Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Teorema del punto fijo en espacios ultramétricos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Josue Miguel DUEÑAS BUSTAMANTE

ASESOR

Dr. Alex Armando CRUZ HUALLPARA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Dueñas, J. (2024). *Teorema del punto fijo en espacios ultramétricos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Josue Miguel Dueñas Bustamante
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	71793491
URL de ORCID	**No aplica**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alex Armando Cruz Huallpara
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40949706
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-5453-6885
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09197486
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Funcional

Grupo de investigación	Matemática Aplicada - Métodos Numéricos (METNUM)
Agencia de financiamiento	Ninguno
Ubicación geográfica de la investigación	Lima - Perú
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 9:00 horas del domingo 29 de septiembre del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024): Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci (PRESIDENTE), Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (MIEMBRO) y el Dr. Alex Armando Cruz Huallpara (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: **"TEOREMA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS ULTRAMÉTRICOS"**, presentado por el señor **Bachiller JOSUE MIGUEL DUEÑAS BUSTAMANTE**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **Regular**, con un calificativo promedio de **catorce**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller JOSUE MIGUEL DUEÑAS BUSTAMANTE**, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 9:40 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
PRESIDENTE

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
MIEMBRO

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Alex Armando Cruz Huallpara en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001329-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"TEOREMA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS ULTRAMÉTRICOS"**, presentado por el bachiller **Josue Miguel Dueñas Bustamante**, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documentoevaluado cuenta con el porcentaje de 17% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuarcon los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor

DNI:40949706

Teorema del punto fijo en Espacios Ultramétricos

Josue Miguel Dueñas Bustamante

Tesis de Licenciatura presentada al Programa de Pregrado de la Escuela Profesional de Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del Título de Licenciado en Matemática.

Asesor: Dr. Alex Cruz Huallpara

Lima - Perú

2024

FICHA CATALOGRÁFICA

Josue Miguel Dueñas Bustamante

Teorema del punto fijo en Espacios Ultramétricos,(Lima) 2024. IX, 28 p.(UNMSM, Licenciado, Matemática, 2024). Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas. Matemática. UNMSM/FCM II. Título (Serie)

Teorema del punto fijo en Espacios Ultramétricos

por

Josue Miguel Dueñas Bustamante

Tesis de Licenciatura sometida al Cuerpo Docente de la Escuela Profesional de Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del Título de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci

Presidente

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda

Miembro

Dr. Alex Cruz Huallpara

Miembro Asesor

Lima - Perú

2024

Agradecimientos

A mi familia, en especial a mi madre, cuyo apoyo incondicional ha sido una fuente constante de fortaleza y motivación en mi vida. A mis alumnos, por recordarme cada día la importancia de compartir el conocimiento y por motivarme a seguir creciendo como docente y como persona. Y a todas las personas que han pasado por mi vida y han dejado una huella en mi desarrollo personal. Cada uno de ustedes ha contribuido a forjar el individuo que soy ahora y por ello siempre estaré agradecido.

Resumen

En esta tesis se estudia el Teorema del Punto Fijo en espacios ultramétricos, un resultado fundamental en el análisis no arquimediano, con aplicaciones importantes en áreas como los números p-ádicos, sistemas dinámicos y la informática. El objetivo principal es analizar en detalle las condiciones bajo las cuales existen puntos fijos en dichos espacios y estudiar las propiedades de las funciones que cumplen con estas condiciones.

Los espacios ultramétricos, a diferencia de los espacios métricos tradicionales, cumplen una forma más estricta de la desigualdad triangular, conocida como la desigualdad ultramétrica. Esta propiedad genera estructuras topológicas únicas que afectan la existencia y unicidad de puntos fijos.

A través de un análisis teórico detallado y ejemplos ilustrativos, este trabajo destaca la relevancia del Teorema del Punto Fijo en espacios ultramétricos y su potencial para futuras investigaciones y aplicaciones, especialmente en campos como la criptografía, la combinatoria y la teoría computacional.

Palabras claves: espacios ultramétricos, teorema del punto fijo, análisis no arquimediano, topología, números p-ádicos.

Abstract

This thesis investigates the Fixed Point Theorem in ultrametric spaces, a key result in non-Archimedean analysis with important applications in fields such as p-adic numbers, dynamical systems, and computer science. The main objective is to thoroughly analyze the conditions under which fixed points exist in ultrametric spaces and to study the properties of functions that satisfy these conditions.

Ultrametric spaces, unlike traditional metric spaces, adhere to a stricter form of the triangle inequality known as the ultrametric inequality. This property leads to unique topological structures that influence the existence and uniqueness of fixed points.

Through detailed theoretical analysis and illustrative examples, this thesis highlights the relevance of the Fixed Point Theorem in ultrametric spaces and its potential for future research and applications, particularly in areas like cryptography, combinatorics, and computational theory.

Keywords: ultrametric spaces, fixed point theorem, non-Archimedean analysis, topology, p-adic numbers.

Índice general

1. Espacio Métrico **1**

1.1. Espacio Métrico 1

1.2. Topología de un espacio métrico 2

1.3. Análisis de un espacio métrico 2

1.4. Teorema de la contracción 3

2. Cuerpo Valuado **5**

2.1. Valuación 5

2.2. Cuerpo Arquimediano y No-Arquimediano 6

2.3. Análisis topológico de un Cuerpo Valuado 9

2.4. Álgebra de un Cuerpo No-Arquimediano 11

3. Espacios Ultramétricos **14**

3.1. Espacio Ultramétrico Débil 14

3.2. Espacio Ultramétrico 15

3.3. Topología en un espacio ultramétrico 17

3.4. Espacio Esféricamente Completo 20

4. Espacios Métricos Hiperconvexos **23**

4.1. Espacios Métricos Hiperconvexos 23

5. Aplicaciones No Expansivas **25**

5.1. Aplicaciones no expansivas 25

Introducción

El Teorema del Punto Fijo es un resultado central en varias áreas de las matemáticas, especialmente en análisis y topología. Este teorema establece que, bajo ciertas condiciones, una función aplicada sobre un conjunto tendrá al menos un punto que se mapea a sí mismo. Aunque el teorema se ha estudiado ampliamente en espacios métricos, su aplicación en espacios ultramétricos abre nuevas posibilidades, dado que estos espacios tienen propiedades topológicas únicas debido a su estricta desigualdad triangular.

Los espacios ultramétricos, también conocidos como espacios de métricas no arquimedianas, se presentan principalmente en el estudio de números p-ádicos y son relevantes en diversos campos como la criptografía, la teoría de números y los sistemas dinámicos. El comportamiento de las funciones en estos espacios es distinto al de los espacios métricos convencionales, lo que permite adaptar y extender teoremas clásicos, como el Teorema del Punto Fijo de Banach, en este contexto particular.

Esta tesis tiene como objetivo principal explorar las condiciones necesarias para la existencia de puntos fijos en espacios ultramétricos, analizar las propiedades de las funciones en dichos espacios y presentar nuevas aplicaciones del teorema. A lo largo del trabajo se profundizará en la teoría que subyace a los espacios ultramétricos y se proporcionarán ejemplos que ilustran la relevancia del Teorema del Punto Fijo en esta área de investigación, destacando sus aplicaciones en matemáticas y más allá.

Capítulo 1

Espacio Métrico

1.1. Espacio Métrico

Definición 1.1.1. Sea M un conjunto no vacío. Una métrica en M es una función

$$d : M \times M \to [0, \infty)$$

que cumple las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in M$:

i) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

ii) Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) Desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Así, el par (M, d) se denomina **espacio métrico**.

