Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Académico Profesional de Matemática

Estabilidad estructural de los campos de Morse - Smale

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Víctor Arturo MARTÍNEZ LEÓN

ASESOR

Dr. Renato Mario BENAZIC TOMÉ

Lima, Perú

2009



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Martínez, V. (2009). *Estabilidad estructural de los campos de Morse - Smale*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Académico Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LOS CAMPOS DE MORSE – SMALE

VÍCTOR ARTURO MARTÍNEZ LEÓN

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Presidente

Dr. Roger Javier Metzger Alvan
Miembro

Dr. Renato Mario Benazic Tomé
Miembro Asesor

Lima–Perú
Diciembre–2009

FICHA CATALOGRÁFICA

MARTÍNEZ LEÓN, VÍCTOR ARTURO

Estabilidad Estructural de los Campos de Morse – Smale, (Lima) 2009.
viii, 72p., 29.7 cm, UNMSM, Licenciado, Matemática, 2009.
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática.
I. UNMSM/F. de CM II. Estabilidad Estructural de los Campos de Morse – Smale.

A mis padres Ronald y Elizabeth,
por darme amor, apoyo y fuerza;
a mi hermano Jhon, mi mejor amigo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi asesor el Dr. Renato Benazic Tomé, por su tiempo, paciencia, observaciones y sugerencias en mi trabajo de tesis. Agradezco también al Dr. Roger Metzger, quien siempre estuvo dispuesto a absolver mis dudas.

Agradezco al Dr. Raúl Moíses Izaguirre Maguiña, mi gran amigo, por brindarme su apoyo cuando era realmente necesario y motivarme a terminar este trabajo.

Agradezco a mi enamorada Midory Komatsudani, quien siempre me dio su apoyo, con quien estudié casi todo el tiempo y de quien aprendí mucho, y mucho más.

RESUMEN

Estabilidad Estructural de los Campos de Morse - Smale

Víctor Arturo Martínez León

Diciembre - 2009

Orientador: Dr. Renato Benazic Tomé
Título a obtener: Licenciado en Matemática

En este trabajo demostraremos que un campo de Morse - Smale, definida en una variedad compacta de dimensión dos, es estructuralmente estable, esto es, que el comportamiento topológico de sus órbitas no se altera mediante pequeñas perturbaciones del campo.

Palabras Claves: ESTABILIDAD ESTRUCTURAL
TRANSFORMACIÓN DE POINCARÉ
CAMPOS DE MORSE-SMALE
DIAGRAMA DE FASE
FILTRACIÓN

ABSTRACT

Structural Stability in Morse - Smale Fields

Víctor Arturo Martínez León

December - 2009

Tutor: Dr. Renato Benazic Tomé
Degree to obtain: Licenciado in Mathematics

In this work we will demostrate that given a Morse – Smale field defined in a two–dimensional compact manifold it is structural stable, that is, the topological behavior of its orbits do not change under small field disturbances.

Key Words: STRUCTURAL STABILITY
POINCARÉ MAP
MORSE–SMALE FIELDS
PHASE DIAGRAM
FILTRATION

Índice general

Introducción **ix**

1. Preliminares **1**
1.1. Definición de variedad diferenciable 1
1.2. Campos de vectores en variedades 5
1.3. Teoría cualitativa en variedades compactas 6
1.4. Estabilidad Estructural 20
1.5. Singularidades y Puntos Fijos Hiperbólicos 25
1.6. Variedades Invariantes 28
1.7. El λ-lema 30
1.8. Transformación de Poincaré 32

2. Campos de Morse - Smale **36**
2.1. Algunas definiciones y ejemplos 36
2.2. Definición equivalente para variedades compactas 48
2.3. Equivalencia entre campos de Morse-Smale 51

3. Teorema principal **56**
3.1. Estabilidad estructural en campos de Morse-Smale 56

Bibliografía **62**

Introducción

Para el lector interesado en entender este trabajo, básicamente se necesita álgebra lineal y ecuaciones diferenciales ordinarias, ver [1], [6] y [13]. También Variedades diferenciales y geometría diferencial, ver [7] y [5].

En el presente trabajo estudiaremos la estabilidad estructural de los campos de Morse – Smale para una variedad compacta de dimensión dos que fue probado por Peixoto ver [11], existe el resultado para dimensión n que está probado en [9].

En el capítulo I introducimos el concepto de variedad diferenciable, campo de vectores en variedades, estabilidad, que pretende dar al lector un mejor panorama para la teoría de los sistemas dinámicos, uno de los resultados más importantes de este capítulo es el conocido teorema de Grobman – Hartman que trata sobre la estabilidad local entre dos sistemas, esto es que dado un campo y una singularidad hiperbólica existe una conjungación local entre el campo y su parte lineal.

En el capítulo II, daremos algunas definiciones y ejemplos sobre los campos de Morse – Smale, algunos de ellos no prescisan del campo sin embargo existe un resultado justificando la existencia de estos diagramas ver [4]. Caracterizaremos los campos de Morse – Smale siempre que el campo esté definido en una *variedad compacta de dimensión dos*, esto es que el campo posea un número finito de elementos críticos, no haya ligación de sillas y que el conjunto límite de cualquier órbita se reduzca a los elementos críticos. El resultado más importante de este capítulo es el Teorema 2.3.1., el cual dice que dado un campo de Morse – Smale en una variedad compacta de dimensión dos existe una vecindad en el conjunto de los campos tal que cualquier campo en esa vecindad es de Morse – Smale y tienen diagramas de fases isomorfos.

En el capítulo III, damos el teorema principal que nos dice que todo campo de Morse – Smale definida en una variedad compacta de dimensión dos es estructuralmente estable, para esto utilizaremos fuertemente el último teorema dado en el capítulo II, y algunas propiedades dadas en el capítulo I, que trata de sobre la estabilidad local ver [10]; finalmente usamos estos resultados para concluir el teorema. También hay una versión de este resultado principal para difeomorfismos, ver [12] y [8].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definición de variedad diferenciable

Definición 1.1.1. Sea M un espacio topológico. Un *sistema de coordenadas locales* o simplemente *carta local de dimensión* m en M es un par $(U,\ \varphi)$, donde $U \subseteq M$ es un abierto de M y $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un homeomorfismo entre U y $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$, el cual es abierto.

Observación: Si $(U,\ \varphi)$ es una carta local de dimensión m para el espacio topológico M entonces para cada $p \in U$ tenemos que

$$\varphi(p) = (x_1(p), \ldots,\ x_m(p)) \in \mathbb{R}^m.$$

Los números reales $x_1(p), \ldots,\ x_m(p)$ son llamados las *coordenadas* del punto p en la carta $(U,\ \varphi)$.

Definición 1.1.2. Sea M un espacio topológico. Un *atlas de dimensión* m *sobre* M es una colección $\mathcal{A}(M) = \{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}$ de cartas locales de dimensión m tal que $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

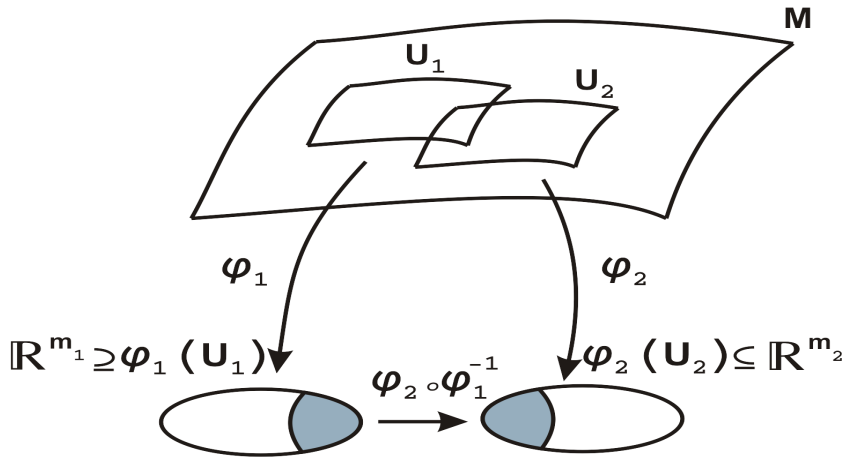
Definición 1.1.3. Una *variedad topológica de dimensión* m es un par $(M,\ \mathcal{A}(M))$ donde M es un espacio topológico y $\mathcal{A}(M)$ es un atlas de dimensión m sobre M.

Ejemplo 1.1.1. Toda superficie $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad topológica de dimensión m. En efecto, el espacio topológico es M con la topología usual heredada de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A}(M) = \{(\varphi_\alpha(U_\alpha),\ \varphi_\alpha^{-1})\}$, donde $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ es una

parametrización de dimensión m.

Ejemplo 1.1.2. Sea X un conjunto no vacío el cual dotamos de la topología discreta. Dado $x \in X$, consideremos $U_x = \{x\}$ y $\varphi_x : U_x \to \{0\} = \mathbb{R}^0$, entonces $(U_x,\ \varphi_x)$ es una carta local de dimensión cero de X. Luego $\mathcal{A}(M) = \{(U_x,\ \varphi_x)\}_{x\in X}$ es un atlas de dimensión cero sobre X, luego $(X,\ \mathcal{A}(X))$ es una variedad topológica de dimensión cero.

Observación: Sea M un espacio topológico. Sean $U_1,\ U_2 \subseteq M$ abiertos de M y $\varphi_1 : U_1 \to \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, $\varphi_2 : U_2 \to \varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ homeomorfismos tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ entonces



$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in Hom(\varphi_1(U_1 \cap U_2),\ \varphi_2(U_1 \cap U_2)).$$

Por el Teorema de la invarianza de la dimensión es posible probar que $m_1 = m_2$ en cada componente conexa. Por comodidad en nuestra definición hemos postulado la invarianza de la dimensión.

Sea $(M, \mathcal{A}(M))$ una variedad topológica de dimensión m y sean (U_1, φ_1), $(U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}(M)$ tales que $W = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ entonces podemos definir los homeomorfismos

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(W) \to \varphi_2(W) \ \ y \ \ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(W) \to \varphi_1(W)$$

que son llamados *cambios de coordenadas.*

Definición 1.1.4. Sea $(M, \mathcal{A}(M))$ una variedad topológica de dimensión m. Decimos que $\mathcal{A}(M)$ es un *atlas de clase* $C^k (k \geq 1)$ si y sólo si para cualquier par de (U_1, φ_1), $(U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}(M)$ tales que $W = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ los cambios de coordenadas

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(W) \to \varphi_2(W) \;\; y \;\; \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(W) \to \varphi_1(W)$$

son de clase C^k.

Observación: Como $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ se sigue que

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \in Diff^k(\varphi_2(W),\ \varphi_1(W)).$$

Sea $\mathcal{A}(M)$ un atlas de dimensión m y de clase C^k sobre el espacio topológico M y sea $(U,\ \varphi)$ una carta local de dimensión m sobre M. Decimos que la carta $(U,\ \varphi)$ es *admisible al atlas* $\mathcal{A}(M)$ con $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$ si se tiene que los cambios de coordenadas

$$\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \; y \; \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \varphi(U \cap U_\alpha)$$

son funciones de clase C^k.

Observación: En otras palabras la carta $(U,\ \varphi)$ es admisible al atlas $\mathcal{A}(M)$ si y sólo si $\mathcal{A}(M) \cup \{(U,\ \varphi)\}$ es un atlas de clase C^k para M.

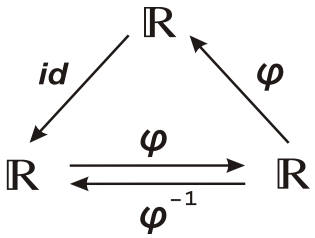
Ejemplo 1.1.3. Sea $\mathcal{A}(M)$ un atlas de dimensión m y clase C^k sobre el espacio topológico M y $(U,\ \varphi) \in \mathcal{A}(M)$. Dado $V \subseteq U$ abierto de M, consideremos la restricción $\varphi_V = \varphi|_V : V \to \varphi(V)$ entonces $(V,\ \varphi_V)$ es una carta admisible a $\mathcal{A}(M)$.

Ejemplo 1.1.4. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y consideremos $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $id(x) = x$ entonces $(\mathbb{R},\ id)$ es una carta local de $\mathbb{R}$, luego $\mathcal{A}(\mathbb{R}) = \{(\mathbb{R},\ id)\}$ es un atlas de clase C^∞ y dimensión uno sobre $\mathbb{R}$.

Sea

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \varphi(t) = t^3 \end{array}$$

luego $(\mathbb{R},\ \varphi)$ es una carta local de $\mathbb{R}$. ¿$(\mathbb{R},\ \varphi)$ es admisible a $\mathcal{A}(\mathbb{R})$? como



$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \varphi^{-1}(t) = \sqrt[3]{t} \end{array}$$

no es diferenciable en el cero. Por lo tanto $(\mathbb{R},\ \varphi)$ no es admisible a $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Definición 1.1.5. Sea M un espacio topológico y $\mathcal{A}(M)$ un atlas de dimensión m y clase C^k de M. Decimos que $\mathcal{A}(M)$ es *atlas maximal* si y sólo si contiene a todas las cartas locales que son admisibles a $\mathcal{A}(M)$.

Observación: Es claro que todo atlas de clase C^k y dimensión m determina un atlas maximal que lo contiene. En efecto basta añadir al atlas todas las cartas locales que le son admisibles. Este atlas maximal también es llamado *estructura diferenciable* para M.

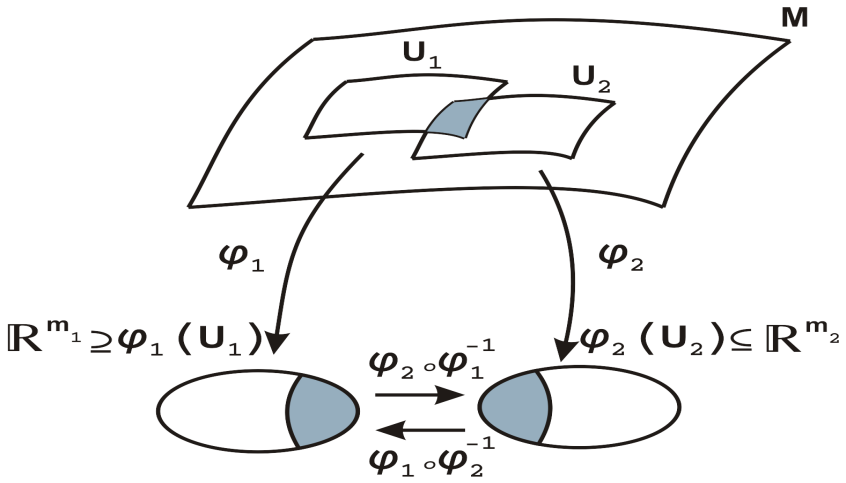
Definición 1.1.6. Una *variedad diferenciable de clase C^k y de dimensión m* es un par $(M,\ \mathcal{A}(M))$ en donde M es un espacio topológico *Hausdorff*, con base enumerable de abiertos y $\mathcal{A}(M)$ es un atlas maximal de clase C^k y dimensión m de M.

Observaciones:

1. La exigencia de ser $\mathcal{A}(M)$ un atlas maximal no es indispensable pero es conveniente en las aplicaciones.

2. Se pueden considerar variedades no Hausdorff o variedades que no tengan base enumerable de abiertos, pero los teoremas más importantes de la teoría se demuestran bajo estas hipótesis.

3. Si $r \leq k$ entonces toda variedad de clase C^k puede ser observada como una variedad de clase C^r, puesto que cualquier atlas de C^k está contenida en un único atlas maximal de clase C^r.



1.2. Campos de vectores en variedades

Definición 1.2.1. Sea M una variedad diferenciable. Un *campo de vectores de clase C^r en M* es una aplicación de clase C^r $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = id_M$, donde π es la proyección natural de TM en M. Denotemos por $\mathfrak{X}^r(M)$ al conjunto de los campos de clase C^r en M.

Definición 1.2.2. Una *curva integral de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ pasando por un punto $p \in M$* es una aplicación de clase C^{r+1} $\alpha : I \to M$, donde I es un intervalo conteniendo al cero, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$. La imagen de una curva integral es llamada *órbita ó trayectoria*.

Observaciones:

1. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo de clase C^{r+1} y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ entonces $Y = f_*X$, definido por $Y(q) = df(p) \cdot X(p)$ con $q = f(p)$, es un campo de clase C^r en N, pues $f_*X = df \circ X \circ f^{-1}$ y $(\pi_N \circ Y)(q) = \pi_N(Y(q)) = \pi_N(df(p) \circ X(p)) = f(p) = q$.

2. Si $\alpha : I \to M$ es una curva integral de X, entonces $f \circ \alpha : I \to N$ es una curva integral de Y. En particular, f lleva trayectorias de X en trayectorias de Y. Asimismo, si $x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ es una carta local, $Y = x_*X$ es una campo de clase C^r en $x(U)$; en este caso decimos que Y es la *expresión de X* en la carta local (x, U).

Proposición 1.2.1. Sean I, J intervalos abiertos y $\alpha : I \to M$, $\beta : J \to M$ curvas integrales de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Si $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ para algún $t_0 \in I \cap J$, entonces $\alpha(t) = \beta(t)$ en $I \cap J$. Además existe una curva integral $\gamma : I \cup J \to M$ que coincide con α en I y β en J.

Proposición 1.2.2. Sean M una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Existe en M un *flujo global de clase C^r para X*, esto es, una aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ y $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) = X(\varphi(t, p))$.

Corolario. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ el flujo de X. Para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $\varphi_t : M \to M$, $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$ es un difeomorfismo de clase C^r. Además de esto $\varphi_0 = id_M$, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, para todo t, $s \in \mathbb{R}$.

1.3. Teoría cualitativa en variedades compactas

Definición 1.3.1. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$. La *órbita de p asociada a X* denotada por $\mathcal{O}_X(p)$ se define como: $\mathcal{O}_X(p) = \{\varphi_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$, donde $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ es el flujo global de clase C^r de X.

Observación: $p \in \mathcal{O}_X(p)$, puesto que $p = \varphi_0(p)$.

Lema 1.3.1. $q \in \mathcal{O}_X(p)$ si y sólo si $\mathcal{O}_X(q) = \mathcal{O}_X(p)$.

Demostración:
Como $q \in \mathcal{O}_X(p)$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q = \varphi_{t_0}(p)$. Sea $z \in \mathcal{O}_X(q)$, luego existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $z = \varphi_s(q)$, así

$$z = \varphi_s(q) = \varphi_s(\varphi_{t_0}(p)) = (\varphi_s \circ \varphi_{t_0})(p) = \varphi_{s+t_0}(p)$$

luego $z \in \mathcal{O}_X(p)$ y $\mathcal{O}_X(q) \subseteq \mathcal{O}_X(p)$. Sea $y \in \mathcal{O}_X(p)$, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} y =& \varphi_r(p) = \varphi_r(\varphi_0(p)) = \varphi_r((\varphi_{-t_0} \circ \varphi_{t_0})(p)) \\ =& \varphi_r(\varphi_{-t_0}(\varphi_{t_0}(p))) = \varphi_r(\varphi_{-t_0}(q)) = (\varphi_r \circ \varphi_{-t_0})(q) = \varphi_{r-t_0}(q) \end{aligned}$$

así $y \in \mathcal{O}_X(q)$ y $\mathcal{O}_X(p) \subseteq \mathcal{O}_X(q)$.
Recíprocamente, como $\mathcal{O}_X(q) = \mathcal{O}_X(p)$ y $q \in \mathcal{O}_X(q)$, se tiene que $q \in \mathcal{O}_X(p)$. □

Teorema 1.3.1. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Sean p, $q \in M$, la relación $p \equiv_X q$ si y sólo si $q \in \mathcal{O}_X(p)$ es una relación de equivalencia.

Demostración:
$\equiv_X$ es reflexiva, pues como $p \in \mathcal{O}_X(p)$, luego $p \equiv_X p$.
$\equiv_X$ es simétrica, pues si $p \equiv_X q$, luego $q \in \mathcal{O}_X(p)$, por el lema 1.3.1, $\mathcal{O}_X(p) = \mathcal{O}_X(q)$ y desde que $p \in \mathcal{O}_X(p)$, se tiene que $p \in \mathcal{O}_X(q)$, así $q \equiv_X p$.
$\equiv_X$ es transitiva, pues si $p \equiv_X q$ y $q \equiv_X r$ se tiene que $q \in \mathcal{O}_X(p)$ y $r \in \mathcal{O}_X(q)$. Ahora como $q \in \mathcal{O}_X(p)$, por el lema 1.3.1, $\mathcal{O}_X(p) = \mathcal{O}_X(q)$, así $r \in \mathcal{O}_X(p)$, por lo tanto $p \equiv_X r$.
De ahí $\equiv_X$ es una relación de equivalencia. □

Definición 1.3.2. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. El conjunto cociente $M/\equiv_X = \{\mathcal{O}_X(p) : p \in M\}$ es llamada *foliación en M generado por X*, la cual denotaremos $\mathcal{F}_X$.

