Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Fundamentos de topología algebraica: el teorema de Seifert Van Kampen

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Suzanne Mauricy MOSQUERA MEZA

ASESOR

Mg. Pedro Ángel BECERRA PéREZ

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Mosquera, S. (2021). *Fundamentos de topología algebraica: el teorema de Seifert Van Kampen*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Suzanne Mauricy Mosquera Meza
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09890051
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Pedro Angel Becerra Pérez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	05748466
URL de ORCID	0000-0002-3124-752X
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Gavino Aymituma Puma
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	08025924
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Andrés Guardia Cayo
Tipo de documento de identidad	DNI 09406969

Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.2 Topología y Geometría
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	No aplica
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: 12º03’36.2’’S Longitud: 77º04’55.3’’W
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021 - Octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 19:45 horas del sábado 23 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Mg. Gavino Aymituma Puma (PRESIDENTE), Mg. Andrés Guardia Cayo (MIEMBRO) y el Lic. Pedro Ángel Becerra Pérez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**FUNDAMENTOS DE TOPOLOGIA ALGEBRAICA: EL TEOREMA DE SEIFERT – VAN KAMPEN**", presentado por la señorita **Bachiller Suzanne Mauricy Mosquera Meza**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de dieciocho **(18).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller Suzanne Mauricy Mosquera Meza** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 20:15 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.



Mg. Gavino Aymituma Puma
PRESIDENTE



Mg. Andrés Guardia Cayo
MIEMBRO



Lic. Pedro Ángel Becerra Pérez
MIEMBRO ASESOR

El presente trabajo de tesis lo dedico con mucho cariño a mis queridos padres, el Dr. Rolando Isaías Mosquera Ramirez, recordado docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la U.N.M.S.M. y a la Sra. Maria Estavina Meza Mendoza; a mis hermanos; a la Sra. Corina Segura e hijos; a mi esposo y a mis hijos; que siempre me motivaron y ayudaron a seguir adelante en mis proyectos.

Agradecimientos

A Dios por darme paz y fortaleza en los momentos difíciles.

A mis padres y hermanos por su gran cariño y consejos.

A la Sra. Corina Segura e hijos por todo el apoyo familiar.

A mi esposo y a mis hijos por su gran cariño y apoyo.

A todos mis profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas que me enseñaron, por su dedicación y por haberme brindado sus conocimientos.

A mi asesor, el Mg. Pedro Angel Becerra Perez por sus orientaciones en la elaboración de mi tesis.

Al Mg. Gavino Aymituma y al Mg. Andrés Guardia Cayo por integrar el jurado de mi tesis.

Al Mg. Willy David Barahona Martinez por sus sugerencias brindadas en la elaboración de mi tesis.

Al Mg. Alberto Mariano Rivero Zapata que nos motivó a mi y a mis compañeros cuando nos impartía el curso de Topología General.

A la Dra. Soledad Ramirez Carrasco y al Mg. Emilio Castillo Jiménez, quienes fueron mis profesores en mi último año de estudios del pregrado, por todas sus enseñanzas y motivaciones.

El agradecimiento especial al Sr. Decano de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la U.N.M.S.M., el Dr. Alfonso Perez Salvatierra y al Sr. Vicedecano de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la U.N.M.S.M., el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa.

Resumen

En este trabajo de tesis probaremos el teorema de Seifert Van Kampen, que es un teorema fundamental de la Topología Algebraica. Este teorema nos presenta un metodo general para calcular grupos fundamentales de espacios topológicos. Consideraremos un especio topológico X, que es la unión de los conjuntos abiertos conexos por caminos A, $B \subset X$; cuya intersección $A \cap B \neq \emptyset$ también es conexa por caminos y además consideraremos un punto base $x_0 \in A \cap B$. Entonces podemos calcular el grupo fundamental de X a partir de los grupos fundamentales de A y B. Además caracterizaremos el grupo fundamental de X y daremos unas aplicaciones muy utiles como el grupo fundamental del toro y el grupo fundamental del plano proyectivo real.

Palabras clave: Espacio Topológico, Homotopía, Grupo Fundamental, Homeomorfismo, Isomorfismo, Homomorfismos inducidos, Producto libre, subgrupo normal, Haussdorff, Teorema de Seifert Van Kampen.

Abstract

In this thesis work we will prove Seifert Van Kampen's theorem, which is a fundamental theorem of Algebraic topology. This theorem presents us with a general method to calculate fundamental groups of topological spaces.

We will consider a topological space X, which is the union of the open sets connected by paths $A, B \subset X$, whose intersection $A \cap B$ is also connected by paths and also consider a base point $x_0 \in A \cap B$. Then we can calculate the fundamental group of X from the fundamental group of A and B. We will also characterize the fundamental groups of X and give some very useful applications such as the fundamental group of the real projective plane.

Keywords: Topological Space, Homotopy, Fundamental Group, Homeomorphism, Isomorphism, Induced Homomorphism, Free product, Normal subgroup, Haussdorf, Seifert Van Kampen's Theorem.

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

1.1. Conceptos básicos y ejemplos 4

1.1.1. Espacios topológicos y aplicaciones continuas 4

1.1.2. Aplicaciones Homotópicas 5

1.1.3. Conjunto de Homotopía 10

1.1.4. Tipo de Homotopia 11

1.1.5. Homotopía de pares de espacios y homotopía relativa 16

1.1.6. Espacios contráctiles 18

1.1.7. Retracciones 21

2. Homotopía de caminos **24**

2.1. Producto de caminos 28

2.2. El grupo fundamental 32

2.2.1. Espacio Simplemente Conexo 42

2.2.2. Conjuntos Estrellados 50

3. Resultado principal **54**

3.1. Homomorfismos inducidos 54

3.2. Teoría de grupos 61

3.2.1. Grupos Libres y Productos Libres 61

3.3. El Teorema de Seifert Van Kampen 63

3.4. Aplicaciones del teorema de Seifert Van Kampen 69

3.4.1. El grupo fundamental del toro 69

3.4.2. El grupo fundamental del plano proyectivo 76

4. Conclusiones **79**

Bibliografía **80**

Introducción

En este trabajo de tesis el objetivo es probar un teorema fundamental de la topología algebraica: el teorema de Seifert Van Kampen, el cual nos ayudará a conocer la estructura de un espacio topológico.

El estudio de la Topología Algebraica, que es una de las áreas de la matemática es esencial, ya que mediante sus resultados podemos contribuir con otras ramas como son la geometría diferencial, el análisis, la física, la química, la biología, etc.

En general, la Topología se encarga de estudiar los espacios topológicos, investigando si son o no espacios homeomorfos, es decir si es posible encontrar la equivalencia topológica entre dos espacios.

En Topológia Algebraica utilizamos los grupos de homotopía, para clasificar los epascios topológicos. En este trabajo de tesis estudiaremos el primer grupo de homotopía que es el grupo fundamental de un espacio X con punto base $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$; también conocido como el grupo de Poincaré, debido a su creador.

El grupo fundamental nos proporciona información sobre la familia de curvas cerradas de un espacio topológico (lazos), en otras palabras los grupos de homotopía nos sirven para saber si hay o no agujeros y que forma tiene el espacio de nuestro interés.

Así, en el primer capítulo de este trabajo enunciaremos los conceptos básicos y daremos algunos ejemplos de la Teoría de Homotopía y los espacios contráctiles.

En el segundo capítulo estudiaremos la homotopía de caminos y el grupo fundamental, que es uno de los principales invariantes topológicos, mediante el cual se puede ver que si dos espacios son homeomorfos entonces tienen grupos fundamentales isomorfos.

Y en el tercer capítulo presentaremos los homomorfismos inducidos y brevemente

abordaremos la Teoría de Grupos, Grupos Libres y Productos Libres; lo cual nos servirá para probar el Teorema de Seifert Van Kampen, que es nuestro objetivo. Además veremos unas aplicaciones como el grupo fundamental del toro y el grupo fundamental del plano proyectivo real.

Capítulo 1

Preliminares

Dentro del espacio de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos, definimos la relación de homotopía, es decir que una aplicación que puede ser deformada en otra continuamente (es decir, de manera continua) y observamos que esta noción se comporta bien respecto de una relación de equivalencia y esta relación de equivalencia es preservada por la composición.
Ahora tenemos composición, no de funciones ni de aplicaciones, sino de clases de funciones es decir, escogiendo elementos de cada clase que estan bien definidos.
La noción de homotopía conduce a la noción de tipo de Homotopía, que es una relación entre espacios topológicos. En topología existe una noción, como en toda área de la matemática precisamos una noción de isomorfismo de objetos, es decir cuando dos objetos de esa teoría son esencialmente lo mismo, por ejemplo en álgebra tenemos los isomorfismos de grupos, que significa que los dos grupos son indistinguibles uno del otro.
En topología también tenemos esta noción, que es la noción de homeomorfismo, que es cuando dos espacios topológicos son esencialmente lo mismo. Si tenemos un homeomorfismo, es decir una biyección continua con inversa continua, el homeomorfismo envía puntos de un espacio en puntos de otro espacio de manera biyectiva y como es continua, con inversa continua entonces tambien envía abiertos de un espacio en abiertos del otro espacio de manera biyectiva, además preserva toda estructura de un espacio topológico a otro.

Dentro del tipo de homotopía tenemos la noción de equivalencia homotópica.

Esta noción es mucho menos fina que la noción de homeomorfismo.

1.1. Conceptos básicos y ejemplos

1.1.1. Espacios topológicos y aplicaciones continuas

Definición 1.1. "Una topología sobre un conjunto X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, tal que:

1. X y $\emptyset$ están en $\mathcal{T}$.

2. Toda unión de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

3. Toda intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de T."

Definición 1.2. "Un espacio topológico es un par ordenado (X,$\mathcal{T}$), formado por un conjunto X y una topología de $\mathcal{T}$ sobre X." Los subconjuntos U de $\mathcal{T}$ son llamados (conjuntos) abiertos de X y sus respectivos complementarios son llamados (conjuntos) cerrados de X.

Ejemplo 1.3 (topología discreta)**.** X un conjunto cualquiera y $\mathcal{T} = \{$subconjuntos de $X\}$

Ejemplo 1.4 (espacios métricos)**.** X un conjunto con una función distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, tal que

1. $d(x, y) \geqslant 0$ para todos x, $y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

2. $d(x, y) = d(y, x) = 0$ para todos x, $y \in X$

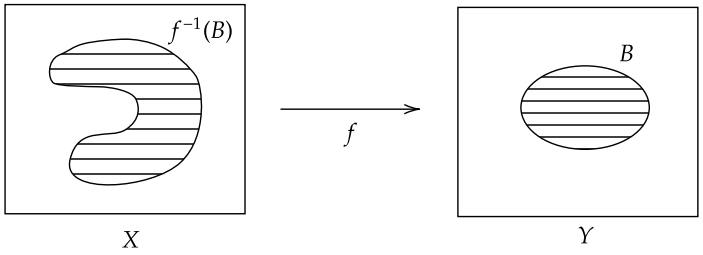
3. (Desigualdad triangular). $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para todos x, y, $z \in X$.

Definimos la bola de centro a y radio r:

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

Definimos $A \in \mathcal{T}$ sí y solo sí para todo a $\in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Así se satisfacen los 3 axiomas de espacio topológico.

Definición 1.5. "Una aplicación f: $X \to Y$ es continua si la preimagen $f^{-1}(B)$ de cualquier abierto B de Y es un abierto de X."
Diremos que f es un homeomorfismo si es una biyección continua y su inversa f^{-1} también es continua.



Ejemplo 1.6. Si X e Y son espacios métricos, con distancias d_x y d_y respectivamente, entonces $f : X \to Y$ es continua si dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \to d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Representamos por $C(X, Y)$ el espacio de las aplicaciones continuas de X en Y. Con esto conectamos la continuidad en espacios topológicos.

1.1.2. Aplicaciones Homotópicas

Definición 1.7. "Sean X, Y espacios topológicos; $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas e $I = [0, 1]$. Diremos que f y g son homotópicas si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que:

$$\begin{aligned} &H(x, 0) = f(x) \ \text{ y} \\ &H(x, 1) = g(x) \end{aligned} \qquad \text{para todo } x \in X$$

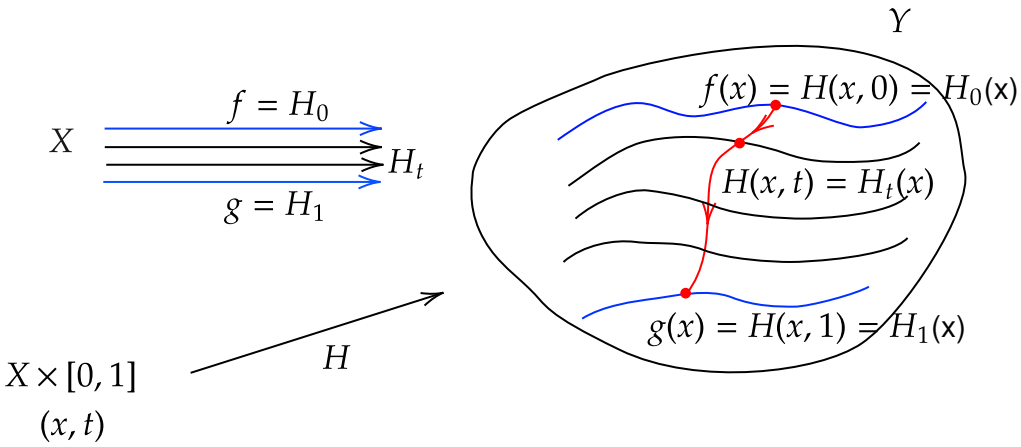
La aplicación H es llamada **homotopía** entre f y g . Si f es homotópica a g, escribiremos $f \simeq g$. Si f es homotópica a g y g es una aplicación constante, diremos que f es **homotópicamente nula**."

También, para cada $t \in [0, 1]$, la homotopía H: $f \simeq g$ "define la aplicación continua $H_t : X \to$ Y donde $H_t\ (x) = H(x, t)$."

Esto significa que definir la homotopía H es equivalente a describir una familia continua uniparamétrica $(H_t)_{t\in I}$ de aplicaciones de X en Y.

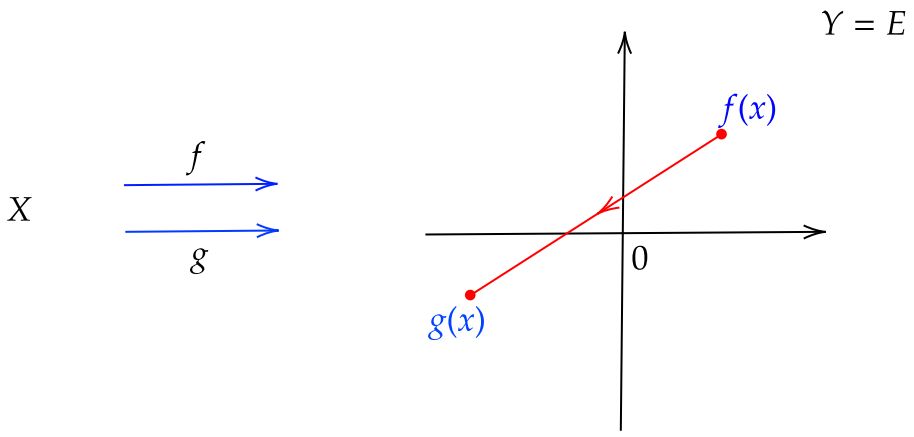
Así, tenemos que $H_0 = f$ y $H_1 = g$; es decir la familia $(H_t)_{t\in I}$ empieza con la aplicación continua f y termina con la aplicación continua g.

"Si pensamos en el parámetro t como representante del tiempo, entonces la homotopía H describe una deformación continua de la aplicación f en la aplicación g , cuando t transcurre de 0 a 1 ."



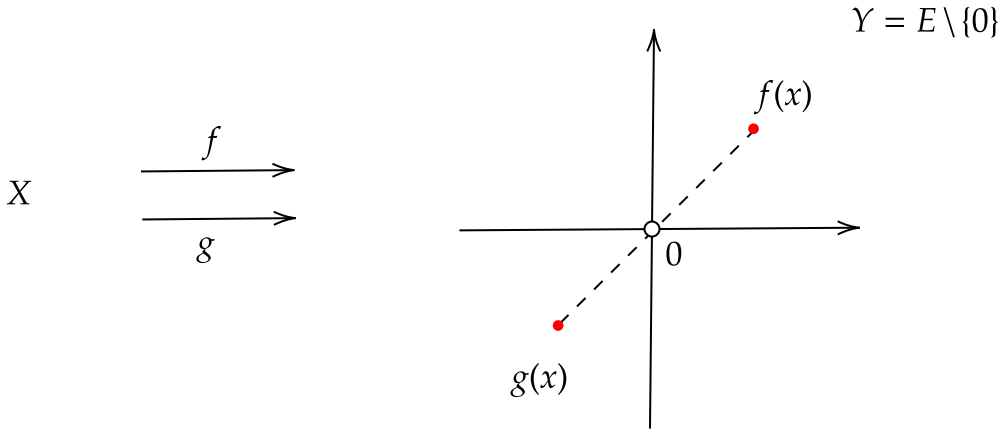
Ejemplo 1.8. Si E es un espacio vectorial normado entonces dos aplicaciones continuas $f, g : X \to E$ son siempre homotópicas.

En efecto, podemos considerar la homotopía lineal $H : X \times I \to E$, $I = [0, 1]$, $H(x, t) = (1 - t)\ f(x) + g(x)$.



Observación 1.9. La relación de homotopía depende del contradominio.

Por ejemplo, dos aplicaciones $f, g : X \to E\backslash\{0\}$ pueden no ser homotópicas.

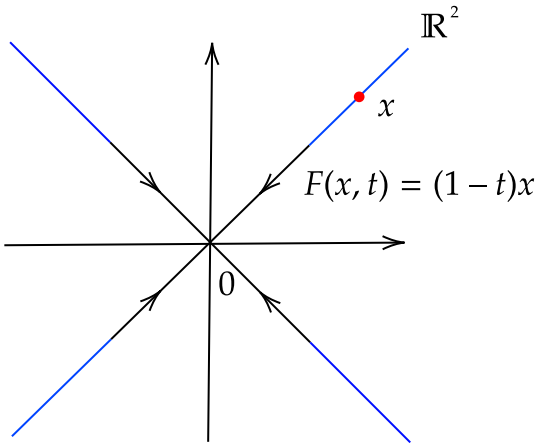


Ejemplo 1.10. Sea $X = Y = \mathbb{R}^n$. Las funciones f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por: $f(x) = x$ y $g(x) = 0$ son homotópicas. En efecto, definiendo

$$F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$
$$(x,t) \mapsto (1-t)x,$$

se tiene que F es continua y además $F(x,0) = x = f(x)$ y $F(x,1) = 0 = g(x)$.

Por lo tanto: $f \simeq g$.



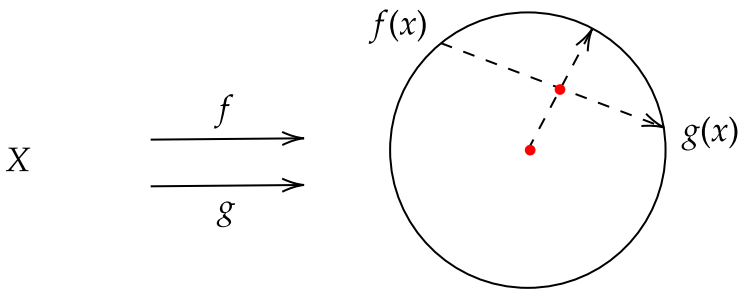
Ejemplo 1.11. Sea el espacio representado por S^n la esfera unitaria de dimensión n:

$$S^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

"Sea X un espacio topológico y $f, g : X \to S^n$ dos aplicaciones continuas tales que $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$ entonces $f \simeq g$, pues $f(x)$ y $g(x)$ no están en la posición diametralmente opuesta, es decir nunca son antípodas."
Definamos la homotopía $H : X \times [0,1] \to S^n$ por

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}$$

Ahora, el denominador es no nulo, pues si suponemos que $(1-t)f(x)+tg(x) = 0$ obtenemos que $f(x) = -g(x)$ lo cual contradice la hipótesis.
Así, para todo $x \in X$ se tiene que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Por lo tanto $f \simeq g$.



Si $f(x) = -g(x)$ el segmento pasaría por el origen y este no puede ser proyectado en la esfera.
Dos casos particulares.

1. Si $f(x) \neq x$ para todo $x \in X$, f no tiene punto fijo entonces $f \simeq -id$ $(g = -id)$.

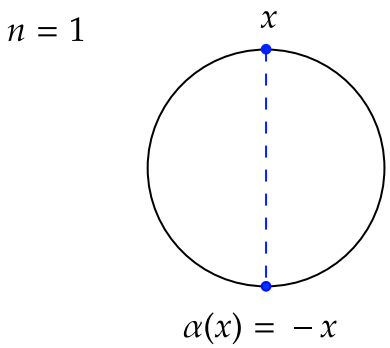
2. Si $f(x) \neq -x$ para todo $x \in X$, f no es antipodal entonces $f \simeq id$ $(g = id)$.

Ejemplo 1.12. " La aplicación antípoda

$$\alpha : S^n \to S^n, \;\; \alpha(x) = -x$$

es homotópica a la identidad" si solamente si n es impar.

Proposición 1.13. *Para cualesquiera espacios topológicos X, Y "la homotopía es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X a Y."*



$\alpha \simeq id$

$H(t, x) = R_{\pi t}(x)$

Prueba.

1. Reflexiva : Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f \simeq f$.

   Considere $H(x,t) = f(x)$. $H : X \times [0,1] \to Y$, para todo $x \in X$, $t \in [0,1]$.

2. "Simétrica : Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas. Si $f \simeq g$ entonces $g \simeq f$."

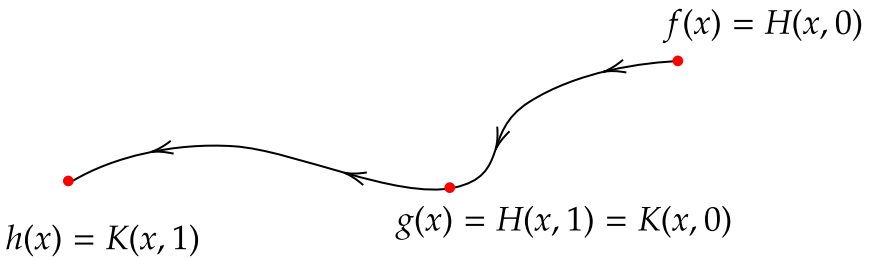
   Si $H(x,t)$ es una homotopía de f a g , entonces
   $K(x,t) = H(x, 1-t)$ es una homotopía de g a f.

