Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

La forma canónica de Jordán y algunas de sus aplicaciones

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

David Fausto MONDALGO HUAMÁN

ASESOR

Dr. Carlos Alberto PEÑA MIRANDA

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Mondalgo, D. (2025). *La forma canónica de Jordán y algunas de sus aplicaciones*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Matemáticas]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	David Fausto Mondalgo Huamán
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	71515888
URL de ORCID	
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10699143
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-4339-4615
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Rodolfo José Gálvez Perez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09459126
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Alex Armando Cruz Huallpara
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	40949706
Datos de investigación	
Línea de investigación	Optimización

Grupo de investigación	METNUM
Agencia de financiamiento	Ninguna
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024-2025
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Virtual)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 15:00 horas del jueves 15 de mayo del 2025, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Rodolfo Jose Gálvez Perez (PRESIDENTE), Dr. Alex Armando Cruz Huallpara (MIEMBRO) y el Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada ***: "LA FORMA CANÓNICA DE JORDÁN Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"*** *presentado por el señor Bachiller* ***David Fausto Mondalgo Huamán****, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ***Sobresaliente*** *con un calificativo promedio de* ***diecisiete (17)****.*

A continuación, el Presidente del Jurado, Mg. Rodolfo Jose Gálvez Perez, manifestó que el señor Bachiller David Fausto Mondalgo Huamán, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 16:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Mg. Rodolfo Jose Gálvez Perez
PRESIDENTE

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara
MIEMBRO

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
MIEMBRO ASESOR

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Carlos Alberto Peña Miranda en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N.º 001439-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis académico, cuyo título es "**LA FORMA CANÓNICA DE JORDÁN Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES**", presentado por el bachiller Sr. David Fausto Mondalgo Huamán, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 13% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y **para su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.



Dr. Carlos Alberto PEÑA MIRANDA

DNI: 10699143

Dedicatoria

A mis amados padres, Tereza Huamán y Faustino Mondalgo, quienes con su amor, esfuerzo y dedicación hicieron posible que hoy alcance esta meta.

Gracias por ser mi inspiración, por cada sacrificio silencioso y por enseñarme que con perseverancia y valentía no hay sueños imposibles. Esta tesis es un reflejo de su apoyo incondicional y mi más sincero agradecimiento por todo lo que han hecho por mí.

Con todo mi cariño, para ustedes.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a Dios por darme la fortaleza y la perseverancia para culminar esta etapa de mi vida.

A mi familia, por su amor incondicional y su apoyo en cada paso de este camino. En especial, a mis hermanos, quienes han estado siempre a mi lado, brindándome su aliento y compañía. De manera muy especial, quiero expresar mi gratitud a mis hermanos Virgilio Mondalgo y Hercilio Mondalgo, cuyo respaldo ha sido fundamental para alcanzar esta meta.

Asimismo, expreso mi más sincero agradecimiento a mi asesor de tesis, el Dr. Carlos Alberto Peña Miranda, por su paciencia, dedicación y por compartir generosamente su vasto conocimiento. Su orientación ha sido clave en este proceso, y sus enseñanzas quedarán como un legado valioso en mi formación profesional y personal.

A todos los que, de una u otra forma, han sido parte de este logro, les extiendo mi más sincera gratitud.

Índice general

Dedicatoria **i**

Agradecimientos **ii**

Resumen **iv**

Abstract **v**

Introducción **1**

1. La forma canónica de Jordan **2**

1.1. Valores propios y vector propios 2

1.2. Matrices semejantes y diagonalización 6

1.3. Vectores propios generalizados 9

1.4. Bloques de Jordan 19

1.5. Teorema de la forma canónica de Jordan 21

2. Aplicaciones de la forma canónica de Jordán **25**

2.1. Matrices no diagonalizables 25

2.2. Potencia de matrices 34

2.3. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales 41

2.4. Descomposición espectral de matrices 49

Conclusión **57**

Referencias bibliográficas **58**

RESUMEN

LA FORMA CANÓNICA DE JORDÁN Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

DAVID FAUSTO MONDALGO HUAMÁN

Asesor : Dr. Carlos Alberto Peña Miranda.

Título Obtenido : Licenciado en Matematica.