Observaciones:

1. Los elementos de $\mathcal{F}_X$ son órbitas $\mathcal{O}_X(p)$ las cuales son llamadas *hojas de $\mathcal{F}_X$*.

2. $\mathcal{F}_X$ es llamado también *retrato de fase*.

Definición 1.3.3. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ y $p \in M$. Decimos que p es una *singularidad de X* si y sólo si $X(p) = 0$. Los puntos de M que no son singularidades son llamados *puntos regulares de X*.

Observaciones:

1. p es una singularidad si y sólo si $\mathcal{O}_X(p) = \{p\}$. En este caso decimos que la órbita de p es *singular*.

2. si p no es una singularidad de X entonces la aplicación $\alpha : I \to M$, $\alpha(t) = \varphi_t(p)$, es una inmersión. Si α no es inyectiva, entonces existe $w > 0$ tal que $\alpha(w) = \alpha(0) = p$ y $\alpha(t) \neq 0$, para $0 < t < w$. En este caso, la órbita de p, $\mathcal{O}_X(p)$, es difeomorfa al circulo S^1 y decimos que la órbita de p es *cerrada de período w*. En caso en que la órbita no

sea singular o cerrada, ella es llamada *regular*. Asimismo, una órbita regular es la imagen de una inmersión inyectiva.

Definición 1.3.4. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$. Entonces el conjunto ω-*límite de* p, denotado por $\omega_X(p)$ se define como:

$$\omega_X(p) = \{q \in M : \exists (t_n) \subseteq \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \text{ y } \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(p) = q\}$$

El conjunto α-*límite de* p, denotado por $\alpha_X(p)$ se define como:

$$\alpha_X(p) = \{q \in M : \exists (t_n) \subseteq \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty \text{ y } \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(p) = q\}$$

Observaciones:

1. $\alpha_X(p) = \omega_{-X}(p)$ y $\omega_X(p) = \alpha_{-X}(p)$, para todo $p \in M$.
2. El ω-límite (respectivamente α-límite) de un punto p se interpreta geómetricamente como el conjunto de puntos de M en donde "*muere*" (respectivamente "*nace*") la órbita que en el instante cero pasa por p.

Proposición 1.3.1. Sea M una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Se cumplen:

1. Si p es una singularidad de X entonces $\omega_X(p) = \alpha_X(p) = \{p\}$.
2. Si $\mathcal{O}_X(p)$ es periódica entonces $\omega_X(p) = \alpha_X(p) = \mathcal{O}_X(p)$.

Demostración:

1. Para cada $q \in M$, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi_q : & \mathbb{R} & \to & M \\ & t & \mapsto & \varphi(t,q) \end{array}$$

Afirmación: $\varphi_p : \mathbb{R} \to M$ es la función constante, esto es, $\varphi_p(t) = p$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$.
En efecto, consideremos

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R} & \to & M \\ & t & \mapsto & \psi(t) = p \end{array}$$

se cumple $\psi'(t) = 0 = X(p) = X(\psi(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\psi(0) = p$. Así ψ es una curva integral de X, además φ_p también es una curva

integral ya que $\varphi_p(0) = \varphi(0,p) = p$ y $\dfrac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t) = X(\varphi(t,p)) = X(\varphi_p(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces por la proposición 1.2.1, $\psi(t) = \varphi_p(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Así $\varphi_p(t) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
En el problema sea $q \in \omega_X(p)$, entonces existe $(t_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(p) = q$, luego

$$q = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, p) = \lim_{n\to\infty} \varphi_p(t_n)$$

así $q = p$ y $q \in \{p\}$, es decir, $\omega_X(p) \subseteq \{p\}$. Además es claro que $p \in \omega_X(p)$, entonces $\{p\} \subseteq \omega_X(p)$, luego $\omega_X(p) = \{p\}$. Análogamente $\alpha_X(p) = \{p\}$.

2. Como $\mathcal{O}_X(p)$ es periódica, entonces $\varphi_p : \mathbb{R} \to M$ es periódica, luego existe $T > 0$ tal que $\varphi_p(t+T) = \varphi_p(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $q \in \mathcal{O}_X(p)$, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q = \varphi_{t_0}(p)$. Sea $t_n = t_0 + nT$, $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(p) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, p) = \lim_{n\to\infty} \varphi_p(t_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi_p(t_0 + nT) = \lim_{n\to\infty} \varphi_p(t_0) = q\end{aligned}$$

Así $q \in \omega_X(p)$, $\mathcal{O}_X(p) \subseteq \omega_X(p)$.
Sea $z \in \omega_X(p)$, entonces existe $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(p) = z$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_p(t_n) = z$. Como $(\varphi_p(t_n)) \subseteq \mathcal{O}_X(p)$, se tiene que $z \in \overline{\mathcal{O}_X(p)} = \mathcal{O}_X(p)$, así $\omega_X(p) \subseteq \mathcal{O}_X(p)$, $\omega_X(p) = \mathcal{O}_X(p)$. Análogamente $\alpha_X(p) = \mathcal{O}_X(p)$. □

Proposición 1.3.2. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$. Si $q \in \mathcal{O}_X(p)$ entonces $\omega_X(q) = \omega_X(p)$ y $\alpha_X(q) = \alpha_X(p)$.

Demostración:
Como $q \in \mathcal{O}_X(p)$, se tiene que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q = \varphi_{t_0}(p)$. Sea $z \in \omega_X(q)$, luego existe $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(q) = z$. Considero $t_n^{'} = t_n + t_0$, para todo n, así $(t_n^{'}) \subseteq \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^{'} = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n^{'}}(p) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n^{'}, p) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n + t_0, p) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n+t_0}(p) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(\varphi_{t_0}(p)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(q) = z\end{aligned}$$

luego $z \in \omega_X(p)$ y $\omega_X(q) \subseteq \omega_X(p)$.
Sea $y \in \omega_X(p)$, existe $(\widehat{t_n}) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \widehat{t}_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\widehat{t}_n}(p) = y$. Considero $\tilde{t}_n = \widehat{t}_n - t_0$, para todo n, así $(\tilde{t}_n) \subseteq \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} \tilde{t}_n = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varphi_{\tilde{t}_n}(q) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(\tilde{t}_n, q) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\widehat{t}_n - t_0, q) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi_{\widehat{t}_n - t_0}(\varphi_{t_0}(p)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\widehat{t}_n}(p) = y\end{aligned}$$

luego $y \in \omega_X(q)$ y $\omega_X(p) \subseteq \omega_X(q)$, por lo tanto $\omega_X(q) = \omega_X(p)$. Análogamente $\alpha_X(q) = \alpha_X(p)$. □

Definición 1.3.5. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $\mathcal{O}$ una órbita de X.

1. El conjunto *ω-límite de* $\mathcal{O}$, denotado por $\omega_X(\mathcal{O})$, se define como $\omega_X(\mathcal{O}) = \omega_X(p)$, donde $p \in \mathcal{O}$.
2. El conjunto *α-límite de* $\mathcal{O}$, denotado por $\alpha_X(\mathcal{O})$, se define como $\alpha_X(\mathcal{O}) = \alpha_X(p)$, donde $p \in \mathcal{O}$.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos la esfera unitaria $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ con centro en el origen y sean (x, y, z) las coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^3$, llamamos **polo norte** de S^2 al punto $P_N = (0, 0, 1)$ y **polo sur** de S^2 al punto $P_S = (0, 0, -1)$. Definimos el campo X en S^2 por

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$$

Es claro que $X \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$, y es fácil verificar que las singularidades de X son el P_N, P_S. Afirmo que $\omega_X(p) = P_N$ y $\alpha_X(p) = P_S$, para todo $p \in S^2 - \{P_N, P_S\}$. En efecto, en principio hallemos el flujo $\varphi : \mathbb{R}\times S^2 \to S^2$ del campo X. Así sea $x_0 = (x_1, y_1, z_1) \in S^2 - \{P_N, P_S\}$ y consideremos el P.V.I.:

$$\left|\begin{array}{l} z' = X(z) \\ z(0) = x_0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

Supongamos que $(x, y, z) \in S^2$ es solución de $(*)$. Entonces tenemos que:

$$\left|\begin{array}{ll} x' = -xz & , x(0) = x_1 \\ y' = -yz & , y(0) = y_1 \\ z' = x^2 + y^2 & , z(0) = z_1 \end{array}\right.$$

Ahora, ya que $(x, y, z) \in S^2$, tenemos que $x^2+y^2+z^2 = 1$, así $z' = 1-z^2$, $z(0) = z_1$, $\dfrac{dz}{1-z^2} = dt$, $\displaystyle\int \frac{dz}{1-z^2} = \int dt$, $\displaystyle\int \frac{dz}{1-z^2} = t + c_1$, donde c_1 es una constante, luego $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = t + c_1$, $\dfrac{1+z}{1-z} = ke^{2t}$, donde k es una constante. Para $t = 0$, $k = \dfrac{1+z_1}{1-z_1}$, así $z = \dfrac{ke^{2t}-1}{ke^{2t}+1}$.

Como $x' = -xz$, tenemos que $\dfrac{x'}{x} = -z$, $\dfrac{dx}{x} = -zdt$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int -zdt$, $\ln x = -\displaystyle\int zdt + c_2$, donde c_2 es una constante, $\displaystyle\int zdt = \int \frac{ke^{2t}-1}{ke^{2t}+1}dt$. Haciendo $s = ke^{2t}+1$, luego $ds = 2ke^{2t}at$ y $ke^{2t} = s-1$, reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned}
\int zdt =& \int \frac{s-2}{s}\frac{ds}{2(s-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{s-2}{s(s-1)}ds \\
=& \frac{1}{2}\left[\int \frac{2}{s}ds - \int \frac{ds}{s-1}\right] = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{s-1}}\right) + c_3 \\
\ln x =& -\ln\left(\frac{s}{\sqrt{s-1}}\right) + c_2 + c_3 \\
x =& a\frac{\sqrt{s-1}}{s} = \frac{a\sqrt{k}e^t}{ke^{2t}+1}
\end{aligned}$$

Para $t = 0$, $x_1 = x(0) = \dfrac{a\sqrt{k}}{k+1}$, $a = \dfrac{(k+1)}{\sqrt{k}}x_1$, $x = \dfrac{(k+1)e^t x_1}{ke^{2t}+1}$. Análogamente tenemos que $y = \dfrac{(k+1)e^t y_1}{ke^{2t}+1}$. Así el flujo $\varphi : \mathbb{R} \times S^2 \to S^2$ está dado por

$$\varphi(t, (x, y, z)) = \left(\frac{(k+1)e^t x}{ke^{2t}+1}, \frac{(k+1)e^t y}{ke^{2t}+1}, \frac{ke^{2t}-1}{ke^{2t}+1}\right)$$

donde $k = \dfrac{1+z}{1-z}$, para todo $(x, y, z) \in S^2 - \{P_N, P_S\}$.

Ahora, sea $p \in S^2 - \{P_N, P_S\}$ y sea $q \in W_X(p)$, entonces existe $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(p) = q$. Ahora como $p \in S^2 - \{P_N, P_S\}$

por lo hecho antes se tiene que:

$$\varphi_{t_n}(p) = \varphi(t_n,(p_1,p_2,p_3)) = \left(\frac{(k+1)e^{t_n}p_1}{ke^{2t_n}+1}, \frac{(k+1)e^{t_n}p_2}{ke^{2t_n}+1}, \frac{ke^{2t_n}-1}{ke^{2t_n}+1}\right)$$

$$\varphi_{t_n}(p) = \left(\frac{(k+1)p_1}{ke^{t_n}+e^{-t_n}}, \frac{(k+1)p_2}{ke^{t_n}+e^{-t_n}}, \frac{k-e^{-2t_n}}{k+e^{-2t_n}}\right)$$

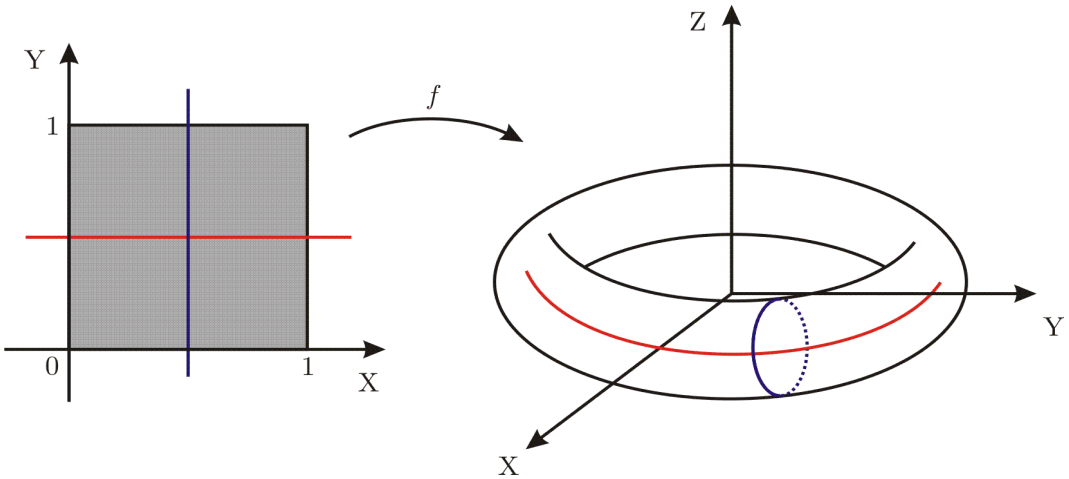
donde $k = \frac{p_3+1}{1-p_3}$.

Luego $q = \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(p) = (0,0,1) = P_N$, así $q \in \{P_N\}$, por lo tanto $\omega_X(p) \subseteq \{P_N\}$. Consideremos $t_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, luego $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(p) = P_N$, $P_N \in \omega_X(p)$, $\{P_N\} \subseteq \omega_X(p)$, $\omega_X(p) = \{P_N\}$, para todo $p \in S^2 - \{P_N, P_S\}$. Análogamente $\alpha_X(p) = \{P_S\}$, para todo $p \in S^2 - \{P_N, P_S\}$.

Ejemplo 1.3.2.(**Flujos Racionales e Irracionales en el Toro**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = ((2+\cos(2\pi y))\cos(2\pi x)), (2+\cos(2\pi y))\,\mathrm{sen}(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi y))$$

donde $T^2 = f(\mathbb{R}^2)$.



Ejemplo 1.3.2.

Afirmación 1. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión de clase C^∞.
2. $f(x,y) = f(x',y')$ si y sólo si $x - x' \in \mathbb{Z}$, $y - y' \in \mathbb{Z}$.

En efecto,

1. Es claro que f es de clase C^∞

$$df(x,y) = \begin{bmatrix} -2\pi(2+\cos(2\pi y))\operatorname{sen}(2\pi x) & -2\pi\operatorname{sen}(2\pi y)\cos(2\pi x) \\ 2\pi(2+\cos(2\pi y))\cos(2\pi x) & -2\pi\operatorname{sen}(2\pi y)\operatorname{sen}(2\pi x) \\ 0 & 2\pi\cos(2\pi y) \end{bmatrix}$$

ya que $\text{Rang}(f) = 2 = \dim\mathbb{R}^2$, luego f es una inmersión de clase C^∞

2. Si $f(x,y) = f(x^{'}, y^{'})$,

$$(2+\cos(2\pi y))\cos(2\pi x) = (2+\cos(2\pi y^{'}))\cos(2\pi x^{'})$$
$$(2+\cos(2\pi y))\operatorname{sen}(2\pi x) = (2+\cos(2\pi y^{'}))\operatorname{sen}(2\pi x^{'})$$
$$\operatorname{sen}(2\pi y) = \operatorname{sen}(2\pi y^{'})$$

De las dos primeras coordenadas de f en la igualdad, elevando al cuadrado y sumando se tiene que

$$(2+\cos(2\pi y))^2 = (2+\cos(2\pi y^{'}))^2 \ , \ 2+\cos(2\pi y) = 2+\cos(2\pi y^{'})$$
$$\cos(2\pi y) = \cos(2\pi y^{'}) \ , \ \operatorname{sen}(2\pi y) = \operatorname{sen}(2\pi y^{'}) \ , \ \cos(2\pi y) - \cos(2\pi y^{'}) = 0$$
$$2\operatorname{sen}(\pi(y+y^{'}))\operatorname{sen}(\pi(y^{'}-y)) = 0 \ , \ \operatorname{sen}(\pi(y+y^{'}))\operatorname{sen}(\pi(y^{'}-y)) = 0$$
$$\operatorname{sen}(2\pi y) - \operatorname{sen}(2\pi y^{'}) = 0 \ , \ 2\operatorname{sen}(\pi(y-y^{'}))\cos(\pi(y+y^{'})) = 0$$

$\pi(y-y^{'}) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $y - y^{'} \in \mathbb{Z}$, como $\cos(2\pi y) = \cos(2\pi y^{'})$, se tiene que $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi x^{'})$ y $\operatorname{sen}(2\pi x) = \operatorname{sen}(2\pi x^{'})$. Análogamente $x - x^{'} \in \mathbb{Z}$.

Si $(x - x^{'}) \in \mathbb{Z}$ y $y - y^{'} \in \mathbb{Z}$, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $x - x^{'} = a$ y $y - y^{'} = b$, así

$$\pi(x-x^{'}) = \pi a \ , \ \pi(y-y^{'}) = \pi b$$
$$\operatorname{sen}(\pi(x-x^{'})) = 0 \ , \ \operatorname{sen}(\pi(y-y^{'})) = 0$$
$$2\operatorname{sen}(\pi(x-x^{'}))\cos(\pi(x+x^{'})) = 0 \ , \ \operatorname{sen}(2\pi x) - \operatorname{sen}(2\pi x^{'}) = 0$$
$$\operatorname{sen}(2\pi x) = \operatorname{sen}(2\pi x^{'})$$

también como

$$2\operatorname{sen}(\pi(x+x^{'}))\operatorname{sen}(\pi(x^{'}-x)) = 0$$

entonces

$$\cos(2\pi x) - \cos(2\pi x^{'}) = 0 \ , \ \cos(2\pi x) = \cos(2\pi x^{'})$$

Análogamente se tiene que $\operatorname{sen}(2\pi y) = \operatorname{sen}(2\pi y^{'})$ y $\cos(2\pi y) = \cos(2\pi y^{'})$. Así $f(x,y) = f(x^{'}, y^{'})$.

Afirmación 2: f es una función abierta.
En efecto, en $\mathbb{R}^2$ definimos la relación:

$$(x,y) \sim (x^{'},y^{'}) \Leftrightarrow (x-x^{'},y-y^{'}) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

Veamos que " $\sim$ " es una relación de equivalencia.
Reflexiva: como $x-x=0\in\mathbb{Z}$ y $y-y=0\in\mathbb{Z}$, luego $(x-x,y-y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, así $(x,y)\sim(x,y)$.
Simétrica: si $(x,y)\sim(x^{'},y^{'})$, luego $(x-x^{'},y-y^{'})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, entonces $(x^{'}-x,y^{'}-y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, así $(x^{'},y^{'})\sim(x,y)$.
Transitiva: si $(x,y)\sim(x^{'},y^{'})$ y $(x^{'},y^{'})\sim(x^{''},y^{''})$, entonces

$$(x-x^{'},y-y^{'})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ ,\ (x^{'}-x^{''},y^{'}-y^{''})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

luego $(x-x^{''},y-y^{''})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, así $(x,y)\sim(x^{''},y^{''})$.

Luego podemos considerar el conjunto cociente:

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\{[(x,y)];\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

donde: $[(x,y)]=\{(x^{'},y^{'})\in\mathbb{R}^2;\ (x-x^{'},y-y^{'})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$.

Podemos también considerar la proyección

$$\begin{array}{rccl}\Pi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\ & (x,y) & \mapsto & \Pi(x,y)=[(x,y)]\end{array}$$

Así, dotamos a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ con la topología cociente, es decir,
$A\subseteq\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es abierto si y sólo si $\Pi^{-1}(A)\subseteq\mathbb{R}^2$ es un abierto. Es claro que Π es una aplicación abierta, pues si $B\subseteq\mathbb{R}^2$ es abierto, entonces $\Pi^{-1}(\Pi(B))=B\subseteq\mathbb{R}^2$ es abierto, luego $\Pi(B)\subseteq\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es abierto.

