Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Aplicación del teorema del punto fijo en espacios cuasi-métricos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

José Luis CANO CARRASCO

ASESOR

Dr. Carlos Alberto PEÑA MIRANDA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Cano, J. (2024). *Aplicación del teorema del punto fijo en espacios cuasi-métricos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	José Luis Cano Carrasco
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	77675525
URL de ORCID	
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10699143
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-4339-4615
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Andrés Guardia Cayo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09406969
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09197486
Datos de investigación	
Línea de investigación	Optimización

Grupo de investigación	Matemática Aplicada - Métodos Numéricos (METNUM)
Agencia de financiamiento	Ninguna
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.056445 Longitud: -77.085994
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2023 - 2024
URL de disciplinas OCDE	Matemática pura https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 3:50 p.m. *horas del jueves 22 de agosto del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Andrés Guardia Cayo (PRESIDENTE), Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci (MIEMBRO) y el Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada:* ***"APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS CUASI-MÉTRICOS"*** *presentado por el señor Bachiller* ***José Luis Cano Carrasco,*** *para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación Sobresaliente *con un calificativo promedio de* Dieciocho *(*18*).*

A continuación, el Presidente del Jurado, Mg. Andrés Guardia Cayo, manifestó que el señor Bachiller ***José Luis Cano Carrasco****, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Siendo las 4:00 pm *horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.*

Mg. Andrés Guardia Cayo
PRESIDENTE

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
MIEMBRO

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Carlos Alberto Peña Miranda en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°000899-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS CUASI-MÉTRICOS ",** presentado por el bachiller José Luis Cano carrasco, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 19% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.** Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor

DNI: 10699143



La presente tesis está dedicada a mis padres, Isabel y Martín, a quienes siempre dedicaré todos y cada uno de mis logros.

Agradecimientos

A mis padres por su apoyo incondicional, a mis hermanas y hermano que son las mayores motivaciones que tengo para seguir adelante. También a mi familia en general, que celebran, me acompañan y se enorgullecen con cada uno de mis logros.

Agradecimientos cordiales, también, a mi asesor el Dr. Carlos Alberto Peña Miranda, por compartir todo conocimiento conmigo y así guiarme en el buen desarrollo de mi tesis.

Índice general

Dedicatoria **i**

Agradecimientos **ii**

Resumen **iv**

Abstract **v**

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

1.1. Espacios cuasimétricos 3

1.2. Aplicaciones $\psi F-$ contractivas 9

2. Teorema del punto fijo en espacios cuasimétricos **14**

2.1. Algoritmo del punto fijo 18

3. Conclusiones **21**

Referencias **22**

RESUMEN

APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS CUASI-MÉTRICOS

JOSÉ LUIS CANO CARRASCO

Asesor : Dr. Carlos Alberto Peña Miranda.

Título Obtenido : Licenciado en Matematica.

En la tesis estudiamos el teorema del punto fijo para espacios cuasimetricos y demostramos que la sucesión de puntos generada por el algoritmo del punto fijo es $f-$ convergente.

Palabras claves: espacios cuasimetricos, completitud, punto fijo.

ABSTRACT

APPLICATION OF THE FIXED POINT THEOREM IN QUASI-METRIC SPACES

JOSÉ LUIS CANO CARRASCO

Advisor : Dr. Carlos Alberto Peña Miranda.

Obtained Title : Degree in Mathematics.

In the thesis we study the fixed point theorem for quasimetric spaces and demonstrate that the sequence of points generated by the fixed point algorithm is $f-$ convergent.

Key words: quasimetric spaces, completeness, fixed point.

Introducción

Aunque la generalización de la geometría más allá de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ se originó con matemáticos italianos como Ascoli, Arzelá y Volterra, ésta fue tratada más coherente y rigurosamente por (Fréchet, 1906) en su tesis doctoral, donde consideraría una distancia funcional $d : X \to X$ en un conjunto general X tal que d satisface las condiciones ya conocidas para una métrica, sin embargo, sería (Hausdorff, 1914) quien posteriormente introduciría el término "espacio métrico".

Por otro lado, el campo de la teoría del punto fijo comenzaría a finales del siglo XIX e inicios del siglo XX con aportes como los de (Brouwer, 1911) este último publicaría uno de los primeros y más importantes teoremas relacionados con puntos fijos en espacios euclidianos. Posteriormente se iría extendiendo esta teoría del punto fijo para aplicaciones definidas en conjuntos más generales, como (Banach, 1922) que obtuvo un teorema relacionado con aplicaciones contractivas definidas en espacios de Banach, también (Browder y Petryshyn, 1967) que desarrollaron el punto fijo con aplicaciones no lineales en espacios de Hilbert, o trabajos más recientes relacionados con F-contracciones, definición introducida por (Wardowski, 2012), como el realizado por (N. Secelean, 2016) que obtendría resultados de punto fijo para estas F-contracciones en espacios métricos completos y la extensión que harían ambos (N.-A. Secelean y Wardowski, 2016) definiendo las F-contracciones y desarrollando algunos teoremas relacionados con puntos fijos.

El estudio de los espacios cuasimétricos se remonta al trabajo realizado por (Wilson, 1931) donde define los espacios cuasimétricos de manera similar a un espacio métrico con la diferencia de que se quita la condición de simetría para la métrica y a partir de esto se definen sucesiones de Cauchy, convergencia de sucesiones, bolas abiertas, topología generada, etcétera. Otro trabajo inmediatamente posterior al de Wilson es el realizado por (Ribeiro, 1943) donde nos otorgaría la noción y algunos teoremas relacionados con espacios topológicos cuasimetrizables.

