t \geq 0 : \varphi_p(t) \in \Sigma\}$, observemos que $\varphi_p(A) = \mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma$. Por el teorema del flujo tubular, tenemos que A es un conjunto discreto, es decir A es finito o $A = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \dots\}$. Sean $p_n = \varphi_p(t_n)$. Tenemos dos opciones:

1) Si $p_1 = p_2$, entonces $\varphi_p(t_1) = \varphi_p(t_2)$, es decir φ_p es una trayectoria periódica de período $T = t_2 - t_1 > 0$. Por tanto $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma = \{p_1\}$.

2) Si $p_1 \neq p_2$, entonces por el orden inducido en Σ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p_1 < p_2$, de hecho consideremos $s_1 < s_2$ en I dados por $p_1 = f(s_1)$ y $p_2 = f(s_2)$. Si p_3 no está definida, entonces $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma = \{p_1, p_2\}$ y el lema quedaría demostrado. Si p_3 está definido, entonces veremos que $p_2 < p_3$. Por otro lado, el virtud el teorema del flujo podemos orientar la sección transversal local Σ. Como Σ es conexa y el campo vectorial es continuo, tenemos que las trayectorias en X intersecan a Σ en una misma dirección.

   Consideramos la curva $\gamma = \{\varphi_p(t) : t_1 \leq t \leq t_2\} \cup \{f(s) : s_1 \leq s \leq s_2\}$. Notemos que γ es una curva simple, dado que los puntos $p_1 = \varphi_p(t_1)$ y $p_2 = \varphi_p(t_2)$ son intersecciones consecutivas de la trayectoria de p con la Σ. Por el teorema de la curva de Jordan, γ separa al plano en dos componentes conexas, una acotada R_i

y la otra no acotada R_e tales que $\partial R_i = \partial R_e = \gamma$. Las trayectorias que pasan por los puntos del segmento $\{f(s) : s_1 \leq s \leq s_2\}$ pueden desplazarse hacia el interior R_i (la componente conexa acotada) o hacia el exterior R_e (la componente conexa no acotada): los dos casos están descritos en la siguiente figura

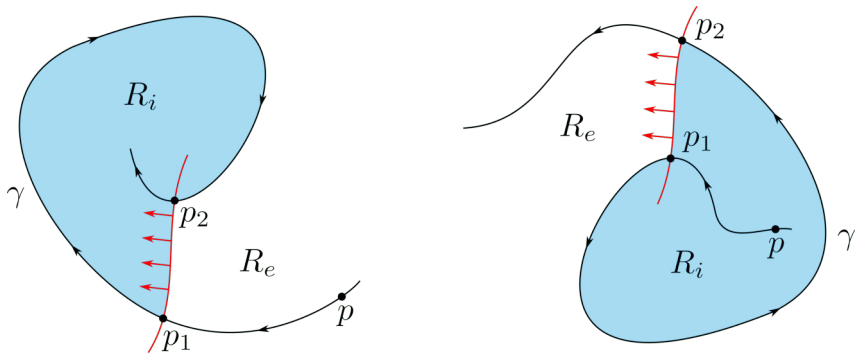


Figura 2.2: Curva de Jordan.

En el primer caso, afirmamos que la trayectoria a partir de p_2, es decir $\varphi_p(t)$ para $t > t_2$, está contenida en R_i. Caso contrario existiría $\hat{t} > t_2$ tal que $\varphi_p(\hat{t}) \notin R_i$.

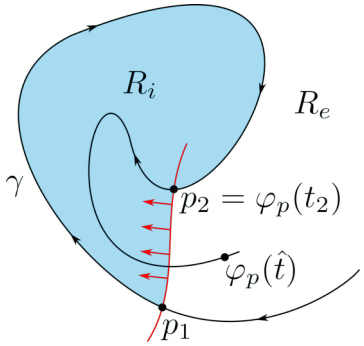


Figura 2.3: Existe $\hat{t} > t_2$ tal que $\varphi_p(\hat{t}) \notin R_i$.

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que $\varphi_p(t_2 + \varepsilon) \in R_i$. Luego como $\varphi_p([t_2 + \varepsilon, \hat{t}\,])$ es conexo, entonces el teorema de la aduana asegura la existencia de $t' \in [t_2 + \varepsilon, \hat{t}\,]$ tal que $\varphi_p(t') \in \partial R_i = \gamma$. Sabemos por el teorema de existencia y unicidad de soluciones que $\varphi_p(t') \notin \mathcal{O}^+(p)$. Luego

$$\varphi_p(t') \in \{f(s) : s_1 \leq s \leq s_2\} \subset \Sigma$$

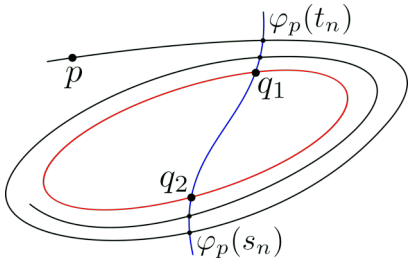
lo cual no puede ocurrir ya que existiría un entorno alrededor de un punto no singular en el cual habrían trayectorias que recorren en sentidos opuestos. De modo que $p_3 \in R_i$, y por tanto $p_2 < p_3$. Un argumento análogo muestra que en el segundo caso de la figura 2.2 también se tiene $p_2 < p_3$. Esto demuestra nuestra afirmación.

Si p_4 no está definida $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma = \{p_1, p_2, p_3\}$ y el teorema quedaría demostrado, caso contrario repetimos el argumento anterior por inducción.

□

Lema 2.3. Sea un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, $X : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $p \in U$. Entonces cualquier sección transversal local $f : I \to \Sigma$ al campo X interseca al conjunto $\omega-$límite de p a lo más en un punto.

Demostración. Si $\Sigma \cap \omega(p)$ es vacío, no hay nada a probar. Entonces supongamos que existen $q_1, q_2 \in \Sigma \cap \omega(p)$, con $q_1 \neq q_2$. Por el lema 2.1, existe un par de sucesiones $(t_n)_n, (s_n)_n \subset [0, +\infty[$ con $t_n \to +\infty$, $s_n \to +\infty$, $\varphi_p(t_n) \to q_1$, $\varphi_p(s_n) \to q_2$ cuando $n \to +\infty$ y $\left(\varphi_p(t_n)\right)_n, \left(\varphi_p(s_n)\right)_n \subset \Sigma$.



Del lema 2.2 sabemos que

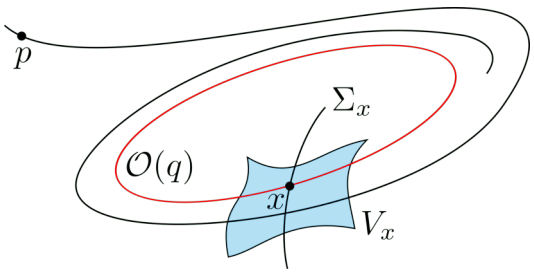
$$\left(\varphi_p(t_n)\right)_n, \left(\varphi_p(s_n)\right)_n \subset \mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma = \left\{\text{sucesión monótona } (p_k)_k\right\}$$

es decir tenemos dos subsucesiones convergentes a puntos distintos de una sucesión monótona, lo cual es una contradicción. □

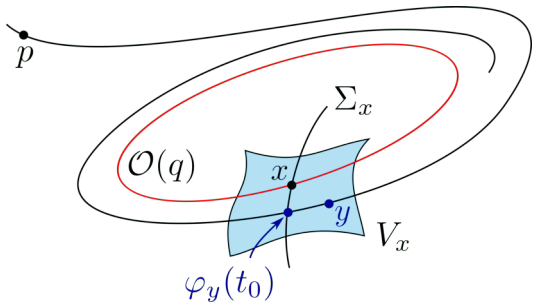
Lema 2.4. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $p \in U$ un punto regular de X tal que existe un compacto $K \subset U$ con $\mathcal{O}^+(p) \subset K$. Sea $q \in \omega(p)$. Si $\omega(q)$ contiene al menos un punto regular de X, entonces $\mathcal{O}(q)$ es una órbita periódica y $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$.

Demostración. Sabemos de la hipótesis que existe $r \in \omega(q)$ un punto regular de X. Sea Σ_r una sección transversal local al campo X en r, luego del lema 2.1 tenemos que existe una sucesión $(t_n)_n \subset [0, +\infty[$ con $t_n \to +\infty$, $\varphi_q(t_n) \to r$ cuando $n \to +\infty$ y $\left(\varphi_q(t_n)\right)_n \subset \Sigma_r$. Como $\left(\varphi_q(t_n)\right)_n \subset \mathcal{O}(q) \subset \omega(p)$, entonces $\left(\varphi_q(t_n)\right)_n \subset \Sigma_r \cap \omega(p)$. Por el lema 2.3 podemos concluir que $\varphi_q(t_n) \equiv r$, por tanto $\mathcal{O}(q)$ es una órbita cerrada (o periódica), esto gracias a la proposición 1.1. La palabra "cerrada" usada hace un momento, se refiere al punto de vista geométrico, pero además dado que una órbita periódica es difeomorfa a una circunferencia entonces es también cerrada desde el punto de vista topológico.

Para concluir la demostración del lema 2.4, debemos mostrar que $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$. Sabemos que $\mathcal{O}(q)$ es un subconjunto cerrado y no vacío del conexo $\omega(p)$. Por tanto solo resta probar que $\mathcal{O}(q)$ es un conjunto abierto de $\omega(p)$. Dado $x \in \mathcal{O}(q)$, consideremos el entorno V_x dado por el teorema del flujo tubular y Σ_x su respectiva sección transversal local.



Mostraremos $V_x \cap \mathcal{O}(q) = V_x \cap \omega(p)$. Como $\mathcal{O}(q) \subset \omega(p)$, luego $V_x \cap \mathcal{O}(q) \subset V_x \cap \omega(p)$. Supongamos que ésta inclusión es estricta $V_x \cap \mathcal{O}(q) \subsetneq V_x \cap \omega(p)$, es decir existe al menos un $y \in V_x \cap \omega(p)$ tal que $y \notin \mathcal{O}(q)$.



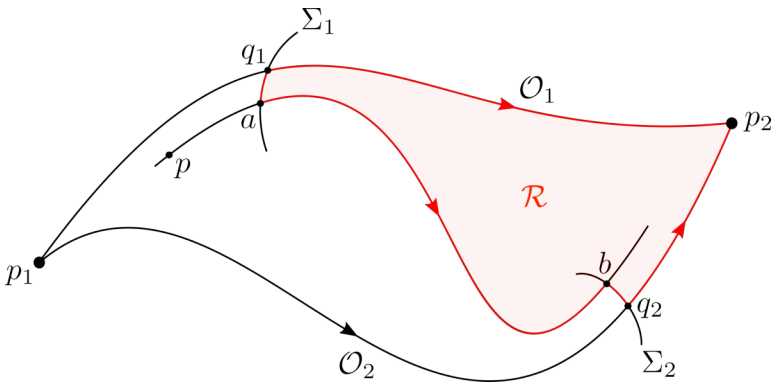
Como $y \in \omega(p)$ entonces, aprovechando el hecho de que $\omega(p)$ es invariante por X, tenemos que $\mathcal{O}(y) \subset \omega(p)$. En virtud del teorema del flujo tubular existe $t_0 \in I(y)$ tal que $\varphi_y(t_0) \in \Sigma_x \cap \omega(p)$ y $\varphi_y(t_0) \neq 0$. Lo cual contradice al lema 2.3. Por tanto $V_x \cap \mathcal{O}(q) = V_x \cap \omega(p)$, lo que significa que localmente la órbita $\mathcal{O}(q)$ y el conjunto $\omega(p)$ coinciden. Como $x \in \mathcal{O}(q)$ fue tomado de manera arbitraria podemos conseguir un recubrimiento abierto de $\mathcal{O}(q)$, $V = \bigcup_{x \in \mathcal{O}(q)} V_x$, en U. Luego

$$\begin{aligned} V \cap \omega(p) &= \left(\bigcup_{x \in \mathcal{O}(q)} V_x \right) \cap \omega(p) \\ &= \bigcup_{x \in \mathcal{O}(q)} \left(V_x \cap \omega(p) \right) \\ &= \bigcup_{x \in \mathcal{O}(q)} \left(V_x \cap \mathcal{O}(q) \right) \\ &= \left(\bigcup_{x \in \mathcal{O}(q)} V_x \right) \cap \mathcal{O}(q) \\ &= V \cap \mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(q). \end{aligned}$$

De modo que $\mathcal{O}(q)$ es un abierto de $\omega(p)$, lo cual concluye la demostración, ya que $\mathcal{O}(q)$ es un subconjunto no vacío, abierto y cerrado del conexo $\omega(p)$ y en consecuencia $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$. □

Lema 2.5. Sean p_1 y p_2 singularidades distintas del campo vectorial, pertenecientes al conjunto $\omega-$límite de un punto p. Existe como máximo una órbita $\mathcal{O} \subset \omega(p)$ tal que $\alpha(\mathcal{O}) = p_1$ y $\omega(\mathcal{O}) = p_2$.

Demostración. Supongamos que existen dos órbitas $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ contenidas en $\omega(p)$ tales que $\alpha(\mathcal{O}_j) = p_1$ y $\omega(\mathcal{O}_j) = p_2$ para $j = 1, 2$. La curva C_1 que consiste de las órbitas $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ y los puntos p_1, p_2 separa al plano en dos componentes conexas, una de las cuales contiene a p. Sean $q_1 \in \mathcal{O}_1$ y $q_2 \in \mathcal{O}_2$ puntos regulares y Σ_1, Σ_2 las secciones transversales locales al campo X a través de q_1 y q_2, respectivamente.



Como $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \omega(p)$ tenemos que la órbita positiva del punto p interseca a las secciones transversales, es decir $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma_j \neq \emptyset$ para $j = 1, 2$. Digamos $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma_1 = \{a\}$ y $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma_2 = \{b\}$. Consideremos la curva C_2 que consiste del arco $\widehat{ab} \subset \mathcal{O}(p)$, $\widehat{bq_2} \subset \Sigma_2$, $\widehat{q_2p_2} \subset \mathcal{O}_2$, $\widehat{p_2q_1} \subset \mathcal{O}_1$, $\widehat{q_1a} \subset \Sigma_1$ y el punto p_2. Vemos que C_2 separa al plano en dos componentes conexas $\mathcal{R}$ (componente acotada) y $\mathcal{S}$ (componente no acotada). De este modo, la órbita positiva del punto b queda enteramente contenida en $\mathcal{R}$ lo cual es una contradicción dado que $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \omega(p)$. □

Ahora ya contamos con todas las herramientas necesarias para demostrar el teorema que enunciamos a continuación:

Teorema 2.1 (Teorema de Poincaré-Bendixson)**.** Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $X : U \to \mathbb{R}^2$ de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ tal que posee una cantidad finita de singularidades, $p \in U$ un punto regular de X y supongamos que existe un compacto $K \subset U$ tal que $\mathcal{O}^+(p) \subset K$. Se tienen las siguiente posibilidades:

1) Si $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.

2) Si $\omega(p)$ contiene solamente puntos singulares, entonces $\omega(p)$ es un punto singular.

3) Caso contrario, es decir $\omega(p)$ contiene puntos singulares y puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es la unión finita de puntos singulares $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y órbitas $\mathcal{O}$ tales que $\alpha(\mathcal{O}) = \{p_i\}$ y $\omega(\mathcal{O}) = \{p_j\}$ donde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración.

1) Sea $q \in \omega(p)$ un punto regular, del teorema 1.3 tenemos que $\mathcal{O}^+(q) \subset \mathcal{O}(q) \subset \omega(p)$ y como $\omega(p)$ es compacto, usando nuevamente el teorema 1.3 llegamos a $\omega(q) \neq \emptyset$. Sea $r \in \omega(q)$, entonces es posible encontrar una sucesión $(t_n)_n \subset [0, +\infty[$ con $t_n \to +\infty$ y $\varphi_q(t_n) \to r$ cuando $n \to +\infty$. En consecuencia

$$r \in \overline{\mathcal{O}^+(q)} \subset \overline{\omega(p)} = \omega(p)$$

de modo que $\omega(q) \subset \omega(p)$. Por tanto $\omega(q)$ solo contiene puntos regulares. Del lema 2.4, se sigue que $\mathcal{O}(q)$ es una órbita periódica y además $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$.

2) Estamos suponiendo que $\omega(p)$ contiene solo puntos singulares. Del teorema 1.3 tenemos que $\omega(p)$ es conexo y por hipótesis sabes que el número de puntos singulares es finito, y en consecuencia $\omega(p)$ consiste de un único punto singular.

3) Sea $q \in \omega(p) - \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, entonces del teorema 1.3 tenemos que $\mathcal{O}(q) \subset \omega(p)$ y $\omega(p) \supset \omega(q) \neq \emptyset$. Veamos que $\mathcal{O}(q)$ no contiene singularidades, pues caso contrario existiría un entero $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $p_j \in \mathcal{O}(q)$, luego tenemos $q \in \mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(p_j) = \{p_j\}$ lo cual nos lleva a una contradicción. Si $\omega(q)$ contiene algún punto regular, entonces del lema 2.4 tenemos que $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$ esto contradice el hecho de que $\mathcal{O}(q)$ no contiene puntos singulares. En consecuencia $\omega(q)$ solo contiene puntos singulares, usando una vez más el hecho de que el número de puntos singulares es finito, se sigue que $\omega\big(\mathcal{O}(q)\big) = \omega(q)$ consiste de un único punto singular p_j para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

□

El siguiente ejemplo, dado en [38], muestra un conjunto $\omega-$límite del tercer caso propuesto en el teorema 2.1.

Ejemplo 2.1. Consideremos el sistema

$$\left|\begin{array}{rcl} x' &=& y + x^2 - \alpha x(y - 1 + 2x^2), \quad \alpha > 0 \\ y' &=& -2(1 + y)x \end{array}\right.$$

cuyas singularidades son $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ y $\left(\frac{1}{2\alpha}, -1\right)$. Definamos el campo vectorial $X(x, y) = (y + x^2 - \alpha x(y - 1 + 2x^2), -2(1 + y)x)$.
Linealizando el sistema tenemos

$$J_X(x, y) = \begin{pmatrix} -\alpha(2x^2 + y - 1) - 4\alpha x^2 + 2x & 1 - \alpha x \\ -2(y + 1) & -2x \end{pmatrix}$$

en consecuencia

Singularidad	Matriz Jacobiana	Autovalores	
$(0, 0)$	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{8} \pm i\frac{\sqrt{127}}{8}$	Foco inestable
$(-1, -1)$	$\begin{pmatrix} -3 & 5/4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$-3; 2$	Punto silla
$(1, -1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$-2; 1$	Punto silla
$(2, -1)$	$\begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$-4; -\frac{3}{2}$	Nodo estable

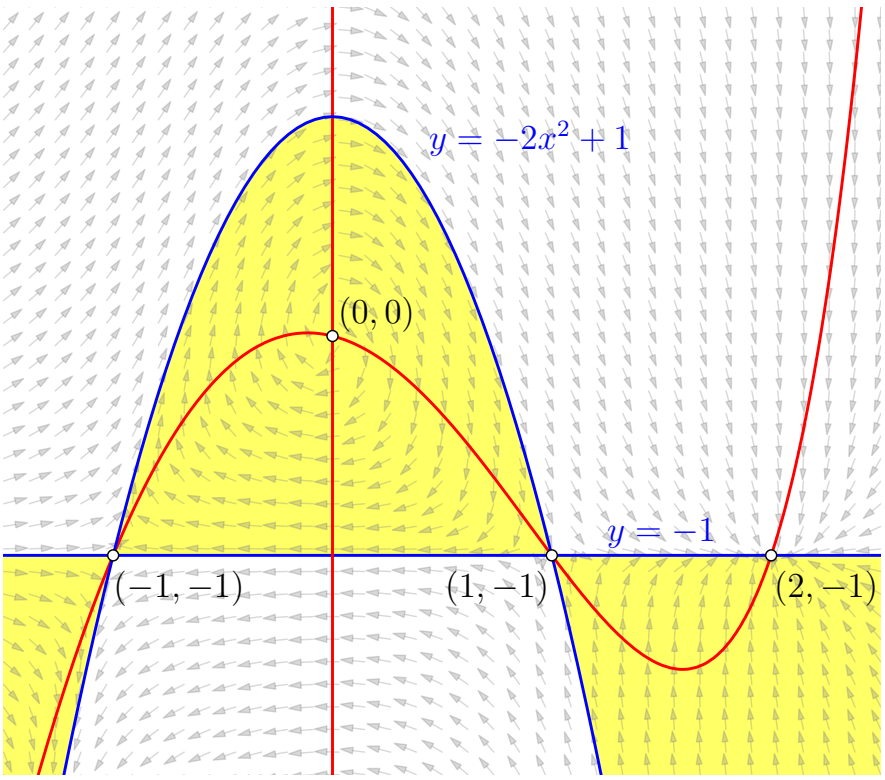
Es sencillo notar que $y = -1$ es una curva invariante, dado que se tiene $y' = 0$ a lo largo de ella. Veamos que $y = -2x^2 + 1$ también es una curva invariante,

$$\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{y=-2x^2+1} = \left.\frac{-2(y+1)x}{y + x^2 - \alpha x(y - 1 + 2x^2)}\right|_{y=-2x^2+1}$$
$$= \frac{-2(-2x^2+2)x}{-2x^2 + 1 + x^2 - \alpha x(-2x^2 + 1 - 1 + 2x^2)}$$
$$= \frac{-4x(1-x^2)}{1-x^2} = -4x.$$

Esto quiere decir que a lo largo de la parábola $y = -2x^2 + 1$ el campo X es tangente a dicha parábola, en consecuencia $y = -2x^2 + 1$ es una curva invariante. Tomemos $\alpha = 1/4$ de modo que el punto singular $\left(\frac{1}{2\alpha}, -1\right) = (2, -1)$ está fuera de la región acotada por las dos curvas invariantes, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq -2x^2 + 1\}$. Además como $(0, 0)$ es un foco inestable tenemos que el conjunto $\omega-$límite de punto arbitrario en el conjunto compacto K es

$$\omega(p) = \{(-1,-1)\} \cup \{(1,-1)\} \cup \{(t,-1) : -1 < t < 1\} \cup \{(t, -2t^2+1) : -1 < t < 1\},$$

donde además para todo $q \in \{(t,-1) : -1 < t < 1\}$ y $r \in \{(t, -2t^2+1) : -1 < t < 1\}$ tenemos que $\alpha(q) = \omega(r) = \{(1,-1)\}$ y $\omega(q) = \alpha(r) = \{(-1,-1)\}$.



En el siguiente ejemplo, dado en [32], notamos que si el campo vectorial X continuamente diferenciable no posee una cantidad finita de singularidades, es decir no satisface una de las condiciones del teorema 2.1, entonces el conjunto $\omega-$límite cae fuera de las posibilidades vistas en este teorema, en otras palabras el conjunto $\omega-$límite no es ni una órbita periódica, ni un punto singular ni mucho menos la unión finita de puntos singulares y órbitas.

Ejemplo 2.2. Consideremos el campo vectorial continuamente diferenciable,

$$r' = -(r-1)^5, \quad \theta' = \begin{cases} 0 & , \quad r = 1 \\ -(r-1)^3 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{3}{2(r-1)}\right) & , \quad r \neq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Aunque parezca contrario a nuestra intuición el conjunto $\omega-$límite no necesita ser toda la circunferencia unitaria $\Gamma : r = 1$ y puede ser solo un subconjunto propio de él.

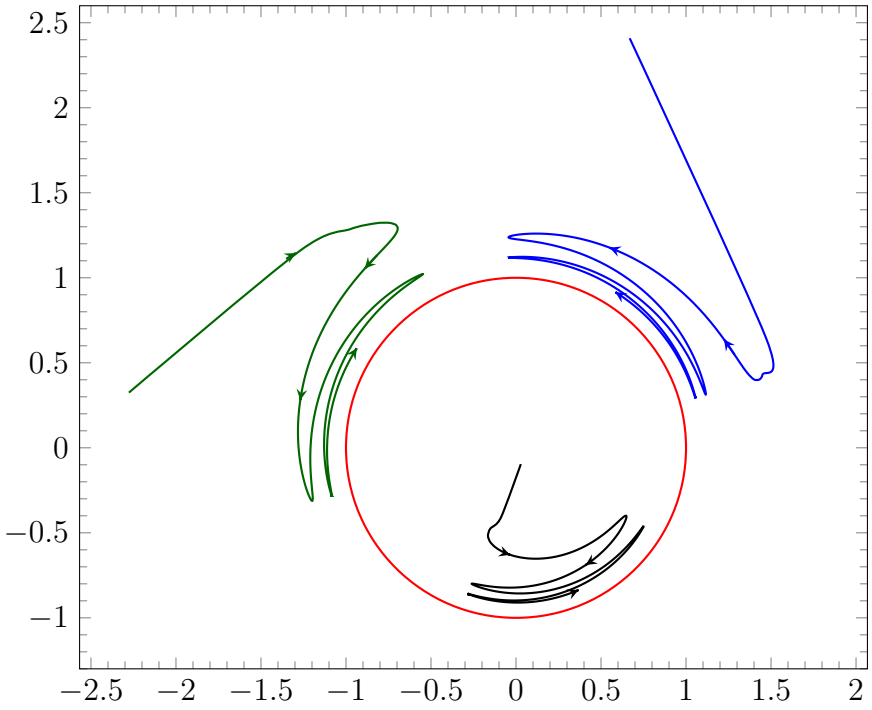


Figura 2.4: La circunferencia unitaria Γ de color rojo consta solo de puntos singulares.

2.1. Ciclos límite

La noción de ciclo límite (es decir, una órbita periódica aislada) de un campo vectorial plano fue definida por Henry Poincaré a finales del siglo XIX, en [29]. Posteriormente, los ciclos límite han sigo objeto de estudio de matemáticos y físicos centrando su atención en la inexistencia, existencia y unicidad de los ciclos límite. En su mayor parte la historia temprana de la teoría sobre ciclos límite fue estimulada por problemas prácticos. Por ejemplo, la ecuación diferencial relacionada con la oscilación de una cuerda de violín, dada por John Rayleigh en [33]

$$x'' + \varepsilon\left(\frac{1}{3}(x')^2 - 1\right)x' + x = 0.$$

Dicha ecuación diferencial puede escribirse como una sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$x' = y, \quad y' = -x - \varepsilon \left(\frac{y^2}{3} - 1 \right) y.$$

Van der Pol, en [39], obtuvo una ecuación diferencial que modela el fenómeno producido por un tubo de vacío triodo, el cual puede producir oscilaciones autoexcitadas estables de amplitud constante. Dicha ecuación diferencial es

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

la cual se puede escribir como un sistema plano de la forma

$$x' = y, \quad y' = -x - \varepsilon(x^2 - 1)y.$$

Otras posibles interpretaciones para el comportamiento de un ciclo límite se enumeran a continuación:

1) Para circuitos eléctricos, es posible construir oscilaciones eléctricas simples, por ejemplo el circuito de Leon Ong Chua [23], utilizando un elemento de circuito no lineal, se puede observar un ciclo límite si el circuito está conectado a un osciloscopio.

2) Para un modelo económico Giovanni Bella en [1] considera un modelo Goodwin de una lucha de clases y muestra múltiples ciclos límite emergentes de diferente orientación.

3) Para las reacciones químicas periódicas, los ejemplos incluyen la reacción del reloj de Landolt y la reacción de Belousov-Zhabotinski, ver por ejemplo [9] y [35].

El método clásico para probar la inexistencia de ciclos límite en una región simplemente conexa es el criterio de Bendixson-Dulac, ver por ejemplo [11] y [19]. El problema de la existencia de ciclos límite es abordado por el teorema de Poincaré-Bendixson, como veremos en la siguiente sección. El problema de la unicidad es, en general, más complicado ver por ejemplo [44].

Teorema 2.2 (Teorema de Green)**.** Sea J una curva de Jordan de longitud finita. Supongamos que P y Q son funciones continuamente diferenciables definidas en el interior de J, digamos D. Entonces

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \oint_J Pdy - Qdx.$$

Consideremos un sistema de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$,

$$\left| \begin{array}{rcl} x' & = & P(x,y) \\ y' & = & Q(x,y) \end{array} \right. \tag{2.2}$$

donde su campo vectorial asociado es $X = (P, Q)$ en U.