De esta manera podemos definir la función

$$\begin{array}{rccl}\overline{f}: & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & T^2\\ & [(x,y)] & \mapsto & \overline{f}([(x,y)])=f(x,y)\end{array}$$

Observar que $\overline{f}$ está bien definida, desde que si $[(x,y)]=[(x^{'},y^{'})]$ entonces $(x,y)\sim(x^{'},y^{'})$, luego $(x-x^{'},y-y^{'})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, así $f(x,y)=f(x^{'},y^{'})$, por lo tanto $\overline{f}([(x,y)])=\overline{f}([(x^{'},y^{'})])$. Además $\overline{f}$ es una biyección, pues si $f([x,y])=f([x^{'},y^{'}])$, tenemos que $f(x,y)=f(x^{'},y^{'})$, así $x-x^{'}\in\mathbb{Z}$ e $y-y^{'}\in\mathbb{Z}$ entonces $(x-x^{'},y-y^{'})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, es decir $[(x,y)]=[(x^{'},y^{'})]$, así $\overline{f}$

es inyectiva. También si $(u,v) \in T^2 = f(\mathbb{R}^2)$, luego existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(u,v) = f(x,y) = \overline{f}([(x,y)])$, así $\overline{f}$ es sobreyectiva. Ahora veamos que $\overline{f}$ es continua. En efecto, sea $B \subseteq T^2$ abierto por demostrar que $\overline{f}^{-1}(B) \subseteq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es abierto. $\Pi^{-1}(\overline{f}^{-1}(B)) = (\overline{f}\circ\Pi)^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ el cual es abierto en $\mathbb{R}^2$, así $\overline{f}^{-1}(B)$ es abierto.

Por otro lado $[0,1]\times[0,1]$ es compacto en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, así

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \Pi([0,1],[0,1]) \text{ es compacto en } \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},$$

es decir, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es un espacio topológico compacto y T^2 es Hausdorff. Como $\overline{f}: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to T^2$ es biyectiva y continua, por la topología general $\overline{f}$ es homeomorfismo.
Como $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es abierta y $\overline{f} : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to T^2$ es homeomorfismo, $f = \overline{f}\circ\Pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ es abierta. Ahora como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión abierta de clase C^∞, así $T^2 = f(\mathbb{R}^2)$ es una supericie de clase C^∞ y dimensión dos en $\mathbb{R}^3$, el cual es llamado **Toro bidimensional**.

Sea $\xi, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definidas por $\xi(t) = (t,0)$, $\beta(t) = (0,t)$, entonces

$$f\circ\xi, f\circ\beta : \mathbb{R}^2 \to T^2$$

son curvas en el toro las cuales son llamadas respectivamente **Paralelos** y **Meridianos**, esto es, f lleva rectas horizontales de $\mathbb{R}^2$ en paralelos de T^2 y lleva rectas verticales en meridianos en T^2.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos en $\mathbb{R}^2$ el campo vectorial

$$X^\alpha(x,y) = (1,\alpha)$$

Es fácil ver que $Y^\alpha = f_* X^\alpha$ está bien definida y es un campo de clase C^∞ en T^2, $Y^\alpha(u,v,w) = df(x,y)X^\alpha(x,y)$ donde $f(x,y) = (u,v,w)$. Así

$$Y^\alpha(u,v,w) = \left(-2\pi\frac{[v+\alpha w u]}{\sqrt{u^2+v^2}}, 2\pi\frac{[u-\alpha w v]}{\sqrt{u^2+v^2}}, 2\pi\alpha(\sqrt{u^2+v^2}-2)\right)$$

Las órbitas de Y^α son imagenes por f de las órbitas de X^α, siendo estas las rectas de inclinación α en $\mathbb{R}^2$. Vamos a probar que para α racional toda órbita de Y^α es cerrada y, para α irracional toda órbita de Y^α es densa en T^2. Para cada $c \in \mathbb{R}$ denotemos por Δ_c la recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por $(0,c)$ y tiene inclinación α, esto es, $\Delta_c = \{(u, c+\alpha u) \mid u \in \mathbb{R}\}$. Como ya vimos $f(\Delta_c)$ es una órbita de Y^α. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, esta órbita es cerrada, cualquiera que sea $c \in \mathbb{R}$, pues como $\alpha \in \mathbb{Q}$, existen m, n coprimos tales

que $\alpha = m/n$, $(n, c + (\frac{m}{n})n) \in \Delta_c$ y $f(n, c+m) = f(0, c)$, $f(\Delta_c)$ es cerrada en el toro T^2. Observar que Δ_c es una función. Así supongamos ahora que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y fijemos $\overline{c} \in \mathbb{R}$. Luego $f(\Delta_{\overline{c}})$ es una función inyectiva, ya que si $(f(\Delta_{\overline{c}}))(a) = (f(\Delta_{\overline{c}}))(b)$, $f(a, \overline{c} + \alpha a) = f(b, \overline{c} + \alpha b)$, $a - b \in \mathbb{Z}$ y $\alpha(a - b) \in \mathbb{Z}$, $a - b = 0$, luego $a = b$. Más aún $f(\Delta_{\overline{c}})$ es una inmersión de clase C^∞, demostraremos que $f(\Delta_{\overline{c}})$ es denso en el toro T^2. Del análisis real sabemos que el conjunto $G = \{m\alpha + n \mid \ m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Afirmamos que $C = \{c \in \mathbb{R};\ f(\Delta_c) = f(\Delta_{\overline{c}})\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

En efecto:

En primer lugar $C \neq \emptyset$ (pues $\overline{c} \in C$). Ahora C es denso en $\mathbb{R}$ desde que se cumpla $c \in C$ si y sólo si $c - \overline{c} \in G$ $(*)$. Esto implica que $C = G + \overline{c}$. Así sea $a \in \mathbb{R}$, $a - \overline{c} \in \mathbb{R} = \overline{G}$, dado $\epsilon > 0$, $I_\epsilon(a - \overline{c}) \cap G \neq \emptyset$, luego existe $b \in I_\epsilon(a - \overline{c})$ y $b \in G$. Tomando $y = b + \overline{c}$ tenemos que $y \in G + \overline{c} = C$ y $y \in I_\epsilon(a)$, pues $|y - a| = |b + \overline{c} - a| < \epsilon$, luego $I_\epsilon(a) \cap C \neq \emptyset$, para tdo $\epsilon > 0$, $a \in \overline{C}$, $\overline{C} = \mathbb{R}$, entonces C es denso en $\mathbb{R}$. Ahora probaremos $(*)$; esto es $c \in C$ si y sólo si $c - \overline{c} \in G$.

Si $c \in C$, $f(\Delta_c) = f(\Delta_{\overline{c}})$, sea $a \in \mathbb{R}$,

$$(f(\Delta_c))(a) = (f(\Delta_{\overline{c}}))(a)\ ,\ f(a, c + \alpha a) = f(a, \overline{c} + \alpha a)\ ,\ c - \overline{c} \in \mathbb{Z}$$

tomando $m = 0$, $n = c - \overline{c}$, $c - \overline{c} = 0.\alpha + c - \overline{c} \in G\ ,\ c - \overline{c} \in G$.

Si $c - \overline{c} \in G$ entonces existen $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $c - \overline{c} = m_0\alpha + n_0$ por demostrar que $f(\Delta_c) = f(\Delta_{\overline{c}})$.

Sea $a \in f(\Delta_c)$, luego existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$a = f(x, c + \alpha x) = f(x, \overline{c} + m_0\alpha + n_0 + \alpha x) = f(x, \overline{c} + n_0 + \alpha(m_0 + x))$$

ahora como

$$(x - (x + m_0), \overline{c} + n_0 + \alpha(m_0 + x) - [\overline{c} + \alpha(m_0 + x)]) = (-m_0, n_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

entonces

$$a = f(x, c + \alpha x) = f(x + m_0, \overline{c} + \alpha(m_0 + x))$$

y

$$(x + m_0, \overline{c} + \alpha(m_0 + x)) \in \Delta_{\overline{c}}$$

luego $a \in f(\Delta_{\overline{c}})$, así $f(\Delta_c) \subset f(\Delta_{\overline{c}}) \ldots (1)$.

Sea $b \in f(\Delta_{\overline{c}})$, luego existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$b = f(y, \overline{c} + \alpha y) = f(y, c - m_0\alpha - n_0 + \alpha y) = f(y, c - n_0 + \alpha(y - m_0))$$

ahora como

$$(y-(y-m_0), c-n_0+\alpha(y-m_0)-[c+\alpha(y-m_0)]) = (m_0,-n_0) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

entonces

$$b = f(y, \overline{c}+\alpha y) = f(y-m_0, c+\alpha(y-m_0))$$

y

$$(y-m_0, c+\alpha(y-m_0)) \in \Delta_c$$

luego $b \in f(\Delta_c)$, así $f(\Delta_{\overline{c}}) \subset f(\Delta_c) \ldots (2)$.

Luego de (1) y (2): $f(\Delta_c) = f(\Delta_{\overline{c}})$, por lo tanto $c \in C$.

Por otro lado, desde que C es denso en $\mathbb{R}$, se sigue que $\bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c$ es denso en $\mathbb{R}^2$.

En efecto: Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y-\alpha x \in \mathbb{R} = \overline{C}$, dado $\epsilon > 0$, $I_\epsilon(y-\alpha x)\cap C \neq \emptyset$, luego existe $z \in I_\epsilon(y-\alpha x)$ y $z \in C$, ahora como $(x, z+\alpha x) \in \Delta_z \subseteq \bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c$, $(x, z+\alpha x) \in \bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c$

$$||(x,y)-(x,z+\alpha x)|| = ||(0, y-\alpha x-z)|| = |y-\alpha x-z| < \epsilon$$

$$(x, z+\alpha x) \in B_\epsilon((x,y)) \ , \ B_\epsilon((x,y)) \cap \left(\bigcup_{c\in C}\Delta_c\right) \neq \emptyset$$

luego $(x,y) \in \overline{\bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c}$, $\overline{\bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c} = \mathbb{R}^2$ entonces $\bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c$ es denso en $\mathbb{R}^2$.

Afirmamos que $f(\Delta_{\overline{c}}) = f(\bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c)$.

En efecto. Desde que $\overline{c} \in C$ entonces $\Delta_{\overline{c}} \subseteq \bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c$, luego $f(\Delta_{\overline{c}}) \subseteq f(\bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c)$.

Recíprocamente, sea $a \in f(\bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c)$, entonces existe $c \in C$ tal que $a \in f(\Delta_c)$, así existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a = f(x, c+\alpha x)$, ahora como $c \in C$, por $(*)$, $c-\overline{c} \in G$, luego existen $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $c-\overline{c} = \alpha m_0 + n_0$, $c-n_0 = \overline{c}+\alpha m_0 \ldots (**)$.

Ahora como $(x-(x+m_0), c+\alpha x-[c+\alpha x-n_0]) = (-m_0, n_0) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, entonces $a = f(x, c+\alpha x) = f(x+m_0, c-n_0+\alpha x) = f(x+m_0, \overline{c}+\alpha m_0+\alpha x)$ (por $(**)$), $a = f(x+m_0, \overline{c}+\alpha(x+m_0))$ y $(x+m_0, \overline{c}+\alpha(x+m_0)) \in \Delta_{\overline{c}}$, $a \in f(\Delta_{\overline{c}})$. Desde que $\bigcup\limits_{c\in C}\Delta_c$ es denso en $\mathbb{R}^2$, $f(\Delta_{\overline{c}})$ es denso en el toro T^2.

Luego el campo anterior Y^α, es llamado campo racional o irracional en T^2 conforme α sea racional o no. Si α es racional, el ω-límite de cualquier

órbita es la misma órbita. Si α es irracional, el ω-límite de cualquier órbita es todo el toro T^2.

Ejemplo 1.3.3. (**Campos Gradientes**) Consideremos una variedad $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$. En cada punto $p \in M$ tomemos en T_pM el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ inducido de $\mathbb{R}^k$. Indicamos la norma inducida por ese producto interno por $||\cdot||_p$ o simplemente por $||\cdot||$. Si X e Y son campos de vectores C^∞ en M, entonces la función $g : M \to \mathbb{R}$, $g(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ es de clase C^∞. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^{r+1}, para cada $p \in M$, existe un único vector

$$X(p) \in T_pM \text{ tal que } df(p).v = \langle X(p), v \rangle_p \text{ para todo } v \in T_pM$$

El campo de vectores X asimismo definido es de clase C^r y es llamado **Campo gradiente de** f, que denotamos por $X = \text{grad} f$. Indicaremos algunas propiedades básicas de campos gradientes. Tenemos que $\text{grad} f(p) = 0$ si y solamente si $df(p) = 0$. Si $\alpha : I \to M$ es una curva que pasa por $p \in M$ y $f(\alpha(t)) = cte.$, entonces $0 = df(\alpha(t))\alpha'(t) = \langle X(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)}$, así el campo es ortogonal, en la curva, a la curva. Si β es una curva integral entonces $(f \circ \beta)(t)$ es creciente ya que

$$(f \circ \beta)'(t) = df(\beta(t))\beta'(t) = \langle X(\beta(t)), \beta'(t) \rangle_{\beta(t)} = \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_{\beta(t)} \geq 0$$

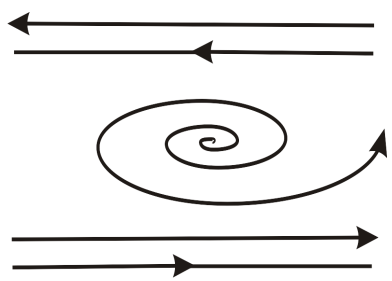
Así a lo largo de las órbitas no singulares de $X = \text{grad} f$, f es estrictamente creciente, pues $df(p)X(p) = ||X(p)||^2 \neq 0$. En particular X no posee órbitas cerradas. Además de esto, el ω-límite de cualquier órbita es constituido de singularidades. En efecto: Supongamos que $X(q) \neq 0$ y $q \in \omega(p)$, para algún $p \in M$. Sea S la intersección de $f^{-1}(f(q))$ con una pequeña vecindad de q. Tenemos que S es una subvariedad de dimensión $m - 1$ ortogonal a $X = \text{grad} f$ y, por la continuidad del flujo, la órbita por cualquier punto próximo a q intersecta a q. Luego la órbita de p intersecta S en más de un punto (en verdad, en una infinidad), lo que es absurdo, pues f es creciente a lo largo de las órbitas. Por otro lado, es evidente que, si el ω-límite de una órbita de un campo gradiente contiene más de una singularidad, debe contener una infinidad de singularidades.

En adelante se puede consultar [9] para encontrar las pruebas de proposiciones y teoremas.

Proposición 1.3.3. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$. Tenemos:

1. $\omega(p)$ es no vacío.
2. $\omega(p)$ es cerrado.
3. $\omega(p)$ es invariante por el flujo de X, es decir, $\omega(p)$ es una unión de órbitas de X.
4. $\omega(p)$ es conexo.

Observación: Las propiedades de la proposición anterior son, válidos para el conjunto α-límite. Por otro lado, si la variedad no es compacta, debemos de restringirnos a una órbita que positivamemente (o negativamemente) permanezca en un compacto. La figura exhibe una órbita de un campo en $\mathbb{R}^2$ cuyo ω-límite es disconexo



como ya vimos, el ω-límite de una órbita de un flujo irracional en el toro $\mathbb{T}^2$ es todo el toro $\mathbb{T}^2$. Existen ejemplos mas complejos de campos en $\mathbb{T}^2$ con un conjunto límite de estructura bastante complicada. Entre tanto para la esfera S^2 la situación es mas simple, debido al siguiente hecho topológico: *Toda curva continua, cerrada y sin autointersecciones separa a S^2 en dos regiones homeomorfas a discos* (**Teorema de Jordan**). La estructura de un conjunto ω-límite de campos en S^2 es descrita por el resultado dado a seguir.

Lema 1.3.2. Consideremos un segmento $\Sigma \subseteq S^2$ transversal a X. La órbita positiva por un punto $p \in S^2$, $\mathcal{O}_+(p)$, intersecta Σ en una sucesión mónotona, es decir, si p_i es la i-ésima intersección de $\mathcal{O}_+(p)$ con Σ, entonces $p_i \in [p_{i-1}, p_i] \subseteq \Sigma$.

Corolario. El ω-límite de una trayectoria γ intersecta Σ como máximo en un punto.

Lema 1.3.3. Si el ω-límite de una trayectoria γ no contiene singularidades entonces $\omega(\gamma)$ es una órbita cerrada. Si $p \in \gamma$, las órbitas por puntos próximos a p tienen esta misma órbita cerrada como ω-límite.

Lema 1.3.4. Sean p_1 y p_2 singularidades distintas del campo en el ω-límite de un punto $p \in S^2$. Existe como máximo una órbita $\gamma \subseteq \omega(p)$ tal que $\alpha(\gamma) = p_1$ y $\omega(\gamma) = p_2$.

Teorema 1.3.2.(**Poincaré-Bendixson**) Sea $X \in \mathcal{X}^r(S^2)$ $(r \geq 1)$ un campo con un número finito de singularidades. Sean $p \in S^2$ y $\omega(p)$ el conjunto límite de p. Entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\omega(p)$ es una singularidad.
2. $\omega(p)$ es una órbita cerrada.
3. $\omega(p)$ es constituido por singularidades p_1, p_2,..., p_n y órbitas regulares tales que, si $\gamma \subseteq \omega(p)$ entonces $\alpha(\gamma) = p_i$ y $\omega(\gamma) = p_j$.

1.4. Estabilidad Estructural

El estudio cualitativo de una ecuación diferencial consiste en la descripción geométrica de sus espacios de órbitas. Es, entonces, natural preguntarse cuando es que dos espacios de órbitas tienen la misma descripción; esto corresponde a establecer una relación de equivalencia entre ecuaciones diferenciales. Una relación de equivalencia que exprime la estructura geométrica de las órbitas es la equivalencia topológica.

Previamente, introduciremos aquí una topología natural en el espacio $\mathcal{X}^r(M)$ de campos de vectores de clase C^r en una variedad compacta. En esta topología, dos campos X, $Y \in \mathcal{X}^r(M)$ estarán próximos si los campos y sus derivadas de orden r estuviesen próximos en todos los puntos de M.

Consideremos inicialmente el espacio $C^r(M; \mathbb{R}^s)$ de aplicaciones de clase

C^r, $0 \leq r < \infty$ definidas en una variedad compacta M tenemos en $C^r(M;\mathbb{R}^s)$ una estructura natural de espacio vectorial:

$(f+g)(p) = f(p)+g(p)$, $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ para $f, g \in C^r(M;\mathbb{R}^s)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tomemos en M un cubrimiento finito de abiertos $V_1,\ldots,V_k$ tal que cada V_i este contenido en dominio de una carta local (x_i, U_i) con $x_i(U_i) = B(2)$ y $x_i(V_i) = B(1)$, donde $B(1)$ y $B(2)$ son las bolas abiertas de radio uno y dos con centro en el origen de $\mathbb{R}^m$. Para $f \in C^r(M;\mathbb{R}^s)$ denotemos por $f^i = f \circ {x_i}^{-1} : B(2) \to \mathbb{R}^s$; definimos

$$\|f\|_r = \max_i \sup_{u \in B(1)} \left\{ \left\|f^i(u)\right\|, \left\|df^i(u)\right\|, \ldots, \left\|d^r f^i(u)\right\| \right\}$$

Proposición 1.4.1. $\|\cdot\|_r$ es una norma completa en $C^r(M;\mathbb{R}^s)$.

Observación: La topología inducida por la norma $\|\cdot\|_r$ en $C^r(M;\mathbb{R}^s)$ no depende del cubrimiento $V_1,\ldots,V_k$ de M utilizada.

Veamos, a seguir, algunas propiedades importantes de $C^r(M;\mathbb{R}^s)$ con la topología heredada por la norma $\|\cdot\|_r$.
Un subconjunto de un espacio topológico es **residual** si contiene una intersección numerable de subconjuntos abiertos y densos. Un espacio topológico es de **Baire** si todo subconjunto residual es denso. Como $C^r(M;\mathbb{R}^s)$ es un espacio métrico completo, tenemos, la siguiente proposición.

Proposición 1.4.2. $C^r(M;\mathbb{R}^s)$ es un espacio de Baire Separable; esto es, es un espacio de Baire y posee una base numerable de abiertos.

Proposición 1.4.3. El conjunto de las aplicaciones de clase C^∞ es denso en $C^r(M;\mathbb{R}^s)$.

