UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

EAP. DE MATEMÁTICA

Semigrupos lineales

MONOGRAFÍA

Para optar el Título de Licenciado en Matemática

AUTOR

Alexander Cielo Gris Palomino Arce

LIMA – PERÚ
2005

Indice General

Capítulo 1
Preliminares

1. Operadores Lineales Acotados 1

2. Función Exponencial 2

3. Derivación de funciones vectoriales 3

4. Integración de funciones vectoriales 4

5. Integración Impropia 7

6. Resolvente de un operador 8

7. Convergencia uniforme, fuerte y débil 9

Capítulo 2
Semigrupos de Operadores Lineales

1. Motivación 10

2. Semigrupos de clase C_0 16

3. Generador Infinitesimal de semigrupos de clase C_0 25

4. Generación de semigrupos 32

Referencias Bibliográficas 40

Introducción

El objetivo de esta monografía es proporcionar una introducción a la teoría de semigrupos de operadores acotados en espacios de Banach, donde el único requisito necesario por parte del lector es un conocimiento elemental del análisis funcional.

Se ha dividido el tema en dos partes. En la primera recordamos la definición y algunas propiedades de los operadores lineales en espacios de Banach, la función exponencial, derivación e integración de funciones vectoriales así como también el resolvente de un operador. En la segunda se trata sobre los semigrupos de contracciones, asi como los célebres teoremas de Hille Yosida y Lumer-Phillips. Es importante remarcar que se ha dado una serie de ejemplos detallados a fin de tener una mejor comprención de los semigrupos de clase C_0.

Cabe mencionar que, deliberadamente hemos dejado fuera toda discusión acerca de la aplicación de la teoría abstracta a problemas de valor inicial concretos relacionados con ecuaciones en derivadas parciales, y mas bien se ha puntualizado sobre los ejemplos que en la mayoría de textos al respecto son escasos.

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr.Luis Enrique Carrillo Díaz por su asesoramiento, asi mismo expreso mi gratitud a quienes hicieron posible la culminación de mis estudios y realización de este trabajo.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1. **Operadores lineales Acotados.**

Sean X e Y dos espacios de Banach ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{A : X \to Y \ \ / \ \ A \text{ es un operador lineal y acotado}\}$$

donde:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty \ \ (\text{norma en } \mathcal{L}(X,Y)).$$

$(\mathcal{L}(X,Y), \| \ \|)$ con esta norma es un espacio de Banach.

En el caso en que $Y = X$ escribiremos $\mathcal{L}(X)$ en vez de $\mathcal{L}(X,X)$.

Si A, $B \in \mathcal{L}(X)$, el producto de A con B es definido por: $AB = A \circ B$.

donde $A \circ B$ es la transformación compuesta de A y B.

Con esta estructura $\mathcal{L}(X)$ es un álgebra, donde

$$\text{si} \quad A, B \in \mathcal{L}(X) \ \text{ vemos que } AB \in \mathcal{L}(X) \quad \text{y} \quad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \tag{1.1}$$

i.e. $\mathcal{L}(X)$ es un álgebra de Banach.

Sea la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(X)$, se dice que es convergente si existe $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\|A_n - A\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \tag{1.2}$$

Se denota con $A_n \to A$; cuando $\underset{n\to\infty}{\textit{lím}}\, A_n = A$.

Además como $\mathcal{L}(X)$ es un espacio de Banach entonces $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente si y solo sí $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

2. **Función Exponencial.** Sabemos que si $x \in \mathbb{R}$, la función exponencial es definida por

$$e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1!} + \frac{t^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nx^n}{n!} + \cdots$$

De este modo si consideramos ahora $A \in \mathcal{L}(X)$, la serie

$$1 + \frac{|t|\,\|A\|}{1!} + \frac{|t|^2\,\|A\|^2}{2!} + \cdots + \frac{|t|^n\,\|A\|^n}{n!} + \cdots$$

es convergente, teniendo en cuenta (1.1) la serie:

$$I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!} + \cdots$$

donde I es el operador identidad de X, es absolutamente convergente, por tanto es convergente $\forall t \in \mathbb{R}$.

Por tanto, queda definida una función llamada también "función exponencial" designada por e^{tA}. Si consideramos $(tA)^0 = I$ se tiene que:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!}$$

Observemos que $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ y $\left\|e^{tA}\right\| \leq e^{|t|\|A\|}$

3. Derivación de Funciones Vectoriales

- Sea $f : (a, b) \to X$ una función definida en el intervalo (a, b) y con valores en el espacio de Banach X. Se dice que f es diferenciable en el punto $t_0 \in (a, b)$ si existe en X el límite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

  el cual es denotado por $f'(t_0)$ y es llamado derivada de f en el punto t_0.

- Se dice que f es diferenciable en $\Omega \subset (a, b)$ si f es diferenciable en todo punto de Ω.

Son válidas para la diferenciación de las funciones vectoriales las reglas siguientes:

i) Si f es diferenciable en el punto t_0 entonces

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0) f'(t_0) + \alpha(t, t_0)$$

donde

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\alpha(t, t_0)}{t - t_0} = 0$$

En particular, si f es diferenciable en el punto t_0 entonces f es contínua en ese punto.

$ii)$ Si $f(t) = x_0, \ \forall t \in (a,b)$; donde $x_0 \in X$, entonces f es diferenciable en todo punto de (a,b) y además

$$f'(t) = 0; \ \ \forall t \in (a,b)$$

Recíprocamente:

Si $f'(t) = 0$ en todo punto de (a,b), entonces f es una constante en (a,b).

$iii)$ Si f y g diferenciables en el punto t_0 entonces $f+g$ es diferenciable en t_0 y además $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$

$iv)$ Si γ es una función numérica definida en (a,b) y diferenciable en el punto t_0, entonces γf es diferenciable en t_0 y además

$$(\gamma f)'(t_0) = \gamma'(t_0) f(t_0) + \gamma(t_0) f'(t_0)$$

Observación: Las reglas $i)$, $ii)$, $iii)$, $iv)$ son válidas para el álgebra de Banach $\mathcal{L}(X)$.

Teorema 1.1 *Si f y g son dos funciones definidas en (a,b) con valores en $\mathcal{L}(X)$ y diferenciable en un punto $t_0 \in (a,b)$ entonces fg es diferenciable en el punto t_0 y además*

$$(fg)'(t_0) = f'(t_0) g(t_0) + f(t_0) g'(t_0)$$

4.- **Integración de Funciones Vectoriales**

Sea $f : [a,b] \to X$, una función contínua, con X de Banach.