Teorema 2.3 (Criterio de Bendixson-Dulac)**.** Si existe una función continuamente diferenciable $\psi(x, y)$ en una región simplemente conexa D tal que

$$\frac{\partial \psi P}{\partial x} + \frac{\partial \psi Q}{\partial y}$$

tiene signo constante y no es idénticamente nulo en ninguna subregión de D, entonces el sistema (2.2) no posee ningún ciclo límite que se encuentre enteramente contenido en D.

Demostración. Supongamos que D contiene un ciclo límite de periodo $T > 0$. Entonces del teorema de Green tenemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial \psi P}{\partial x} + \frac{\partial \psi Q}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial D} \psi P dy - \psi Q dx = \int_0^T \left(\psi P \frac{dy}{dt} - \psi Q \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

dado que en ∂D se cumple que $x' = P(x, y)$ y $y' = Q(x, y)$. Esto contradice la hipótesis y, por tanto, D no contiene ciclos límites por completo. □

La función $\psi(x, y)$ se denomina función de Dulac y el método de probar la inexistencia de ciclos límite se denomina método de las funciones de Dulac.

Ejemplo 2.3. Mostremos que el siguiente sistema no tiene ciclos límite

$$\left| \begin{array}{rcl} x' & = & x(3 + x - 2y) \\ y' & = & y(-2 - 4x + y). \end{array} \right.$$

Es sencillo notar que los ejes son conjuntos invariantes. Ahora tomemos la función de Dulac de la siguiente manera $\psi(x, y) = x^m y^n$, luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi P}{\partial x} + \frac{\partial \psi Q}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^{m+1}y^n + x^{m+2}y^n - 2x^{m+1}y^{n+1}) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}(-2x^m y^{n+1} - 4x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+2}) \\ &= (3m - 2n + 1)x^m y^n + (m - 4n - 2)x^{m+1}y^n + (-2m + n)x^m y^{n+1} \end{aligned}$$

convenientemente tomemos $m = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\frac{\partial \psi P}{\partial x} + \frac{\partial \psi Q}{\partial y} = -9x^2y^2.$$

Por lo tanto no existen ciclos límite contenidos enteramente en ninguno de los cuatro cuadrantes, y dado que los ejes son invariantes no hay ciclos límite en lo absoluto.

2.2. Aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson

2.2.1. Aplicación 1

En el siguiente ejemplo usaremos el teorema de Poincaré-Bendixson 2.1 para mostrar la existencia de ciclos límite. La estrategia es mostrar que las soluciones entran y no salen de un compacto K (que suele ser una región anular), la cual no contiene puntos singulares.

Ejemplo 2.4. Mostraremos que el siguiente sistema tiene al menos un ciclo límite.

$$\left|\begin{array}{rcl} x' &=& 4x + 2y - x(x^2+y^2) \\ y' &=& -2x + y - y(x^2+y^2) \end{array}\right. \tag{2.3}$$

En primer lugar notemos que el origen es la única singularidad del sistema (2.3). Cambiando a coordenadas polares, $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right.$, donde $r^2 = x^2+y^2$ y $\dfrac{y}{x} = \tan\theta$ usando derivación implícita tenemos la siguiente ecuación diferencial en coordenadas polares,

$$\left\{\begin{array}{rcl} r' &=& -r^3 + \dfrac{r}{2}(5+3\cos 2\theta) \\ \theta' &=& -2 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \end{array}\right.$$

a) Flujo de salida: $\cos 2\theta \geq -1 \Rightarrow r' \geq r_{salida} = -r^3 + \dfrac{r}{2}(5-3) = r(1-r^2)$ cuando $r < 1$ tenemos que $r' > 0$ y entonces el flujo va hacia afuera.

b) Flujo de entrada: $\cos 2\theta \leq 1 \Rightarrow r' \leq r_{entrada} = -r^3 + \dfrac{r}{2}(5+3) = r(4-r^2)$ cuando $r > 2$ tenemos que $r' < 0$ y entonces el flujo va hacia adentro.

Como la cantidad de singularidades del campo es finita y hemos encontrado un conjunto compacto $K = \{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 2\}$ tal que contiene a la órbita positiva de cualquier punto regular p, es decir se satisfacen las condiciones del teorema de Poincaré-Bendixson, por lo tanto el sistema tiene al menos un ciclo límite que se encuentra dentro del compacto K.

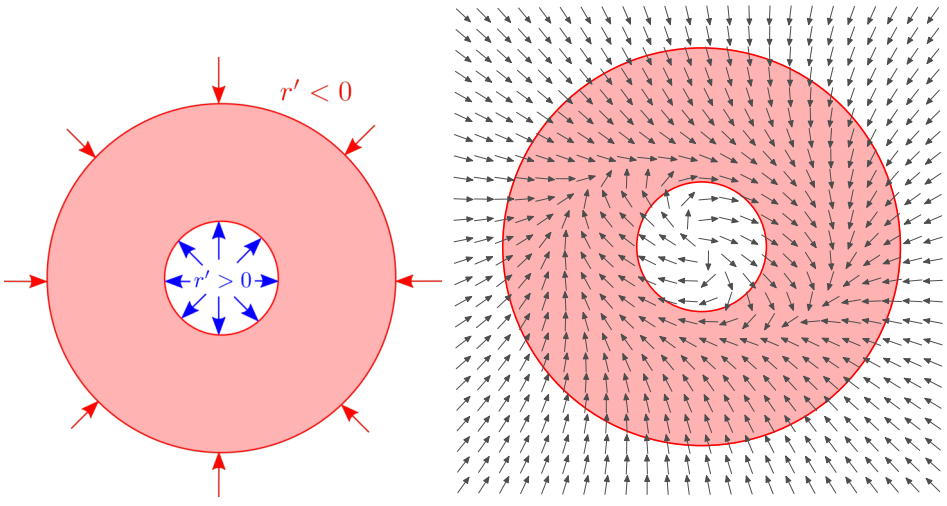


Figura 2.5: La región K es el anillo centrado en el origen con radios interior $r = 1$ y exterior $r = 2$.

La primera aplicación del teorema de Poincaré-Bendixson que se presenta en este trabajo es una generalización del ejemplo anterior,

Aplicación 1. Sean $a, c, m, n, p, q > 0$. Supongamos que el sistema

$$\left| \begin{array}{rcl} x' &=& ax + by - x(mx^2 + ny^2) \\ y' &=& -bx + cy - y(px^2 + qy^2) \end{array} \right. \tag{2.4}$$

tiene una única singularidad en el origen de coordenadas y satisface $(a - c^2) - 4b^2 < 0$. Entonces el sistema (2.4) posee al menos un ciclo límite.

Demostración. En primer lugar analicemos el comportamiento local del único punto singular. El polinomio característico del sistema linealizado alrededor del origen de coordenadas es $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac + b^2)$ y el discriminante de $p(\lambda)$ es

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad + b^2) = (a - d)^2 - 4b^2 < 0.$$

En consecuencia el origen de coordenadas es inestable (nodo o foco inestable). Analicemos ahora el sistema en coordenadas polares

$$\begin{aligned} rr' &= xx' + yy' \\ &= x\big(ax + by - x(mx^2 + ny^2)\big) + y\big(- bx + cy - y(px^2 + qy^2)\big) \\ &= x^2(a - mx^2 - ny^2) + y^2(c - px^2 - qy^2). \end{aligned}$$

Definamos $A := \text{máx}\{m, n, p, q\} > 0$, $B := \text{mín}\{m, n, p, q\} > 0$, $P := \text{máx}\{a, c\} > 0$ y $Q := \text{mín}\{a, c\} > 0$, y con ello tenemos

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(Q - Ax^2 - Ay^2) \;&\leq rr' \leq\; (x^2 + y^2)(P - Bx^2 - By^2) \\ r^2(Q - Ar^2) \;&\leq rr' \leq\; r^2(P - Br^2) \\ r(Q - Ar^2) \;&\leq r' \leq\; r(P - Br^2) \end{aligned}$$

Entonces tomando $r_{entrada} = \sqrt{P/B}$ y $r_{salida} = \sqrt{Q/A}$, logramos encontrar un conjunto compacto $K = \big\{(r, \theta) : r_{salida} \leq r \leq r_{entrada}\big\}$ que satisface las condiciones del teorema de Poincaré-Bendixson, por lo tanto el sistema tiene al menos un ciclo límite que se encuentra dentro del compacto K. □

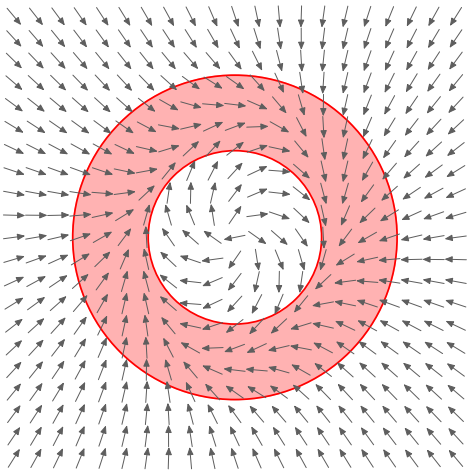


Figura 2.6: Tomando en particular $a = 4$, $b = 2$, $c = -1.5$, $m = 3.5$, $n = 0.5$, $p = 1$ y $q = 0.5$. La región K es el anillo centrado en el origen con radios interior $r_{salida} = \sqrt{3/7}$ y exterior $r_{entrada} = 2$.

2.2.2. Aplicación 2

Debemos dar algunas definiciones previas antes de la siguiente aplicación del teorema de Poincaré-Bendixson en el plano.

Definición 2.1. Un conjunto no vació S se dice que es *parcialmente ordenado* si definimos una relación binaria $\leq$ en S que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 2.2. Un subconjunto no vacío T de un conjunto parcialmente ordenado S, es una *cadena* si o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$ para todo par de elementos $x, y \in T$.

Definición 2.3. Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $x \in S$ es un *elemento maximal* de S si para todo $s \in S$ tal que $x \leq s$ se tiene $s = m$.

Lema 2.6 (Lema de Zorn)**.** Sea S un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena T admite una cota superior (es decir, si existe un elemento $s \in S$ tal que $t \leq s$ para todo $t \in T$) entonces S tiene, por lo menos, un elemento maximal.

Definición 2.4. Diremos que una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ tiene la *propiedad de intersección finita* si la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ es no vacía.

Teorema 2.4. Un espacio topológico S es compacto si, y solamente si, toda familia de conjuntos cerrados de S con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $X : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^k, con $1 \leq k \leq +\infty$. Dada una órbita cerrada $\mathcal{O}$ del campo X, sabemos del teorema de la curva de Jordan, que $\mathcal{O}$ divide a $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ en dos componentes conexas, una acotada ($\mathcal{R}_i$) y la otra no acotada ($\mathcal{R}_e$). Por un abuso de notación denotaremos por $\text{Int}(\mathcal{O}) = \mathcal{R}_i$ y $\text{Ext}(\mathcal{O}) = \mathcal{R}_e$. Ahora ya estamos listos para enunciar y demostrar la segunda aplicación del teorema de Poincaré-Bendixson.

Aplicación 2. Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $X : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1. Si $\mathcal{O}$ es una órbita cerrada del campo X de modo que la región interior de la órbita está contenida en U, es decir $\text{Int}(\mathcal{O}) \subset U$, existe una singularidad de X contenida en $\text{Int}(\mathcal{O})$.

Demostración. Supongamos que existe $\mathcal{O}_0$ una órbita cerrada de X con $\text{Int}(\mathcal{O}_0) \subset U$ tal que no existen puntos singulares en $\text{Int}(\mathcal{O}_0)$. Consideremos el conjunto

$$\Gamma = \left\{ \mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ órbita cerrada tal que } \mathcal{O} \subset \overline{\text{Int}(\mathcal{O}_0)} \right\}.$$

Notemos que $\Gamma \neq \emptyset$, dado que $\mathcal{O}_0 \in \Gamma$. Dados $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ en Γ, definimos la relación $\leq$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \overline{\text{Int}(\mathcal{O}_1)} \subset \overline{\text{Int}(\mathcal{O}_2)},$$

es sencillo notar que $(\Gamma, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Mostraremos que toda cadena $\mathcal{C} \subset \Gamma$ admite una cota superior. Sea $\sigma = \bigcap_{\mathcal{O} \in \mathcal{C}} \overline{\text{Int}(\mathcal{O})}$. Si logramos probar que $\sigma \neq \emptyset$, entonces podemos tomar un elemento $p \in \sigma$. Por hipótesis auxiliar sabemos

que $p \in \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{C}} \overline{\text{Int}(\mathcal{O})} \subset \overline{\text{Int}(\mathcal{O}_0)}$ es un punto regular de X. El teorema de existencia y unicidad garantiza que $\mathcal{O}^+(p)$ está contenida en el compacto $\overline{\text{Int}(\mathcal{O}_0)}$, entonces por el teorema 1.3 tenemos que $\omega(p) \neq \emptyset$. Más aún veamos que $\omega(p) \subset \sigma$, esto se debe a que σ es invariante por X. En efecto

$$p \in \sigma \Rightarrow p \in \text{Int}(\mathcal{O}), \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{C},$$

nuevamente usando el teorema de existencia y unicidad tenemos que $\mathcal{O}(p) \subset \overline{\text{Int}(\mathcal{O})}$ para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$. De este manera $\mathcal{O}(p) \subset \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{C}} \overline{\text{Int}(\mathcal{O})} = \sigma$. En consecuencia $\omega(p) \subset \overline{\mathcal{O}(p)} = \overline{\sigma} = \sigma$. Como $\omega(p) \subset \sigma \subset \overline{\text{Int}(\mathcal{O}_0)}$, podemos deducir que $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares. Aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson 2.1 concluimos que $\omega(p)$ es una órbita cerrada de X contenida en σ. Luego $\omega(p) = \mathcal{O}_p$ es una cota superior de $\mathcal{C}$, dado que

$$\mathcal{O}_p \subset \sigma = \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{C}} \overline{\text{Int}(\mathcal{O})} \Rightarrow \overline{\text{Int}(\mathcal{O}_p)} \subset \overline{\text{Int}(\mathcal{O})}, \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{C},$$

es decir $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}_p$ para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$. Por el lema de Zorn, el conjunto Γ admite un elemento maximal, digamos por ejemplo $\mu \in \Gamma$. En consecuencia no existe ninguna órbita cerrada de Γ contenida en $\text{Int}(\mu)$. Pero si tomamos $q \in \text{Int}(\mu)$, entonces el teorema de Poincaré-Bendixson asegura que $\alpha(q) = \omega(q) = \mu$, de esta manera $q \in \mu$. Esta contradicción muestra que debe existir, al menos un punto singular en $\text{Int}(\mathcal{O})$. Para completar la demostración solo basta mostrar que $\sigma \neq \emptyset$. Veamos primero que la cadena $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita, en efecto sea $\mathcal{F}$ una familia finita de elementos de $\mathcal{C}$, entonces podemos escribir $\mathcal{F} = \{\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \leq \cdots \leq \mathcal{O}_n\}$, es decir

$$\bigcap_{j=1}^{n} \overline{\text{Int}(\mathcal{O}_j)} = \overline{\text{Int}(\mathcal{O}_n)},$$

es decir $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita. Como $\overline{\text{Int}(\mathcal{O}_0)}$ es un conjunto compacto y $\mathcal{C}$ es una familia de conjuntos cerrados de $\overline{\text{Int}(\mathcal{O}_0)}$ con la propiedad de intersección finita, del teorema 2.4 se sigue que $\sigma = \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{C}} \overline{\text{Int}(\mathcal{O})} \neq \emptyset$. □

2.2.3. Aplicación 3

En esta subsección demostraremos el teorema generalizado del punto fijo de Brouwer en dimensión 2, la demostración es una versión modificada y generalizada de la prueba dada en [3]. Pero antes debemos dar algunas definiciones previas.

Definición 2.5. Sea V un espacio vectorial y un producto $\cdot : V \times V \to V$. Diremos que $(V, \cdot)$ es un *álgebra* si el producto es asociativo y bilineal.

Ejemplo 2.5. $(\mathbb{R}, \cdot)$ es un álgebra, con el producto usual. Sea (K, d) un espacio métrico compacto, $\big(C(K, \mathbb{R}), \cdot\big)$ es un álgebra.

Definición 2.6. Dado un álgebra $(V, \cdot)$, decimos que $M \subset V$ es un *sub-álgebra* si,

- M es sub-espacio de V.
- Si $v, w \in M$, entonces $v \cdot w \in M$.

Definición 2.7. Un *álgebra normado* es $(V, \cdot, \|\cdot\|)$ donde $(V, \cdot)$ es un álgebra y $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty[$ es tal que $\|v \cdot w\| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ para todo $v, w \in V$.

Ejemplo 2.6. Sea (K, d) un espacio métrico compacto, entonces $\big(C(K, \mathbb{R}), \cdot, \|\cdot\|_{máx}\big)$ donde, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in K$, resulta un álgebra de Banach.

Definición 2.8. Diremos que $A \subset C(K, \mathbb{R})$ separa puntos (de K) si para todo $x, y \in K$, con $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Teorema 2.5 (Teorema de Stone-Weiertrass)**.** Sea X un espacio compacto de Hausdorff y A un sub-álgebra de $C(X, \mathbb{R})$ que separa puntos y contiene a las funciones constantes, entones A es uniformemente denso en $C(X, \mathbb{R})$, es decir es denso respecto a la norma de la convergencia uniforme en $C(X, \mathbb{R})$.

Demostración. Véase [43, p. 291]. □

Corolario 2.1. Si K es un compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces los polinomios sobre K forman una familia uniformemente densa de $C(K, \mathbb{R})$.

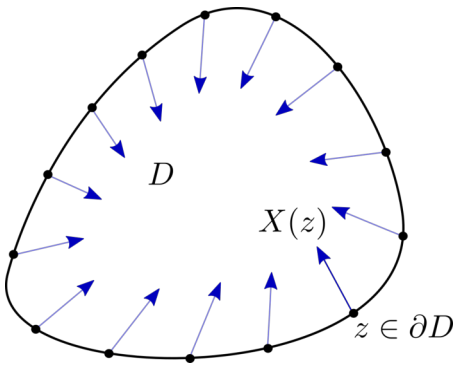
Demostración. La familia $\mathcal{P}$ de polinomios sobre K está formada por funciones polinomiales del tipo

$$\sum_{finita} a_{j_1 j_2 \cdots j_n} x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{j_n}, \quad \text{donde } j_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Queda claro que $\mathcal{P}$ es un álgebra que contiene a las funciones constantes. Además $\mathcal{P}$ separa puntos, en efecto sean $a, b \in K$, $a \neq b$, entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a_j \neq b_j$. Definimos $p(x) := x_j$ luego $p(a) = a_j \neq b_j = p(b)$. Por el teorema de Stone-Weiertrass, $\mathcal{P}$ es uniformemente denso en $C(K, \mathbb{R})$. □

Aplicación 3 (Teorema generalizado del punto fijo de Brouwer en dimensión 2)**.** Supongamos que $D \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto no vacío compacto y convexo, y $X : D \to D$ es una aplicación continua. Entonces X tiene un punto fijo en D, es decir existe $z \in D$ tal que $X(z) = z$.

Demostración. Sea $X(z) := \big(f(z), g(z)\big)$ para $z \in D$. Sea $\varepsilon > 0$, por el corolario 2.1 sabemos que existen polinomios $p(z)$ y $q(z)$ tales que $\big\|\big(f(z), g(z)\big) - \big(p(z), q(z)\big)\big\| < \varepsilon$ para todo $z \in D$. Si X tiene un punto fijo en la frontera de D, entonces no tenemos nada que probar. Supongamos entonces que X no posee ningún punto fijo en ∂D. Sea $z \in \partial D$, el vector $X(z) - z$ es no nulo y debe apuntar para D, dado que D es convexo.



Podemos asumir sin pérdida de generalidad que nuestras aproximaciones polinomiales $p(z)$ y $q(z)$ son lo suficientemente próximas a $f(z)$ y $g(z)$, respectivamente, como para que el vector que va de z a $\big(p(z), q(z)\big)$ nunca se anule para todo $z \in \partial D$ y apunte para el conjunto convexo D. Tomemos ahora el campo vectorial de clase C^∞,

$$Y(z) = \big(p(z), q(z)\big) - z$$

el cual apunta para D en todo punto $z \in \partial D$. Entonces D es un conjunto compacto positivamente invariante. En virtud de teorema de Poincaré-Bendixson, el conjunto D debe contener un punto singular o una órbita cerrada, pero por la aplicación 2 sabemos que en cualquier caso D contiene un punto singular $\overline{z}$, de modo que $Y(\overline{z}) = 0$, es decir $\big(p(\overline{z}), q(\overline{z})\big) = \overline{z}$. En consecuencia tenemos

$$\|X(\overline{z}) - \overline{z}\| = \big\|(f\big(\overline{z}\big), g(\overline{z})\big) - \overline{z}\big\| = \big\|\big(f(\overline{z}), g(\overline{z})\big) - \big(p(\overline{z}), q(\overline{z})\big)\big\| < \varepsilon.$$

Por tanto hemos probado que dado $\varepsilon > 0$ existe $\overline{z} \in D$ tal que $\|X(\overline{z}) - \overline{z}\| < \varepsilon$. En particular para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ existe $z_n \in D$ tal que $\|X(z_n) - z_n\| < 1/n$. Como la sucesión $(z_n)_n$ está contenida en un compacto, existe una subsucesión $(z_{n_k})_k \subset (z_n)_n$ convergente que converge para $z \in D$. Además dado que X es una aplicación continua, tenemos que $\lim\limits_{k\to+\infty} X(z_{n_k}) = X(z)$. Luego de

$$0 \leq \|X(z) - z\| \leq \|X(z) - X(z_{n_k})\| + \|X(z_{n_k}) - z_{n_k}\| + \|z_{n_k} - z\|$$

podemos concluir que $X(z) = z$ con $z \in D$. □

2.2.4. Aplicación 4

En esta subsección demostraremos el teorema fundamental del álgebra.

Aplicación 4 (Teorema fundamental del álgebra)**.** Todo polinomio no constante con coeficientes complejos de grado $n > 0$ posee al menos una raíz compleja.

Demostración. Supongamos que existe un polinomio no constante $p \in \mathbb{C}[X]$ tal que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ podemos pensar a $\frac{1}{p(z)}$ como $\dfrac{1}{p(z)} = \big(F_1(z), F_2(z)\big)$, entonces $z \mapsto \dfrac{1}{p(z)}$ define un campo vectorial Z en $\mathbb{R}^2$ el cual no posee singularidades. Por otro lado sabemos que $\lim\limits_{\|z\|\to+\infty} \|q(z)\| = +\infty$ para cualquier polinomio no constante $q \in \mathbb{C}[X]$ de grado $n > 0$, en particular para $q(z) = z \cdot p(z)$ y en consecuencia existe $R > 0$ tal que

$$\frac{1}{\|p(z)\|} < \|z\| \quad \text{para todo } \|z\| = R. \tag{2.5}$$

Sea $K = \overline{B}(0, R)$ conjunto compacto que denota la bola cerrada de radio R con centro en $(0, 0)$. El campo Z está bien definido en K y cualquier vector que va de $z \in \partial K$ a $Z(z)$ apunta para el interior de K, esto gracias a (2.5). Dado un punto $z \in K$ sabemos que $\omega_Z(z)$ contiene solamente puntos regulares, entonces por el teorema de Poincaré-Bendixson sabemos que el conjunto K debe contener una singularidad o una órbita cerrada, pero por la aplicación 2 sabemos además que en cualquier caso K contiene un punto singular lo cual es una contradicción. □

3

Preliminares variedades

Definición 3.1. Una *variedad diferenciable de clase C^k de dimensión m*, con $1 \leq k \leq +\infty$, es un espacio topológico Hausdorff M^m la cual tiene una base numerable de abiertos y está dotado de un *atlas diferenciable* $\mathcal{A} = \big\{(U_i, \mathbf{x}_i) : i \in I\big\}$, en otras palabras, es una familia formada por homeomorfismos $\mathbf{x}_i : U_i \to \mathbf{x}_i(U_i)$, $i \in I$ tales que:

1) cada U_i es un abierto de M^m a su vez cada $\mathbf{x}_i(U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$, por otra parte $M^m = \bigcup_{i \in I} U_i$,

2) la aplicación $\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1} : \mathbf{x}_i(U_i \cap U_j) \to \mathbf{x}_j(U_i \cap U_j)$ es un C^k-difeomorfismo el cual se da entre dos abiertos de $\mathbb{R}^m$, para cualesquiera $i, j \in I$ que satisfacen $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

3) la familia $\mathcal{A} = \big\{(U_i, \mathbf{x}_i) : i \in I\big\}$ es maximal si no es posible obtener un atlas $\mathcal{B}$ de clase C^k sobre M^m que contenga propiamente a $\mathcal{A}$. En otras palabras, $\mathcal{A}$ es maximal cuando para todo atlas $\mathcal{B}$ de clase C^k sobre M^m con $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ se cumple necesariamente que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Las aplicaciones $\mathbf{x}_i$ son denominadas *cartas locales*, $\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1}$ son denominados *cambios de coordenadas*. De no existir ambigüedad la variedad respecto a la dimensión de la variedad denotaremos M en lugar de M^m. Una aplicación $f : M \to N$ entre variedades diferenciables es llamada *diferenciable* si

$$\mathbf{y}_j \circ f \circ \mathbf{x}_i^{-1} : \mathbf{x}_i\big(U_i \cap f^{-1}(V_j)\big) \to \mathbf{y}_j\big(V_j \cap f(U_i)\big) \tag{3.1}$$

es una aplicación diferenciable para toda carta local $(U_i, \mathbf{x}_i) \in \mathcal{A}_M$ de M y toda carta local $(V_j, \mathbf{x}_j) \in \mathcal{A}_N$ de N con $f(U_i) \cap V_j \neq \emptyset$. Denominaremos *difeomorfismo* a toda biyección $f : M \to N$ de modo que tanto f como f^{-1} son diferenciables, además si ambas aplicaciones fueran de clase C^k diremos que el difeomorfismo es un $C^k - difeomorfismo$.

Definición 3.2. Sean X e Y dos espacios topológicos. Sean $f, g : X \to Y$ dos inmersiones homeomorfas de X en Y. Una *isotopía* de f en g es una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \to Y$ que posee las siguientes propiedades:

1. $H(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$,

2. $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$,

3. $H(\cdot,t)$ es una inmersión homeomorfa de X en Y para cada $t \in [0,1]$.

Dada M una variedad de dimensión m. Sea p un punto de M, definamos el conjunto $C_p(M)$ formado por las curvas $\alpha : J \to M$, donde J es un intervalo abierto conteniendo a 0, que satisfacen $\alpha(0) = p$ y α es diferenciable en 0, esto quiere decir que la aplicación $\mathbf{x}_i \circ \alpha$ es diferenciable en el punto 0, dada cualquier carta local $\mathbf{x}_i : U_i \to \mathbf{x}_i(U_i)$ donde $p \in U_i$. Dos curvas α, β en $C_p(M)$ son denominadas equivalentes si

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i \circ \beta)(t)\bigg|_{t=0} \text{ dada cualquier carta local } (U_i, \mathbf{x}_i)\mathcal{A}_M.$$

Además, si la igualdad vale para una carta local entonces ella vale para cualquier otra carta local. Es fácil demostrar que esta relación es en realidad una relación de equivalencia en $C_p(M)$. Denotaremos a la clase de equivalencia de cualquier curva $\alpha \in C_p(M)$ por $[\alpha]$. El espacio tangente a la variedad M en el punto p es el conjunto de tales clases de equivalencia, el cual será denotado por T_pM. Dada una carta local arbitraria $\mathbf{x}_i : U_i \to \mathbf{x}_i(U_i)$ con $p \in U_i$, la aplicación

$$\begin{array}{rccl} d\mathbf{x}_i(p): & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & [\alpha] & \mapsto & d\mathbf{x}_i(p)([\alpha]) := \dfrac{d}{dt}(\mathbf{x}_i \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0} \end{array}$$

es una biyección bien definida. Usamos esta biyección para identificar T_pM con $\mathbb{R}^m$. Por este motivo, el espacio tangente adquiere una estructura de espacio vectorial.