Consideremos ahora una variedad compacta $N \subseteq \mathbb{R}^s$. Como N es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^s$, $C^r(M;N)$ es cerrado en $C^r(M;\mathbb{R}^s)$. Por tanto $C^r(M;N)$, con la topologia inducida de $C^r(M;\mathbb{R}^s)$, es un espacio de Baire separable.
Sean $N_1 \subseteq \mathbb{R}^{s_1}$, $N_2 \subseteq \mathbb{R}^{s_2}$ variedades compactas y $\Phi : N_1 \to N_2$ una aplicación de clase C^l, $r \leq l \leq \infty$ consideremos $\Phi_* : C^r(M;N_1) \to C^r(M;N_2)$

definido por $\Phi_* f = \Phi \circ f$.

Proposición 1.4.4. La aplicación Φ_* es continua.

Teorema 1.4.1.(**Whitney**) Si M es una variedad diferenciable de dimensión m, existe una inmersión propia $f : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$.

Sea ahora M y N variedades abstractas, siendo M compacta. Podemos definir una topología de clase C^r en $C^r(M; N)$. Para esto basta hacer que N este inmerso en un espacio euclideano $\mathbb{R}^s$ (ver Teorema 1.4.1). La proposición anterior muestra que la topología en ella no depende de la inmersión.

Proposición 1.4.5. El conjunto de las aplicaciones de clase C^∞ es denso en $C^r(M; N)$.

Proposición 1.4.6. El conjunto de los difeomorfismos de clase C^r en M, $\mathrm{Dif}^r(M)$, es abierto en $C^r(M; M)$.

Se sigue, de la proposición anterior, que $\mathrm{Dif}^r(M)$ es un espacio de Baire separable y que el subconjunto de los difeomorfismos de clase C^∞, $\mathrm{Dif}^\infty(M)$, es denso. Finalmente, consideremos el espacio $\mathfrak{X}^r(M)$ de los campos de vectores de clase C^r en una variedad compacta M. Suponiendo que $M \subseteq \mathbb{R}^s$, es fácil ver que $\mathfrak{X}^r(M)$ es un subespacio cerrado de $C^r(M; \mathbb{R}^s)$. Luego $\mathfrak{X}^r(M)$ es un espacio de Baire separable.

Lema 1.4.1. Sean M, N y P variedades compactas. Se cumplen:

1) La aplicación $comp : C^r(M, N) \times C^r(N, P) \to C^r(M, P)$ definida por $comp(f, g) = g \circ f$, es continua.

2) La aplicación $i : Dif^r(M) \to Dif^r(M)$ definida por $i(f) = f^{-1}$, es continua.

Usando al Lema 1.4.1 mostraremos que todo campo de vectores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ puede ser aproximado por un campo C^∞, $Z : M \to TM$. En efecto, sea $\pi : TM \to M$ la proyección natural, como π_* es continua existe un $Y : TM \to M$ C^r próximo de Y luego $\pi \circ Y$ esta C^r próximo de $\pi \circ X = id_M$. Por la Proposición 1.4.6, $\varphi = \pi \circ Y$ es un difeomorfismo. Sea $Z = Y \circ \varphi^{-1}$;

como φ es de clase C^∞, Z es un campo de vectores C^∞, pues $\pi \circ Z = id_M$. Además de esto, Z aproxima X.

Definición 1.4.1. Sean $S \subset N$ una subvariedad de clase C^r y $f : M \to N$ una aplicación C^k, donde $k, r \geq 1$. Decimos que f *es transversal a* S *en un punto* $p \in M$ si $f(p) \notin S$ ó $df(p)(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$.

Definición 1.4.2. Decimos que f *es transversal a* S, $f \overline{\pitchfork} S$, si lo es en cada punto de $p \in M$.

Definición 1.4.3. Sean $S_1, S_2 \subset N$, S_1 *es transversal a* S_2 si la inclusión $i : S_1 \to N$ es transversal a S_2.

Sea $\mathfrak{X}^r(M)$ el espacio de los campos de clase C^r, en una variedad compacta M, provisto de la topología C^r, $r \geq 1$.

Definición 1.4.4. Dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y preservando la orientación de las trayectorias [esto es, por ejemplo si $p \in M$ y $h(\mathcal{O}_X^+(p)) = \mathcal{O}_Y^+(h(p))$ entonces dado $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $0 < t < \delta$, $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_Y(\hat{t}, h(p))$ para algún $0 < \hat{t} < \epsilon$]. El homeomorfismo $h : M \to M$ es llamado *Equivalencia Topológica* entre X e Y.

Teorema 1.4.2. Sea M una variedad compacta, $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. La relación $X \equiv_{top} Y$ si y sólo si X e Y son topológicamente equivalentes, es una relación de equivalencia en $\mathfrak{X}^r(M)$.

Una relación mas fuerte es la conjugación entre los flujos de los campos de vectores.

Definición 1.4.5. Dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ son *conjugados* si existe una equivalencia topológica h que preserva el parámetro t; esto es $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_Y(t, h(p))$ para todo $p \in M$ y $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.4.7. Sea h una equivalencia topológica entre dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$. Entonces:

1) $p \in M$ es una singularidad de X si y sólo si $h(p)$ es una singularidad de Y.

2) $\mathcal{O}_X(p)$ es cerrado si y sólo si $\mathcal{O}_Y(h(p))$ es cerrado.

3) $h(\omega_X(\mathcal{O}_X(p))) = \omega_Y(\mathcal{O}_Y(h(p)))$, $h(\alpha_X(\mathcal{O}_X(p))) = \alpha_Y(\mathcal{O}_Y(h(p)))$.

Definición 1.4.6. Sea M una variedad compacta. Decimos que un campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ es *estructuralmente estable* si el comportamiento topológico de sus órbitas no se altera mediante pequeñas perturbaciones del campo. Formalmente, decimos que $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ es estructuralmente estable si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que si $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ con $\|X - Y\|_r < \delta$ entonces $X \equiv_{top} Y$.

Definición 1.4.7. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$.

1) Decimos que una singularidad p de X es un *atractor o pozo de* X si y sólo si existe una vecindad V_p de p tal que si $q \in V_p$ entonces $\lim_{n\to\infty} \varphi_X(t, q) = p$.

2) Decimos que una singularidad p de X es un *repulsor o fuente de* X si y sólo si p es un atractor de $-X$.

Definición 1.4.8. Sea M una variedad compacta y $f \in Dif^r(M)$.

1) La *órbita de un punto* $p \in M$ es el conjunto $\mathcal{O}_f(p) = \{f^n(p);\ n \in \mathbb{Z}\}$. Si $\mathcal{O}_f(p)$ es finito decimos que p es *periódico* y el menor entero $n > 0$ tal que $f^n(p) = p$ es llamado *período* de p. Si $f(p) = p$, decimos que p es un *punto fijo*.

2) El $\omega-$*límite* de p es el conjunto, denotado por $\omega_f(p)$, definido por $\omega_f(p) = \{q \in M;\ \lim_{n\to\infty} f^n(p) = q\}$. Si $x \in \mathcal{O}_f(p)$ entonces $\omega_f(x) = \omega_f(p)$. Además $\emptyset \neq \omega_f(p)$ es cerrado e invariante.

3) El $\alpha-$*límite* de p es el conjunto, denotado por $\alpha_f(p)$, definido por $\alpha_f(p) = \omega_{f^{-1}}(p)$. Si $x \in \mathcal{O}_f(p)$ entonces $\alpha_f(x) = \alpha_f(p)$. Además $\emptyset \neq \alpha_f(p)$ es cerrado e invariante.

4) Dos difeomorfismos $f, g \in Dif^r(M)$ son *conjugados* si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ tal que $h \circ f = g \circ h$ se sigue $h \circ f^n = g^n \circ h$, para cualquier entero n y, por tanto, $h(\mathcal{O}_f(p)) = \mathcal{O}_g(h(p))$, esto es, h lleva órbitas de f en órbitas de g y, en particular puntos periódicos en puntos periódicos de mismo período. También se tiene que $h(\omega_f(p)) = \omega_g(h(p))$ y $h(\alpha_f(p)) = \alpha_g(h(p))$.

5) Decimos que $f \in Dif^r(M)$ es *estructuralmente estable* si existe una vecindad $\mathcal{V}$ de f en $Dif^r(M)$ tal que cualquier $g \in \mathcal{V}$ es conjugado a f.

Definición 1.4.9. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p, q \in M$. Decimos que X e Y son *topológicamente equivalentes en p y q* respectivamente, si existen vecindades V_p y W_q y un homeomorfismo $h : V_p \to W_q$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y, preservando la orientación de las órbitas y $h(p) = q$.

Definición 1.4.10. Sean $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$. Decimos que X es *localmente estable en p*, si existen vecindades $\mathcal{N}_X$ de X en $\mathfrak{X}^(M)$ y $U_p \subseteq M$ tales que, para cada $Y \in \mathcal{N}_X$, X en p es topologicamente equivalente a Y en q, para algún $q \in U_p$.

Teorema 1.4.3.(Flujo Tubular) Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ un punto regular de X. Sean $C = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m;\ |x_i| < 1,\ i = 1, \ldots, m\}$ y X_C un campo en C definido por $X_C(x) = (1, 0, \ldots, 0)$, para todo $x \in M$. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^r $h : V_p \to C$, donde V_p es vecindad de p en M, llevando trayectorias de X en trayectorias de X_C.

Corolario 1. Si $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p, q \in M$ puntos regulares de X e Y respectivamente, entonces X_p es equivalente Y_q.

Corolario 2. Si $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ un punto regular de X, entonces X es localmente estable en p.

1.5. Singularidades y Puntos Fijos Hiperbólicos

Definición 1.5.1. Decimos que $p \in M$ es una *singularidad simple* de un campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ si $DX(p) : T_pM \to T_pM$ no posee autovalor nulo.

Proposición 1.5.1. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ es una singularidad simple de X. Entonces existen vecindades $\mathcal{N}_X \subseteq X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $U_p \subseteq M$ de X y p respectivamente, y una función continua $\rho : \mathcal{N}_X \to U_p$. En particular, una singularidad simple es aislada.

Vamos ahora a caracterizar una singularidad simple de un campo de vectores X en M, en términos de transversalidad. Para esto consideremos el fibrado tangente $TM = \{(p, v);\ p \in M,\ v \in T_pM\}$ y sea $M_0 = \{(p, 0);\ p \in M\}$ la sección nula, M_0 es una subvariedad de TM difeomorfa a M, y un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ puede ser visto como una aplicación de clase C^r de M en TM, que denotaremos por la misma letra X. Por tanto p es singularidad de X si y solamente si $X(p) \in M_0$.

Proposición 1.5.2. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $(r \geq 1)$ y $q \in M$ una singularidad de X. Entonces q es singularidad simple de X si y solamente si la aplicación $p \longmapsto (p, X(p))$ de M en TM es transversal a la sección nula M_0 en q.

Observación: Como una singularidad simple es aislada y M es compacta, se sigue que X tiene un número finito de singularidades.

Definición 1.5.2. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad de X. Decimos que p es una *singularidad hiperbólica* si $DX(p) : T_pM \to T_pM$ es un *campo lineal hiperbólico*, esto es, $DX(p)$ no tiene autovalor en el eje imaginario.

Observación: Es claro que si $p \in M$ es una singularidad hiperbólica entonces p es una singularidad simple.

Definición 1.5.3. Sea $p \in M$ un punto fijo de $f \in Dif^r(M)$. Decimos que p es un *punto fijo elemental* si uno no es autovalor de $Df(p) : T_pM \to T_pM$.

Proposición 1.5.3. Sea $f \in Dif^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo elemental de f. Existen vecindades $\mathcal{N}_f \subseteq Dif^r(M)$ y U_p de p y una función continua $\rho : \mathcal{N}_f \to U_p$ que a cada $g \in \mathcal{N}_f$ le asocia el único punto fijo de g en U_p

y este punto fijo es elemental. En particular, un punto fijo elemental es aislado.

Consideremos la diagonal $\Delta = \{(p,p);\ p \in M\}$, Δ es una subvariedad de $M \times M$ de dimensión m. Si $f \in Dif^r(M)$ consideremos la aplicación $\widetilde{f} : M \to M \times M$, $\widetilde{f}(p) = (p, f(p))$, cuya imagen es el gráfico de f.

Proposición 1.5.4. Sea $f \in Dif^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo de f. Entonces p es un punto fijo elemental si y solamente si $\widetilde{f}$ es transversal a Δ en p.

Definición 1.5.4. Sea $p \in M$ un punto fijo de $f \in Dif^r(M)$. Decimos que p es un **punto fijo hiperbólico** si $Df(p) : T_pM \to T_pM$ es un isomorfismo hiperbólico, esto es, si $Df(p)$ no tiene autovalor de norma uno.

Teorema 1.5.1.(Grobman-Hartman) Sean $f \in Dif^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f. Sea $A = Df(p) : T_pM \to T_pM$ entonces existen vecindades $V_p \subseteq M$ y $U_p \subseteq T_pM$ y un homeomorfismo $h : U_p \to V_p$ tal que $hA = fh$.

Análogamente un campo X es localmente equivalente a su parte lineal en una singularidad hiperbólica.

Teorema 1.5.2. Sea $f \in Dif^r(M)$, $r \geq 1$ y sea $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f. Entonces f es localmente estable en p.

Teorema 1.5.3. Sean $X : V \to \mathbb{R}^m$ un campo C^r, donde $V \subseteq \mathbb{R}$ abierto y 0 es una singularidad hiperbólica de X. Sea $L = DX(0)$, entonces X es localmente equivalente a L en 0.

Teorema 1.5.4. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y sea $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X. Entonces X es localmente estable en p.

1.6. Variedades Invariantes

Definición 1.6.1. Sean $f \in Dif^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f. El conjunto

$$W_f^s(p) = \{q \in M;\ \omega_f(q) = p\}$$

es llamado *variedad estable* de p y el conjunto

$$W_f^u(p) = \{q \in M;\ \alpha_f(q) = p\}$$

es llamado *variedad inestable* de p. Es claro que $W_f^s(p)$ y $W_f^u(p)$ son invariantes por f.

Supongamos que $M \subseteq \mathbb{R}^k$ y sea d la métrica en M inducida de $\mathbb{R}^k$. Para $\beta > 0$, denotaremos por $B_\beta \subseteq M$ la bola de centro p y radio β.

Definición 1.6.2. Los conjuntos

$$W_\beta^s(p) = \{q \in B_\beta;\ f^n(q) \in B_\beta,\ \forall n \geq 0\}$$

$$W_\beta^u(p) = \{q \in B_\beta;\ f^{-n}(q) \in B_\beta,\ \forall n \geq 0\}$$

son llamados *variedades estable e inestables de tamaño β del punto p.*

Recordemos que una inmersión topológica de $\mathbb{R}^s$ en M es una aplicación continua $F : \mathbb{R}^s \to M$ tal que para todo punto $x \in \mathbb{R}^s$ tiene una vecindad V con la siguiente propiedad: *la restricción de F a V, $F|_V$ es un homeomorfismo sobre su imagen.* En este caso, decimos que $F(\mathbb{R}^s) \subseteq M$ es una subvariedad topológica inmersa de dimensión s. Un mergullo topológico de $\mathbb{R}^s$ en M es una inmersión topológica inyectiva $F : \mathbb{R}^s \to M$ que es un homeomorfismo sobre su imagen.

Proposición 1.6.1. Si $\beta > 0$ es suficientemente pequeño tenemos:

1) $W_\beta^s(p) \subseteq W_f^s(p)$ y $W_\beta^u(p) \subseteq W_f^u(p)$, esto es, los puntos de una vecindad de p cuya órbita positiva (respectivamente negativa) permanece en la vecindad, tienen a p como ω-límite (respectivamente α-límite).

2) $W_\beta^s(p)$ (respectivamente $W_\beta^u(p)$) es un disco topologicamente mergullado en M cuya dimensión es igual a la del subespacio estable (respectivamente inestable) de $A = Df(p)$.

3) $W^s_f(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W^s_\beta(p))$ y $W^u_f(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W^u_\beta(p))$, consecuentemente existe una inmersión topológica biunivoca $\varphi_s : E^s \to M$ ($\varphi_u : E^u \to M$) cuya imagen es $W^s(p)$ (respectivamente, $W^s(p)$), donde E^s y E^u son los subespacios estables e inestables de $A = Df(p)$.

Observaciones:

1) Si $p \in M$ es un punto fijo de f entonces $W^s_f(p) = W^u_{f^{-1}}(p)$.

2) Mientras que la variedad estable local es un disco topológicamente mergullado en M, la variedad estable global puede no ser una subvariedad mergullada en M.

Definición 1.6.3. Sean S y S' subvariedades de clase C^r de M y $\epsilon > 0$. Decimos que S y S' estan ϵ *C^r-próximos* si existe un difeomorfismo de clase C^r, $h : S \to S'$, tal que $\tilde{i} \circ h$ esta ϵ próximo de i en la topologia C^r, donde $i : S \to M$ e $\tilde{i} : S' \to M$ son las inclusiones.

Teorema 1.6.1. (Teorema de la Variedad Estable) Sean $f \in Dif^r(M)$, $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f y E^s el subespacio estable de $A = Df(p)$. Tenemos entonces:

1) $W^s_f(p)$ es una subvariedad de clase C^r inmersa biunivocamente en M y el espacio tangente a $W^s(p)$, en el punto p es E^s, esto es, $T_pW^s_f(p) = E^s$.

2) Sea $D \subseteq W^s_f(p)$ un disco mergullado conteniendo al punto p. Considere una vecindad $\mathcal{N} \subseteq Dif^r(M)$ tal que a cada $g \in \mathcal{N}$ tenga un único punto fijo hiperbólico p_g, contenido en una vecindad U_p de p. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe una vecindad $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$ tal que, para todo $g \in \tilde{\mathcal{N}}$, existe un disco $D_g \subseteq W^s_g(p_g)$ ϵ C^r-próximo de D.

Consideremos ahora un campo de vectores $X \in \mathcal{X}^r(M)$ y sea $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X.

Definición 1.6.4. La *variedad estable de p relativa al campo X*, $W^s_X(p)$, es el conjunto

$$W^s_X(p) = \{q \in M;\ \omega_x(q) = p\}.$$

La *variedad inestable de p relativa al campo X*, $W^u_X(p)$, es el conjunto

$$W^u_X(p) = \{q \in M;\ \alpha_x(q) = p\}.$$

Sea $f = \varphi_{t=1}$ el difeomorfismo inducido en el tiempo $t = 1$, como vimos, p es un punto fijo hiperbólico entonces $W^s_f(p) = W^s_X(p)$.

Definición 1.6.5. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad hiperbólica. El *índice de p*, denotado por $i_p(X)$, es $i_p(X) = i(DX(p))$, donde $i(DX(p)) = \dim E^s$ y E^s es el subespacio estable de $DX(p)$.

Definición 1.6.6. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad hiperbólica. Decimos que p es un *atractor o pozo* si el índice de p es máximo y p es un *repulsor o fuente* si el índice es cero. En otro caso p es llamado *silla*.