Nuestro tema de interés son los puntos fijos en espacios cuasimétricos, cuyos primeros resultados son bastante recientes, como los obtenidos por (Ume, 2008) donde extiende y demuestra algunos teoremas relacionados con puntos fijos en el contexto de espacios cuasimétricos, también (Shaobai, Xiaowen, y Xiaodan, 2009) que extienden el teorema del punto fijo de Caristi a espacios cuasimétricos y generalizan el teorema del punto fijo de Banach para aplicaciones de un espacio cuasimétrico completo en sí mismo, o (N. A. Secelean, Mathew, y Wardowski, 2019) que demuestran y aplican algunos teoremas de punto fijo en espacios cuasimétricos a la teoría de fractales.

Es así cómo, el problema principal que se tratará en la presenta tesis será desarrollar y extender los trabajos previamente realizados sobre puntos fijos en espacios cuasimétricos, en particular para $\psi F-$contracciones, definición otorgada por (N.-A. Secelean y Wardowski, 2016) y extendida a espacios cuasimétricos posteriormente por (N. A. Secelean y cols., 2019).

Por tanto, el objetivo principal que nos plantearemos será demostrar y ejemplificar el teorema del punto fijo para aplicaciones $\psi F-$contracciones en espacios cuasimétricos, a través de los siguientes objetivos específicos:

1. Definir y ejemplificar los espacios cuasimétricos.

2. Definir y ejemplificar las aplicaciones $\psi F-$contractivas en espacios cuasimétricos.

3. Enunciar y demostrar el teorema del punto fijo en espacios cuasimétricos.

Finalmente, la tesis se divide de la siguiente manera. En el Capítulo 1, presentamos una breve introducción de los espacios cuasimetricos y aplicaciones $\psi F-$contractivas. En el Capitulo 2, enunciamos y demostramos el teorema del punto fijo en espacios cuasimetricos. Finalmente, en el Capítulo 3, presentamos las conclusiones de la tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos una breve introducción a la topología de los espacios cuasimetricos y aplicaciones $\psi F-$contractivas. Más detalles sobre los resultados en este capítulo se puede encontrar en los trabajos de Secelean (2016) y Wilson (1931),

1.1. Espacios cuasimétricos

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama cuasimétrica sobre X si se cumplen las siguientes condiciones*

1) $d(x, y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in X$

2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para todo* $x, y, z \in X$

El par (X, d) se denominará espacio cuasimétrico.

Observación 1.1. Nótese que la definición 1.1 es la definición de un espacio métrico prescindiendo de la condición de simetría para d,

A continuación damos algunos ejemplos de espacios cuasimétricos:

1. Sea $\alpha > 0$ y $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definido por:

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} y - x, & \text{si } y \geq x \\ \alpha(x - y), & \text{si } y < x \end{cases}$$

   donde el par $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio cuasimétrico.

2. El ejemplo anterior puede generalizarse considerando una función creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$, considerando:

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} f(y) - f(x), & \text{si } y \geq x \\ \alpha(f(x) - f(y)), & \text{si } y < x \end{cases}$$

3. Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definido por:

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} e^y - e^x, & \text{si } y \geq x \\ e^{-y} - e^{-x}, & \text{si } y < x \end{cases}$$

es la cuasimétrica del espacio $(\mathbb{R}, d)$.

4. Observemos la función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definida por:

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} y - x, & \text{si } y \geq x \\ 1, & \text{si } y < x \end{cases}$$

es una cuasimétrica denominada de *Sorgenfrey*.

En consecuencia, al tener estos espacios cuasimétricos, podemos intuir que podemos construir topologías inducidas por estas cuasimétricas, así es que tenemos las siguientes definiciones:

Definición 1.2. *Sea el espacio cuasimétrico (X, d). Definiremos las bolas abiertas por adelante como:*

$$B_f(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

con $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Analogamente definimos las bolas abiertas por atrás como:

$$B_b(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

Definición 1.3. *Dado el espacio cuasimétrico (X, d), definimos la topología hacia adelante $(\mathcal{T}_f)$ inducida por la cuasimétrica d a la topología generada por las bolas abiertas por adelante $B_f(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$. De manera análoga, definimos la topologia hacia atrás a la generada por las bolas abiertas por atrás $B_b(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$.*

Teniendo en cuenta la definición 1.3, un conjunto $F \in X$ se denominará $f-$*cerrado* si su complemento F^c pertenece a $\mathcal{T}_f$ y $b-$*cerrado* si su complemento F^c pertenece a $\mathcal{T}_b$.

Ejemplo 1.1. Consideremos el espacio cuasimétrico $(\mathbb{R}, d)$ con $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definido por:

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} y - x, & \text{si } y \geq x \\ \alpha(x - y), & \text{si } y < x \end{cases}$$

Teorema 1.1. *La topología hacia adelante $\mathcal{T}_f$ generada por la cuasimétrica d coincide con la topología usual en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sean

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}_f} = \{B_f(x,\varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$$

$$\mathcal{B} = \{\langle a,b\rangle : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

bases de $\mathcal{T}_f$ y de la topología usual de $\mathbb{R}$, respectivamente. Probaremos que $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_f} = \mathcal{B}$.

($\subseteq$) Sea $B_f(x_0,\varepsilon) \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}_f}$, con $B_f(x_0,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : d(x_0,y) < \varepsilon\}$, podemos expresar esta bola como:

$$\begin{aligned} B_f(x_0,\varepsilon) &= \{y \in \mathbb{R} : d(x_0,y) < \epsilon, y \geq x_o\} \cup \{y \in X : d(x_0,y) < \varepsilon, y < x_0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y - x_0 < \varepsilon\} \cup \{y \in \mathbb{R} : 0 < \alpha(x_0 - y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : x_0 \leq y < x_0 + \varepsilon\} \cup \{y \in \mathbb{R} : x_0 - \frac{\varepsilon}{\alpha} < y < x_0\} \\ &= [x_0, x_0 + \varepsilon\rangle \cup \left\langle x_0 - \frac{\varepsilon}{\alpha}, x_0 \right\rangle \\ &= \left\langle x_0 - \frac{\varepsilon}{\alpha}, x_0 + \varepsilon \right\rangle \end{aligned}$$

y por tanto $B_f(x_0,\varepsilon) \in \mathcal{B}$, es decir $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_f} \subset \mathcal{B}$.