Definición 3.3. Dada M una variedad diferenciable. Un atlas $\mathcal{A}$ sobre M es denominado *atlas coherente* si $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathcal{A}$, entonces $\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1}$ tiene Jacobiano positivo para todo punto de $\mathbf{x}_i(U_i \cap U_j)$. Llamaremos a M una *variedad orientable*, si M admite un atlas coherente. Una vez fijada una orientación en M, una base ordenada $u_1, u_2 \cdots, u_m$ en el espacio tangente T_pM tiene *orientación positiva*, si la imagen por la derivada de cualquier carta $(U_i, \mathbf{x}_i)$ en el atlas coherente, con $p \in U_i$, tiene orientación positiva en $\mathbb{R}^m$, esto quiere decir que la matriz cuyas columnas son los vectores

$$d\mathbf{x}_i(p) \cdot u_1, d\mathbf{x}_i(p) \cdot u_2, \ldots, d\mathbf{x}_i(p) \cdot u_m$$

tiene determinante positivo. En caso contrario diremos que ella posee orientación negativa.

Definición 3.4. Toda aplicación diferenciable $f : M \to N$ induce en cada punto $p \in M$ una aplicación lineal $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ definida por $df_p([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ para todo $[\alpha] \in T_pM$. Esta aplicación es llamada el *diferencial de* f en p. Para cada punto $p \in M$, el conjunto $TM = \{(p, v_p) : p \in M, v_p \in T_pM\}$ es llamado *fibrado tangente de* la variedad M. La proyección natural será denotada por $\pi_1 : TM \to M$, $\pi_1(p, v_p) = p$.

Teorema 3.1 (Teorema de Whitney)**.** Toda variedad diferenciable M^m de clase C^k, donde $1 \leq k \leq +\infty$, puede ser $C^\infty-$inmersa en $\mathbb{R}^{2m}$ y $C^\infty-$homeomórficamente inmersa en $\mathbb{R}^{2m+1}$.

En virtud del teorema de Whitney podemos definir un campo vectorial sobre una variedad de una manera bastante natural,

Definición 3.5. Un *campo vectorial tangente* de clase C^k, donde $0 \leq k \leq +\infty$, a una variedad $M \subset \mathbb{R}^N$ es una aplicación de clase C^k que asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_pM$, es decir una aplicación $X : M \to TM$ de clase C^k tal que $\pi_1 \circ X = id_M$. Denotaremos por $\mathfrak{X}^k(M)$ al conjunto de los campos vectoriales de clase C^k en M.

Definición 3.6. Una *curva integral* de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $0 \leq k \leq +\infty$, que pasa por el punto $p \in M$ es una aplicación $\varphi : I \to M$ de clase C^k tal que $\varphi(0) = p$ y $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$ para todo $t \in I$, donde I es un intervalo abierto que contiene a 0.

Si $f : M^m \to N^n$ es un difeomorfismo de clase C^{k+1} y $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ entonces $Y = f_*X$, definido por $Y(q) = df(p) \cdot X(p)$ con $q = f(p)$, es un campo de clase C^k en N dado que $f_*X = df \circ X \circ f^{-1}$. Entonces $\varphi : I \to M$ es una curva integral del campo X que pasa por $p \in M$ si, y solamente si, $f \circ \varphi : I \to N$ es una curva integral de Y que pasa por $f(p)$. En efecto,

($\Rightarrow$) Supongamos que $\varphi(0) = p$ y $\varphi'(t) = X\big(\varphi(t)\big)$, luego $(f \circ \varphi)(0) = f(p)$ y

$$\begin{aligned} Y\big((f \circ \varphi)(t)\big) &= f_*X\big((f \circ \varphi)(t)\big) \\ &= df\big(\varphi(t)\big) \cdot X\big(f^{-1}(f \circ \varphi)(t)\big) \\ &= df\big(\varphi(t)\big) \cdot X\big(\varphi(t)\big) \\ &= df\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = (f \circ \varphi)'(t) \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $(f \circ \varphi)(0) = f(p)$ y $(f \circ \varphi)'(t) = Y\big((f \circ \varphi)(t)\big)$, entonces $\varphi(0) = p$ y como $df(\varphi(t))$ es invertible para todo $t \in I$, tenemos que

$$\begin{aligned} Y\big((f \circ \varphi)(t)\big) &= (f \circ \varphi)'(t) \\ df\big(\varphi(t)\big) \cdot X\big(\varphi(t)\big) &= df\big(\varphi(t)\big) \circ \varphi'(t) \\ X\big(\varphi(t)\big) &= \varphi'(t). \end{aligned}$$

En particular, f lleva trayectorias de X en trayectorias de Y. De manera que dados $p \in M$, un campo $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y una carta local $\mathbf{x}_i : U_i \to \mathbf{x}_\alpha(U_i) \subset \mathbb{R}^m$, con $p \in U_i$, entonces $Y = (\mathbf{x}_i)_*X$ es un campo vectorial de clase C^k en $\mathbf{x}_i(U_i)$; diremos que Y es la expresión de X en la carta local (x_i, U_i). Luego existe una única curva integral $\alpha : I \to \mathbb{R}^m$ de Y que pasa por $\mathbf{x}_i(p)$ de modo que $\mathbf{x}_i^{-1} \circ \alpha : I \to M$ es una curva integral de X que pasa por p. Mediante estas observaciones, los teoremas locales sobre existencia, unicidad y diferenciabilidad de soluciones se extienden a campos vectoriales en variedades como en el siguiente teorema,

Teorema 3.2 (Existencia y unicidad)**.** Si el campo vectorial $X : M \to TM$ es de clase C^k, donde $1 \leq k \leq +\infty$, entonces

1) para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ y $p_0 \in M$ existen un entorno W de λ_0 en $\mathbb{R}$ y un entorno V de p_0 en M, un número real $\varepsilon > 0$ y una aplicación $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \times V \to M$ de clase C^k tal que $\varphi(0, p, \lambda) = p$ y $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, p, \lambda) = X(\varphi(t, p, \lambda))$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $p \in V$ y $\lambda \in W$. Además, si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es una curva integral del campo vectorial $X_\lambda = X(\lambda, \cdot)$ con $\alpha(0) = p$, entonces $\alpha = \varphi(\cdot, p, \lambda)$,

2) sean I_j intervalos abiertos y $\varphi_j : I_j \to M$, para $j = 1, 2$, curvas integrales de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $1 \leq k \leq +\infty$. Si $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ para algún $t_0 \in I_1 \cap I_2$, entonces $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

En consecuencia existe una curva integral $\varphi : I_1 \cup I_2 \to M$ que coincide con φ_1 en I_1 y con φ_2 en I_2. Diremos que $\varphi_p : I = I(p) \to M$ es una curva integral *maximal* de X que pasa por el punto $p \in M$ si, y solamente si, toda curva integral $\psi : J \to M$ que pasa por $p \in M$ es tal que $\varphi_p = \psi|_I$ implica que $I = J$ y $\varphi_p = \psi$. En este caso el dominio de φ_p es llamado *intervalo maximal* y será denotado por $I(p) =]\omega_-(p), \omega_+(p)[$.

Definición 3.7. Un *flujo* de clase C^k, donde $1 \leq k \leq +\infty$, en una variedad M es una aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que

1) $\varphi(0, p) = p, \quad \forall p \in M,$

2) $\varphi\big(t, \varphi(s, p)\big) = \varphi(s + t, p), \quad \forall p \in M, \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$

3) existe una aplicación $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de clase C^k tal que $\Phi|_{\mathbb{R}\times M} = \varphi$.

Dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ sobre la variedad M, donde $1 \leq k \leq +\infty$. Sea $\varphi_p :]\omega_-(p), \omega_+(p)[\to M$ la curva integral maximal de X que pasa por $p \in M$. Definamos el conjunto $D_X = \big\{(t, p) : t \in I(p), p \in M\big\} \subset \mathbb{R} \times M$ y la función

$$\begin{array}{rccl} \varphi_X : & D_X & \longrightarrow & M \\ & (t, p) & \mapsto & \varphi_X(t, p) := \varphi_p(t). \end{array}$$

La función φ_X es llamada *flujo asociado al campo vectorial* X sobre la variedad M.

Proposición 3.1. Sea M una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Existe un flujo global de clase C^k para X en M, es decir una aplicación $\varphi_X : \mathbb{R}\times M \to M$ tal que $\varphi_X(0, p) = p$ y $\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$.

Demostración. Véase [27, p. 11]. □

Corolario 3.1. Sean $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $1 \leq k \leq +\infty$, y $\varphi_X : \mathbb{R} \times M \to M$ el flujo asociado a X. Para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $(\varphi_X)_t : M \to M$ definida por $(\varphi_X)_t(p) = \varphi_X(t, p)$ es un difeomorfismo de clase C^k. Además de esto, tenemos

1) $(\varphi_X)_0 = id_M$,

2) $(\varphi_X)_{t+s} = (\varphi_X)_t \circ (\varphi_X)_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

La *órbita de* X *que pasa por el punto* p, denotada por $\mathcal{O}_X(p)$ es el conjunto

$$\mathcal{O}_X(p) = \big\{(\varphi_X)_t(p) : t \in \mathbb{R}\big\}.$$

De no existir ambigüedad respecto al campo vectorial con el cual estamos trabajando, denotemos por $\mathcal{O}(p)$ en vez de $\mathcal{O}_X(p)$.

Si $X(p) = 0$ la órbita de p se reduce simplemente a p. En este caso diremos que p es una *singularidad* de X. En caso contrario la aplicación $\nu : \mathbb{R} \to M$, definida por $\nu(t) = (\varphi_X)_t(p)$ es una inmersión. Si ν no fuese biunívoca, existiría $T > 0$ tal que $\nu(T) = \nu(0) = p$ y $\nu(t) \neq p$ para todo $0 < t < T$. En este caso la órbita de p es difeomorfa a $\mathbb{S}^1$ y diremos que la órbita es *cerrada* o *periódica* de periodo T. En caso la órbita no sea ni una singularidad ni tampoco cerrada, ella será llamada *regular*. Así, una órbita regular es la imagen de una inmersión biunívoca de la recta. Por otro lado diremos que p es una *singularidad aislada* de X si existe un entorno V_p de p tal que $X(q) \neq 0$ para todo $q \in V_p - \{p\}$.
Existen también campos de vectores sin singularidades aisladas como el campo que se muestra a continuación $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $X(x, y, z) = (x^2, xz, y)$, el cual se anula en todos los puntos del eje z.

Teorema 3.3. Sea M una variedad diferenciable de clase C^∞. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\varphi_p : I(p) :=]\omega_-(p), \omega_+(p)[\to M$ una curva integral maximal de X que pasa por $p \in M$. Si el intervalo $I(p)$ de φ_p no es todo $\mathbb{R}$, entonces su imagen no estará contenida en ningún subconjunto compacto de M.

Demostración. Vamos a trabajar con $\omega_+(p) < \infty$ en el otro caso la demostración es totalmente análoga. Supongamos por reducción al absurdo que $\varphi_p\big(I(p)\big)$ esté contenido en un subconjunto compacto $K \subset M$. Consideremos una sucesión $(t_n)_n \subset I(p)$ tal que $t_n \to \omega_+(p)$ cuando $n \to +\infty$ y $\big(\varphi_p(t_n)\big)_n \subset K$. Como K es compacto, existe una subsucesión $\big(\varphi_p(t_{n_j})\big)_j$ convergente de $\big(\varphi_p(t_n)\big)_n$, es decir $\lim\limits_{j\to+\infty} \varphi_p(t_{n_j}) = p_0 \in K$. Sean V un entorno de p_0 en M y $\varepsilon > 0$ dado por el teorema 3.2. Tomemos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega_+(p) - t_{n_{j_0}} < \varepsilon/2$ y $\varphi_p(t_{n_{j_0}}) \in V$. El teorema 3.2 implica que la curva integral de X que pasa por $\varphi_p(t_{n_{j_0}})$ está definida en $]-\varepsilon, \varepsilon[$. En particular, la curva integral φ_p se puede extender al intervalo $]\omega_-(p), t_{n_{j_0}} + \frac{\varepsilon}{2}[\supset]\omega_-(p), \omega_+(p)[$, lo cual contradice la maximalidad de φ_p. □

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado

Corolario 3.2. Sea M una variedad diferenciable compacta. Entonces las curvas integrales de $X \in \mathfrak{X}(M)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$.

Definición 3.8. Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $1 \leq k \leq +\infty$, $p \in M$ y $\varphi_p : I(p) =]\omega_-(p), \omega_+(p)[\to M$ la curva integral maximal de X pasando por p.

1) Si $\omega_+(p) = +\infty$, el *conjunto $\omega-$límite de p*, denotado por $\omega_X(p)$ se define como

$$\omega_X(p) = \big\{q \in M : \exists (t_n)_n \subset I(p) \text{ con } t_n \to +\infty \text{ y } \varphi_p(t_n) \to q \text{ cuando } n \to +\infty\big\}.$$

2) Si $\omega_-(p) = -\infty$, el *conjunto $\alpha-$límite de p*, denotado por $\alpha_X(p)$ se define como

$$\alpha_X(p) = \big\{q \in M : \exists (t_n)_n \subset I(p) \text{ con } t_n \to -\infty \text{ y } \varphi_p(t_n) \to q \text{ cuando } n \to +\infty\big\}.$$

De manera análoga a lo visto en el capítulo 1 observamos que el conjunto $\alpha-$límite de p asociado al campo X, es igual al conjunto $\omega-$límite de p asociado al campo $-X$,

y viceversa. Es decir, $\alpha_X(p) = \omega_{-X}(p)$. Por este motivo, para estudiar las propiedades de los conjuntos $\alpha-$límite y $\omega-$límite es suficiente restringirnos al estudio del conjunto $\omega-$límite. De no existir ambigüedad respecto al campo vectorial con el cual estamos trabajando, denotaremos $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ en lugar de $\omega_X(p)$ y $\alpha_X(p)$, respectivamente.

Proposición 3.2. Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $p \in M$.

1) Si p es una singularidad del campo X, entonces $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$.

2) Si $\mathcal{O}(p)$ es una órbita periódica, entonces $\alpha(p) = \omega(p) = \mathcal{O}(p)$.

3) Si $q \in \mathcal{O}(p)$, entonces $\omega(q) = \omega(p)$ y $\alpha(q) = \alpha(p)$.

Gracias al item 3) de la proposición anterior, el cual establece que dos puntos cualesquiera de una misma órbita tienen el mismo conjunto $\alpha-$límite y el mismo conjunto $\omega-$límite, podemos tener la siguiente definición.

Definición 3.9. Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $\mathcal{O}$ una órbita de X

1) El *conjunto $\omega-$límite de la órbita $\mathcal{O}$*, es el conjunto $\omega(p)$ donde p es cualquier punto de $\mathcal{O}$.

2) El *conjunto $\alpha-$límite de la órbita $\mathcal{O}$*, es el conjunto $\alpha(p)$ donde p es cualquier punto de $\mathcal{O}$.

A continuación presentamos un resultado análogo al teorema 1.3 pero ahora para un campo vectorial tangente a una variedad compacta, cuya demostración es totalmente análoga a la demostración del teorema 1.3.

Teorema 3.4. Sea M una variedad diferenciable compacta, un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $1 \leq k \leq +\infty$ y $p \in M$. Entonces

1) $\omega(p) \neq \emptyset$.

2) $\omega(p)$ es compacto.

3) $\omega(p)$ es conexo.

4) $\omega(p)$ es invariante por X.

Demostración. Sea una sucesión $t_n \to +\infty$ y $p_n = \varphi_p(t_n)$. Como M es compacto, entonces $(p_n)_n$ tiene una subsucesión convergente cuyo límite pertenece a $\omega(p)$. Por tanto $\omega(p) \neq \emptyset$. Como $\omega(p) \subset M$ basta probar que $\omega(p)$ es cerrado. Supongamos que $q \notin \omega(p)$. Entonces existe un entorno $V(q)$ disjunto de $\{\varphi_p(t) : t \geq t_0\}$ para algún $t_0 > 0$. Lo cual implica que los puntos de $V(q)$ no pertenecen a $\omega(p)$ y entonces $\omega(p)$ es cerrado. Supongamos que $\omega(p)$ no es conexo. Entonces existen abiertos V_1 y V_2 tales que $\omega(p) \subset V_1 \cup V_2$, $\omega(p) \cap V_1 \neq \emptyset$, $\omega(p) \cap V_2 \neq \emptyset$ y $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset$. La órbita de p se acumula en los puntos de V_1 y V_2, de modo que, dado $T > 0$ existe $t > T$ tal que $\varphi_p(t) \in M - (V_1 \cup V_2) := K$. De esta manera, existe una sucesión $t_n \to +\infty$ con $\varphi_p(t_n) \to q$ para algún $q \in K$. Pero esto implica que $q \in \omega(p) \subset V_1 \cup V_2$ lo cual es una

contradicción. Supongamos ahora que $q \in \omega(p)$, entonces existe una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $\varphi_p(t_n) \to q$. Tomemos $r \in \mathcal{O}(q)$, es decir $r = \varphi_q(s)$ para algún $s \in I(q)$. Luego

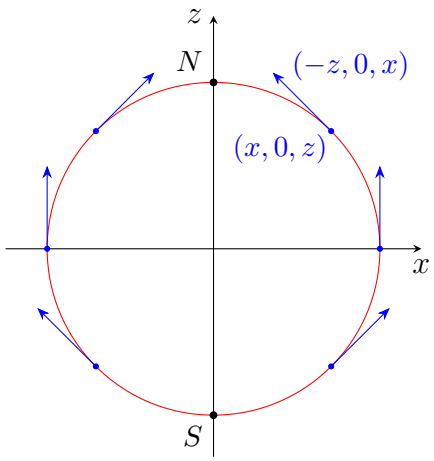
$$\varphi_p(t_n + s) = \varphi(t_n + s, p) = \varphi\big(s, \varphi(t_n, p)\big)$$

converge para $\varphi(s, q) = r$ y por tanto $r \in \omega(p)$. Esto muestra que $\omega(p)$ es invariante por el flujo. □

Ejemplo 3.1. Consideremos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. No es complicado notar que $f^{-1}(1)$ es una variedad diferenciable bidimensional a la cual llamaremos *esfera unitaria* y será representada por $\mathbb{S}^2$. Además podemos notar que el plano tangente a $\mathbb{S}^2$ en cada punto $p = (x_1, x_2, x_3)$ está dado por

$$T_p\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot p = 0\}.$$

Sea $S = (0, 0, -1)$ el polo sur y $N = (0, 0, 1)$ el polo norte de la esfera $\mathbb{S}^2$. Construyamos un campo vectorial X en $\mathbb{S}^2$ tal que sea tangente a los meridianos de $\mathbb{S}^2$ y que apunten hacia arriba. Si miramos el meridiano $y = 0$, el campo tangente a él es $(-z, 0, x)$, simplemente pensemos en el vector tangente al círculo unitario en el plano que es ortogonal al vector posición. Es decir, $X(x, 0, z) = (-z, 0, x)$.



Todo lo que resta ahora, es hacer que este campo vectorial sea invariante bajo rotación alrededor del eje z. Así que reemplazamos x con $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ luego podemos notar que

$$X(x, 0, z) = (-z, 0, x) = \frac{1}{r}(-zx, 0, r^2).$$

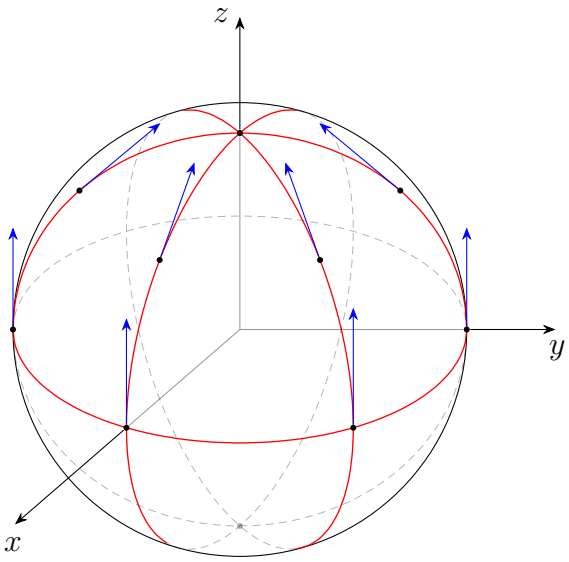
De modo que tenemos

$$X(x, y, 0) = (-y, x, 0) = \frac{1}{r}(-zx, -zy, 0)$$
$$X(0, y, z) = (0, -z, y) = \frac{1}{r}(0, -zy, r^2)$$

en consecuencia podemos considerar el campo vectorial $X : \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$, definido por

$$X(x, y, z) = \frac{1}{r}(-zx, -zy, r^2) = \left(\frac{-zx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-zy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ y $X(0, 0, \pm 1) = (0, 0, 0)$. Así definido tenemos que $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{S}^2)$ y además las singularidades del campo X son únicamente N y S. De esta manera es claro que $\omega_X(p) = \{N\}$ y $\alpha_X(p) = \{S\}$ para todo p en $\mathbb{S}^2$.



3.1. Teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera $\mathbb{S}^2$

En el ejemplo 3.1 vimos que bajo el campo X que construimos, el cual tenía una cantidad finita de singularidades, el conjunto $\omega-$límite resultó ser un punto singular, lo cual nos da a pensar tempranamente que el teorema de Poincaré-Bendixson podría ser generalizado de una manera natural a la esfera. Pero tenemos un inconveniente, en la demostración del teorema de Poincaré-Bendixson en el plano usamos el hecho de que una curva de Jordan divide al plano en dos componentes conexas una acotada y otra no. Sin embargo, es posible demostrar que una curva de Jordan J en la esfera $\mathbb{S}^2$ divide a $\mathbb{S}^2 \setminus J$ en dos componentes conexas, ambas acotadas, cuyas fronteras coinciden con J. Otra diferencia con el teorema de la curva de Jordan en el plano es que ahora en la esfera las dos componentes conexas tienen papeles simétricos, no podemos diferenciar más entre *interior de* J y *exterior de* J. Por otro lado, como $\mathbb{S}^2$ es una variedad compacta, entonces cualquier trayectoria está definida en todo tiempo.

Un hecho importante es que dados un campo vectorial X de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ y un punto p en $\mathbb{S}^2$, entonces para que $\varphi_X(t, p) \in \mathbb{S}^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es necesario y suficiente que $X(p) \in T_p\mathbb{S}^2$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$. En efecto, sea $p \in \mathbb{S}^2$. Supongamos que $\varphi_X(t, p) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{S}^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\begin{aligned}
x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t) + x_3(t)x_3'(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \langle \varphi_X(t, p), \varphi_X'(t, p) \rangle = 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \langle \varphi_X(t, p), X(\varphi_X(t, p)) \rangle = 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \langle \varphi_X(0, p), X(\varphi_X(0, p)) \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle p, X(p) \rangle = 0 \\
&\Rightarrow X(p) \in T_p\mathbb{S}^2, \quad \forall p \in \mathbb{S}^2.
\end{aligned}
$$

Recíprocamente supongamos que $X(p) \in T_p\mathbb{S}^2$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$ y sea $\varphi_X : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$. Supongamos por el absurdo que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t_0, p) \notin \mathbb{S}^2$, luego por la continuidad de φ_X sabemos que existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t_1, p) \in \mathbb{S}^2$ y $\varphi_X(t_1 + \varepsilon, p) \notin \mathbb{S}^2$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Entonces tendríamos que $\varphi'_X(t_1, p) = X(\varphi_X(t_1, p)) \notin T_{\varphi_X(t_1,p)}\mathbb{S}^2$ lo cual contradice las hipótesis.

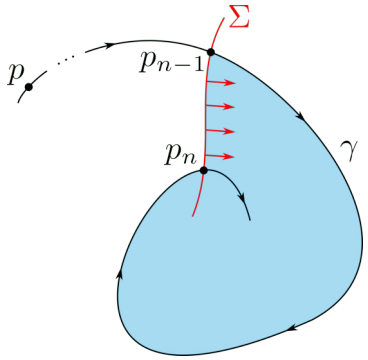
Algunos resultados ya no serán detallados a profundidad como en el capitulo anterior, ya que sus demostraciones son análogas a las demostraciones dadas para el plano.

Lema 3.1. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(\mathbb{S}^2)$ donde $1 \leq k \leq +\infty$. Sea $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$ una sección transversal local al campo X. La órbita positiva a través de un punto regular $p \in \mathbb{S}^2$ interseca a Σ o bien es un conjunto finito o bien es una sucesión monótona, es decir si p_n es la $n-$ésima intersección de $\mathcal{O}^+(p)$ con Σ entonces $p_n \in [p_{n-1}, p_{n+1}] \subset \Sigma$.

Demostración. Sea $A = \{t \geq 0 : \varphi_p(t) \in \Sigma\}$. Por el teorema del flujo tubular, tenemos que A es un conjunto discreto, es decir A es finito o $A = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \dots\}$. Sean $p_n = \varphi_p(t_n)$. Tenemos dos opciones:

1. Si $p_{n-1} = p_n$, entonces $\varphi_p(t_{n-1}) = \varphi_p(t_n)$, es decir φ_p es una trayectoria periódica de período $T = t_n - t_{n-1} > 0$. Por tanto $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma = \{p_n\}$.

2. Si $p_{n-1} \neq p_n$, entonces por el orden inducido en Σ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p_{n-1} < p_n$. Si p_{n+1} no está definido, entonces $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$ y el lema quedaría demostrado. Si p_{n+1} está definido, entonces veremos que $p_n < p_{n+1}$. Como Σ es conexa y el campo vectorial es continuo, tenemos que las trayectorias en X intersecan a Σ en una misma dirección.



Consideramos la curva γ que consiste de los arcos $\overset{\frown}{p_{n-1}p_n} \subset \mathcal{O}^+(p)$ y $\overset{\frown}{p_{n-1}p_n} \subset \Sigma$. Notemos que γ separa a la esfera $\mathbb{S}^2$ en dos componentes conexas ambas acotadas, sea $\mathcal{R}$ la componente que no contiene al punto p. Afirmamos que la trayectoria a partir de p_n, es decir $\varphi_p(t)$ para $t > t_n$, está contenida en $\mathcal{R}$. Caso contrario existiría $\hat{t} > t_n$ tal que $\varphi_p(\hat{t}) \notin \mathcal{R}$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que $\varphi_p(t_n + \varepsilon) \in \mathcal{R}$. Luego como $\varphi_p\big([t_n + \varepsilon, \hat{t}\,]\big)$ es conexo, entonces el teorema de la aduana asegura la existencia de $t' \in [t_n + \varepsilon, \hat{t}\,]$ tal que $\varphi_p(t') \in \partial\mathcal{R} = \gamma$. Sabemos por el teorema de existencia y unicidad de soluciones que $\varphi_p(t') \notin \mathcal{O}^+(p)$. Luego

$$\varphi_p(t') \in \overset{\frown}{p_{n-1}p_n} \subset \Sigma$$

lo cual no puede ocurrir ya que existiría un entorno alrededor de un punto regular en el cual habrían trayectorias que recorren en sentidos opuestos. De modo que $p_{n+1} \in \mathcal{R}$, y por tanto $p_n < p_{n+1}$.

□

Corolario 3.3. El conjunto $\omega-$límite de una trayectoria $\mathcal{O}$ interseca a Σ a lo más en un punto.