Esta tesis tiene como objetivo demostrar la forma canónica de Jordán, un resultado fundamental del álgebra lineal que proporciona una representación estructurada de matrices que no son diagonalizables. A lo largo del trabajo se desarrolla una demostración detallada del Teorema de la forma canónica de Jordán, a partir del estudio de los vectores propios generalizados y de las cadenas cíclicas de Jordán. Finalmente, se presentan diversos ejemplos que ilustran aplicaciones de esta forma canónica, tales como el tratamiento de matrices no diagonalizables, el cálculo de potencias de matrices, la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y la descomposición espectral de una matriz. Estos ejemplos evidencian la relevancia y utilidad del teorema en contextos prácticos, particularmente en áreas como la ingeniería y las ciencias básicas.

Palabras clave: forma canónica de Jordán, vectores propios generalizados, cadenas de Jordán, matrices no diagonalizables.

ABSTRACT

THE JORDAN CANONICAL FORM AND SOME OF ITS APPLICATIONS

DAVID FAUSTO MONDALGO HUAMÁN

Advisor : Dr. Carlos Alberto Peña Miranda.

Obtained Title : Degree in Mathematics.

This thesis aims to demonstrate the Jordan canonical form, a fundamental result in linear algebra that provides a structured representation of non-diagonalizable matrices. Throughout the work, a detailed proof of the Jordan canonical form theorem is developed, based on the study of generalized eigenvectors and Jordan chains. Finally, several examples are presented to illustrate applications of this canonical form, such as the treatment of non-diagonalizable matrices, the computation of matrix powers, the solution of systems of linear differential equations, and the spectral decomposition of a matrix. These examples highlight the theorem's relevance and usefulness in practical contexts, particularly in fields such as engineering and the basic sciences.

Key words: Jordan canonical form, generalized eigenvectors, Jordan chains, non-diagonalizable matrices.

Introducción

El álgebra lineal es una rama fundamental de las matemáticas, cuyas aplicaciones abarcan diversas disciplinas dentro de las ciencias y la ingeniería. Uno de los resultados más significativos en este campo es el Teorema de la forma canónica de Jordan, formulado por el matemático francés Camille Jordan (1838-1922), quien desarrolló esta teoría para resolver el problema de las matrices que no pueden ser diagonalizadas. La forma canónica de Jordan juega un papel crucial en el análisis de la estructura interna de las matrices, especialmente en aquellos casos en los que la diagonalización no es posible.

Esta tesis tiene como objetivo demostrar la forma canónica de Jordan y ofrecer una ilustración detallada de sus aplicaciones prácticas. A través de diversos ejemplos, se busca resaltar la relevancia y utilidad del teorema en varias áreas de las matemáticas y las ciencias aplicadas.

El trabajo se divide en tres capítulos. El primer capítulo está dedicado a la demostración formal del teorema de la forma canónica de Jordan, donde se desarrollan conceptos clave para su comprensión, como los vectores propios generalizados y las cadenas cíclicas de Jordan. En el segundo capítulo, se presentan ejemplos que ilustran las aplicaciones prácticas del teorema, tales como matrices no diagonalizables, el cálculo de potencias de matrices, la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y la descomposición espectral de matrices. Finalmente, el tercer capítulo presenta las conclusiones de la tesis, resumiendo los resultados obtenidos y destacando sus aplicaciones en diversos campos del conocimiento.

Capítulo 1

La forma canónica de Jordan

En este capítulo se presentan algunos resultados sobre vectores propios generalizados y cadenas de Jordan, los cuales serán fundamentales para la demostración del Teorema de la forma canónica de Jordan. Para más detalles sobre estos conceptos, se puede consultar Lancaster y Tismenetsky (1985), Grossman y Godoy (2012), Costa (2012) y Hoffman y Kunze (1973).

1.1. Valores propios y vector propios

Definición 1.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Decimos que un vector $v \in \mathbb{C}^n$, con $v \neq 0$, es un vector propio de A si existe un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que se cumple la ecuación*

$$Av = \lambda v.$$

El valor $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisface esta ecuación se denomina valor propio de A.

Ejemplo 1.1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se verifica que

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v.$$

Esto demuestra que $\lambda = 3$ es un valor propio de A y que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es el vector propios correspondiente.