1.7. El λ-lema

Sea f un difeomorfismo de clase C^r en una vecindad V de $\mathbb{R}^m$ teniendo al 0 como punto fijo hiperbólico. Consideremos el isomorfismo hiperbólico $A = Df(p)$ y la descomposición invariante $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$, sabemos que $W^s_{loc}(0)$ es el gráfico de una aplicación de clase C^r, $\varphi_s : B^s_\beta(0) \to E^u$ tal que $\varphi_s(0) = 0$ y $D\varphi_s(0) = 0$, donde $B^s_\beta(0) \subseteq E^s$ denota la bola de centro 0 y radio β. De la misma forma la variedad inestable local $W^u_{loc}(0)$ es el gráfico de una aplicación de clase C^r, $\varphi_u : B^u_\beta(0) \to E^s$ tal que $\varphi_u(0) = 0$ y $D\varphi_u(0) = 0$, donde $B^u_\beta(0) \subseteq E^u$ denota la bola de centro 0 y radio β. Consideremos la aplicación

$$\varphi : B^s_\beta(0) \oplus B^u_\beta(0) \to E^s \oplus E^u,\ \varphi(x_s, x_u) = (x_s - \varphi_u(x_u),\ x_u - \varphi_s(x_s)).$$

Es claro que φ es de clase C^r y que $D\varphi(0)$ es la identidad. Luego, φ es un difeomorfismo local de una vecindad de 0 en $\mathbb{R}^m$. Consideremos el difeomorfismo $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Entonces $\tilde{f}$ es un difeomorfismo de una vecindad del origen con $\tilde{f}(0) = 0$ y $D\tilde{f}(0) = A$. Además de esto, la variedad estable local de $\tilde{f}$ es una vecindad del origen en E^s, en cuanto la variedad inestable local de $\tilde{f}$ es una vecindad del origen en E^u. En otras palabras, podemos suponer que la variedad estable local (respectivamente inestable

local) de un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo f sea una vecindad del punto fijo en el subespacio estable (respectivamente inestable) de la parte lineal de f.
Sea $\|\cdot\|$ una métrica en $\mathbb{R}^m$ tal que $\|A^s\| \leq a < 1$ y $\left\|(A^u)^{-1}\right\| \leq a < 1$, donde A^s y A^u son las restricciones de A, respectivamente, a E^s y E^u. Si $f^s : B^s_\beta(0) \to E^s$ es la restricción de f a $W^s_\beta(0) \subseteq B^s_\beta(0) \subseteq E^s$, entonces $Df^s(0) = A^s$. Como A^s es una contracción tenemos que, si β es suficientemente pequeño, f^s también es una contracción. Por tanto, si $B^s(0) \subseteq B^s_\beta(0)$ es una bola abierta de centro en el origen tal que $f(\partial B^s(0)) \subseteq B^s(0)$, donde $\partial B^s(0) = \overline{B^s(0)} - B^s(0)$ es el borde de $B^s(0)$. El anillo $G^s(0) = \overline{B^s(0) - f(B^s(0))}$ es llamado un *dominio fundamental* de la variedad estable de 0. Es claro que $\partial G^s(0) = \partial B^s(0) \cup f(\partial B^s(0))$.
Si $x \in W^s_f(0) - \{0\}$, entonces la órbita de x tiene por lo menos un y a lo más dos puntos en el dominio fundamental $G^s(0)$, esto es,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(G^s(0)) = W^s(0) - \{0\}$$

y, si $x \in \text{int}(G^s(0))$ entonces $f^n(x) \notin G^s(0)$ para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
Cualquier vecindad $N^s(0)$ de $G^s(0)$ disjunta de $W^u_{loc}(0)$ es denominada una *vecindad fundamental* para la variedad estable de 0. Análogamente definimos como dominio fundamental y vecindad fundamental para la variedad inestable de 0 a $G^u(0)$ y $N^u(0)$, respectivamente.

Sean $B^s \subseteq E^s$ una bola cerrada contenida en $W^s_{loc}(0)$, $B^u \subseteq E^u$ una bola cerrada contenida en $W^u_{loc}(0)$ y $V = B^s \times B^u$. Considere un punto $q \in W^s_{loc}(0)$ y un disco D^u de dimensión $u = \dim E^u$, transversal a $W^s_{loc}(0)$ en q.

Lema 1.7.1. (λ-lema o lema de la inclinación) Sean $V = B^s \times B^u$, $q \in W^s(0) - \{0\}$ y D^u como antes. Sea D^u_n la componente conexa que contiene $f^n(q)$ de $f^n(D^u) \cap V$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces D^u_n esta ϵ C^1-próximo de B^u.

Observación: El λ-lema puede ser enunciado para una familia de discos transversales a $W^s(0)$, desde que esta familia sea continua en la topología C^1. Asimismo, sea $F : G^s(0) \to C^1(B^u,\ M)$ una aplicación continua que a cada punto q del dominio fundamental $G^s(0)$ le asocia un disco

$D_q^u = F(q)(B^u)$. Sea $U = B^s \times B^u$ como arriba. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(D_q^u) \cap U$ es un disco ϵ C^1-próximo a B^u para cualquier $q \in G^s(0)$ y $n \geq n_0$.

Corolario 1. Sean p_1, p_2, $p_3 \in M$ puntos fijos hiperbólicos de $f \in Dif^r(M)$. Si $W^u(p_1)$ tiene un punto de intersección transversal con $W^s(p_2)$ y $W^u(p_2)$ tiene un punto de intersección transversal con $W^s(p_3)$, entonces $W^u(p_1)$ tiene un punto de intersección transversal con $W^s(p_3)$.

Corolario 2. Sean $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de $f \in Dif^r(M)$ y $N^s(p)$ una vecindad fundamental de $W^s(p)$. Entonces

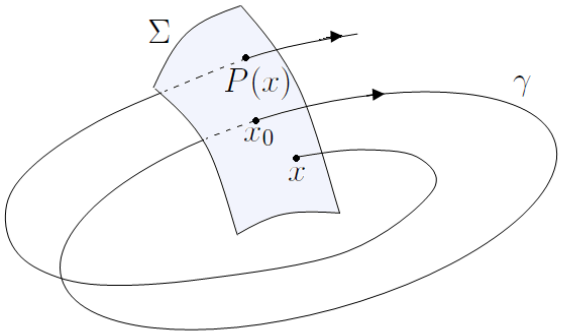
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(N^s(p)) \supseteq U - W^u_{loc}(p),$$

donde U es una vecindad de p.

Lema 1.7.2. Dado $\epsilon > 0$, existe t_0 tal que si $t > t_0$ y D_t^u es la componente conexa que contiene $\varphi_t(q)$, de $\varphi_t(D^u) \cap V$, entonces D_t^u esta ϵ C^1-próximo de B^u, donde $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ es el flujo asociado al campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$.

1.8. Transformación de Poincaré

Sea γ una órbita cerrada de un campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Por un punto $x_0 \in \gamma$ consideremos una sección transversal Σ al campo X.
La órbita por x_0 vuelve a intersectar Σ en el tiempo τ; donde τ es el período de γ. Por la continuidad del flujo de X, la órbita por un punto $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de x_0 también vuelve a intersectar Σ en un tiempo próximo a τ. Luego si $V \subseteq \Sigma$ es una vecindad de x_0 suficientemente pequeña, podemos definir una aplicación $P : V \to \Sigma$ que a cada punto $x \in V$ asocia $P(x)$, siendo $P(x)$ el primer punto donde la órbita de $x \in V$ vuelve a intersectar Σ. Esta aplicación es denominada la *Transformación de Poincaré asociado a la órbita* γ.



La aplicación de Poincaré

Definición 1.8.1. Un *flujo tubular* de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ es un par $(F,\ f)$, donde F es un abierto de M y f es un difeomorfismo de clase C^r de F sobre el cubo $I^m = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1};\ |x| < 1 \text{ y } |y_i| < 1,\ i = 1, \ldots,\ m-1\}$, que lleva las trayectorias de X en F en las rectas $I \times \{y\} \subseteq I \times I^{m-1}$. Si f_*X denota el campo en I^m inducido por f y X, esto es, $f_*X(x,y) = Df(f^{-1}(x,y)) \cdot X(f^{-1}(x,y))$ entonces f_*X es paralelo al campo constante $(x,y) \longmapsto (1,0)$. El abierto F es llamado una *caja de flujo* para el campo X.

Proposición 1.8.1. (Flujo Tubular Largo) Sea $\gamma \subset M$ un arco de trayectoria de X compacto y no cerrado. Entonces existe un flujo tubular $(F,\ f)$ de X tal que $F \supset \gamma$.

Proposición 1.8.2. Sean γ una órbita cerrada de un campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y Σ una sección transversal a X por un punto $p \in \gamma$. Si $P_\Sigma : U \subset \Sigma \to \Sigma$ es la transformación de Poincaré, entonces P_Σ es un difeomorfismo de clase C^r de una vecindad V_p de p en Σ sobre un abierto de Σ.

Definición 1.8.2. Sea $p \in \gamma$, donde γ es una órbita cerrada de X. Sea Σ una sección transversal a X por el punto p. Decimos que γ es una *órbita cerrada hiperbólica* de X si p es un punto fijo hiperbólico de la transformación de Poincaré $P : V \subset \Sigma \to \Sigma$.

Observación: Como el flujo de un campo de vectores dependen continuamente del campo, tenemos que la transformación de Poincaré también depende continuamente del campo. Mas precisamente, sea $P_X : V \subset \Sigma \to \Sigma$ la transformación de Poincaré de X. Sea $\mathcal{V}$ una vecindad de X en $\mathfrak{X}^r(M)$

tal que para todo Y en $\mathcal{V}$, Σ es una sección transversal a Y y toda órbita de Y por un punto de V vuelve a intersectar Σ. Entonces la aplicación $\mathcal{V} \longmapsto C^r(V,\ \Sigma)$ que a cada $Y \in \mathcal{V}$ asocia su transformación de Poincaré P_Y, es continua.

De la Observación anterior concluimos que, si γ es una órbita cerrada hiperbólica del campo X, existe una vecindad $\mathcal{V}$ de X en $\mathcal{X}^r(M)$ tal que todo $Y \in \mathcal{V}$ posee una órbita cerrada hiperbólica $\gamma_{_Y}$ próxima a γ

Definición 1.8.3. Sea Σ una sección transversal al campo X por un punto $p \in \gamma$, donde γ es una órbita cerrada. Decimos que Σ es una *sección invariante* si existe una vecindad $U \subset \Sigma$ de p tal que $\varphi_\omega(U) \subset \Sigma$, donde ω es el período de γ y φ es el flujo de X.

Lema 1.8.1. Sean $X \in \mathcal{X}^r(M)$, γ una órbita cerrada hiperbólica de X de período ω y Σ una sección transversal a X por un punto $p \in \gamma$. Entonces existe una función continua $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{X}^r(M)$, donde $\mathcal{V}$ es una vecindad de X, tal que:

1) $\mu(Y) = \rho_{_Y} \cdot Y$, donde $\rho_{_Y} : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, positiva, que vale 1 fuera de una vecindad de un punto de γ.

2) Existe una vecindad $U \subset \Sigma$ de p tal que $Y^*_\omega(U) \subset \Sigma$, donde $Y^* = \mu(Y)$. Esto es, Σ es una sección invariante de $Y^* = \mu(Y)$ para todo $Y \in \mathcal{V}$.

Observación: Sean $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $p_0 \in M$ y Σ una sección transversal a X conteniendo a p_0. Sean $\Sigma^1 = \varphi_{t_1}(\Sigma)$ y $p_1 = \varphi_{t_1}(p_0)$, donde φ es el flujo de X. En la demostración del lema 1,8,1, se sigue que podemos reparametrizar todos los campos próximos a X, de modo que lleven la sección Σ en la sección Σ^1 en el tiempo t_1. Tal reparametrización puede ser localizada en una vecindad de un punto $p = \varphi_t(p_0)$ para $0 < t < t_1$.

Proposición 1.8.3. Si γ es una órbita cerrada hiperbólica de un campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$, entonces X es localmente estable en γ.

Definición 1.8.4. Sea γ una órbita cerrada hiperbólica de una campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$ definimos las *variedades estables e inestables* de γ por

$$W^s(\gamma) = \{y \in M;\ \omega(y) = \gamma\},$$

$$W^u(\gamma) = \{y \in M;\ \alpha(y) = \gamma\}.$$

Existe una vecindad V de γ tal que, si $\varphi_t(q) \in V$,para $t \geq 0$, entonces $q \in W^s(\gamma)$. Tal hecho se sigue de una propiedad análoga al de la transformación (difeomorfismo) de Poincaré de γ. Consideremos los conjuntos

$$W^s_V(\gamma) = \{y \in V;\ \varphi_t(y) \in V \text{ para } t \geq 0\}$$

$$W^u_V(\gamma) = \{y \in V;\ \varphi_t(y) \in V \text{ para } t \leq 0\}.$$

Tenemos que $W^s(\gamma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{-n}(W^s_V(\gamma))$ y $W^u(\gamma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(W^u_V(\gamma))$.

Proposición 1.8.4. Sea γ una órbita cerrada hiperbólica de un campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Sea V una pequeña vecindad abierta de γ. Entonces $W^s_V(\gamma)$ y $W^u_V(\gamma)$ son subvariedades de clase C^r de M, además $W^s_V(\gamma)$ es transversal a $W^u_V(\gamma)$ y $W^s_V(\gamma) \cap W^u_V(\gamma) = \gamma$.

Corolario. $W^s(\gamma)$ y $W^u(\gamma)$ son subvariedades inmersas de M de clase C^r.

Observación: Sea γ una órbita cerrada hiperbólica de un campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Se prueba que existe una vecindad $\mathcal{V}$ de X y, para cada $Y \in \mathcal{V}$, existe una vecindad $W_Y \subset W^s(\gamma_Y)$ de γ_Y tal que la aplicación $Y \longmapsto W_Y$ sea continua. Esto es, dado $\epsilon > 0$ y $Y_0 \in \mathcal{V}$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|Y - Y_0\| < \delta$, entonces W_Y está ϵ C^r-próxima de W_{Y_0}.

Capítulo 2

Campos de Morse - Smale

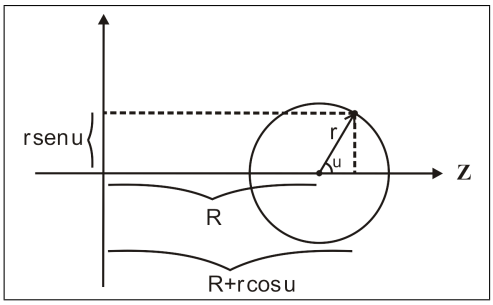
2.1. Algunas definiciones y ejemplos

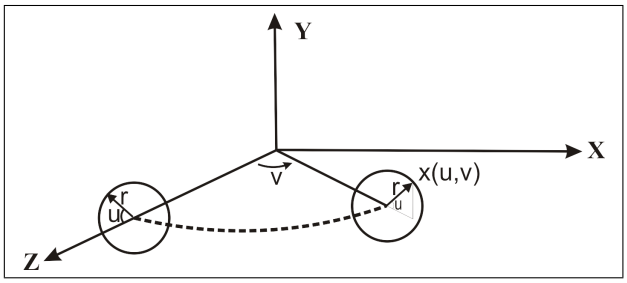
Definiremos aqui una clase de campos que desempeñan un papel importante en la teoría de los sistemas dinámicos. Esta clase, denominada de Morse-Smale, constituye un subconjunto abierto, no vacío y sus elementos son estructuralmente estables. Iniciamos definiendo los campos de Morse-Smale. Probaremos a seguir, que un campo de Morse-Smale en M^2 es estructuralmente estable, donde M^2 es una variedad compacta de dimensión dos. Antes de presentar la definición formal de los campos de Morse-Smale, vamos a motivarla a travez de algunos ejemplos. Como nos proponemos establecer una clase de campos estructuralmente estables, de inicio debemos imponer que las singularidades y órbitas cerradas sean hiperbólicas. Caso contrario, los campos no serían ni por los menos localmente estable. Resaltamos también, que las intersecciones de las variedades estables e inestables de elementos críticos (singularidades y órbitas cerradas) deben ser preservadas por equivalencia topológica. Por tanto es natural exigir que esas intersecciones sean transversales y para garantizar la persistencia de pequeñas perturbaciones del campo.

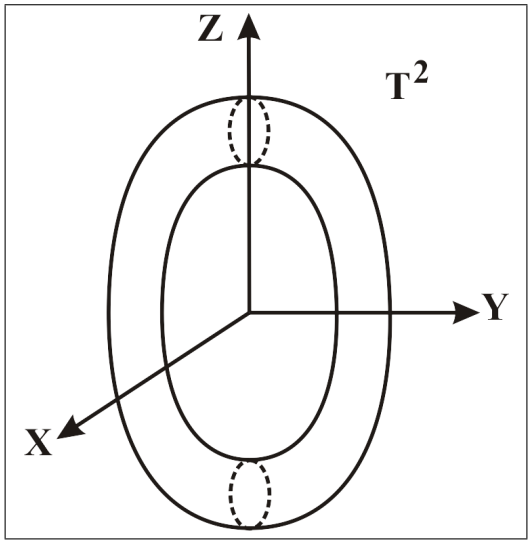
Ejemplo 2.1.1. Considere el toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ y sea $X = \text{grad}h$, donde h es la función altura de los puntos de T^2 en relación al plano horizontal de la figura.

Una parametrización del toro T^2 es

$$x(u, v) = ((R + r\cos u)\text{sen}v, ru, (R + r\cos u)\cos v).$$







Sea h la función altura de los puntos de T^2 en relación al plano horizontal $z = -R - r$. $(h(x, y, z) = z + R + r)$. Defino el campo $X = \text{grad}h$, i.e. $X(x, y, z) = (0, 0, 1)$

$$x'(u, v) = \begin{bmatrix} -r\text{sen}u\text{sen}v & (R + r\cos u)\cos v \\ r\cos u & 0 \\ -r\text{sen}u\cos v & -(R + r\cos u)\text{sen}v \end{bmatrix}, \quad T_pT^2 = x'(x^{-1}(p))(\mathbb{R}^2)$$

Si $p_1 = (0, 0, R + r) \in T^2$, $x(0, 0) = (0, 0, R + r) = p_1$

$$T_{p_1}T^2 = x'(0, 0)(\mathbb{R}^2) = \begin{bmatrix} 0 & R + r \\ r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbb{R}^2)$$

Sea $v \in T_{p_1}T^2$ entonces existen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $v = ((R + r)y, rx, 0)$, $\langle X(p_1), v\rangle = \langle (0, 0, 1), ((R + r)y, rx, 0)\rangle = 0$.

Si $p_2 = (0, 0, R - r) \in T^2$, $x(\pi, 0) = (0, 0, R - r) = p_2$

$$T_{p_2}T^2 = x'(\pi, 0)(\mathbb{R}^2) = \begin{bmatrix} 0 & R-r \\ -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbb{R}^2)$$

Sea $v \in T_{p_2}T^2$ entonces existen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $v = ((R-r)y, -rx, 0)$, $\langle X(p_2), v\rangle = \langle (0, 0, 1), ((R - r)y, -rx, 0)\rangle = 0$.

Si $p_3 = (0, 0, -R + r) \in T^2$, $x(\pi, \pi) = (0, 0, -R + r) = p_3$

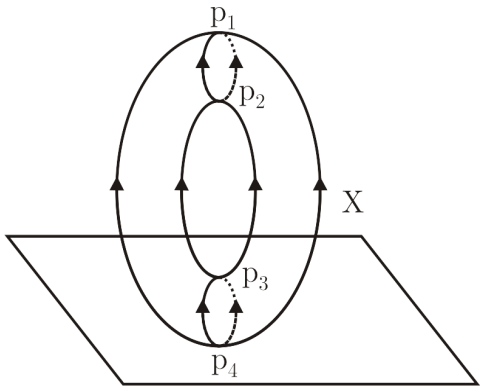
$$T_{p_3}T^2 = x'(\pi, \pi)(\mathbb{R}^2) = \begin{bmatrix} 0 & -R+r \\ -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbb{R}^2)$$

Sea $v \in T_{p_3}T^2$ entonces existen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $v = ((-R + r)y, -rx, 0)$, $\langle X(p_3), v\rangle = \langle (0, 0, 1), ((-R + r)y, -rx, 0)\rangle = 0$.

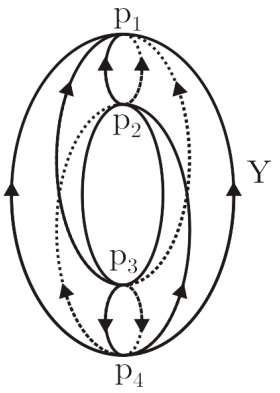
Si $p_4 = (0, 0, -R - r) \in T^2$, $x(0, \pi) = (0, 0, -R - r) = p_4$

$$T_{p_4}T^2 = x'(0, \pi)(\mathbb{R}^2) = \begin{bmatrix} 0 & -R-r \\ r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbb{R}^2)$$

Sea $v \in T_{p_4}T^2$ entonces existen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $v = ((-R-r)y, rx, 0)$, $\langle X(p_4), v\rangle = \langle (0, 0, 1), ((-R - r)y, rx, 0)\rangle = 0$.
Este campo posee cuatro singularidades $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ siendo p_1 un pozo, p_2 y p_3 sillas y p_4 una fuente, como muestra la figura de arriba. La variedad estable de p_2 intersecta a la inestable de p_3 no transversalmente.



Podemos destruir tal intersección con una pequeña perturbación del campo X. El campo Y resultante no será, por tanto, equivalente a X.



Ejemplo 2.1.2. Considere un campo X que induzca un flujo irracional en el toro T^2, como vimos en el ejemplo 1.3.2 del capítulo I. El α y ω-límite de una órbita cualquiera de X es todo el toro T^2. En particular X no es estructuralmente estable, pues puede ser aproximado por un campo Y que induzca en T^2 un flujo racional. Todas las órbitas de Y son cerradas. Obteniendose, asimismo, un cambio radical de los conjuntos α y ω-límite. Antes de definir el conjuntos de los campos de Morse-Smale necesitamos de algunos conceptos y notaciones.