3. "Transitiva : Sean $f, g, h : X \to Y$ aplicaciones continuas. Si $f \simeq g$ y $g \simeq h$" entonces $f \simeq h$.

   Si $H(x,t)$ es una homotopía de f a g y $K(x,t)$ es una homotopía de g a h , entonces

   $$L(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & \text{si } \ 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ H(x,2t-1) & \text{si } \ 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

   es una homotopía de f a h. L es continua por el lema del pegamiento, y además $L(x,0) = f(x)$ y $L(x,1) = h(x)$.



□

Proposición 1.14. *Si $f, f' : X \to Y$ son aplicaciones continuas homotópicas y $g, g' : Y \to Z$ son aplicaciones continuas homotópicas entonces $g \circ f$, $g' \circ f' : X \to Z$ son aplicaciones continuas homotópicas.*

Prueba. En efecto, tomemos $H : X \times [0,1] \to Y$, homotopía de f a f' y $H' : Y \times [0,1] \to Z$, homotopía de g a g'. Entonces

$$\begin{aligned} L : X \times [0,1] &\to Z \\ (x,t) &\to H'(H(x,t),t) \end{aligned}$$

es una homotopía de $g \circ f$ a $g' \circ f'$. Veamos:

$$L(x,0) = H'(H(x,0),0) = H'(f(x),0) = g(f(x))$$
$$L(x,1) = H'(H(x,1),1) = H'(f'(x),1) = g'(f'(x))$$

La composición de clases de homotopía está bien definida. Vamos a trabajar con composición de clases de homotopía. Estamos hablando de una composición parcial. □

Observación 1.15. Representamos por $[f]$ la clase de homotopía de f.
La proposición anterior garantiza que la operación.

$$[g] \circ [f] = [g \circ f]$$

está bien definida. Las clases de homotopía de la composición no cambia.

1.1.3. Conjunto de Homotopía

Definición 1.16. Para una aplicación continua $f : X \to Y$, "denotaremos por $[f]$ su clase de equivalencia conteniendo a f y es llamada la clase de homotopía de f. La colección de todas las clases de homotopía" de aplicaciones de X en Y es denotada por $[X, Y]$ y es llamado conjunto de homotopía. Es decir

$$[f] = \{g : X \to Y \text{ aplicaciones continuas tales que } g \simeq f\}$$

y

$$[X, Y] = \{[f_i] \ / \ f_i : X \to Y \text{ aplicacioń continua, } i \text{ finito, } i \in \mathbb{N}\}$$

1.1.4. Tipo de Homotopia

Definición 1.17. "Una aplicación continua $f : X \to Y$ es equivalencia homotópica si existe una aplicación continua $g : Y \to X$ tal que

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad \text{y} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y"$$

Diremos que g es inverso homotópico de f.

Así, X e Y "tienen el mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia" homotópica.

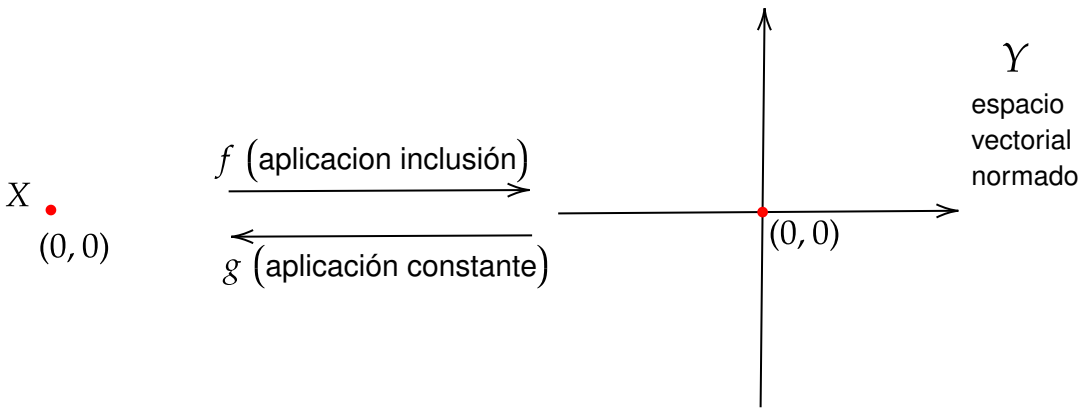
Ejemplo 1.18. Todo homeomorfismo es equivalencia homotópica. Pues tenemos que $g \circ f = id_X$ y $f \circ g = id_Y$

Ejemplo 1.19. Todo espacio vectorial normado tiene el mismo tipo de homotopía de un punto.

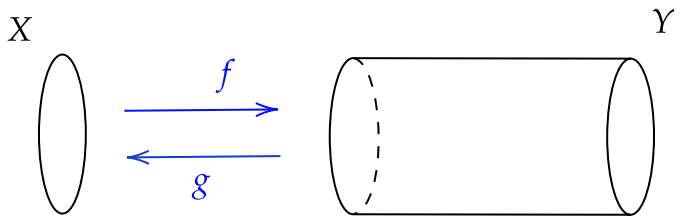
Veamos:

$f \circ g \simeq id_Y$, pues son aplicaciones con valores en un espacio vectorial normado. Así estas aplicaciones son homotópicas.

$g \circ f \simeq id_X$, pues solo existe una única aplicación que es la identidad, ya que X tiene solo un punto.



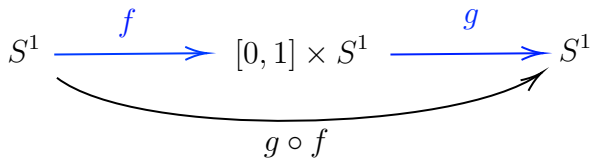
Ejemplo 1.20. Sean $X = S^1$ y $Y = [0, 1] \times S^1$, la esfera y el cilindro como subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Mostraremos que X e Y tienen el mismo tipo de homotopía. En efecto, definimos $f : X \to Y$, $f(x) = (0, x)$ y $g : Y \to X$,



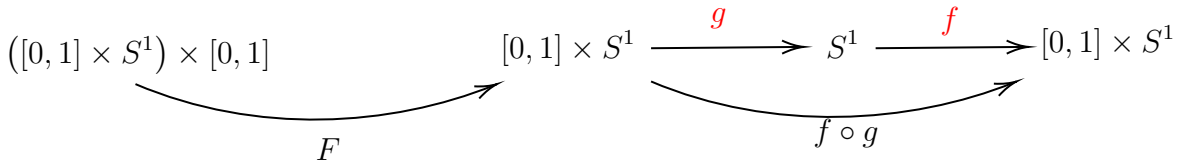
$g(r,x) = x$.

Tenemos: $f : S^1 \to [0,1] \times S^1$, $g : [0,1] \times S^1 \to S^1$.

Es claro que f y g son funciones continuas. Debemos probar que las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicas a id_X y id_Y respectivamente.



- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0,x) = x$ entonces $g \circ f \simeq id_X$.



- $(f \circ g)(r,x) = f(g(r,x)) = f(x) = (0,x), \;\; r \in [0,1], x \in S^1$.

Definimos la homotopía $F : Y \times I \to Y, \;\; F((r,x),t) = (rt,x)$ donde $(r,x) \in Y, t \in I = [0,1]$.

En efecto, se tiene que:

$$F((r,x),0) = (0,x) = (f \circ g)(r,x)$$
$$F((r,x),1) = (r,x) = id_Y$$

y además tenemos que F es continua. Así, $f \circ g \simeq id_Y$

Ejemplo 1.21. Considere la inclusión

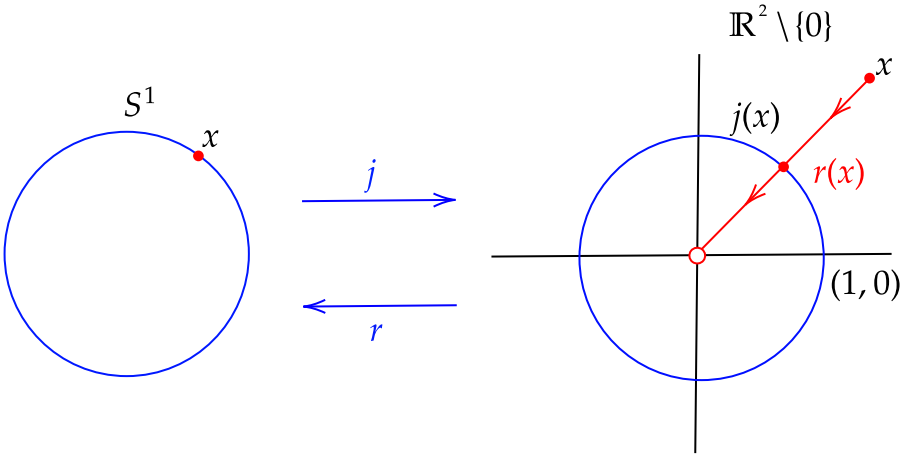
$$\text{“}j : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}, \;\; j(x) = x\text{”}$$

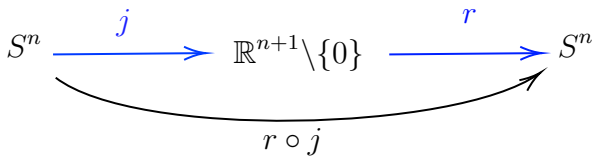
y la retracción

$$r : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to S^n, \;\; r(x) = \frac{x}{|x|}$$

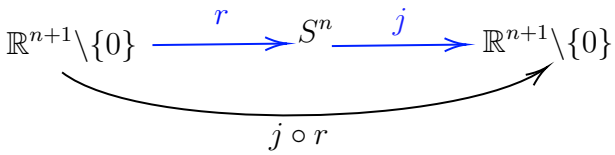
Entonces

$$r \circ j = id_{S^n} \;\; \text{y} \;\; j \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}}.$$





$$(r \circ j)(x) = r(j(x)) = r(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{1} = x = id_{S^n}, x \in S^1$$



Probaremos que $j \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}}$ usando la homotopía lineal.

$$(j \circ r)(x) = r(x), \;\; \text{pues} \;\; j \;\; \text{es la aplicación inclusión.}$$

Sea $X = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$. "Consideremos ahora la composición $j \circ r$, la cual aplica X en sí mismo."

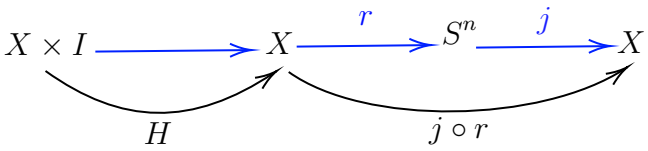
"Esta aplicación no es la identidad de X , pero es homotópica a la aplicación

identidad.

En efecto, la homotopía por rectas $H : X \times [0,1] \to X$, dada por

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{|x|}$$

es una homotopía entre la aplicación identidad de X y la aplicación $j \circ r$."



Se tiene que:

$$H(x,0) = x = id_X$$
$$H(x,1) = \frac{x}{|x|} = r(x) = (j \circ r)(x)$$

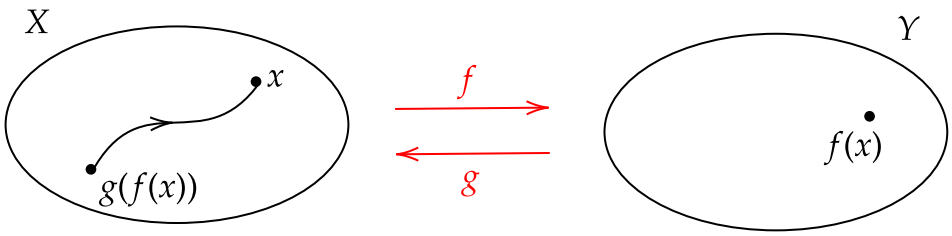
y además H es continua. Así, $j \circ r \simeq id_X$.

Observación 1.22.

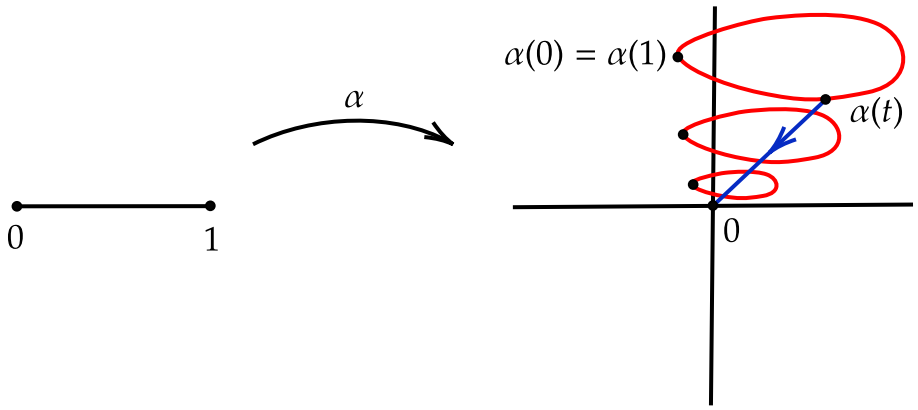
- Una retracción es una aplicacion que va de un espacio a un subespacio y que además esta aplicación restricta a este subespacio es la identidad.

- Así, la aplicación inclusión j y la aplicación retracción r son inversas homotópicas una de la otra y por tanto la esfera S^n y $R^{n+1}\backslash\{0\}$ son espacios que tienen el mismo tipo de homotopía.

- Dos espacios topológicos X e Y "tienen el mismo tipo de homotopía si existe alguna equivalencia homotópica $f : X \to Y$. Esta es una relación de equivalencia entre espacios topológicos, estrictamente más debil (mas general) que la relación de homeomorfismo."



Ejemplo 1.23. Tenemos una curva $\alpha \in \mathbb{R}^2$ que es un espacio vectorial normado. Veamos que esta curva puede ser deformada en un punto (esta homotopía no es inyectiva).



Usamos la homotopía lineal $H : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$H(x,t) = (1-t)x$$

$$H(x,0) = x$$

$$H(x,1) = 0$$

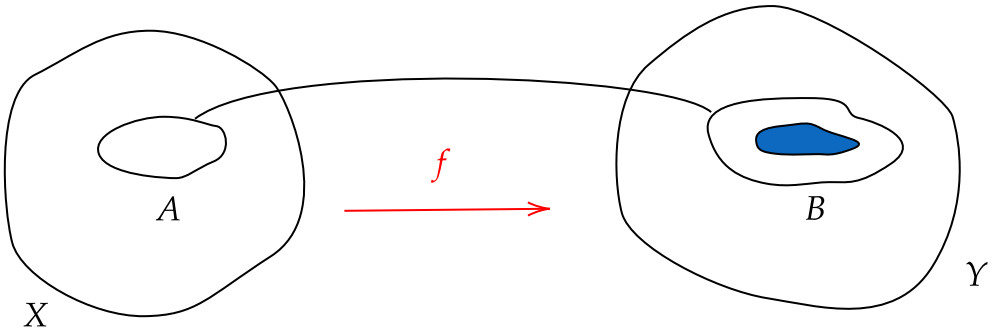
1.1.5. Homotopía de pares de espacios y homotopía relativa

Definición 1.24. Un par de espacios topológicos es una dupla (X, A) , donde A es subespacio de X , que es un subconjunto de un espacio topológico unido de la topología inducida que es la topología en que los abiertos de A son los abiertos de $A \cap X$.

Definición 1.25. "Una aplicación de pares

$$f : (X, A) \to (Y, B)$$

es una aplicación continua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$."



Definición 1.26. Una homotopía de pares entre dos aplicaciones continuas $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ es una aplicación continua

$$H : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \to (Y, B)$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Observación 1.27. Por definición, $H(a, t) \in B$ para cualquier $a \in A$ y $t \in [0, 1]$.

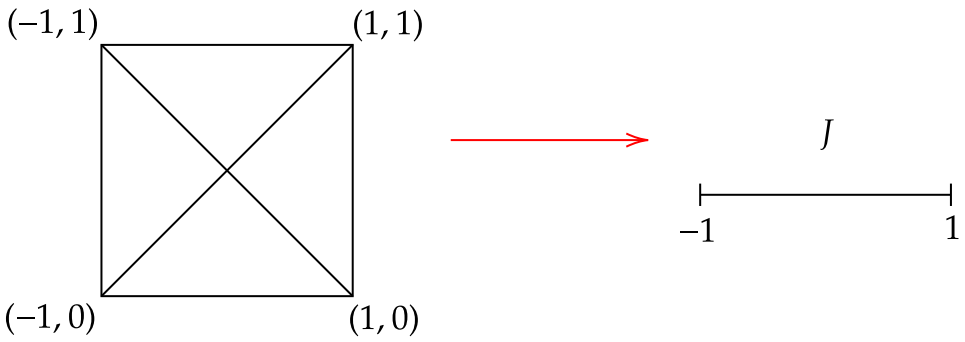
Tenemos $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H(A \times [0, 1]) \subset B$.

Ejemplo 1.28. Sea $J = [-1, 1]$ y $\partial J = \{-1, 1\}$. Las aplicaciones continuas

$$id : J \to J \quad \text{y} \quad -id : J \to J$$

son homotópicas. Consideraremos $H(x, t) = (1 - 2t)x$, $\forall x \in J$.

Tenemos



$$H : J \times [0,1] \to J$$
$$H(x,0) = x$$
$$H(x,1) = -x$$

Mas las aplicaciones continuas de pares,

$$id : (J, \partial J) \to (J, \partial J) \text{ y } -id : (J, \partial J) \to (J, \partial J)$$

no son homotópicas, pues de la homotopía de pares

$$H : (J \times [0,1], \partial J \times [0,1]) \to (J, \partial J)$$

deberiamos tener que $H(1,t) \in \partial J$ para todo $t \in [0,1]$, sin embargo

$$H\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\right) 1 = 0 \notin \partial J.$$

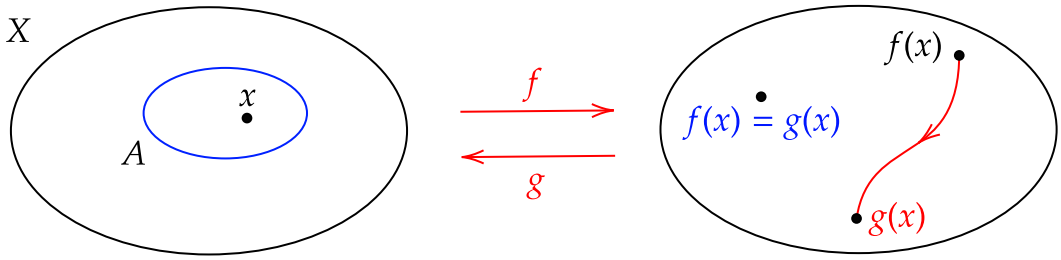
Definición 1.29. "Dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ son homotópicas" relativamente a un subespacio $A \subset X$, lo cual denotamos

$$f \simeq g \ \ (rel \ \ A)$$

si existe una homotopía $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que

$$H(x,t) = f(x) = g(x) \text{ para todo } (x,t) \in A \text{ x } [0,1].$$

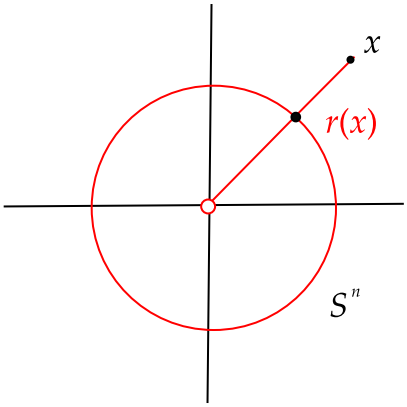
Para esto es necesario que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.



Ejemplo 1.30. Sea $X = R^{n+1}\backslash\{0\}$. Las aplicaciones

$$id_X : X \to X \text{ y } r : X \to X, \ r(x) = \frac{x}{|x|}$$

son homotópicas relativamente a $A = S^n$.



Tenemos que,

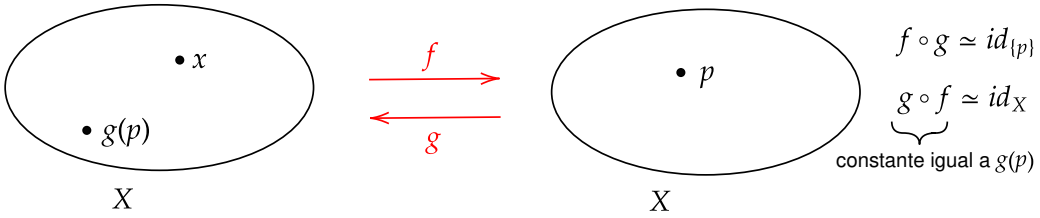
$$H(x,t) = x = r(x), \text{ si } x \in S^n.$$

1.1.6. Espacios contráctiles

Definición 1.31. Un espacio topológico X se dice contráctil si tiene el tipo de homotopía de un punto $\{p\}$.

Proposición 1.32. *X es contráctil si y solamente si $id : X \to X$ es homotópica a una aplicación constante $X \to X$.*

Prueba. Como X es contractil, entonces X tiene el tipo de homotopía de un punto, es decir existe $f : X \to \{p\}$ equivalencia homotópica y $g : Y \to X$ es una inversa homotópica de f, entonces $g \circ f \simeq id_X$ y basta observar que $g \circ f$ es constante.



"Recíprocamente, supongamos que la aplicación identidad $id_X : X \to X$ es homotópica a una aplicación constante de X en X , es decir $id_x \simeq c_{\{p\}}$ con $p \in X$."

Entonces, las aplicaciones $f : X \to \{p\}$ dada por $f(x) = p$ para todo $x \in X$ y $g : \{p\} \to X$ dada por $g(p) \in X$ son equivalencias homotópicas pues

$$g \circ f = c_{\{p\}} \simeq \mathrm{id}_X \quad \text{y} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\{p\}}.$$

Así, id_X y la aplicación constante $c_{\{p\}}$ son ambas equivalencias homotópicas, una inversa de la otra y tienen el tipo de homotopía de un punto $\{p\}$. Luego, X es contráctil. □

Ejemplo 1.33. Un subconjunto X de un espacio vectorial normado E es una estrella de vértice p si contiene el segmento de recta $[p, x]$ para todo $x \in X$. Todo subconjunto convexo es una estrella, con cualquier punto como vértice.