Observación 1.1. Si λ es valor propio de A, entonces existe un vector $x \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Esto es equivalente a que el sistema

$$Ax = \lambda x$$

tiene una solución no trivial. A su vez, esto es lo mismo que decir que el sistema

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

tiene una solución no trivial. Finalmente, esto es equivalente a que

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Definición 1.2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. El polinomio característico de A, denotado $p_A(\lambda)$, se expresa como*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios distintos de A. A los números m_i se les conoce como la multiplicidad algebraica de λ_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Además, se cumple que

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

Ejemplo 1.2. Encontrar los valores propios y sus correspondientes vectores propios para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Comenzamos calculando los valores propios de la matriz A. El polinomio característico $p(\lambda)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$$

Por lo tanto, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $m_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 1$.

A continuación, determinamos los vectores propios correspondientes a cada valor propio.

Para $\lambda_1 = 1$:

Queremos encontrar el vector propio v tal que $v \in \mathbb{C}^{3\times 1}$, lo cual implica resolver el sistema:

$$(A - I)v = 0$$

donde $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. El sistema se expresa como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos la ecuación:

$$y + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -2z$$

Por lo tanto, el vector propio v se expresa como:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$$

Luego, dos vectores propios sería:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$:

A continuación, queremos encontrar el vector propio v_3 tal que $v_3 \in \mathbb{C}^{3\times 1}$, resolviendo el sistema:

$$(A - 3I)v_3 = 0$$

donde $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. El sistema se expresa como:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema da lugar al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$-2x + y + 2z = 0, \quad -2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, \quad x = z$$

Por lo tanto, el vector propio v_3 se expresa como:

$$v_3 = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Tomando $z = 1$, obtenemos el único vector correspondiente a λ_2:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, y los vectores propios asociados son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ para λ_1 y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para λ_2.

Proposición 1.1. *(Grossman, 2012) Sea λ un valor propio de la matriz A, y definamos el conjunto*

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v\}.$$

Entonces, E_λ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$, y se denomina espacio propio asociado al valor propio λ.

Ejemplo 1.3. Para el ejemplo 1.2, los espacios propios son

$$E_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para}\, \lambda_1 = 1$$

y

$$E_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para}\, \lambda_2 = 3.$$

Definición 1.3. *Sea λ un valor propio de la matriz A; entonces, la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del espacio propio asociado a λ, es decir,*

$$r_\lambda := \textit{multiplicidad geométrica de } \lambda = \textit{dim}(E_\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I).$$

Ejemplo 1.4. Del ejemplo 1.3, la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ es $r_1 = 2$ y la de $\lambda_2 = 3$ es $r_2 = 1$, respectivamente.

1.2. Matrices semejantes y diagonalización

Definición 1.4. *Se dice que dos matrices A y B de orden $n \times n$ son semejantes si existe una matriz invertible C de orden $n \times n$ tal que*

$$B = C^{-1}AC.$$

Ejemplo 1.5. Consideremos las matrices A y B de orden 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Queremos demostrar que A y B son semejantes. Para ello, buscaremos una matriz invertible C tal que $B = C^{-1}AC$.

Supongamos que la matriz C es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la inversa de C:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, verificamos si $B = C^{-1}AC$:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = B.$$

Por lo tanto, A y B son semejantes.

Observación 1.2. La función definida por

$$T(A) = B = C^{-1}AC$$

es una transformación lineal llamada transformación de semejanza.

En efecto, sean A y D matrices de orden n y $\lambda \in \mathbb{C}$. Se tiene que

$$T(A + D) = C^{-1}(A + D)C = C^{-1}AC + C^{-1}DC = T(A) + T(D)$$

y

$$T(\lambda A) = C^{-1}(\lambda A)C = \lambda\left(C^{-1}AC\right) = \lambda T(A).$$

Definición 1.5. *Una matriz A de tamaño $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.*

El siguiente teorema establece una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada de orden n sea diagonalizable.