Ejemplo 1.1.1 (Espacio métrico discreto)**.** Sea M un conjunto no vacío. Definimos la **métrica discreta** d en M como sigue:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Es fácil verificar que esta función satisface las propiedades de una métrica, por lo que (M, d) es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.2 (La recta real $\mathbb{R}$)**.** Sea $M = \mathbb{R}$ y $d(x, y) = |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Se puede comprobar fácilmente que se satisfacen las propiedades métricas, por lo que $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.3 (Los números complejos)**.** Sea $M = \mathbb{C}$ y $d(z, w) = |z - w|$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Al igual que en el caso real, esta función cumple las propiedades de una métrica, por lo que $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.4 (El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$)**.** Sea $M = \mathbb{R}^n$. La métrica d en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Se puede demostrar fácilmente que esta función cumple las condiciones de una métrica, por lo que $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.5. Sea $M = \mathbb{C}^n$. Definimos la métrica d_k en $\mathbb{C}^n$ como

$$d_k(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k \right)^{\frac{1}{k}}, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n,$$

donde k es un número fijo mayor o igual a 1. Esta función también cumple las propiedades de una métrica, por lo que $(\mathbb{C}^n, d_k)$ es un espacio métrico.

1.2. Topología de un espacio métrico

Definición 1.2.1. Sea $x \in M$ y $r > 0$. Definimos las siguientes bolas en M:

1. La **bola abierta** centrada en x con radio r es el conjunto de puntos $y \in M$ tales que

$$B_{r^-}(x) = \{y \in M : d(x, y) < r\}.$$

2. La **bola cerrada** centrada en x con radio r es el conjunto de puntos $y \in M$ tales que

$$B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\}.$$

1.3. Análisis de un espacio métrico

Definición 1.3.1. Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que un punto $x \in M$ es el **límite** de una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ si

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Definición 1.3.2. Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ es una **sucesión de Cauchy** si, para cada $\delta > 0$, existe un $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \delta \quad \text{para todo} \quad n, m \geq n_\delta.$$

Definición 1.3.3. Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que M es un **espacio métrico completo** si toda sucesión de Cauchy en M converge a un punto en M.

1.4. Teorema de la contracción

Definición 1.4.1. Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que una función $T : M \to M$ es una **contracción** si existe un $k \in [0, 1)$ tal que, para todo $x, y \in M$, se cumple:

$$d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Es decir, la distancia entre las imágenes de dos puntos bajo T es siempre menor o igual que k veces la distancia entre esos puntos.

Teorema 1.4.1. Si $T : M \to M$ es una contracción en un espacio métrico completo (M, d), entonces existe exactamente un punto $x \in M$ tal que $T(x) = x$.

Demostración. Sea $x_0 \in M$. Definimos la sucesión $\{x_n\} \subset M$ por $x_{n+1} = T(x_n)$ para todo $n \geq 0$. Denotamos por T^n la n-ésima iteración de T, es decir, $x_n = T^n(x_0)$. A continuación, probaremos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Si $m \geq n$, como T es una contracción y por la desigualdad triangular, tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(T^n(x_0), T^m(x_0)) \\
&\leq k^m d(T^{n-m}(x_0), x_0) \\
&\leq k^m \left[d(T^{n-m}(x_0), T^{n-m-1}(x_0)) + d(T^{n-m-1}(x_0), T^{n-m-2}(x_0)) + \cdots + d(T(x_0), x_0)\right] \\
&\leq k^m \left[\sum_{i=0}^{n-m-1} k^i\right] d(x_1, x_0) \\
&\leq k^m \left[\sum_{i=0}^{\infty} k^i\right] d(x_1, x_0) \\
&\leq \left(\frac{k^m}{1-k}\right) d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a

$$d(x_n, x_m) \leq k^m \left(\frac{d(x_1, x_0)}{1-k} \right).$$

Luego, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Dado que M es un espacio métrico completo, la sucesión $\{x_n\}$ converge a algún límite $x \in M$.

El hecho de que el límite x es un punto fijo de T se deduce de la continuidad de la contracción T:

$$T(x) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n \right) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Por último, si x e y son dos puntos fijos de T, entonces:

$$0 \leq d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Como $k < 1$, tenemos que $d(x, y) = 0$, es decir, $x = y$, lo que implica que el punto fijo es único.

□

Capítulo 2

Cuerpo Valuado

2.1. Valuación

Definición 2.1.1. Sea K un cuerpo. Una **valuación** en K es una función

$$|\cdot| : K \to [0, \infty)$$

que cumple las siguientes propiedades para todo $x, y \in K$:

i) $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.

ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, es decir, satisface la **desigualdad triangular**.

De este modo, llamamos **cuerpo valuado** al par $(K, |\cdot|)$.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos el cuerpo $K = \mathbb{C}$. Definimos la función $|a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, donde $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Es sencillo verificar que esta función satisface las condiciones de la Definición 2.1.1. Por lo tanto, $|\cdot|$ es una valuación en K.

Ejemplo 2.1.2. Sea K un cuerpo. Definimos la función

$$|\lambda| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda = 0, \\ 1 & \text{si} \quad \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Esta función es la llamada **valuación trivial**, y vemos que cumple fácilmente con las propiedades requeridas para ser una valuación en K.

Observación 2.1.1. Dado el elemento identidad 1_K de K, las siguientes propiedades son válidas:

i) $|1_K| = 1$.

ii) $|-\lambda| = |\lambda|$ para todo $\lambda \in K$.

iii) $|\lambda^{-1}| = |\lambda|^{-1}$ para todo $\lambda \in K$, siempre que $\lambda \neq 0$.

iv) $|x - y| \geq |\,|x| - |y|\,|$ para todos $x, y \in K$.

2.2. Cuerpo Arquimediano y No-Arquimediano

Definición 2.2.1. Sea $(K, |\cdot|)$ un cuerpo valuado. Se dice que:

1. La valuación es **arquimediana** si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $|n \cdot 1_K| > 1$.

2. La valuación es **no-arquimediana** si para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|n \cdot 1_K| \leq 1$.

Definición 2.2.2. Un cuerpo se denomina:

1. **No-Arquimediano** si su valuación es no-arquimediana.

2. **Arquimediano** si su valuación es arquimediana.

Proposición 2.2.1. Sea $(K, |\cdot|)$ un cuerpo valuado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) K es un cuerpo no-arquimediano.

ii) Para todo $a, b \in K$, se cumple la desigualdad triangular fuerte: $|a + b| \leq \text{máx}\{|a|, |b|\}$.

Demostración. **i) $\Rightarrow$ ii)**
Sean $a, b \in K$. Consideremos $x = \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Queremos demostrar que $|a + b| \leq x$.

Usamos la expansión binomial de $(a + b)^n$ para un $n \in \mathbb{N}$:

$$|a + b|^n = |(a + b)^n| = \left| \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right| \leq \sum_{i=0}^{n} \left| \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right|.$$

Aplicando la propiedad de la valuación no-arquimediana, cada término en la suma se acota por x^n:

$$\sum_{i=0}^{n} \left| \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right| \leq \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot |a^i| \cdot |b^{n-i}| \leq (n+1)x^n.$$

Esto implica que

$$|a+b|^n \leq (n+1)x^n.$$

Tomando la raíz n-ésima de ambos lados:

$$|a+b| \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)} \cdot x = x.$$

Por lo tanto, $|a+b| \leq \text{máx}\{|a|, |b|\}$.

ii) $\Rightarrow$ i)

Supongamos que la desigualdad triangular fuerte se cumple. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$|n \cdot 1_K| = \left| \underbrace{1_k + 1_k + \cdots + 1_k}_{n \text{ - veces}} \right| \leq \text{máx}\{|1_K|\}.$$

Dado que $|1_K| = 1$, concluimos que $|n \cdot 1_K| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que demuestra que la valuación es no-arquimediana. □

Proposición 2.2.2. Sea K un cuerpo no-arquimediano. Si $a, b \in K$ y $|a| < |b|$, entonces $|b-a| = |b|$.