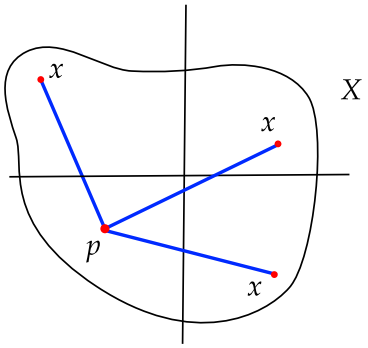
Ejemplo 1.34. Toda estrella es contráctil, pues la aplicación

$H : X$ x $[0,1] \to X$ dada por

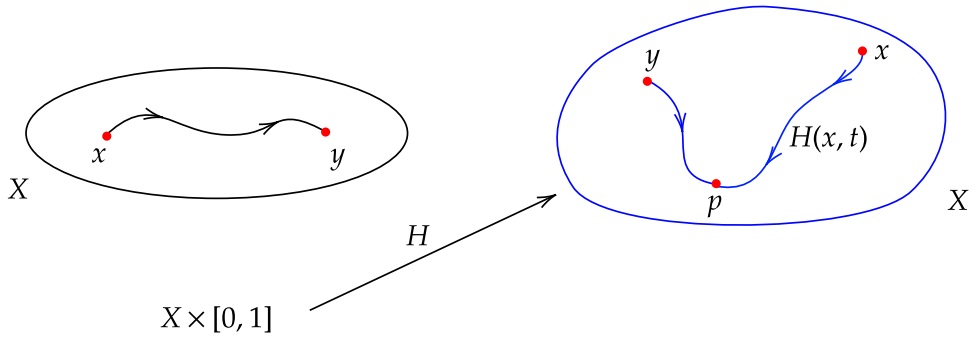
$H(x, t) = (1 - t)x + tp$ es una homotopía entre id_x y la aplicación constante c_p que lleva todo punto de X al punto p .

$H(x, 0) = x \quad H(\bullet, 0) = id$

$H(x, 1) = p \quad H(\bullet, 1) = c_p$



Observación 1.35. Si X es contráctil entonces es conexo por caminos, o sea dos puntos cualesquiera de X pueden ser unidos por una curva.



Proposición 1.36. *"Sean X e Y espacios topológicos. Si alguno de los dos espacios X o Y es contráctil entonces toda aplicación continua $f : X \to Y$ es homotópica a una constante."*

Prueba. Si Y es contráctil y sea $K : Y$ x [0,1] $\to Y$ una homotopía entre id_y y una aplicación constante q , entonces la aplicación definida por

$$L : X \text{ x } [0,1] \to Y \ , \ L(x,t) = K(f(x),t)$$

es una homotopía entre f y una constante q . Veamos:

$$L(x,0) = K(f(x),0) = f(x)$$
$$L(x,1) = K(f(x),1) = q$$

□

Corolario 1.37. *"Si Y es contráctil entonces dos aplicaciones continuas cualesquiera $f, g : X \to Y$ son homotópicas."*

Tenemos que $f \simeq q \simeq g$ entonces $f \simeq g$.

Si X es contráctil y sea $H : X$ x [0,1] $\to X$ una homotopía entre id_x y una aplicación constante p , entonces la aplicación

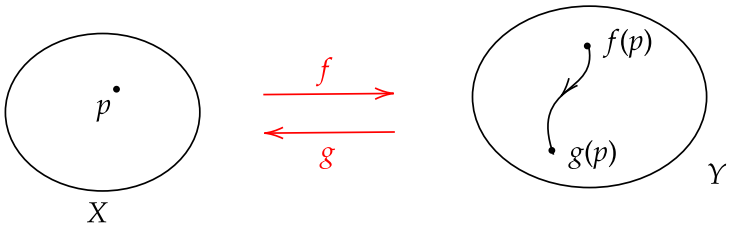
$$f \circ H : X \times [0,1] \to Y$$

es una homotopía entre f y una constante $f(p)$. Veamos

$$(f \circ H)(x,0) = f(H(x,0)) = f(x)$$
$$(f \circ H)(x,1) = f(H(x,1)) = f(p)$$

Corolario 1.38. *"Si X es contráctil y Y conexo por caminos, entonces dos aplicaciones continuas cualesquiera $f, g : X \to Y$ son homotópicas."*

Tenemos:



$$f \simeq f(p)$$
$$g \simeq g(p)$$
$$f(p) \simeq g(p) \Leftarrow Y \text{ conexo por caminos .}$$

1.1.7. Retracciones

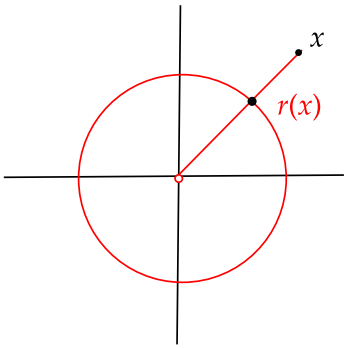
Definición 1.39. Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$. Una aplicación continua $r : X \to Y$ es una retracción si $r(y) = y$ para todo $y \in Y$, o sea r es una extensión continua de la aplicación identidad id_Y .

Ejemplo 1.40. La aplicación

$$r : R^{n+1} \backslash \{0\} \to S^n \ , \ r(x) = \frac{x}{|x|}$$

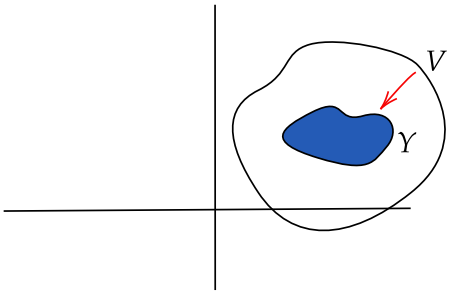
es una retracción. Luego S^n es un retracto de $\mathrm{R}^{n+1} \backslash \{0\}$.

$$x \in S^n \Rightarrow r(x) = x$$



Definición 1.41. Diremos que $Y \subset R^n$ es retracto de vecindad si existe una retracción $r : V \to Y$, donde V es alguna vecindad de Y en R^n .

Ejemplo 1.42. La esfera S^n es retracto de vecindad de R^{n+1} , pues se puede encontrar una vecindad de S^n en R^{n+1} que admite una retracción a la esfera.



$r : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to S^n$ retracción, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ es una vecindad de S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 1.43. "Un espacio topológico X es compacto si todo cubrimiento de X por abiertos admite algun subcubrimiento finito." Ver Munkres, pag 186.

Ejemplo 1.44. Un subespacio del espacio euclidiano R^n es compacto si y solamente si es cerrado y acotado.

Proposición 1.45. *"Supongamos que $Y \subset R^n$ es compacto y es retracto de vecindad. Entonces existe $\mathcal{E} > 0$ tal que cualesquiera par de aplicaciones $f, g : X \to Y$ satisfaciendo"*

$$|f(x) - g(x)| < \mathcal{E} \quad \textit{para todo } x \in X$$

son homotópicas.

Prueba. Sea $r : V \to Y$ retracto de una vecindad V de Y. Como Y es compacto,

$$\mathcal{E} = inf\{d(y, R^n \backslash V) : y \in Y\}$$

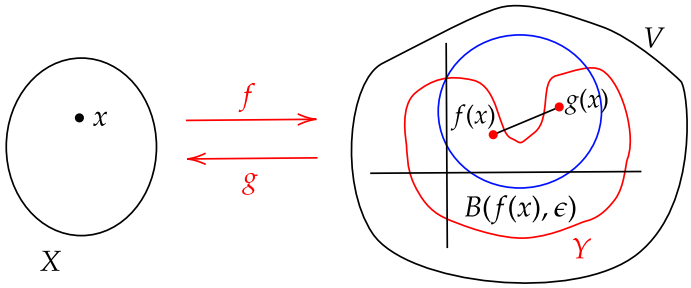
es positivo. Para cualquier $y \in Y$, la bola $B(y, \mathcal{E})$ está contenida en V .

Sean f y g satisfaciendo la condicion $|f(x) - g(x)| < \mathcal{E}$ para todo $x \in X$, entonces el segmento de recta $[f(x), g(x)]$ está contenido en V para todo $x \in X$. Así, podemos definir

$$H : X \times [0, 1] \to Y, \;\; H(x, t) = r((1 - t)f(x) + tg(x))$$

Tenemos

$$H(x, 0) = r(f(x)) = f(x)$$
$$H(x, 1) = r(f(x)) = g(x)$$



□

Capítulo 2

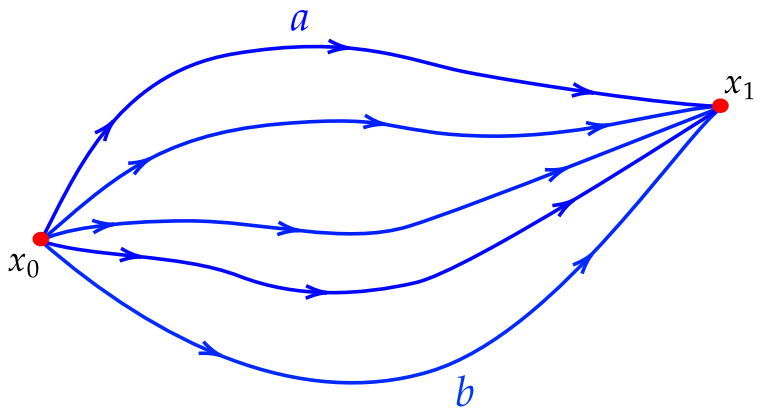
Homotopía de caminos

" Antes de definir el grupo fundamental de un espacio X, vamos a considerar caminos sobre X y una relación de equivalencia entre ellos conocida como homotopía de caminos. Posteriormente, definiremos la operación producto sobre la colección de las clases de equivalencia que la convierte en lo que en álgebra se conoce como un grupoide."

Definición 2.1. Un camino en un espacio topológico X es una aplicación continua a: $[s_0, s_1] \longrightarrow X$. Podemos suponer que $s_0 = 0$ y $s_1 = 1$. Como $[0, 1]$ es contráctil, todo camino es homotópico a una constante. En este contexto, definamos el concepto interesante de homotopía relativa a los extremos.

Definición 2.2. Diremos que $a,\ b:\ [0, 1] \longrightarrow X$ son caminos homotópicos relativos a los extremos si $a \simeq b\ \ (rel.\{0, 1\})$, "si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y si existe una aplicación continua $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$" tal que,

1. $F(s, 0) = a(s) \quad$ y $\quad F(s, 1) = b(s)$ para todo $s \in [0, 1]$
2. $F(0, t) = a(0) = b(0) = x_0 \quad$ y $\quad F(1, t) = a(1) = b(1) = x_1$
   para todo $t \in [0, 1]$

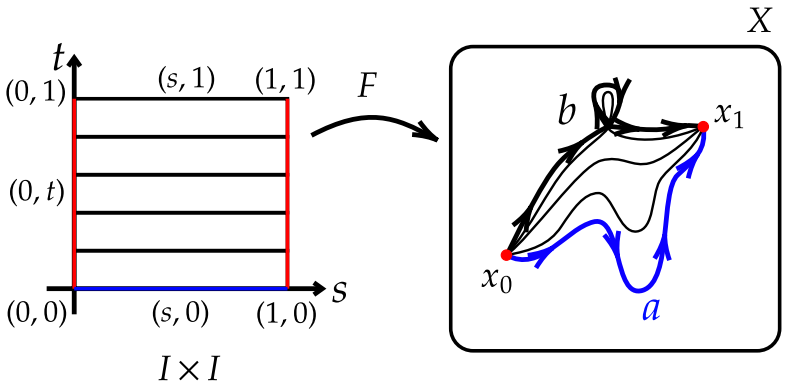


La primera condición dice simplemente que H es una homotopía entre a y b; y la segunda dice que, para cada $t \in [0,1]$, la aplicación f_t, definida por la ecuación $f_t(s) = F(s,t)$, es un camino desde x_0 hasta x_1. Dicho de otro modo, la primera condición dice que F representa una forma continua de deformar el camino a en el camino b, y la segunda dice que los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación.

Escribimos $f \simeq g$, cuando las aplicaciones f y g son homotópicas y $f \simeq_p g$, si f es homotópico por caminos a g.

Lema 2.3. *"Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_p$ son relaciones de equivalencia.*
Si f es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de Homotopía de caminos por $[f]$."

Demostración. Ver MunKres, pag. 368



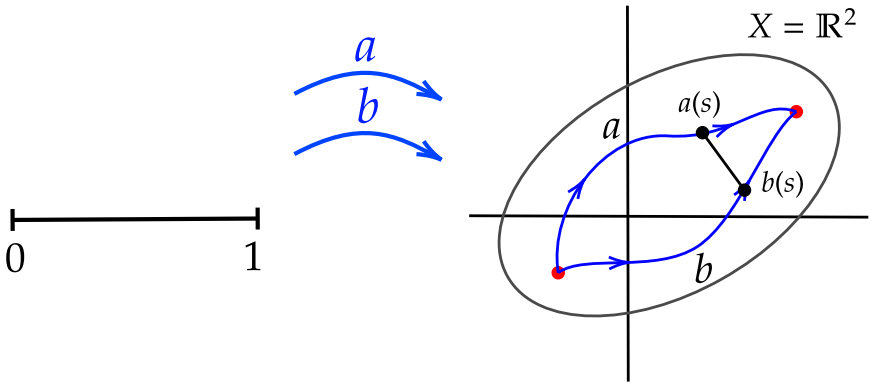
Ejemplo 2.4. Si X es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado, cualquier par de caminos $a,\ b : [0,1] \longrightarrow X$ con los mismos extremos son

homotópicos. Veamos,

Para comprobar que a y b son caminos homotópicos relativos a los extremos, usamos la homotopía lineal,

$$H(s,t) = (1-t)a(s) + tb(s) \quad , s \in [0,1], t \in [0,1]$$

También se conoce como homotopía por rectas porque lleva el punto $a(s)$ al punto $b(s)$ a lo largo del segmento de recta que las une.



En general, sea A un subespacio convexo de $\mathbb{R}^n$ (lo cual significa que para dos puntos cualesquiera $a,\ b$ de A el segmento de recta que los une está contenido en A). Entonces dos caminos cualesquiera con extremos fijos son homotópicos por caminos en A, ya que la homotopía por rectas H entre ellos mantiene su imagen en A.

Ejemplo 2.5. Denotemos por X el plano agujererado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Los siguientes caminos en X,

$$f(s) = (cos(\pi s), sen(\pi s)) \quad , \quad s \in [0,1]$$

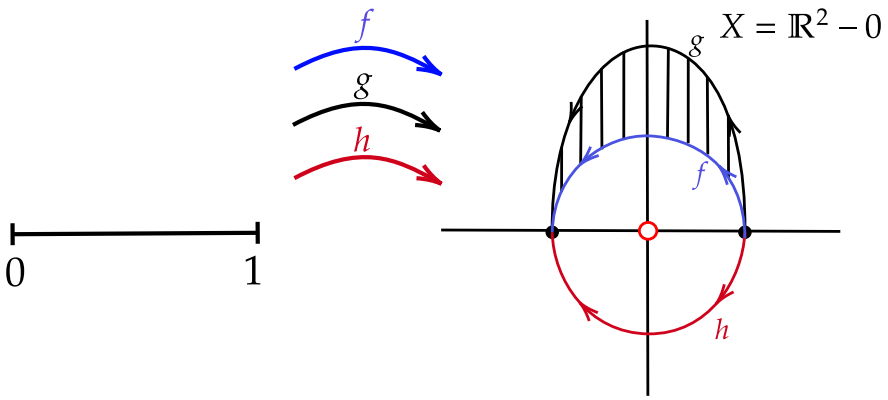
$$g(s) = (cos(\pi s), 2sen(\pi s)) \quad , \quad s \in [0,1]$$

"son homotópicos, pues se verifica entre ellos la homotopía por rectas.

Mientras que la homotopía por rectas entre f y el camino

$$h(s) = (cos(\pi s), -sen(\pi s))", \quad s \in [0,1]$$

no es valida, porque su imagen no está contenida en el espacio $X = \mathbb{R}^2 - 0$.



Ciertamente, no existe una homotopía de caminos en X entre f y h. Este resultado no nos sorprende pues intuitivamente está claro que no es posible "deformar f pasando por el agujero en 0"sin introducir una discontinuidad. “Este ejemplo ilustra el hecho de que es necesario conocer el espacio rango antes de poder decidir si dos caminos son homotópicos por caminos o no. Los caminos f y h podrían ser homotópicos por caminos si estuvieran en $\mathbb{R}^2$.”

Introduzcamos ahora un poco de álgebra en nuestra situación geometrica. Revisemos alguna terminología de teoría de grupos.

Definición 2.6. Un grupo es un conjunto G unido de un elemento $e \in G$ llamado elemento neutro y dos aplicaciones,

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & g \cdot h \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

Tales que:

1. $e \cdot g = g \cdot e = g$, para todo $g \in G$ (existencia del elemento neutro)
2. $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$, para todo $g \in G$ (existencia del inverso)
3. $(g \cdot h) \cdot l = g \cdot (h \cdot l)$, para todo $g \in G$ (asociatividad)

Diremos que un grupo es abeliano si $g \cdot h = h \cdot g$ para cualesquiera $g,\ h \in G$.

Ejemplo 2.7. 1. $G = \mathbb{Z}$ unido con la operación $g \cdot h = g + h$. El elemento neutro es $e = 0$ y el inverso está dado por $g^{-1} = -g$.

2. $G = GL(d)$, el conjunto de las matrices cuadradas invertibles de dimensión d, unido con la operación de multiplicación de matrices.
   El elemento neutro es la matriz identidad $e = I$.

Observación 2.8. Muchas veces omitiremos el simbolo $\cdot$, escribiendo gh en lugar de $g \cdot h$.

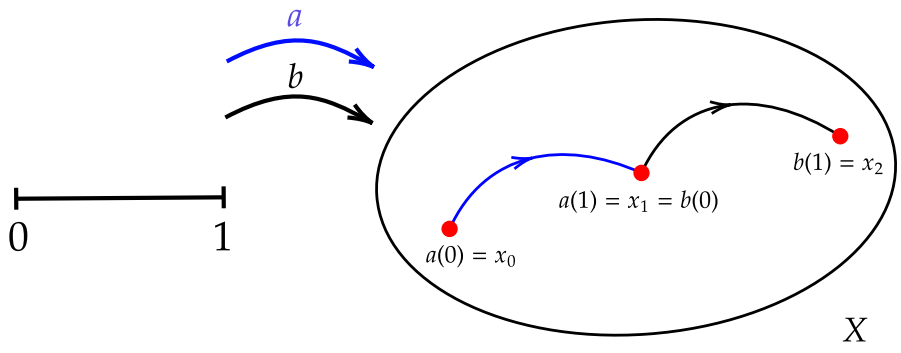
2.1. Producto de caminos

Ahora definiremos la operación sobre las clases de homotopía de caminos como sigue:

Definición. "Si a es un camino en X de x_0 a x_1, y b es un camino en X de x_1 a x_2", definiremos el producto ab de los caminos $a,\ b : [0,1] \longrightarrow X$ tales que $a(1) = x_1 = b(0)$ como el camino,

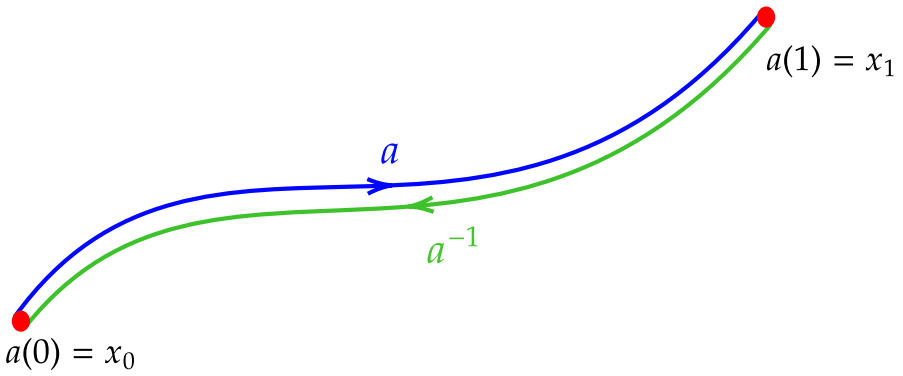
$$h = ab : [0,1] \longrightarrow X, \quad h(s) \begin{cases} a(2s) & , \quad si \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ b(2s-1) & , \quad si \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases}$$

La aplicación h está bien definida y es continua, por el Lema del pegamiento, *(ver MunKres, pag. 123)*; es un camino en X de x_0 a x_2. Pensamos en h como el camino cuya primera mitad es el camino a y cuya segunda mitad es el camino b.
Graficamente



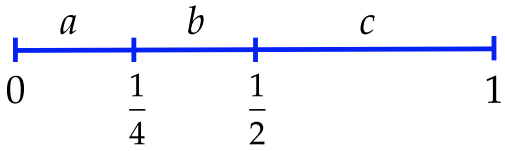
El inverso de un camino $a : [0,1] \longrightarrow X$ es el camino:

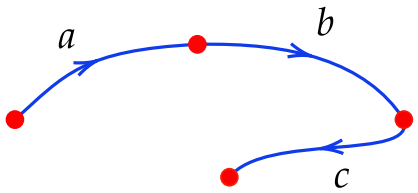
$$a^{-1} : [0,1] \longrightarrow X, \quad a^{-1}(s) = a(1-s), \quad s \in [0,1]\,.$$



Observación. Dados los caminos $a,\ b,\ c : [0,1] \longrightarrow X$ con $a(1) = b(0)$ y $b(1) = c(0)$,

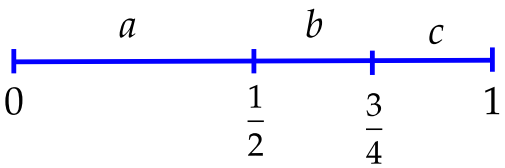
$$(ab)c(s) = \begin{cases} ab(2s) & , \quad si \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ c(2s-1) & , \quad si \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} a(4s) & , \quad si \quad s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ b(4s-2) & , \quad si \quad s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ c(2s-1) & , \quad si \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

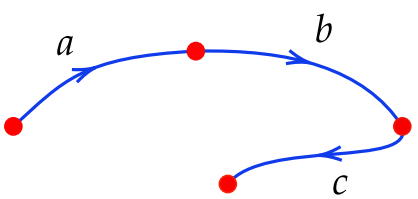




mientras que

$$a(bc)(s) = \begin{cases} a(2s) & , \quad si \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ bc(2s-1) & , \quad si \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} a(2s) & , \quad si \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ b(4s-2) & , \quad si \quad s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ c(4s-3) & , \quad si \quad s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$





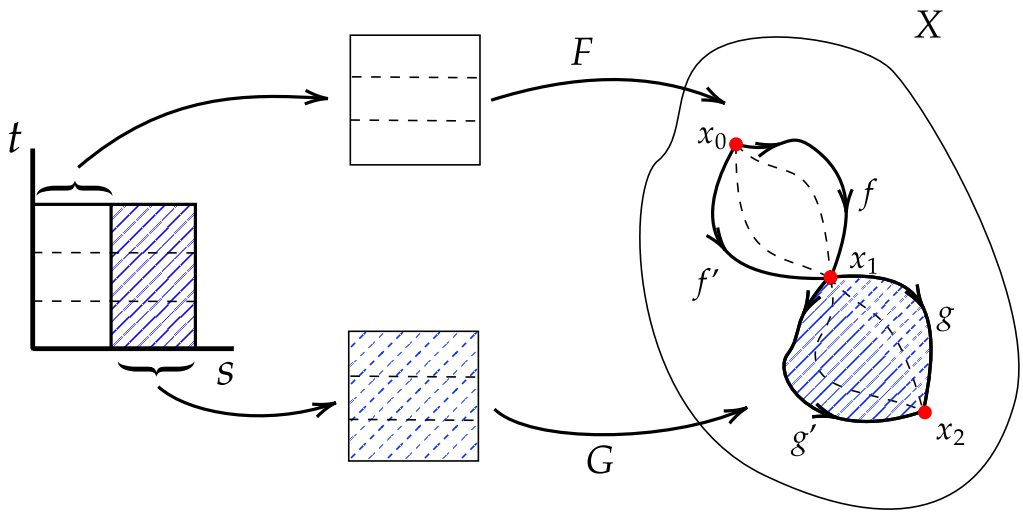
Por lo tanto $(ab)c$ y $a(bc)$ son caminos diferentes. Esta operación de multiplicación de caminos no es asociativa pues las fórmulas en ambos casos son diferentes, sin embargo vamos a ver que estos productos son homotópicos.