Teorema 1.1. *(Grossman, 2012) Una matriz A de orden n es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por:*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A. Si C es una matriz cuyas columnas son vectore propios linealmente independientes de A, entonces:

$$D = C^{-1}AC$$

Ejemplo 1.6. Del ejemplo 1.2, los vectores propios

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Además, construyendo la matriz C, cuyas columnas son los vectores propios de A, obtenemos:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa de C es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora verificamos que $D = C^{-1}AC$. Entonces:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

que es la matriz cuyas componentes en la diagonal son los valores propios de A.

El siguiente teorema establece un criterio para determinar si una matriz A es diagonalizable:

Teorema 1.2. *Una matriz A es diagonalizable si, y solo si, la suma de las multiplicidades algebraicas de sus valores propios es igual a n, y para cada valor propio, su multiplicidad algebraica coincide con su multiplicidad geométrica.*

Ejemplo 1.7. Considera la siguiente matriz A de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A se obtiene de:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Es decir,

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es:

$$p(\lambda) = (4 - \lambda)^3$$

Esto nos da un único autovalor $\lambda = 4$ con multiplicidad algebraica $m_1 = 3$.

Ahora, encontramos los autovectores asociados a $\lambda = 4$ resolviendo:

$$(A - 4I)v = 0$$

Esto equivale a resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema da la ecuación:

$$y = 0$$

Por lo tanto, los autovectores asociados son de la forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, lo que implica que los autovectores linealmente independientes son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dado que la multiplicidad algebraica de $\lambda = 4$ es 3, pero la multiplicidad geométrica es solo 1, concluimos, según el teorema 1.2, que la matriz A *no es diagonalizable.*

1.3. Vectores propios generalizados

Consideremos una matriz A que no es diagonalizable. Según el teorema 1.2, se cumple que $r_i < m_i$; es decir, el número de vectores propios asociados a λ_i (la multiplicidad geométrica) es menor que su multiplicidad algebraica. En este caso, para determinar la forma canónica de Jordan, es necesario encontrar $m_i - r_i$ vectores adicionales, conocidos como *vectores propios generalizados.*

Definición 1.6. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un valor propio de A. Un vector $v \in V$ se llama un vector propio generalizado de A correspondiente a λ si $v \neq 0$ y*

$$(A - \lambda I)^j v = 0$$

para algún entero positivo j.

Ejemplo 1.8. Considere la matriz A definida como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz A se obtiene como:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

Así, el único valor propio es $\lambda = 2$, con multiplicidad algebraica $m_\lambda = 3$.

Calculamos ahora el núcleo de $A - 2I$:

$$(A-2I)v = 0 \quad \text{lo que implica} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad y = 0$$

Por lo tanto, los vectores propios asociados a $\lambda = 2$ son de la forma:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{con } x, z \in \mathbb{C},\ v \neq 0$$

Esto implica que:

$$\mathcal{N}(A-2I) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A continuación, calculamos la potencia cuadrada:

$$(A-2I)^2 = 0 \quad \text{lo que implica} \quad (A-2I)^2 v = 0 \quad \text{para todo } v \in \mathbb{C}^3$$

Por lo tanto, todo vector en $\mathbb{C}^3$ es un vector propio generalizado. En particular, el vector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pertenece a $\mathcal{N}\big((A-2I)^2\big)$, pero no a $\mathcal{N}(A-2I)$, por lo que es un *vector propio generalizado* asociado al valor propio $\lambda = 2$.

Teorema 1.3. *Sea A una matriz de orden $n \times n$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son valores propios distintos de A y $v_1, \ldots, v_m$ son los vectores propios generalizados correspondientes. Entonces, los vectores $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes.*

Demostración. Supongamos que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ son escalares tales que

$$0 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m. \tag{1.1}$$

Sea k el mayor entero no negativo tal que $(A - \lambda_1 I)^k v_1 \neq 0$. Definimos

$$w = (A - \lambda_1 I)^k v_1.$$

Entonces, se cumple que

$$(A - \lambda_1 I)w = (A - \lambda_1 I)^{k+1} v_1 = 0.$$

Por lo tanto, $Aw = \lambda_1 w$, es decir,

$$(A - \lambda I)w = (\lambda_1 - \lambda)w \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