Definición 2.1.1. Sea M una variedad compacta y sea $X \in \mathcal{X}^r(M)$. El conjunto *límite de* X es $L(X) = L_\alpha(X) \cup L_\omega(X)$, donde

$$L_\alpha(X) = \bigcup_{x \in M} \alpha(x), \quad L_\omega(X) = \bigcup_{x \in M} \omega(x).$$

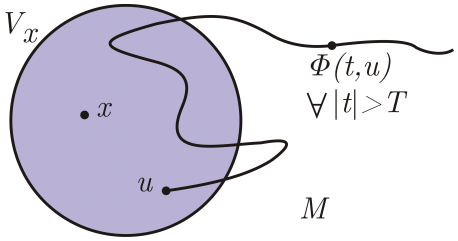
Observación: Los conjuntos $L_\alpha(X)$ y $L_\omega(X)$ son invariantes por el flujo, desde que si $p \in L_\alpha(X)$ y $s \in \mathbb{R}$ entonces existe $x \in M$ tal que $p \in \alpha(x)$ luego existe $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$ y $\lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(x) = p$. Asi existe $\varphi_s(x) \in M$ tal que $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$ y

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(\varphi_s(x)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_s(\varphi_{t_n}(x)) = \varphi_s(\lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(x)) = \varphi_s(p)$$

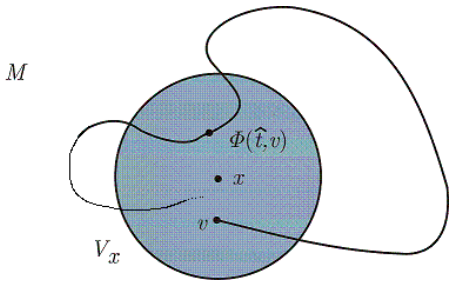
entonces $\varphi_s(p) \in \alpha(\varphi_s(x))$ luego $\varphi_s(p) \in L_\alpha(X)$. Análogamente si $q \in L_\omega(X)$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces $\varphi_t(q) \in L_\omega(X)$. La órbita de cualquier punto "*nace*" en $L_\alpha(X)$ y "*muere*" en $L_\omega(X)$.

Definición 2.1.2. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Decimos que $p \in M$ es un *punto errante* de X si existe una vecindad V_p de p y un número $t_0 > 0$ tales que si $|t| > t_0$ entonces $\varphi_t(V_p) \cap V_p = \emptyset$.

En caso contrario decimos que p *no es errante*, esto es, para toda vecindad V_p de p y $T > 0$, existe $\hat{t}$ con $\left|\hat{t}\right| > T$ tal que $\varphi_{\hat{t}}(V_p) \cap V_p \neq \emptyset$.



x es un punto errante



x es un punto no errante

Denotemos por $\Omega(X) = \{p \in M;\ \text{p es un punto no errante de } X\}$.

Proposición 2.1.1. Sea M una variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Las siguientes propiedades se cumplen:

1) $\Omega(X)$ es compacto y es invariante por el flujo.

2) $L(X) \subseteq \Omega(X)$. En particular $\Omega(X)$ contiene los elementos críticos de X.

3) Si $X,\ Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $h : M \to M$ es una equivalencia topológica entre X e Y entonces $h(\Omega(X)) = \Omega(Y)$.

Demostración:

1) Primero veamos que $\Omega(X)$ es compacto: ya que M es compacto y $\Omega(X) \subseteq M$, basta probar que $\Omega(X)$ es cerrado, supongamos que $\Omega(X) \not\subseteq \overline{\Omega(X)}$ entonces existe $p \in \overline{\Omega(X)} - \Omega(X)$, así $p \notin \Omega(X)$ de ahí p es un punto errante de X entonces existe una vecindad V_p de p y $T > 0$ tal que $\varphi_t(V_p) \cap V_p = \emptyset$, para todo $|t| > T$. Luego como $p \in \overline{\Omega(X)}$ entonces para la vecindad V_p se tiene que $V_p \cap \Omega(X) \neq \emptyset$ entonces existe $q \in V_p$ y $q \in \Omega(X)$, como q es un punto no errante, para la vecindad V_p y $T > 0$ tenemos que existe $\left|\hat{t}\right| > T$ tal que $\varphi_{\hat{t}}(V_p) \cap V_p \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Entonces $\overline{\Omega(X)} \subseteq \Omega(X)$ y como $\Omega(X) \subseteq \overline{\Omega(X)}$ asi $\overline{\Omega(X)} = \Omega(X)$.

Ahora veremos que $\Omega(X)$ es invariante por el flujo, para eso sea $p \in \Omega(X)$ y $s \in \mathbb{R}$, hacemos $q = \varphi_s(p)$ demostraremos que $q \in \Omega(X)$. Sea V_q vecindad de q y $T > 0$. Desde que φ_s es un difeomorfismo entonces $\varphi_s^{-1}(V_q)$ es una vecindad de p, así como $p \in \Omega(X)$ entonces para $\varphi_s^{-1}(V_q)$ y $T > 0$ existe $\left|\hat{t}\right| > T$ tal que $\varphi_{\hat{t}}(\varphi_s^{-1}(V_q)) \cap \varphi_s^{-1}(V_q) \neq \emptyset$ entonces existe $z \in \varphi_s^{-1}(V_q)$ tal que $\varphi_{\hat{t}}(z) \in \varphi_s^{-1}(V_q)$, luego $\varphi_s(z) \in V_q$ y $\varphi_s(\varphi_{\hat{t}}(z)) \in V_q$, además $\varphi_{\hat{t}}(\varphi_s(z)) = \varphi_s(\varphi_{\hat{t}}(z)) \in V_q$, entonces $\varphi_{\hat{t}}(V_q) \cap V_q \neq \emptyset$ con $\left|\hat{t}\right| > T$ así $q \in \Omega(X)$.

2) Sea $p \in L(X) = L_\alpha(X) \cup L_\omega(X)$ entonces $p \in L_\alpha(X)$ o $p \in L_\omega(X)$. Si $p \in L_\alpha(X)$ existe $x \in M$ tal que $p \in \alpha(x)$, luego existe $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$,

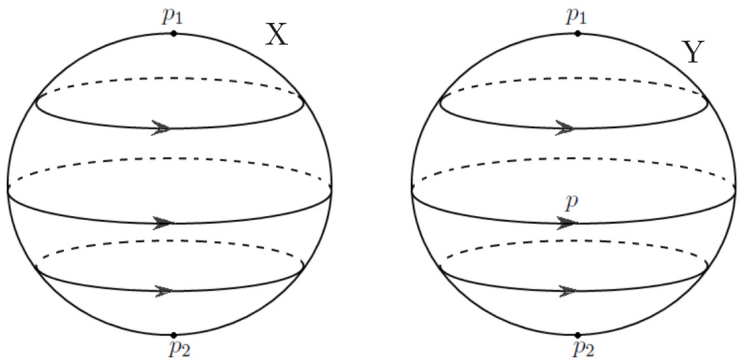
$$\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty \text{ y } \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(x) = p. \qquad (*)$$

Ahora sean V_p una vecindad de p y $T > 0$, de $(*)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < -T$ y $\varphi_{t_n}(x) \in V_p$ para todo $n \geq N$. Tomemos $q = \varphi_{t_N}(x) \in V_p$. Luego para V_p y $-(t_N - T) > 0$, de $(*)$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < t_N - T$ y $\varphi_{t_n}(x) \in V_p$ para todo $n \geq M$ entonces $\varphi_{t_M}(x) \in V_p$ y $t_M < t_N - T$ luego existe $c > 0$ tal que $t_M + c = t_N - T$ asi $t_M = t_N - (T + c) = t_N + \hat{t}$, donde $\hat{t} = -(T + c)$; notar que $\left|\hat{t}\right| > T$ y $\varphi_{\hat{t}}(q) = \varphi_{\hat{t}}(\varphi_{t_N}(x)) = \varphi_{\hat{t}+t_N}(x) = \varphi_{t_M}(x) \in V_p$ entonces existe $\left|\hat{t}\right| > T$ tal que $\varphi_{\hat{t}}(V_p) \cap V_p \neq \emptyset$ luego $p \in \Omega(X)$. Análogamente si $p \in L_\omega(X)$ entonces $p \in \Omega(X)$. En cualquier caso $p \in \Omega(X)$, luego $L(X) \in \Omega(X)$.

3) Se sigue de las propiedades de la equivalencia topológica. □

En general $L(X) \subset \Omega(X)$, el ejemplo dado a seguir muestra el contenido estricto.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos en S^2 un campo X de clase C^∞ con dos singularidades p_1 y p_2 y todas las demás órbitas siendo cerradas. Multipliquemos ahora el campo X por una función no negativa $\varphi : S^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ que se anula apenas en un punto distinto de p_1 y p_2. Sea $Y = \varphi X$. El campo Y es de clase C^∞, además posee tres singularidades p_1, p_2 y p y todas las demás órbitas son cerradas excepto una órbita γ con $\alpha(\gamma) = \omega(\gamma) = p$. Ningún punto $x \in \gamma$ pertenece a $L(X)$, más aún $x \in \Omega(X)$, pues es acumulado por órbitas cerradas de Y.



Definición 2.1.3. Sea M una variedad compacta de dimensión n y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Decimos que X es un campo de Morse-Smale si:

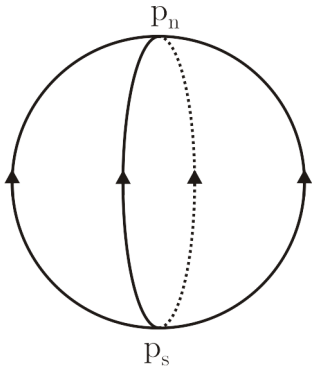
1) X tiene un número finito de elementos críticos (singularidades y órbitas cerradas) todos hiperbólicos;

2) si σ_1 y σ_2 son elementos críticos de X, entonces $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$;

3) $\Omega(X)$ es igual al conjunto de los elementos críticos de X.

A seguir exhibiremos algunos ejemplos de campos de Morse-Smale.

Ejemplo 2.1.4. Consideremos el campo en S^2 definido en el ejemplo 1.3.1 del Capítulo I este campo es llamado *polo norte-polo sur*, donde P_N, P_S son singularidades hiperbólicas; P_N es atractor y P_S es repulsor. Además si $x \in S^2 - \{P_N,\ P_S\}$, entonces $\omega(x) = P_N$ y $\alpha(x) = P_S$.



Afirmación 1. X posee un número finito de elementos críticos.
En efecto, ya sabemos que P_N y P_S son singularidades del campo X, veamos ahora que son singularidades hiperbólicas. Desde que $X(x,y,z) = (-xz, -yz, x^2+y^2)$ con $(x,y,z) \in S^2$, tenemos que

$$DX(x,y,z) = \begin{bmatrix} -z & 0 & -x \\ 0 & -z & -y \\ 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$$

Luego

$$DX(P_N) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad DX(P_S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

no tienen autovalores en el eje imaginario, más aún P_N es un atractor y P_S es un repulsor. Por lo tanto X posee un número finito de elementos críticos.

Afirmación 2. $W^s_X(P_N)$ es transversal a $W^u_X(P_S)$.
En efecto, probar la afirmación es equivalente a probar que

$$di(p)(T_pW^s_X(P_N)) + T_{i(p)}W^u_X(P_S) = T_pS^2$$

donde $i : W^s_X(P_N) \to S^2$ es la inclusión, para todo $p \in S^2$.
Es fácil ver $di(p) = I_{3\times 3}$ para todo $p \in S^2$. Por otro lado, por lo visto anteriormente tenemos que $W^s_X(P_N) = S^2 - \{P_S\}$ y $W^u_X(P_S) = S^2 - \{P_N\}$, de ahi se sigue la afirmación.

Afirmación 3. $\Omega(X) = \{P_N,\ P_S\}$.
En efecto, por la proposición 2.1.1. $\Omega(X)$ contiene a los elementos críticos de X, así tenemos $\{P_N,\ P_S\} \subseteq \Omega(X)$. Para probar el otro contenido, definimos

$$U^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ z > 0\} \text{ y } U^- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ z < 0\}$$

observese que U^+ y U^- son semiespacios abiertos determinados por el hiperplano $\{z = 0\}$. Es claro que $\{U^+,\ U^-\}$ es un conjunto de abiertos que cubren S^2. Vamos a parametrizar $U^+ \cap S^2$ y $U^- \cap S^2$. Denotemos $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2+y^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$, V es abierto. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & V & \to & U^+ \cap S^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \psi: & V & \to & U^- \cap S^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \psi(x,y) = (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}) \end{array}$$

Es fácil ver

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & U^+ \cap S^2 & \to & V \\ & (x,y,z) & \mapsto & \varphi^{-1}(x,y,z) = (x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \psi^{-1}: & U^- \cap S^2 & \to & V \\ & (x,y,z) & \mapsto & \psi^{-1}(x,y,z) = (x,y) \end{array}$$

luego $\varphi \in Diff^\infty(V,\ U^+ \cap S^2)$ y $\psi \in Diff^\infty(V,\ U^- \cap S^2)$. Trabajemos ahora con el Pull-Back de X bajo φ y el Pull-Back de X bajo ψ, así tenemos $\varphi^*(X) : V \to \mathbb{R}^2$ / $\varphi^*(X) = [(\varphi^{-1})' \cdot X] \circ \varphi$. Sea $(x,y) \in V$

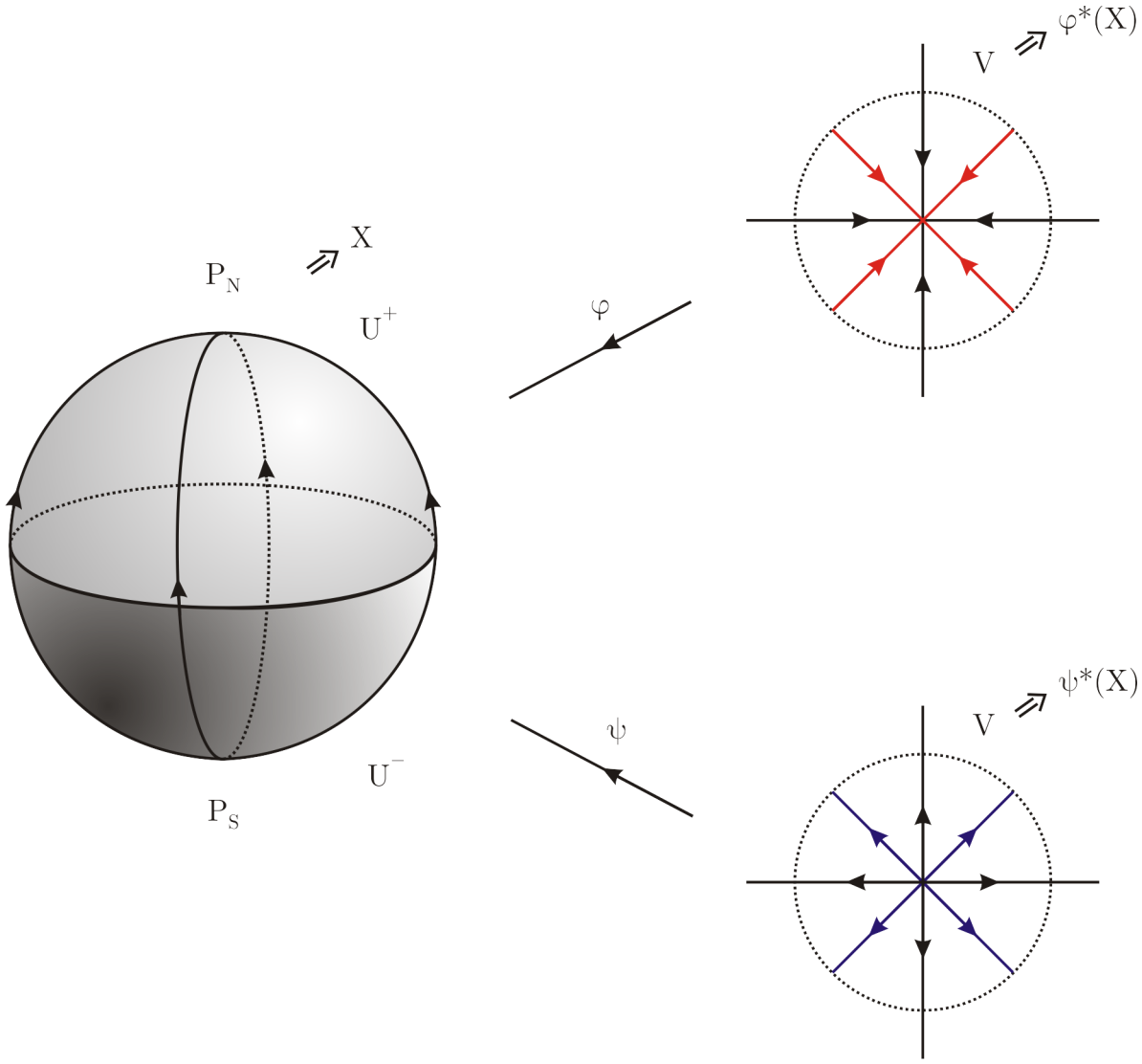
$$\begin{aligned} \varphi^*(X)(x,y) &= [(\varphi^{-1})'.X](\varphi(x,y)) \\ &= (\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X)(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x\sqrt{1-x^2-y^2} & -y\sqrt{1-x^2-y^2} & x^2+y^2 \end{bmatrix} \\ &= (-x\sqrt{1-x^2-y^2}, -y\sqrt{1-x^2-y^2}) \end{aligned}$$

Denotemos por $Y = \varphi^*(X)$, de ahi $Y(x,y) = (-x\sqrt{1-x^2-y^2},\ y\sqrt{1-x^2-y^2})$. Claramente $(0,0)$ es una singularidad del campo Y la cual es hiperbólica, pues

$$DY(x,y) = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-x^2-y^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\sqrt{1-x^2-y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix}$$

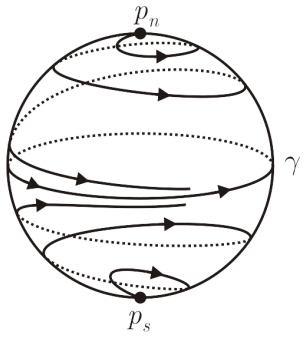
Luego $DY(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, entonces $(0,0)$ es una singularidad hiperbólica de Y (atractor) como muestra la figura de abajo y como φ es un difeomorfismo entonces $\varphi^*(X)$ es un campo de clase C^∞ de ahí el comportamiento topológico del campo Y es el mismo que el del campo X restringido a $U^+ \cap S^2$ y desde que $\Omega(Y) = \{(0,0)\}$ $(\varphi(0,0) = P_N)$, análogamente haciendo un trabajo similar se tendra que $Z = \psi^*(X)$ es un campo de clase C^∞ así también el comportamiento topológico del campo Z es el mismo que el del campo X restringido a $U^- \cap S^2$ y

también se tendrá que $\Omega(Z) = \{(0,0)\}$ $(\psi(0,0) = P_S)$. Entonces dado cualquier $p \in \Omega(X)$ se tiene que $p \in \{P_N,\ P_S\}$. Por lo tanto se tiene que $\Omega(X) = \{P_N, P_S\}$.

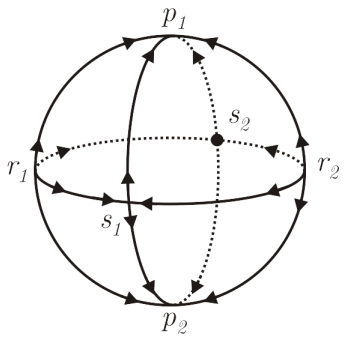


Lo anterior, sólo nos da información local, ¿qué ocurrirá globalmente?. Para esto, basta tomar cualquier punto $x \in S^2 - \{P_N, P_S\}$ y cualquier vecindad V_X, luego tomemos un punto $p \in V_X$ y como $\alpha(p) = P_S$, $\omega(p) = P_N$ entonces existe una órbita que nace en el P_S y muere en el P_N, que contiene a p. Así despues de un tiempo T_0 suficientemente grande $\varphi_t(V_x) \cap V_x = \emptyset$. Finalmente de las afirmaciones 1, 2 y 3 tenemos que el campo X definido arriba es un campo de Morse - Smale de clase C^∞.

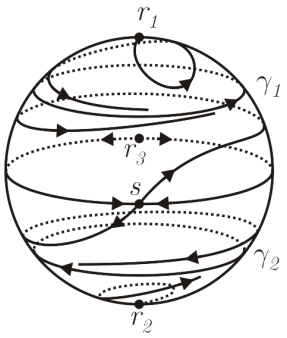
Ejemplo 2.1.5. $p_N,\ p_S$ son singularidades hiperbólicas repulsoras, γ es una órbita cerrada hiperbólica atractora. Además si $x \in S^2 - \{p_N,\ p_S\} \cup \gamma$, entonces $\omega(x) = \gamma$ y $\alpha(x) = p_N$ o p_S.