Demostración. Sean $a, b \in K$ con $|a| < |b|$. Por la desigualdad triangular fuerte, tenemos:

$$|b| = |b - a + a| \leq \text{máx}\{|b-a|, |a|\}.$$

Como $|a| < |b|$, esto implica que $|b| \leq |b-a|$. Además, $|b-a| \leq |b|$ porque $|a| < |b|$. Por lo tanto, $|b-a| = |b|$. □

Ejemplo 2.2.1. Sea $K = \mathbb{Q}$, el cuerpo de los números racionales. Para un número primo $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Q}$, donde $q \neq 0$, podemos escribir $q = \frac{\alpha}{\beta} n^p$ para algún $p \in \mathbb{Z}$, con α y β coprimos con n. Definimos la valuación $|q|$ como:

$$|q| = \begin{cases} 0 & \text{si } q = 0, \\ n^{-p} & \text{si } q \neq 0. \end{cases}$$

Esta es una valuación no-arquimediana, conocida como la **valuación n-ádica**.

Ejemplo 2.2.2. Sea $n \in \mathbb{Z}$ un número primo, y sea

$$\mathbb{Z}_n = \left\{ \hat{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i n^i \mid a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_i \leq n-1\ \forall i \geq 0 \right\}$$

el conjunto de todas las series formales, conocidas como los enteros **n-ádicos**. Cada serie tiene una representación única, por lo que $0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i n^i$ si y solo si $a_i = 0$ para todo i.
Definimos el orden de un elemento $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ como

$$ord_n(\hat{a}) = \begin{cases} \infty & \text{si } a_i = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}, \\ \text{mín}\{q \in \mathbb{Z} \mid a_q \neq 0\} & \text{si existe algún } i \text{ tal que } a_i \neq 0. \end{cases}$$

Además, definimos la aplicación $|\cdot|_n : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$|\hat{a}|_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}, \\ n^{-ord_n(\hat{a})} & \text{si existe algún } i \text{ tal que } a_i \neq 0. \end{cases}$$

Esta aplicación $|\cdot|_n$ define una valuación no-arquimediana, conocida como la **valuación n-ádica en $\mathbb{Z}_n$**.

Ejemplo 2.2.3. Sea $n \in \mathbb{Z}$ un número primo, y sea

$$\mathbb{Q}_n = \left\{ \hat{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i n^i \mid a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq n-1 \text{ para todo } i,\ a_{-p} = 0 \text{ para algún } p \text{ grande} \right\}$$

el conjunto de todas las series formales, conocido como el **cuerpo de los números n-ádicos**. Esta serie tiene una representación única para los números racionales. Definimos el orden de un elemento $\hat{a} \in \mathbb{Q}_n$ como:

$$ord_n(\hat{a}) = \begin{cases} \infty & \text{si } a_i = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}, \\ \text{mín}\{q \in \mathbb{Z} \mid a_q \neq 0\} & \text{si existe algún } i \text{ tal que } a_i \neq 0. \end{cases}$$

La aplicación $|\cdot|_n : \mathbb{Q}_n \to \mathbb{R}$ se define como sigue:

$$|\hat{a}|_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}, \\ n^{-ord_n(\hat{a})} & \text{si existe algún } i \text{ tal que } a_i \neq 0. \end{cases}$$

Esta aplicación $|\cdot|_n$ es una valuación no-arquimediana, denominada **valuación n-ádica en $\mathbb{Q}_n$**.

Ejemplo 2.2.4. La **valuación trivial** de un cuerpo es una valuación no-arquimediana.

2.3. Análisis topológico de un Cuerpo Valuado

La valuación de un cuerpo K induce una métrica ψ en K definida por:

$$\begin{aligned} \psi : \quad K \times K \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad |x - y| \end{aligned}$$

Denominaremos a la topología generada por esta métrica como la **topología inducida por la valuación**.

Definición 2.3.1. Sea K un cuerpo valuado y $x \in K$, $r > 0$. Se definen las siguientes bolas:

1. La **bola abierta** con centro en x y radio r es el conjunto

$$B_{r^-}(x) = \{y \in K : |x - y| < r\}.$$

2. La **bola cerrada** con centro en x y radio r es el conjunto

$$B_r(x) = \{y \in K : |x - y| \leq r\}.$$

Observación 2.3.1. Dado que (K, ψ) es un espacio métrico, la bola abierta $B_{r^-}(x)$ y la bola cerrada $B_r(x)$ son, respectivamente, un conjunto abierto y cerrado en K.

Proposición 2.3.1. Sea $(K, |\cdot|)$ un cuerpo no-arquimediano. Entonces, se cumple lo siguiente:

i) La bola cerrada $B_r(a)$ es tanto abierta como cerrada en K.

ii) Si $B_r(a) \cap B_r(a^*) \neq \varnothing$, entonces $B_r(a) = B_r(a^*)$.

iii) Sean B y B^* dos bolas cerradas en K. Si $B \cap B^* \neq \varnothing$, entonces $B \subseteq B^*$ o $B^* \subseteq B$.

Demostración. i) $B_r(a) = \{x \in K : |x - a| \leq r\}$ es una bola cerrada porque (K, ψ) es un espacio métrico. Sea $x \in B_r(a)$, entonces $|x - a| \leq r$. Supongamos que $x \notin \text{int}(B_r(a))$, lo que implica que $x \in \overline{(B_r(a))^c}$. Por lo tanto, se cumple que

$$B_{r^-}(x) \cap (B_r(a))^c \neq \varnothing, \quad \forall \alpha > 0.$$

En particular, para $\alpha = r$, se tiene que

$$B_{r^-}(x) \cap (B_r(a))^c \neq \varnothing.$$

Esto implica la existencia de un elemento $u \in K$ tal que

$$u \in B_{r^-}(x) \cap (B_r(a))^c,$$

es decir, $u \in B_{r^-}(x)$ y $u \in (B_r(a))^c$. Entonces, se cumple que

$$|u - x| < r \quad \text{y} \quad |u - a| > r.$$

A partir de aquí, tenemos que

$$r < |u - a| = |u - x + x - a| \leq \text{máx}\{|u - x|, |x - a|\} < r,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, x debe estar en el interior de $B_r(a)$, y en consecuencia, $B_r(a)$ es un conjunto abierto.

ii) Supongamos que $B_r(a) \cap B_r(a^*) \neq \varnothing$, es decir, existe $u \in K$ tal que $u \in B_r(a)$ y $u \in B_r(a^*)$. Esto implica que

$$|a - u| \leq r \quad \text{y} \quad |a^* - u| \leq r.$$

Demostraremos que $B_r(a) \subseteq B_r(a^*)$ y viceversa.