Dada una descomposición π de $[a, b]$.

es decir existen $n+1$ números reales $t_0, t_1, \ldots, t_n$ satisfaciendo la condición

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

y n números reales ξ_i , $i = 1, \ldots, n$; $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, queda definida una suma de Riemann de f :

$$\sigma_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

Evidentemente $\sigma_\pi(f) \in X$

Sea $|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}$ entonces $\sigma_\pi(f)$ tiene un límite $x \in X$ cuando $|\pi| \to 0$.

De modo más preciso: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|\sigma_\pi(f) - x\| < \varepsilon \ ; \quad \forall \pi \text{ tal que } |\pi| < \delta$$

- Se dice que x es la integral de f en $[a, b]$ y se escribe:

$$x = \lim_{|\pi| \to 0} \sigma_\pi(f) = \int_a^b f(t)\, dt$$

Son válidas para la integral de las funciones vectoriales las reglas siguientes:

$i)$ Si k es una constante

$$\int_a^b k f(t)\, dt = k \int_a^b f(t)\, dt$$

$ii)$ $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$

iii) Si $a \leq c \leq b$ entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

iv) $\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$

v) $\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \text{máx}_{a \leq t \leq b} \|f(t)\|\,(b-a)$

Teorema 1.2 ***Teorema de la media*** *Si f es una función en las condicones anteriores entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\,\bar{x}$$

donde: $\bar{x} \in \overline{conv\ f(a,b)}$ (cerradura del conjunto de las combinaciones convexas de los elementos del conjunto $f(a,b)$)

Corolario 1.1 *Para todo $t \in [a,b]$ se tiene*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau)\,d\tau = f(t)$$

Observación: (Teorema Fundamental del cálculo para Funciones Vectoriales)

Si F es diferenciable en $[a,b]$ y $F'(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^t f(\tau)\,d\tau = F(t) - F(a)$$

Recuerde que un operador A, con dominio $D(A) \subset X$ y valores en Y (X e Y espacios de Banach) es llamado cerrado si su gráfico

$$\{(x, Ax)\ /\ x \in D(A)\}$$

es un subespacio cerrado de $X \times Y$.

Equivalentemente podemos decir

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ entonces $x \in D(A)$ y $Ax = y$

Todo operador lineal acotado $A : D(A) = X \to Y$ es cerrado. Reciprocamente. Si A es cerrado y $D(A) = X$ entonces A es contínuo

Teorema 1.3 *Sea $A : D(A) \to X$; $D(A) \subset X$ un operador lineal y cerrado, $f : [a,b] \to D(A)$ una función contínua y tal que Af es contínua en $[a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt \in D(A) \ \text{ y además: } \ A\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b Af(t)\,dt$$

5.- **Integrales Impropias**

Si $f : [a,\infty) \to X$, se define

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{\xi\to\infty} \int_a^{\xi} f(t)\,dt$$

cuando el límite existe. En ese caso se dice que la integral $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ es convergente.

Se dice que es absolutamente convergente si existe el límite

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_a^{\xi} \|f(t)\|\,dt$$

Toda integral absolutamente convergente es convergente.

Teorema 1.4 ***(Teorema de Weierstrass)*** *Sea* $f:[a,\infty)\times[\alpha_0,\alpha_1]\to X$ *contínua en* $t\in[a,\infty)$ *para cada* $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$ *y* $M:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ *contínua y positiva para* $t\in[a,\infty)$.

Si $\|f(t,x)\|\leq M(t)$; $\quad\forall(t,\alpha)\in[a,\infty)\times[\alpha_0,\alpha_1]$ *y* $\displaystyle\int_a^\infty M(t)\,dt$ *converge. Entonces* $\displaystyle\int_a^\infty f(t,\alpha)\,dt$ *converge absolutamente para cada* $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$ *y la converegencia es uniforme en dicho intervalo.*

Teorema 1.5 *Si* f *y* $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ *son contínuas para* $(t,\alpha)\in[a,\infty)\times[\alpha_0,\alpha_1]$; $\displaystyle\int_a^\infty f(t,\alpha)\,dt$ *es convergente para cada* $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$ *y* $\int_a^\infty\dfrac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}dt$ *es uniformemente convergente en* $[\alpha_0,\alpha_1]$. *Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^\infty f(t,\alpha)\,dt=\int_a^\infty\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}dt$$

6.- Resolvente de un Operador

Sea A un operador lineal en X. El conjunto de los $\lambda\in\mathbb{C}$, para los cuales el operador lineal $\lambda I-A$ es inversible y su inverso es acotado y tiene dominio denso en X, es llamado conjunto resolvente de A y se representa por $\rho(A)$.

El conjunto $\sigma(A)=\mathbb{C}\backslash\rho(A)$ es llamado espectro de A.

Representamos por $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$, es llamado resolvente de A.

Observación: Cuando el operador lineal A es cerrado, $R(\lambda,A)$ es también cerrado; luego $\forall\ \lambda\in\rho(A)$, $R(\lambda,A)$ es un operador lineal acotado y cerrado en un conjunto denso en X, entonces su dominio es X.

Teorema 1.6 *Sea A un operador en X lineal y cerrado. Si $\lambda,\mu \in \rho(A)$ entonces*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

7.- Convergencia Uniforme, Convergencia Fuerte y Convergencia Débil

Sea una sucesión de funciones $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X)$ converge uniformemente para $A \in \mathcal{L}(X)$ si $\|A_n - A\| \to 0$; cuando $n \to \infty$.

- La convergencia es fuerte si: $\|A_n x - Ax\| \to 0, \ \forall x \in X$ cuando $n \to \infty$
- La convergencia es debíl si:$\langle (A_n - A) x, x^* \rangle \to 0 : \forall x \in X \wedge \forall x^* \in X^*$ el dual de X cuando $n \to \infty$.

Observación.

$i)$ La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte

$ii)$ La convergencia fuerte implica la convergencia débil.

CAPÍTULO 2

SEMIGRUPO DE OPERADORES LINEALES

1. Motivación

En los preliminares fue visto que la función exponencial e^{tA}, donde $A \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, es definida por

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \tag{2.1}$$

Cuando $A \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$ la exponencial es una función $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:

(a) $E(0) = 1$

(b) $E(t+s) = E(t)\, E(s);\ \forall t,\ s \geq 0$

(c) $\underset{t \to 0^+}{Lím} E(t) = 1$

Luego demostraremos que es la única función definida en $\mathbb{R}^+$ con valores en $\mathbb{R}$, que tiene esas propiedades.