De este modo, tenemos que

$$(A - \lambda I)^n w = (\lambda_1 - \lambda)^n w$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $n = \dim V$.
Aplicando el operador

$$(A - \lambda_1 I)^k (A - \lambda_2 I)^n \cdots (A - \lambda_m I)^n$$

a ambos lados de la ecuación (1.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 (A - \lambda_1 I)^k (A - \lambda_2 I)^n \cdots (A - \lambda_m I)^n v_1 \\ &= \alpha_1 (A - \lambda_2 I)^n \cdots (A - \lambda_m I)^n w \\ &= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2)^n \cdots (\lambda_1 - \lambda_m)^n w. \end{aligned}$$

La ecuación anterior implica que $\alpha_1 = 0$. De manera similar, se deduce que $a_j = 0$ para cada j. Por lo tanto, los vectores $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes. □

Definición 1.7. *Sea p el menor entero positivo tal que $(A - \lambda I)^p v = 0$. Entonces, la sucesión*

$$(A - \lambda I)^{p-1} v, (A - \lambda I)^{p-2} v, \ldots, (A - \lambda I)v, v$$

se denomina una cadena de Jordan de A de longitud p asociada a λ.

Observación 1.3. La definición 1.6 es equivalente al siguiente procedimiento:
Para obtener el primer vector propio generalizado v_1, se resuelve la ecuación

$$(A - \lambda I)v_1 = v,$$

donde v es un vector propio asociado al valor propio λ.
Si se desean encontrar más vectores propios generalizados, el siguiente vector v_2 se obtiene resolviendo

$$(A - \lambda I)v_2 = v_1,$$

y este proceso puede continuar de forma iterativa, generando una cadena de vectores propios generalizados:

$$(A - \lambda I)v_k = v_{k-1}, \quad \text{para } k = 2, 3, \ldots$$

El proceso finaliza cuando se alcanza un entero positivo j tal que

$$(A - \lambda I)^j v_j = 0, \quad \text{pero} \quad (A - \lambda I)^{j-1} v_j \neq 0.$$

En ese caso, el conjunto $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_j\}$ forma una *cadena de vectores propios generalizados* de longitud $j + 1$. El subespacio

$$\text{gen}\{v, v_1, v_2, \ldots, v_j\}$$

es llamado un subespacio cíclico de Jordan.

Ejemplo 1.9. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A se obtiene calculando el determinante de $A - \lambda I$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & -1 \\ -3 & 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^3 = 0.$$

Por lo tanto, el único valor propio de A es $\lambda_1 = 2$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 3$.
Procedemos ahora a encontrar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 2$. Buscamos un vector $v_1 \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ que satisfaga

$$(A - 2I)v_1 = 0, \quad \text{donde} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Esto nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0, \\ 2x - y - z = 0, \\ -3x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene que $x = 0$ y $y = -z$. Por lo tanto, el vector propio asociado a $\lambda = 2$ es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{y tomando} \quad z = 1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que la dimensión del subespacio propio es $r_1 = 1$, y como $r_1 \neq m_1$, concluimos que la matriz A *no es diagonalizable*.

A continuación, buscamos los vectores propios generalizados.

Sea $v_2 \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ tal que

$$(A - 2I)v_2 = v_1, \quad \text{con} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Esto conduce al sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

el cual equivale a:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0, \\ 2x - y - z = -1, \\ -3x + 2y + 2z = 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = -1$ y $y = -1 - z$, por lo tanto,

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1-z \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{y tomando} \quad z = 0, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sea $v_3 \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ tal que

$$(A - 2I)v_3 = v_2, \quad \text{donde} \quad v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Esto da lugar al sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual equivale a:

$$\begin{cases} -x + y + z = -1, \\ 2x - y - z = -1, \\ -3x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene $x = -2$ y $y = -3 - z$, de modo que:

$$v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3-z \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{y tomando} \quad z = 0, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, los vectores v_1, v_2, v_3 forman una *cadena de Jordan* de longitud 3 asociada al valor propio $\lambda = 2$.

Definición 1.8. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un valor propio de A. Definimos el menor entero positivo p tal que la sucesión*

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{N}((A-\lambda I)^{p-1}) \subsetneq \mathcal{N}((A-\lambda I)^{p}) = \mathcal{N}((A-\lambda I)^{p+k}), \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^+,$$

de núcleos de las potencias de $(A - \lambda I)$ se estabiliza. El valor de p se denomina índice de λ y se denota por $i_A(\lambda)$, también conocido como el índice de nilpotencia.