($\subset$) Sea $x \in B_r(a)$. Entonces, $|a - x| \leq r$. Queremos mostrar que $|a^* - x| \leq r$. Usando la desigualdad triangular, tenemos

$$|a^* - x| \leq \text{máx}\{|a^* - u|, |u - a|, |a - x|\} \leq r.$$

Por lo tanto, $x \in B_r(a^*)$.

($\supset$) El argumento es análogo para demostrar $B_r(a^*) \subseteq B_r(a)$.

Así, $B_r(a) = B_r(a^*)$.

iii) Sean $B, B^* \subset K$ dos bolas tales que $B \cap B^* \neq \varnothing$. Esto implica que existe un elemento $u \in K$ tal que $u \in B \cap B^*$. En consecuencia, existe $r, r^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$B = B_r(a) \quad \text{y} \quad B^* = B_{r^*}(a),$$

ya que la elección del centro a no afecta a las bolas. Dado que $r, r^* \in \mathbb{R}$, se cumple que $r \leq r^*$ o $r^* \leq r$. A partir de esto, se tiene lo siguiente:

a) Si $r \leq r^*$, entonces $B_r(a) \subset B_{r^*}(a)$, lo que implica que $B \subset B^*$.

b) Si $r^* \leq r$, entonces $B_{r^*}(a) \subset B_r(a)$, lo que implica que $B^* \subset B$.

Esta misma proposición también se cumple para las bolas abiertas.

□

Observación 2.3.2. El cuerpo K, visto como un espacio topológico, tiene una base de conjuntos cerrados y abiertos, lo que significa que K es un espacio cero-dimensional, es decir, es totalmente disconexo.

2.4. Álgebra de un Cuerpo No-Arquimediano

Definición 2.4.1. Sean $(K_1, |\cdot|_1)$ y $(K_2, |\cdot|_2)$ dos cuerpos valuados. Decimos que $(K_2, |\cdot|_2)$ es una completación de $(K_1, |\cdot|_1)$ si cumple las siguientes condiciones:

i) Existe una función inyectiva $f : K_1 \to K_2$ tal que $|f(a)|_2 = |a|_1$ para todo $a \in K_1$.

ii) K_1 es completo con respecto a $|\cdot|_1$.

iii) $f(K_1)$ es denso en K_2 con respecto a la métrica inducida por $|\cdot|_2$.

Observación 2.4.1. Sea $n \in \mathbb{Q}_n$ un número primo en el cuerpo de los números n-ádicos. Denotaremos por $\mathbb{C}_n$ el cuerpo de los **complejos n-ádicos**, que es la completación de $\mathbb{Q}_n$.

Proposición 2.4.1. Sea K un cuerpo no-arquimediano. Se cumple lo siguiente:

i) $R = \{a \in K : |a| \leq 1\}$ es un dominio de integridad de K.

ii) $S = \{a \in K : |a| < 1\}$ es un ideal maximal de R.

iii) $\frac{R}{S}$ es un cuerpo.

iv) Todo ideal generado por un conjunto finito en R es principal.

Demostración.

i) Sean $x, y \in R$. Se verifica que:

a) $|x + y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\} \leq 1$, lo que implica $x + y \in R$.

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \leq 1$, por lo que $x \cdot y \in R$.

c) Si $x \cdot y \in R$, entonces $|x| \cdot |y| = |x \cdot y| = 0$, lo que implica que $|x| = 0$ o $|y| = 0$.

De esta manera, R es un dominio de integridad.

ii) Sean $x, y \in S$, entonces:

a) $|x + y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\} < 1$, por lo que $x + y \in S$.

b) Si $x \in S$ y $y \in R$, entonces $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \leq |x| \cdot 1 < 1$, lo que implica $x \cdot y \in S$.

Así, S es un ideal de R. Ahora probamos que es un ideal maximal. Supongamos que existe un ideal T tal que $S \subset T \subset R$ y $S \neq T$. Entonces, existe $y \in T$ con $|y| = 1$. Como $y^{-1} \in R$, T debe ser igual a R. Por lo tanto, S es un ideal maximal de R.

iii) Como R es un dominio de integridad y S es un ideal maximal, $\frac{R}{S}$ es un cuerpo.

iv) Sea H un ideal generado por un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en R. Definimos $|x| = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$, que cumple $0 \leq |x| \leq 1$. Si $|x| = 0$, entonces $H = \langle 0 \rangle$ es un ideal principal. Si $0 < |x| \leq 1$, podemos escribir x como múltiplo de un elemento en R, lo que muestra que $H = \langle x \rangle$.

□

Definición 2.4.2. Sea $(K, |\cdot|)$ un cuerpo No-Arquimediano y definimos $K^* = \{x \in K \mid x \neq 0\}$. A continuación, se definen varias propiedades:

i) El conjunto $|K^*| = \{|x| \mid x \in K^*\}$ es un subgrupo multiplicativo de $\langle 0, \infty \rangle$, denominado **grupo valuado** de K.

ii) La **valuación es trivial** si el grupo valuado de K es $\{1\}$.

iii) La **valuación es discreta** cuando el grupo valuado de K forma un subconjunto discreto de $\langle 0, \infty \rangle$.

iv) La **valuación es densa** si el grupo valuado de K es denso en $\langle 0, \infty \rangle$.

Proposición 2.4.2. Sea $(K, |\cdot|)$ un cuerpo no-arquimediano. El subgrupo $|K^*| \subset \langle 0, \infty \rangle$ es o bien denso, o bien discreto. En el caso discreto, existe un valor $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 1$ y $|K^*| = a^{\mathbb{Z}} = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Demostración. Supongamos que $|K^*| \subset \langle 0, \infty \rangle$ no es ni denso ni discreto.

1. Si $|K^*| \subset \langle 0, \infty \rangle$ no es denso, entonces $\log(|K^*|)$ no es denso en $\mathbb{R}$.

2. Si $|K^*| \subset \langle 0, \infty \rangle$ no es discreto, consideremos $x = \sup\{\log(|K^*|) \cap \langle -\infty, 0 \rangle\}$.

   Sean $x_1, x_2, \ldots$ una sucesión en $\log(|K^*|)$ que converge a cero. Como $x_i - x_{i+1} \leq x \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se deduce que $x = 0$. Sea $\delta > 0$, de modo que:

   $$0 > x = 0 > -\delta \quad \Rightarrow \quad \exists \sigma \in \log(|K^*|) \quad \text{con} \quad 0 > \sigma > -\delta.$$

   Consideremos cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que:

   $$n\sigma \leq \lambda \leq (n-1)\sigma.$$

   Entonces:

   $$0 \leq \lambda - n\sigma \leq -\sigma \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \lambda - n\sigma < \delta \quad (\text{ya que } 0 > \sigma > -\delta).$$

   De este modo:

   $$\lambda - \delta < n\sigma \leq \lambda \quad \Rightarrow \quad n\sigma \in \log(|K^*|) \quad (\text{pues } \sigma \in \log(|K^*|)).$$

   Esto demuestra que $\log(|K^*|)$ es denso en $\mathbb{R}$, lo que resulta en una contradicción. Por lo tanto, $|K^*| \subset \langle 0, \infty \rangle$ debe ser o denso, o discreto.