El objetivo es mostrar que éstas operaciones definen una estructura de grupo, en el espacio de las clases de homotopía de caminos. Comencemos por verificar que ellas estan bien definidas en ese espacio. "La operación producto sobre caminos (concatenación de caminos) induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación $[f][g] = [fg]$. Veamos

Sea F una homotopía de caminos entre f y f' y sea G una homotopía de caminos entre g y g' . Definamos,

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & , \text{ si } s \in [0,1/2] \\ G(2s-1,t) & , \text{ si } s \in [1/2,1] \end{cases}$$

Dado que para $s = \frac{1}{2}$, $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$, para todo t, la aplicación H esta bien definida y es continua por el Lema del pegamiento."(ver, Munkres, pag. 123) Así, H es la homotopía de caminos requerida entre f g y f' g'.



Proposición 2.9. *Sean* $f,\ g,\ f',\ g' : [0,1] \longrightarrow X$ *caminos tales que* $f(0) = f'(0)$, $f(1) = f'(1) = g(0) = g'(0)$ *y* $g(1) = g'(1)$. *Si* $f \simeq_p f'$ *y* $g \simeq_p g'$, *entonces*

$$fg \simeq_p f'g' \quad y \quad f^{-1} \simeq_p (f')^{-1}$$

Entonces podemos definir el producto y el inverso de las clases de homotopía de caminos:

$$[f][g] = [fg] \quad y \quad [f]^{-1} = \left[f^{-1}\right]$$

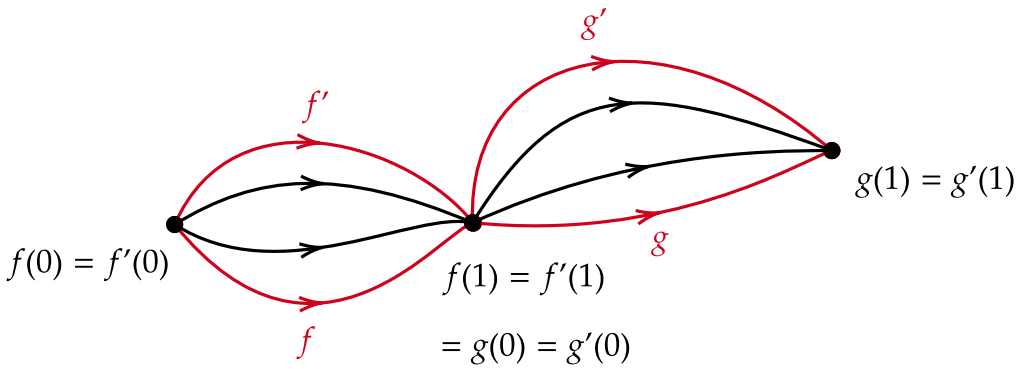
siempre que $[f]y[g]$ sean clases de homotopía de caminos, tales que el punto final de f coincide con el punto inicial de g . (homotopía relativa a los extremos).

Prueba. Veamos:

Dadas las homotopías F entre f y f' y G entre g y g', la función:

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X, \quad H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{, si } s \in [0,1/2] \\ G(2s-1,t) & \text{, si } s \in [1/2,1] \end{cases}$$

es una homotopía entre fg y $f'g'$.



También, la aplicación

$$L : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X, \quad L(s,t) = F(1-s,t)$$

es una homotopía entre f^{-1} y $(f')^{-1}$. La operación producto $\cdot$ sobre las clases de homotopía de caminos satisface propiedades muy parecidas a los axiomas de grupo. Estas propiedades se conocen como propiedades de grupoide de $\cdot$; una diferencia respecto de las propiedades de grupo es que $[f][g]$ no está definida para cualquier par de clases, sino unicamente para aquellos pares $[f]$, $[g]$ para los que $f(1) = g(0)$. □

Teorema 2.10. *"La operación producto $\cdot$, sobre las clases de homotopía de caminos tiene las siguientes propiedades:*

1. ***Asociatividad.*** *Si* $[f]([g][h])$ *esta definida, también lo está* $([f][g])[h]$*, y son iguales,"*

$$[f]([g][h]) = ([f][g])[h]$$

2. *"**Neutro a izquierda y derecha.** Dado* $x \in X$*, denotemos por* e_x *el camino constante* $e_x : [0,1] \longrightarrow X$ *que lleva todo punto de* $[0,1]$ *a* $x \in X$*. Si* f *es un camino en* X *desde* x_0 *hasta* x_1*, entonces*

$$[f]\,[e_{x_1}] = [f] \quad y \quad [e_{x_0}]\,[f] = [f]$$

3. ***Inverso.*** *Dado el camino* f *en* X *desde* x_0 *hasta* x_1*, sea* $\bar{f}$ *el camino definido por* $\bar{f}(s) = f(1-s)$*, el cual se conoce como inverso de* f*. Entonces*

$$[f][\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad y \quad [\bar{f}][f] = [e_{x_1}]\text{"}$$

Demostración. Ver Munkres, pag. 371.

2.2. El grupo fundamental

El conjunto de clases de homotopía de caminos en un espacio X no es un grupo con la operación producto (concatenación de caminos), porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no siempre está definido. Pero supongamos que cogemos un punto $x_0 \in X$ que nos sirva como punto base y nos restringimos a aquellos caminos que comienzan y acaban en x_0. El conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación producto $\cdot$ Este será denominado grupo fundamental de X. Definamos ahora el grupo fundamental.

Definición 2.11. "Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Un camino
$f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = f(1) = x_0$, se llama lazo basado en x_0. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociados a los lazos basados en x_0, con la operación producto $\cdot$, se denomina grupo fundamental de X relativo al punto base x_0."
Se denota por $\pi_1(X, x_0)$.

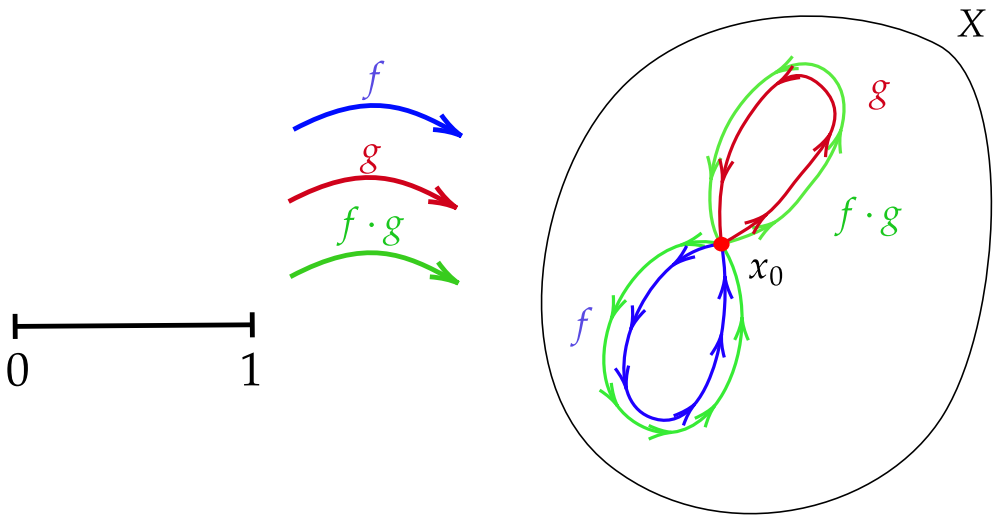
Teorema 2.12. *Las clases de homotopía de los lazos basados en $x_0 \in X$ forman el grupo fundamental de X_1, $\pi_1(X, x_0)$ con la operación producto dado por* $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$.

Prueba. Dados dos lazos f y g basados en x_0, el producto $f \cdot g$ siempre está definido y es un lazo basado en x_0.

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{ll} f : [0,1] \to X & \text{tal que } f(0) = f(1) = x_0 \\ g : [0,1] \to X & \text{tal que } g(0) = g(1) = x_0 \end{array}\right\rangle \text{ con } f(1) = g(0) = x_0$$

$$\text{entonces } f \cdot g : [0,1] \longrightarrow X \text{ tal que } (f \cdot g)(0) = (f \cdot g)(1) = x_0$$



□

Debemos probar que la operación producto sobre las clases de homotopía de los lazos basados en $x_0 \in X$, dado por:

$$\text{“}[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$$

(a) posee un elemento unidad.

(b) es asociativa.

(c) tiene un inverso para cada clase.”

(a) El elemento unidad será denotado por: $[e]$ la clase del lazo constante donde $e : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $e(s) = x_0, \quad \forall s \in [0,1]$.
Debemos probar que: $[f \cdot e] = [f] = [e \cdot f]$, es decir que: $f \cdot e \simeq f \simeq e \cdot f$, para cada lazo f basado en x_0.
Sea F una homotopía entre $f \cdot e$ y f, dada por:

$$F(s,t) = \begin{cases} f\left(\frac{2s}{1+t}\right) & , s \in \left[0, \frac{1}{2}(1+t)\right] \\ x_0 & , s \in \left[\frac{1}{2}(1+t), 1\right] \end{cases}$$

Dado que, para $s = \frac{1}{2}(1+t)$:

$$F\left(\frac{1}{2}(1+t), t\right) = f\left(2, \frac{1}{2}\frac{(1+t)}{(1+t)}\right) = f(1) = x_0, \quad \forall t \in [0,1]$$

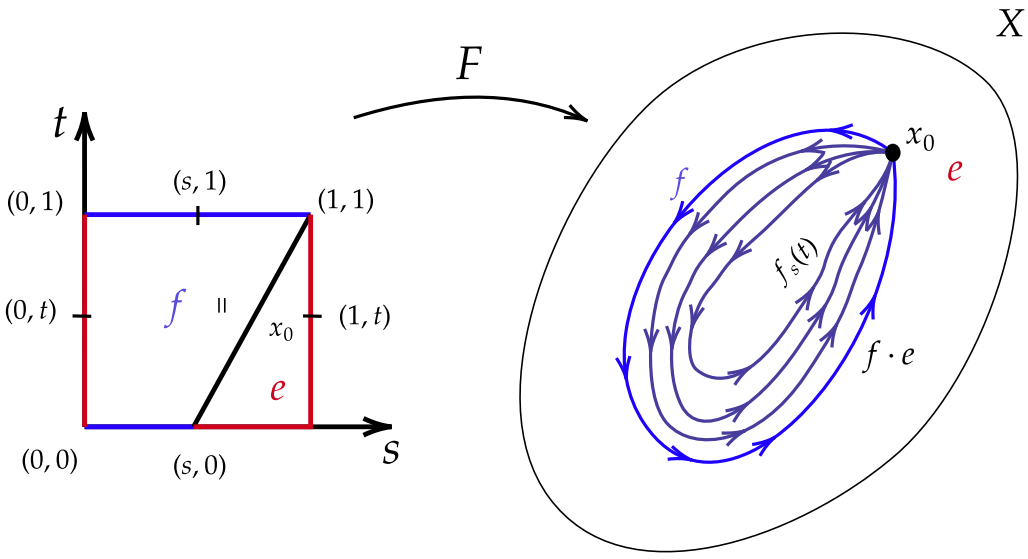
La aplicación F esta bien definida y es continua.
Veamos que F es la homotopía de lazos requerida.

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

También:

$$F(0,t) = f(0) = x_0 = F(1,t), \quad \forall t \in [0,1]$$

Graficamente



$$F(0,t) = f(0) = x_0 = e(0) \quad , \quad t \in [0,1]$$
$$F(1,t) = x_0 = e(1) \quad , \quad t \in [0,1]$$

$$F(s,0) = \begin{cases} f(2s) & , s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x_0 = e(s) & , s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$F(s,1) = \begin{cases} f(s) & , s \in [0,1] \\ x_0 = e(1) & , s = 1 \end{cases}$$

Si denotamos: $f_s(t) = F(s,t)$

$$= \begin{cases} f\left(\frac{2s}{(1+t)}\right) & , s \in \left[0, \frac{1}{2}(1+t)\right] \quad , t \in [0,1] \\ x_0 = e(s) & , s \in \left[\frac{1}{2}(1+t), 1\right] \quad , t \in [0,1] \end{cases}$$

Entonces, $f_s(t) = F(s,t)$ representa los lazos homotópicos basados en x_0.

Por lo tanto, queda comprobada la afirmación:

$$[f \cdot e] = [f] = [e \cdot f]$$

es decir: $f \cdot e \simeq f \simeq e \cdot f$, para cada lazo basado en x_0.

(Para el caso de: $f \simeq e$. f se da una homotopía similar)

Así, F es la homotopía de lazos requerida.

(b) Para la asociatividad, debemos probar que:

$$\begin{aligned} [f\cdot g]\cdot[h] &= [f]\cdot[g\cdot h] \\ &= [f\cdot g\cdot h] \quad , \text{ por definicion de } \cdot \\ \text{es decir que } \quad (f\cdot g)\cdot h &\simeq f\cdot(g\cdot h) \quad , \text{ cuando } f,\ g,\ h \text{ son lazos basados en } \quad x_0 \\ &\simeq f\cdot g\cdot h \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f:[0,1]\longrightarrow X \text{ tal que } f(0)=f(1)=x_0 \\ g:[0,1]\longrightarrow X \text{ tal que } g(0)=g(1)=x_0 \\ h:[0,1]\longrightarrow X \text{ tal que } h(0)=h(1)=x_0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \text{con } f(1)=g(0)=x_0 \\ \text{con } g(1)=h(0)=x_0 \end{array}$$

$$\text{y con } f(0)=h(1)=x_0$$

$(f\cdot g\cdot h):[0,1]\longrightarrow X$ tal que $(f\cdot g\cdot h)(0)=(f\cdot g\cdot h)(1)=x_0$.
Sea $G:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow X$, definida por:

$$G(s,t)=\begin{cases} f(\frac{4s}{(1+t)}) & ,s\in\left[0,\frac{1}{4}(1+t)\right] \\ g(4s-t-1) & ,s\in\left[\frac{1}{4}(1+t),\frac{1}{4}(2+t)\right] \\ h(\frac{(4s-t-2)}{(2-t)}), & ,s\in\left[\frac{1}{4}(2+t),1\right] \end{cases}$$

Probaremos que G es una homotopía de $(f\cdot g)\cdot h$ a $f\cdot(g\cdot h)$.

Veamos:

- Para, $s=\frac{1}{4}(1+t)$ se tiene:

$$G\left(\frac{1}{4}(1+t)\right)=f\left(4\cdot\frac{1}{4}\frac{(1+t)}{(1+t)}\right)=f(1)=g(0)=g\left(4\cdot\frac{1}{4}(1+t)-t-1\right)$$

- Para, $s=\frac{1}{4}(2+t)$ se tiene:

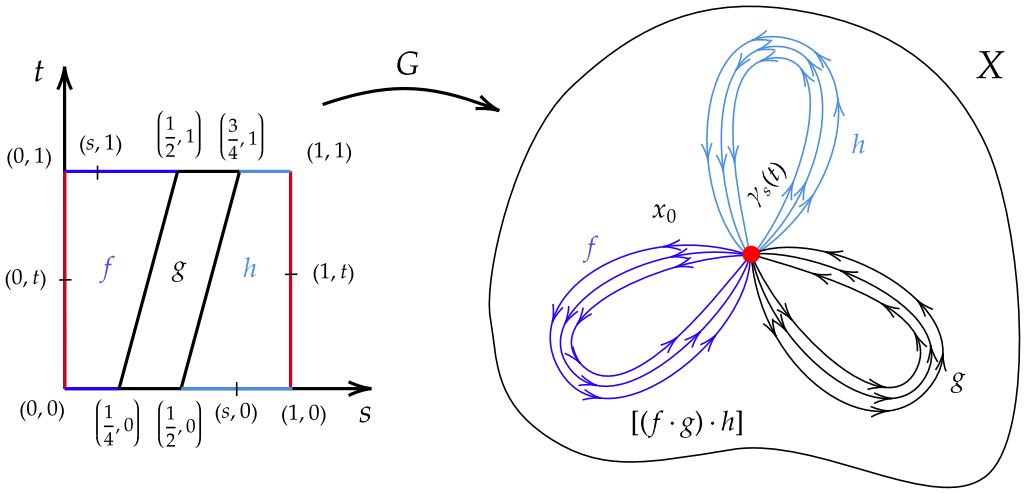
$$G\left(\frac{1}{4}(2+t)\right)=g\left(4\cdot\frac{1}{4}(2+t)-t-1\right)=g(1)=h(0)=h\left(\frac{4\cdot\frac{1}{4}(2+t)-t-2}{(2-t)}\right)$$

- Para, $s = 0$ y $s = 1$ se tiene:

$$G(0,t) = f(0) = h(1) = h\left(\frac{4(1) - t - 2}{(2-t)}\right) = G(1,t)$$

Así, la aplicación G está bien definida y es continua.

Graficamente



$$G(0,t) = f(0) = x_0, \ t \in [0,1]$$

$$G(1,t) = h(1) = x_0, \ t \in [0,1]$$

$$G(s,0) = \begin{cases} f(4s) & , \ s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ g(4s-1) & , \ s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ h(2s-1) & , \ s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$G(s,1) = \begin{cases} f(2s) & , \ s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(4s-2) & , \ s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ h(4s-3) & , \ s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Si denotamos: $\gamma_s(t) = G(s,t)$

$$= \begin{cases} f\left(\frac{4s}{(1+t)}\right) & , s \in \left[0, \frac{1}{4}(1+t)\right] & , t \in [0,1] \\ g(4s-t-1) & , s \in \left[\frac{1}{4}(1+t), \frac{1}{4}(2+t)\right] & , t \in [0,1] \\ h\left(\frac{(4s-t-2)}{(2-t)}\right) & , s \in \left[\frac{1}{4}(2+t), 1\right] & , t \in [0,1] \end{cases}$$

Entonces: $\gamma_s(t) = G(s,t)$ representa los lazos $(f \cdot g) \cdot h$ homotópicos basados en x_0.

Así, queda comprobado que: $(f \cdot g) \cdot h \simeq f \cdot (g \cdot h)$, para f, g y h que son lazos

basados en x_0. Y además, G es la homotopía de lazos requerida.

(c) Dado un lazo f basado en x_0, definimos el lazo inverso $\bar{f}$ por: $\bar{f}(s) = f(1-s)$, $\forall s \in [0,1]$

Entonces $[\bar{f}]$ es el elemento inverso de $[f]$, es decir:

$$[f] \cdot [\bar{f}] = [e] = [\bar{f}] \cdot [f]$$

Y por definición de producto,

$$[f \cdot \bar{f}] = [e] = [\bar{f} \cdot f]$$

Luego, debemos probar que: $f \cdot \bar{f} \simeq e \simeq \bar{f} \cdot f$

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{lll} f : [0,1] \longrightarrow X & \text{tal que} & f(0) = f(1) = x_0 \\ \bar{f} : [0,1] \longrightarrow X & \text{tal que} & \bar{f}(0) = f(1-0) = f(1) = x_0 \end{array}\right\rangle f(1) = \bar{f}(0) = x_0$$

$$\bar{f}(1) = f(1-1) = f(0) = x_0$$

$$\text{y con } f(0) = \bar{f}(1) = x_0$$

$$f \cdot \bar{f} : [0,1] \longrightarrow X \text{ tal que } (f \cdot \bar{f})(0) = (f \cdot \bar{f})(1) = x_0$$

$$e : [0,1] \longrightarrow X \text{ tal que } e(s) = x_0, \forall s \in [0,1]$$

Sea $H : [0,1] \times [0,1] \to X$, definida por:

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0 & , \ s \in \left[0, \frac{1}{2}t\right] \\ f(2s-t) & , \ s \in \left[\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\right] \\ \bar{f}(2-2s-t) & , \ s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2-t)\right] \\ x_0 & , \ s \in \left[\frac{1}{2}(2-t), 1\right] \end{cases}$$

Probaremos que H es una homotopía entre $f \cdot \bar{f}$ y e.