($\supseteq$) Consideremos la bola $B_f(x_0,\varepsilon) \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}_f}$ tal que:

$$x_0 = \frac{a\alpha + b}{\alpha + 1} \text{ y } \varepsilon = \frac{(b-a)\alpha}{\alpha + 1}.$$

De la anterior inclusión vimos que

$$\begin{aligned} B_f(x_0,\varepsilon) &= \left\langle x_0 - \frac{\varepsilon}{\alpha}, x_0 + \varepsilon \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{a\alpha + b}{\alpha + 1} - \left(\frac{(b-a)\alpha}{\alpha + 1}\right)\frac{1}{\alpha}, \frac{a\alpha + b}{\alpha + 1} + \frac{(b-a)\alpha}{\alpha + 1} \right\rangle \\ &= \langle a,b\rangle \end{aligned}$$

y por tanto $\langle a,b\rangle = B_f(x_0,\varepsilon) \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}_f}$, es decir $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_f} \supset \mathcal{B}$.

□

Ejemplo 1.2. De manera similar se puede demostrar que la topología inducida $\mathcal{T}_f$ del espacio cuasimétrico (X,d) con $X = [1,+\infty\rangle$ y $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definido por

$$\mathrm{d}(x,y) := \begin{cases} \ln y - \ln x, & \text{si } y \geq x \\ \frac{1}{2}(\ln x - \ln y), & \text{si } y < x \end{cases}$$

coincide con la topología usual de $\mathbb{R}$.

Definición 1.4. *Sea el espacio cuasimétrico (X, d), diremos que una sucesión $(x_n)_n$ contenida en X es convergente hacía adelante o abreviando $f-$convergente a un punto $x_0 \in X$ si esta converge con respecto a la topología $\mathcal{T}_f$. Equivalentemente $(x_n)_n$ es $f-$convergente a x_0 si y solo si:*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) = 0$$

De manera análoga, (x_n) se dirá convergente hacia atrás ($b-$convergente) si converge en la topología $\mathcal{T}_b$. Equivalentemente $(x_n)_n$ es $b-$convergente a x_0 si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

Denotaremos estas convergencias como $x_n \xrightarrow{f} x_0$ y $x_n \xrightarrow{b} x_0$, respectivamente.

Nótese que la sucesión $(d(x_0, x_n))_n$ es una sucesión de números reales no negativos, de aqui podemos deducir algunas propiedades de sucesiones $f-$convergentes (o $b-$convergentes), como por ejemplo, la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *Sea el espacio cuasimétrico (X, d). Una sucesión será $f-$convergente a $x_0 \in X$ si y solo si todas sus subsucesiones son $f-$convergentes a x_0.*

Demostración. La demostración es inmediata considerando la sucesión de números reales positivos $y_n = d(x_0, x_n) \to 0$, así tomando una subsucesión de $(x_{n_k})_k$ será equivalente a tomar la subsucesión $y_{n_k} = d(x_0, x_{n_k}) \to 0$, de manera similar la otra implicación. □

Proposición 1.2. *Si en un espacio cuasimétrico (X, d) la $f-$convergencia implica $b-$convergencia entonces el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_f)$ es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x \neq y \in X$. Debemos probar que existen dos bolas centradas en estos dos puntos tal que dichas bolas tengan intersección vacía. Afirmamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$B_f\left(x, \frac{1}{N}\right) \cap B_f\left(y, \frac{1}{N}\right) = \emptyset$$

Supongamos que esto no sea cierto, es decir que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$B_f\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap B_f\left(y, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá $z_n \in X$ tal que

$$d(x, z_n) < \frac{1}{n}\ ,\ d(y, z_n) < \frac{1}{n} \tag{1.1}$$

De (1.1) se deduce que

$$z_n \xrightarrow{f} x\ ,\ z_n \xrightarrow{f} y$$

En consecuencia

$$0 < \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}\left(x, z_n\right) + \mathrm{d}\left(z_n, y\right). \tag{1.2}$$

De la hipótesis $z_n \xrightarrow{f} x$ se obtiene $z_n \xrightarrow{b} x$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} d(z_n, y) = 0.$$

Tomando límites a (1.2) cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$0 < \mathrm{d}(x, y) \leq 0$$

Es decir, $d(x, y) = 0$ lo que es una contradicción pues $x \neq y$, por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$B_f\left(x, \frac{1}{N}\right) \cap B_f\left(y, \frac{1}{N}\right) = \emptyset$$

Y así el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_f)$ es de Hausdorff. □

Definición 1.5. *Sea una sucesión $(x_n)_n$ en el espacio cuasimétrico (X, d), diremos que $(x_n)_n$ es Cauchy hacia adelante ($f-$Cauchy) si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \ , \ m \geq n \geq N$$

Análogamente, una sucesión $(x_n)_n$ es Cauchy hacia atrás si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \ , \ m \geq n \geq N$$

Con estas definiciones ya establecidas, veremos a continuación una proposición relacionada a ellas.