Si $|K^*|$ es discreto, entonces $|K^*| \cap \langle 0, 1 \rangle$ también es un conjunto discreto. Así, existe un elemento máximo $a = \text{máx}\,(|K^*| \cap \langle 0, 1 \rangle)$. Sea cualquier $r \in |K^*|$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$a^{n+1} < r \leq a^n, \quad \text{ya que} \quad 0 < a < 1.$$

Esto implica que:

$$a < \frac{r}{a^n} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{a^n} \in R \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{a^n} = 1.$$

Como a es el elemento máximo, se concluye que:

$$r = a^n.$$

Por lo tanto, $|K^*| = a^{\mathbb{Z}}$. □

Ejemplo 2.4.1. La valuación en $\mathbb{C}_n$ es densa, ya que el conjunto $|\mathbb{C}_n^*| = \{n^r \mid r \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\langle 0, \infty \rangle$.

Ejemplo 2.4.2. La valuación en $\mathbb{Q}_n$ es densa, pues el conjunto $|\mathbb{Q}_n^*| = \{n^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\langle 0, \infty \rangle$.

Capítulo 3

Espacios Ultramétricos

3.1. Espacio Ultramétrico Débil

Definición 3.1.1. Se denomina **ultramétrica débil** en un conjunto no vacío M a una función $d : M \times M \to [0, \infty)$ que cumple las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in M$:

i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$, es decir, es simétrica.

iii) Existe una constante $k \geq 1$ tal que para todo $x, y, z \in M$ se cumple:

$$d(x, y) \leq k \cdot \text{máx}\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Si estas condiciones se verifican, se dice que el par (M, d) es un **espacio ultramétrico débil**.

Observación 3.1.1. No todo espacio ultramétrico débil es necesariamente un espacio métrico. Para ilustrar esto, consideremos el conjunto $M = \mathbb{N}$ y la función $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 8 & \text{si } x, y \in \{1, 2\} \text{ y } x \neq y, \\ 2 & \text{si } x, y \notin \{1, 2\} \text{ o } x \neq y. \end{cases}$$

En este caso, se tiene que $d(1, 2) = 8$, $d(1, 3) = 2$, y $d(2, 3) = 2$. Verifiquemos si cumple con la propiedad de ultramétrica débil:

$$d(1, 2) = 8 \leq 4 \cdot \text{máx}\{d(1, 3), d(3, 2)\} = 4 \cdot 2 = 8,$$

$$d(1,3) = 2 \leq 1 \cdot \text{máx}\{d(1,2), d(3,2)\} = 1 \cdot 8 = 8,$$

$$d(2,3) = 2 \leq 1 \cdot \text{máx}\{d(2,1), d(1,3)\} = 1 \cdot 8 = 8.$$

Por lo tanto, la función d es una ultramétrica débil en $\mathbb{N}$ con constantes $k = 1$ y $k = 4$.

Sin embargo, esta función no es una métrica, ya que no cumple con la desigualdad triangular clásica. Es decir, no se tiene que $d(1,2) \leq d(1,3) + d(3,2)$, ya que:

$$d(1,2) = 8 \not\leq d(1,3) + d(3,2) = 2 + 2 = 4.$$

En consecuencia, el espacio (M, d) no es métrico.

3.2. Espacio Ultramétrico

Definición 3.2.1. Se denomina **ultramétrica** en un conjunto no vacío M a una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in M$:

i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$, es decir, es simétrica.

iii) $d(x, y) \leq \text{máx}\{d(x, z), d(z, y)\}$, conocida como la **desigualdad triangular fuerte**.

Si estas condiciones se satisfacen, se dice que el par (M, d) es un **espacio ultramétrico**.

Observación 3.2.1. No todo espacio métrico es ultramétrico. Un ejemplo claro se obtiene tomando $M = \mathbb{R}$ y definiendo la función $d(x, y) = |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$, la cual es una métrica en $\mathbb{R}$, pero no es ultramétrica. Para ilustrarlo, consideremos los puntos $x = -5$, $y = 2$, y $z = 0$. Se tiene que $d(x, y) = 7$, $d(x, z) = 5$ y $d(z, y) = 2$. Sin embargo, $d(x, y) = 7$ no cumple con la desigualdad ultramétrica ya que:

$$d(x, y) = 7 \not\leq \text{máx}\{d(x, z), d(z, y)\} = \text{máx}\{5, 2\} = 5.$$

Por lo tanto, $d(x, y)$ no cumple con la propiedad de ultramétrica.

Ejemplo 3.2.1.

1. Sea p un número primo fijo. Para $x, y \in \mathbb{Z}$, definimos la función $d(x, y)$ como sigue:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ p^{-r} & \text{si } x \neq y \text{ y } r \text{ es el mayor entero no negativo tal que } p^r \text{ divide a } x - y. \end{cases}$$

   En este caso, el espacio $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio ultramétrico.

2. Consideremos M un conjunto arbitrario. Definimos la función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

   En este caso, (M,d) es un espacio ultramétrico, y esta función se conoce como la **métrica trivial**.

Proposición 3.2.1 (Principio del Triángulo Isósceles)**.** Sea (M,d) un espacio ultramétrico. Si $x,y,z \in M$ y $d(x,y) \neq d(y,z)$, entonces se cumple que:

$$d(x,y) = \text{máx}\{d(x,z), d(y,z)\}.$$

Demostración. Dado que $d(x,y) \neq d(y,z)$, podemos considerar dos casos: $d(x,y) < d(y,z)$ o $d(x,y) > d(y,z)$.

1. Si $d(x,y) < d(y,z)$, por la propiedad ultramétrica se tiene que:

$$d(y,z) \leq \text{máx}\{d(y,x), d(x,z)\} = d(x,z).$$

   Esto implica que:

$$d(x,z) \leq \text{máx}\{d(x,y), d(y,z)\} = d(y,z),$$

   lo que lleva a la conclusión de que $d(x,z) = d(y,z)$.

2. Si $d(x,y) > d(y,z)$, de nuevo por la propiedad ultramétrica, se sigue que:

$$d(x,y) \leq \text{máx}\{d(x,z), d(z,y)\} = d(x,z).$$

   Esto lleva a:

$$d(x,z) \leq \text{máx}\{d(x,y), d(y,z)\} = d(x,y),$$

   lo que implica que $d(x,z) = d(x,y)$.

En ambos casos, concluimos que:

$$d(x,y) = \text{máx}\{d(x,z), d(y,z)\}.$$

□

3.3. Topología en un espacio ultramétrico

Definición 3.3.1. Sean $x \in M$, $r > 0$ y A, B subconjuntos no vacíos de M.

1. La **bola abierta** centrada en x con radio r se define como el conjunto de puntos

$$B_{r^-}(x) = \{y \in M : d(x, y) < r\}.$$

2. La **bola cerrada** centrada en x con radio r es el conjunto de puntos

$$B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\}.$$

3. El **diámetro** de A es $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Decimos que A está **acotado** si $d(A) < \infty$.

4. La distancia entre un punto $x \in M$ y un subconjunto $A \subseteq M$ se define como

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

5. La distancia entre los subconjuntos A y B se define como

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Observación 3.3.1. Dado que (M, d) es un espacio ultramétrico, las bolas abiertas $B_{r^-}(x)$ y las bolas cerradas $B_r(x)$ son, respectivamente, conjuntos abiertos y cerrados.

Proposición 3.3.1. Sea (M, d) un espacio ultramétrico. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) Si $a, b \in M$ y $\alpha > 0$, entonces $b \in B_\alpha(a)$ implica que $B_\alpha(a) = B_\alpha(b)$.

ii) Si $a, b \in M$ y $\alpha \geq \beta > 0$, entonces $B_\alpha(a) \cap B_\beta(b) = \varnothing$ o $B_\beta(b) \subseteq B_\alpha(a)$.

iii) Toda bola en M es abierta y cerrada al mismo tiempo.