Sin dificultad alguna, como se vio en preliminares, extendemos la exponencial al caso en que $A \in \mathcal{L}(X)$, donde la unidad en este caso es el operador identidad, $I : X \to X$.

Teorema 2.1 *Una función* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ *satisface las condiciones:*

(a) $E(0) = I$

(b) $E(t+s) = E(t)\, E(s)$

(c') $\|E(t) - I\| \to 0$; *cuando* $t \to 0^+$

Si y solo si, $E(t) = e^{tA}$ *donde* $A \in \mathcal{L}(X) \wedge e^{tA}$ *es definida en* (2,1)

Observe que (c') es una convergencia uniforme, pero esto implica la convergencia fuerte.

i.e.(c) $\|(E(t) - I)\, x\| \to 0$; cuando $t \to 0^+$

Demostración.

Sea $A \in \mathcal{L}(X)$ y pongamos $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ como para cada $t \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ converge en norma entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc} E: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathcal{L}(X) \\ & t & \mapsto & E(t) = e^{tA} \end{array}$$

está bien definida y además:

(a) $E(0) = e^{0t} = I$

(b) Tener en cuenta el siguiente resultado:

$$\frac{(a+b)^p}{p!} = \sum_{n+m=p} \frac{a^n}{n!} \frac{b^n}{m!}$$

entonces

$$\begin{aligned} E\left(t+s\right) &= e^{(t+s)A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\left(t+s\right)A\right)^{n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(t+s\right)^{n}A^{n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}A^{n}}{n!}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{n}A^{n}}{n!} = e^{tA}e^{sA} \end{aligned}$$

por tanto

$$E\left(t+s\right) = E\left(t\right)E\left(s\right)$$

(c') Tenemos

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(tA\right)^{n}}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(tA\right)^{n}}{n!}$$
$$\Rightarrow e^{tA} - I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(tA\right)^{n}}{n!}$$

entonces tomando norma:

$$\left\|e^{tA} - I\right\| \leq t\left\|A\right\|e^{t\|A\|}$$

tomando límite cuando $t \to 0^{+}$:

$$\left\|e^{tA} - I\right\| \to 0$$

Reciprocamente:

Vamos a suponer que $E : \mathbb{R}^{+} \to \mathcal{L}\left(X\right)$ satisface las condiciones (a), (b) y (c'), demostraremos en primer lugar que $\left\|E\left(t\right)\right\|$ es una función acotada en todo intervalo acotado.

Dado $\varepsilon > 0$ existe por (c') un $\delta > 0$ tal que

$$\left\|E\left(t\right) - I\right\| \leq \varepsilon \text{ ; } \forall t \text{ tal que } 0 \leq t \leq \delta$$

y como

$$|\|E(t)\| - \|I\|| \leq \|E(t) - I\| \leq \varepsilon$$

$$\|E(t)\| \leq 1 + \varepsilon = M \quad ; \quad \forall t \;\; \text{tal que}: \;\; 0 \leq t \leq \delta$$

Además para cada real $t \geq 0$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$t = n\delta + r \quad ; \quad \text{donde } 0 \leq r < \delta$$

por (b) tenemos

$$\begin{aligned} \|E(t)\| &= \|E(n\delta + r)\| = \|E(\delta)^n E(r)\| \leq \|E(\delta)\|^n \|E(r)\| \\ &\leq M^{n+1} = M.M^n \leq M.M^{\frac{t}{\delta}} = Me^{wt} \end{aligned}$$

donde: $w = \delta^{-1} \log M \geq 0$

por tanto si $t \in [0, T]$, $\|E(t)\| \leq Me^{wt}$

Ahora probamos la continuidad de E

Si $h > 0$:

$$\begin{aligned} \|E(t+h) - E(t)\| &= \|E(t)[E(h) - I]\| \\ &\leq \|E(t)\| \|E(h) - I\| \to 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$.

Si $0 < h \leq t$:

$$\begin{aligned} \|E(t-h) - E(t)\| &= \|E(t-h)[I - E(h)]\| \\ &\leq \|E(t-h)\| \|E(h) - I\| \to 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$ además $E(t-h)$ es acotado en $[0,t]$.

Como E es contínua entonces es integrable en el sentido de Riemann y

$$\underset{h\to 0}{Lím}\frac{1}{h}\int_0^h E(t)\,dt = E(0) = I$$

entonces podemos determinar un $\rho > 0$ tal que

$$\left\|\frac{1}{\rho}\int_0^\rho E(t)\,dt - I\right\| < 1$$

lo que implica que $\frac{1}{\rho}\int_0^\rho E(t)\,dt$ es inversible por tanto $\int_0^\rho E(t)\,dt$ es inversible en $\mathcal{L}(X)$

Además

$$\begin{aligned}\frac{E(h)-I}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt &= \frac{1}{h}\int_0^\rho E(t+h)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt\\ &= \frac{1}{h}\int_0^{\rho+h} E(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \to 0$ la parte de la derecha, resulta convergente a $E(\rho) - I$ entonces

$$\underset{h\to 0^+}{Lím}\frac{E(h)-I}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt = E(\rho) - I$$

Denotamos por

$$A = \underset{h\to 0^+}{Lím}\frac{E(h)-I}{h}$$

Se tiene que

$$A\int_0^\rho E(t)\,dt - E(\rho) = I$$

y de alli tenemos;

$$A = (E(\rho) - I)\left(\int_0^{\rho} E(h)\,dt\right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

por tanto $E(t)$ es derivable a la derecha de 0.

Es decir,

$$\frac{d^+E(0)}{dt} = A$$

Además por (b), tenemos $\forall h > 0$:

$$\frac{E(t+h) - E(t)}{h} = E(t)\,.\frac{E(h) - I}{h}$$

la parte de la derecha converge para $E(t)\,A$ cuando $h \to 0^+$

Entonces E es derivable a la derecha en todo $t \geq 0$

es decir $$\frac{d^+E(t)}{dt} = E(t)\,A$$

Análogamente: $$\frac{d^+E(t)}{dt} = AE(t)$$

También se cumple que

$$\frac{d^-E(t)}{dt} = \frac{d^+E(t)}{dt} \quad ; \; \forall t > 0$$

Sea ahora la función

$$f(t) = E(t)\,e^{(x-t)A} \;;$$

derivando tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{dE(t)}{dt}.e^{(x-t)A} - E(t)\,Ae^{(x-t)A} \\ &= E(t)\,Ae^{(x-t)A} - E(t)\,Ae^{(x-t)A} = 0 \end{aligned}$$

entonces f es constante.