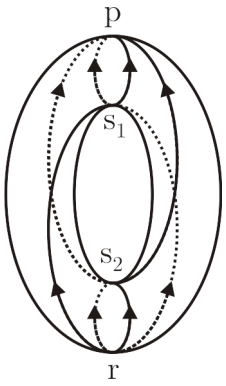
Ejemplo 2.1.6. $p_1,\ p_2$ son atractores hiperbólicos; $r_1,\ r_2$ son repulsores hiperbólicos y $s_1,\ s_2$ son sillas hiperbólicas. $\Omega(X) = \{p_1,\ p_2,\ r_1,\ r_2,\ s_1,\ s_2\}$.



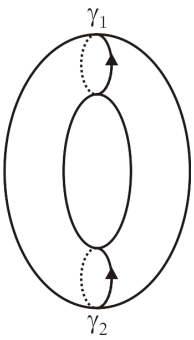
Ejemplo 2.1.7. $r_1,\ r_2,\ r_3$ son repulsores hiperbólicos y s es silla hiperbólica; $\gamma_1,\ \gamma_2$ son órbitas cerradas hiperbólicas atractoras.
$\Omega(X) = \{r_1,\ r_2,\ r_3,\ s\} \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$.



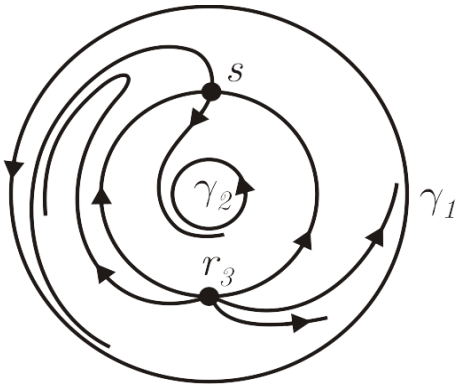
Ejemplo 2.1.8. p es atractor hiperbólico, r es repulsor hiperbólico y $s_1,\ s_2$ son sillas hiperbólicas. $\Omega(X) = \{p,\ r,\ s_1,\ s_2\}$.



Ejemplo 2.1.9. γ_1 es órbita cerrada hiperbólica atractora y γ_2 es órbita cerrada hiperbólica repulsora. $\Omega(X) = \gamma_1 \cup \gamma_2$.



Observación: En el Ejemplo 2.1.7 las órbitas del campo, en el cilindro limitado por γ_1 y γ_2 son como en la siguiente figura



2.2. Definición equivalente para variedades compactas

Definición 2.2.1. Una *ligación de sillas* corresponde a una órbita cuyos α y ω-límites son sillas.

Proposición 2.2.1. Sea M una variedad compacta de dimensión dos. El campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$ es de Morse-Smale si y solamente si:

a) X tiene un número finito de elementos críticos todo hiperbólicos;

b) no hay ligación de sillas;

c) cualquier órbita tiene como α-límite un único elemento crítico y como ω-límite también un único elemento crítico.

Demostración:
($\Rightarrow$) De la Definición 2.1.3 tenemos claramente a), veamos que no hay ligación de sillas. Supongamos que hay ligación de sillas entonces existe una órbita γ tal que $\alpha(\gamma)$ y $\omega(\gamma)$ son sillas. Así, sea $p \in \gamma$ entonces $\alpha(\gamma) = \alpha(p)$ y $\omega(\gamma) = \omega(p)$ luego $\alpha(p)$, $\omega(p)$ son sillas de ahi $\alpha(p)$, $\omega(p)$ son elementos críticos entonces por la parte 2) de la Definición 2.1.3, $W^s(\omega(p))$ es transversal $W^u(\alpha(p))$ así tenemos que $\operatorname{codim} W^s(\omega(p)) \cap W^u(\alpha(p)) = \operatorname{codim} W^s(\omega(p)) + \operatorname{codim} W^u(\alpha(p))$ y desde que $\alpha(p)$, $\omega(p)$ son sillas y estamos en dimensión dos, se tiene que $\dim W^s(\omega(p)) = \dim W^u(\alpha(p)) = 1$ luego $\operatorname{codim} W^s(\omega(p)) \cap W^u(\alpha(p)) = 2$ entonces $\dim W^s(\omega(p)) \cap W^u(\alpha(p)) = 0$ así $W^s(\omega(p)) \cap W^u(\alpha(p)) = \emptyset$ lo cual es una contradicción, pues $p \in W^s(\omega(p)) \cap W^u(\alpha(p))$. Así tenemos probado b); para probar c), sea γ una órbita cualquiera y sea $p \in \gamma$ entonces $\alpha(\gamma) = \alpha(p)$, ahora como $\alpha(p) \in L(X) \subseteq \Omega(X)$ luego $\alpha(p) \in \Omega(X)$ asi $\alpha(p)$ es un elemento crítico de ahí $\alpha(\gamma)$ es un elemento crítico. Supongamos que $\alpha(\gamma) = \{\sigma_1, \ \sigma_2\}$ donde $\sigma_1 \neq \sigma_2$ son elementos críticos entonces $\alpha(p) = \{\sigma_1, \ \sigma_2\}$ lo cual es una contradicción pues $\alpha(p)$ es conexo. Luego cualquier órbita tiene como α-límite un único elemento crítico. Análogamente para el ω-límite.
($\Leftarrow$) Claramente se tiene 1), veamos 2), sean σ_1, σ_2 dos elementos críticos. Si σ_1 es un pozo entonces $\dim W^s(\sigma_1) = 2$, luego $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$, sin importar si σ_2 es fuente o pozo. Si σ_2 es una fuente entonces $\dim W^u(\sigma_2) = 2$ luego $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$, sin importar si σ_1 es fuente o pozo. El caso en que σ_1 es fuente y σ_2 es pozo es trivial. Si

σ_1 y σ_2 son sillas entonces $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) = \emptyset$ (pues no hay ligación de sillas) luego trivialmente $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$. En cualquier caso siempre se tiene que $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$. Sólo resta probar 3). De inicio sabemos que el conjunto de los elementos críticos es un subconjunto de $\Omega(X)$, sólo falta ver el otro contenido, para esto mostremos que la variedad estable de un pozo es constituido de puntos errrantes, con excepción del propio pozo. Así, supongamos que el pozo sea en principio una singularidad p. Entonces por una consecuencia del Teorema de la Variedad Estable, versión para campos análogo al teorema 1.6.1, existe un disco $D \subseteq W^s(p)$ conteniendo a p, cuyo borde es un círculo C transversal a X. Como $W^s(p) - \{p\} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(C)$ y el conjuntos de los puntos errantes es invariente por el flujo (esto es cierto, desde que si a es un punto errante de X y $s \in \mathbb{R}$, supongamos que $\varphi_s(a) \in \Omega(X)$ y como $\Omega(X)$ es invariante por el flujo tenemos que $\varphi_{-s}(\varphi_s(a)) \in \Omega(X)$ luego $a \in \Omega(X)$ lo cual es una contradicción, así $\varphi_s(a) \notin \Omega(X)$ entonces $\varphi_s(a)$ es un punto errante), es suficiente probar que los puntos de C son errrantes. Consideremos $D_1 = \varphi_{t=1}(D)$ contenido en el interior de D y $D_{-1} = \varphi_{t=-1}(D)$ cuyo interior contiene a D. Tomemos un punto $x \in C$. Sea V una vecindad de x disjunto de D_1 y $M - D_{-1}$ tenemos que $\varphi_t(V) \cap V = \emptyset$ para todo $|t| > 2$ (pues, si existe $|t_1| > 2$ tal que $\varphi_{t_1}(V) \cap V \neq \emptyset$ entonces existe $y \in V$ tal que $\varphi_{t_1}(y) \in V$, por otro lado existe $|t_2| < 1$ tal que $\varphi_{t_1}(y) = \varphi_{t_2}(c)$, donde $c \in C$, así $y = \varphi_{t_2-t_1}(c)$ luego $|t_2 - t_1| < 1$ entonces $t_2 - 1 < t_1 < t_2 + 1$ de ahí $|t| < 2$ lo cual es una contradicción. Así $\varphi_t(V) \cap V = \emptyset$ para todo $|t| > 2$.) entonces x es un punto errante. Supongamos ahora que el pozo sea una órbita cerrada γ. En este caso existe también una vecindad U de γ cuyo borde S es transversal a X. Si γ es una curva orientada, U es homeomorfo a un anillo y S es la unión de dos círculos disjuntos. Si γ no es orientable, entonces U es homeomorfo a una banda de Moebius y S es un círculo. Además de esto, $W^s(\gamma) - \{\gamma\} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(S)$. Con el mismo argumento anterior que S, y, por tanto, $W^s(\gamma) - \{\gamma\}$ es constituido de los puntos errantes. De manera análoga podemos demostrar que $W^u(\sigma) - \{\sigma\}$ es formado de los puntos errantes, cuando σ es un elemento crítico repulsor. Finalmente, si $x \in M$ no es singularidad y no pertenece a una órbita cerrada entonces existe γ órbita cerrada tal que $x \in \gamma$ y por c), tenemos $\alpha(\gamma)$, $\omega(\gamma)$ son elementos

críticos, luego $\alpha(x),\ \omega(x)$ son elementos críticos y como no hay ligación de sillas tenemos que o $\omega(x)$ es pozo o $\alpha(x)$ es fuente. Si $\omega(x)$ es pozo, $x \in W^s(\omega(x)) - \{\omega(x)\} = \{y \in M;\ y \text{ es errante}\}$ entonces x es un punto errante. Así, si $x \in \Omega(X)$ entonces x es un elemento crítico. Por lo tanto $\Omega(X) = \{p \in M;\ p \text{ es un elemento crítico}\}$. Luego tenemos que X es un campo de Morse-Smale. □

Definición 2.1.2. Dado un campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$ de Morse-Smale, donde M es una variedad compacta de dimensión dos. Llamamos *diagrama de fase* Γ *de* X al conjunto de los elementos críticos de X provisto del siguiente orden parcial: $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \Gamma$, $\sigma_1 \preceq \sigma_2$ si $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) \neq \emptyset$. Esto es, existe una órbita que nace en σ_1 y muere en σ_2.

Observación: Desde que X es de Morse-Smale, tenemos que $W^u(\sigma_1)$ es transversal a $W^s(\sigma_2)$ y $W^u(\sigma_2)$ es transversal a $W^s(\sigma_1)$ pero el hecho de que la intersección sea transversal no implica que $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) \neq \emptyset$.

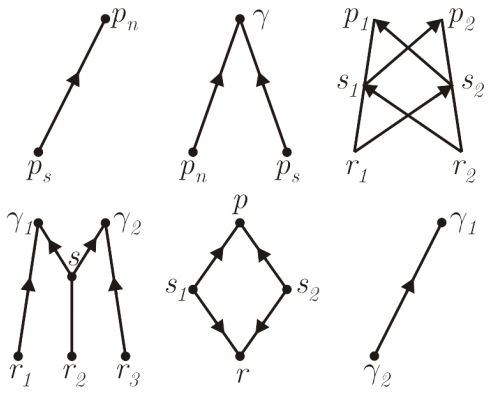
Proposición 2.2.2. La relación definida arriba es una relación de orden.

Demostración:

- Reflexiva: pues como $\sigma \in\ W^u(\sigma) \cap W^s(\sigma)$ entonces $W^u(\sigma) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ luego $\sigma \preceq \sigma$.
- Antisimétrica: si $\sigma_1 \preceq \sigma_2$ y $\sigma_2 \preceq \sigma_1$ entonces $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) \neq \emptyset$ y $W^u(\sigma_2) \cap W^s(\sigma_1) \neq \emptyset$ luego existen $a,\ b$ tales que $a \in W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2)$ y $b \in W^u(\sigma_2) \cap W^s(\sigma_1)$ asi $\alpha(b) = \sigma_1$, $\omega(b) = \sigma_2$, $\alpha(a) = \sigma_2$, $\omega(a) = \sigma_1$; como la $\dim M = 2$ y no hay ligación de sillas entonces $\sigma_1 = \sigma_2$.
- Transitiva: si $\sigma_1 \preceq \sigma_2$ y $\sigma_2 \preceq \sigma_3$ entonces $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) \neq \emptyset$ y $W^u(\sigma_2) \cap W^s(\sigma_3) \neq \emptyset$ y como X es un campo de Morse-Smale entonces $W^u(\sigma_1)$ es transversal a $W^s(\sigma_2)$ y $W^u(\sigma_2)$ es transversal a $W^s(\sigma_3)$ luego por el corolario 2 del λ-lema tenemos que $W^u(\sigma_1)$ es transversal a $W^s(\sigma_3)$ así $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_3) \neq \emptyset$ entonces $\sigma_1 \preceq \sigma_3$. □

En los siguientes ejemplos se observa que como $\dim M = 2$, el diagrama de fase de cualquier campo de Morse-Smale, contendra, como máximo, tres niveles.

Ejemplo 2.2.1. Los diagramas de fase de los ejemplos 2.1.4-2.1.9 son los siguientes.



2.3. Equivalencia entre campos de Morse-Smale

Definición 2.3.1. Sean $X, \overline{X} \in \mathfrak{X}^r(M)$ dos campos de Morse - Smale y Γ, $\overline{\Gamma}$ sus respectivos diagramas de fase. Decimos que Γ y $\overline{\Gamma}$ son *isomorfos* si existe una correspondencia biunívoca $h : \Gamma \to \overline{\Gamma}$ tal que:

a) $x \in \Gamma$ es una singularidad si y solamente si $h(x) \in \overline{\Gamma}$ es una singularidad.

b) Sean $x_1,\ x_2 \in \Gamma$ entonces $x_1 \preceq_\Gamma x_2$ si y solamente si $h(x_1) \preceq_{\overline{\Gamma}} h(x_2)$.

Mostraremos a seguir, que pequeñas perturbaciones de un campo de Morse-Smale dan origen a campos de Morse-Smale con diagramas de fase isomorfos. Para esto usaremos el concepto de filtración asociada a un campo de Morse-Smale.

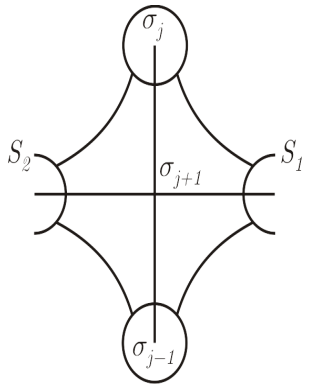
Definición 2.3.2. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ un campo de Morse-Smale, donde la $\dim M = 2$. Una *filtración para* X es una sucesión $M_0 = \emptyset$, $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$ de subvariedades compactas M_i con borde, para $0 < i < k$ tales que:

a) X es transversal al borde de M_i y $\varphi_t(M_i) \subseteq \text{int}(M_i)$, para todo $t > 0$;

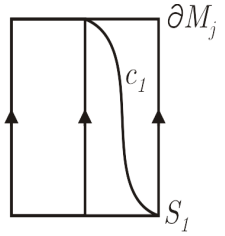
b) en $M_{i+1} - M_i$, el conjunto maximal invariante del flujo φ_t consiste de un único elemento crítico σ_{i+1}; esto es, $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(M_{i+1} - M_i) = \sigma_{i+1}$.

Lema 2.3.1. Sea $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$ un campo de Morse-Smale. Existe una filtración para X.

Demostración: Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_j$ los atractores de X. Tomemos vecindades disjuntas $V_1, V_2, \ldots, V_j$ en $W^s(\sigma_j)$, con bordes transversales. Como en la demostración de la proposición 2.2.1. Definimos $M_1 = V_1$, $M_2 = M_1 \cup V_2$, $\ldots$, $M_j = M_{j-1} \cup V_j$. Sean $\sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_s$ las sillas de X. Consideremos σ_{j+1} y las componentes de $W^u(\sigma_{j+1}) - \{\sigma_{j+1}\}$ las cuales intersectan ∂M_j transversalmente. En una vecindad de σ_{j+1}, construimos dos secciones S_1 y S_2 transversales a $W^s(\sigma_{j+1}) - \{\sigma_{j+1}\}$.



Si esa vecindad es suficientemente pequeña, las trayectorias de X por las extremidades de S_1 y S_2 cortan transversales a ∂M_j. Próximas a esos arcos de trayectorias construímos curvas c_1, c_2, c_3, c_4 tranversales a X ligando las extremidades de S_1 y S_2 a ∂M_j. Esto puede ser hecho tomando flujos tubulares conteniendo esos arcos de trayectorias.



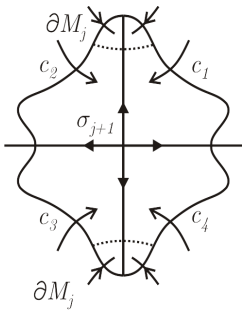
Sea V_{j+1} la región conteniendo σ_{j+1} y limitado por S_1, S_2, c_1, c_2, c_3, c_4 y parte de ∂M_j . Tomemos $M_{j+1} = M_j \cup V_{j+1}$. Es fácil notar que $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(V_{j+1}) = \sigma_{j+1}$ (desde que la vecindad de σ_{j+1} en principio se

tomó suficientemente pequeña, de modo que sólo contenga a σ_{j+1} como elemento crítico). Además M_{j+1} satisface las condiciones deseadas, ($V_{j+1} = M_{j+1} - M_j$ entonces $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(M_{j+1} - M_j) = \sigma_{j+1}$, esto es, el único elemento crítico que se queda para "adelante" en la W^s es σ_{j+1} y el único elemento crítico que se queda para "atras" en la W^u es σ_{j+1}). Repetimos la construción para cada silla, obteniendo, asi mismo la sucesión de subvariedades $\emptyset = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots M_{j+1} \subseteq \cdots \subseteq M_s$. Sean finalmente $\sigma_{s+1},\ \sigma_{s+2}, \ldots,\ \sigma_k$ las fuentes de X. Consideremos vecindades $V_{s+1},\ V_{s+2}, \ldots,\ V_k$ de sus fuentes con bordes transversales a X, como el caso de pozos. Definimos entonces

$$M_{s+1} = M - (\text{int}(V_{s+2}) \cup \ldots \cup \text{int}(V_k)),$$

$$M_{s+2} = M - (\text{int}(V_{s+3}) \cup \ldots \cup \text{int}(V_k)),$$

y asi en adelante, resultando $M_k = M$. Luego tenemos la sucesión



$\emptyset = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$ es una filtración para X. □

Teorema 2.3.1. Sea $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$ un campo de Morse-Smale. Existe una vecindad $\mathcal{U}$ de X en $\mathcal{X}^r(M^2)$ tal que si $Y \in \mathcal{U}$, entonces Y es un campo de Morse-Smale y su diagrama de fase es isomorfo al de X.

Demostración: Como los elementos críticos de X son hiperbólicos, por la proposición 1.5.1 a cada $\sigma_i \in \Omega(X)$ existen vecindades $\mathcal{U}_i(X) \subseteq \mathcal{X}^r(M^2)$ y $U_i(\sigma_i)$ tal que todo $Y \in \mathcal{U}_i(X)$ tiene un único elemento crítico $\sigma_i(Y) \subseteq \mathcal{U}_i(X)$. Además de esto por el teorema de Grobman-Hartman, reduciendo, si es necesario, las vecindades $\mathcal{U}_i(X)$, $U_i(\sigma_i)$, podemos suponer que $\sigma_i(Y)$ sea el único conjunto invariante por el flujo $\tilde{\varphi}$ enteramente contenido en $U_i(\sigma_i)$, donde $\tilde{\varphi}$ es el flujo del campo Y. Tomamos $\mathcal{U} = \bigcap \mathcal{U}_i(X)$

consideremos ahora una filtración $\emptyset = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$ para X. Vamos a mostrar que, para $\mathcal{U}$ suficientemente pequeño $\emptyset = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdot$ es también una filtración para cualquier $Y \in \mathcal{U}$. Esto implicaría que $\Omega(Y)$ consiste de los elementos críticos $\sigma_i(Y)$ definidos arriba. De inicio, observamos que, siendo X transversal a la ∂M_i, que es compacto, Y próximo a X también lo será. Reducimos las vecindades $U_i(\sigma_i)$ de forma que $U_i(\sigma_i) \subseteq M_i - M_{i-1}$, como

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(M_i - \operatorname{int}(M_{i-1})) = \sigma_i,$$

existe $T > 0$ tal que

$$\bigcap_{t=-T}^{T} \varphi_t(M_i - \operatorname{int}(M_{i-1})) \subseteq U_i(\sigma_i).$$

El mismo hecho es válido para $Y \in \mathcal{U}$, si $\mathcal{U}$ es suficientemente pequeña. Como

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \tilde{\varphi}_t(U_i(\sigma_i)) = \sigma_i(Y)$$

se sigue que

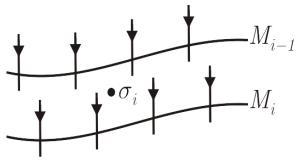
$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \tilde{\varphi}_t(M_i - \operatorname{int}(M_{i-1})) = \sigma_i(Y).$$

Así

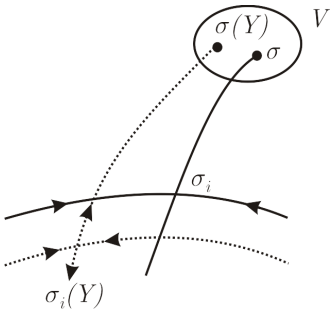
$$\emptyset = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$$

es una filtración para todo $Y \in \mathcal{U}$.