Proposición 1.3. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión contenida en el espacio cuasimétrico (X, d) y $\Delta \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\mathbb{R}_+\backslash\Delta$ es denso en $\mathbb{R}_+$. Si $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ y $(x_n)_n$ no es $f-$Cauchy, entonces existen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+\backslash\Delta$, $n_0 \in \mathbb{N}$ y sucesiones de enteros positivos $(m_k)_k$, $(n_k)_k$ tal que:*

1. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $n_k > m_k \geq k$*

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon$$

2. *Para todo $k \geq n_0$, $n_k \geq m_k + 2$*

$$d(x_{m_k}, x_{n_k - 1}) < \varepsilon$$

3. *Se cumple que*

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon$$

Demostración. Como $\mathbb{R}_+\backslash\Delta$ es denso en $\mathbb{R}_+$ entonces podemos escribir la definición de sucesión $f-$Cauchy como:

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+\backslash\Delta, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$$

Negando esto, tendriamos que, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+\backslash\Delta$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ podemos encontrar siempre $m, n \in \mathbb{N}$ con $n > m \geq N$ tal que

$$d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$$

A partir de esto, para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos:

$$m_k = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} \ , \ n > m \geq k \ , \ d(x_m, x_n \geq \varepsilon)\}$$
$$n_k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : n > m_k \ , \ d(x_{m_k}, x_n) \geq \varepsilon\}$$

Con estos índices ya definidos probaremos cada uno de los incisos:

1. Es inmediato de la definición de los índices m_k, n_k, pues:

$$\text{Para cada } k \in \mathbb{N} \ , \ n_k > m_k \geq k \ , \ d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon$$

2. Como $d(x_m, x_{m+1}) \to 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) < \varepsilon \ , \text{ para todo } k \geq n_0$$

   Afirmamos que

$$d(x_{m_k}, x_{m_k-1}) < \varepsilon \ , \text{ con } k \geq n_0 \ , \ n_k \geq m_k + 2$$

   En efecto

   - Si $n_k = m_k + 2$ entonces
   $$d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) < \varepsilon$$
   - Si $n_k > m_k + 2$, supongamos que
   $$d(x_{m_k}, x_{n_k-1}) \geq \varepsilon$$

     Entonces $n_k - 1 \in \{n \in \mathbb{N} : n > m_k \ , \ d(x_{m_k}, x_n) \geq \varepsilon\}$, así

$$n_k - 1 \geq \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : n > m_k \ , \ d(x_{m_k}, x_n) \geq \epsilon\} = n_k.$$

     Contradicción, por lo tanto $d(x_{m_k}, x_{n_k-1}) < \varepsilon$.

3. Siguiendo la secuencia de lo obtenido en el inciso anterior y de la desigualdad triangular se desprende que:

$$\varepsilon \leq d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{n_k-1}) + d(x_{n_k-1}, x_{n_k})$$

$$\varepsilon \leq d(x_{m_k}, x_{n_k}) < \varepsilon + d(x_{n_k-1}, x_{n_k})$$

Y como $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k-1}, x_{n_k}) = 0$, por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon$$

□

Definición 1.6. *Dado un espacio cuasimétrico (X, d). Un conjunto $A \subset X$ se denominará $f-$acotado si es acotado con respecto a la topología $\mathcal{T}_f$, es decir que exista una $B_f(x_0, \varepsilon)$ tal que $A \subset B_f(x_0, \epsilon)$.*
De manera similar diremos que A es $b-$acotado si es acotado con respecto a la topología $\mathcal{T}_b$, es decir que exista una $B_b(x_0, \epsilon)$ tal que $A \subset B_b(x_0, \varepsilon)$.

Nótese que definición 1.6 depende de la topología generada por la cuasimétrica d, entonces podemos deducir que si alguna de estas topologías generadas coincide con la topología usual en $\mathbb{R}$, los conjuntos $f-$acotados (o $b-$acotados) serán solo acotados de la manera usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.7. *El espacio cuasimétrico (X, d) se denominará $f-$completo si y solo si toda sucesión $f-$Cauchy es $f-$convergente en X.*
Analogamente, el espacio cuasimétrico se denominará $b-$completo si y solo si toda sucesión $b-$Cauchy es $b-$convergente en X.

1.2. Aplicaciones $\psi F-$ contractivas

Denotaremos con $\mathcal{F}$ al conjunto de funciones crecientes $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Por otro lado, sea $\mu \in \bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, definimos Ψ_μ como la familia de funciones crecientes y continuas $\psi : \langle -\infty, \mu\rangle \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(t) < t$ para todo $t \in \langle -\infty, \mu\rangle$.
A continuación mencionamos algunos ejemplos de funciones $\psi \in \Psi_\mu$:

- Sea $\psi : \langle -\infty, \mu\rangle \to \mathbb{R}$ (con $\mu \in \bar{\mathbb{R}}_+$ fijo) y $a > 0$ constantes, entonces $\psi(t) = t - a$ pertenece a Ψ_μ.

- En general, del ejemplo anterior, sea $f : \langle -\infty, \mu\rangle \to \mathbb{R}$ una función positiva y decreciente, entonces $\psi : \langle -\infty, \mu\rangle \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(t) = t - f(t)$ pertenece a Ψ_μ.
- Para todo $\alpha > 0$, la aplicación $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(t) = \sqrt[p]{t^p - \alpha}$ con p un número impar, pertenece a Ψ_μ.
- Para cualquier $\alpha > 0$, definimos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(t) = \begin{cases} \sinh t - \alpha, & \text{si } t < \alpha \\ \ln t - \alpha + \sqrt{(t-\alpha)^2 + 1}, & \text{si } t \geq \alpha \end{cases}$$

Definición 1.8. *Sea el espacio cuasimétrico (X, d) y las funciones $F \in \mathcal{F}$, $\psi \in \Psi_\mu$ ($\mu \geq \sup F$). Una aplicación $T : X \to X$ se denominará $\psi F-$contractiva hacia adelante ($f\psi F-$contractiva) si*

$$Tx \neq Ty \Rightarrow F(d(Tx, Ty)) \leq \psi(F(d(x, y))).$$

De manera análoga, la aplicación T será $\psi F-$contractiva hacia atrás ($b\psi F-$contractiva) si

$$Tx \neq Ty \Rightarrow F(d(Tx, Ty)) \leq \psi(F(d(y, x))).$$

Ejemplo 1.3. Sea el espacio cuasimétrico (X, d), tal que $X = [1, +\infty\rangle$ y $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definido por:

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} \ln y - \ln x, & \text{si } y \geq x \\ \dfrac{1}{2}(\ln x - \ln y), & \text{si } y < x \end{cases}$$

Además, sean $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ y $\psi : \langle -\infty, 0\rangle \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$F(t) = \frac{1}{1 - e^t}\ , \ \psi(t) = t - 1$$

Demostraremos que la aplicación $T : X \to X$ definida como

$$Tx = \frac{x + 1}{x}$$

es una $b\psi F-$contracción pero no una $f\psi F-$contracción, probaremos esto último por contradicción, supongamos que T si es una $f\psi F-$contracción, entonces se satisface que:

$$Tx \neq Ty \Rightarrow F(d(Tx, Ty)) \leq \psi(F(d(x, y)))$$

Consideremos $x = 4$, $y = 1$, entonces

$$T4 \neq T1 \Rightarrow F(d(T4, T1)) \leq \psi(F(d(4, 1)))$$

donde $T4 = \dfrac{5}{4}$ y $T1 = 2$, luego:

$$\begin{aligned} F\left(d\left(\frac{5}{4}, 2\right)\right) &\leq \psi\left(F\left(\frac{1}{2}\ln 4\right)\right) \\ F\left(\ln\frac{8}{5}\right) &\leq \psi\left(-1\right) \\ \frac{5}{3} &\leq -2 \quad (\Rightarrow\Leftarrow) \end{aligned}$$

Por tanto, T no es una aplicación $f\psi F-$contractiva. Verifiquemos ahora que si es una $b\psi F-$contracción.

Si $x = y$ no habría nada que probar ya que $Tx = Ty$, supongamos entonces que $x \neq y$ entonces $Tx \neq Ty$, tendremos dos situaciones:

- Si $x < y$, es fácil ver que T es decreciente, entonces $Tx > Ty$, con estas desigualdades ya determinadas obtenemos que:

  $$d(y,x) = \ln\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right),\ d(Tx,Ty) = \ln\left(\frac{\sqrt{Tx}}{\sqrt{Ty}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{y(x+1)}}{\sqrt{x(y+1)}}\right)$$

  Luego,

  $$\begin{aligned} F(d(y,x)) - F(d(Tx,Ty)) &= \frac{1}{1-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{1-\frac{\sqrt{y(x+1)}}{\sqrt{x(y+1)}}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x(y+1)}}{\sqrt{x(y+1)}-\sqrt{y(x+1)}} \\ &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{y+1}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y(x+1)}-\sqrt{x(y+1)})} \end{aligned}$$

  donde puede probarse que

  $$\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \geq 1 \text{ y que } \frac{\sqrt{y+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{y(x+1)}-\sqrt{x(y+1)}} \geq 1$$

  Obteniéndose que

  $$F(d(y,x)) - F(d(Tx,Ty)) \geq 1$$

  $$F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(y,x)) - 1$$

  $$F(d(Tx,Ty)) \leq \psi(F(d(y,x)))$$

- Si $x > y$ entonces $Tx < Ty$, además

  $$d(y,x) = \ln\frac{x}{y},\ d(Tx,Ty) = \ln\frac{x(y+1)}{y(x+1)}$$

  De manera similar a la primera parte de la prueba

  $$F(d(y,x)) - F(d(Tx,Ty) = \frac{y}{y-x} - \frac{y(x+1)}{y-x} = \frac{xy}{x-y} \geq 1$$

$$F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(y,x)) - 1$$

$$F(d(Tx,Ty)) \leq \psi(F(d(y,x)))$$

En cada caso se satisface la desigualdad requerida, por lo tanto T es una $b\psi F-$contracción.

Veamos ahora algunos resultados necesarios sobre las funciones de los conjuntos $\mathcal{F}$ y Ψ_μ.

Lema 1.2. *Sea $F \in \mathcal{F}$ y una sucesión de números reales positivos $(t_n)_n$ tal que $F(t_n) \to -\infty$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

Demostración. Sea $(t_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}_+$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = -\infty$$

Afirmamos que $(t_n)_n$ es acotada superiormente, pues si no lo fuera, existiría una subsucesión $(t_{n_k})_k$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = +\infty$$

Así para dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ para el cual

$$t_{n_k} \geq \varepsilon \quad \forall k \geq N$$

Luego, como F es creciente, entonces $F(\epsilon) \leq F(t_{n_k})$ para todo $k \leq N$, por lo que

$$F(\varepsilon) \leq \lim_{k\to\infty} F(t_{n_k}) = -\infty$$

Lo cual es absurdo, por tanto $(t_n)_n$ es acotada, entonces posee una subsucesión convergente, sea $(t_{n_k})_k$ y $\alpha = \lim_{k\to\infty} t_{n_k}$, evidentemente $\alpha \geq 0$. Supongamos que $\alpha > 0$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \alpha$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|t_{n_k} - \alpha| < \varepsilon \ , \forall \ k \geq n_0$$

Es decir

$$t_{n_k} \in \langle \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \rangle \ , \forall \ k \geq n_0$$

Luego, de la monotonía de F se tiene que $F(\alpha - \varepsilon) \leq F(t_{n_k})$, entonces:

$$F(\alpha - \varepsilon) \leq \lim_{k\to\infty} F(t_{n_k}) = -\infty$$

De esta contradicción, tenemos que $\alpha = 0$, es decir, $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = 0$, por lo tanto, como $(t_{n_k})_k$ es una subsucesión convergente arbitraria, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