Además: $f(0) = e^{xA}$,

entonces $E(t)\, e^{(x-t)A} = e^{xA}$

y de allí: $E(t) = e^{tA}$

2. **Semigrupos de Clase** C_0

Aquí veremos las generalización de la función exponencial

Definición 2.1 *Se dice que una apliación* $Z : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ *es un semigrupo de operadores lineales acotados de* X *si:*

(i) $Z(0) = I$; donde I es el operador identidad de X

(ii) $Z(t+s) = Z(t)\, Z(s)$; $\forall t, s \in \mathbb{R}^{+}$

Se dice que el semigrupo Z es de clase C_0 si

(iii) $\underset{t \rightarrow 0^{+}}{Lím} \|(Z(t) - I)\, x\| = 0;\ \ \forall x \in X$

Para los semigrupos de clases C_0 son válidas las propiedades fundamentales de funciones exponenciales, que a continuación describiremos:

Proposición 2.1 *Si* Z *es un semigrupo de clase* C_0*, entonces* $\|Z(t)\|$ *es una función acotada en todo intervalo acotado* $[0, T]$.

Corolario 2.1 *Todo semigrupo de clase C_0 es fuertemente continuo en $\mathbb{R}^+$.*

Es decir, si $t \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\underset{s\to t}{Lím} Z(s)x = Z(t)x \ ; \ \ \forall x \in X$$

Observación Los semigrupo de clase C_0 son también conocidos por semigrupos fuertemente continuos, esto por el corolario (2.1)

Observación Si A es un operador lineal acotado de X , se tiene $\forall t \geq 0$

$$\left\| e^{tA} \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}$$

Si $\|A\| \leq w$ entonces : $\left\| e^{tA} \right\| \leq e^{wt}$; $\ \forall t \geq 0$.

Veremos una propiedad parecida para los semigrupos.

Definición 2.2 *Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ se dice que es subaditiva si*

$$p(t+s) \leq p(t) + p(s)$$

Lema 2.1 *Sea P una función subaditiva en $\mathbb{R}^+$ y acotada superiormente en todo intervalo acotado. Entonces*

$$\underset{t\to\infty}{Lím} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}$$

Proposición 2.2 *Sea Z un semigrupo de clase C_0. Entonces*

$$\underset{t\to\infty}{Lím} \frac{\log \|Z(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \|Z(t)\|}{t} = w_0$$

y para cada $w > w_0$, existe una constante $M \geq 1$ tal que

$$\|Z(t)\| \leq M e^{wt} \ \ ; \ \ \forall t \geq 0$$

Observación. Cuando $w_0 < 0$ existe $M \geq 1$ tal que $\|Z(t)\| \leq M$; $\forall t \geq 0$ en ese caso se dice que Z es un semigrupo uniformemente acotado de clase C_0. Si además de esto $M = 1$ es dicho semigrupo de contracciones de clase C_0.

Ejemplos:

1. Las funciones exponenciales son semigrupos de clase C_0, en el teorema (1.1) vimos que cumple las condiciones y la observación de que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte.

2. Sea $X = C(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de las funciones uniformente contínuas y acotadas en $\mathbb{R}$, con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x)\|$$

Para cada $t \geq 0$ y $f \in C(\mathbb{R})$ definimos

$$(Z(t) f)(x) := f(x+t) = f_t(x)$$

Entonces Z es un semigrupo de contracciones de clase C_0.

En efecto:

Para cada $t \geq 0$ y cada $f \in C(\mathbb{R})$ es inmediato que $f_t \in C(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rccc} Z(t): & C(\mathbb{R}) & \rightarrow & C(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & Z(t) f \end{array}$$

es una aplicación lineal y es acotada pues

$$\begin{aligned} (Z(t)(f+g))(x) &= (f+g)(x+t) = f(x+t) + g(x+t) \\ &= (Z(t) f)(x) + (Z(t) g)(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z(t)(f+g) = Z(t)f + Z(t)g; \qquad f,g \in C(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}(Z(t)(\alpha f))(x) &= (\alpha f)(x+t) = \alpha f(x+t)\\ &= \alpha (Z(t)f)(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z(t)(\alpha f) = \alpha Z(t) f \ ; \qquad f \in C(\mathbb{R})\,; \, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\|Z(t)f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+t)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x)\| = \|f\| < \infty$$

$$\Rightarrow \|Z(t)\| = 1$$

Entonces; $\begin{array}{rccc} Z: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathcal{L}(C(\mathbb{R})) \\ & t & \mapsto & Z(t) \end{array}$ está bien definida.

Además:

a) $(Z(0)f)(x) = f(x+0) = f(x) = (I.f)(x)$

$\Rightarrow Z(0) = I$

b) $(Z(s+t)f)(x) = f(x+s+t) = (Z(t)f)(x+s) = (Z(s)Z(t)f)(x)\,.$

c) $\|Z(t)f - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+t) - f(x)\| \to 0$; cuando $t \to 0^+$ pues f es uniformemente contínua.

Luego podemos afirmar que Z es un semigrupo de contracciones de clase C_0. Z es conocido como el semigrupo de las traslaciones a la izquierda en $C(\mathbb{R})\,.$

3. Sea $X = C[0,\infty]$, el espacio de las funciones f que son contínuas sobre $[0,\infty\rangle$ (contínuas sobre el lado derecho de 0) y que $f(x)$ tiende hacia un

límite finito cuando $x \to \infty$ (el límite varia con f) Consideremos como el ejemplo anterior la norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|, x \geq 0\}$$

Para este caso definiendo como el ejemplo anterior

$$(Z(t) f)(x) = f(x+t) \quad ; \; x \geq 0, \; t \geq 0$$

se ve como el ejemplo anterior que es un semigrupo de clase C_0 de contracciones sobre X, llamado también el semigrupo traslación sobre X.