Demostración.

1. Si $a, b \in M$, $\alpha > 0$ y $b \in B_\alpha(a)$, entonces

$$d(a, b) \leq \alpha. \tag{3.1}$$

Sea $x \in B_\alpha(a)$, entonces

$$d(a,x) \leq \alpha. \tag{3.2}$$

De (3.1) y (1) se tiene que

$$d(x,b) \leq \text{máx}\{d(x,a), d(a,b)\} \leq \alpha,$$

de aquí obtenemos que $d(x,b) \leq \alpha$, y además, $x \in B_\alpha(b)$. Luego, $B_\alpha(a) \subset B_\alpha(b)$. De forma análoga, se prueba la otra inclusión. Por lo tanto, $B_\alpha(b) \subset B_\alpha(a)$.

ii) Sean $a, b \in M$, $\alpha \geq \beta > 0$. Si $B_\alpha(a) \cap B_\beta(b) \neq \varnothing$, entonces existe $u \in M$ tal que $u \in B_\alpha(a) \cap B_\beta(b)$, de donde se sigue que $u \in B_\alpha(a)$ y $u \in B_\beta(b)$. Más aún, se tiene que

$$d(a,u) \leq \alpha \quad \text{y} \quad d(b,u) \leq \beta.$$

Como $\alpha \geq \beta$, de (3.3) se deduce que

$$d(b,a) \leq \text{máx}\{d(b,u), d(u,a)\} \leq \alpha. \tag{3.3}$$

Sea $x \in B_\beta(b)$, entonces

$$d(b,x) \leq \beta. \tag{3.4}$$

De (3.3) y (3.4) se tiene que

$$d(x,a) \leq \text{máx}\{d(x,b), d(b,a)\} \leq \alpha,$$

por lo que $d(x,a) \leq \alpha$. De aquí se sigue que $x \in B_\alpha(a)$. Por lo tanto, hemos demostrado que $B_\beta(b) \subset B_\alpha(a)$.

iii) *a*) Sea $B_r(x)$ una bola cerrada. Sabemos que $B_r(x)$ es cerrado, probaremos que $B_r(x)$ es también abierto. Sea $y \in B_r(x)$, entonces $d(x,y) \leq r$. Supongamos que $y \notin \text{int}(B_r(x))$, entonces $y \in \overline{(B_r(x))^c}$. Por lo tanto, se tiene

$$B_{\alpha^-}(y) \cap (B_r(x))^c \neq \varnothing, \quad \forall \alpha > 0.$$

En particular, para $\alpha = r$, se cumple que $B_{r^-}(y) \cap (B_r(x))^c \neq \varnothing$. Entonces, existe $u \in M$ tal que $u \in B_{r^-}(y) \cap (B_r(x))^c$. Por lo tanto, $u \in B_{r^-}(y)$ y $u \in (B_r(x))^c$. De esto se sigue que

$$d(y,u) < r \quad \text{y} \quad d(x,u) > r,$$

lo cual implica

$$r < d(x,u) \leq \max\{d(x,y), d(y,u)\} \leq r \quad (\rightarrow\leftarrow).$$

Por lo tanto, $y \in \text{int}(B_r(x))$. En conclusión, toda bola cerrada es abierta.

b) Sea $B_{r^-}(x)$ una bola abierta. Sabemos que $B_{r^-}(x)$ es abierta, probaremos que $B_{r^-}(x)$ es cerrada. Sea $y \in B_{r^-}(x)$, es decir, $d(x,y) < r$. Supongamos que $y \notin \overline{(B_{r^-}(x))}$, es decir, $y \in \text{int}((B_{r^-}(x))^c)$. Entonces, existe $\alpha > 0$ tal que

$$B_{\alpha^-}(y) \subset (B_{r^-}(x))^c.$$

En particular, $B_{\alpha^-}(y) \cap B_{r^-}(x) \neq \varnothing \quad (\rightarrow\leftarrow)$. Por lo tanto, $y \in \overline{(B_{r^-}(x))}$. En conclusión, toda bola abierta es cerrada.

□

Proposición 3.3.2. Sean $B_1, B_2 \subset M$ dos bolas. Entonces, B_1 y B_2 son comparables por inclusión, es decir, $B_1 \subseteq B_2$, $B_2 \subseteq B_1$, o $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. En este caso, para todo $x \in B_1$ y $y \in B_2$, se cumple $d(x,y) = d(B_1, B_2)$.

Demostración.

i) Supongamos que no es cierto que se cumpla alguna de las tres condiciones $B_1 \subset B_2$, $B_2 \subset B_1$ o $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. En este caso, consideremos un punto $a \in B_1 \cap B_2$. Dado que $x \in B_1 \setminus B_2$ y $y \in B_2 \setminus B_1$, el punto a puede ser un centro tanto para B_1 como para B_2. Además, se cumple lo siguiente:

$$d(x,a) > d(y,a) \quad \text{porque} \quad y \in B_2 \quad \text{y} \quad x \notin B_1,$$

$$d(y,a) > d(x,a) \quad \text{porque} \quad x \in B_1 \quad \text{y} \quad y \notin B_2.$$

Esto genera una contradicción.

ii) Tomemos $x, x' \in B_1$ y $y \in B_2$. Entonces, se tiene que $d(x,x') < d(x,y)$ y $d(x,x') < d(x',y)$. Aplicando el principio del triángulo isósceles, obtenemos que $d(x',y) = d(x,y)$. Por simetría, también tenemos que $d(x,y') = d(x,y)$ para todo $y' \in B_2$. De esto se concluye que la función

$$(x,y) \mapsto d(x,y) \quad (x \in B_1,\ y \in B_2)$$

es constante, y con esto hemos completado la demostración.

□

Proposición 3.3.3. Sea A un subconjunto abierto no vacío de M. Entonces, existe una partición de A en bolas. En particular, dado $r_1 > r_2 > \cdots > 0$, A puede ser cubierto por bolas disjuntas de la forma $B_\alpha(r_n)$ (con $a \in M$ y $n \in \mathbb{N}$).

Demostración. Probaremos la segunda afirmación. Para cada $a \in A$, consideremos la siguiente construcción:

$$B_\alpha = \begin{cases} B_\alpha(r_1) & \text{si} \quad B_\alpha(r_1) \subset A, \\ B_\alpha(r_n) & \text{si} \quad B_\alpha(r_n) \subset A \text{ y } B_\alpha(r_{n-1}) \not\subset A. \end{cases}$$

De este modo, la colección $\{B_\alpha : a \in A\}$ es una cubierta de A.

Ahora, supongamos que $B_\alpha \cap B_\beta \neq \varnothing$ para algún $a, b \in A$. Según la proposición 3.3.2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B_\alpha \subset B_\beta$. Sin embargo, B_α está definido como la bola cerrada más grande con centro en a y radio perteneciente al conjunto $\{r_1, r_2, \dots\}$, entre las cuales B_β es una de ellas. Por lo tanto, $B_\beta \subset B_\alpha$, lo que implica que $B_\alpha = B_\beta$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, la colección $\{B_\alpha : a \in A\}$ es disjunta. □

3.4. Espacio Esféricamente Completo

Definición 3.4.1. Sea M un espacio ultramétrico.

i) Se dice que M es **esféricamente completo** si, para cualquier sucesión decreciente de bolas cerradas $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, la intersección de todas estas bolas es no vacía.

ii) El espacio M es **completo** si, para toda sucesión decreciente de bolas $B_{\alpha_1} \supset B_{\alpha_2} \supset B_{\alpha_3} \supset \cdots$, con radios α_n que convergen a cero, se cumple que la intersección de las bolas es no vacía.