□

Lema 1.3. *Si $\psi \in \Psi_\mu$ entonces para todo $t \in \langle -\infty, \mu \rangle$ se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = -\infty$$

Demostración. Sea $t \in \langle -\infty, \mu \rangle$. Como $\psi(t) < t$ entonces

$$\psi^2(t) < \psi(t) \ , \ \psi^3(t) < \psi^2(t) \ , \ \psi^4(t) < \psi^3(t) \cdots$$

Así tenemos que la sucesión $(\psi^n(t))_n$ es una sucesión decreciente, probaremos que diverge a $-\infty$ mediante contradicción, supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = L$$

Entonces, de la continuidad de ψ

$$L = \lim_{n\to\infty} \psi(\psi^{n-1}(t)) = \psi\left(\lim_{n\to\infty} \psi^{n-1}(t)\right) = \psi(L) < L$$

De esta contradicción y del hecho que la sucesión es decreciente, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = -\infty$$

□

Capítulo 2

Teorema del punto fijo en espacios cuasimétricos

En este capítulo demostraremos un teorema del punto fijo para aplicaciones $\psi F-$ contractivas, pero antes estableceremos algunas definiciones necesarias.

Definición 2.1. *Sea (X,d) un espacio cuasimétrico. Diremos que $T : X \to X$ es un $f-$Operador de Picard ($f-OP$) si posee un único punto fijo $\xi \in X$ y para todo $x \in X$ se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} d(\xi, T^n x) = 0, \text{ es decir, } T^n x \xrightarrow{f} \xi$$

Definición 2.2. *Un espacio cuasimétrico (X,d) será llamado $f-T-$orbitalmente completo si toda sucesión $f-$Cauchy de la forma $(T^{n_k}x)_k$ es $f-$convergente en X.*

Teorema 2.1. *Sean un espacio cuasimétrico (X,d), $F \in \mathcal{F}$ y $\psi \in \Psi_\mu$ ($\mu \geq \sup F$). Si $T : X \to X$ es una aplicación $b\psi F-$contractiva y el espacio (X,d) es $f-T-$orbitalmente completo entonces T es un $f-$Operador de Picard.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y $x_n = T^n x_0$. Si existiera $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$Tx_n = x_n$$

entonces $\xi = x_n$ sería el punto fijo y terminaría la prueba.
Por consiguiente, asumiremos que $Tx_n = x_{n+1} \neq x_n$, por lo que

$$d(x_{n+1}, x_n) > 0 \quad \wedge \quad d(x_n, x_{n+1}) > 0.$$

Como T es una $b\psi F-$contracción, entonces

$$F(d(x_n, x_{n+1})) = F(d(Tx_{n-1}, Tx_n)) \leq \psi(F(d(x_n, x_{n-1}))) \tag{2.1}$$

De manera análoga para

$$F(d(x_n, x_{n-1})) = F(d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2})) \leq \psi(F(d(x_{n-2}, x_{n-1}))) \tag{2.2}$$

De las desigualdades (2.1) y (2.2) junto con el hecho de que ψ es una función creciente se tiene que

$$\begin{aligned} F(d(x_n, x_{n+1})) &\leq \psi(F(d(x_n, x_{n-1}))) \leq \psi^2(F(d(x_{n-2}, x_{n-1}))) \\ &\leq \psi^3(F(d(x_{n-2}, x_{n-3}))) \leq \cdots \leq \psi^n(F(\gamma)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\gamma = \text{máx}\{d(x_1, x_0), d(x_0, x_1)\}$, en resumen tenemos que:

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq \psi^n(F(\gamma))$$

En virtud del lema 1.3, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} F(d(x_n, x_{n+1})) = -\infty$$

Y por el lema 1.2 se concluye

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

De manera análoga se prueba que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

Por contradicción, supongamos que $(x_n)_n$ no es $f-$Cauchy. Sea Δ el conjunto de puntos de discontinuidad de F, como F es monótona entonces Δ es a lo más numerable, así $\mathbb{R}_+\backslash\Delta$ es denso en $\mathbb{R}_+$.

Para $\varepsilon \in \mathbb{R}_+\backslash\Delta$, por la proposición 1.3 existen sucesiones de enteros positivos $(m_k)_k$, $(n_k)_k$ tales que:

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon$$

Luego

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) + d(x_{n_k+1}, x_{n_k})$$

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) - d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) - d(x_{n_k+1}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \tag{2.4}$$

También se tiene que

$$d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) \leq d(x_{m_k-1}, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k-1}) \tag{2.5}$$

Además como $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} (d(x_{m_k}, x_{n_k}) - d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) - d(x_{n_k+1}, x_{n_k})) = \epsilon$$

Por lo que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) - d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) - d(x_{n_k+1}, x_{n_k}) > 0 \quad \forall k \geq K$$

Luego, para $k \geq K$, de la desigualdad (2.4) y la monotonía de F tenemos

$$F\left(d(x_{m_k}, x_{n_k}) - d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) - d(x_{n_k+1}, x_{n_k})\right) \leq F(d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}))$$

De lo obtenido en (2.3) se tiene que

$$F(d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1})) \leq \psi(F(d(x_{n_k}, x_{m_k}))) \leq \psi^2(F(d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1})))$$

De la desigualdad (2.5) obtenemos

$$\psi^2(F(d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}))) \leq \psi^2(F(d(x_{m_k-1}, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k-1})))$$

De estas tres últimas desigualdades y considerando también que

$$\lim_{k\to\infty} (d(x_{m_k-1}, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k-1})) = \varepsilon$$