4. Sea K_t; $t > 0$ la función definida en $\mathbb{R}^n$ por

$$\begin{array}{rccl} K_t: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & K_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} . e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{array}$$

donde: $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ si ; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $Z(t)$ definida en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por

$$\begin{array}{rccl} Z(t): & L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & Z(t) f := \left\{ \begin{array}{cl} f & ; t = 0 \\ K_t * f & ; t > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Por tanto: $Z(0) = I$

$$\begin{aligned} (Z(t) f)(x) &= (K_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} . e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} . f(y)\, dy \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} . f(y)\, dy \; ; \qquad \text{si } t > 0 \end{aligned}$$

Observese que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $K_t \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por tanto $K_t * f$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ para cada $t > 0$, esto nos garantiza la buena definición de $Z(t) f$ para cada $t \geq 0$.

Vamos a mostrar que Z es un semigrupo de contracciones de clase C_0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos la transformada de Fourier, esto es

$$\begin{array}{rccc} F: & L^2(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & L^2(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

dado por

$$F(f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi$$

donde $(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$.

Usaremos algunos resultados de la transformada de Fourier.

- F es una isometría

  es decir $\qquad \|F(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

- $F(K_t * f) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F(K_t) . F(f)$

- $F(K_t * f)(x) = e^{-t|x|^2} F(f)(x)$

- $F(K_t)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|x|^2}$

- $-|x|^2 F(f) = F(\triangle f)$, donde $\triangle$ es el operador de Laplace en el sentido distribucional.

Por tanto ahora tenemos lo siguiente:

(i) $Z(0) = I$ por definiición

(ii) $Z(t+s) = Z(t)\,Z(s)$; $\forall t, s \in \mathbb{R}^{+}$. En efecto:

Tenemos que

$$\begin{aligned}
F(K_t * K_s)(x) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, F(K_t)\, F(K_s)(x) \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-t|x|^2}\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-s|x|^2} \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-(t+s)|x|^2} \\
&= F(K_{t+s})(x)
\end{aligned}$$

entonces se sigue que: $K_t * K_s = K_{t+s}$ y de allí

$$\begin{aligned}
Z(t+s)\,f &= K_{t+s} * f = (K_t * K_s) * f = K_t * (K_s * f) \\
&= Z(t)\,Z(s)\,f \quad ; \ \forall t, s \in \mathbb{R}^{+}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow Z(t+s) = Z(t)\,Z(s)$; $\forall\ t, s \in \mathbb{R}^{+}$

(iii) $\underset{t\to 0^{+}}{Lím} \|(Z(t) - I)\,f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$; $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

En efecto:

$$\begin{aligned}
F(Z(t)\,f - f) &= F(K_t * f - f) = F(K_t * f) - F(f) \\
&= e^{-t|.|^2} F(f) - F(f) \\
&= \left(e^{-t|.|^2} - 1\right) F(f)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|F(Z(t)\,f - f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(e^{-t|.|^2} - 1\right) \|F(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ tenemos

$$\underset{t \to 0^+}{Lím} \|F(Z(t) f - f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

y como F es una isometría entonces

$$\underset{t \to 0^+}{Lím} \|(Z(t) - I) f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \;\; ; \;\; \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

por tanto Z es un semigrupo de clase C_0

Además tenemos que

$$\begin{aligned} \|Z(t) f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|K_t * f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|F(K_t * f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |F(K_t * f)|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |F(f)|^2 \, dx \\ &= \|F(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Observe que: $0 < e^{-t|x|^2} < 1$ entonces

$$\|Z(t) f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \|Z(t)\| \leq 1$$

por tanto $Z(t)$ es una contracción.

5. En el caso unidimensional tenemos

Sea $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ definimos para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} Z(t) : \quad L^p(\mathbb{R}) &\to L^p(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto Z(t) f = \begin{cases} f & ; t = 0 \\ K_t * f & ; t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde K_t es definido por

$$K(x,t) = K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \ , \ t > 0$$

la función K es la solución fundamental de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \ , \ t > 0$$

evidentemente Z es un semigrupo de clase C_0 sobre $L^p(\mathbb{R})$ llamado semigrupo Gauss-Weierstrass por tanto no sorprende que el semigrupo Gauss - Weierstrass juega un rol importante en la solución del problema de valor inicial para la ecuación del calor.

6. Analogo el semigrupo de Gauss - Weierstrass es el semigrupo de Poisson. Sea $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ y definimos para $t \geq 0$

$$\begin{array}{rccl} Z(t): & L^p(\mathbb{R}) & \rightarrow & L^p(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & Z(t)f = \begin{cases} f & ; t = 0 \\ K_t * f & ; t > 0 \end{cases} \end{array}$$

donde K_t es definido por

$$K(x,t) = K_t(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{t^2 + x^2}\right) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

la función K es la solución fundamental de la ecuación de la onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

3.- **Generador Infinitesimal de semigrupos de clase C_0**

Definición 2.3 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 en X definimos el operador:*

$$A : D(A) \rightarrow X$$

donde: $D(A) = \left\{ x \in X \quad / \quad \text{existe } \underset{t\to 0^+}{Lím} \left(\frac{Z(t)-I}{t} \right)(x) \right\}$ *y*

$$Ax = \underset{t\to 0^+}{Lím} \left(\frac{Z(t)-I}{t} \right)(x) \quad , \quad \forall x \in X$$

es dicho "generador infinitesimal" del semigrupo Z.

Vamos a designar por A_t al operador lineal acotado

$$A_t = \frac{Z(t)-I}{t} \quad ; \quad t > 0$$

Proposición 2.3 *$D(A)$ es un subespacio vectorial de X y A un operador lineal.*

Proposición 2.4 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal de Z.*

(*i*) *Si $x \in D(A)$ entonces:*

$$Z(t)x \in D(A) \;\; , \forall t \geq 0 \;\; y \;\; \frac{d}{dt}Z(t)x = AZ(t)x = Z(t)Ax$$

(*ii*) *Si $x \in D(A)$ entonces*

$$Z(t)x - Z(s)x = \int_s^t AZ(u)x du = \int_s^t Z(u)Axdu$$

(iii) Si $x \in X$ entonces:

$$\int_o^t Z(u)\,xdu \in D(A) \qquad y \qquad Z(t)\,x - x = A\int_0^t Z(u)\,xdu$$

Proposición 2.5 *El generador infinetisimal de un semigrupo de clase C_0 es un operador lineal cerrado y su dominio es denso en X.*