Ejemplo 1.10. Consideremos la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A se obtiene calculando el determinante de $A - \lambda I$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^3$$

Así, el único valor propio es $\lambda = 1$, con multiplicidad algebraica $m_\lambda = 3$.

Índice de $\lambda = 1$

Para calcular el índice de $\lambda = 1$, necesitamos estudiar la sucesión de los núcleos de las potencias de $A - \lambda I = A - I$.

Calculamos $A - I$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos los núcleos de las potencias de $A - I$.

El núcleo de $(A - I)^1$ es:

$$\mathcal{N}((A-I)^1) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A continuación, calculamos $(A - I)^2$:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El núcleo de $(A - I)^2$ es:

$$\mathcal{N}((A-I)^2) = \mathbb{C}^3$$

Finalmente, los núcleos se estabilizan en $(A-I)^2$, ya que $\mathcal{N}((A-I)^2) = \mathbb{C}^3$, lo que significa que no cambian más con las siguientes potencias. Por lo tanto, el índice de $\lambda = 1$ es $p = 2$, lo que implica que el autovalor tiene un índice de nilpotencia de 2.

El siguiente teorema describe una propiedad fundamental sobre la descomposición del espacio vectorial en subespacios propios generalizados, los cuales están asociados a los autovalores de una matriz.

Teorema 1.4. *(da Costa, 2012) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz con valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Entonces, el espacio $\mathbb{C}^n$ se descompone de manera directa como la suma de los núcleos de las potencias de $A - \lambda_i I$, es decir,*

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{N}\left((A - \lambda_i I)^{m_i}\right).$$

Ejemplo 1.11. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.
Ahora calculamos los subespacios propios y generalizados, y para cada autovalor, buscamos el núcleo de $\mathcal{N}\left((A - \lambda_i I)^{m_i}\right)$.

i) Para $\lambda_1 = -1$:

El subespacio propio asociado a λ_1 es:

$$\mathcal{N}\left((A + I)^1\right) = \mathcal{N}(A + I)$$

Resolviendo el sistema:

$$(A + I)v_1 = 0, \quad v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-3z}{4}$$

Tomando $z = 4$, obtenemos:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el subespacio propio es:

$$\mathcal{N}(A + I) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

con dimensión $r_{\lambda_1} = 1$.

ii) Para $\lambda_2 = 2$:

Primero calculamos el subespacio propio asociado a λ_2:

$$\mathcal{N}\left((A - 2I)^1\right)$$

Resolviendo el sistema:

$$(A - 2I)v_2 = 0, \quad v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Tomando $z = 1$, obtenemos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el subespacio propio es:

$$\mathcal{N}(A - 2I) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

con dimensión $r_{\lambda_2} = 1$, lo cual es diferente de la multiplicidad algebraica m_{λ_2}.

Ahora, necesitamos encontrar un vector generalizado. Para ello, buscamos el núcleo de $(A - 2I)^2$:

$$(A - 2I)^2 v_3 = 0, \quad v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} 9x + 9y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Tomando $y = 1$ y $z = 0$, obtenemos:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el subespacio generalizado es:

$$\mathcal{N}\left((A - 2I)^2\right) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

con dimensión $r_{\lambda_2} = 2$.

Finalmente, la descomposición de $\mathbb{C}^3$ en suma directa de subespacios generalizados es:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^3 &= \mathcal{N}(A + I) \oplus \mathcal{N}\left((A - 2I)^2\right) \\ &= \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \oplus \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

1.4. Bloques de Jordan

Definición 1.9. *Un bloque de Jordan es una matriz $n \times n$ de la forma*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

donde λ es un escalar, típicamente un valor asociado a un valor propio, y la superdiagonal contiene unos. El resto de la matriz está compuesto por ceros.

Ejemplo 1.12. A continuación, algunos ejemplos de bloques de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Observación 1.4. Un bloque de Jordan de dimensión 2×2 o mayor es el ejemplo más sencillo de una matriz cuadrada que no es diagonalizable.

Definición 1.10. *Una matriz cuadrada B está en la forma canónica de Jordan si tiene la estructura de bloques diagonales*

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_k \end{pmatrix}$$

donde cada bloque diagonal J_i es un bloque de Jordan.