Veamos: Para, $s = \frac{1}{2}t$ se tiene:

$$H\left(\frac{1}{2}t, t\right) = x_0 = f(0) = f\left(2 \cdot \frac{1}{2}t - t\right)$$

Para, $s = \frac{1}{2}$ se tiene:

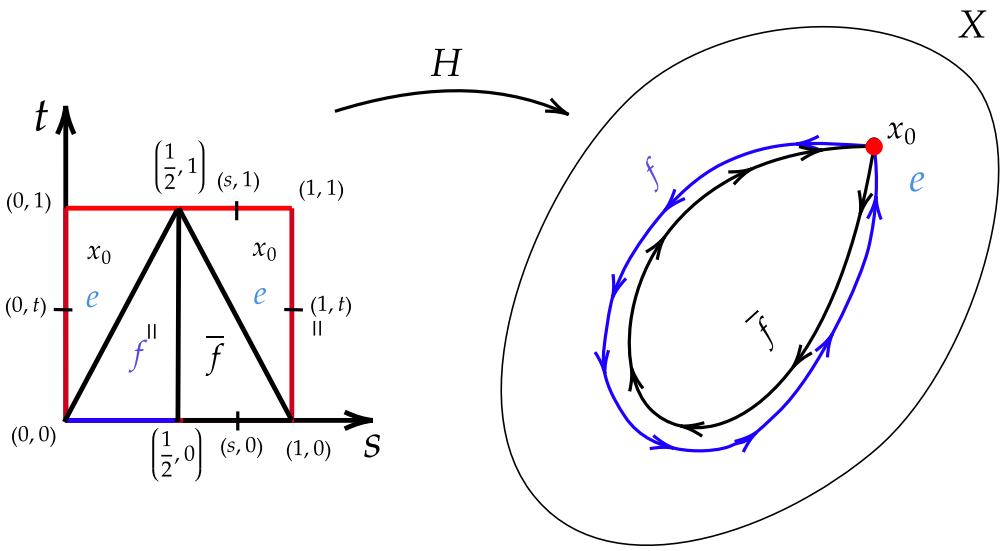
$$H\left(\frac{1}{2}, t\right) = f\left(2 \cdot \frac{1}{2} - t\right) = f(1-t) = \bar{f}(1-t) = \bar{f}\left(2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - t\right)$$

- Para $s = \dfrac{1}{2}(2-t)$ se tiene:

$$H\left(\frac{1}{2}(2-t), t\right) = \overline{f}(2 - 2\frac{1}{2}(2-t) - t) = \overline{f}(0) = x_0$$

- Para $s = 0$ y $s = 1$ se tiene: $H(0,t) = x_0 = H(1,t)$.

Así, la aplicación H está bien definida y es continua. Graficamente:



Tenemos,

$$e : [0,1] \to X \qquad \text{lazo constante}$$
$$s \mapsto e(s) = x_0 \quad \text{elemento unidad}$$

$$H(0,t) = x_0, \quad t \in [0,1]$$
$$H(1,t) = x_0, \quad t \in [0,1]$$

$$H(s,0) = \begin{cases} f(2s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{f}(2-2s) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$H(s,1) = \begin{cases} x_0 & , \ s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f(2s-1) & , \ s = \dfrac{1}{2} \quad (f(0) = x_0) \\ \bar{f}(1-2s) & , \ s = \dfrac{1}{2} \quad (\bar{f}(0) = x_0) \\ x_0 & , \ s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$H(s,1) = x_0 \quad , s \in [0,1]$$

Si denotamos:

$$\gamma_s(t) = H(s,t) = \begin{cases} x_0 & , \ s \in \left[0, \frac{1}{2}t\right], t \in [0,1] \\ f(2s-t) & , \ s \in \left[\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\right], t \in [0,1] \\ \bar{f}(2-2s-t) & , \ s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2-t)\right], t \in [0,1] \\ x_0 & , \ s \in \left[\frac{1}{2}(2-t), 1\right], t \in [0,1] \end{cases}$$

Entonces: $\gamma_s(t) = H(s,t)$ representa los lazos basados en x_0, $f \cdot \bar{f} \simeq e$.

Así, H es la homotopía de lazos requerida.

En resumen, dado un espacio topológico X y un punto $x_0 \in X$; el conjunto de las clases de homotopía de caminos asociados a los lazos basados en x_0, con la operación producto $\cdot$ representado por $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ es un grupo, en general no es abeliano y se le denomina **grupo fundamental del espacio X con punto base x_0 con la operación producto**.

Observación 2.13. El argumento que hemos utiilizado para "probar la asociatividad es válido para cualquier producto de un número finito de caminos." Hablando a grandes rasgos, podemos decir que, mientras el resultado concierna a clases de homotopía de caminos, no importa como se parte el intervalo cuando formamos el producto de caminos, en particular el producto de lazos, que son caminos cerrados. Este resultado nos será muy útil más adelante, de manera que lo establecemos formalmente.

Teorema 2.14. *"Sea f un camino en X y sean $a_0, \ldots, a_n$ números tales que $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$. Sea $f_i : I \to X$ el camino igual a la aplicación lineal positiva de I en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f. Entonces*

$$[f] = [f_1] \cdots [f_n]"$$

Prueba. *Ver Munkres, pag 374.* □

2.2.1. Espacio Simplemente Conexo

Definición 2.15. "Un espacio X es llamado simplemente conexo si tanto X como el espacio $\Omega_p X$ son conexos por caminos. En otras palabras, si X es conexo por caminos y todo lazo en X, basado en p," es homotópico a un lazo contante.

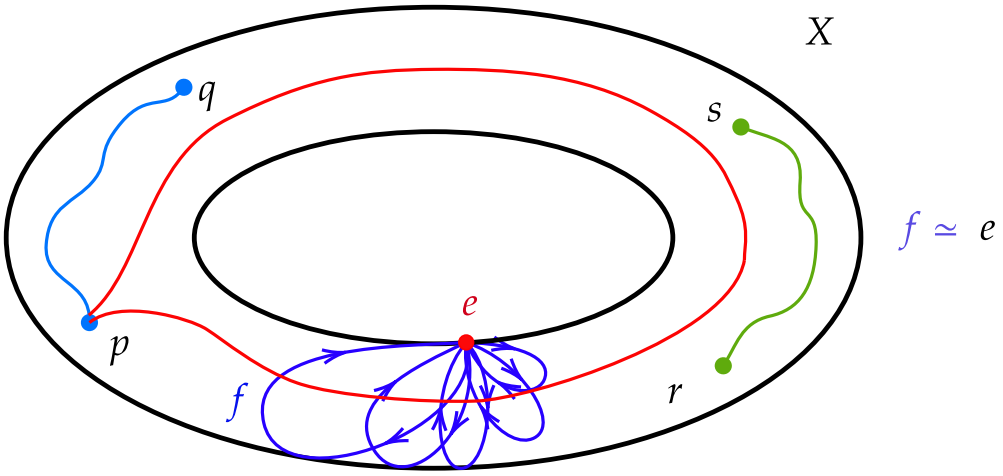
Recordemos que $\Omega_p X$ es el espacio de los lazos en X basados en p.

Definición 2.16. Las clases de equivalencia para la relacion "p conectado con q"(mediante un camino), son llamadas componentes conexas del espacio X. Si X tiene solamente una componente conexa, es llamado conexo por caminos.

Un lazo f basado en p es homotópico a un lazo constante e, si f puede ser deformado mediante una homotopía a un lazo constante.

Veamos, dado un lazo f basado en p, $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = f(1) = p$, $p \in X$ y un lazo constante e, $e : [0,1] \to X$ tal que $e(s) = p$, $\forall s \in [0,1]$ entonces $f \simeq e$, f es homotópico a e.

Graficamente:



X es conexo pero no es simplemente conexo.

Así, el siguiente ejemplo muestra que el plano $\mathbb{C}$ es simplemente conexo.

Ejemplo 2.17. Sea $X = \mathbb{C}$, el plano complejo, y elijamos el "punto base"p como el número 1. Sea γ cualquier lazo basado en p; es decir, $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Entonces la fórmula

$$\gamma_s(t) = (1-s)\gamma(t) + sp$$

define una homotopía de $\gamma = \gamma_0$ al lazo constante γ_1. Probaremos que $X = \mathbb{C}$ es simplemente conexo.

Veamos: $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = p = 1 = (1,0) \in \mathbb{C}$.

sea $H : [0,1] \times [0,1] \to X = \mathbb{C}$, definida por

$$H(s,t) = \gamma_s(t), s \in [0,1], t \in [0,1]$$

tal que cumple las siguiente condiciones:

1) $H(0,t) = \gamma_0(t), t \in [0,1]$

2) $H(1,t) = \gamma_1(t), t \in [0,1]$

3) $H(s,0) = H(s,1), s \in [0,1]$

En efecto, veamos que H es una homotopía de $\gamma = \gamma_0$ al lazo constante γ_1. Tenemos:

$$H(0,t) = \gamma_0(t) = (1-0)\gamma(t) + (0)p = \gamma(t)$$

entonces $\gamma(t) = \gamma_0(t)$. Tambien

$$H(1,t) = \gamma_1(t) = (1-1)\gamma(t) + (1)p = \gamma(t) = p = 1$$

entonces $\gamma_1(t) = 1$. Luego $\gamma_1(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$ es un lazo constante.

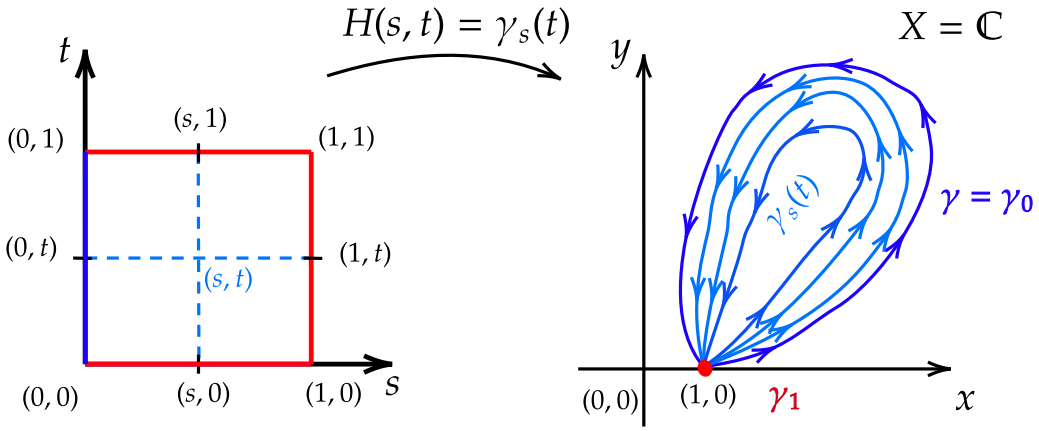
Además:

$$H(s,0) = \gamma_s(0) = (1-s)\gamma(0) + sp = (1-s)(1) + s(1) = 1 - s + s = 1, \qquad \forall s \in [0,1]$$

$$H(s,1) = \gamma_s(1) = (1-s)\gamma(1) + sp = (1-s)(1) + s(1) = 1 - s + s = 1, \qquad \forall s \in [0,1]$$

luego $H(s,0) = H(s,1)$. Entonces $\gamma_s(0) = \gamma_s(1) = 1$, es decir $\gamma_s(t)$ es un lazo basado en 1, $\forall s \in [0,1]$, $\forall t \in [0,1]$.

Graficamente:



Así, la aplicación $\gamma_s(t) = H(s,t)$ está bien definida y es continua, luego $\gamma_s(t)$ es una homotopía de $\gamma = \gamma_0$ al lazo constante $\gamma_1 = 1$. Por lo tanto, si $X = \mathbb{C}$ todo lazo $\Omega_p X$ es homotópico al lazo constante, entonces $\Omega_p X$ es conexo por caminos.

Observación 2.18.

- Como $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, luego $\mathbb{C}$ es conexo por caminos. Así, $\mathbb{C}$ es un espacio simplemente conexo, pues es conexo por caminos y todo lazo en $\Omega_p\mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}$ es homotópico al lazo constante.

- Además, se cumple que entre todo par de puntos en $\mathbb{C}$, existe una única clase de homotopía, es decir todos los caminos que los conectan son homotópicos entre si.

- El término "simplemente conexo"viene precisamente de esta propiedad: "solo existe una forma de conectar con un camino cualquier par de puntos del espacio", salvo homotopía.

Ejemplo 2.19. Mostraremos que si X es conexo por caminos y $p, q \in X$ entonces $\Omega_p(X)$ es conexo por caminos si y solamente si $\Omega_q(X)$ es conexo por caminos.

Se sigue que la definición de "simplemente conexo"no depende de la eleccion del punto base.

Tenemos

$$\begin{aligned}\Omega_p(X) &= \text{Maps}([0,1],\{0,1\},(X,\{p\})), \quad X \text{ espacio métrico} \\ &= \{f : [0,1] \to X : f(0) = f(1) = p, \text{ con } f \text{ mapeo continuo}\}\end{aligned}$$

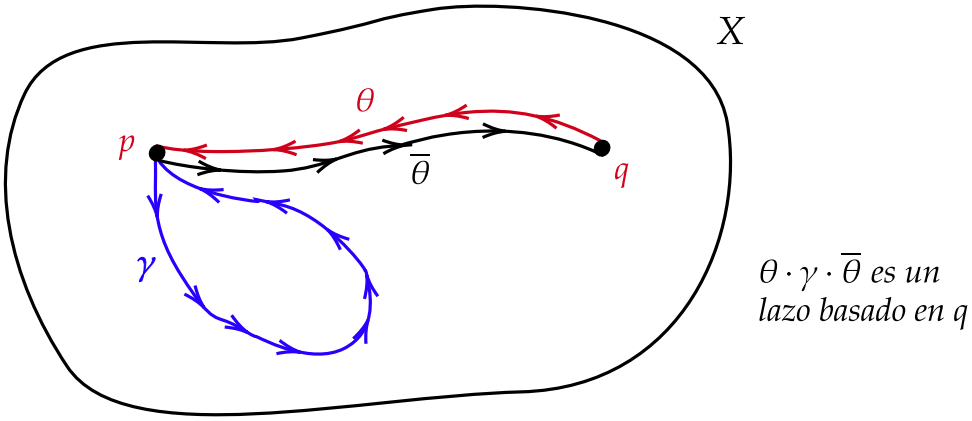
Como X tiene la topología inducida por la métrica, X es un espacio topológico. Además, ya habiamos probado que $\pi_1(X,p)$ es un grupo (grupo fundamental).

Consideremos el mapeo definido por:

$$\begin{aligned}\beta_\theta : \pi_1(X,p) : &\to \pi_1(X,q)\\ [\gamma] &\mapsto [\theta\cdot\gamma\cdot\overline{\theta}]\end{aligned}$$

donde

- $\gamma;[0,1]\to X$ tal que $\gamma(0)=\gamma(1)=p$ es un lazo basado en p.
- θ es un camino de q a p es decir $\theta(s)=q+s(p-q)$, $s\in[0,1]$.
- $\overline{\theta}$ es el camino inverso de θ es decir $\overline{\theta}(s)=\theta(1-s)$, $s\in[0,1]$.



Probaremos que la aplicación β_θ es un isomorfismo (homomorfismo biyectivo). Ver Munkres, pag 375.

- Ahora probaremos que si se puede establecer un isomorfismo entre los grupos fundamentales $\pi_1(X,p)$ y $\pi_1(X,q)$ luego ambos espacios tendrán la misma estructura y por lo tanto será indistinto la elección del punto base.

  Veamos:

$$\begin{aligned}\beta_\theta : \pi_1(X,p) &\to \pi_1(X,q)\\ [\gamma] &\mapsto [\theta\cdot\gamma\cdot\overline{\theta}]\end{aligned}$$

La aplicación β_θ está bien definida, pues la operación $\cdot$ está bien definida, si γ es un lazo basado p entonces $\theta \cdot \gamma \cdot \overline{\theta}$ es un lazo basado en q.

Además, la imagen de $[\gamma]$ no depende del representante de clase que tomemos:

Sea $\gamma' \in [\gamma]$ entonces $\beta_\theta([\gamma']) = \beta_\theta([\gamma])$ entonces $[\theta \cdot \gamma' \cdot \overline{\theta}] = [\theta \cdot \gamma \cdot \overline{\theta}]$.

- "Probemos que la aplicación β_θ es un isomorfismo de grupos.

  Primero veamos que β_θ es un homomorfismo. Sean f, g" dos lazos basados en p. Entonces

$$\begin{aligned}
\beta_\theta([fg]) &= [\theta \cdot f \cdot g \cdot \bar{\theta}] \quad \text{, por definición de } \beta_\theta \\
&= [\theta \cdot f \cdot e \cdot g \cdot \bar{\theta}] \\
&= [\theta \cdot f \cdot \bar{\theta} \cdot \theta \cdot g \cdot \bar{\theta}] \\
&= [\theta \cdot f \cdot \bar{\theta}] \cdot [\theta \cdot g \cdot \bar{\theta}] \\
&= \beta_\theta([f]) \cdot \beta_\theta([g])
\end{aligned}$$

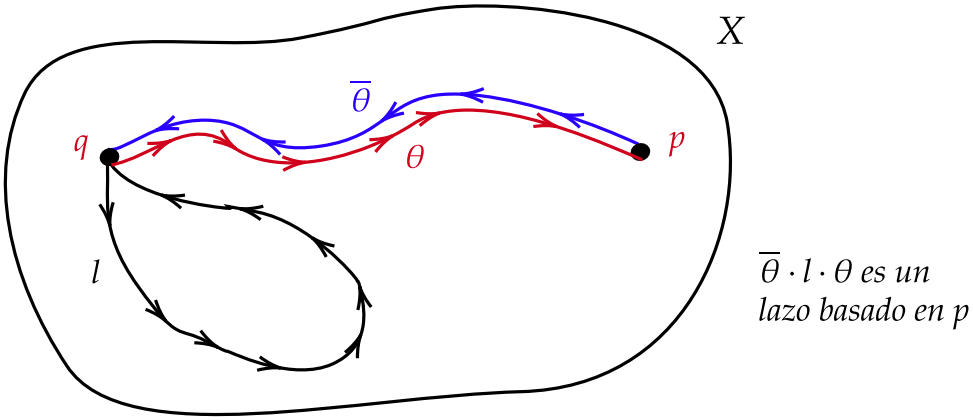
  Así, β_θ es un homomorfismo de grupos de "$\pi_1(X,p)$ en $\pi_1(X,q)$

$$[f \cdot g] \in \pi_1(X,p) \quad , \quad \beta_\theta([f]) \cdot \beta_\theta([g]) \in \pi_1(X,q)."$$

- Para la biyectividad de la aplicación β_θ debemos probar que $\beta_{\theta^{-1}} : \pi_1(X,q) \to \pi_1(X,p)$ es un homomorfismo y además las composiciones $\beta_\theta \circ \beta_{\theta^{-1}}$ y $\beta_{\theta^{-1}} \circ \beta_\theta$ son la identidad.

- Veamos que $\beta_{\theta^{-1}}$ es un homomorfismo. Sea

$$\begin{aligned}
\beta_{\theta^{-1}} : \pi_1(X,q) &\to \pi_1(X,p) \\
[l] &\mapsto [\bar{\theta} \cdot l \cdot \theta]
\end{aligned}$$



donde

- $l : [0, 1] \to X$ tal que $l(0) = l(1) = q$ es un lazo basado en q.
- θ es un camino de q a p.
- $\bar{\theta}$ es el camino inverso de θ.

"La aplicación $\beta_{\theta^{-1}}$ está bien definida, pues la operación $\cdot$ está bien definida, si l es un lazo basado en q, entonces $\bar{\theta} \cdot l \cdot \theta$ es un lazo basado en p."

- Veamos que $\beta_{\theta^{-1}}$ es un homomorfismo.

  Sean h, k dos lazos basados en q:

$$\begin{aligned}
\beta_{\theta^{-1}}([h \cdot k]) &= [\bar{\theta} \cdot h \cdot k \cdot \theta] \\
&= [\bar{\theta} \cdot h \cdot e \cdot k \cdot \theta] \\
&= [\bar{\theta} \cdot h \cdot \theta \cdot \bar{\theta} \cdot k \cdot \theta] \\
&= [\bar{\theta} \cdot h \cdot \theta] \cdot [\bar{\theta} \cdot k \cdot \theta] \\
&= \beta_{\theta^{-1}}([h]) \cdot \beta_{\theta^{-1}}([k])
\end{aligned}$$

  Así $\beta_{\theta^{-1}}$ es un homomorfismo de grupos de $\pi_1(X, q)$ en $\pi_1(X, p)$.

- Por otro lado, probemos que las composiciones $\beta_\theta \circ \beta_{\theta^{-1}}$ y $\beta_{\theta^{-1}} \circ \beta_\theta$ son la identidad.

$$\begin{aligned}\beta_\theta(\beta_{\theta^{-1}}[l]) &= \beta_\theta([\bar{\theta}\circ\theta]) \\ &= [\theta\cdot\bar{\theta}\cdot l\cdot\theta\cdot\bar{\theta}] \quad \text{por definición de } \beta_\theta \\ &= [e\cdot l\cdot e] \\ &= [l]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{\theta^{-1}}(\beta_\theta[\gamma]) &= \beta_{\theta^{-1}}([\theta\cdot\gamma\cdot\bar{\theta}]) \\ &= [\bar{\theta}\cdot\theta\cdot\gamma\cdot\bar{\theta}\cdot\theta] \\ &= [e\cdot\gamma\cdot e] \\ &= [\gamma]\end{aligned}$$

Luego se verifican que las composiciones son igual a la idenidad.

Así, ambas aplicaciones β_θ y β_θ^{-1} son isomorfismos. β_θ es isomorfismo con inverso β_θ^{-1} que es isomorfismo. Por lo tanto, los grupos fundmentales $\pi_1(X,p)$ y $\pi_1(X,q)$ son isomorfos, es decir tienen la misma estructura.

Luego, si $\pi_1(X,p)$ es conexo por caminos, es decir es homotópico al lazo constante; entonces $\pi_1(X,q)$ también es conexo por caminos, es decir que es homotópico al lazo constante.

Además será indistinta la elección del punto base. Sin embargo, cuando se trabaja con los **grupos fundamentales** es preferible mantener una mencion explícita del punto base.

En consecuencia, si X es un espacio simplemente conexo, las clases del isomorfismo del grupo fundamental, $[\gamma]$ y $[\theta\cdot\gamma\cdot\overline{\theta}]$ no dependen del punto base.

Ejemplo 2.20. Sea $X=\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, el plano complejo con el eje real negativo removido desde el origen. La misma homotopía del ejemplo siguiente, muestra que este espacio X es también simplemente conexo.

Ejemplo 2.21. Sea $X=\mathbb{C}$ el plano complejo y elijamos el "punto base"p como el número 1. Sea γ cualquier lazo basado en p; es decir $\gamma:[0,1]\to X$ con

$\gamma(0) = \gamma(1) = p$ Entonces $H : [0,1] \times [0,1] \to X = \mathbb{C}$ definida por

$$H(s,t) = \gamma_s(t) = (1-s)\gamma(t) + sp, \quad s \in [0,1], \quad t \in [0,1], \quad p = 1 \in \mathbb{C}$$

define una homotopía de $\gamma = \gamma_0$ al lazo constante $\gamma_1 = 1 \in \mathbb{C}$.