Definición 2.4 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Pongamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ y suponiendo que A^{n-1} este definido, entonces definimos A^n :*

$$\begin{aligned} D(A^n) &= \left\{x \in X \ / \ x \in D\left(A^{n-1}\right) \quad y \quad A^{n-1}x \in D(A)\right\} \\ A^n x &= A\left(A^{n-1}x\right) \quad ; \forall x \in D(A^n) \end{aligned}$$

Proposición 2.6 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Tenemos:*

(i) $D(A^n)$ es un subespacio de X y A^n es un operador lineal de X

(ii) Si $x \in D(A^n)$ entonces:

$$Z(t)\,x \in D(A^n)\,,\, \forall t \geq 0 \quad y \quad \frac{d^n}{dt^n}Z(t)\,x = Z(t)\,A^n x = A^n Z(t)\,x$$

(iii) Si $x \in D(A^n)$ entonces

$$Z(t)\,x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k Z(a)\,x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-u)^{n-1} A^n Z(u)\,xdu$$

(iv)

$$(Z(t)-I)^n x = \int_0^t \dots \int_0^t Z(u_1+\cdots+u_n) A^n x du_1 \cdots du_n; \qquad \forall x \in D(A^n)$$

(v) $\bigcap\limits_n D(A^n)$ *es denso en* X

Ejemplos:

1. Sea $Z(t) = e^{tA}$ donde $A \in \mathcal{L}(x)$ del ejemplo anterior en ese caso vimos que es un semigrupo de clase C_0.

   El generador infinitesimal de e^{tA} es A. En efecto:

   Para cualquier $f \in X$, tenemos:

$$\begin{aligned}
A_t f &= \left(\frac{Z(t)-I}{t}\right) f = \left(\frac{e^{tA}-I}{t}\right) f = \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n - I}{n!}}{t}\right) f \\
&= \left(\frac{I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I}{t}\right) f = \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}{t}\right) f \\
&= \left(\frac{tA + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}{t}\right) f = \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}{t}\right) f \\
&= \left(\frac{tA + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}{t}\right) f = Af + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(tA)^n}{t.n!} f\right) \\
&= Af + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{t^{n-1}A^n}{n!} f\right) = Af + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^n A^{n+1}}{(n+1)!} f\right) \\
&= Af + t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^{n-1} A^{n+1}}{(n+1)!} f\right)
\end{aligned}$$

   tomando límite cuando $t \to 0^+$ pues es contínua en t:

$$\underset{t \to 0^+}{Lím} A_t f = Af + 0 = Af$$

   i.e. A es el generador infinitesimal de e^{tA} con $D(A) = X$

2. Consideremos el semigrupo traslación a la izquierda en $C(\mathbb{R})$ del ejemplo anterior donde para cada $t \geq 0$ y $f \in C(\mathbb{R})$, $(Z(t)f)(x) = f(x+t)$

Veamos quien es el generador infinitesimal de $Z(t)$:

Si $f \in D(A)$, entonces existe

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} A_t f(x) = \underset{t\to 0^+}{Lím} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

es uniformemente en x y ese límite pertenece a $C(\mathbb{R})$, luego f es derivable a la derecha y además

$$\frac{d^+}{dx} f(x) \in C(\mathbb{R})$$

Por el lema de Dini, f es derivable y $f' \in C(\mathbb{R})$.

Recíprocamente, si $f \in C(\mathbb{R})$ y $f' \in C(\mathbb{R})$ entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f(x+t) - f(t)}{t} - f'(x) &= \frac{1}{t}\left[f(x+t) - f(x) - f'(x)t\right] \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \left[f'(x+\tau) - f'(x)\right] d\tau \end{aligned}$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ y el límite de la derecha de la igualdad es cero, entonces

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x)$$

entonces

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} A_t f(x) = f'(x)$$

Luego $f \in D(A)$ y así tenemos

$$D(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \ / \ existe\ f' \in C(\mathbb{R})\} = C'(\mathbb{R})$$

y además $Af = f'$

en este caso $D(A) \neq X$ pues $X = C(\mathbb{R})$.

3. Consideremos el semigrupo de contacciones de clase C_0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$ del ejemplo anterior definido por:

$$\begin{array}{rcll} Z(t): & L^2(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & Z(t)f = \begin{cases} f & ; t = 0 \\ K_t * f & ; t > 0 \end{cases} \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcll} K_t: & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & K_t(x) = (4\pi t)^{\frac{-n}{2}}.e^{\dfrac{-|x|^2}{4t}} \end{array}$$

Ahora vamos a determinar el generador infinitesimal de Z.

Usaremos la transformada de Fourier con sus propiedades:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{Z(t) - I}{t} \right) f - g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\| F\left[\left(\frac{Z(t) - I}{t} \right) f - g \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| F\left[\left(\frac{Z(t) - I}{t} \right) f \right] - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| F\left[\frac{Z(t)f - f}{t} \right] - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| F\left[\frac{K_t * f - f}{t} \right] - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \frac{F(K_t * f) - F(f)}{t} - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \frac{e^{-t|.|^2} F(f) - F(f)}{t} - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \left(\frac{e^{-t|.|^2} - 1}{t} \right) F(f) - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ y aplicando L'Hospital tenemos

$Af = g$ si y solo si $-|x|^2 F(f) = F(g)$

Además por una propiedad

$-|x|^2 F(f) = F(\Delta f)$; donde Δ es el operador de Laplace en el sentido distribucional.

entonces

$$F(\Delta f) = F(g) \text{ por tanto } \Delta f = g$$

entonces concluímos que

$$D(A) = \left\{ f \ / \ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

y

$$Af = \Delta f \quad ; \quad \forall f \in D(A)$$

4. Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal.

   Pongamos $\tilde{Z}(t) = e^{-\lambda t} Z(t)$

   Veamos que $\tilde{Z}$ es un semigrupo de clase C_0 y que su generador infinitesimal es: $A - \lambda I$. En efecto

   (i) $\tilde{Z}(0) = e^{-\lambda 0}.Z(0) = I$

   (ii) $\tilde{Z}(s+t) = e^{-\lambda(s+t)} Z(s+t) = e^{-\lambda s - \lambda t} Z(s) Z(t)$

   $$= e^{-\lambda st} Z(s) e^{-\lambda t} Z(t) = \tilde{Z}(s) \tilde{Z}(t)$$

(iii) $\tilde{Z}(t) - I = e^{-\lambda t} Z(t) - I = e^{-\lambda t}(Z(t) - I) + \left(e^{-\lambda t} - 1\right) I$ entonces

$$\left\|\left(\tilde{Z}(t) - I\right) x\right\| \leq \left\|e^{-\lambda t}(Z(t) - I) x\right\| + \left\|\left(e^{-\lambda t} - 1\right) I\right\|$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ tenemos

$$\underset{t \to 0^+}{Lím} \left\|\left(\tilde{Z}(t) - I\right) x\right\| = 0 \quad ; \quad \forall x \in X$$

por tanto $\tilde{Z}$ es un semigrupo de clase C_0.