Nota que una matriz diagonal es un caso especial de la forma canónica de Jordan.

Ejemplo 1.13. A continuación, se presentan ejemplos de matrices de Jordan:
A continuación, se presentan ejemplos de matrices de Jordan con los bloques de Jordan pintados de azul:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde las matrices B_1 y B_2 coinciden al reorganizar sus bloques de Jordan. La matriz B_3 es esencialmente diferente.

Ejemplo 1.14. Consideremos la siguiente matriz de Jordan

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz B tiene tres bloques de Jordan:

El primer bloque $J_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$.

El segundo bloque $J_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 4$.

El tercer bloque $J_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_3 = 3$.

Para el autovector $\lambda_1 = 2$, resulta:

$$(J_{\lambda_1} - \lambda_1 I)\, e_1 = 0; \ (J_{\lambda_1} - \lambda_1 I)\, e_2 = e_1$$

Para el autovector $\lambda_2 = 4$, resulta:

$$(J_{\lambda_2} - \lambda_2 I)\, e_3 = 0$$

Para el autovector $\lambda_3 = 4$, resulta:

$$(J_{\lambda_3} - \lambda_3 I)\, e_4 = 0; \ (J_{\lambda_3} - \lambda_3 I)\, e_5 = e_4 \ \ (J_{\lambda_3} - \lambda_3 I)\, e_6 = e_5$$

1.5. Teorema de la forma canónica de Jordan

El siguiente teorema establece que existe una base en $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ compuesta por cadenas de Jordan; cada cadena es una base en un subespacio cíclico de Jordan $\mathcal{G}_j^{(i)}$ $(1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq t_j)$.

Teorema 1.5 (Lancaster, 1985)**.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un valor propio de A.. Entonces existe una descomposición*

$$\mathcal{N}(A - \lambda I) = \sum_{i=1}^{t_p} \mathcal{G}_p^{(i)} \oplus \sum_{i=1}^{t_p-1} \mathcal{G}_{p-1}^{(i)} \oplus \ldots \oplus \sum_{i=1}^{t_1} \mathcal{G}_1^{(i)}$$

donde cada $\mathcal{G}_j^{(i)}$ $(1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq t_j)$ es un subespacio cíclico de Jordan de dimensión j.

Ejemplo 1.15. Consideramos la siguiente matriz $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ con un único autovalor $\lambda = 3$, cuya multiplicidad algebraica es 4 y la multiplicidad geométrica es 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene un único autovalor $\lambda = 3$, y su multiplicidad algebraica es 4. La multiplicidad geométrica es 2, lo que significa que existen 2 vectores propios independientes para este autovalor. Los bloques de Jordan de la matriz son:

i) Un bloque de Jordan de tamaño 3 para $\lambda = 3$, lo que genera una subestructura no diagonalizable.

ii) Un bloque de Jordan de tamaño 1 para $\lambda = 3$, correspondiente a un vector propio adicional.

La matriz $A - 3I$ es:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Descomposición de $\mathcal{N}(A - 3I)$:

Según el teorema 1.5, la descomposición de $\mathcal{N}(A - 3I)$ en subespacios cíclicos de Jordan es la siguiente:

$$\mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{G}_3^{(1)} \oplus \mathcal{G}_2^{(1)} \oplus \mathcal{G}_1^{(2)}$$

donde:

i) $\mathcal{G}_3^{(1)}$ es un subespacio cíclico de dimensión 3 correspondiente al bloque de Jordan de tamaño 3.

ii) $\mathcal{G}_2^{(1)}$ es un subespacio cíclico de dimensión 2 correspondiente al bloque de Jordan de tamaño 2.

iii) $\mathcal{G}_1^{(2)}$ es un subespacio cíclico de dimensión 1 correspondiente al bloque de Jordan de tamaño 1.

Lema 1.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz con autovalor λ. Entonces, existe una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$J = P^{-1}AP,$$

donde J es una matriz de Jordan, y cada uno de sus bloques diagonales J_i es de la forma $J_k(\lambda)$.