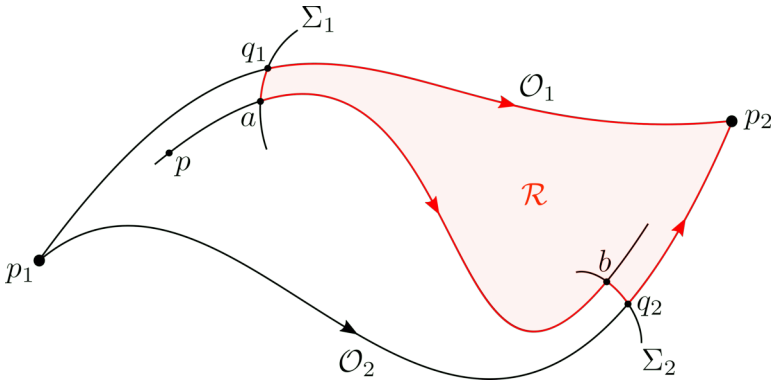
Demostración. Supongamos que $\omega(\mathcal{O})$ contenga dos puntos q_1 y q_2 en Σ. Sea $(p_n)_n$ la sucesión de intersecciones de $\mathcal{O}$ con Σ. Entonces existen subsucesiones de $(p_n)_n$ tal que convergiendo para q_1 y q_2, lo cual contradice monotonicidad de $(p_n)_n$. □

Lema 3.2. Si el conjunto $\omega-$límite de una trayectoria $\mathcal{O}$ no contiene singularidades, entonces $\omega(\mathcal{O})$ es una órbita cerrada.

Demostración. Sea $q \in \omega(\mathcal{O})$. Mostremos que la órbita de q es cerrada. Tomemos $r \in \omega(q)$ y por tanto r no es una singularidad. Consideremos una sección transversal local Σ que contiene a r. Por el lema 3.1, la órbita positiva de q interseca a Σ en una sucesión monótona $(q_n)_n$ que converge para r. Como $(q_n)_n \subset \omega(\mathcal{O})$, se sigue del corolario 3.3 que $q_n = r$ para todo n. Luego la órbita de q es cerrada. Tomando ahora una sección transversal local que contiene a q podemos concluir, como en el lema 2.4, que $\omega(\mathcal{O})$ se reduce a la órbita de q. □

Lema 3.3. Sean p_1 y p_2 singularidades distintas del campo vectorial, pertenecientes al conjunto $\omega-$límite de un punto $p \in \mathbb{S}^2$. Existe como máximo una órbita $\mathcal{O} \subset \omega(p)$ tal que $\alpha(\mathcal{O}) = p_1$ y $\omega(\mathcal{O}) = p_2$.

Demostración. Supongamos que existen dos órbitas $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ contenidas en $\omega(p)$ tales que $\alpha(\mathcal{O}_j) = p_1$ y $\omega(\mathcal{O}_j) = p_2$ para $j = 1, 2$. La curva C_1 que consiste de las órbitas $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ y los puntos p_1, p_2 separa a $\mathbb{S}^2$ en dos componentes conexas ambas acotadas, una de las cuales contiene a p. Sean $q_1 \in \mathcal{O}_1$ y $q_2 \in \mathcal{O}_2$ puntos regulares y Σ_1, Σ_2 las secciones transversales locales al campo X a través de q_1 y q_2, respectivamente.



Como $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \omega(p)$ tenemos que la órbita positiva del punto p interseca a las secciones transversales, es decir $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma_j \neq \emptyset$ para $j = 1, 2$. Digamos $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma_1 = \{a\}$ y $\mathcal{O}^+(p) \cap \Sigma_2 = \{b\}$. Consideremos la curva C_2 que consiste del arco $\widehat{ab} \subset \mathcal{O}(p)$, $\widehat{bq_2} \subset \Sigma_2$, $\widehat{q_2p_2} \subset \mathcal{O}_2$, $\widehat{p_2q_1} \subset \mathcal{O}_1$, $\widehat{q_1a} \subset \Sigma_1$ y el punto p_2. Vemos que C_2 separa a $\mathbb{S}^2 - C_2$ en dos componentes conexas $\mathcal{R}$ (componente que no contiene a p) y $\mathcal{S}$ (componente que contiene a p). La órbita positiva del punto b queda enteramente contenida en $\mathcal{R}$ lo cual es una contradicción dado que $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \omega(p)$. □

Teorema 3.5 (Teorema de Poincaré-Bendixson en $\mathbb{S}^2$)**.** Sea $X \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$ un campo vectorial que posee un número finito de singularidades y $p \in \mathbb{S}^2$ un punto regular de X, entonces se tienen las siguiente posibilidades:

1) Si $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.

2) Si $\omega(p)$ contiene solamente puntos singulares, entonces $\omega(p)$ es un punto singular.

3) Caso contrario, es decir $\omega(p)$ contiene puntos singulares y puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es la unión finita de puntos singulares $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y órbitas $\mathcal{O}$ tales que $\alpha(\mathcal{O}) = \{p_i\}$ y $\omega(\mathcal{O}) = \{p_j\}$ donde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración.

1) Si $\omega(p)$ no contiene puntos singulares, entonces por el lema 3.2 tenemos que $\omega(p)$ es una órbita cerrada o periódica.

2) Si $\omega(p)$ contiene solo puntos singulares. Del teorema 3.4 tenemos que $\omega(p)$ es conexo y por hipótesis sabes que el número de puntos singulares es finito, y en consecuencia $\omega(p)$ consiste de un único punto singular.

3) Supongamos que $\omega(p)$ contenga puntos regulares y singularidades. Sea $\mathcal{O}$ una trayectoria regular contenida en $\omega(p)$. Afirmamos que $\omega(\mathcal{O})$ es una singularidad. Si $\omega(\mathcal{O})$ posee algún punto regular q tomemos una sección transversal local Σ al campo X en q. Como $\mathcal{O} \subset \omega(p)$, tenemos por el corolario 3.3 que $\mathcal{O}$ interseca a Σ en apenas un punto. Por el lema 3.2 $\mathcal{O}$ es una trayectoria cerrada y $\omega(p) = \mathcal{O}$. Esto es un absurdo, dado que $\omega(p)$ posee singularidades. Por tanto, $\omega(\mathcal{O})$ es una singularidad. Análogamente, $\alpha(\mathcal{O})$ es una singularidad.

□

Siguiendo una demostración análoga a la aplicación 2 tenemos el siguiente resultado.

Aplicación 2'. *Si $\mathcal{O}$ es una órbita periódica del campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$, entonces existe un punto singular de X en cada componente conexa limitada por $\mathcal{O}$.*

3.1.1. Algunos ejemplos en la esfera

Dejemos las aplicaciones por un momento y centremos nuestra atención a dar y analizar algunos ejemplos de conjuntos $\omega-$límite. En el ejemplo 3.1 construimos un campo vectorial X tangente a $\mathbb{S}^2$ el cual tiene como conjunto $\omega-$límite de cualquier punto al polo norte. Veamos ahora dos ejemplo en los cuales determinaremos explícitamente el conjunto $\omega-$límite en el primero obtendremos un punto mientras que en el segundo, una órbita periódica.

Ejemplo 3.2. Consideremos en $\mathbb{S}^2$ el campo vectorial

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2).$$

Es claro que los únicos puntos singulares de X son $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$. Consideremos las coordenadas esféricas,

$$x = \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \cos\phi$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Para θ fijo, definamos la curva $\alpha_\theta :]0, \pi/2[\to \mathbb{S}^2$ dada por

$$\alpha_\theta(\phi) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi)$$

que tiene por imagen a los semi-meridianos de la esfera $\mathbb{S}^2$ que van de arriba hacia abajo, luego

$$\alpha'_\theta(\phi) = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi).$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} X\big(\alpha_\theta(\phi)\big) &= (-\operatorname{sen}\phi\cos\phi\cos\theta, -\operatorname{sen}\phi\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}^2\phi) \\ &= -\operatorname{sen}\phi\cdot(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi) \\ &= -\operatorname{sen}\phi\cdot\alpha'_\theta(\phi) \end{aligned}$$

Es decir el campo X es tangente a los meridianos de $\mathbb{S}^2$ apuntando hacia arriba, entonces dado cualquier punto p en $\mathbb{S}^2 - \{N, S\}$ la órbita $\varphi_p(t)$ está sobre un meridiano de $\mathbb{S}^2$ que además tiende para N cuando $t \to +\infty$ y, a S cuando $t \to -\infty$. De esta manera tenemos $\omega(p) = \{N\}$ y $\alpha(p) = \{S\}$ para todo p en $\mathbb{S}^2$.

Ejemplo 3.3. Consideremos el siguiente campo vectorial, dado en [28]

$$X(x, y, z) = (-y + xz^2, x + yz^2, -zx^2 - zy^2).$$

Tenemos que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ pues $\langle p, X(p)\rangle = 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$. Los polos son claramente las únicas singularidades del campo X. Consideremos cualquier punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ distinto de los polos, es decir $z_0 \in]-1, 1[$. Mostraremos que el conjunto $\omega-$límite de p es igual al ecuador, calculemos esto explícitamente. En primer lugar verifiquemos que $\omega(p)$ está contenido en el ecuador, para esto analicemos las órbitas de X. Notemos que la tercera componente de X es $X_3(x, y, z) = -zx^2 - zy^2 = -z(1 - z^2)$ luego el P.V.I.

$$\left|\begin{array}{rcl} z'(t) &=& z(z^2 - 1) \\ z(0) &=& z_0 \in]-1, 1[\end{array}\right.$$

posee como solución a $z(t) = \operatorname{sgn}(z_0)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1 + ce^{2t}}}$ donde $c = \frac{1}{z_0^2} - 1 > 0$. Como $c > 0$, tenemos que $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$. Esto muestra que la órbita $\varphi_p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se acerca al ecuador y, por lo tanto, el conjunto $\omega-$límite de p debe ser un subconjunto del ecuador. Ahora veamos que el $\omega(p)$ es igual a todo el ecuador. Para esto sustituyamos $z(t)$ obteniendo así el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left|\begin{array}{rcl} x'(t) &=& -y + \dfrac{x}{1 + ce^{2t}} \\ y'(t) &=& x + \dfrac{y}{1 + ce^{2t}} \end{array}\right.$$

el cual puede ser expresado de manera matricial, como sigue

$$W'(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1 + ce^{2t}} & -1 \\ 1 & \dfrac{1}{1 + ce^{2t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A(t)\cdot W(t).$$

Es sencillo probar que $A(s)\cdot A(t) = A(t)\cdot A(s)$ para todo t y s. Luego la solución del siguiente P.V.I.

$$\left|\begin{array}{rcl} W'(t) &=& A(t)\cdot W(t) \\ W(0) &=& \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}^t \end{array}\right.$$

está dada por $W(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right)\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Para esto necesitamos la siguiente integral

$$\int_0^t \frac{1}{1+ce^{2\tau}}d\tau = t - \int_0^t \frac{ce^{2\tau}}{1+ce^{2\tau}}d\tau = t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+c}{1+ce^{2t}}\right| = t + \ln\left|\frac{z}{z_0}\right|$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right) &= \exp\begin{pmatrix} t+\ln\left|\frac{z}{z_0}\right| & -t \\ t & t+\ln\left|\frac{z}{z_0}\right| \end{pmatrix} \\ &= \exp\left(\left[t+\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \exp\left(t+\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\right)\cdot\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= e^t\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|\cdot\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^t}{|z_0|\sqrt{1+ce^{2t}}}\cdot\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$W(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right)\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{e^t}{|z_0|\sqrt{1+ce^{2t}}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}}_{R_z(t)}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

El punto inicial está en la intersección de la esfera con el plano $z = z_0$, en este plano $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tiene una longitud $\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \sqrt{1-z_0^2} = \sqrt{1-\frac{1}{1+c}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1+c}} = |z_0|\sqrt{c}$, así que la longitud de los vectores $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ en los planos horizontales $z = z(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ es

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{|z_0|\sqrt{1+ce^{2t}}}\cdot|z_0|\sqrt{c} = \frac{1}{|z_0|\sqrt{c}}\cdot|z_0|\sqrt{c} = 1$$

como la matriz $R_z(t)$ es una matriz de rotación, hemos mostrado que nos acercamos al ecuador mientras que rotamos indefinidamente alrededor del eje z, en consecuencia $\omega(p) = \{Ecuador\}$ para todo punto p distinto de los polos como se puede apreciar en la figura 3.1.

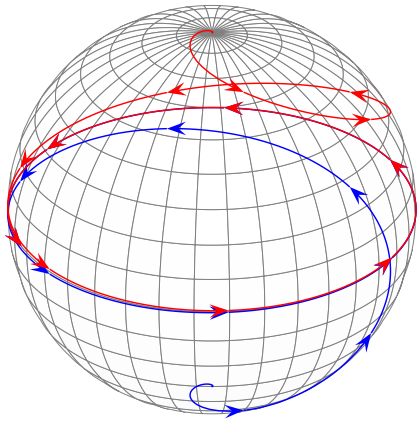


Figura 3.1: $\omega(p) = \{Ecuador\}$

Proposición 3.3. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto que contiene al origen y $t \in I \mapsto \varphi(t, x)$ es una solución con $\varphi(0, x) = x_0 \in U$, por tanto una órbita parametrizada. Podemos reparametrizar esta órbita como una solución del campo vectorial reescalado Y definido por

$$Y(x) = h(x) \cdot X(x)$$

donde $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función positiva de clase C^∞.

Demostración. Como la función $s \mapsto \dfrac{1}{h(\varphi(s, x))}$ es una función continua en I, entonces la función $t \in I \to B(t, x)$ definida por

$$B(t, x) = \int_0^t \frac{1}{h(\varphi(s, x))} ds$$

está bien definida en I y su derivada $\frac{d}{dt}B(t, p)$ siempre es positiva. Entonces B es invertible en su rango $K \subset \mathbb{R}$, si $\rho : K \to I$ es la inversa de B dada por $t \mapsto \rho(t, x)$, tenemos

$$\frac{d}{dt}\rho(t, x) = \frac{1}{\frac{d}{dt}B(t, p)} = h(\varphi(\rho(t, x), x)), \quad \forall t \in K.$$

Definamos la función $\psi(t, x) := \varphi(\rho(t, x), x)$ que satisface $\psi(0, x) = \varphi(\rho(0, x), x) = \varphi(0, x) = x_0$ y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t, x) &= \frac{d\varphi}{dt}(\rho(t, x), x) \cdot \frac{d}{dt}\rho(t, x) \\ &= X(\psi(t, x)) \cdot h(\psi(t, x)) \\ &= Y(\psi(t, x)). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.4. Sea X el campo vectorial en $\mathbb{S}^2$ del ejemplo 3.3, en donde vimos que las órbitas nacen en los polos y tienden al ecuador. Sea $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicación no negativa de clase C^∞ que se anula únicamente en el ecuador de la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Consideremos ahora el campo de vectores $Y = h \cdot X$. Luego notamos que así definido,

cada punto del ecuador es una singularidad de Y y el conjunto $\omega-$límite de un punto p que no es un polo ni está en el ecuador es la totalidad del ecuador, dado que a excepción del ecuador las órbitas del campo vectorial Y son las mismas que para X solo que con una parametrización de tiempo diferente, como lo muestra la proposición 3.3.

Este ejemplo nos ha mostrado que el teorema de Poincaré-Bendixson 3.5, en la esfera $\mathbb{S}^2$, carece de validez sin la hipótesis de un número finito de puntos singulares. En este punto es sensato preguntarnos si existe la posibilidad de conseguir una generalización *natural* para variedades en general ya sean de dimensión dos o mayores, pero nuestras ilusiones de tal generalización natural se ven afectadas por el flujo irracional en el toro $\mathbb{T}^2$ que estudiaremos a detalle en la siguiente sección. Antes de ver este hecho mostremos algunas aplicaciones más del teorema de Poincaré-Bendixson.

3.1.2. Aplicación 5

En esta subsección demostraremos que no se puede peinar la esfera en dimensión 2 (siempre habrá por lo menos un remolino), este teorema es conocido como "hairy ball theorem".

Definición 3.10. Si M y N son variedades diferenciales de clase C^r, $C^r(M,N)$ denota el conjunto de aplicaciones de clase C^r de M en N. Primero asumimos que r es finito. La *topología débil* o *topología C^r compacto-abierta* en $C^r(M,N)$ es generada por los conjuntos definidos como sigue: Sea $f \in C^r(M,N)$, sean (φ,U) y (ψ,V) cartas de M y N respectivamente, sea $K \subset U$ un conjunto compacto tal que $f(K) \subset V$, sea $0 < \varepsilon \leq +\infty$. Definimos un abierto sub-básico débil $\mathcal{N}^r(f;(\varphi,U),(\psi,V),K,\varepsilon)$ el cual consiste de todas las aplicaciones $g \in C^r(M,N)$ tales que $g(K) \subset V$ y $\left\|D^k(\psi f\varphi^{-1})(x) - D^k(\psi g\varphi^{-1})(x)\right\| < \varepsilon$, para todo $x \in \varphi(K)$, $k = 0,1,\ldots,r$.
La topología débil en $C^r(M,N)$ es generada por los conjuntos $\mathcal{N}^r(f;\varphi,\psi,K,\varepsilon)$; esto define el espacio topológico $C^r_W(M,N)$. Un entorno de f es por tanto cualquier conjunto que contenga la intersección de número finito de conjuntos de tipo $\mathcal{N}^r(f;\varphi,\psi,K,\varepsilon)$.

La *topología fuerte* o también llamada *topología de Whitney* es generado por una base que consiste del siguiente tipo: $\Phi = \{(\varphi_j,U_j) : j \in \Lambda\}$ un conjunto de cartas sobre M localmente finitas, esto significa que cualquier punto de M tiene un entorno el cual se interseca con U_j solo para un número finito de $j's$. Sea $K = \{K_j\}_{j\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos compactos de M con $K_j \subset U_j$. Sea $\Psi = \{(\psi_j,V_j) : j \in \Lambda\}$ una familia de cartas sobre N y $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}_{j\in\Lambda}$ una familia de números positivos. Si $f \in C^r(M,N)$ toma cada K_j en V_j, definamos un abierto básico fuerte $\mathcal{N}^r(f;\Phi,\Psi,K,\varepsilon)$ el cual consiste de todas las aplicaciones $g \in C^r(M,N)$ tales que $g(K_j) \subset V_j$, $\forall j \in \Lambda$ y $\left\|D^k(\psi_j f\varphi_j^{-1})(x) - D^k(\psi_j g\varphi_j^{-1})(x)\right\| < \varepsilon_j$, para todo $x \in \varphi_j(K_j)$, $k = 0,1,\ldots,r$.

Denotemos el espacio topológico $C^r(M,N)$ dotado de la topología fuerte por $C^r_S(M,N)$. El espacio topológico $C^r_S(M,N)$ que resulta de la topología fuerte es la misma que $C^r_W(M,N)$ cuando M es compacto. Ahora definimos los espacios $C^\infty_W(M,N)$ y $C^\infty_S(M,N)$. La topología débil en $C^\infty(M,N)$ es simplemente la unión de topologías inducidas por la aplicación inclusión $C^\infty(M,N) \to C^r_W(M,N)$ para r finito, mientras que la topología fuerte en $C^\infty(M,N)$ es la unión de las topologías inducidas por la aplicación inclusión $C^\infty(M,N) \to C^r_S(M,N)$.

Teorema 3.6. Sea M una variedad diferenciable de clase C^r con $1 \leq r \leq +\infty$. Entonces $C^r(M,\mathbb{R}^n)$ es denso en $C^0_S(M,\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Véase [15, p. 44]. □

Aplicación 5. Todo campo continuo de vectores tangentes a $\mathbb{S}^2$ admite al menos una singularidad.

Demostración. Supongamos que existe $X : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de vectores tangentes a $\mathbb{S}^2$ tal que $X(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|X(p)\| \geq \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$. Del teorema 3.6 sabemos que existe $Z : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\|X(p) - Z(p)\| < \varepsilon/2$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$. Entonces $Z(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$ pues caso contrario existiría $\overline{p} \in \mathbb{S}^2$ tal que $Z(\overline{p}) = 0$, luego $\|X(\overline{p})\| = \|X(\overline{p}) - Z(\overline{p})\| < \varepsilon/2$ lo cual es una contradicción.

Dado un punto arbitrario $p \in \mathbb{S}^2$ tenemos que $\omega_Z(p)$ contiene solamente puntos regulares, entonces por el teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera $\mathbb{S}^2$ sabemos que $\omega_Z(p)$ es una órbita periódica luego de la aplicación 2' existe una singularidad en el interior de la órbita periódica lo cual es una contradicción. □

3.1.3. Aplicación 6

Dedicamos esta subsección a demostrar el teorema de Smale, el cual dice que el grupo de difeomorfismos del disco que fijan puntualmente el borde $\mathrm{Diff}_\partial(\mathbb{D}^2)$ es débilmente contráctil. Para una lectura más detallada se puede consultar [17].

Algunas propiedades de la topología débil son, por ejemplo, que dadas las variedades diferenciales M, N y P la aplicación inclusión $C^r(M,N) \hookrightarrow C^{r-1}(M,N)$ es continua, que la composición $C^r(M,N) \times C^r(N,P) \to C^r(M,P)$ es continua y que los subconjuntos de inmersiones y submersiones son abiertos en $C^r(M,N)$. Ahora enfoquemos nuestra atención en el subespacio de difeomorfismos de clase C^r de una variedad diferenciable M de clase C^r, que denotaremos por $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Teorema 3.7. El subespacio $\mathrm{Diff}^r(M)$ con la topología débil es un grupo topológico.

Una generalización útil es permitir variedades diferenciables con borde. Las definiciones vistas hasta este momento se pueden modificar para definir la topología débil en el espacio de aplicaciones $f : M \to N$ de clase C^r entre variedades con borde posiblemente no vacío. Haciendo estas modificaciones es posible probar que si M es una variedad con borde, el grupo $\mathrm{Diff}^r_\partial(M)$ de difeomorfismos de clase C^r que fijan puntualmente el borde (es decir, $f(z) = z$ para todo $z \in \partial M$) es un grupo topológico con la topología débil. Completemos esta idea:

Sea M una variedad compacta suave, es decir de clase C^∞, con borde ∂M. Entonces existen algunas variaciones de su grupo de difeomorfismos, que se pueden definir:

1. En primer lugar, tenemos una condición de diferenciabilidad, es decir para $1 \leq r \leq +\infty$ podemos hacer que $\mathrm{Diff}^r_\partial(M)$ denote el grupo de difeomorfismos de clase C^r que son la identidad en ∂M con la topología débil.

2. En segundo lugar, podemos cambiar las condiciones del borde:

   a) $\mathrm{Diff}^r_{\partial,D}(M)$ denota aquellos difeomorfismos que son la identidad puntual sobre ∂M y todas cuyas derivadas coinciden con las de la identidad sobre ∂M.

   b) $\mathrm{Diff}^r_{\partial,U}(M)$ denota aquellos difeomorfismos que son la identidad en una vecindad abierta de ∂M.

Si dotamos a estos subespacios de la topología débil, son todos grupos topológicos y obtenemos un diagrama conmutativo de inclusiones de grupos topológicos:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Diff}^1_{\partial,U}(M) & \hookrightarrow & \mathrm{Diff}^1_{\partial,D}(M) & \hookrightarrow & \mathrm{Diff}^1_{\partial}(M) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Diff}^2_{\partial,U}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^2_{\partial,D}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^2_{\partial}(M) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\cdots & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Diff}^\infty_{\partial,U}(M) & \hookrightarrow & \mathrm{Diff}^\infty_{\partial,D}(M) & \hookrightarrow & \mathrm{Diff}^\infty_{\partial}(M)
\end{array}$$

Teorema 3.8. Todas las inclusiones del diagrama anterior son topológicamente equivalentes, con la topología débil.

Demostración. Véase [17, p. 37]. □

Definición 3.11. El *disco $n-$dimensional* $\mathbb{D}^n$ es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por aquellos puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| \leq 1$. Además, $\mathbb{D}^n$ es una variedad de clase C^∞ con borde $\partial\mathbb{D}^n$ dado por $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Habiendo definido la topología débil en $\mathrm{Diff}^r_\partial(M)$, analicemos que ocurre cuando $M = \mathbb{D}^n$. Si $n = 0$, entonces $\mathbb{D}^0$ es un punto y todo difeomorfismo es la identidad. Por tanto $\mathrm{Diff}_\partial(\mathbb{D}^0) = \{id\}$. Veamos ahora que el primer grupo de difeomorfismo no trivial $\mathrm{Diff}^r_\partial(\mathbb{D}^1)$ es de hecho contráctil por un argumento de convexidad.

Teorema 3.9. $\mathrm{Diff}^r_\partial(\mathbb{D}^1)$ es contráctil.

Demostración. Sabemos que un difeomorfismo $\psi : M \to N$ de clase C^r induce un homeomorfismo $\mathrm{Diff}^r_\partial(M) \to \mathrm{Diff}^r_\partial(N)$ dado por $\varphi \mapsto \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ por lo que podemos reemplazar $\mathbb{D}^1$ por $[0,1]$ con el propósito de escribir fórmulas más fáciles. Para entender $\mathrm{Diff}^r_\partial([0,1])$ es útil recordar una consecuencia del teorema de la función inversa: Una aplicación de clase C^r entre variedades compactas de clase C^r es un difeomorfismo si, y solamente si, es inyectiva y sus derivadas parciales son inyectivas en cada punto. Así podemos identificar $\mathrm{Diff}^r_\partial([0,1])$ con el espacio de aplicaciones $f : [0,1] \to [0,1]$ de clase C^r que son la identidad cerca de 0 y 1, y tienen derivada positiva en todas partes.
Construimos una retracción de deformación sobre el subespacio $\{id\}$. Esto se hace por interpolación lineal, es decir afirmamos que

$$\begin{array}{rccc}
H: & \mathrm{Diff}^r_\partial([0,1]) \times [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^r_\partial([0,1]) \\
& (f,t) & \mapsto & H(f,t) := (1-t)\cdot f + t \cdot id
\end{array}$$

es continua y bien definida. En particular, afirmamos que $H(f,t) \in \mathrm{Diff}^r_\partial([0,1])$ para todo (f,t). La continuidad se sigue del hecho de que cuando la variedad es compacta y tiene una sola carta, la topología débil coincide con la topología de convergencia uniforme de la aplicación y sus r primeras derivadas parciales. Para mostrar que $f_t := (1-t)\cdot f + t \cdot id$ es un difeomorfismo, calculamos su derivada en $x_0 \in [0,1]$

$$\frac{df_t}{dx}(x_0) = (1-t)\frac{df}{dx}(x_0) + t.$$

Como f es un difeomorfismo, su derivada es siempre positiva lo cual implica que $\dfrac{df_t}{dx}(x)$ sea siempre distinto de cero, probando así que f_t es un difeomorfismo local gracias al teorema de la función inversa. Esto también implica que f_t es estrictamente creciente, y por tanto inyectiva. En consecuencia, es un difeomorfismo. □

Este argumento prueba que $\mathrm{Diff}^{r+1}_\partial(\mathbb{D}^1) = \mathrm{Diff}^r_\partial(\mathbb{D}^1)$, ya que ambos son contráctiles. Ahora probaremos que el grupo de difeomorfismos $\mathrm{Diff}_\partial(\mathbb{D}^2)$ es contráctil, siguiendo la demostración de Smale en [36]. Para esto tendremos que comparar los difeomorfismos del cuadrado $[0,1]^2$ con los difeomorfismos del disco $\mathbb{D}^2$. Este hecho usa la siguiente construcción: Si M y N son variedades compactas posiblemente con borde, y $i : M \to N$ es una inmersión homeomorfa, entonces induce una aplicación continua

$$\begin{array}{rccl} i_* : & \mathrm{Diff}_{\partial,U}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Diff}_{\partial,U}(N) \\ & f & \mapsto & i_*(f)(p) := \begin{cases} p & si \quad p \notin i(M) \\ i\big(f(i^{-1}(p))\big) & si \quad p \in i(M) \end{cases} \end{array}$$

Si i es isotópico a i', entonces i_* es homotópico a $(i')_*$; una isotopía i_t induce una homotopía $(i_t)_*$. Por lo tanto, si también tenemos una inmersión homeomorfa $j : N \hookrightarrow M$ de manera que i y j son mutuamente inversos hasta la isotopía. Aplicando esto a las inmersiones homeomorfas de la figura 3.2. Obteniendo así el siguiente resultado,

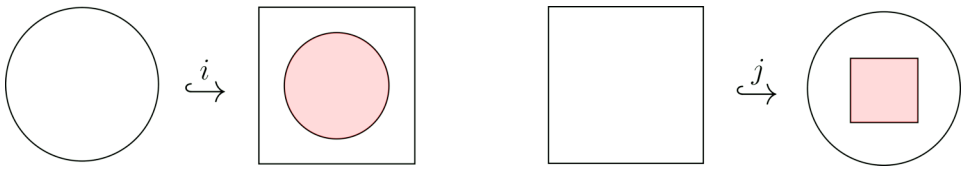


Figura 3.2: Inmersiones homeomorfas del disco en el cuadrado y viceversa, por traslación y escala. Tengamos en cuenta que $i \circ j$ y $j \circ i$ son isotópicos a la identidad por interpolación lineal.