Además

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tilde{Z}(t) - I}{t}\right) x &= \left(\frac{e^{-\lambda t} Z(t) - I}{t}\right) x \\
&= \left(\frac{e^{-\lambda t} Z(t) - e^{-\lambda t} I + e^{-\lambda t} I - I}{t}\right) x \\
&= \left(\frac{e^{-\lambda t}(Z(t) - I)}{t}\right) x + \left(\frac{e^{-\lambda t} I - I}{t}\right) x
\end{aligned}$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ y aplicando L'hospital

$$\begin{aligned}
\underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{\tilde{Z}(t) - I}{t}\right) x &= \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{e^{-\lambda t}(Z(t) - I)}{t}\right) x + \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{e^{-\lambda t} I - I}{t}\right) x \\
&= \underset{t \to 0^+}{Lím} e^{-\lambda t} . \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{Z(t) - I}{t}\right) x + \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(-\lambda e^{-\lambda t} I\right) x \\
&= 1 . \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{Z(t) - I}{t}\right) - \lambda \underset{t \to 0^+}{Lím} e^{-\lambda t} I x \\
&= A - \lambda I
\end{aligned}$$

esto muestra que el generador infinitesimal $\tilde{A}$ de $\tilde{Z}$ está dado por

$$\tilde{A} = A - \lambda I$$

4. **Generación de Semigrupos**

Ya vimos que $\rho(A)$ es el conjunto resolvente del operador lineal A de X.

ie.

$$\rho(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} \ / \text{ existe } (\lambda I - A)^{-1} \text{ y es continuo además} \\ \\ D(\lambda I - A)^{-1} \text{ es denso en } X \end{array} \right\}$$

representamos $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ y es dicho el resolvente de A.

En el caso particular en que $X = \mathbb{C}$, todo operador A de X es de la forma $Ax = \alpha x$; donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

En ese caso tenemos que

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - \alpha I)^{-1} = (\lambda - \alpha)^{-1}$$

Además de esto α es el generador infinitesimal del semigrupo $e^{t\alpha}$ y como podemos ver:

Si $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\alpha$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}.e^{\alpha t}dt &= \underset{h\to\infty}{Lím} \int_0^h e^{-\lambda t}.e^{\alpha t}dt = \underset{h\to\infty}{Lím} \int_0^h e^{(\alpha-\lambda)t}dt \\
&= \underset{h\to\infty}{Lím} \left[\frac{1}{\alpha - \lambda} e^{(\alpha-\lambda)t} \right]_0^h = \frac{1}{\alpha-\lambda} \underset{h\to\infty}{Lím} \left[e^{(\alpha-\lambda)h} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\alpha-\lambda} \underset{h\to\infty}{Lím} \left[e^{\operatorname{Re}(\alpha-\lambda)h + i\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\alpha-\lambda} \underset{h\to\infty}{Lím} \left[e^{\operatorname{Re}(\alpha-\lambda)h}.e^{i\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h} - 1 \right]
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$e^{i\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h} = Cos\left(\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h\right) + iSen\left(\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h\right)$$

es acotado entonces

$$\underset{h\to\infty}{Lím}\left[e^{\operatorname{Re}(\alpha-\lambda)h}.e^{i\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h}\right]=0\ ,\ \text{pues}\ \ (\operatorname{Re}\lambda>\operatorname{Re}\alpha)$$

regresando al caso anterior

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}.e^{\alpha t}dt=\frac{1}{\lambda-\alpha}=R(\lambda,\alpha)$$

Por tanto, el resolvente del generador infinitesimal es la transformada de Laplace del semigrupo.

Estas consideraciones podemos extender fácilmente para los operadores $A\in\mathcal{L}(X)$, cualquiera sea el espacio de Banach X.

Teorema 2.2 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A.*

Si $\operatorname{Re}\lambda>\omega_0$, *donde* $\omega_0=\underset{t\to\infty}{Lím}\dfrac{\log\|t\|}{t}$ *entonces*

$$\lambda\in\rho(A)\ \ y\ R(\lambda,A)\,x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}Z(t)\,dt\ \ ;\ \ \forall x\in X$$

Corolario 2.2 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A.*

Si $\operatorname{Re}\lambda>\omega_0$; *donde* $\omega_0=\underset{t\to\infty}{lím}\dfrac{\log\|z(t)\|}{t}$ *entonces:*

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda,A) &= (-1)^n\,n!R(\lambda,A)^{n+1}\\ \frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda,A)\,x &= \int_0^{\infty}e^{-\lambda t}(-t)^n\,Z(t)\,xdt,\quad \forall x\in X\end{aligned}$$

Teorema 2.3 ***(Hille - Yosida)*** *Para que un operador lineal A definido en $D(A)\subset X$ y con valores en X, sea el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0, es necesario y suficiente que:*

(i) A sea cerrado y su dominio sea denso en X

(ii) Existan números reales M y ω tales que para cada $\lambda > \omega$ se tenga $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

en ese caso; $\|Z(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.

Corolario 2.3 *Para que un opreador A sea generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 tal que $\|z(t)\| \leq e^{\omega t}$; $t \geq 0$ es suficiente que A sea cerrado, su dominio sea denso y exista un número real ω tal que, si $\lambda > \omega$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - w}$*

Corolario 2.4 *Para que un operador A sea generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 es necesario y suficiente que A sea cerrado, su dominio denso, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ y $\forall \lambda > 0 : \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$*

Corolario 2.5 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal.*

Si $B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$; $\lambda \geq \omega > \omega_0$ entonces:

$$Z(t)\, x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t\beta_\lambda}.x$$

Notación. Para simplificar el lenguaje vamos a escribir $A \in G(M, \omega)$ para explicar que A es el generador infinitesimal de un grupo de operadores lineales acotados de clase C_0, Z, que satisface la condición

$$\|Z(t)\| \leq Me^{\omega t}\ ; \quad t \geq 0$$

Proposición 2.7 *$A-\omega \in G(M,0)$ si y solo sí $A \in G(M,\omega)$*

Ahora veremos otra característica de los generadores infinitesimales de los semigrupos de contracciones lineales de clase C_0 debido a Lumer y Phillips. Recordemos algunos puntos:

Sea X un espacio de Banach, X^* el dual de X y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualidad entre X y X^*. Pongamos para cada $x \in X$

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* \; / \; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}$$

Por el teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.