Afirmamos que $\Omega(Y) \cap (M_i - \operatorname{int}(M_{i-1})) = \sigma_i(Y)$. De hecho, cualquier órbita γ distinta de $\sigma_i(Y)$ pasando por un punto de $M_i - \operatorname{int}(M_{i-1})$, debe intersectar ∂M_i o ∂M_{i-1} (o ambos). Esto porqué la única órbita enteramente contenida en $M_i - \operatorname{int}(M_{i-1})$ es $\sigma_i(Y)$. Como $\varphi_t(M_{i-1}) \subseteq M_{i-1}$ (pues $\emptyset = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$ es una filtración para X) para todo $t > 0$ y $\varphi_t(M - M_i) \subseteq M - M_i$ para todo $t < 0$, γ es una órbita errante. Asimismo, $\sigma_i(Y)$ es la única órbita de $\Omega(Y)$ en $M_i - \operatorname{int}(M_{i-1})$. Por tanto $\Omega(Y) = \bigcup_i \sigma_i(Y)$ siendo $\sigma_i(Y)$ hiperbólico para todo índice i.



Para concluir que $Y \in \mathcal{U}$ es un campo de Morse-Smale, basta mostrar que para $\mathcal{U}$ pequeño no hay ligación de sillas. Asimismo, sea $\sigma_i = \sigma_i(X)$ una silla y supongamos que una de las componentes γ de $W^u(\sigma_i) - \{\sigma_i\}$ tenga como ω-límite el pozo $\sigma = \sigma(X)$. Sea V una vecindad de σ como en la construcción de filtración. Como $W^u(\sigma_i(Y))$ esta próxima de $W^u(\sigma_i)$ en partes compactas, entonces una de las componentes $W^u(\sigma_i(Y)) - \{\sigma_i(Y)\}$ también intersecta transversalmente. Luego, su ω-límite es $\sigma(Y)$. El mismo razonamiento se aplica a todas las componentes estables e inestables de las sillas. Asimismo, para $\mathcal{U}$ suficientemente pequeño, si $Y \in \mathcal{U}$ entonces Y es un campo de Morse-Smale y la correspondencia de arriba $\sigma_i(X) \to \sigma_i(Y)$ es un isomorfismo de diagramas. □



Capítulo 3

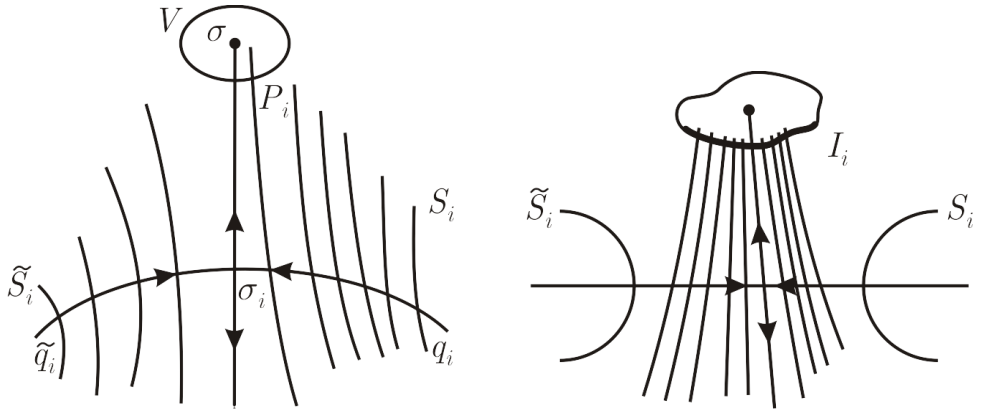
Teorema principal

3.1. Estabilidad estructural en campos de Morse-Smale

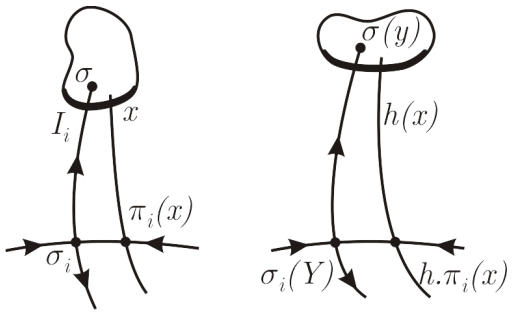
Teorema 3.1.1. Si $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$ es un campo de Morse-Smale, entonces X es estructuralmente estable.
Demostración: Por el teorema 2.3.1 sabemos que existe una vecindad $\mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{X}^r(M^2)$ tal que, si $Y \in \mathcal{U}(X)$ entonces Y es un campo de Morse-Smale y existe un isomorfismo $\sigma_i(X) \to \sigma_i(Y)$ de diagrama de fase. Ahora, vamos a dividir está demostración en dos partes:

Parte 1. Supongamos que X no posee órbitas cerradas. Consideremos un pozo σ de X y el correspondiente pozo $\sigma(Y)$, donde $Y \in \mathcal{U}(X)$. Sea $V \ni \sigma$ un disco $W^s(\sigma)$ con ∂V transversal a X y a todo $Y \in \mathcal{U}(X)$. También $\sigma(Y) \in V \subseteq W^s(\sigma(Y))$. Sean $\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots$ las sillas de X tales que $\sigma_i \preceq \sigma$. Llamemos $p_1,\ p_2, \ldots$ a los puntos en que las separatrices de las sillas de σ_i (componentes de $W^u(\sigma_i) - \{\sigma_i\}$) intersectan ∂V. Sean $p_1(Y),\ p_2(Y), \ldots$ los correspondientes puntos para Y. Para cada σ_i, consideremos las secciones S_i, $\overline{S}_i$ transversales de las separatrices de σ_i por los puntos q_i, $\overline{q}_i$ como en la figura.

Saturando S_i, $\overline{S}_i$ por el flujo φ obtenemos una familia tubular para $W^u(\sigma_i)$ como en la observación del lema 1.5.1. Las fibras de esta familia será $\varphi_t(S_i)$ y $\varphi_t(\overline{S}_i)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ y $W^u(\sigma_i)$. La proyección π_i, que a cada fibra f le asocia $f \cap W^s(\sigma_i)$ es continua. Además de esto, π_i es un homeomorfismo de una vecindad I_i de p_i en ∂V sobre una vecindad de σ_i en $W^(\sigma_i)$. Efectuamos la misma construcción para el campo Y.

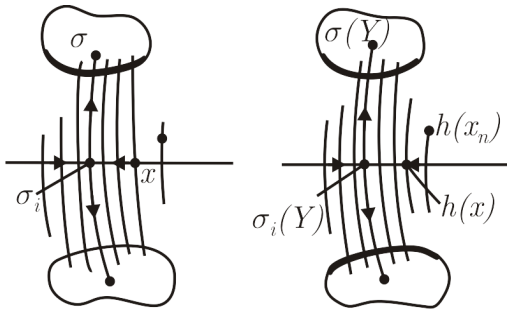


Definamos ahora una equivalencia topológica h entre X e Y. Colocamos $h(\sigma) = \sigma(Y)$, $h(\sigma_i) = \sigma_i(Y)$, $h(p_i) = p_i(Y)$, $h(q_i) = q_i(Y)$. Extendemos h a $W^s(\sigma_i)$ por la ecuación $h(\varphi_t(q_i)) = \overline{\varphi}_t(h(q_i)) = \overline{\varphi}_t(q_i(Y))$, $h(\varphi_t(\overline{q}_i)) = \overline{\varphi}_t(h(\overline{q}_i)) = \overline{\varphi}_t(\overline{q}_i(Y))$. Ahora definimos h en I_i de la siguiente manera: para $x \in I_i$, $h(x) = [\pi_i(Y)]^{-1}h(\pi_i(x))$.

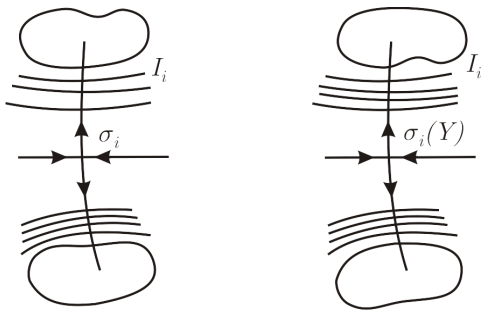


Tenemos, asimismo, que h está definido en un número finito de intervalos disjuntos I_i de ∂V. Observe que, la vecindad $\mathcal{U}(X)$ es pequeña, entonces $h|_{I_i}$ es próximo a la identidad. Podemos entonces extender h a todo el círculo ∂V. Repetimos la misma construcción para todos los pozos. Finalmente, definimos h en todo M^2 por la ecuación $h(\varphi_t(z)) = \overline{\varphi}_t(h(z))$. Es fácil ver, por construcción, que h posee inversa h^{-1}, la cual es definida exactamente por intercambio de papeles de X e Y. Asimismo, resta probar la continuidad de h. Esto es obvio para los pozos, fuentes y variedades estables de los pozos. Vamos analizar el caso de las variedades estables de las sillas. Sea $X \in W^s(\sigma_i)$, donde σ_i es una silla. Observemos que h lleva fibras de la familia tubular de σ_i en fibras de la familia tubular $\sigma_i(Y)$, esto es, $\pi_i(Y)h(z) = h(\pi(X))z$. Consideremos una sucesión cualquiera $x_n \to x$. Queremos mostrar que $h(x_n) \to h(x)$. Por la observación de arriba,

tenemos que la fibra por $h(x_n)$ converge para la fibra por $h(x)$. Esto es, $\pi_i(Y)(h(x_n)) \to h(x)$. Resta probar que $h(x_n)$ converge para $W^s(\sigma_i(Y))$.



Para esto construimos familias tubulares para $W^s(\sigma_i)$ y $W^s(\sigma_i(Y))$. Esto es hecho a partir de los segmentos I_i, $I_i(Y)$ contenidos en ∂V, saturandolos por los flujos φ y $\overline{\varphi}$. Como $h(I_i) = I_i(Y)$ tenemos que h lleva fibras de la familia tubular de $W^s(\sigma_i)$ en fibras de la familia tubular de $W^s(\sigma_i(Y))$. Por tanto, si $\overline{\pi}_i$ y $\overline{\pi}_i(Y)$ son las proyecciones respectivas en $W^u(\sigma_i)$ y $W^u(\sigma_i(Y))$, entonces $h(\overline{\pi}_i(z)) = \overline{\pi}_i(Y)(h(z))$ como $\overline{\pi}_i$ es continua y $x_n \to x$ en $W^s(\sigma_i)$ vemos que $\overline{\pi}_i(x_n) \to \overline{\pi}_i(x) = \sigma_i$. También como la restricción de h a $W^u(\sigma_i)$ es continua, $h(\overline{\pi}_i(x_n)) \to h(\sigma_i) = \sigma_i(Y)$. Por otro lado, $h(\overline{\pi}_i(x_n)) \to h(\sigma_i) = \overline{\varphi}_i(Y)(h(x_n))$ y, por tanto, $\overline{\pi}_i(Y)(h(x_n)) \to \sigma_i(Y)$. Esto muestra que $h(x_n)$ converge para la variedad estable de $\sigma_i(Y)$ y, consecuentemente $h(x_n) \to h(x)$.



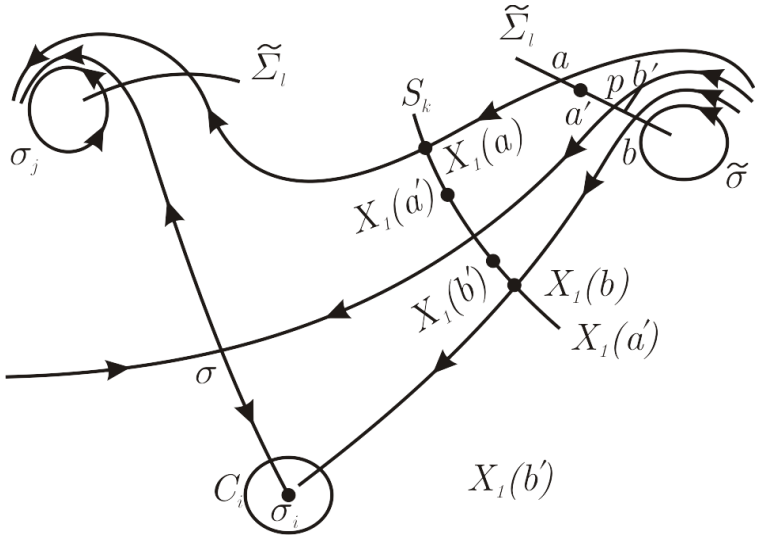
Parte 2. Supongamos ahora que X posee órbitas cerradas. Estas órbitas cerradas son necesariamente atractoras o repulsoras, pues ellas son hiperbólicas y $\dim M = 2$. Como ya observamos, existen campos Y arbitrariamente próximos a X tales que los flujos φ_t y $\overline{\varphi}_t$ no son conjugados. Para esto basta alterar, con una pequeña perturbación, el período de una de las órbitas cerradas de X. Confrontaremos esta dificultad definiendo una

conjugación h entre los flujos ψ_t y $\overline{\psi}_t$, reparametrizados de φ_t y $\overline{\varphi}_t$. Como las órbitas de φ_t y ψ_t son las mismas y también las órbitas de $\overline{\varphi}_t$ y $\overline{\psi}_t$ resulta que h será una equivalencia entre los campos X e Y. Usando el lema 1.6.1. del capitulo I, podemos, ya de inicio suponer que las órbitas cerradas de X e Y tengan todas ellas el mismo período τ y admitan secciones transversales invariantes. A fin de simplificar la exposición consideremos dos subcasos.

(2.a) Consideremos, inicialmente, el caso en que **todas las órbitas cerradas de X sean atractoras**. Vamos a procurar imitar la construcción de la conjungación hecha para el caso en que no hay órbitas cerradas. Alrededor de cada singularidad atractora σ_i, $\sigma_i(Y)$, consideremos un círculo C_i transversal a X y Y. En cada órbita cerrada σ_j, $\sigma_j(Y)$, tomamos una sección transversal invariante Σ_j, y, en Σ_j, dominios fundamentales I_j, $I_j(Y)$ para las transformaciones de Poincaré asociadas. I_j será compuesto de dos intervalos cerrados. Como anteriormente, construimos familias tubulares instables asociadas a las sillas σ_k, $\sigma_k(Y)$ de X y Y: tomamos secciones S_k y $\widetilde{S}_k$ transversales a $W^s(\sigma_k)$ y $W^s(\sigma_k(Y))$ y consideramos las familias $X_t(S_k)$, $X_t(\widetilde{S}_k)$ y $Y_t(S_k)$, $Y_t(\widetilde{S}_k)$. El homeomorfismo que vamos a construir deberá llevar a cada fibra de la familia tubular de σ_k un una fibra de la familia tubular de $\sigma_k(Y)$. Además de eso, preservará los círculos transversales C_i y las secciones transversales Σ_j. Asimismo, definiendo una conjugación de $X/W^s(\sigma_k)$ y $Y/W^s(\sigma_k(Y))$ para cada silla σ_k, induciremos un homeomorfismo en un número finito de subintervalos de C_i y de I_j. Tales subintervalos contienen las intersecciones de las variedades inestables de las sillas con C_i y I_j. Tal homeomorfismo h es próximo a la identidad si Y es próximo a X y por tanto, puede ser extendido a todo C_i y I_j. Para cada singularidad σ_l, definimos $h(\sigma_l) = \sigma_l(Y)$ y, para cada órbita cerrada σ_j, definimos $h(\Sigma_j \cap \sigma_j) = \Sigma_j \cap \sigma_j(Y)$. Finalmente, extendemos h a todo M, usando la ecuación de conjugación $h = Y_t h X_{-t}$ como en la primera parte de la demostración. Resulta, entonces, que h es uno a uno y sobre. La continuidad de h en las singularidades y variedades estables de las sillas puede ser verificada como en la primera parte. La continuidad de h en las órbitas cerradas se sigue de la invarianza de las secciones Σ_j, como se prueba en la estabilidad local de las órbitas cerradas hiperbólicas.

(2.b) Supongamos, finalmente, que exista una órbita cerrada atractora y órbita cerrada repulsora para X. Este caso se torna enteramente

análogo al anterior después de una nueva reparametrización de los campos X y Y. Esa reparametrización es necesaria para que podamos extender las órbitas cerradas repulsoras al homeomorfismo construido en (2.a). Para ello, consideremos secciones transversales invariantes $\widetilde{\Sigma}_l$ asociadas a las órbitas cerradas repulsoras $\widetilde{\sigma}_l$ y sean $\widetilde{I}_l$ los dominios fundamentales correspondientes. Cada $\widetilde{I}_l$ queda descompuesto en una unión de subintervalos cerrados, cuyas extremidades interiores a $\widetilde{I}_l$ son las intersecciones de las variedades estables de las sillas con Int$\widetilde{I}_l$ Observamos que todos los puntos de cada uno de esos subintervalos abiertos tiene, para ω-límite, el mismo atractor, como el la figura siguiente. Sea $p \in W^s(\sigma_k) \cap \widetilde{I}_l$ una de las extremidades de uno de esos subintervalos. Consideremos un pequeño intervalo $[a, b] \subset \widetilde{I}_l$ en torno a p tal que toda órbita por puntos de $[a, b]$ intersecta a la sección transversal S_k. Utilizando el lema 1.8.1, hacemos una reparametrización de X, de modo que todos los puntos de $[a, b]$ encuentren S_k en el tiempo 1. Continuaremos llamando X al campo resultante de esa reparametrización. Sea $[a', b'] \subset (a, b)$ un intervalo que contiene a p. Con una nueva reparametrización podemos hacer que todos los puntos de $[X_1(a), X_1(a')] \subset S_k$ encuentren Σ_j en el tiempo 1. Análogamente, podemos hacer lo mismo para $[X_1(b), X_1(b')]$ en relación a C_i. Asímismo $X_2[a, a'] \subset \Sigma$ y $X_2[b, b'] \subset C_i$. Repetimos esta construcción para las diversas sillas cuyas variedades estables intersecten $\widetilde{I}_l$.



Finalmente, reparametrizamos X de modo que todos los puntos del complemento de $\widetilde{I}_l$, dé la unión de los intervalos $[a, b]$, como en la figura, encuentren los diversos C_i y Σ_j en el tiempo $t = 2$.
Efectuamos también las mismas reparametrizaciones para los campos Y próximos a X. La construcción de la conjugación h, entre X_t y Y_t, es hecha ahora exactamente como en $(2.a)$, añadiéndose que $h(\widetilde{\Sigma}_l \cap \widetilde{\sigma}_l) = \widetilde{\Sigma}_l \cap \widetilde{\sigma}_l(Y)$.
□

Bibliografía

[1] Benazic, R. *Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias*; Lima; Universidad Nacional de Ingeniería; 2007.

[2] Benazic, R. *Notas de Clase de Seminario de Tesis I*. UNMSM, 2007.

[3] Calvo, O. *Sistemas Lineales Complejos*. Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 21, pp. 95-120, 1998.

[4] Camacho, C., Lins Neto, A. *Teoria Geométrica das Folheações* . IMPA, 1979.

[5] Do Carmo, M. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Editorial S.A., 1992.

[6] Hirsch, M., Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra Lineal*. Academic Press, New York, 1974.

[7] Lima, E. *Variedades Diferenciáveis*. Monografías de Matemática, Nº15, IMPA, Rio de Janeiro, 1961.

[8] Nitecki, Z. *Differentiable Dynamics and Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms*. The M.I.T. Press, Massachusetts, 1971.

[9] Palis, J., Melo, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. IMPA, 1978.

[10] Peixoto, M. *Teoria Geométrica das Equações Diferenciais*. 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1969.

[11] Peixoto, M. *Structural Sability on Two Dimensional Manifolds*. Topology vol. 1, 1962.

[12] Shub, M. *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag New York, LLC , 1986.

[13] Sotomayor, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinarias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.