Observación 3.4.1.

1. Un espacio ultramétrico esféricamente completo es necesariamente completo.

2. Si un espacio ultramétrico es compacto, entonces es esféricamente completo.

Proposición 3.4.1. Sea (M, d) un espacio ultramétrico. Los siguientes enunciados son equivalentes:

i) Para cualquier familia de bolas $(A_i)_{i\in I}$ en M, si $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ para todos $i, j \in I$, entonces la intersección de todas las bolas en la familia es no vacía. Es decir,

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing.$$

ii) El espacio M es esféricamente completo.

Demostración.
ii) $\Rightarrow$ i). Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de bolas en M tal que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ para todo $i, j \in I$. Consideremos una sucesión de índices $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ tal que

$$d(A_{i_1}) \geq d(A_{i_2}) \geq \cdots \quad \text{y} \quad \forall i \in I, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(A_i) \geq d(A_{i_n}).$$

Dado que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ implica que $A_i \subset A_j$ o $A_j \subset A_i$, se tiene:

$$A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset \cdots \quad \text{y} \quad \forall i \in I, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } A_i \supset A_{i_n}.$$

Como M es esféricamente completo, se cumple que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

i) $\Rightarrow$ ii). Sea una sucesión decreciente de bolas $A_{\alpha_1}(x_1) \supset A_{\alpha_2}(x_2) \supset \cdots$. Como $A_{\alpha_1}(x_1) \cap A_{\alpha_j}(x_2) \neq \varnothing$ para todo $i, j \in I$, por la condición de la familia se cumple que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha_n}(x_n) \neq \varnothing.$$

□

Proposición 3.4.2. Sea $(K, |\cdot|)$ un cuerpo no-arquimediano con valuación discreta. Entonces, K es esféricamente completo.

Demostración. Sea $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ una sucesión decreciente de bolas cerradas en K. Entonces, la sucesión de diámetros $d(A_1) \geq d(A_2) \geq d(A_3) \geq \cdots$ forma una sucesión decreciente de elementos en $|K^*|$. Por la discreción de la valuación, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} d(A_n) > 0.$$

1. Si $lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$ entonces $lim_{n\to\infty} A_n = \{a\}$, pues la validación es discreta $d(A_n) \in |K^*|$.

2. Si $\lim_{n\to\infty} d(A_n) > 0$, entonces la intersección de todas las bolas es no vacía.

Por lo tanto, K es esféricamente completo. □

Proposición 3.4.3. Sea $(K, |\cdot|)$ un cuerpo no arquimediano con valuación densa. Si K es separable, entonces no es esféricamente completo.

Demostración. Dado que $|K^*|$ es un conjunto denso en $(0, \infty)$, existe una sucesión $a_1 > a_2 > \cdots \in |K^*|$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Además, como K es separable, existe un subconjunto contable denso $\{b_1, b_2, \cdots\} \subset K$.

Ahora, consideremos una bola cerrada A_1 de radio a_1 tal que $b_1 \notin A_1$. Como $a_1 < +\infty$, existe $a_0 \in |K^*|$ tal que $a_1 < a_0$, y por lo tanto, existe un $x \in K^*$ con $|x| = a_0$. De esta forma, podemos encontrar una bola cerrada $A_2 \subset A_1$ de radio a_2 tal que $b_2 \notin A_2$. Repetimos este proceso indefinidamente, obteniendo una sucesión $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n$ de bolas cerradas de radio a_n tal que $b_n \notin A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ fuera no vacío, entonces A sería una bola cerrada de radio a, pero también sería un conjunto abierto. Esto implica que $A \cap \{b_1, b_2, \cdots\} \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción, ya que $b_n \notin A_n$ por construcción. Por lo tanto, $A = \varnothing$, y K no es esféricamente completo. □

Ejemplo 3.4.1. Considere $M = \mathbb{N}$ con la función $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m, \\ \text{máx}\{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{m}\} & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

El espacio $(\mathbb{N}, d)$ es ultramétrico y completo, pero no es esféricamente completo.

Capítulo 4

Espacios Métricos Hiperconvexos

4.1. Espacios Métricos Hiperconvexos

Definición 4.1.1. Un espacio métrico X se dice **hiperconvexo** si satisface las siguientes condiciones:

i) Para cualquier familia $\{B(x_i, \gamma_i)\}_{i\in I}$ de bolas, si se cumple que

$$B(x_i, \gamma_i) \cap B(x_j, \gamma_j) = \varnothing \quad \forall i, j \in I,$$

entonces la intersección total de todas las bolas es no vacía:

$$\bigcap_{i\in I} B(x_i, \gamma_i) \neq \varnothing.$$

ii) Para cualesquiera $x, y \in X$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, si se cumple que

$$d(x, y) \leq \sup\{\gamma_1, \gamma_2\},$$

entonces la intersección de las bolas $B(x, \gamma_1)$ y $B(y, \gamma_2)$ no es vacía:

$$B(x, \gamma_1) \cap B(y, \gamma_2) \neq \varnothing.$$

Observación 4.1.1. En el caso clásico, la segunda condición resulta ser innecesaria. En efecto, en cualquier espacio ultramétrico se cumple la siguiente equivalencia:

$$d(x, y) \leq \text{máx}\{\gamma_1, \gamma_2\} \quad \Leftrightarrow \quad B(x, \gamma_1) \cap B(y, \gamma_2) \neq \varnothing.$$

(⇒) Si $d(x, y) \leq \text{máx}\{\gamma_1, \gamma_2\}$, se analizan dos casos:

1. Si $\gamma_1 \leq \gamma_2$, entonces $x \in B(x, \gamma_1) \cap B(y, \gamma_2)$.

2. Si $\gamma_2 \leq \gamma_1$, entonces $y \in B(x, \gamma_1) \cap B(y, \gamma_2)$.

En ambos casos, $B(x, \gamma_1) \cap B(y, \gamma_2) \neq \varnothing$.

$(\Leftarrow)$ Si $B(x, \gamma_1) \cap B(y, \gamma_2) \neq \varnothing$, entonces existe un punto z en la intersección, es decir, $z \in B(x, \gamma_1) \cap B(y, \gamma_2)$. Esto implica que $d(x, z) \leq \gamma_1$ y $d(y, z) \leq \gamma_2$. Por la desigualdad triangular ultramétrica, se cumple

$$d(x, y) \leq \text{máx}\{d(x, z), d(y, z)\} \leq \text{máx}\{\gamma_1, \gamma_2\}.$$

Por lo tanto, un espacio ultramétrico es hiperconvexo si satisface solo la primera condición.

Observación 4.1.2. Es importante observar que un espacio métrico (X, d) es hiperconvexo si, para cualquier colección de bolas cerradas $\{B_{\gamma_i}\}_{i \in I}$, se cumple que

$$d(x_i, x_j) \leq \gamma_i + \gamma_j \quad \forall i, j \in I,$$

implica que la intersección de todas las bolas es no vacía:

$$\bigcap_{i \in I} B(x_i, \gamma_i) \neq \varnothing.$$

Por lo tanto, un espacio ultramétrico hiperconvexo no puede ser considerado hiperconvexo en el sentido métrico clásico, ya que este último es completo y en él siempre existe un segmento métrico entre dos puntos. En cambio, en el espacio ultramétrico, los puntos forman los vértices de un triángulo isósceles.