Teorema 3.10. Los grupos topológicos $\mathrm{Diff}_{\partial,U}([0,1]^2)$ y $\mathrm{Diff}_{\partial,U}(\mathbb{D}^2)$ son homotópicamente equivalentes.

Para mostrar que $\mathrm{Diff}_\partial(\mathbb{D}^2)$ es débilmente contráctil, basta probar los enunciados análogos para los cuadrados. La idea es considerar, para un difeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}_{\partial,U}([0,1]^2)$, el campo vectorial $X(f)$ en $[0,1]^2$ obtenido por el push-forward de $\frac{\partial}{\partial x}$ a lo largo de f,

$$X(f)(x,y) := \left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)(x,y) = df_{f^{-1}(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Se puede reconstruir f a partir de $X(f)$ de la siguiente manera, para evitar problemas con el dominio de ciertas aplicaciones, primero observemos que podemos extender $X(f)$ por el campo vectorial constante $\frac{\partial}{\partial x}$ a un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, que también denotaremos como $X(f)$. Entonces su flujo $\Phi_{X(f)}$ es definido para todo $t \in \mathbb{R}$, véase la proposición 1.4.4 en [41, p. 28].

Tomemos ahora un punto $(0, y) \in \{0\} \times [0, 1]$ y recorramos el flujo durante un tiempo t. Como $X(f)$ se obtiene por el push-forward de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ a lo largo de un difeomorfismo, podemos calcular el flujo durante un tiempo t a lo largo de este campo vectorial y aplicando f. Para ver esto, tengamos en cuenta que la órbita γ de $\Phi_{X(f)}$ está determinada únicamente por las ecuaciones

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\big(\gamma(t)\big) & = & X(f)(\gamma(t)) = df_{f^{-1}(\gamma(t))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \gamma(0) & = & (0, y). \end{array} \right.$$

Pero $t \mapsto f(t, y)$ también satisface estas ecuaciones y $f(0, y) = (0, y)$ dado que f es la identidad cerca de $\partial[0, 1]^2$ y $\frac{d}{dt} f(t, y) = df_{(t,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = df_{f^{-1}(f(t,y))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Por lo tanto, a partir de la unicidad de soluciones de las EDO's, podemos concluir que $\Phi_{X(f)}\big(t, (0, y)\big) = f(t, y)$. Ahora que hemos mostrado como recuperar f a partir de $X(f)$, el plan es usar un argumento de convexidad en el campo vectorial $X(f)$. Observamos que $X(f)$ se encuentra en el espacio $\mathcal{S}$ de campos vectoriales que no se anulan en $[0, 1]^2$ y que son iguales a $\frac{\partial}{\partial x}$ en una vecindad abierta de $\partial[0, 1]^2$. Se topoliza como un subespacio de todas las aplicaciones suaves $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Recíprocamente, afirmamos que cualquier $Y \in \mathcal{S}$ da lugar a un difeomorfismo. La construcción de este difeomorfismo es bastante natural, pero hay algunos detalles que abordar. Sea $\Phi_Y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación obtenida por el flujo a lo largo del campo vectorial Y, donde nuevamente de manera implícita hemos extendido Y a $\mathbb{R}^2$ por el campo vectorial constante $\frac{\partial}{\partial x}$.

Lema 3.4. Sea $Y \in \mathcal{S}$, entonces para todo $(0, y) \in \{0\} \times [0, 1]$ existe $\tau(Y, y) \in]0, +\infty[$ tal que $\Phi_Y\big(\tau(Y, y), (0, y)\big) \in \{1\} \times [0, 1]$. Además $\tau(Y, y)$ es único asimismo depende continuamente de Y y suavemente de y.

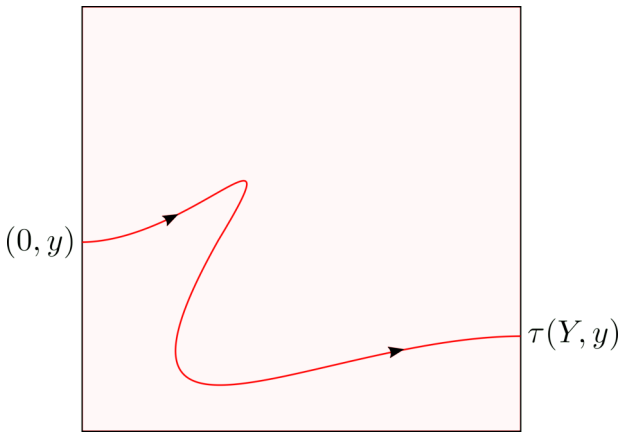


Figura 3.3: La línea roja es la órbita $t \mapsto \Phi_Y\big(t, (0, y)\big)$, y $\tau(Y, y)$ es la primera y única vez en que esta órbita toca al lado $\{1\} \times [0, 1]$ del cuadrado $[0, 1]^2$.

Demostración. La unicidad se sigue directamente al observar que la primera coordenada aumenta linealmente en t tan pronto como sale de $[0, 1]^2$. La existencia es menos

sencillo. Dado que Y es igual a $\frac{\partial}{\partial x}$ cerca de $\partial[0,1]^2$, si se sale una órbita, tiene que hacerlo a través de $\{1\}\times[0,1]$. Por lo tanto, vemos que la existencia de $\tau(Y,y)$ solo puede fallar si la órbita no alcanza a $\{1\}\times[0,1]$. Supongamos que $\gamma:[0,+\infty[\to[0,1]^2$ es una órbita que no llega a $\{1\}\times[0,1]$. Como Y es $\frac{\partial}{\partial x}$ cerca de $\partial[0,1]^2$, entonces $\gamma\big([0,+\infty[\big)$ está contenida en el interior de $[0,1]^2$. En consecuencia del teorema de Poincaré-Bendixson, debe existir una singularidad en el interior de $[0,1]^2$, lo cual es una contradicción y por tanto γ debe salir de $[0,1]^2$. Además $\tau(Y,y)$ depende suavemente de y por la dependencia de las soluciones en relación a las condiciones iniciales. Es tentador definir un difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Xi: & [0,1]^2 & \longrightarrow & [0,1]^2 \\ & (t,y) & \mapsto & \Xi(t,y):=\Phi_Y\big(t\cdot\tau(Y,y),(0,y)\big) \end{array} \tag{3.2}$$

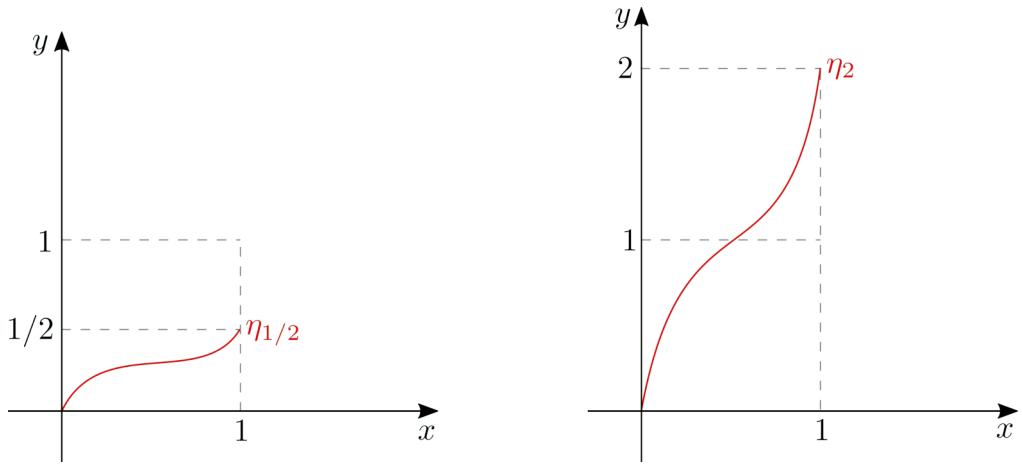
pero esta aplicación no es la identidad cerca de $\partial[0,1]^2$, tiene dos defectos:

1. podría hacer alguna escala en dirección del eje x cerca de $\{0,1\}\times[0,1]$,
2. una órbita podría terminar moviéndose verticalmente, por ejemplo en la figura 3.4 tenemos que la órbita entra en una coordenada y más alta que aquella en la que sale. Esto significa que la aplicación es un difeomorfismo no trivial $\phi(Y):[0,1]\to[0,1]$ cuando se restringe a $\{1\}\times[0,1]$.

Podemos deshacernos de estos problemas si somos más cuidadosos en (3.2). Para abordar el ítem 1, elegimos una familia suave de inmersiones homeoformas $\eta_\tau:[0,1]\to[0,+\infty[$ con las siguientes propiedades:

1. la imagen de η_τ es $[0,\tau]$,
2. η_τ tiene derivada 1 cerca de 0 y τ, y
3. $\eta_1=id$.

Usaremos esto para reparametrizar la coordenada temporal.



Para abordar el ítem 2, elegimos una función suave $\rho:[0,1]\to[0,1]$ que es 0 cerca de 0 y 1 cerca de 1. Dado un difeomorfismo $\phi:[0,1]\to[0,1]$ que es la identidad cerca de $\partial[0,1]$, definimos un difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \overline{\rho}_\phi: & [0,1]^2 & \longrightarrow & [0,1]^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \overline{\rho}_\phi(x,y):=\Big(x,\big(1-\rho(x)\big)y+\rho(x)\cdot\phi^{-1}(y)\Big) \end{array}$$

Usaremos esto para modificar el difeomorfismo cerca de $\{1\}\times[0,1]$. Entonces definimos

$$\begin{array}{rccl}\Psi_Y: & [0,1]^2 & \longrightarrow & [0,1]^2\\ & (x,y) & \mapsto & \Psi_Y(x,y):=\overline{\rho}_{\phi(Y)}\Big[\Phi_Y\big(\eta_{\tau(Y,y)},(0,y)\big)\Big].\end{array}$$

□

Lema 3.5. Para todo $Y\in\mathcal{S}$, la aplicación Ψ_Y es un difeomorfismo.

Demostración. Notemos que Ψ_Y es una composición de las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned}(x,y)&\mapsto\big(\eta_{\tau(Y,y)},(0,y)\big)\\(t,y)&\mapsto\Psi_Y\big(t,(0,y)\big)\\(x,y)&\mapsto\overline{\rho}_{\phi(Y)}(x,y)\end{aligned}$$

las cuales se pueden mostrar fácilmente que poseen diferencial biyectiva. Por tanto, como consecuencia del teorema de la función inversa, Ψ_Y es un difeomorfismo local. Por otro lado, Ψ_Y es sobreyectiva como consecuencia del teorema del punto fijo de Brouwer. De modo que basta mostrar que Ψ_Y es inyectiva, sino lo fuera entonces existirían $(x,y)\neq(\widetilde{x},\widetilde{y})$ tales que $\Psi_Y\big(x,(0,y)\big)=\Psi_Y\big(\widetilde{x},(0,\widetilde{y})\big)$. La unicidad de soluciones implica que $y=\widetilde{y}$ y como no hay órbitas periódicas debemos tener $x=\widetilde{x}$, lo que nos lleva a una contradicción. □

Por la suavidad de la familia η_τ, la aplicación $\Psi:\mathcal{S}\to\mathrm{Diff}_{\partial,U}([0,1]^2)$ definida por $\Psi(Y)=\Psi_Y$ es continua y por la propiedad 3 de la familia η_τ tenemos que $\Psi_{X(f)}=f$. Por tanto, basta con deformar el campo vectorial $X(f)$ a $X(id)=\frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathcal{S}$, continuamente en f.

Lema 3.6. La deformación del espacio $\mathcal{S}$ se retrae suavemente sobre el espacio vectorial constante $\frac{\partial}{\partial x}$.

Demostración. Identifiquemos al espacio $\mathcal{S}$ con el espacio de aplicaciones suaves $[0,1]^2\to\mathbb{R}^2-\{0\}$ que es igual a $\frac{\partial}{\partial x}$ cerca del borde. Los vectores no nulos pueden identificarse con $\mathbb{R}^2-\{0\}$, por tanto, elijamos un levantamiento $\vec{\epsilon}$ de $\frac{\partial}{\partial x}$ para el cubrimiento universal $p:\widetilde{\mathbb{R}^2-\{0\}}\to\mathbb{R}^2-\{0\}$. Todo campo vectorial en $\mathcal{S}$ se levanta únicamente a una función $\widetilde{X}(f):[0,1]^2\to\widetilde{\mathbb{R}^2-\{0\}}$ de clase C^∞ una vez que especificamos que en $[0,1]\times\{0\}$ debe tomar el valor de $\vec{\epsilon}$. Entonces automáticamente tiene valor $\vec{\epsilon}$ en $\partial[0,1]^2$ dado que $[0,1]^2$ es simplemente conexo. Así podemos identificar a $\mathcal{S}$ con un subespacio del espacio de aplicaciones suaves $[0,1]^2\to\widetilde{\mathbb{R}^2-\{0\}}$ que son iguales a $\vec{\epsilon}$ cerca de $\partial[0,1]^2$. Como $\mathbb{R}^2-\{0\}$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^1$, su cubrimiento universal es contráctil. Por lo tanto, existe una retracción de deformación h_s, con $s\in[0,1]$, sobre $\vec{\epsilon}$. Mediante las técnicas vistas anteriormente, dicha retracción de deformación puede suavizarse. Entonces la homotopía

$$\begin{array}{rccl}H: & \mathcal{S}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathcal{S}\\ & (Y,s) & \mapsto & H(Y,s):=p\circ h_s(\widetilde{Y})\end{array}$$

obtenida al aplicar $p\circ h_s$ a los valores de $\widetilde{Y}$, es una retracción de deformación de $\mathcal{S}$ sobre $\frac{\partial}{\partial x}$. □

Ahora ya contamos con las herramientas para la demostración del teorema de Smale,

Aplicación 6 (Teorema de Smale)**.** $\mathrm{Diff}_{\partial,U}(\mathbb{D}^2)$ es contráctil.

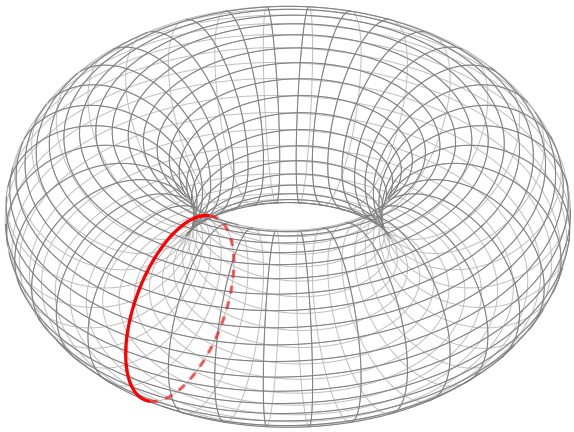
Demostración. Existe una retracción de deformación sobre la identidad dada por

$$\begin{array}{rccc} \xi: & \mathrm{Diff}_{\partial,U}(\mathbb{D}^2)\times[0,1] & \longrightarrow & \mathrm{Diff}_{\partial,U}(\mathbb{D}^2) \\ & (f,s) & \mapsto & \xi(f,s):=\Psi_{H_s}\big(X(f)\big) \end{array}$$

donde $H_s(Y):=H(Y,s)$ para todo $Y\in\mathcal{S}$. □

3.2. Flujo en el Toro

Consideremos en $\mathbb{R}^3$, la circunferencia $\mathscr{C}$ contenida en el plano xz de centro $(2,0,0)$ y radio 1. Sea $\mathbb{T}^2$ la superficie de revolución obtenida rotando $\mathscr{C}$ entorno al eje z.



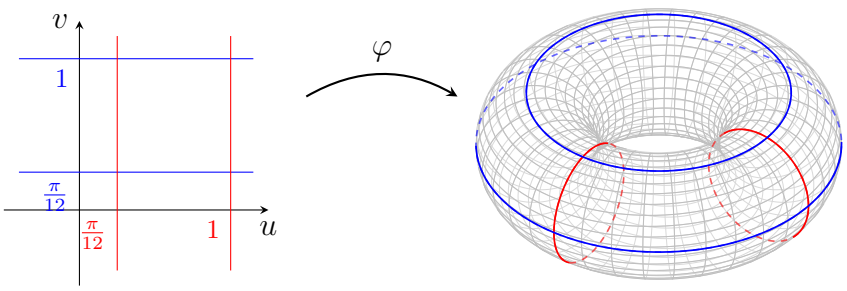
En coordenadas cartesianas tenemos

$$\mathbb{T}^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1\right\}.$$

Es claro que $\mathbb{T}^2$ es una variedad diferenciable bidimensional pues $\mathbb{T}^2=f^{-1}(1)$ donde $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ está definida por $f(x,y,z)=\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2$. Llamaremos *toro* a cualquier variedad difeomorfa a $\mathbb{T}^2$. Una parametrización del toro está dada por la aplicación $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{T}^2\subset\mathbb{R}^3$ de clase C^∞ definida por

$$\varphi(u,v)=\Big(\big(2+\cos(2\pi v)\big)\cos(2\pi u),\big(2+\cos(2\pi v)\big)\operatorname{sen}(2\pi u),\operatorname{sen}(2\pi v)\Big).$$

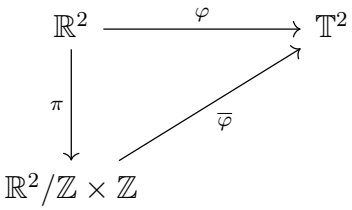
Tenemos que φ es un difeomorfismo local que lleva rectas horizontales de $\mathbb{R}^2$ en paralelos de $\mathbb{T}^2$, rectas verticales en meridianos y al cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ sobre $\mathbb{T}^2$.



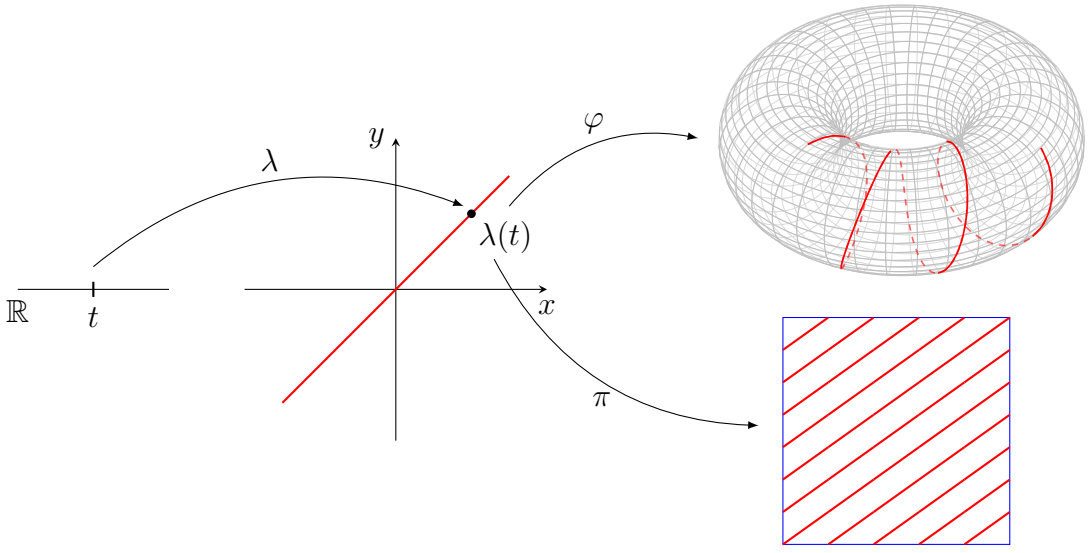
Sea $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ el subgrupo aditivo formado por los vectores de coordenadas enteras. Es sencillo notar que dados $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Leftrightarrow (u_1 - u_2, v_1 - v_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

es decir la relación de equivalencia definida por φ en $\mathbb{R}^2$ tiene por clases de equivalencia las clases laterales del subgrupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$. Representamos por $[u, v]$ la clase de equivalencia de cada para (u, v) bajo la relación antes mencionada. Consideramos la aplicación canónica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, tomando valores en el grupo cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, dotado de la topología cociente. Luego tenemos el diagrama conmmutativo



donde $\overline{\varphi}$ es la biyección continua inducida por φ. Notemos que el grupo cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es compacto pues la imagen del compacto $[0, 1]\times[0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ por la aplicación continua π. Como $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es Hausdorff y el dominio de $\overline{\varphi}$ es compacto, se sigue que $\overline{\varphi}$ es un homeomorfismo. A través del homeomorfismo $\overline{\varphi}$ se transporta para el grupo cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la estructura de variedad de clase C^∞ que posee $\mathbb{T}^2$, lo que hace a π una inmersión y a $\overline{\varphi}$ un difeomorfismo, ambas de clase C^∞. Consideremos los caminos en el toro del tipo $t \mapsto (\varphi \circ \lambda)(t)$ donde $\lambda(t) = (t, at)$ donde a es la pendiente de la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen de coordenadas.



Para cada $a \in \mathbb{R}$, consideremos en $\mathbb{R}^2$ el campo vectorial constante $X^a(u, v) = (1, a)$. Es sencillo ver que $Y^a = \varphi_* X^a$ (respectivamente $Z^a = \pi_* X^a$) está bien definido y es un campo de clase C^∞ en $\mathbb{T}^2$. Observemos además que Y^a (respectivamente Z^a) no tiene singularidades. Las órbitas de Y^a (respectivamente de Z^a) son imágenes por φ (respectivamente π) de las órbitas de X^a, siendo estas las rectas de pendiente a en $\mathbb{R}^2$. Recordemos un resultado sobre subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$ que será usado más adelante.

Lema 3.7. Los subgrupos aditivos propios no triviales de $\mathbb{R}$ o bien son densos en $\mathbb{R}$ o bien son de la forma $d\mathbb{Z}$ para algún d positivo.

Demostración. Sea H un subgrupo aditivo propio de $\mathbb{R}$, $H \neq \{0\}$ posee un elemento positivo. Sea $H^+ = \{h \in H : h > 0\}$ y $d = \text{ínf}\, H^+ \geq 0$. Si $d > 0$ vamos a mostrar que $d \in H$. Supongamos lo contrario. Como $2d$ no es la mayor cota inferior de H^+ entonces existe $h \in H^+$ tal que $d < h < 2d$. Como h tampoco es la mayor cota inferior de H^+, existe $g \in H^+$ tal que $d < g < h < 2d$, por tanto

$$0 < h - g < 2d - g < 2d - d = d \Rightarrow 0 < \underbrace{h - g}_{\in H^+} < d$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia $d \in H^+$, y de esta manera tenemos que $d\mathbb{Z} \subset H$. Supongamos que la inclusión anterior es estricta, es decir $d\mathbb{Z} \subsetneq H$. Entonces dado $x \in H - d\mathbb{Z}$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$nd < x < (n+1)d \Rightarrow 0 < x - nd < d$$

como $x \in H$ y $d \in H$, tenemos que $x - nd \in H$ lo cual es una contradice la minimalidad de d por tanto $H = d\mathbb{Z}$.

Supongamos ahora que $d = 0$. Dado un intervalo (a, b) con $b > a$, entonces existe $h \in H^+$ tal que $0 < h < b - a$. Así, tomamos $n = \text{mín}\{m \in \mathbb{Z} : a < mh\}$ tenemos que

$$a < nh = (n-1)h + h \leq a + h < a + (b - a) = b$$

luego $nh \in (a, b)$. Hemos probado que dado cualquier intervalo (a, b) no degenerado en $\mathbb{R}$, existen $h \in H$ y $n \in \mathbb{Z}$ tales que $nh \in (a, b)$. Como $mh \in H$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que H interseca a todo intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Por tanto H es denso en $\mathbb{R}$. □

Proposición 3.4. Bajo las condiciones anteriores, tenemos que:

1) a es racional si, y solamente si, toda órbita de Y^a es periódica.

2) Si a es irracional, entonces toda órbita de Y^a es densa en $\mathbb{T}^2$.

Demostración. Dado cualquier $c \in \mathbb{R}$, denotemos por Δ_c a la recta en el plano $\mathbb{R}^2$ que pasa por $(0, c)$ y tiene pendiente a, es decir $\Delta_c = \big\{(u, c + av) : v \in \mathbb{R}\big\}$. Como ya sabemos $\varphi(\Delta_c)$ es una órbita de Y^a.

1) Supongamos que $a \in \mathbb{Q}$, es decir existen $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$ tales que $a = m/n$. Entonces $\big(n, c + (m/n)n\big) = (n, c + m) \in \Delta_c$ y $\varphi(n, c + m) = \varphi(0, c)$. Recíprocamente supongamos que toda órbita de Y^a es periódica, de periodo $T > 0$, entonces

   $$\varphi(v, c+av) = \varphi\big(v+T, c+a(v+T)\big) = \varphi\big((v, c+av)+(T, aT)\big) \Leftrightarrow (T, aT) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

   luego existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $(T, aT) = (n, m)$, es decir $a = m/n \in \mathbb{Q}$.

2) Supongamos que $a \notin \mathbb{Q}$. Fijemos un número $\overline{c} \in \mathbb{R}$. Afirmamos que el conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R} : \varphi(\Delta_c) = \varphi(\Delta_{\overline{c}})\}$$

es denso en $\mathbb{R}$. Supongamos, por un momento, que esta afirmación es válida entonces $\bigcup_{c\in C} \Delta_c$ es denso en $\mathbb{R}^2$ y por tanto $\varphi(\Delta_{\overline{c}}) = \varphi\Big(\bigcup_{c\in C} \Delta_c\Big)$ es denso en $\mathbb{T}^2$.
Para mostrar que C es denso en $\mathbb{R}$ basta probar que $G = \{m + an : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ pues $c \in C$ si, y solamente si, $c - \overline{c} \in G$. En efecto, supongamos que $c \in C$, entonces $\varphi(\Delta_c) = \varphi(\Delta_{\overline{c}})$. Sea $x \in \varphi(\Delta_c) = \varphi(\Delta_{\overline{c}})$ luego existen $u, v \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(u, c + au) = \varphi(v, \overline{c} + av)$. En consecuencia $c - \overline{c} \in G$. Recíprocamente supongamos que $c - \overline{c} \in G$, entonces $c - \overline{c} = m + an$ para algunos $mn, \in \mathbb{Z}$.
Sea $x \in \varphi(\Delta_c)$, luego existe $v \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \varphi(v, c + av) = \varphi(v, \overline{c} + m + an + av) = \varphi\big(n + v, \overline{c} + a(n + v)\big) \in \varphi(\Delta_{\overline{c}})$$

es decir tenemos $\varphi(\Delta_c) \subset \varphi(\Delta_{\overline{c}})$. De manera análoga $\varphi(\Delta_{\overline{c}}) \subset \varphi(\Delta_c)$ y en consecuencia $c \in C$. Ahora solo resta probar que G es denso en $\mathbb{R}$. Como $G = \{m + an : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, en virtud del lema 3.7, sabemos que G es o bien denso o bien discreto. Así que solamente nos resta mostrar que G no es discreto. Sea $d = \inf G^+ \geq 0$. Supongamos que $d > 0$, entonces $G = d\mathbb{Z}$. Luego $a = dk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y $d \notin \mathbb{Q}$, dado que $a \notin \mathbb{Q}$. Por otro lado $1 = 1 + a \cdot 0 \in G$ en consecuencia $1 = hd$ para algún $h \in \mathbb{Z}$ y luego tenemos que d es un número racional lo cual es una contradicción. Por tanto G es denso en $\mathbb{R}$.

□

El campo Y^a definido como $Y^a = \varphi_* X^a$ donde $X^a(u, v) = (1, a)$ es llamado el *campo racional* (respectivamente *irracional*) en $\mathbb{T}^2$ conforme a sea racional (respectivamente irracional). Si a fuese racional, entonces el conjunto $\omega-$límite de cualquier órbita es ella misma. Si a fuese irracional, el conjunto $\omega-$límite de cualquier órbita es todo el toro $\mathbb{T}^2$.