Una aplicación dualidad es una aplicación $j : X \to X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$ $\forall x \in X$ entonces $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definición 2.5 *Un operador lineal $A : X \to X$ es dicho disipativo relativamente a una aplicación dualidad, j si*

$$\operatorname{Re} \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0; \quad \forall x \in D(A)$$

Proposición 2.8 *Si A fuera disipativo relativamente a alguna aplicación dualidad entonces*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|; \quad \forall \lambda > 0 \;\; y \;\; \forall x \in D(A)$$

Teorema 2.4 *(Lumer-Phillips) Si $A \in G(1,0)$ entonces:*

(i) A es disipativo realtivamente a cualquier aplicación dualidad.

(ii) $\mathrm{Im}\,(\lambda I - 1) = X, \quad \forall \lambda > 0$

Reciprocamente, si:

(iii) $D\,(A)$ *es denso en* X

(iv) A *es disipativo realtivamente a alguna aplicación dualidad*

(v) $\mathrm{Im}\,(\lambda_0 I - A)$, *para algún* $\lambda_0 > 0$ *entonces* $A \in G\,(1, 0)$.

Ejemplos

1. Consideremos el semigrupo traslación sobre $X = C[0,\infty]$ donde

$$(Z(t)f)(x) = f(x+t)$$

es una contracción con $M = 1$, $w = 0$ y con su generador infinitesimal A tal que :$Af = f'$ estos argumentos ya fueron probados anteriormente.

Comprobaremos el teorema de Hille Yosida para este semigrupo.

Para $\lambda > 0$ $(= w)$ consideremos la ecuación

$$(\lambda I - A) f = g \qquad \text{i.e} \qquad \lambda f - f' = g$$

donde $g \in C[0,\infty]$ y mostremos $f \in D(A)$.

Usando las técnicas de integración

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda x} f(x)\right] = -e^{\lambda x} g(x) \ ; \ x \geq 0$$

Integramos de x hasta T (fijamos $T > x$) y obtendremos

$$e^{-\lambda T} f(T) - e^{-\lambda x} f(x) = -\int_x^T e^{-\lambda y} g(y)\, dy$$

cuando $T \to \infty$, $f(T)$ tiende hacia un límite finito (desde que $f \in D(A)$) y $e^{-\lambda T} \to 0$ $(\lambda > 0)$.

Tomando límite $T \to \infty$ tenemos

$$f(x) = \int_x^{\infty} \exp\left[\lambda(x-y)\right] g(y)\, dy$$

ahora probaremos que $f \in D(A)$. En particular probaremos que $f(x)$ tiende a un límite finito cuando $x \to \infty$.

Podemos ver esto escribiendo la integral de la derecha como:

$$f(x) = \frac{\int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy}{\exp(-\lambda x)}$$

Usando L'Hospital tenemos

$$\underset{x\to\infty}{Lím} \frac{-\exp(-\lambda x)\, g(x)}{-\lambda \exp(-\lambda x)} = \frac{1}{\lambda} \underset{x\to\infty}{Lím} g(x) < \infty$$

pues $g \in C[0,\infty]$

entonces $f(x)$ tiende a un límite finito cuando $x \to \infty$.

Además; derivamos f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\exp(\lambda x)\int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy\right] \\
&= \frac{d}{dx}\exp(\lambda x)\int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy + \exp(\lambda x)\frac{d}{dx}\int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy \\
&= \lambda \exp(\lambda x)\int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy + \exp(\lambda x)\exp(-\lambda x)\, g(x) \\
&= g(x) + \lambda \int_x^\infty \exp(\lambda x - \lambda y)\, g(y)\, dy
\end{aligned}$$

Se observa que $f \in C'[0,\infty]$.

por tanto $f \in D(A)$

Ahora observemos que:

$$f = [\lambda I - A]^{-1} g = R(\lambda, A)\, g$$

entonces:

$$\begin{aligned}
(R(\lambda,A)g)(x) &= \int_x^{\infty} \exp[\lambda(x-y)]\, g(y)\, dy \quad ; \quad x \geq 0 \\
|(R(\lambda,A)g)(x)| &\leq \int_x^{\infty} \exp[\lambda(x-y)]\, \|g\|_{\infty}\, dy \\
&= \|g\|_{\infty} \int_x^{\infty} \exp[\lambda(x-y)]\, dy \\
&= \|g\|_{\infty} \left[-\lambda^{-1} \exp[\lambda(x-y)]\right]_{y=x}^{y=\infty} \\
&= \lambda^{-1} \|g\|_{\infty}
\end{aligned}$$

como $\lambda > 0$:

$$\|R(\lambda,A)g\|_{\infty} \leq \lambda^{-1} \|g\|_{\infty}$$

entonces:

$$\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \text{para } \lambda > 0$$

Luego

$$\|[R(\lambda,A)]^n\| \leq \frac{1}{\lambda^n} \quad ; \quad \text{para } \lambda > 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

lo que verifica Hille Yosida con $M = 1$ y $w = 0$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] **F. Álvarez & J. Peyponquet, "Introducción a la Teoría de Semigrupos".** Apuntes para la III Escuela de verano DIM-MECESUP-CMN, Universidad de Chile, (2003).

[2] **A. Belleni - Morante and A.C. McBride, "Applied Nonlinear Semigroups".** Mathematical Methods in practice. J. Wiley. (1998)

[3] **H. Brézis, "Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones",** Masson, París, (1983).

[4] **J. Hoyos Guerrero, "Introducción al Análisis Funcional"**, Lima, Perú, (1978).

[5] **A. Moreira Gómez, "Semigrupos de Operadores Lineales e Aplicações as Equações de Evolução",** Rio de Janeiro, (1985).

[6] **A. Pazy, "Semigroups of linear Operators and Applications to partial Differential Equations"**. Applied Mathematical Sciences 44, Springer - Verlag, New York, (1983)