Teorema 4.1.1. Sea (X, d) un espacio ultramétrico. Entonces, X es hiperconvexo si y solo si es esféricamente completo.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que (X, d) es un espacio ultramétrico hiperconvexo. Tomemos $x, y \in X$ y $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Si $B(x, \gamma) \subset B(y, \delta)$, entonces $d(x, y) \leq \delta \sup\{\gamma, \delta\}$. Esto implica que cualquier cadena descendente de bolas en el espacio ultramétrico hiperconvexo tiene intersección no vacía. Por lo tanto, (X, d) es esféricamente completo.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que (X, d) es esféricamente completo. Tomemos una colección $\{B(x_i, \gamma_i)\}_{i \in I}$ de bolas en X tal que $d(x_i, x_j) \leq \text{máx}\{\gamma_i, \gamma_j\} \quad \forall i, j \in I$. Debido a que los números reales están linealmente ordenados, la colección $\{B(x_i, \gamma_i)\}_{i \in I}$ forma una cadena anidada. Por la completitud esférica, la intersección de todas las bolas es no vacía:

$$\bigcap_{i \in I} B(x_i, \gamma_i) \neq \varnothing.$$

Así, (X, d) es hiperconvexo. □

Capítulo 5

Aplicaciones No Expansivas

5.1. Aplicaciones no expansivas

Definición 5.1.1. Sea (M, d) un espacio ultramétrico y $T : M \to M$ una función. Decimos que la bola $B(x, r)$ es mínima T-invariante si $T(B(x, r)) \subseteq B(x, r)$ y $d(u, T(u)) = r$ para todo $u \in B(x, r)$. En este caso, T se llama una **Aplicación no expansiva**.

Teorema 5.1.1. Sea (M, d) un espacio ultramétrico esféricamente completo y $T : M \to M$ una aplicación no expansiva. Entonces, para cualquier bola de la forma $B(x, d(x, T(x)))$, existe un punto fijo de T o una bola mínima T-invariante.

Demostración. Sea $z \in M$ y definimos $r = d(z, T(z))$. Sea $u \in B(z, r)$. Afirmamos que $T(u) \in B(z, r)$ y $d(u, T(u)) \leq d(z, T(z))$. Demostraremos esto en dos casos:

i) Si $d(u, z) < r$, entonces, como $d(T(z), T(u)) \leq d(z, u)$, por el principio del triángulo isósceles, se tiene que $d(z, T(u)) = r$. Así, $d(u, T(u)) = r$.

ii) Si $d(u, z) = r$, entonces, por el principio triángulo isósceles, se cumple $d(z, T(u)) = r$, y, además, $d(u, T(u)) \leq r$ o $d(z, T(u)) < r$ y $d(u, T(u)) = r$. Por lo tanto, $T(u) \in B(z, r)$ y $d(u, T(u)) \leq r$. Así, cualquier bola de la forma $B(z, d(z, T(z)))$ es T-invariante.

Ahora probamos que $B := B(x, d(x, T(x)))$ contiene un punto fijo de T o una bola mínima T-invariante. Sea $x_1 = x$ y $r_1 = d(x_1, T(x_1))$, y definimos $\mu_1 = \text{ínf}\{d(x, T(x)) : x \in B(x_1, r_1)\}$.

Definimos $\{\epsilon_n\}$ como una secuencia de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

Si $\mu_1 = r_1$, entonces $B = B(x_1, r_1)$ es una bola singleton o una bola mínima T-invariante, lo que concluye la demostración.

Si $r_1 > 0$ y $\mu_1 < r_1$, seleccionamos $x_2 \in B(x_1, r_1)$ tal que

$$r_2 := d(x_2, T(x_2)) < \text{mín}\{r_1, \mu_1 + \epsilon_1\}.$$

Se repite este proceso definiendo $x_n \in M$ y $\mu_n = \text{ínf}\{d(x, T(x)) : x \in B(x_n, r_n)\}$. Para $n = 1$, si $\mu_n = r_n$, terminamos. De lo contrario, seleccionamos $x_{n+1} \in B(x_n, r_n)$ tal que

$$r_{n+1} := d(x_{n+1}, T(x_{n+1})) < \text{mín}\{r_n, \mu_n + \epsilon_n\}.$$

En algún punto, la secuencia de bolas convergerá a un punto fijo, o bien la intersección de bolas no triviales no vacía se mantendrá, ya que M es esféricamente completo:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \varnothing.$$

Dado que $\{r_n\}$ es decreciente, el límite $r := \lim_{n\to\infty} r_n$ existe. Además, como $\{\mu_n\}$ no es decreciente y está acotada superiormente, también existe $u := \lim_{n\to\infty} u_n$.

Finalmente, sea $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$. Para cada n, tenemos

$$d(z, T(z)) \leq \text{máx}\{d(z, x_n), d(x_n, T(z))\} \leq r_n.$$

Como $z \in B(x_{n+1}, r_{n+1})$ para todo n, se deduce que $d(z, T(z)) = r$. Si $r > 0$, entonces $B(z, d(z, T(z)))$ es una bola mínima T-invariante. Si $r = 0$, entonces z es un punto fijo de T. □

Observación 5.1.1. La demostración anterior solo requiere que las secuencias de bolas cerradas descendentes tengan una intersección no vacía.

Observación 5.1.2. Si $B(x, r)$ es una bola mínima T-invariante, entonces

$$d(T^n(x), T^{n+1}(x)) = r \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Corolario 5.1.1. Sea (M, d) un espacio ultramétrico esféricamente completo y $T : M \to M$ una aplicación tal que

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \text{cuando } x \neq y,$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Observación 5.1.3. Del Corolario 5.1.1, el punto fijo de T debe estar en cada bola de la forma $B(x, d(x, T(x)))$. Estas bolas son anidadas. Así, $\{z\} = \bigcap_{x \in M} B(x, d(x, T(x)))$, donde $T(z) = z$. Además, si $x \in M$ y $x \neq z$, entonces $d(z, T(x)) < d(z, x)$, lo que implica que

$$d(z, x) = d(x, T(x)).$$

Bibliografía

Aronszajn, N. and Panitchpakdi, P. (1956). Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces. *Pacific J. Math.*, 6:405–439.

Bouamama, S. and Misane, D. (2005). Hyperconvex ultrametric spaces and fixed point theory. *New Zealand J. Math.*, 34:25–29.

Lemin, A. (2003). On ultrametrization of general metric spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131:979–989.

Martínez-Maurica, J. and Pellón, M. (1987). Non-archimedean chebyshev centers. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 49(4):417–421.

Narici, L., Beckenstein, E., and Bachman, G. (1971). *Functional Analysis and Valuation Theory.* Marcel Dekker, New York.

Petalas, C. and Vidalis, T. (1993). A fixed point theorem in non-archimedean vector spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118:819–821.

Priess-Crampe, S. (1990). Der banachsche fixpunktsatz für ultrametrische räume. *Results Math.*, 18:178–186.

Priess-Crampe, S. (1995). Some results of functional analysis for ultrametric spaces and valued vector spaces. *Geom. Dedicata*, 58:79–90.

Priess-Crampe, S. and Ribenboim, P. (1998). The common point theorem for ultrametric spaces. *Geom. Dedicata*, 72:105–110.

Priess-Crampe, S. and Ribenboim, P. (2000). Fixed point and attractor theorems for ultrametric spaces. *Forum Math.*, 12:53–64.