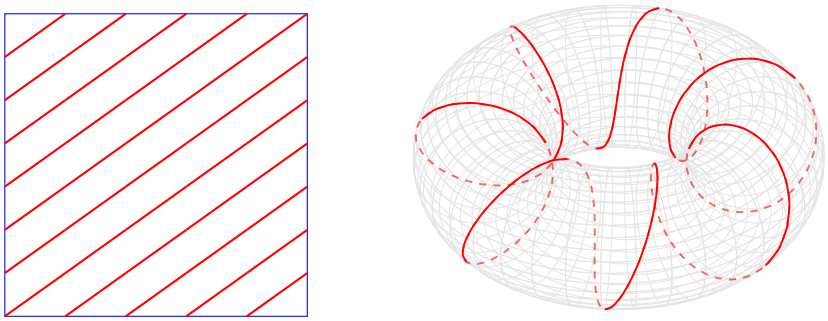


Figura 3.4: Flujo racional en el toro $\mathbb{T}^2$.

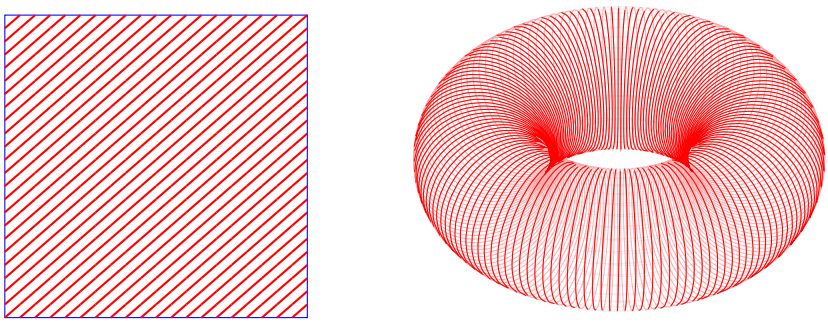


Figura 3.5: Flujo irracional en el toro $\mathbb{T}^2$.

3.3. Índice de un campo vectorial en un punto

Para el lector que desea profundizar en esta sección, véase [10] o [40]. Por definición el *número de vueltas entorno al origen*, en sentido antihorario, de una curva cerrada $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ es el número entero

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 d\theta_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)dt$$

donde $d\theta$ es la $1-$forma diferenciable definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por

$$d\theta_{(x,y)} = \frac{1}{x^2+y^2}(xdy - ydx). \tag{3.3}$$

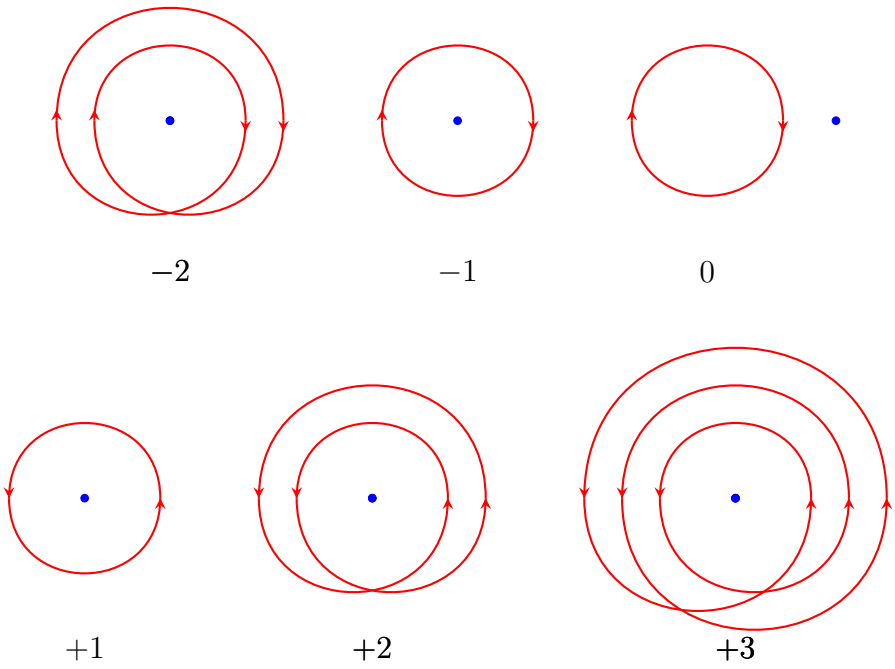


Figura 3.6: Número de vueltas entorno al origen

Podemos interpretar la integral $\int_\gamma d\theta$ como la variación total del argumento de la velocidad de la curva cerrada γ. Sea $X : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que p sea una singularidad aislada de X, es decir existe un entorno V_p de p tal que $X(p) = 0$ y $X(q) \neq 0$ para todo q en $V_p \setminus \{p\}$. Sea $\gamma : [0,1] \to V_p$ una curva cerrada simple alrededor de p, lo cual significa que p se encuentra en el interior de la región acotada por la curva de Jordan γ. Supongamos que γ está positivamente orientada. El *índice del campo vectorial* X en el punto p, el cual será denotado por $\mathrm{Ind}(X,p)$, es el número de vueltas de la curva $X \circ \gamma$ entorno al origen, es decir

$$\mathrm{Ind}(X,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{X\circ\gamma} d\theta$$

donde $d\theta$ es la $1-$forma diferenciable definida en (3.3).

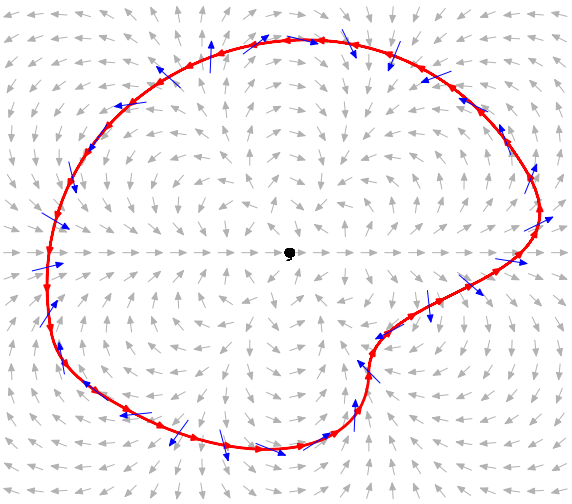
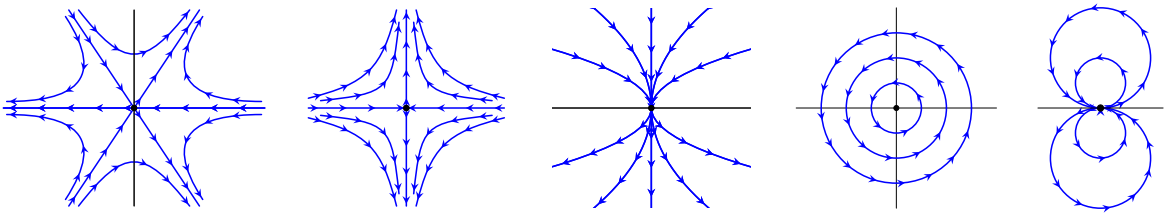


Figura 3.7: Índice en un punto singular aislado de un campo vectorial en el plano

Veamos algunos ejemplos de índices de campos vectoriales en el plano,

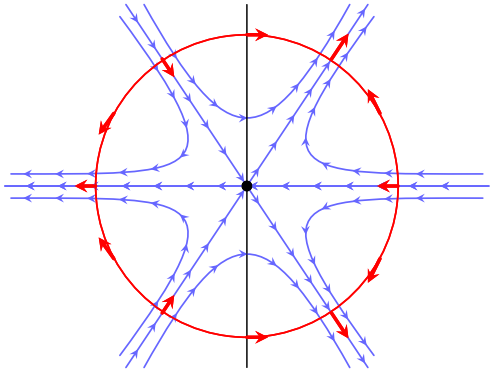


Índice -2 Índice -1 Índice 0 Índice $+1$ Índice $+2$

para el último caso tenemos el siguiente campo $X(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ mostremos que su índice es efectivamente 2. Para esto tomemos la curva cerrada $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} - \{0\}$ como la circunferencia centrada en el origen y de radio 1, es decir $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Luego $X(\gamma(t)) = (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, 2\operatorname{sen} t \cos t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ en consecuencia

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}(2\cos 2t \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} 2t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2dt = 2.$$

Ahora con el primer caso exploremos la intuición que comentamos en la definición de índice,



Consideremos la circunferencia unitaria. Describamos los puntos en la circunferencia con el ángulo θ de coordenadas polares y denotemos por $\angle v_\theta$ el ángulo de nuestro pequeño vector rojo con respecto al eje positivo de x para ese ángulo θ. Notaremos que los ángulos específicos y la notación no son esenciales, sólo nos ayudarán a describir lo que estamos midiendo, de una manera más sencilla. De este modo tenemos

$\angle v_0 = \pi$

$\angle v_{\pi/3} = \pi/3$ tras rotar en sentido antihorario $2\pi/3$ con respecto a v_0

$\angle v_{\pi/2} = 0$ tras rotar en sentido horario $\pi/3$ con respecto a $v_{\pi/3}$

$\angle v_{2\pi/3} = -\pi/3$ tras rotar en sentido horario $\pi/3$ con respecto a $v_{\pi/2}$

$\angle v_{\pi} = -\pi$ tras rotar en sentido horario $2\pi/3$ con respecto a $v_{2\pi/3}$

$\angle v_{4\pi/3} = -5\pi/3$ tras rotar en sentido horario $2\pi/3$ con respecto a v_{π}

$\angle v_{3\pi/2} = -2\pi$ tras rotar en sentido horario $\pi/3$ con respecto a $v_{4\pi/3}$

$\angle v_{5\pi/3} = -7\pi/3$ tras rotar en sentido horario $\pi/3$ con respecto a $v_{3\pi/2}$

$\angle v_{2\pi} = -3\pi$ tras rotar en sentido horario $2\pi/3$ con respecto a $v_{5\pi/3}$

Hasta el momento nuestro vector ha dado dos vuelta en sentido horario con respecto a v_0, es decir el índice es -2. Lo que es equivalente a

$$\mathrm{Ind}(X,p) = \frac{1}{2\pi}(\angle v_{2\pi} - \angle v_0) = \frac{-3\pi - \pi}{2\pi} = -2.$$

Observación 3.1. La definición del índice $\mathrm{Ind}(X,p)$ no depende de la curva cerrada simple γ alrededor de p.

Ahora sea X un campo vectorial de clase C^1 en una variedad diferenciable bidimensional compacta sin borde M y sea p una singularidad aislada de X. Inicialmente

supongamos que M está orientada y dotada con una métrica riemanniana[1]. Luego veremos que estas suposiciones no son realmente necesarias. Consideremos cualquier carta local $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^2$ compatible con la orientación de M y tal que p es la única singularidad del campo X en U. Sea $\gamma : [0,1] \to U$ una curva cerrada simple que contiene a p en su región interior y está positivamente orientada, esto significa que la curva cerrada simple $\mathbf{x} \circ \gamma$ en $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^2$ contiene a $\mathbf{x}(p)$ en el interior de la región acotada por la curva de Jordan $\mathbf{x} \circ \gamma$ y que $\mathbf{x} \circ \gamma$ está positivamente orientada. Notemos que esta condición no depende de la elección de la carta local, solamente de la orientación elegida en M. Tomemos ahora un campo vectorial unitario u_1 en U y sea u_2 el campo vectorial unitario ortogonal a u_1 y tal que la base $\{u_1, u_2\}$ tenga orientación positiva en todo punto de U. Asociamos al campo vectorial X la siguiente aplicación $F = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ definida por $X(q) = f_1(q)u_1(q) + f_2(q)u_2(q)$ para todo q en U. Observamos que $F(p) = 0$. *El índice del campo vectorial X en el punto p*, el cual será denotado por $\mathrm{Ind}(X, p)$, es el número de vueltas de la curva $F \circ \gamma$ entorno al origen

$$\mathrm{Ind}(X, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{F \circ \gamma} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} F^* d\theta$$

donde $F^*d\theta$ es la $1-$forma diferenciable definida por $(F^*d\theta)_x = d\theta_{F(x)} \circ dF(x)$.

Observación 3.2.

a) La definición de $\mathrm{Ind}(X, p)$ no depende de la elección de la curva cerrada simple γ ni tampoco de la métrica riemanniana en M.

b) Si invirtiéramos la orientación de M entonces necesitamos invertir la orientación de la curva γ, para que ella siga estando positivamente orientada. Además de eso, necesitamos cambiar el campo de vectores u_2 por $-u_2$, para que la base $\{u_1, u_2\}$ permanezca orientada positivamente. Entonces $F = (f_1, f_2)$ es cambiado por $(f_1, -f_2)$. La consecuencia de todas estas modificaciones es que el número de vueltas de $F \circ \gamma$ entorno al origen permanece invariante. Por tanto, la definición del índice no depende de la orientación tomada en M.

c) Este comentario tiene que ver con la métrica riemanniana, sabemos del teorema de Whitney 3.1 que para toda variedad diferenciable M de clase C^k existe una inmersión homeomorfa $f : M \to \mathbb{R}^N$ de clase C^∞ para algún N. Entonces inducimos una métrica riemanniana en M,

$$\langle u, v \rangle := \langle df(p) \cdot u, df(p) \cdot v \rangle$$

para todo $p \in M$ y $u, v \in T_pM$. Por tanto siempre podemos usar alguna métrica riemanniana en M para definir el índice, y además sabemos del ítem a) que la definición de índice no depende de esta elección.

3.4. Característica de Euler-Poincaré

Para el lector que desea leer más al respecto sobre esta sección, ver [40], [20] o [25]. Dada una variedad compacta bidimensional M. Una *triangulación* de M es una familia

[1]Una métrica riemanniana es la generalización natural de la primera forma fundamental de las superficies en geometría diferencial clásica. Véase por ejemplo [8].

finita de triángulos curvilíneos (i.e. imágenes difeomorfas de triángulos del plano) que cubren a M, de tal modo que dados dos cualesquiera de ellos si no son disjuntos entonces la intersección es o bien un lado o bien un vértice. Dada una triangulación de una variedad diferenciable didimensional compacta M, sean V el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras de esta triangulación. La *característica de Euler-Poincaré* de M es definido por

$$\chi(M) = V - A + C.$$

El siguiente teorema muestra la existencia y buena definición de la característica de Euler-Poincaré en una variedad diferenciable compacta

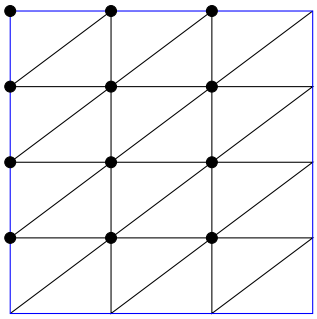
Teorema 3.11 (Teorema de Cairns-Whitehead)**.** Dada una variedad diferenciable bidimensional M compacta, siempre existe una triangulación T sobre M. Además, si tenemos otra triangulación S de M, entonces $\chi(T) = \chi(S)$.

Demostración. Véase [5] y [42]. También se puede encontrar una demostración en II.7 a II.10 de [20]. □

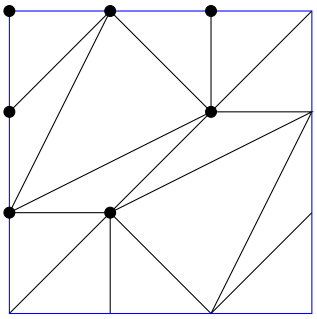
Observación 3.3. La característica de Euler-Poincaré es un invariante topólogico, es decir es preservada bajo homeomorfismos. Además sabemos que dos superficies compactas orientables (o no orientables) son homeomorfas si, y solamente si, ellas tienen la misma característica de Euler-Poincaré, esto gracias al teorema de clasificación de superficies compactas.

Veamos ahora algunos ejemplos, en los cuales daremos dos parametrizaciones para evidenciar buena definición la característica de Euler-Poincaré.

Ejemplo 3.5. Tomemos dos triangulaciones del toro $\mathbb{T}^2$

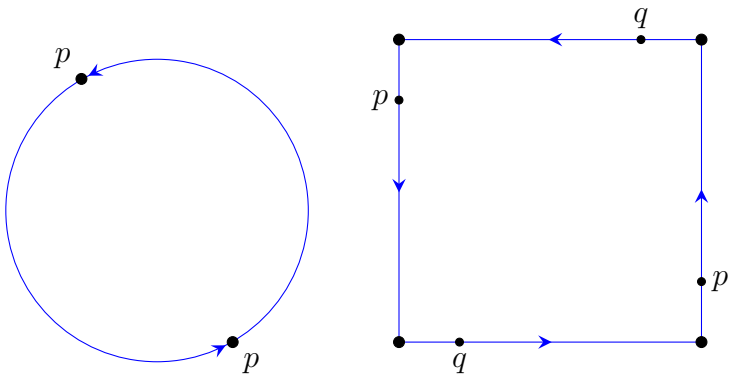


$V = 12$
$A = 36$
$C = 24$
$\chi(\mathbb{T}^2) = 12 - 36 + 24 = 0$

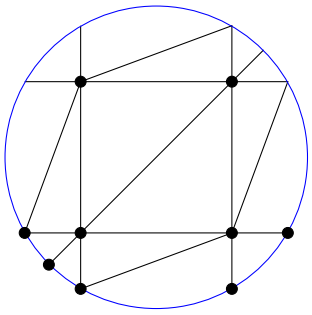


$V = 7$
$A = 21$
$C = 14$
$\chi(\mathbb{T}^2) = 7 - 21 + 14 = 0$

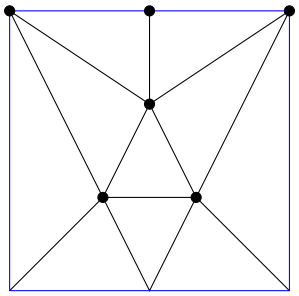
Ejemplo 3.6. El *plano proyectivo* $\mathbb{P}^2$ es definido como el espacio cociente de la esfera unitaria $\mathbb{S}^1$ por la relación de equivalencia $p \sim q$ si, y solamente si, $p = \pm q$ para todo $p, q \in \mathbb{S}^2$. El plano proyectivo es una variedad diferenciable bidimensional compacta de clase C^∞ conexa y no orientable.



Tomemos un par de triangulaciones del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$

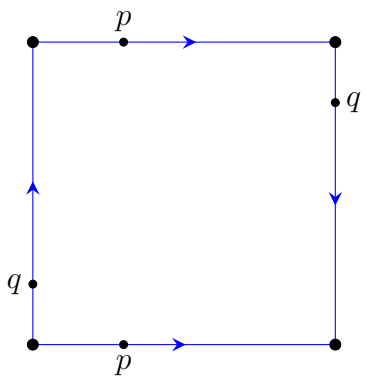


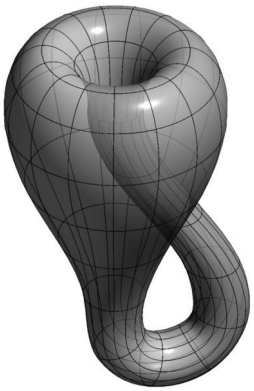
$V = 7$
$A = 21$
$C = 14$
$\chi(\mathbb{P}^2) = 9 - 24 + 16 = 1$



$V = 7$
$A = 21$
$C = 14$
$\chi(\mathbb{P}^2) = 7 - 21 + 14 = 0$

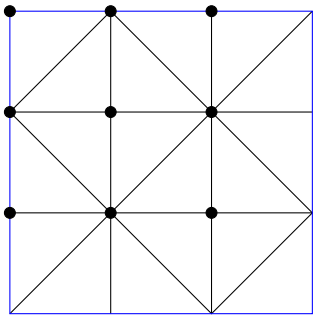
Ejemplo 3.7. La *botella de Klein* $\mathbb{K}^2$ es definido como el espacio cociente del rectángulo $[0, 1] \times [-1, 1]$ identificando los puntos $(x, 1) \sim (x, -1)$ y $(0, y) \sim (1, -y)$.



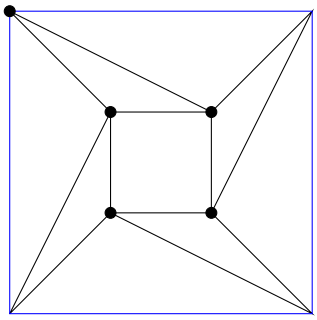


La botella de Klein es una variedad diferenciable bidimensional compacta de clase C^∞ conexa y no orientable. Sabemos que $\mathbb{K}^2$ a pesar de ser una variedad bidimensional no

posee una representación en $\mathbb{R}^3$ sin auto-intersecciones. Tomemos un par de triangulaciones de $\mathbb{K}^2$



$V = 9$
$A = 27$
$C = 18$
$\chi(\mathbb{K}^2) = 9 - 27 + 18 = 0$



$V = 5$
$A = 14$
$C = 9$
$\chi(\mathbb{K}^2) = 5 - 14 + 9 = 0$

El teorema de Poincaré-Hopf relaciona la topología de la variedad M, por medio de su característica de Euler-Poincaré, con el comportamiento de los campos vectoriales tangentes a M en vecindades de una singularidad aislada.

Teorema 3.12 (Teorema de Poincaré-Hopf)**.** Sea M una variedad compacta sin borde y $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ con un número finito de singularidades aisladas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entonces

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}(X, p_j)$$

Demostración. Véase [10, p. 108]. □

Hemos visto que tanto el toro $\mathbb{T}^2$ como la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ son variedades compactas que tienen característica de Euler-Poincaré cero. En virtud del teorema de Poincaré-Hopf tanto el toro $\mathbb{T}^2$ como la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ admiten campos vectoriales tangentes a ellos sin singularidades. Además, si vamos un poco más lejos, el toro $\mathbb{T}^2$ y la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ son las únicas variedades bidimensionales compactas que admiten campos vectoriales sin singularidades (salvo homeomofismos), este hecho es consecuencia directa del teorema de clasificación de superficies, ver la observación 3.3.

3.5. Recubrimiento doble orientable

En esta sección presentaremos la definición de un recubrimiento doble orientable, así como la del levantamiento de un campo vectorial por un recubrimiento doble orientable. Veremos además, que de conocer el conjunto $\omega-$límite de una órbita del campo levantado también conoceremos el conjunto $\omega-$límite de la órbita proyectada. Para más detalle respecto a los resultados dados en esta sección ver [18], [12] y [22].

Definición 3.12. Un *recubrimiento doble orientable* es una aplicación $\phi : \widetilde{M} \to M$ de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ con las siguientes propiedades:

1. M es una variedad conexa, $\widetilde{M}$ es una variedad orientada y ϕ es un difeomorfismo local.

2. Para cada punto $p \in M$, la imagen inversa $\phi^{-1}(p)$ contiene exactamente dos puntos.

3. Si $\phi(\widetilde{p}_1) = \phi(\widetilde{p}_2)$ con $\widetilde{p}_1 \neq \widetilde{p}_2$ entonces el isomorfismo lineal

$$d\phi_{\widetilde{p}_2}^{-1} \circ d\phi_{\widetilde{p}_1} : T_{\widetilde{p}_1}\widetilde{M} \to T_{\widetilde{p}_2}\widetilde{M}$$

invierte la orientación.

Algunas veces se dice, por abuso de lenguaje, que $\widetilde{M}$ es un recubrimiento doble orientable.

Teorema 3.13. Toda variedad conexa M de clase C^k donde $1 \leq k \leq +\infty$ posee un recubrimiento doble orientable.

Demostración. Véase [18, p. 163]. □

Definición 3.13. Sea $\phi : \widetilde{M} \to M$ un recubrimiento doble orientable de clase C^2. Dado un campo vectorial X en M, definimos el campo vectorial $\phi^*(M)$ en $\widetilde{M}$, denominado *levantamiento de* X, por

$$\phi^*(X)(\widetilde{p}\,) = d\phi_{\widetilde{p}}^{-1} \cdot X(\phi(\widetilde{p})), \quad \widetilde{p} \in \widetilde{M}.$$

Proposición 3.5. Sea $\phi : \widetilde{M} \to M$ en recubrimiento doble orientable. Si $U \subset M$ es un abierto, entonces $\phi^{-1}(U) = \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2$ es unión disjunta de dos abiertos donde cada uno de los cuales se aplica por ϕ difeomorficamente sobre U.

Demostración. Véase [18, p. 161]. □

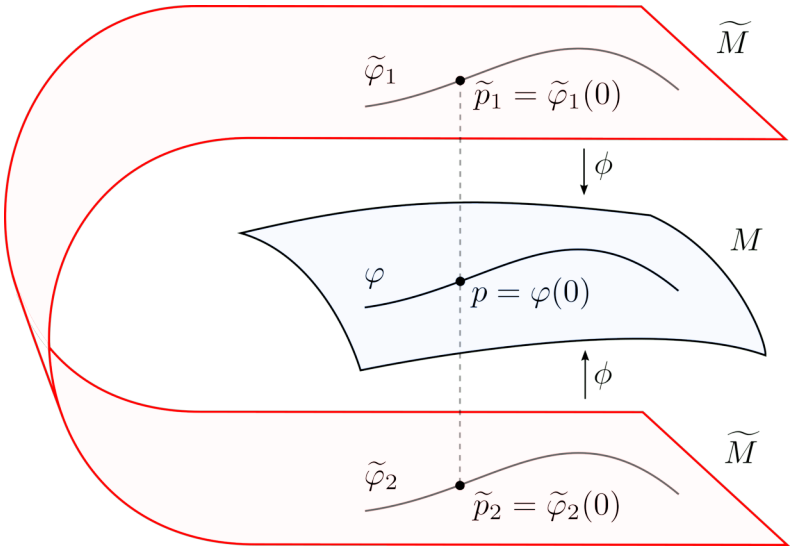
Sea M una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $1 \leq k \leq +\infty$. Fijemos $p \in M$ y consideremos $\phi^{-1}(p) = \{\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\}$. Sean $\varphi : \mathbb{R} \to M$ una curva integral de X que pasa por p y $\widetilde{\varphi}_1 : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ la curva integral de $\phi^*(X)$ tal que $\widetilde{\varphi}_1(0) = \widetilde{p}_1$, es decir

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_1(t) = \phi^*(X)\big(\widetilde{\varphi}_1(t)\big) = d\phi_{\widetilde{\varphi}_1(t)}^{-1} \cdot X\big(\phi(\widetilde{\varphi}_1(t))\big).$$

Luego tenemos $(\phi \circ \widetilde{\varphi}_1)(0) = \phi\big(\widetilde{\varphi}_1(0)\big) = \phi(\widetilde{p}_1) = p$ y

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\phi \circ \widetilde{\varphi}_1)(t) &= d\phi_{\widetilde{\varphi}_1(t)}\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_1(t) \\
&= d\phi_{\widetilde{\varphi}_1(t)}\Big(d\phi_{\widetilde{\varphi}_1(t)}^{-1} \cdot X\big((\phi \circ \widetilde{\varphi}_1(t))\big)\Big) \\
&= X\big((\phi \circ \widetilde{\varphi}_1(t))\big).
\end{aligned}$$

Entonces por el teorema 3.2 de existencia y unicidad, $\phi \circ \widetilde{\varphi}_1 = \varphi$. De manera análoga, si $\widetilde{\varphi}_2 : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ es la curva integral de $\phi^*(X)$ tal que $\widetilde{\varphi}_2(0) = \widetilde{p}_2$, entonces $\phi \circ \widetilde{\varphi}_2 = \varphi$.



Por tanto, podemos deducir que o bien $\phi^{-1}(\varphi)$ es la unión de dos órbitas disjuntas de $\phi^*(X)$, por ejemplo $\widetilde{\varphi}_1$ y $\widetilde{\varphi}_2$, o bien $\phi^{-1}(\varphi)$ es igual a una sola órbita, por ejemplo $\widetilde{\varphi}_1$ y en este caso $\widetilde{\varphi}_2$ es una reparametrización de $\widetilde{\varphi}_1$. De este modo la proyección $\phi \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$ de una órbita $\widetilde{\varphi}$ de $\phi^*(X)$ es una órbita de X. De manera recíproca toda órbita de X es la proyección de a lo más dos trayectorias de $\phi^*(X)$.