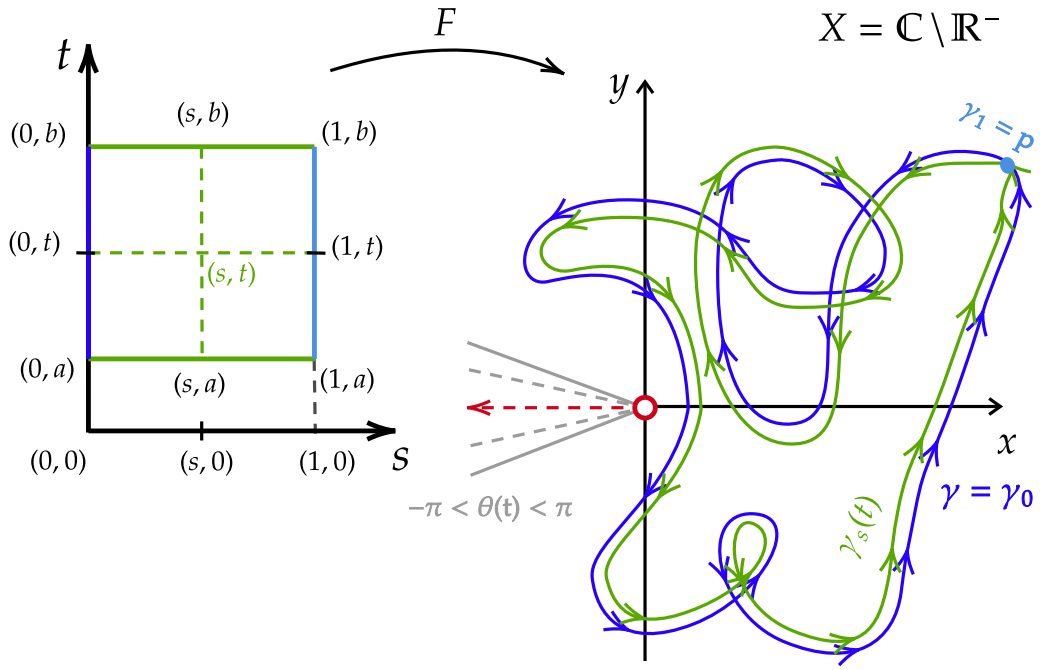
Ahora, vamos a demostrar que $X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ es simplemente conexo. (Ver Serge Lang, pag 120).

Sea γ un camino cerrado (lazo) en $X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, descrito en términos de coordenadas polares como: $\gamma : [a,b] \to X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, $\forall t \in [a,b]$ con $-\pi < \theta(t) < \pi$ donde $\gamma(a) = \gamma(b) = p$, $p \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ es decir

$$r(a)e^{i\theta(a)} = r(b)e^{i\theta(b)} = p, \quad p \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$$

Luego, definamos $F : [0,1] \times [a,b] \to X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ como

$$F(s,t) = \gamma_s(t) = (1-s)r(t)e^{i\theta(t)} + sp, \quad s \in [0,1], \quad t \in [a,b], \quad p \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$$



- Veamos que F define una homotopía de $\gamma = \gamma_0$ al lazo constante $\gamma_1 = p \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

$$F(0,t) = \gamma_0(t) = (1-0)r(t)e^{i\theta(t)} + (0)p$$

entonces $\gamma_0(t) = r(t)e^{i\theta(t)} = \gamma(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

$$F(1, t) = \gamma_1(t) = (1 - 1)r(t)e^{i\theta(t)} + (1)p$$

entonces $\gamma_1(t) = p$, $\forall t \in [a, b]$.

$$F(s, a) = \gamma_s(a) = (1 - s)r(a)e^{i\theta(a)} + sp$$

entonces $\gamma_s(a) = (1 - s)(p) + sp = p$, $\forall s \in [0, 1]$.

$$F(s, b) = \gamma_s(b) = (1 - s)r(b)e^{i\theta(b)} + sp$$

entonces $\gamma_s(b) = (1 - s)p + sp = p$, $\forall s \in [0, 1]$. Luego $F(s, a) = p = F(s, b)$ entonces $\gamma_s(a) = p = \gamma_s(b)$, es decir $\gamma_s(t)$ es un lazo pasado en p, $\forall s \in [0, 1]$, $\forall t \in [a, b]$.

Así, los $\gamma_s(t)$, $\forall s \in [0, 1]$, $\forall t \in [a, b]$ son todos los lazos basados en p de la homotopía.

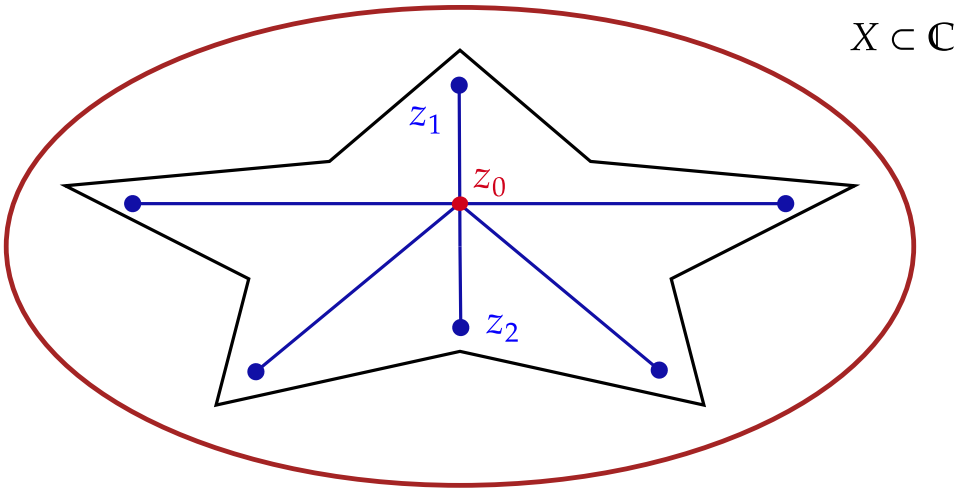
Así, la aplicación $F(s, t) = \gamma_s(t)$ está bien definida y es continua, luego $\gamma_s(t)$ es una homotopía de $\gamma = \gamma_0$ al lazo constante $\gamma_1 = p$. Por lo tanto, todo lazo basado en $p \in X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ es homotópico al lazo constante $\gamma_1 = p \in X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Así este espacio $X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ es simplemente conexo.

2.2.2. Conjuntos Estrellados

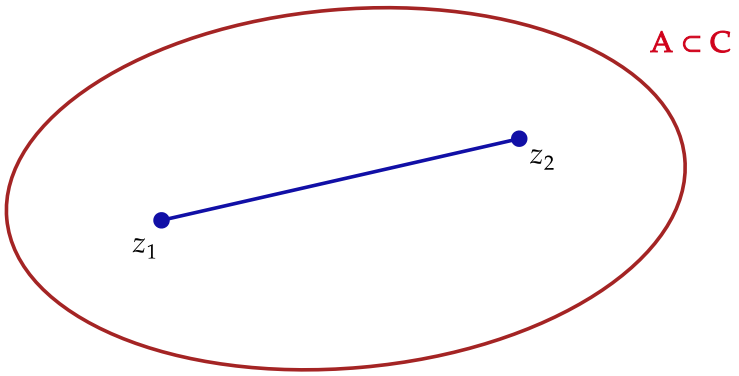
Definición 2.22. Supongamos que X es un subconjunto de $\mathbb{C}$ (o más generalmente de algún espacio Euclideano). Si existe un punto $p \in X$ el cual tiene la propiedad que, para todo $x \in X$, todos los puntos del segmento recto de x a p también pertenecen a X, entonces X es llamado **conjunto estrellado respecto a** p.

Ejemplos de conjuntos estrellados son:

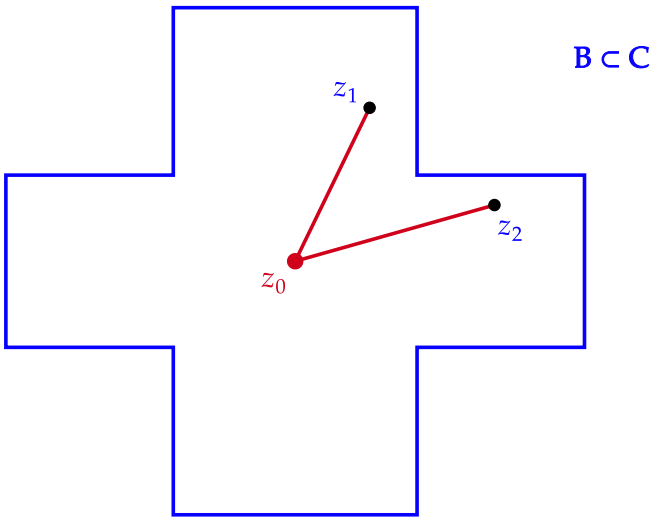
- Un disco $D \subset \mathbb{C}$, el plano $\mathbb{C}$ y mas generalmente, cualquier subconjunto abierto $W \subset \mathbb{C}$. También polígonos regulares que limitan regiones abiertas del plano que son dominios convexos. Finalmente, el dibujo de una estrella acota una región abierta del plano que es un dominio estrellado, de aqui el origen del nombre.



- Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. El conjunto A es convexo, si este conjunto contiene todos los segmentos rectos entre cualquier par de puntos de A. Estos conjuntos son estrellados.



- El conjunto $B \subset \mathbb{C}$ es estrellado si existe un punto $z_0 \in B$, tal que para todo $z \in B$ el segmento recto que une z_0 y z está contenido en B.



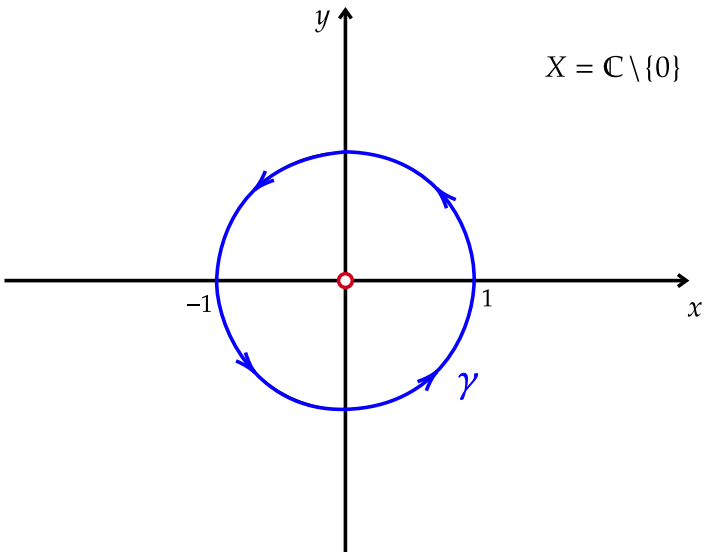
$$\overline{z_0z_1} = \{z_0 + t(z_1 - z_0) : t \in [0,1]\} \subset B$$

$$\overline{z_0z_2} = \{z_0 + s(z_2 - z_0) : s \in [0,1]\} \subset B$$

Ejemplo 2.23. Sea $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, el "plano agujerado". Este conjunto no es estrellado y la homotopía que usamos en los ejemplos anteriores ya no se verifica.

- Consideremos por ejemplo el lazo $\gamma(t) = e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i\,\mathrm{sen}\,(2\pi t)$, $t \in [0,1]$, donde $\gamma(0) = \gamma(1) = 1 = (1,0) \in \mathbb{C}$.

  Este es un lazo en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, este lazo nunca pasa por el origen, pues $0 \notin X$.



- Veamos que la homotopía lineal, usada anteriormente:

$$\gamma_s(t) = (1-s)\gamma(t) + sp, \quad s \in [0,1], \quad t \in [0,1], \quad p = 1$$

ahora no es válida; esta debería pasar por el origen, en $s = t = \dfrac{1}{2}$, pero el origen no está en X.

Tenemos

$$\gamma_s(t) = (1-s)\gamma(t) + sp = (1-s)e^{2\pi it} + s(1) = (1-s)e^{2\pi it} + s$$

entonces para $s = t = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) &= (1-\frac{1}{2})e^{2\pi i(\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}e^{\pi i} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(e^{\pi i} + 1) \\
&= \frac{1}{2}((\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) + 1) \\
&= \frac{1}{2}(-1 + i(0) + 1) = 0
\end{aligned}$$

Así, $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ no es un conjunto estrellado. Además, $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ no es simplemente conexo, y γ no es homotópico a un lazo constante.

Capítulo 3

Resultado principal

El objetivo de este capítulo es probar el Teorema de Seifert-Van Kampen que es una de las principales herramientas que se utiliza en el cálculo de grupos fundamentales de espacios topológicos.
Previamente introduciremos algunos resultados básicos de la Teoría de grupos, que nos serán útiles.

3.1. Homomorfismos inducidos

Definición 3.1. "Sea $f : (X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ una aplicación continua. Entonces el homomorfismo inducido por f relativo al punto base x_0" denotado por f_*, es la aplicación

$$"f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))"$$

dado por la ecuación

$$f_*([a]) = [f \circ a]$$

Veamos que:

- $a \simeq b$ implica $f \circ a \simeq f \circ b$, luego f_* está bien definida.
- $f \circ (ab) = (f \circ a)(f \circ b)$, luego f_* es homomorfismo de grupo:

$$f_*([a][b]) = f_*([ab]) = [f \circ (ab)] = [(f \circ a)(f \circ b)] = [f \circ a][f \circ b] = f_*([a])f_*([b]).$$

Observación 3.2. 1. El homomorfismo inducido por la identidad $id_X : X \to X$ es $id_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

2. Dadas las aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, g(f(x_0)))$.

3. "Si $f : X \to Y$ es homeomorfismo entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es isomorfismo. también se verifica que $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$."

4. Si $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ son homotópicas relativamente a x_0 entonces $f_* = g_*$, ya que $f \circ a \simeq g \circ a$ para todo camino cerrado a en x_0.

Corolario 3.3. *Si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones continuas homotópicas, entonces los homomorfismos inducidos $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ y $g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, g(x_0))$ estan relacionados por*

$$f_*(\alpha) = \gamma g_*(\alpha)\gamma^{-1} \text{ para todo } \alpha \in \pi_1(X, x_0)$$

donde γ es una clase de homotopía de caminos ligando $f(x_0)$ a $g(x_0)$.

Prueba. Sea $H : X \times [0, 1] \to Y$ una homotopía entre f y g, entonces $c(t) = H(x_0, t)$ es un camino ligando $f(x_0)$ a $g(x_0)$. Consideremos $\gamma = [c]$. Así para cualquier camino cerrado $a : [0, 1] \to X$ con $a(0) = a(1) = x_0$, la aplicación continua $(s, t) \mapsto H(a(s), t)$ es una homotopía libre entre $f \circ a$ y $g \circ a$.
Por proposición anterior, se sigue que

$$f \circ a \simeq c(g \circ a)c^{-1}$$

es decir,

$$f_*([a]) = [f \circ a] = \gamma[g \circ a]\gamma^{-1} = \gamma g_*([a])\gamma^{-1}$$

□

Proposición 3.4. *"Si X y Y son espacios topológicos conexos por caminos con el mismo tipo de homotopía entonces sus grupos fundamentales son isomorfos. Mas precisamente, si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica entonces el homomorfismo inducido,*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo."

Prueba. Sea $g : Y \to X$ un inverso homotópico de f. Fije $x_0 \in X$ y defina $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = g(y_0)$ y $y_1 = f(x_1)$. Consideremos los homomorfismos inducidos,

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \;\; f_*^1 : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(Y, y_1), \;\; g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

Como $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ ($g \circ f$ es homotópica libremente a id_X) del corolario anterior, tenemos que

$$\text{“}g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)\text{”}$$

es de la forma

$$(g_* \circ f_*)(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1} = \gamma(\mathrm{id}_X)_*(\alpha)\gamma^{-1}$$

para alguna clase de homotopía γ de caminos de x_0 a x_1.
Analogamente, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, y tenemos que:

$$f_*^1 \circ g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_1)$$

es de la forma,

$$(f_*^1 \circ g_*)(\beta) = \delta\beta\delta^{-1} = \delta(\mathrm{id}_Y)_*(\beta)\delta^{-1}$$

para alguna clase de homotopía δ de caminos de y_0 a y_1.
Así, las aplicaciones dadas por:

$$\begin{aligned} &\text{“}\Gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \quad \alpha \mapsto \gamma\alpha\gamma^{-1} \quad \text{y”} \\ &\triangle : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_1), \quad \beta \mapsto \delta\beta\delta^{-1} \end{aligned}$$

son isomorfismos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g_* \circ f_* = \Gamma \quad &\text{implica que} \quad g_* \text{ es sobreyectiva,} \\ f_*^1 \circ g_* = \triangle \quad &\text{implica que} \quad g_* \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$

Luego g_* es isomorfismo y por lo tanto

$$f_* = (g_*)^{-1} \circ \Gamma \;\text{ y }\; f_*^1 = \triangle \circ (g_*)^{-1}$$

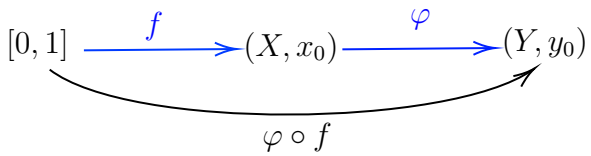
también son isomorfismos. □

Intuitivamente está claro que el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio X. Una forma conveniente de probar este hecho es introduciendo el concepto de "homomorfismo inducido por una aplicación continua".
Supongamos que $\varphi : X \to Y$ es una aplicación continua que lleva el punto x_0 de X al punto y_0 de Y, denotamos esta propiedad escribiendo

$$\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0) \text{ y } \varphi(x_0) = y_0.$$

Si f es un lazo en X basado en x_0 , entonces la composición $\varphi \circ f : [0,1] \to Y$ es un lazo en Y basado en y_0 .

Tenemos:



"La correspondencia $f \mapsto \varphi \circ f$ nos conduce a una aplicación que lleva $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$, lo cual definiremos a continuación."

Definición 3.5. Sea φ: $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación continua. Entonces el homomorfismo inducido por φ relativo al punto base x_0 , denotado por φ_x ; es la aplicación

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$[f] \mapsto [\varphi \circ f]$$

donde $[f]$ es un lazo en $\pi_1(X, x_0)$ y $[\varphi \circ f]$ es un lazo en $\pi_1(Y, y_\circ)$, y $\varphi(x_0) = y_0$.

Veamos que φ_* está bien definida.

1. Si f_t es una homotopía de lazos entre f_0 y f_1 entonces $\varphi \circ f_t$ es una homotopía de lazos entre $\varphi \circ f_0$ y $\varphi \circ f_1$.

   Sea

   $$F : [0,1] \times [0,1] \to X$$
   $$(s,t) \mapsto F(s,t) = f_t(s)$$

   tal que

- $F(s,0) = f_0(s), \quad \forall s \in [0,1]$
- $F(s,1) = f_1(s), \quad \forall s \in [0,1]$
- $F(0,t) = f_t(0) = f_t(1) = F(1,t) = x_0, \quad \forall t \in [0,1]$

Sea

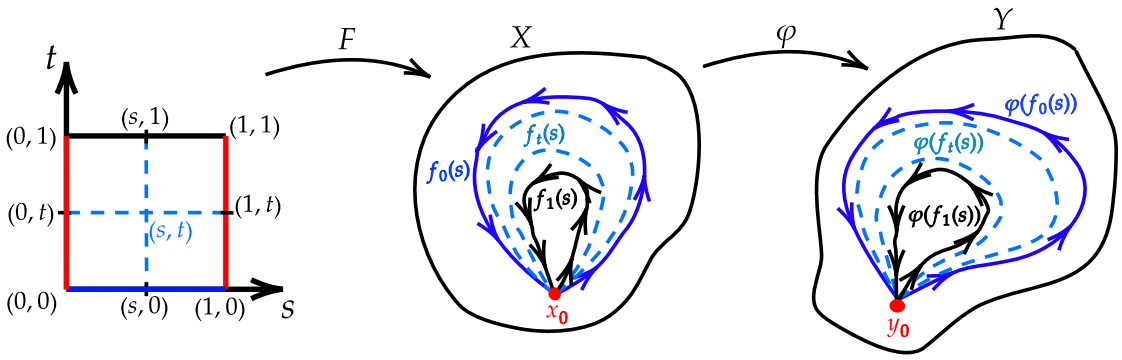
$$\varphi \circ F : [0,1] \times [0,1] \to Y$$
$$(s,t) \mapsto (\varphi \circ F)(s,t) = \varphi(F(s,t)) = \varphi(f_t(s)) = (\varphi \circ f_t)(s)$$

tal que cumple

- "$(\varphi \circ F)(s,0) = \varphi(F(s,0)) = \varphi(f_0(s)) = (\varphi \circ f_0)(s), \quad \forall s \in [0,1]$.
- $(\varphi \circ F)(s,1) = \varphi(F(s,1)) = \varphi(f_1(s)) = (\varphi \circ f_1)(s), \quad \forall s \in [0,1]$.
- $(\varphi \circ F)(0,t) = \varphi(F(0,t)) = \varphi(f_t(0)) = (\varphi \circ f_t)(1) = \varphi(F(1,t)) = \varphi(x_0) = y_0, \quad \forall t \in [0,1]$."

Asi, φ_* está bien definida.

Graficamente



2. φ_* es un homomorfismo.