Haciendo $k \to \infty$ compañado de la continuidad de F en ε y la continuidad de ψ, concluimos que

$$F(\varepsilon) \leq \psi^2(F(\varepsilon)) < F(\varepsilon)$$

De esta contradicción, la sucesión $(x_n)_n$ es una sucesión $f-$Cauchy y como el espacio es $f - T-$orbitalmente completo, $(x_n)_n$ es $f-$convergente, sea $\xi \in X$ dicho punto de convergencia, así

$$\lim_{n\to\infty} d(\xi, x_n) = 0$$

Probaremos ahora que ξ es el punto fijo. Como

$$F(d(Tx, Ty)) \leq \psi(F(d(y, x))) < F(d(y, x))$$

y de la monotonía de F, se deduce que

$$d(Tx, Ty) \leq d(y, x) \tag{2.6}$$

Luego

$$d(\xi, T\xi) \leq d(\xi, x_n) + d(x_n, T\xi) = d(\xi, x_n) + d(Tx_{n-1}, T\xi)$$

Además, de (2.6)

$$d(Tx_{n-1}, T\xi) \leq d(\xi, x_{n-1})$$

Entonces

$$d(\xi, T\xi) \leq d(\xi, x_n) + d(\xi, x_{n-1})$$

Tomando $n \to \infty$ se concluye que

$$d(\xi, T\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad T\xi = \xi$$

Finalmente, probaremos la unicidad de este punto fijo, supongamos que existen $\eta \neq \xi \in X$ tales

$$T\eta = \eta \quad \text{y} \quad T\xi = \xi$$

$$T\eta \neq T\xi$$

Entonces $b\psi F-$contractividad de T se tiene

$$F(d(\eta, \xi)) = F(d(T\eta, T\xi)) \leq \psi(F(d(\xi, \eta))) = \psi(F(d(T\xi, T\eta))) \leq \psi^2(F(d(\eta, \xi))) < F(d(\eta, \xi))$$

$$F(d(\eta, \xi)) < F(d(\eta, \xi))$$

De esta contradicción se prueba la unicidad y termina la demostración. □

Notemos que el teorema 2.1 es en particular para un espacio $f-T-$orbitalmente completo, que trabaja con sucesiones $f-$Cauchy de una forma en particular. Podemos entonces plantear un corolario en el que el espacio sea $f-$completo, que es mas general.

Corolario 2.2. *Sea (X, d) un espacio cuasimétrico $f-$completo, $F \in \mathcal{F}$ y $\psi \in \Psi_\mu$ $(\mu \geq \sup(F))$. Si $T : X \to X$ es una $b\psi F-$contracción, entonces T es un $f-P.O.$*

Veamos, ahora, un ejemplo de aplicación del teorema 2.1.

Ejemplo 2.1. Sea el espacio cuasimétrico (X, d) con $X = [1, +\infty\rangle$ y $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definida por:

$$\mathrm{d}(x, y) := \begin{cases} \ln y - \ln x, & \text{si } y \geq x \\ \frac{1}{2}(\ln x - \ln y), & \text{si } y < x \end{cases}$$

y sean $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ y $\psi : \langle -\infty, 0\rangle \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$F(t) = \frac{1}{1 - e^t} \ , \ \psi(t) = t - 1.$$

En el ejemplo 1.3 se demostró que la aplicación $T : X \to X$ definida como

$$Tx = \frac{x + 1}{x}$$

es una $b\psi F-$ contracción. Probaremos que el espacio cuasimétrico (X,d) es $f-$completo. Sea $(x_n)_n$ una sucesión $f-$Cauchy, fijamos $\varepsilon>0$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall m\geq n\geq N$$

Afirmamos que $\{x_n\}$ es $f-$acotado, fijando n_0 de tal manera que

$$d(x_{n_0},x_m)<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall m\geq n_0$$

bastará tomar la bola abierta hacia adelante $B_f(x_{n_0},2\varepsilon_0)$, donde

$$\varepsilon_0=\max_{m=1,\cdots,n_0-1}\left\{\frac{\varepsilon}{2},d(x_{n_0},x_m)\right\}$$

Y así $\{x_n\}\subset B_f(x_{n_0},2\varepsilon_0)$, por tanto es $f-$acotado.

En el primer capítulo se demostró que la topología hacia adelante generada por la cuasimétrica d coincidía con la topología usual en $\mathbb{R}$, luego, como $\mathcal{T}_f=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la topología usual en $\mathbb{R}$) entonces $(x_n)_n$ es acotada en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (de la manera usual) y por lo tanto posee una subsucesión convergente $(x_{n_k})_k$ en la topología $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y a su vez es convergente en la topología $\mathcal{T}_f$, es decir, es $f-$convergente.

Supongamos que $x_{n_k}\xrightarrow{f}x$, entonces escogeremos a $k\in\mathbb{N}$ tal que $n_k\geq N$ y $d(x,x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2}$, con esto ya establecido tendremos que:

$$d(x,x_n)\leq d(x,x_{n_k})+d(x_{n_k},x_n)\quad \forall n\geq n_k\geq N$$

$$d(x,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad \forall n\geq N$$

Esto es, $x_n\xrightarrow{f}x$, por lo tanto el espacio cuasimétrico (X,d) es $f-$completo y del corolario 3.2, concluimos que T es un $f-$P.O.

2.1. Algoritmo del punto fijo

Consideraremos una aplicación $T:X\to X$ con (X,d) un espacio cuasimétrico, también las funciones $F\in\mathcal{F}$ y $\psi\in\Psi_\mu$ ($\mu\geq\sup F$), tales que T es una aplicación $b\psi F-$contractiva, además, el espacio cuasimétrico (X,d) es $f-T-$orbitalmente completo. Con todas estas consideraciones iniciales, definimos un algoritmo iterativo general para el cálculo del punto fijo:

Paso 1. Iniciamos considerando $x_0 \in X$, luego, si $Tx_0 = x_0$ detenemos y x_0 es el punto fijo buscado, caso contrario:

$$x_1 = Tx_0$$

Paso 2. Si $Tx_n = x_n$, detenemos y x_n es el punto fijo buscado, caso contrario:

$$x_{n+1} = Tx_n$$

y repetimos el paso 2.