Proposición 3.6. Sean M una variedad compacta, $\phi : \widetilde{M} \to M$ un recubrimiento doble orientable y $\phi^*(X) \in \mathfrak{X}^k(\widetilde{M})$ el levantamiento de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, donde $1 \leq k \leq +\infty$. Sean $\widetilde{\varphi}$ una órbita de $\phi^*(M)$ y $\varphi = \phi \circ \widetilde{\varphi}$ la órbita correspondiente de X. Entonces se cumple que

1. φ es un punto singular si, y solamente si, $\widetilde{\varphi}$ es un punto singular.
2. φ es difeomorfa a un intervalo si, y solamente si, $\widetilde{\varphi}$ es difeomorfa a un intervalo.
3. φ es una órbita periódica si, y solamente si, $\widetilde{\varphi}$ es una órbita periódica.
4. $\phi\left(\omega_{\phi^*(X)}(\widetilde{\varphi})\right) = \omega_X(\varphi)$.

Demostración. Es sencillo demostrar los tres primeros ítems. Veamos la demostración por doble inclusión del cuarto ítem.

($\subset$) Sea $\widetilde{p} \in \omega_{\phi^*(X)}(\widetilde{\varphi})$, entonces existe una sucesión $(t_n)_n \in [0, +\infty[$ con $t_n \to +\infty$ y $\widetilde{\varphi}(t_n) \to \widetilde{p}$ cuando $n \to +\infty$. Dado que ϕ es una aplicación continua,

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi\big(\widetilde{\varphi}(t_n)\big) = \phi\left(\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\varphi}(t_n)\right) = \phi(\widetilde{p}).$$

Entonces $\phi(\widetilde{p}) \in \omega_X(\varphi)$ y en consecuencia $\phi\left(\omega_{\phi^*(X)}(\widetilde{\varphi})\right) \subset \omega_X(\varphi)$.

($\supset$) Sea $p \in \omega_X(\varphi)$, entonces existe una sucesión $(t_n)_n \subset [0, +\infty[$ con $t_n \to +\infty$ y $\varphi(t_n) \to p$ cuando $n \to +\infty$. Consideremos $U \subset M$ un entorno abierto de p. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varphi(t_n) \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De la proposición 3.5 sabemos que $\phi^{-1}(U) = \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2$, donde $\widetilde{U}_1$ y $\widetilde{U}_2$ son abiertos disjuntos de $\widetilde{M}$ y $\phi|_{\widetilde{U}_j} : \widetilde{U}_j \to U$ es un difeomorfismo para $j = 1, 2$. Entonces

$$\widetilde{\varphi}(t_n) = (\phi^{-1} \circ \varphi)(t_n) = \phi^{-1}\big(\varphi(t_n)\big) \in \phi^{-1}(U) = \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2$$

luego existe una subsucesión $(t_{n_k})_k \subset (t_n)_n$ tal que $\left(\widetilde{\varphi}(t_{n_k})\right)_k \subset \widetilde{U}_1$. Como $\left(\phi|_{\widetilde{U}_1}\right)^{-1} : U \to \widetilde{U}_1$ es continua y

$$p = \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} \phi\big(\widetilde{\varphi}(t_{n_k})\big) = \phi\left(\lim_{k\to+\infty} \widetilde{\varphi}(t_{n_k})\right)$$

tenemos $\lim_{k\to+\infty} \widetilde{\varphi}(t_{n_k}) = \left(\phi|_{\widetilde{U}_1}\right)^{-1}(p)$. En consecuencia, $\phi^{-1}(p) \cap \widetilde{U}_1 \in \omega_{\phi^*(X)}(\widetilde{\varphi})$ luego tenemos que $p \in \phi\left(\omega_{\phi^*(X)}(\widetilde{\varphi})\right)$. Por tanto $\omega_X(\varphi) \subset \phi\left(\omega_{\phi^*(X)}(\widetilde{\varphi})\right)$. Lo cual concluye con la demostración.

□

4

Teorema de Poncaré-Bendixson en variedades bidimensionales

Es importante señalar en este momento que una fuente importante usada para este trabajo específicamente para este capítulo ha sido [6]. Una versión convenientemente reformulada de la conclusión del teorema de Poincaré-Bendixson 2.1 es válida para flujos en cualquier variedad diferenciable compacta bidimensional, con la única excepción de los flujos irracionales en el toro vistos en la sección 3.2. Para esto demostraremos primero el teorema de Denjoy-Schwartz el cual clasifica los conjuntos minimales de flujos en variedades compactas bidimensionales.

Definición 4.1. Sea M una variedad bidimensional y $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo y pongamos $\varphi_t(\cdot) := \varphi(t, \cdot)$. Diremos que un conjunto $\mu \subset M$ es *minimal* para el flujo φ si μ es compacto, no vacío, invariante por φ (es decir, $\varphi_t(\mu) \subset \mu$ para todo $t \in \mathbb{R}$) y no existe un subconjunto propio de μ con estas propiedades.

Dado que la intersección de conjuntos invariantes es un conjunto invariante, el siguiente lema es una consecuencia inmediata del lema de Zorn.

Lema 4.1. Sea M una variedad bidimensional y $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo en M de clase C^0. Sea F un subconjunto no vacío, compacto e invariante. Entonces F contiene al menos un conjunto minimal no vacío μ.

Demostración. Véase [27, p. 138]. □

Proposición 4.1. Sea M una variedad diferenciable compacta. Un conjunto compacto invariante $\mu \subset M$ es minimal si, y solamente si, $\alpha(p) = \mu = \omega(p)$ para todo $p \in \mu$.

Demostración. De la proposición 3.4 sabemos que el conjunto $\omega(p)$ es invariante por φ, compacto y no vacío, entonces $\mu \subset \omega(p)$, para todo $p \in \mu$. Por otro lado, como $p \in \mu$ y μ es minimal por hipótesis tenemos

$$\mathcal{O}^+(p) \subset \mu \Rightarrow \omega(p) = \overline{\mathcal{O}^+(p)} \subset \mu$$

en consecuencia $\omega(p) = \mu$, para todo $p \in \mu$. Recíprocamente, supongamos que existe $Z \subset \mu$ compacto, invariante por φ y no vacío entonces dado $z \in Z$ tenemos

$$\mathcal{O}^+(z) \subset Z \Rightarrow \omega(z) = \overline{\mathcal{O}^+(z)} \subset Z.$$

Como Z es no vacío, debemos mostrar ahora que $Z = \mu$. Por hipótesis sabemos que $\omega(z) = \mu$ para todo $z \in \mu$. Entonces $\mu = \omega(z) \subset Z$, $\forall\, z \in Z$. Por lo tanto $Z = \mu$. □

Observemos entonces que los puntos singulares y las órbitas periódicas de φ son conjuntos minimales, para φ. Por otro lado, si a es un número irracional vimos que el toro $\mathbb{T}^2$ es un conjunto minimal del flujo asociado al campo constante $X(u, v) = (1, a)$. En consecuencia el teorema de Poincaré-Bendixson, en términos de conjuntos minimales, establece que para flujos en el plano y en la esfera con un número finito de singularidades solo existen dos tipos de conjuntos minimales: puntos singulares y órbitas periódicas. Es esta afirmación es la que se logra generalizar en el teorema de Schwartz, como veremos más adelante. De hecho, Hellmuth Kneser obtuvo un resultado importante del tipo Poincaré-Bendixson antes de que se introdujeran formalmente los sistemas dinámicos abstractos. En 1924, demostró un teorema en [16] que ahora se puede formular de la siguiente manera:

Teorema 4.1 (Teorema de Kneser)**.** Todo campo vectorial sin singularidades tangente a la botella de Klein admite alguna trayectoria periódica.

Demostración. Véase [16] o [14] o [24]. □

A finales del siglo XX Poincaré [31] conjeturó que existe un flujo analítico en el toro con un conjunto minimal nunca denso. Arnaud Denjoy [7] en 1932 descubrió la falta de solidez de la conjetura de Poincaré no solo para flujos analíticos sino también para flujos de clase C^2. Probó varios resultados sobre los sistemas en el toro $\mathbb{T}^2$. Presentamos aquí el teorema más relacionado con la teoría de Poincaré-Bendixson.

Teorema 4.2 (Teorema de Denjoy)**.** Sea $x' = X(x)$ un sistema autónomo sobre el toro $\mathbb{T}^2$, donde X es de clase C^2. Asumimos que este sistema define un flujo. Sea μ un conjunto minimal de este flujo. Entonces μ es o bien un punto singular, o una órbita periódica o $\mu = \mathbb{T}^2$.

Demostración. Véase [7] o [21]. □

Definición 4.2. Sea φ_t un flujo en una variedad bidimensional M. El conjunto $\alpha-$límite o $\omega-$límite de una órbita de φ_t es llamado *conjunto límite del tipo Cantor* si, con excepción de un número finito de puntos (posiblemente cero), es localmente homeomorfo al producto de un conjunto de Cantor y un intervalo compacto.

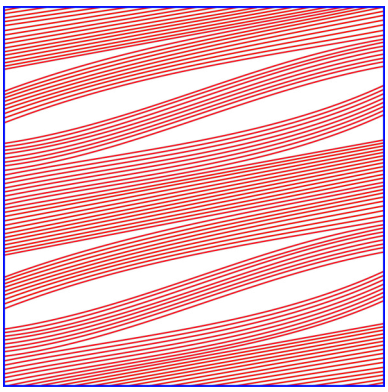


Figura 4.1: Conjunto límite del tipo Cantor

Como también mostró Arnaud Denjoy, la hipótesis de que X es de clase C^2 es esencial pues no puede reducirse la suavidad a clase C^1, dado que presentó un ejemplo

de flujo de clase C^1 en $\mathbb{T}^2$ sin singularidades cuyo conjunto $\omega-$límite de cualquier órbita de este flujo es del tipo Cantor, a este tipo de flujos se les conoce como *flujo de Denjoy*; podemos encontrar ejemplos de flujos con conjuntos límites del tipo Cantor en [22, p. 23] y [26, p. 14]. Los resultados obtenidos por Denjoy fueron de gran importancia, dieron una buena descripción de los fenómenos que ocurren en tales sistemas y sirvieron de base para futuras investigaciones.

Proposición 4.2. Sea μ un conjunto minimal de M para el flujo φ. Entonces las órbitas de φ que pasan por puntos de μ son densas en μ.

Demostración. Sea $p \in \mu$. Supongamos que existe una órbita γ que no es densa en μ, es decir existen $q \in \mu$ y un entorno V_q de q en μ tales que $\overline{\gamma_p} \cap V_q = \emptyset$. Como $\overline{\gamma_p} \subsetneq \mu$ es un conjunto no vacío, invariante y compacto, tendríamos que μ no es minimal, lo cual es una contradicción. □

El teorema de Denjoy fue generalizado en 1963 por Arthur J. Schwartz en [34], es por ese motivo que ahora se conoce como el Teorema de Denjoy-Schwartz.

Teorema 4.3 (Teorema de Denjoy-Schwartz)**.** Sea M una variedad diferenciable bidimensional de clase C^2 compacta y conexa. Sea $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo de clase C^2 en M. Un conjunto minimal $\mu \subset M$ puede ser uno y solo uno de los siguiente tipos:

a) un punto singular, o

b) una órbita periódica, o bien

c) toda una variedad M el cual es homeomorfa al toro $\mathbb{T}^2$.

Demostración. Ya hemos visto que el caso a) y el caso b) son posibles, nos queda entonces probar el caso c), el cual vamos a subdividir de la siguiente manera:

c′) μ tiene interior no vacío: En este caso aprovechamos que M es una variedad conexa y μ es un subconjunto cerrado de M. Tomemos un subconjunto $A \subset \mu$ abierto (el cual existe pues μ tiene interior no vacío) y un elemento $p \in \mu$. De la proposición 4.2 sabemos que existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{t_0}(p) \in A$, luego $\varphi_{-t_0}(A) \subset \mu$ es un abierto que contiene a p. Entonces μ es abierto de M y se sigue de la conexidad de M que $\mu = M$. Como $\mu = M$ es un conjunto minimal, para el flujo φ, tenemos que φ es un flujo sin singularidades y como ya vimos en el capítulo anterior M o bien es homeomorfa al toro $\mathbb{T}^2$ o bien a la botella de Klein $\mathbb{K}^2$. Pero gracias al teorema de Kneser 4.1 sabemos que todo flujo sin singularidades tiene, al menos, una órbita periódica lo cual sería contradicción con el hecho de que $\mu = M$ es un conjunto minimal. Por tanto M es homeomorfa al toro $\mathbb{T}^2$.

c″) μ tiene interior vacío: Como μ es cerrado tenemos que μ es nunca denso. Dado que a), b) y c′) son precisamente aquellos casos que son posibles según la conclusión del teorema, queda por demostrar que c″) no puede ocurrir, para esto supongamos que φ admite un conjunto minimal μ con interior vacío y distinto de un punto singular o una órbita periódica.

Dado $p \in \mu$, tomemos una carta local $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ donde $U_\alpha \ni p$. Luego tenemos que la proposición 1.3 asegura la existencia de una sección transversal local de clase C^∞ al campo inducido en $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ en el punto $\mathbf{x}_\alpha(p)$.

Entonces por el teorema del flujo tubular existe $\varepsilon > 0$ y un difeomorfismo $h : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times]-1, 1[$. De modo que tenemos la existencia de una inmersión homeomorfa $\sigma : [-1, 1] \to M$ de clase C^2 tal que:

1) $\Sigma := \sigma\big(]-1, 1[\big)$ es transversal a toda órbita de φ en μ que la interseque, es decir para $s \neq \pm 1$ tenemos que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \sigma(s))$ y $\sigma'(s)$ son linealmente independientes.
2) $\sigma(0) \in \mu$.
3) $\sigma(-1)$ y $\sigma(+1)$ no están en μ, esto se puede garantizar por el hecho de que μ tiene interior vacío.

Notemos que para $-\varepsilon < t < \varepsilon$ y $-1 < s < 1$ la aplicación $\delta(t, s) := \varphi\big(t, \sigma(s)\big)$ define un difeomorfismo además $\delta(0, s) = \varphi\big(0, \sigma(s)\big) = \sigma(s)$ para todo s en el intervalo $]-1, 1[$. Por tanto podemos considerar δ^{-1} como un sistema de coordenadas en M entorno de $\sigma(0)$.

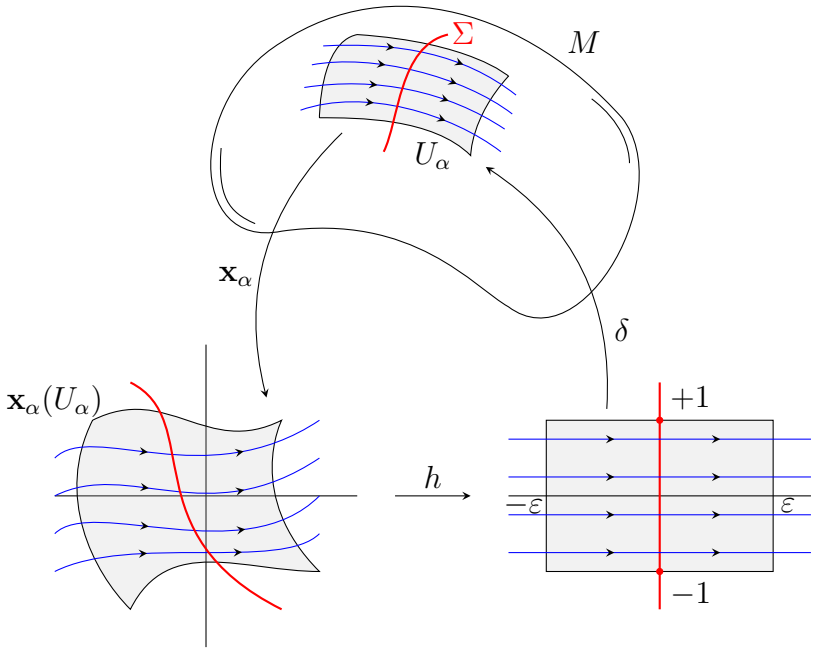


Figura 4.2: Difeomorfismo δ.

La demostración del teorema gira entorno al comportamiento de la función $f(\tau)$ inducida por el primer retorno a Σ de la órbita de φ a través de $\tau \in \Sigma$ a Σ. Definamos esta función de la siguiente manera, sea

$$U = \{x \in \Sigma : \text{existe } t > 0 \text{ con } \varphi(t, x) \in \Sigma\}$$

se puede verificar fácilmente que U es un abierto no vacío de Σ. Para cada $x \in U$, definamos $t_x := \min\{t > 0 : \varphi(t, x) \in \Sigma\}$, entonces para $v \in \sigma^{-1}(U) = V \subset]-1, 1[$ definimos

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \longrightarrow &]-1, 1[\\ & v & \mapsto & f(v) := \sigma^{-1}\big(\varphi(t_{\sigma(v)}, \sigma(v))\big). \end{array}$$

Observemos que

$$\pi\Big(\delta^{-1}\big(\varphi(t_{\sigma(v)},\sigma(v))\big)\Big)=\sigma^{-1}\Big(\varphi\big(t_{\sigma(v)},\sigma(v)\big)\Big)=f(v)$$

donde $\pi(\xi,\eta)=\eta$. Además como U es abierto, tenemos que para $|v-v_0|$ suficientemente pequeño

$$f(v)=\pi\left(\delta^{-1}\Big(\varphi\big(t_{\sigma(v_0)},\sigma(v)\big)\Big)\right),$$

y por tanto f es de clase C^2.

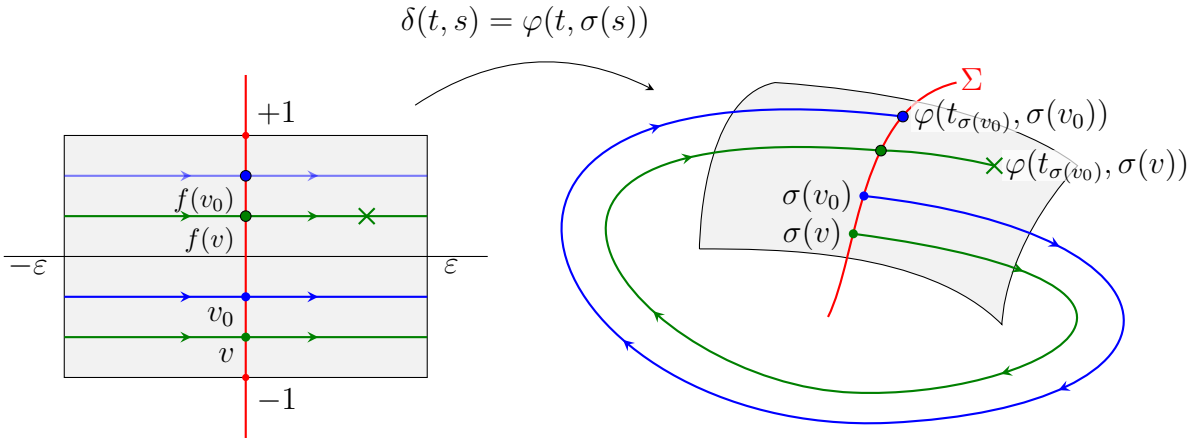


Figura 4.3: Aplicación $\delta(t,s)$.

Como μ es un conjunto minimal, las órbitas de φ que pasan por los puntos de μ son densas en μ, tenemos que $G=\sigma^{-1}(\Sigma\cap\mu)\subset V$ es un conjunto perfecto, nunca denso en $[-1,1]$. Dado que si las órbitas de φ que pasa por los puntos de μ son densas en μ, tenemos que $\Sigma\cap\mu$ es un conjunto perfecto además $\Sigma\cap\mu$ tiene interior vacío pues μ tiene interior vacío y Σ es una sección transversal.

Sea W un abierto de $[-1,1]$ tal que $G\subset W\subset\overline{W}\subset V$. Asumiremos que M es orientable, pues caso contrario tomamos $\phi:\widetilde{M}\to M$ su recubrimiento duplo orientable y $\widetilde{\varphi}$ el flujo de $\phi^*(X)$ tal que $\varphi=\phi\circ\widetilde{\varphi}$. Entonces por la proposición 3.6, basta solo considerar el caso donde M es orientable.

Notemos que f posee las siguientes propiedades:

1. $G=]-1,1[-\bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j,b_j[$ *donde* $]a_j,b_j[$ *son intervalos abiertos disjuntos.*

   Como $G\subset]-1,1[$ es cerrado, entonces $]-1,1[-G$ puede ser escrito, de manera única, como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, es decir existen $a_j<b_j$ tales que $]-1,1[-G=\bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j,b_j[$ donde $]a_j,b_j[\cap]a_k,b_k[=\emptyset$ si $j\neq k$.

2. $f(G)=G$.

   ($\subset$) Sea $w\in f(G)$, entonces existe $v\in G=\sigma^{-1}(\Sigma\cap\mu)$ tal que $w=f(v)$. Luego $\sigma(w)=\sigma(f(v))=\varphi\big(t_{\sigma(v)},\sigma(v)\big)\in\Sigma\cap\mu$ de modo que $w\in\sigma^{-1}(\Sigma\cap\mu)$.

($\supset$) Sea $v \in G = \sigma^{-1}(\Sigma \cap \mu)$, entonces $\sigma(v) \in \Sigma \cap \mu$. Luego por la proposición 4.2 sabemos que existen valores positivos y negativos r tales que $\varphi(r, \sigma(v)) \in \Sigma \cap \mu$. De este modo definimos $t^x := \text{mín}\{t > 0 : \varphi(-t, x) \in \Sigma \cap \mu\}$, entonces $v_0 = \sigma^{-1}\Big(\varphi\big(-t^{\sigma(v)}, \sigma(v)\big)\Big) \in G$ es tal que $v = f(v_0) \in f(G)$.

3. *Si $v \in G$ y $f^k(v) = v$, entonces $k = 0$.*

   Antes de comenzar notemos lo siguiente: como $\sigma(v) \in \Sigma$, su primer retorno a Σ es $\varphi\big(t_{\sigma(v)}, \sigma(v)\big)$ que por definición es igual a $\sigma(f(v)) \in \Sigma$. Es decir

   $$\sigma(f(v)) = \varphi\big(t_{\sigma(v)}, \sigma(v)\big).$$

   Usando el mismo argumento, como $\sigma(f(v)) \in \Sigma$ entonces su primer retorno a Σ es $\varphi\big(t_{\sigma(f(v))}, \sigma(f(v))\big)$ que por definición es igual a $\sigma(f^2(v)) \in \Sigma$.

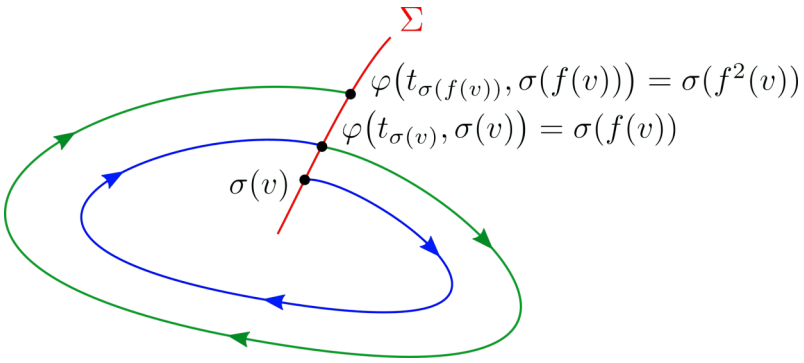


Figura 4.4: Segundo retorno de $\sigma(v)$.

   Además podemos entender a $t_{\sigma(v)} + t_{\sigma(f(v))}$ como el tiempo que tarda $\sigma(v)$ en dar su segundo retorno a Σ. En consecuencia

   $$\sigma(f^2(v)) = \varphi\big(t_{\sigma(f(v))}, \sigma(f(v))\big) = \varphi\big(t_{\sigma(v)} + t_{\sigma(f(v))}, \sigma(v)\big).$$

   Continuando el argumento anterior por inducción obtenemos

   $$\left|\begin{array}{rcl} \sigma(f(v)) & = & \varphi\big(t_{\sigma(v)}, \sigma(v)\big) \\ \sigma(f^k(v)) & = & \varphi\big(t_{\sigma(v)} + t_{\sigma(f(v))} + \cdots + t_{\sigma(f^{k-1}(v))}, \sigma(v)\big), \ k \geq 2 \end{array}\right.$$

   Regresando a la demostración, supongamos por reducción al absurdo que existe $k \geq 1$ tal que $f^k(v) = v$. Si $k = 1$, entonces $\sigma(v) = \sigma(f(v))$ es decir $\varphi\big(0, \sigma(v)\big) = \varphi\big(t_{\sigma(v)}, \sigma(v)\big)$. De modo que μ contendría una órbita periódica lo cual es una contradicción. Si $k \geq 2$ tenemos

   $$\varphi(0, \sigma(v)) = \sigma(v) = \sigma(f^k(v)) = \varphi\big(t_{\sigma(v)} + t_{\sigma(f(v))} + \cdots + t_{\sigma(f^{k-1}(v))}, \sigma(v)\big)$$

   la cual es una contradicción, dado que μ no puede contener órbitas periódicas.

4. *G es un conjunto minimal para f, en el sentido de que G no contiene propiamente un subconjunto cerrado K_0 no vacío con $f(K_0) = K_0$.*

Sea K_0 un subconjunto cerrado no vacío de G tal que $f(K_0) = K_0$. Definamos los conjuntos $\widetilde{K}_0 = \sigma(K_0)$ y $\widetilde{G} = \sigma(G) = \Sigma \cap \mu$. Consideremos Ω la unión de todas las órbitas de φ que pasan por puntos de $\widetilde{K}_0$. Veamos que Ω es cerrado en μ. Supongamos que esto no ocurre, es decir existe un elemento p en $\overline{\Omega} - \Omega$ donde $\overline{\Omega}$ denota la cerradura de Ω en μ. Como $p \in \mu$ sabemos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t_0, p) \in \widetilde{G} = \Sigma \cap \mu$. Luego como $\widetilde{G} - \widetilde{K}_0$ es abierto en $\widetilde{G}$ y $\varphi(t_0, p) \in \widetilde{G} - \widetilde{K}_0$, esto gracias a que si suponemos $\varphi(t_0, p) \in \widetilde{K}_0$ entonces tendríamos $p \in \Omega$, en base a esto es posible encontrar un entorno $\widetilde{V}$ de $\varphi(t_0, p)$ en $\widetilde{G} = \Sigma \cap \mu$ tal que $\widetilde{V} \cap \widetilde{K}_0 = \emptyset$.

Supongamos que para todo entorno $\widetilde{V}$ de $\varphi(t_0, p)$ en $\widetilde{G} = \Sigma \cap \mu$ tal que $\widetilde{V} \cap \widetilde{K}_0 = \emptyset$ se tiene $\varphi_{-t_0}(\widetilde{V}) \cap \Omega \neq \emptyset$. En tal caso existe $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ tal que $\varphi(-t_0, \widetilde{v}) \in \Omega$, luego por la definición de Ω existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t_1, \widetilde{v}) \in \widetilde{K}_0$.
Por tanto como $\widetilde{K}_0 = \sigma(K_0) = \sigma(f(K_0))$ sabemos que si para algún $t \in \mathbb{R}$ se tiene $\varphi(t, \widetilde{v}) \in \widetilde{G} = \Sigma \cap \mu$ entonces $\varphi(t, \widetilde{v}) \in \widetilde{K}_0$. Como $\varphi(0, \widetilde{v}) = \widetilde{v} \in \widetilde{V} \subset \widetilde{G}$ tenemos que $\widetilde{v} \in \widetilde{K}_0$ lo cual es una contradicción. En consecuencia es posible encontrar un entorno de $\widetilde{V}$ de $\varphi(t_0, p)$ en $\widetilde{G}$ con $\widetilde{V} \cap \widetilde{K}_0 = \emptyset$ tal que $\varphi_{-t_0}(\widetilde{V})$ no contiene puntos de Ω, lo cual es absurdo dado que $p \in \varphi_{-t_0}(\widetilde{V}) \cap (\overline{\Omega} - \Omega)$. Como $\Omega \subset \mu$ es invariante por φ tenemos que $\Omega = \mu$ y así $K_0 = G$.