Sean $f, g \in \pi_1(X, x_\circ)$ lazos, entonces $\varphi \circ (f.g) = (\varphi \circ f).(\varphi \circ g) \ \ldots \ (*)$

Sea $(f.g)(s) = \begin{cases} f(2s) & , \ s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & , \ s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$, tal que

$f : [0,1] \to X$ con $f(0) = f(1) = x_0$

$g : [0,1] \to X$ con $g(0) = g(1) = x_0$

$$(f.g) : [0,1] \to X \ \text{ con } (f.g)(0) = f(0) = x_0 \ , \ (f.g)(1) = g(1) = x_0 \quad \text{y}$$
$$(f.g)(0) = (f.g)(1) = x_0$$

$$\text{Sea } \ [\varphi \circ (f.g)](s) = \begin{cases} \varphi(f(2s)) \quad , \quad s \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ (\varphi \circ f)(2s) \\ \varphi(g(2s-1)) \ , \ s \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \\ (\varphi \circ g)(2s-1) \end{cases} \text{, tal que}$$

$$[\varphi \circ (f.g)] : [0,1] \to Y \ \text{ con}$$
$$[\varphi \circ (f.g)](0) = \varphi\Big(f(2(0))\Big) = \varphi\Big(f(0)\Big) = \varphi(x_0) = y_0$$
$$= (\varphi \circ f)(0) = y_0$$
$$[\varphi \circ (f.g)](1) = \varphi\Big(g(2(1)-1)\Big) = \varphi\Big(g(1)\Big) = \varphi(x_0) = y_0$$
$$= (\varphi \circ g)(1) = y_0$$
$$[\varphi \circ (f.g)](0) = [\varphi \circ (f.g)](1) = y_0$$

Por otro lado,

$$\text{“}(\varphi \circ f) : [0,1] \to Y \ \text{ con } \ (\varphi \circ f)(0) = \varphi\Big(f(0)\Big) = \varphi(x_\circ) = y_\circ$$
$$(\varphi \circ f)(1) = \varphi\Big(f(1)\Big) = \varphi(x_\circ) = y_\circ \quad \text{y}$$
$$(\varphi \circ f)(0) = \ (\varphi \circ f)(1) = y_0\text{”}$$

$$(\varphi \circ g) : [0,1] \to Y \ \text{ con } \ (\varphi \circ g)(0) = \varphi\Big(g(0)\Big) = \varphi(x_\circ) = y_\circ$$
$$(\varphi \circ g)(1) = \varphi\Big(g(1)\Big) = \varphi(x_\circ) = y_\circ \quad \text{y}$$
$$(\varphi \circ g)(0) = \ (\varphi \circ g)(1) = y_\circ$$

$$(\varphi \circ f).(\varphi \circ g) : [0,1] \to Y \ \text{ con } \ [(\varphi \circ f).(\varphi \circ g)](0) = (\varphi \circ f)(0) = y_\circ$$
$$[(\varphi \circ f).(\varphi \circ g)](1) = (\varphi \circ g)(1) = y_\circ \quad \text{y}$$

$$[(\varphi \circ f).(\varphi \circ g)](0) = [(\varphi \circ f).(\varphi \circ g)](1) = y_\circ$$

Así, se verifica la igualdad de ambos lados de $(*)$.

Luego, φ_* es un homomorfismo. (de grupos fundamentales):

$$\varphi_*([f][g]) = \varphi_*([fg]) = [\varphi \circ (fg)] = [(\varphi \circ f).(\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f][\varphi \circ g]$$
$$= \varphi_*([f]).\varphi_*([g])$$

Observación 3.6. 1. El homomorfismo φ_* no sólo depende de la aplicación $\varphi : X \to Y$, sino también de la elección del punto base $x_0 \in X$, pues una vez que x_0 está fijado, y_0 está determinado por φ.

2. El homomorfismo inducido φ_* tiene dos propiedades muy importantes para las aplicaciones continuas, que se conocen como propiedades funtoriales y están enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *"Si* $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *y* $\psi : (Y.y_0) \to (Z, z_0)$ *son aplicaciones continuas, entonces* $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.
Si $i : (X.x_\circ) \to (Y, y_\circ)$ *es la aplicación identidad, entonces* i_* *es el homomorfismo identidad."*

Prueba. Tenemos

$$(X, x_0) \xrightarrow{\varphi} (Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (Z, z_0)$$

y como $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f)$ entonces

$$(\psi \circ \varphi)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$$
$$[f] \mapsto (\psi \circ \varphi)_*([f])$$

es una aplicación continua. Luego $(\psi \circ \varphi)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f]$ por definición.
También

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi_1(Z, z_0) \\ [f] & \longmapsto & [\varphi \circ f] & \longmapsto & [\psi \circ (\varphi \circ f)] \end{array}$$

entonces

$$(\psi_* \circ \varphi_*)([f]) = \psi_*(\varphi_*([f])) = \psi_*([\varphi \circ f]) = [\psi \circ (\varphi \circ f)]$$

y como $[(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi \circ (\varphi \circ f)]$ entonces
$(\psi \circ \varphi)_*([f]) = (\psi_x \circ \varphi_*)([f])$.
Análogamente, $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. □

Corolario 3.8. *"Si $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y, entonces φ_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$."*

Prueba. Sea $\psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ la aplicación inversa de φ. Tenemos

$$(X, x_0) \xrightarrow{\varphi} (Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (X, x_0)$$

entonces $(\psi \circ \varphi)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ y $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = i_*$, donde i es la aplicación identidad de (X, x_0).

También

$$(Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (X, x_0) \xrightarrow{\varphi} (Y, y_0)$$

entonces $(\psi \circ \varphi)_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ y $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = j_*$, donde j es la aplicación identidad de (Y, y_0).

Así, dado que i_* y j_* son los homomorfismos identidad de los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ respectivamente, entonces ψ_* es la aplicación inversa de φ_*. Por lo tanto, φ es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$. □

3.2. Teoría de grupos

Teorema 3.9. *Sean G, G' grupos y $\varphi : G \to G'$ un homomorfismo de grupo sobreyectivo, entonces*

$$G/\mathrm{Ker}(\varphi) \simeq G'$$

Ver Herstein.

3.2.1. Grupos Libres y Productos Libres

Definición 3.10. "Sea G un grupo y sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subgrupos de G. Diremos que estos subgrupos generan G si cada elemento $x \in G$ se puede escribir como el producto finito de elementos de los subgrupos G_α. es decir, existe una secuencia $(x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_i \in G_{\alpha_i}$ tal que $x = x_1 \cdots x_n$."
Llamaremos a esta secuencia $(x_1, \ldots, x_n)$ una **palabra** de longitud n que representa a x.

Observación 3.11. 1. Dado que no tenemos necesariamente un grupo abeliano, no podemos necesariamente reorganizar los factores, es decir, los elementos de cada G_α de x.

2. Sin embargo, podemos combinar los factores x_i y x_{i+1} si pertenecen al mismo subgrupo G_α. Si este es el caso, entonces obtenemos la palabra de longitud $n-1$ dada por $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$, la cual sigue representando el mismo elemento x.

   Esta operación de combinación de factores es una de las operaciones a la que nos referimos como reducción.

3. Podemos eliminar cualquier elemento x_i que sea igual al elemento identidad 1. Así también obtenemos una palabra mas corta que todavía representa el elemento original x. También nos referiremos a esta operación de eliminar elementos identidad como reducción.

Definición 3.12. Una palabra $(x_1, \ldots, x_n)$ se llama reducida si para cada i, los elementos x_i y x_{i+1} no pertenecen al mismo grupo G_α y $x_i \neq 1$.
Notar que al aplicar operaciones de reducción a cualquier palabra $(x_1, \ldots, x_n)$, podemos encontrar una palabra reducida que representa el mismo elemento. Además la palabra reducida que representa el elemento identidad es el conjunto vacío, que es la palabra de longitud cero.

Observación 3.13. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_m)$ son palabras reducidas que representan $x, y \in G$, entonces su yuxtaposición $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ es una palabra representada por xy. Sin embargo, esta representación de xy no se reduce necesariamente ya que x_n y y_1 podrían pertenecer al mismo subgrupo G_α. Cuando este es el caso, podemos utilizar nuestras operaciones de reducción para obtener una palabra mas corta.

Definición 3.14. Sea G un grupo y $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subgrupos de G que generan G. Decimos que G es el producto libre de los subgrupos G_α si, para $\alpha \neq \beta$, la intersección $G_\alpha \cap G_\beta$ contiene solamente el elemento identidad, y si cada elemento $x \in G$ tiene una única representación por una palabra reducida en los grupos

$\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Denotamos esto por

$$G = \prod_{\alpha\in J}^{*} G_\alpha$$

En el caso finito escribimos $G = G_1 * \cdots * G_n$.

Una característica del producto libre es que satisface la siguiente propiedad conocida como propiedad universal.

Proposición 3.15. *"Un grupo G es el producto libre de una familia de subgrupos $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ si y solo si para cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \to H$, existe un homomorfismo único $h : G \to H$ cuya restricción a G_α es igual a h_α para cada α. Ver Munkres, pag 470."*

Observación 3.16. Por cada dos grupos G y H existe un grupo K mas grande que incluye a G y H como subgrupos y tal que K es el producto libre de sus subgrupos G y H. Un grupo K con esta propiedad es único hasta un isomorfismo único. Llamamos a tal grupo K el producto libre de G y H y lo denotamos por $G * H$.

El producto libre de G y H es esencialmente el conjunto de palabras formales reducidas de G y H con la multiplicación dada por yuxtaposición seguida de reducción de palabras.

3.3. El Teorema de Seifert Van Kampen

Teorema 3.17 (Seifert-Van Kampen)**.** *"Sea X un espacio topológico, $X = A \cup B$, donde A, B son conjuntos abiertos" conexos por caminos, cuya intersección $A \cap B$ tambien es conexa por caminos y considere $x_0 \in A \cap B$ un punto base.*

Además, sean $i : A \to X$, $j : B \to X$ las aplicaciones inclusión, entonces el grupo fundamental de X, $\pi_1(X, x_0)$ es generado por "las imágenes de los homomorfismos inducidos, $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ y $j_* : \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Es decir, el Teorema de Seifert Van-Kampen nos dice que el grupo fundamental de X, $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al producto libre de los grupos" fundamentales de A y de B, $\pi_1(A, x_0)$ y $\pi_1(B, x_0)$, identificando sus elementos si ellos están en la imagen de los mismos elementos del grupo fundamental de $A \cap B$, $\pi_1(A \cap B, x_0)$.

Por lo tanto,

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \frac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)}{N}$$

donde N está definido como sigue. Sean los homomorfismos inducidos,

$$\hat{i}_A : \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(A, x_0) \text{ y}$$
$$\hat{j}_B : \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(B, x_0)$$

Luego N está generado por todos los elementos de la forma, $\hat{i}_A(w)^{-1}\hat{j}_B(w)$ para $w \in \pi_1(A \cap B, x_0)$.

Prueba. Veamos que el grupo fundamental de $X = A \cup B$; $\pi_1(X, x_0)$ es generado por las imágenes de los homomorfismos inducidos, $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ y $j_* : \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Es decir que todo lazo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ puede ser expresado como el producto de lazos β_i , tal que

$$f \simeq \beta_1 \cdots \beta_k, \ \ k \text{ finito}, \ \ k \in \mathbb{N}$$

donde cada lazo β_i está en $i_*(\pi_1(A, x_0))$ o en $j_*(\pi_1(B, x_0))$.

Observación:

Las aplicaciones,

$$i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \text{ dada por } i_*([\alpha]_A) = [i \circ \alpha] = [\alpha] \text{ y}$$
$$j_* : \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \text{ dada por } j_*([\alpha]_B) = [j \circ \alpha] = [\alpha],$$

donde $[\alpha]_A$ y $[\alpha]_B$ denotan la clase de equivalencia de α en A y en B; pues esta no tiene por qué coincidir con la clase de equivalencia de α , $[\alpha]$; visto como un lazo en X. Es decir,

$$[\alpha]_A = \{a : [0,1] \to A \text{ tal que } a(0) = a(1) = x_0 \text{ y } a \simeq \alpha \text{ en } A\} \ y$$
$$[\alpha]_B = \{b : [0,1] \to B \text{ tal que } b(0) = b(1) = x_0 \text{ y } b \simeq \alpha \text{ en } B\}$$

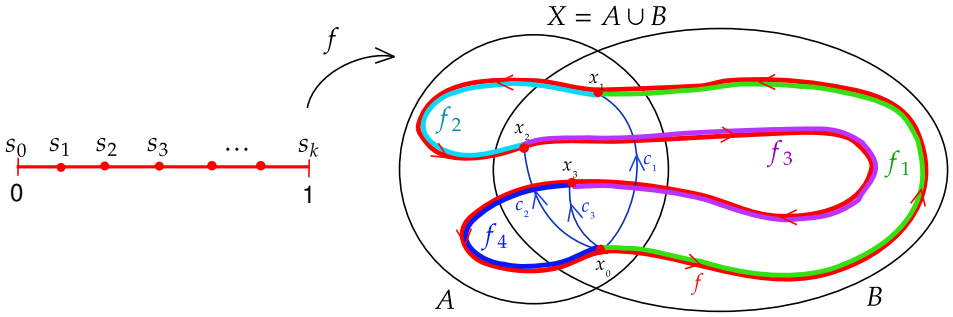
Así dado cualquier lazo f en X con punto base en x_0, $f : [0,1] \to X$ con $f(0) = f(1) = x_0$; debemos mostrar que existen lazos $\beta_1, \ldots, \beta_k : [0,1] \to X$ con

$\beta_i(0) = \beta_i(1) = x_0$, tal que f sea homotópico a la concatenación de estos lazos $\beta_i, i = 1, \ldots, k,\ k \in \mathbb{N}$. Es decir $f \simeq \beta_1 \cdots \beta_k$ y la imagen de cada lazo β_i está contenida en A o en B.

Ahora, como A y B son conjuntos abiertos; f es aplicación continua y como su dominio $[0, 1]$ es compacto; entonces podemos encontrar puntos, $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$ con un número finito de subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ que cubren $[0, 1]$ tales que $f([s_{i-1}, s_i])$ estará contenido en A o en B. (Si dos intervalos consecutivos, $[s_{i-1}, s_i]$ y $[s_i, s_{i+1}]$ tuviesen ambos sus imágenes contenidas en A o ambas imágenes contenidas en B, luego podemos eliminar el punto intermediario s_i). De esta forma obtenemos $f(s_i) \in A \cap B$ para todo $i = 1, \ldots, k,\ k \in \mathbb{N},\ k$ finito.

Luego, como $A \cap B$ es conexo por caminos, podemos unir x_0 con cada $f(s_i) = x_i$ por un camino c_i cuya imagen está contenida en $A \cap B$. Podemos considerar caminos; $c_1, c_2, \ldots, c_k : [0, 1] \to A \cap B$ tales que $c_i(0) = x_0$ y $c_i(1) = f(s_i) = x_i$.

Graficamente,



Representamos el camino $f_i = f_{|_{[s_{i-1}, s_i]}}$.

Así tenemos que,

$$f \simeq (f_1 c_1^{-1})(c_1 f_2 c_2^{-1})(c_2 f_3 c_3^{-1}) \cdots (c_{k-1} f_{k-1} c_k^{-1})(c_k f_k), \quad k \text{ finito}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$f \simeq \beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots \beta_{k-1} \beta_k$$

el lazo f es homotópico a la concatenación de los lazos β_i, donde cada $\beta_i, i = 1, \ldots, k$, k finito, $k \in \mathbb{N}$ es un lazo contenido en A o en B.

Así, hemos visto que si X es la unión de dos conjuntos abiertos conexos por caminos A, B; cuya intersección $A \cap B$ también es conexa por caminos, entonces todo lazo $f \in \pi_1(X, x_0)$ puede ser expresado como el producto de lazos β_i, $i = 1, \ldots, k$, k finito, $k \in \mathbb{N}$:

$$f = \beta_1 \cdots \beta_k$$

donde cada lazo β_i está en uno de los subgrupos,

$$i_*(\pi_1(A, x_0)) \text{ o en } j_*(\pi_1(B, x_0)).$$

Es decir, el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es generado por las "imágenes de los homomorfismos inducidos $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ y $j_* : \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$."

Sin embargo esto no basta para caracterizar el grupo fundamental, $\pi_1(X, x_0)$, completamente, ya que esta representación en general no es única. Por ejemplo, el elemento neutro $e_{x_0} \in \pi_1(X, x_0)$ puede ser expresado como $e_{x_0} = \beta_1 \cdots \beta_k$, para diferentes elecciones de $\beta_1, \ldots, \beta_k$, k finito, $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, para conocer el $\pi_1(X, x_0)$ precisamos saber exactamente cuáles son esas elecciones.

Caracterización:

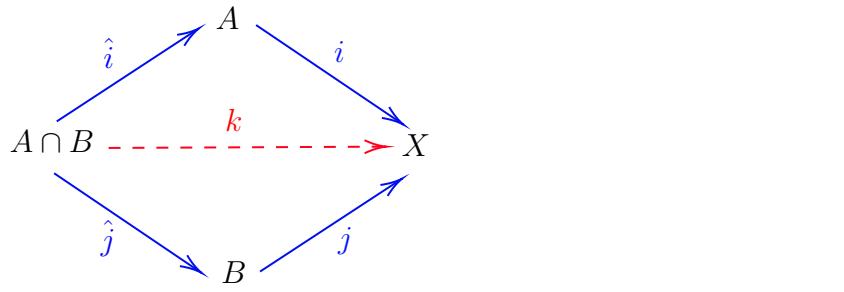
Como todo lazo en X puede ser expresado como un producto de lazos, cada uno de los cuales está en A o en B, así entonces un lazo representa un elemento del producto libre $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$. Pero cualquier lazo en $A \cap B$ representará un solo elemento de $\pi_1(X, x_0)$, aunque represente dos elementos distintos del producto libre, uno en $\pi_1(A, x_0)$ y otro en $\pi_1(B, x_0)$. Así el grupo fundamental de X puede pensarse como el cociente de este producto libre módulo algunas relaciones procedentes de $\pi_1(A \cap B, x_0)$ que expresan esta redundancia.

Veamos:

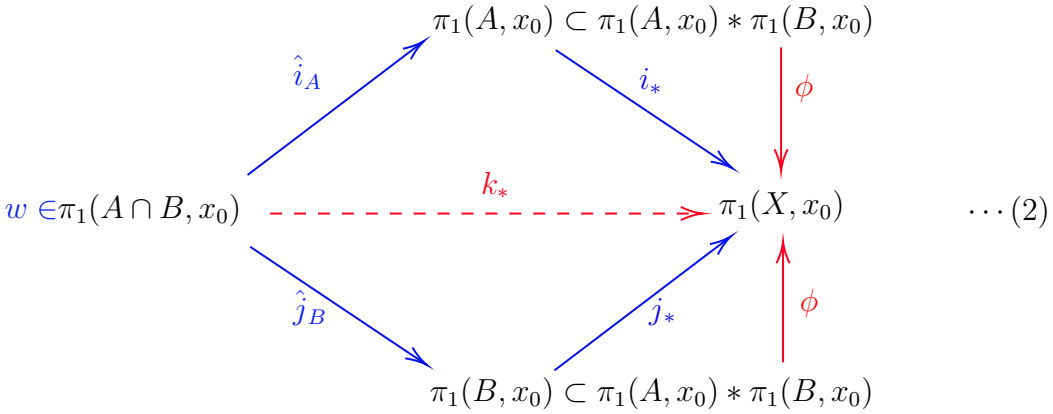
Sean las aplicaciones de inclusión, $i : A \to X$, $j : B \to X$, $k : A \cap B \to X$, $\hat{i} : A \cap B \to A$, $\hat{j} : A \cap B \to B$ las cuales inducen los respectivos homomorfismos de grupos fundamentales: "$i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, $j_* : \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, $k_* : \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, $\hat{i}_A : \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$,

$\hat{j}_B : \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(B, x_0)$."

Consideremos los siguientes diagramas:



$\cdots (1)$



$\cdots (2)$

Sea "$\phi : \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ el homomorfismo del producto libre que extiende los homomorfismos i_* y j_* inducidos por la inclusión. Veamos entonces que ϕ es sobreyectiva y su núcleo es el menor subgrupo normal N del producto libre que contiene todos los elementos representados por elementos de la forma:"

$$\hat{i}_A(w)^{-1}\hat{j}_B(w) \text{ para } w \in \pi_1(A \cap B, x_0).$$

En otras palabras, el núcleo de ϕ está generado por todos los elementos del producto libre de la forma $\hat{i}_A(w)^{-1}\hat{j}_B(w)$ y sus conjugados.

- ϕ es sobreyectiva, pues $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de i_* y j_* y por (1), $[f]$ está en la imagen de ϕ.
- Probemos que $N \subset \text{Ker}\phi$.

  Como Kerϕ es normal, entonces es suficiente probar que $\hat{i}_A(w)^{-1}\hat{j}_B(w) \in \text{Ker}\phi$ para todo $w \in \pi_1(A \cap B, x_0)$.

Por otro lado, por propiedad de grupos libres tenemos:

$$\pi_1(A, x_0) \subset \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \text{ y}$$
$$\pi_1(B, x_0) \subset \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$$

Ver Munkres, pag 478.

Ahora de los diagramas (1) y (2):
Si $k : A \cap B \to X$ es la aplicación inclusión, entonces

$$\phi\hat{i}_A(w) = i_*\hat{i}_A(w) = k_*(w) = j_*\hat{j}_B(w) = \phi\hat{j}_B(w)$$

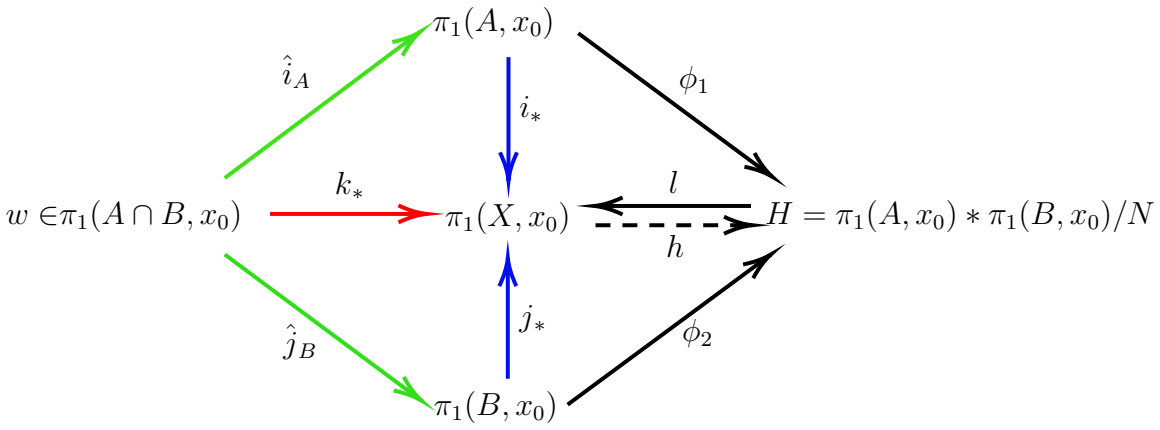
Así, $\widehat{i_A}(w)^{-1}\widehat{j_B}(w) \in \text{Ker}\phi$.
Luego veremos que ϕ induce un epimorfismo

$$l : \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)/N \to \pi_1(X, x_0).$$

Probaremos que $N = \text{Ker}\phi$, demostrando que l es inyectivo. Para ello sera suficiente con probar que l posee una inversa por la izquierda.

"Sea H el grupo $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)/N$. Definamos $\phi_1 : \pi_1(A, x_0) \to H$ igual a la inclusión de $\pi_1(A, x_0)$ en el producto libre compuesta con la proyección del producto libre en su cociente con N. Sea $\phi_2 : \pi_1(B, x_0) \to H$ la aplicación definida de modo análogo."