La buena definición de este método esta garantizada desde que $X \neq \emptyset$

A continuación demostraremos que el algoritmo anteriormente es convergente en el espacio cuasimétrico (X, d).

Teorema 2.3. *La sucesión de puntos $(x_n)_n \in X$ generada por el algoritmo es $f-$convergente, es decir, existe $\xi \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{f} \xi$ y $T\xi = \xi$*

Demostración.

Es fácil ver que la sucesión generada por el algoritmo es de la forma

$$x_n = T^n x_0$$

Que la sucesión sea de esta forma nos conlleva a buscar probar que dicha sucesión es $f-$Cauchy, ya que al estar en un espacio $f-T-$orbitalmente completo implicaría que la sucesión sea $f-$convergente.

Ahora, si existiera $n \in \mathbb{N}$ tal que $Tx_n = x_n$, directamente x_n es el punto fijo buscado, consideraremos entonces que $Tx_n = x_{n+1} \neq x_n$, por lo que

$$d(x_{n+1}, x_n) > 0 \quad \wedge \quad d(x_n, x_{n+1}) > 0,$$

Puesto que T es una aplicación $b\psi F-$contractiva, entonces

$$F(d(x, x_{n+1})) = F(d(Tx_{n-1}, Tx_n)) \leq \psi(F(d(x_n, x_{n-1}))),$$

De manera análoga a lo empleado en la demostración del teorema del punto fijo (teorema 3.1), deducimos que:

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq \psi^n(F(\gamma))$$

con $\gamma = \max d(x_1, x_0), d(x_0, x_1)$, por lo tanto por el lema 1.3, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}(F(d(x_n, x_{n+1}))) = -\infty$$

Y por el lema 1.2

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Análogamente probamos que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$$

A partir de estas igualdades y realizando el mismo procedimiento de la demostración del teorema del punto fijo (teorema 3.1), se prueba que la sucesion $(x_n)_n$ es $f-$Cauchy, y por lo tanto es $f-$convergente. Sea $\xi \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{f} \xi$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} d(\xi, x_n) = 0$$

donde ξ es el punto fijo buscado, en efecto:

$$F(d(Tx, Ty)) \leq \psi(F(d(y, x))) < F(d(y, x))$$

y de la monotonía de F

$$d(Tx, Ty) \leq d(y, x).$$

De la desigualdad triangular

$$d(\xi, T\xi) \leq d(\xi, x_n) + d(x_n, T\xi) = d(\xi, x_n) + d(Tx_{n-1}, T\xi) \leq d(\xi, x_n) + d(\xi, x_{n-1})$$

es decir

$$d(\xi, T\xi) \leq d(\xi, x_n) + d(\xi, x_{n-1})$$

tendiendo n a infinito

$$d(\xi, T\xi) = 0$$

por lo tanto $T\xi = \xi$. □

Capítulo 3

Conclusiones

1. Logramos evidenciar con los ejemplos 1.1 y 1.2 que los espacios cuasimétricos generan topologías que pueden coincidir con la topología usual de $\mathbb{R}$.

2. Se definieron y ejemplificaron en la sección 1.2 aplicaciones $\psi F-$contracciones en espacios cuasimétricos, donde se evidencia que es totalmente importante escoger de manera asertada las funciones F y ψ para lograr tener que cierta aplicación T sea $f\psi F-$contractiva o $b\psi F-$contractiva.

3. El resultado principal de la tesis fue la demostración del teorema del punto fijo y del corolario 2.2 que permitió dar un ejemplo de aplicación del teorema del punto fijo. Sin embargo, el teorema principal no requiere la $f-$completitud en todo el espacio X, sino que necesita la $f-$completitud para ciertas sucesiones particulares.

Referencias

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta mathematicae*, *3*(1), 133–181.

Brouwer, L. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten mathematische annalen, 71 (1), 97-115. *German, translated in Wikipedia: The Free Encyclopedia, sv"Brouwer fixedpoint theorem*.

Browder, F. E., y Petryshyn, W. V. (1967). Construction of fixed points of nonlinear mappings in hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *20*(2), 197–228.

Fréchet, M. M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, *22*(1), 1–72.

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der mengenlehre, leipzig.* Aufl.

Ribeiro, H. (1943). Sur les espaces à métrique faible. *Portugaliae mathematica*, *4*(1), 21–40.

Secelean, N. (2016). Weak f-contractions and some fixed point results. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, *42*(3), 779–798.

Secelean, N. A., Mathew, S., y Wardowski, D. (2019). New fixed point results in quasimetric spaces and applications in fractals theory. *Advances in Difference Equations*, *2019*(1), 1–23.

Secelean, N.-A., y Wardowski, D. (2016). ψ f-contractions: not necessarily nonexpansive picard operators. *Results in Mathematics*, *70*(3-4), 415–431.

Shaobai, C., Xiaowen, X., y Xiaodan, C. (2009). Caristi's fixed point theorem in quasimetric spaces. En *2009 second international workshop on computer science and engineering* (Vol. 1, pp. 451–455).

Ume, J. S. (2008). Extensions of minimization theorems and fixed point theorems on a quasimetric space. *Fixed Point Theory and Applications*, *2008*, 1–15.

Wardowski, D. (2012). Fixed points of a new type of contractive mappings in complete

metric spaces. *Fixed point theory and applications*, *2012*(1), 1–6.

Wilson, W. A. (1931). On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics*, *53*(3), 675–684.