5. *Existe $L > 0$ tal que $L \leq |f'(w)|$ para todo $w \in W$, donde W fue definido anteriormente como un abierto de $[-1, 1]$ tal que $G \subset W \subset \overline{W} \subset V$.*

   Por la construcción de la función $f : V \to]-1, 1[$, tenemos que $f'(v) \neq 0$ para todo $v \in V$, además como f' es continua en el compacto $\overline{W} \subset V$ se tiene que existe $L > 0$ tal que $0 < L \leq |f'(w)|$ para todo $w \in W$. En particular f es inyectiva en G.

6. *Dado $a \in G$ el conjunto $H = \left\{f^k(a) : k \in \mathbb{Z}\right\}$ es denso en G.*

   Veamos que $\overline{H}$ es invariante con respecto a f. Sea $h \in \overline{H}$, entonces existe una sucesión $(k_n)_n \subset \mathbb{Z}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{k_n}(a) = h$. Luego,

   $$f(h) = f\left(\lim_{n \to +\infty} f^{k_n}(a)\right) = \lim_{n \to +\infty} f^{k_n+1}(a)$$

   teniendo así que $f(h) \in \overline{H}$, es decir $f(\overline{H}) \subset \overline{H}$. De manera análoga tenemos que $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{k_n-1}(a) = f^{-1}(h) \in \overline{H}$ esto es $f^{-1}(\overline{H}) \subset \overline{H}$. Por tanto $f(\overline{H}) = \overline{H}$, ya que gracias a las propiedades 2 y 5 tenemos que f es una biyección sobre G. De la propiedad 4 sabemos que G es minimal para f, es decir $\overline{H} = G$, es decir H es denso en G.

7. *Existe $E > 0$ tal que $|f''(w)| \leq E$ para todo $w \in W$, donde W fue definido anteriormente como un abierto de $[-1, 1]$ tal que $G \subset W \subset \overline{W} \subset V$.*

   Esto se sigue del hecho de que f es de clase C^2.

Lema 4.2. Para la función $f : V \to]-1, 1[$ y el conjunto $G = \sigma^{-1}(\Sigma \cap \mu)$ definidos anteriormente. Considerando f monótona, tenemos lo siguiente:

1. Existen un elemento $a \in G$ tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} Df^k(a) = 0$.

2. Existe un entorno de a, llamemos $V(a)$, en $]-1,1[$ tal que $\lim_{k\to+\infty} Df^k(x) = 0$ uniformemente en $x \in V(a)$.

Para demostrar este lema necesitamos de un par de resultados previos.

Lema 4.3. Si f es monótona, entonces existe un intervalo abierto $]a,b[$ con $a,b \in G$ tal que $f^k\big(]a,b[\big) \subset W$ para todo $k \geq 0$, donde W fue definido anteriormente como un abierto de $[-1,1]$ tal que $G \subset W \subset \overline{W} \subset V$.

Demostración. Sea $\rho = d(G,]-1,1[- W)$. Para los a_j, b_j vistas en el ítem 1 de las propiedades de f y G, definimos los siguientes conjuntos $S = \{j : b_j - a_j \geq \rho\}$ e $Y = \{a_j, b_j : j \in S\}$. Notemos que tanto S como Y son conjuntos finitos. Sea $K_1 = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$, veamos que $f(K_1) = K_1$. Para esto sea $s_0 \in G - K_1$ y supongamos que para algún $\varepsilon \in]0, 1 - s_0[$ se tiene que el intervalo $]s_0, s_0 + \varepsilon[$ es disjunto de G, entonces está contenido en la unión disjunta $\bigcup_j]a_j, b_j[$. Como $s_0 \in G$ entonces existe i tal que $s_0 = a_i \in K_1$ lo cual es una contradicción. Análogamente podemos analizar el caso $]s_0 - \varepsilon, s_0[$ teniendo así el siguiente resultado:

$$s_0 \in G - K_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : G \cap]s_0 - \varepsilon, s_0[\neq \emptyset \wedge G \cap]s_0, s_0 + \varepsilon[\neq \emptyset. \tag{4.1}$$

Sea $a_1 \in K_1$ y en lo que queda de la demostración de este lema supongamos sin pérdida de generalidad que f sea estrictamente creciente. Como f es una biyección en G tenemos

$$\emptyset = G \cap]a_1, b_1[\Rightarrow \emptyset = f\big(G \cap]a_1, b_1[\big) = f(G) \cap f\big(]a_1, b_1[\big) = G \cap]\underbrace{f(a_1)}_{\in G}, f(b_1)[.$$

Luego de (4.1) podemos concluir que $f(a_1) \in K_1$. el argumento usado para a_1 es válido para cualquier otro elemento de K_1 y en consecuencia $f(K_1) = K_1$.

Veamos que el ítem 3 de las propiedades de f y G, implica que existe un entero positivo N tal que $f^k(a_1) \notin Y$ para todo $k \geq N$. Como el conjunto K_1 es invariante por f, tenemos que el conjunto $\{a_1 < f(a_1) < f^2(a_1) < \dots\} \subset K_1$ es infinito y como f es estrictamente creciente e Y es finito podemos concluir que existe $N > 0$ tal que $\{a_1, f(a_1), f^2(a_1), \dots, f^{N-1}(a_1)\} \supset Y$. Supongamos ahora que existe $n > N-1$ tal que $f^n(a_1) \in Y$, digamos por ejemplo que $f^n(a_1) = a_j$ para algún $j \in S$. Luego tenemos

$$f^n(a_1) = a_j = f^m(a_1), \text{ con } 0 \leq m < N.$$

Como $n > N - 1$ existe $k > 0$ tal que $n = k + m$. Así

$$a_j = f^n(a_1) = f^k(f^m(a_1)) = f^k(a_j)$$

haciendo uso del ítem 3 de las propiedades de f y G, obtenemos $k = 0$ lo cual no puede ocurrir. De esta manera, $f^N(a_1) = a_j$ ó b_j para algún $j \in S$, y de acuerdo a la elección de N, tenemos para $k \geq 0$

$$|f^k(a_j) - f^k(b_j)| = |f^{k+N}(a_1) - f^{k+N}(b_1)| < \rho.$$

dado que $f^{k+N}(a_1) \notin Y$ para $k \geq 0$. Tomemos ahora el intervalo abierto que estábamos buscando de la siguiente manera $]a,b[=]a_j, b_j[$ y dado que $f^k(a), f^k(b) \in G$ se sigue que $f^k\big(]a,b[\big) \subset W$ para todo $k \geq 0$. □

Usando el símbolo D para denotar $[Dg](x) = g'(x)$ tenemos el siguiente resultado,

Lema 4.4 (Desigualdad Fundamental)**.** Sea N un entero y $[p,q] \subset]-1,1[$ tal que $f^k\big([p,q]\big) \subset W$ para todo k que satisface $0 \le k \le N$. Entonces

$$\frac{\big|Df^{k+1}(u)\big|}{|Df^{k+1}(v)|} \le \exp\left(\frac{E}{L}\cdot\sum_{j=0}^{k}\big|f^j(p)-f^j(q)\big|\right),$$

para todo k que satisface $0 \le k \le N$ y $u, v \in [p,q]$; donde las constantes E y L son como en los ítem 5 y 7 de las propiedades de f y G.

Demostración. Como $f^{k+1}(u) = f \circ f^k(u)$, entonces por inducción tenemos que

$$Df^{k+1}(u) = Df\big(f^k(u)\big)\cdot Df^k(u) = \prod_{j=0}^{k} Df\big(f^j(u)\big).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\left|\ln\frac{\big|Df^{k+1}(u)\big|}{|Df^{k+1}(v)|}\right| &= \Big|\ln\big|Df^{k+1}(u)\big| - \ln\big|Df^{k+1}(v)\big|\Big| \\
&= \left|\ln\prod_{j=0}^{k}\big|Df(f^j(u))\big| - \ln\prod_{j=0}^{k}\big|Df(f^j(v))\big|\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k}\ln\big|Df(f^j(u))\big| - \ln\big|Df(f^j(v))\big|\right| \\
&\le \sum_{j=0}^{k}\Big|\ln\big|Df(f^j(u))\big| - \ln\big|Df(f^j(v))\big|\Big| \\
&= \sum_{j=0}^{k}\frac{|D^2f(w_j)|}{|Df(w_j)|}\cdot\big|f^j(u)-f^j(v)\big|, \qquad \text{donde } w_j \in \,]f^j(u), f^j(v)[.
\end{aligned}$$

dado que si aplicamos el teorema de valor medio a la función $\ln|Df|$ en $[f^j(u), f^j(v)]$, tenemos la existencia de $w_j \in \,]f^j(u), f^j(v)[$ tal que

$$\begin{aligned}
\Big|\ln\big|Df\big(f^j(u)\big)\big| - \ln\big|Df\big(f^j(u)\big)\big|\Big| &= \Big|D\big(\ln|Df|\big)(w_j)\Big|\cdot|f^j(u)-f^j(v)| \\
&= \left|\frac{1}{|Df(w_j)|}\cdot\frac{Df(w_j)}{|Df(w_j)|}\cdot D^2f(w_j)\right|\cdot|f^j(u)-f^j(v)| \\
&= \frac{|D^2f(w_j)|}{|Df(w_j)|}\cdot|f^j(u)-f^j(v)|.
\end{aligned}$$

Usando ahora las desigualdades vistas en los ítems 5 y 7 de las propiedades de f y G,

y considerando que f es estrictamente monótona, f^j también lo es, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left|\ln\frac{|Df^{k+1}(u)|}{|Df^{k+1}(v)|}\right| &\leq \sum_{j=0}^{k}\frac{|D^2f(w_j)|}{|Df(w_j)|}\cdot\left|f^j(u)-f^j(v)\right| \\ &\leq \frac{E}{L}\cdot\sum_{j=0}^{k}\left|f^j(u)-f^j(v)\right| \\ &\leq \frac{E}{L}\cdot\sum_{j=0}^{k}\left|f^j(p)-f^j(q)\right|\end{aligned}$$

Por tanto podemos concluir que

$$\frac{|Df^{k+1}(u)|}{|Df^{k+1}(v)|}\leq\exp\left(\frac{E}{L}\cdot\sum_{j=0}^{k}\left|f^j(p)-f^j(q)\right|\right).$$

□

Ahora ya estamos listos para demostrar el lema 4.2.

Demostración. Demostraremos que el punto a escogido en el lema 4.3 satisface el ítem 1. Haremos eso mostrando que la serie $\sum_{k=0}^{\infty}Df^k(a)$ es absolutamente convergente. Sean $a_k=f^k(a)$ y $b_k=f^k(b)$ para todo $k\geq 0$. Por lo visto en la demostración del lema 4.3, es claro que $G\cap[a_k,b_k]=\{a_k,b_k\}$ de modo que los intervalos $[a_n,b_n]$ son todos disjuntos. En consecuencia

$$2\geq\sum_{k=0}^{\infty}|b_k-a_k|=\sum_{k=0}^{\infty}\left|f^k(b)-f^k(a)\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\left|Df^k(w_k)\right|\cdot|b-a|,$$

donde $w_k\in\,]a,b[$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty}\left|Df^k(w_k)\right|\leq\frac{2}{|b-a|}$. Lo cual afirma que $\sum_{k=0}^{\infty}Df^k(w_k)$ es absolutamente convergente, aquí usamos de manera implícita el hecho de que M es orientable para garantizar que $Df^k(w_k)$ es positiva y de esa manera no exista problema con el cambio de coordenadas ya que este análisis lo estamos haciendo locamente para una carta, esto por la propia definición de la función f.

Por otro lado, aplicando la desigualdad fundamental al intervalo $]a,b[$ tomando $p=a,q=b,u=a$ y $v=w_k$ tenemos

$$\frac{|Df^k(a)|}{|Df^k(w_k)|}\leq\exp\left(\frac{E}{L}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left|f^j(b)-f^j(a)\right|\right)\leq\exp\left(\frac{2E}{L}\right)$$

luego por comparación podemos concluir que $\sum_{k=0}^{\infty}Df^k(a)$ es absolutamente convergente y en consecuencia $\lim_{k\to+\infty}Df^k(a)=0$, esto muestra el ítem 1.

Para terminar la demostración del lema 4.2, resta probar el ítem 2. Para este fin vamos a encontrar un número $d>0$ tal que $\lim_{k\to+\infty}Df^k(x)=0$ uniformemente en el

entorno $V(a) = \{x : |x - a| < d\}$. Como $\lim_{k\to+\infty} Df^k(a) = 0$, entonces es suficiente encontrar un número $d > 0$ tal que para cada $x \in V(a)$ y $k \geq 0$ entero tengamos

a) $\left|f^k(x) - f^k(a)\right| < \rho$,

b) $\left|Df^k(x)\right| < e \cdot \left|Df^k(a)\right|$,

donde $\rho = d\big(G,]-1, 1[- W\big)$. Usaremos inducción sobre k. Para $k = 0$ no es complicado notar que existe un d_0 que satisface de manera trivial tanto a) como b), esto gracias a la continuidad de f. Supongamos ahora que a) y b) son satisfechos para cierto d y para $0 \leq k \leq N$, siendo

$$d = \text{mín}\left\{d_0, \frac{\rho L}{6(\tau+1)(E+1)}, \frac{\rho}{e\tau}\right\}$$

donde $\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \left|Df^k(a)\right|$. Mostraremos que para $k = N+1$ y el mismo d tanto a) como b) son satisfechos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x < a$, aplicando ahora la desigualdad fundamental para $p = u = x$ y $q = v = a$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\left|Df^{N+1}(x)\right|}{\left|Df^{N+1}(a)\right|} &\leq \exp\left(\frac{E}{L} \cdot \sum_{k=0}^{N} \left|f^k(x) - f^k(a)\right|\right) \\
&= \exp\left(\frac{E}{L} \cdot \sum_{k=0}^{N} \left|Df^k(u_k)\right| \cdot |x - a|\right), \qquad \text{donde } u_k \in]x, a[\\
&\leq \exp\left(\frac{E}{L} \cdot \sum_{k=0}^{N} e \cdot \left|Df^k(a)\right| \cdot d\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{E}{L} \cdot e \cdot \tau \cdot d\right) \leq e
\end{aligned}$$

la última desigualdad se da gracias a que $\frac{E}{L} e\tau d < \frac{e\rho}{6} < \rho \leq 1$. De lo anterior se sigue que para cierto $\theta \in [x, a]$ tenemos

$$\left|f^{N+1}(x) - f^{N+1}(a)\right| = \left|Df^{N+1}(\theta)\right| \cdot |x - a| < e \cdot \left|Df^{N+1}(a)\right| \cdot d < e \cdot \tau \cdot d < \rho.$$

es decir a) y b) también se satisfacen para $k = N + 1$. Si $x > a$, la demostración se hace de manera completamente análoga. Observemos que a) fue utilizado para hacer la inducción en b) y también para garantizar el uso de la desigualdad fundamental, pues ella asegura que $f^k\big([x, a]\big) \subset W$. □

Ahora demostraremos el teorema de Schwartz usando las propiedades de la función f y el conjunto G, y el lema 4.2. La demostración del teorema se sigue si mostramos que no existe una función f que satisfaga las 7 propiedades antes mencionadas y al mismo tiempo el lema 4.2. En efecto, del ítem 6 de las propiedades de la función f y el conjunto G, y del ítem b) del lema 4.2 tenemos garantizada la existencia de un número $d > 0$ y un entero k suficientemente grande tales que $]a - d, a + d[\subset V(a)$, $\left|f^k(a) - a\right| \leq \frac{d}{2}$ y $\left|Df^k(s)\right| < \frac{1}{2}$ para $|s - a| \leq d$. Luego

$$\left|f^k(a \pm d) - a\right| \leq \left|f^k(a \pm d) - f^k(a)\right| + \left|f^k(a) - a\right| \leq \left|Df^k(\theta)\right| \cdot |d| + \frac{d}{2} < d$$

para algún $\theta \in]a-d, a+d[$. Por tanto $f^k(a \pm d) \in]a-d, a+d[$. Esto implica que $f^k(a+d) - (a+d) < 0$ y $f^k(a-d) - (a-d) > 0$, luego existe s_0, con $|s_0 - a| < d$ tal que $f^k(s_0) = s_0$ y así $f^{nk}(s_0) = s_0$ para $n = 1, 2, \ldots$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\theta_n \in]a-d, a+d[$ tal que

$$\left|f^{nk}(a) - s_0\right| = \left|f^{nk}(a) - f^{nk}(s_0)\right| = \left|Df^{nk}(\theta_n)\right| \cdot |a - s_0|.$$

Dado que la sucesión $(\theta_n)_n$ está dentro de un compacto posee una subsucesión convergente, que sin pérdida de generalidad la podemos tomar como la misma sucesión $(\theta_n)_n$, que converge para θ. Sabemos por el ítem b) del lema 4.2 que $Df^{nk}(x)$ converge uniformemente para 0 cuando $x \in]a-d, a+d[$ en consecuencia $\lim\limits_{n\to+\infty} Df^{nk}(\theta_n) = 0$, de donde concluimos que $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{nk}(a) = s_0$. Como $a \in G$, tenemos del ítem 2 de las propiedades de la función f y el conjunto G que $f^{nk}(a) \in G$, donde además G es un conjunto cerrado y entonces $s_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{nk}(a) \in G$ lo cual contradice al ítem 3 de las propiedades de la función f y el conjunto G. Por tanto eso muestra el teorema de Schwartz en caso M sea orientable pues de esta manera f es monótona. En el caso donde M no es orientable tomamos $\phi : \widetilde{M} \to M$ su recubrimiento doble orientable y $\widetilde{\varphi}$ el levantamiento del flujo φ. Como $\widetilde{\varphi}$ no admite conjuntos minimales triviales lo mismo ocurre con φ, esto gracias a la proposición 3.6. □

El teorema de Dejoy-Schwartz admite la siguiente formulación equivalente:

Teorema 4.4. Sea X un campo vectorial de clase C^2 en una variedad bidimensional compacta M. Sea γ una órbita de X. Si $\omega(\gamma)$ no contiene puntos singulares, entonces $\omega(\gamma)$ es una órbita periódica o $\omega(\gamma) = \mathbb{T}^2$, y en este caso $M = \mathbb{T}^2$.

Corolario 4.1. Sea X un campo vectorial de clase C^2 en $\mathbb{T}^2$. Si X no tiene singularidades, ocurre una de las siguientes opciones:

a) el conjunto $\omega-$límite de toda órbita de X es una órbita periódica;

b) el conjunto $\omega-$límite de toda órbita de X es $\mathbb{T}^2$.

Demostración. Es suficiente probar que si el conjunto $\omega-$límite de una órbita de X es una órbita periódica γ, entonces el conjunto $\omega-$límite de cualquier otra órbita también es una órbita periódica. Notemos que si $\mathbb{T}^2 - \gamma$ consiste de dos regiones disjuntas y disconexas, entonces por el teorema 2 existiría una singularidad contenida en $\text{int}(\gamma)$, lo cual es absurdo pues X no posee singularidades. En consecuencia $\mathbb{T}^2 - \gamma$ es homeomorfo a un cilindro y el cilindro es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Sean $h : \mathbb{T}^2 - \gamma \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dicho homeomorfismo y $p \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Dada una órbita γ_p contenida en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, si $\gamma_p \not\subset K$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. La órbita correspondiente $h^{-1} \circ \gamma_p$ en $\mathbb{T}^2 - \gamma$ debería contener al menos un punto de γ en su conjunto $\omega-$límite $\omega(\gamma_p)$ y en consecuencia $\omega(h^{-1} \circ \gamma_p) = \gamma$ la cual es una órbita periódica. Supongamos ahora que γ_p está contenida en algún compacto $K \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, en estas condiciones podemos aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson, concluyendo de esta manera la demostración del corolario. □

Carlos Gutiérrez presentó un trabajo sobre el suavizado de flujos continuos [13] en 1986, que fue crucial para la teoría de los sistemas bidimensionales. Un corolario del

teorema principal de este artículo fue que cualquier flujo continuo en una variedad compacta bidimensional M de clase C^∞ es topológicamente conjugado a un flujo C^1 en M. Recordamos que dos flujos continuos $\varphi : D_1 \to M$ y $\psi : D_2 \to M$ se dice que son topológicamente conjugados, si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ llamado conjugación topológica que lleva órbitas de φ en órbitas de ψ, preservando la orientación natural de las órbitas, es decir

$$h\big(\varphi(t,p)\big) = \psi\big(t, h(p)\big), \quad \forall (t,p) \in D_1.$$

La conjugación topológica preserva las propiedades topológicas de las órbitas, en particular, las propiedades investigadas en el Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 4.5 (Teorema de Gutiérrez)**.** Sea $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo continuo sobre una variedad bidimensional compacta de clase C^∞. Entonces existe un flujo ψ sobre M de clase C^1 el cual es topológicamente conjugado al flujo φ. Asimismo, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) todo conjunto minimal de φ es una singularidad, o una órbita cerrada o toda la variedad M el cuyo caso este conjunto minimal debe ser igual a $\mathbb{T}^2$;

b) φ es topológicamente conjugado a un flujo de clase C^2;

c) φ es topológicamente conjugado a un flujo de clase C^∞;

La afirmación, b) implica a) es precisamente el teorema de Denjoy-Schwartz. Si la variedad bidimensional compacta M es la esfera $\mathbb{S}^2$, el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ o la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ el flujo se puede obtener de clase C^∞. En consecuencia, cuando se aplican simultáneamente los teoremas de Gutiérrez y Denjoy-Schwartz, el teorema de Poincaré-Bendixson es cierto para flujos continuos en estas tres últimas superficies mencionas anteriormente. Sin embargo, cabe señalar que Gutiérrez utilizó varias técnicas y resultados avanzados y complicados en su demostración. Las otras demostraciones del Teorema de Poincaré-Bendixson, a pesar de no ser fáciles, fueron en realidad mucho más elementales. Por otro lado, de acuerdo con el teorema de Denjoy-Schwartz, no es posible dilatar la clase de diferenciabilidad del flujo, dado que siempre es posible modificar el flujo de Denjoy y así obtener más ejemplos de flujos de clase C^1 y puntos para los que el conjunto $\omega-$límite no es una órbita cerrada ni tampoco contiene singularidades.

5

Conclusiones

1. Vimos la importancia que tiene el teorema de la curva de Jordan en la demostración del teorema de Poincaré-Bendixson en el plano. Siguiendo una demostración análoga a este teorema y haciendo uso de una versión del teorema de la curva de Jordan para $\mathbb{S}^2$, se pudo conseguir una generalización natural del teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera bidimensional.

2. Pidiendo más condiciones en las hipótesis, por ejemplo, que el flujo sea ahora de clase C^2 logramos conseguir una generalización del teorema de Poincaré-Bendixson a variedades bidimensionales compactas, conocido como el teorema de Denjoy-Schwartz.

3. Vimos también que el teorema de Poincaré-Bendixson no es válido para flujos que son estrictamente de clase C^1, aquí aparecen por ejemplo los flujos de Denjoy cuyos conjuntos $\omega-$límite son del tipo Cantor. Estudiamos también el flujo irracional en el toro.

4. Finalmente se presentan seis aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson en diferentes ramas de la matemática, mostrando así el gran impacto que tiene este teorema.

Bibliografía

[1] Bella, G. (2013). Multiple cycles and the Bautin bifurcation in the Goodwin model of a class struggle. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 18(3), 265-274.

[2] Benazic, R. (2007). Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Uni, Perú.

[3] Bhatia, N. P., Lazer, A. C., & Leighton, W. (1966). Application of the Poincaré-Bendixson theorem. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 73(1), 27-32.

[4] Bendixson, I. (1901). Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. 24, 1.

[5] Cairns, S. S. (1934). On the triangulation of regular loci. Annals of Mathematics, 579-587.

[6] Ciesielski, K. (2012). The Poincaré-Bendixson theorem: from Poincaré to the XXIst century. Central European Journal of Mathematics, 10(6), 2110-2128.

[7] Denjoy, A. (1932). Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 11, 333-376.

[8] Do Carmo, M. P. (2019). Geometria Riemanniana (Vol. 6). IMPA.

[9] Field, R.J., & Burger, M. (1985). Oscillations and Traveling Waves in Chemical Systems.

[10] Fulton, W. (2013). Algebraic topology: a first course (Vol. 153). Springer Science & Business Media.

[11] Gine, J. (2014). Non-existence of limit cycles for planar vector fields. Electronic Journal of Differential Equations, 2014, vol. 2014, núm. 75, p. 1-8.

[12] Godbillon, C. (2012). Dynamical systems on surfaces. Springer Science & Business Media.

[13] Gutiérrez, C. (1986). Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences. Ergodic Theory and dynamical systems, 6(1), 17-44.

[14] Hector, G., & Hirsch, U. (1983). Introduction to the Geometry of Foliations: Part A. F. Vieweg & Sohn.

[15] Hirsch, M. W. (2012). Differential topology (Vol. 33). Springer Science & Business Media.

[16] Kneser, H. (1924). Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen. Math. Ann. 91, 135154.

[17] Kupers, A. (2019, 22 de febrero). Lectures on Diffeomorphism Groups of Manifolds. https://people.math.harvard.edu/ kupers/teaching/272x/book.pdf

[18] Lima, E. L. (2018). Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.

[19] Lynch, S. (2018). Dynamical systems with applications using Python. Switzerland: Springer International Publishing.

[20] Linton, F., & Munkres, J.R. (1967). Elementary Differential Topology.

[21] MacKay, R. S. (1988, March). A simple proof of Denjoy's theorem. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 103, No. 2, pp. 299-303). Cambridge University Press.

[22] MacKay, R. S. (1998). Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces (Translations of Mathematical Monographs 153) By S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky and E. V. Zhuzhoma: 325 pp. (American Mathematical Society, 1996). Bulletin of the London Mathematical Society, 30(5), 555-558.

[23] Madan, R. N. (Ed.). (1993). Chua's circuit: a paradigm for chaos (Vol. 1). World Scientific.

[24] Markley, N. G. (1969). The Poincaré-Bendixson theorem for the Klein bottle. Transactions of the American Mathematical Society, 159-165.

[25] Massey, W. S. (2019). A basic course in algebraic topology (Vol. 127). Springer.

[26] Nikolaev, I., & Zhuzhoma, E. (1999). Flows on 2-dimensional manifolds: an overview.

[27] Palis, J. J., & De Melo, W. (1982). Geometric theory of dynamical systems: an introduction. Springer-Verlag.

[28] Perko, L. (2001). Differential equations and Dynamical systems.

[29] Poincaré, H. (1881). Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I). Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 7, 375-422.

[30] Poincaré, H. (1885). Sur les courbes définies par les équations différentielles (III). Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1, 167-244.

[31] Poincaré, H. (1886). Sur les courbes définies par les équations différentielles (IV). Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 2, 151-218.

[32] Ramazi, P., Jardón-Kojakhmetov, H., & Cao, M. (2017). Limit sets within curves where trajectories converge to. Applied Mathematics Letters, 68, 94-100.

[33] Rayleigh, J. W. S. B. (1896). The theory of sound (Vol. 2). Macmillan.

[34] Schwartz, A. J. (1963). A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds. American Journal of Mathematics, 453-458.

[35] Scott, S.K. (1994). Oscillations, Waves, and Chaos in Chemical Kinetics, Oxford Science Publications, Oxford, UK.

[36] Smale, S. (1959). Diffeomorphisms of the 2−sphere. Proceedings of the American Mathematical Society, 10(4), 621-626.

[37] Sotomayor, J. (1979). Licões de equacões diferenciais ordinárias. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.

[38] Teschl, G. (2012). Ordinary differential equations and dynamical systems (Vol. 140). American Mathematical Soc.

[39] Van der Pol, B. (1926) On Relaxation-Oscillations. The London, Edinburgh, and Dublin Phidophical Magazine and Journal of Science, 7, 978-992.

[40] Viana, M. & Espinar, J. M. (2021). Differential Equations: A Dynamical Systems Approach to Theory and Practice (Vol. 212). American Mathematical Society.

[41] Wall, C. (2016). Differential Topology (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Cambridge University Press.

[42] Whitehead, J. H. C. (1940). On C^1-complexes. Annals of Mathematics, 809-824.

[43] Willard, S. (2012). General topology. Courier Corporation.

[44] Ye, Y. Q., & Lo, C. Y. (1986). Theory of limit cycles (Vol. 66). American Mathematical Soc..