Consideremos el diagrama



Veamos que $\phi_1 \circ \hat{i}_A = \phi_2 \circ \hat{j}_B$.

Si $w \in \pi_1(A \cap B, x_0)$ entoces $\phi_1(\hat{i}_A(w))$ es la clase $\hat{i_A}(w)N$ en H, y $\phi_2(\hat{j}_B(w))$ es la clase $\hat{j_B}(w)N$ en H.

Como $\hat{i}_A(w)^{-1}\hat{j}_B(w) \in N$, las clases son iguales Luego si $\phi_1 \circ \hat{i}_A = \phi_2 \circ \hat{j}_B$, entonces existe un único homomorfismo "$h : \pi_1(X, x_0) \to H$ tal que $h \circ i_* = \phi_1$ y $h \circ j_* = \phi_2$. Probaremos que h es un inverso por la izquierda de l. Será suficiente demostrar que $h \circ l$ actúa como el elemento neutro sobre cualquier generador de H, esto es, sobre cualquier clase de la forma wN, donde $w \in \pi_1(A, x_0)$ o $w \in \pi_1(B, x_0)$.

Ahora si $w \in \pi_1(A, x_0)$, tenemos:"

$$l(wN) = \phi(w) = i_*(w)$$

entonces

$$h(l(wN)) = h(i_*(w)) = \phi_1(w) = wN$$

y si $w \in \pi_1(B, x_0)$, tenemos

$$l(wN) = \phi(w) = j_*(w)$$

entonces

$$h(l(wN)) = h(j_*(w)) = \phi_2(w) = wN$$

Por lo tanto, así queda completamente determinado el grupo fundamental de X, $\pi_1(X, x_0)$ por estos dos subgrupos $\pi_1(A, x_0)$ y $\pi_1(B, x_0)$, el grupo $\pi_1(A \cap B, x_0)$ y los homomorfismos entre estos subgrupos inducidos por la inclusión.

□

3.4. Aplicaciones del teorema de Seifert Van Kampen

3.4.1. El grupo fundamental del toro

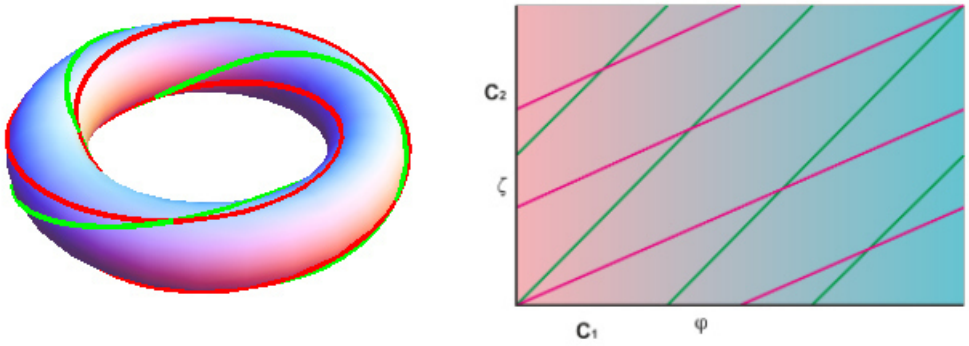
Un toro es un objeto con la forma de un neumático. Lo designaremos por $\mathbb{T}$. En matemáticas se define como el resultado de girar en el espacio una circunferencia

que, tomando coordenadas convenientes, podemos suponer que es

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - R)^2 + z^2 = r, y = 0\}$$

alrededor del eje de las $x = 0 = y$. Esto es, los puntos con coordenadas (x, y, z) para todos los valores de los ángulos ζ y φ.

Sobre el toro podemos dibujar muchos caminos cerrados pero es dificil visualizar su posición relativa.



Para visualizar los caminos con mas facilidad vamos a hacer lo siguiente. Cortamos por las líneas correspondientes a $\varphi = 0$ y a $\zeta = 0$:

$$C_1 = \{((R + r)\cos\zeta, (R + r)\,\mathrm{sen}\,\zeta, 0)\}, \quad C_2 = \{(R + r\cos\varphi, 0, R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\}$$

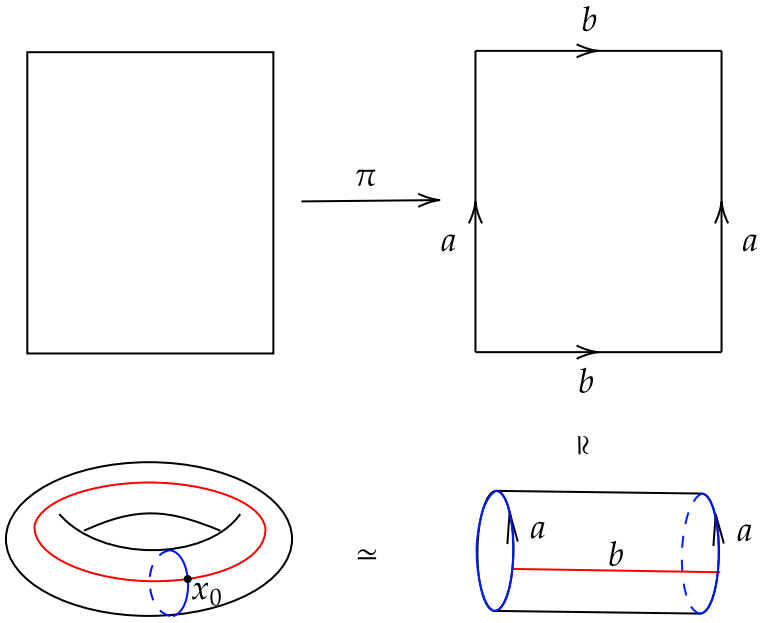
y lo aplanamos. Esto equivale a designar los puntos por sus parámetros ángulo, en el retángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, teniendo en cuenta que los puntos con una de las coordenadas 0 son el mismo que con esa coordenada 2π:

$$(\varphi, 0) = (\varphi, 2\pi), \quad (0, \zeta) = (2\pi, \zeta)$$

En particular, los cuatro vétrices son el mismo punto. El número de veces que un camino corta a $C_1(\zeta = 0)$ es el número de vueltas que da φ, es decir vueltas al agujero interior. φ se llama ángulo poloidal, y las vueltas que da son las vueltas poloidales. Análogamente, el número de veces que un camino corta a $C_2(\varphi = 0)$ es el número de vueltas que da ζ, es decir vueltas al orificio exterior. ζ se llama ángulo toroidal, y las vueltas que da son las vueltas toroidales.

Proposición 3.18. *"El grupo fundamental del toro* $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ *es isomorfo al grupo* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*."*

Prueba. Vamos a representar al toro $\mathbb{T}$ mediante una región cuadrada de lados opuestos a y b, identificando estos lados con las circunferencias descritas anteriormente C_1 y C_2 que se intersectan en el punto x_0, el cual tomaremos como punto base de nuestros grupos fundamentales.Ver Munkres, pag 509.



Sea y un punto interior del cuadrado. Consideremos los siguientes conjuntos abiertos; conexos por caminos,

$$A = \mathbb{T} - \{y\}, \quad B = \mathbb{T} - \{a \cup b\} \quad \text{y} \quad A \cap B = \mathbb{T} - (a \cup b \cup \{y\})$$

los cuales son un cubrimiento del cuadrado, es decir del toro, ya que lo estamos identificando con el cuadrado y además son imágenes de aplicaciones sobreyectivas de un espacio topológico conexo por caminos.

Así el toro $\mathbb{T}$ va a tener dos generadores α, β que vendrían a ser los lazos descritos por las circunferencias C_1 y C_2, entonces el grupo fundamental del toro va a depender de la clase de homotopía de estos lazos α, β con punto base x_0, que son contraibles a x_0.

Tenemos:

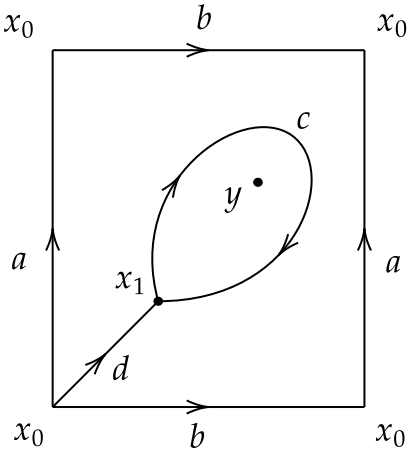
$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} \simeq e, \quad e \text{ lazo identidad}$$
$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} = e \quad \text{entonces } \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$
$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} \cdot \beta = \beta$$
$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha = \beta\alpha$$

Así tenemos un grupo de dos generadores α, β del toro que conmutan.

Ahora, sea $x_1 \in A \cap B$ y apliquemos el teorema de Seifert Van Kampen:

Como $\psi_1 : \pi_1(A, x_1) \to \pi_1(\mathbb{T}, x_1)$ es un epimorfismo y $\text{Ker}\psi_1 = \overline{\langle \varphi_1(\pi_1(A \cap B)) \rangle}$, donde $\varphi : \pi_1(A \cap B, x_1) \to \pi_1(A, x_1)$ y además la unión de las circunferencias C_1 y C_2 es un retracto de deformación de A entonces $\pi_1(A, x_0) = F(\alpha, \beta)$

donde α, β son clases de lazos determinados por a y b.



Si $d : [0, 1] \to A$ es un camino de x_0 a x_1 en A y $\delta = [d]$ entonces

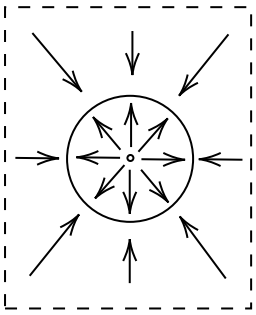
$$\pi_1(A, x_1) = F(\alpha', \beta')$$

donde $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$ y $\beta' = \delta^{-1}\beta\delta$, pues por el ejemplo 2.19 $d_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(A, x_1)$ tal que $d_*[\sigma] = [d^{-1}\sigma d]$ es un isomorfismo.

"Por otro lado, una circunferencia es un retracto de deformación de $A \cap B$ luego $\pi_1(A \cap B) = \mathbb{Z}$ está generado por $\gamma = [c]$ donde c es un lazo que da exactamente

una vuelta alrededor del punto y (ver figura siguiente). Ver Munkres pag 392. Ahora afirmamos que

$$\varphi_1(\gamma) = \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}\text{»}$$



pues por propiedad asociativa de clases de homotopía, tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\gamma) &= \varphi_1([c]), \quad [c] \in \pi_1(A \cap B, x_1) \\
&= [c] \in \pi_1(A, x_1) \\
&= [d^{-1}aba^1b^{-1}d] \\
&= [d^{-1}add^{-1}bdd^{-1}a^{-1}dd^{-1}b^{-1}d] \\
&= [d^{-1}ad][]d^{-1}bd][d^{-1}a^{-1}d][d^{-1}b^{-1}d] \\
&= \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}
\end{aligned}$$

y como γ genera a $\pi_1(A \cap B, x_1)$ entonces $[\sigma] \in \pi_1(A \cap B, x_1)$ entonces $[\sigma] = \gamma^m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\varphi_1([\sigma]) = \varphi_1(\gamma^m) = \varphi_1(\gamma)^m = (\alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1})^m$$

es decir

$$\varphi_1(\pi(A \cap B, x_0)) = \langle \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1} \rangle$$

luego

$$\overline{\varphi_1(\pi(A \cap B, x_0))} = \overline{\langle \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1} \rangle}$$

y entonces por caracterización del teorema 3.17 $\pi_1(\mathbb{T}, x_1) = F(\alpha', \beta')/\overline{\langle \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1} \rangle}$.

Cambiando al punto base x_0 vamos a probar que

$$\pi_1(\mathbb{T}, x_0) = F(\alpha, \beta)/\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \rangle}$$

en efecto, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, x_1) & \xrightarrow{\psi_1} & \pi_1(\mathbb{T}, x_1) \\ d_*^{-1}\downarrow\simeq & & d_*^{-1}\downarrow\simeq \\ \pi_1(A, x_0) & \xrightarrow[\psi_1']{} & \pi_1(\mathbb{T}, x_0) \end{array}$$

pues si $[\sigma] \in \pi_1(A \cap B, x_1)$ entonces

$$\psi_1' \circ d_*^{-1}([\sigma]) = \psi_1'([d\sigma d^{-1}]) = [d\sigma d^{-1}]$$

y

$$d_*\psi_1([\sigma]) = d_*([\sigma]) = [d\sigma d^{-1}]$$

pues ψ_1 y ψ_i' son inducidas por las inclusiones. Esto induce el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, x_1)/ker\ \psi_1 & \xrightarrow{\overline{\psi_1}} & \pi_1(\mathbb{T}, x_1) \\ \overline{d_*^{-1}}\downarrow\simeq & & \overline{d_*^{-1}}\downarrow\simeq \\ \pi_1(A, x_0)/ker\ \psi_1 & \xrightarrow[\overline{\psi_1'}]{} & \pi_1(\mathbb{T}, x_0) \end{array}$$

entonces

$$ker\psi_1' = d_*^{-1}(ker\psi_1)$$

pues si $[\sigma] \in ker\psi_1'$ entonces $\psi_1'[\sigma] = 1$ y "por la conmutatividad del diagrama, $d_*^{-1} \circ \psi_1 \circ d_*[\sigma] = 1$ entonces $\psi_1(d_*[\sigma]) = 1$ así $d_*[\sigma] \in ker\psi_1$ y $[\sigma] \in d_*^{-1}(ker\psi_1)$. Recíprocamente, si $[\sigma] \in d_*^{-1}(ker\psi_1)$ entonces $\psi_1(d_*[\sigma]) = 1$ y luego $\psi_1'[\sigma] = d_*^{-1} \circ \psi_1 \circ d_*[\sigma] = d_*^{-1}(1) = 1$ entonces $[\sigma] \in ker\psi_1'$."

Dado que $ker\psi_1 = \overline{\langle \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}\rangle}$ tenemos que

$$\begin{aligned} ker\psi_1' &= d_*^{-1}\left(\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}\right) \\ &= \overline{\langle d_*^{-1}(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})\rangle} \\ &= \overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\pi_1(\mathbb{T}, x_0) = F(\alpha,\beta)/ker\psi_1' = F(\alpha,\beta)/\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$$

Ahora probaremos que $F(\alpha,\beta)/\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$ es abeliano. Es suficiente probarlo para los generadores $\overline{\alpha} = \alpha\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$ y $\overline{\beta} = \beta\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$. Tenemos que

$$\alpha\beta(\beta\alpha)^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in \overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$$

entonces

$$\overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta} = \overline{\beta\alpha} = \overline{\beta}\overline{\alpha}$$

"por lo tanto $F(\alpha,\beta)/\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$ es abeliano, y ya que $[F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$ es el menor subgrupo normal de $F(\alpha,\beta)$ que hace abeliano al cociente tenemos que

$$[F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)] \subset \overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}"$$

y por otra parte, $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in [F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$ y como $\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle}$ es el menor subgrupo normal que contiene a $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ tenemos que

$$\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle} \subset [F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$$

y por lo tanto

$$\overline{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle} = [F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$$

entonces

$$\pi_1(\mathbb{T}, x_0) = F(\alpha,\beta)/[F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$$

y así $F(\alpha,\beta)/[F(\alpha,\beta), F(\alpha,\beta)]$ es un grupo abeliano libre de dos generadores y por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y entonces

$$\pi_1(\mathbb{T}, x_0) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

□

3.4.2. El grupo fundamental del plano proyectivo

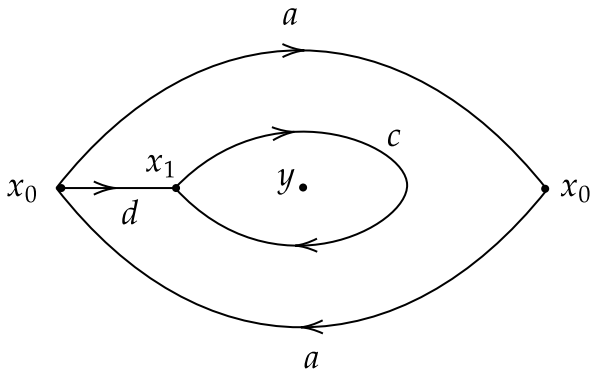
Proposición 3.19. *"El grupo fundamental del plano proyectivo real P_2 es el grupo cíclico de orden 2, $\mathbb{Z}_2$."*

Prueba. Vamos a considerar el plano proyectivo real P_2 mediante una región poligonal de dos ejes, identificando estos ejes con semicircunferencias del disco unidad y uniendo los puntos antípodas del borde del disco.

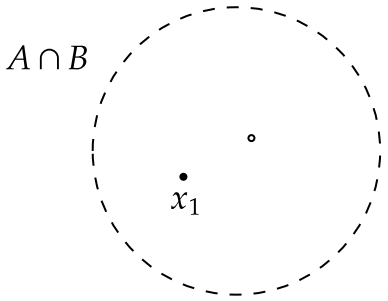
El eje a va a ser identificado con una circunferencia con x_0 sobre esta. (Ver Munkres pag. 509). Sea y el centro de la región poligonal. Consideremos los conjuntos abiertos:

$$A = P_2 - \{y\}, \quad B = P_2 - \{a\}, \quad \text{y} \ \ A \cap B = P_2 - (a \cup \{y\}),$$

los cuales son un cubrimiento de la región poligonal, es decir del plano proyectivo real; pues tenemos que $\{y\}$ es cerrado en P_2 entonces A es abierto en P_2 y por otro lado, como la circunferencia a es un conjunto compacto en P_2, luego es cerrado en P_2, entonces B es abierto en P_2 y también B es simplemente conexo ya que es homeomorfo a un disco abierto.



Sea $x_1 \in A \cap B$ entonces se cumplen las hipótesis del teorema de Seifert Van Kampen, A, B son abiertos y conexos por caminos en P_2, $P_2 = A \cup B$, $x_1 \in A \cap B$ con B simplemente conexo.



La circunferencia a es un retracto de deformación de A, así que $\pi_1(A, x_0)$ es un grupo cíclico infinito generado por $\alpha = [a]$. Sea $d : [0, 1] \to A$ un camino de x_0 a x_1 y sea $\delta = [d]$ entonces por el ejemplo 2.19 $d_* : \pi(A, x_0) \simeq \pi(A, x_1) = F(\alpha')$ con $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$.

"Finalmente, $\pi_1(A \cap B, x_1)$ es un grupo cíclico infinito generado por la clase $\gamma = [c]$ de un lazo c que rodea al punto y exactamente una vez, pues la imagen de c es un retracto de deformación de $A \cap B$, además por la figura anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\gamma), \gamma =& [c] \in \pi_1(A \cap B, x_1)" \\
&= [c] \in \pi_1(A, x_1) \\
&= [d^{-1}aad] \\
&= [d^{-1}add^{-1}ad] \\
&= [d^{-1}ad][d^{-1}ad] \\
&= (\delta^{-1}\alpha\delta)(\delta^{-1}\alpha\delta) \\
&= \alpha'^2
\end{aligned}$$

y como γ genera a $\pi_1(A \cap B, x_1)$ significa que si $[\sigma] \in \pi_1(A \cap B, x_1)$ es cualquier elemento arbitrario entonces $[\sigma] = \gamma^m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Así

$$\varphi_1[\sigma] = \varphi_1(\gamma^m) = \varphi_1(\gamma)^m = (\alpha'^2)^m$$

y entonces

$$\varphi_1(\pi(U \cap V, x_1)) = \langle \alpha'^2 \rangle$$

además como $\langle \alpha' \rangle$ es abeliano y $\langle \alpha'^2 \rangle$ es un subgrupo de $\langle \alpha' \rangle = \pi_1(A, x_1)$ que contiene a $\mathrm{Im}\varphi_1$ es el subgrupo generado por (α'^2), es decir,

$$\overline{\langle \varphi_1(\pi(U \cap V, x_1)) \rangle} = \overline{\langle \alpha'^2 \rangle}$$

y ahora por la caracterización del teorema 3.17

$$\pi_1(P_2, x_1) = \langle \alpha' \rangle / \langle \alpha'^2 \rangle$$

Haciendo un cambio de punto base como en el caso del toro tenemos que

$$\text{“}\pi_1(P_2, x_0) \simeq \langle \alpha \rangle / \langle \alpha^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2\text{.”}$$

□

Capítulo 4

Conclusiones

- Mediante la teoría de homotopía pudimos ver como dos aplicaciones continuas son homotópicas, es decir como una aplicación puede ser deformada en otra de forma continua. Notemos que las homotopías no son únicas, ya que pueden haber diferentes maneras de deformar una aplicación en otra

- La propiedad más importante de los lazos es que se pueden concatenar uno a continuación del otro, dando origen al producto de lazos. Así, el conjunto de las clases de homotopía asociadas a estos lazos basados en $x_0 \in X$, X espacio topológico con este producto es un grupo que se denomina grupo fundamental de X.

- El primer grupo de homotopía que es el grupo fundamental nos da información sobre las familias de curvas cerradas en un espacio.

- El Teorema de Seifert Van Kampen expresa la estructura del grupo fundamental de un espacio topológico X, respecto de los grupos fundamentales de dos subespacios abiertos y conexos por caminos $A, B \subset X$ que recubren X; por lo tanto podemos utilizar este teorema para obtener el grupo fundaamental de espacios construibles a partir de espacios más sencillos.

Bibliografía

[1] Aguilar, M., Gitler, S., Prieto, C. (2008). Algebraic topology from a homotopical viewpoint. Springer Science Business Media.

[2] Hatcher, A. (2005). Algebraic topology.

[3] García, A. A. (1985). El grupo fundamental. Sigma, (4), 7-16.

[4] Massey, W. S. (1982). Introducción a la topología algebraica. Reverté.

[5] Munkres, J. R. (2000). Topology (A first course) Prentice Hall Inc.

[6] Lima, E. L. (2003). Fundamental groups and covering spaces (Vol. 63). Natick, MA: AK Peters.

[7] Stadler, M. M. (2005). Topología Algebraica.

[8] Zisman, M., Ros, E. R. (1979). Topología algebraica elemental. Paraninfo.

[9] Armstrong, M. A. (1987). Topología Básica, Editorial Reverté.

[10] Kosniowski, C. (2021). Topología algebraica. Reverté.

[11] Dugundji, J. (1966). Topology, Series in advanced mathematics. Boston: Allyn and Bacon, Inc, 16, 447.

[12] Kelley, J. L. (1991). General Topology (Graduate Texts in Mathematics Series, Vol. 27).

[13] Euler, L. (2002). Marta Macho Stadler.

[14] Stadler, M. M. (2002). Topología General. Managua: Facultad de Ciencia y.