Demostración. Dado que λ es un valor propio de A, por el Teorema 1.4 se tiene que

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{N}((A - \lambda I)^m),$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Además, según el Teorema 1.5, el espacio $\mathbb{C}^n$ se descompone como suma directa de subespacios cíclicos de Jordan asociados a λ. Esto implica la existencia de cadenas de Jordan de la forma:

$$\mathbf{x}_{k_1}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_1^{(1)}; \quad \mathbf{x}_{k_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_1^{(2)}; \quad \ldots; \quad \mathbf{x}_{k_s}^{(s)}, \ldots, \mathbf{x}_1^{(s)},$$

donde el conjunto $\{\mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_1^{(s)}\}$ forma una base del espacio propio E_λ, y se cumple que $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$. La unión de estas cadenas constituye una base de $\mathbb{C}^n$.

De acuerdo con el Corolario 3 de (Hoffman y Kunze, 1973) (p. 46), la matriz

$$P = \left[\mathbf{x}_1^{(1)} \ \ldots \ \mathbf{x}_{k_1}^{(1)} \ \ldots \ \mathbf{x}_1^{(s)} \ \ldots \ \mathbf{x}_{k_s}^{(s)}\right] \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

es invertible. Así, se tiene:

$$P^{-1}AP = P^{-1}\left[A\mathbf{x}_1^{(1)} \quad \cdots \quad A\mathbf{x}_{k_1}^{(1)} \quad \cdots \quad A\mathbf{x}_1^{(s)} \quad \cdots \quad A\mathbf{x}_{k_s}^{(s)}\right].$$

Ahora, recordemos que cada cadena de Jordan asociada a λ cumple:

$$A\mathbf{x}_i^{(j)} = \begin{cases} \lambda\mathbf{x}_1^{(j)}, & \text{si } i = 1, \\ \lambda\mathbf{x}_i^{(j)} + \mathbf{x}_{i-1}^{(j)}, & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, el producto anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left[P^{-1}A\mathbf{x}_1^{(1)} \ \cdots \ P^{-1}A\mathbf{x}_{k_1}^{(1)} \ \cdots \ P^{-1}A\mathbf{x}_1^{(s)} \ \cdots \ P^{-1}A\mathbf{x}_{k_s}^{(s)}\right] \\ &= \left[\lambda P^{-1}\mathbf{x}_1^{(1)} \ \cdots \ P^{-1}\left(\lambda\mathbf{x}_{k_1}^{(1)} + \mathbf{x}_{k_1-1}^{(1)}\right) \ \cdots \ \lambda P^{-1}\mathbf{x}_1^{(s)} \ \cdots \ P^{-1}\left(\lambda\mathbf{x}_{k_s}^{(s)} + \mathbf{x}_{k_s-1}^{(s)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dado que los vectores $\mathbf{x}_i^{(j)}$ conforman la base ordenada usada para construir P, se cumple que $P^{-1}\mathbf{x}_i^{(j)} = \mathbf{e}_k$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$, donde $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Por lo tanto, la matriz $P^{-1}AP$ toma la forma:

$$P^{-1}AP = \left[\lambda\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \lambda\mathbf{e}_{k_1} + \mathbf{e}_{k_1-1} \ \cdots \ \lambda\mathbf{e}_{k_1+\cdots+k_{s-1}+1} \ \cdots \ \lambda\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{n-1}\right].$$

Esta expresión muestra explícitamente la acción de A sobre la base compuesta por las cadenas de Jordan, lo cual da lugar a la siguiente matriz:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_s}(\lambda) \end{bmatrix},$$

donde cada bloque $J_{k_i}(\lambda)$ es una matriz de Jordan correspondiente a una cadena de longitud k_i asociada al autovalor λ. □

A continuación se demostrará el Teorema de la forma canónica de Jordan, el cual establece que toda matriz cuadrada compleja es semejante a una matriz en forma de bloques de Jordan.

Teorema 1.6. *Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es semejante a una matriz Jordan.*

Demostración. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los autovalores distintos de A. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea m_i la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio mínimo $m_A(x)$. Aplicando los Teoremas 1.4 y 1.5, se tiene que:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{N}((A - \lambda_i I)^{m_i}),$$

y para cada i, el espacio $\mathcal{N}((A-\lambda_i I)^{m_i})$ se descompone como suma directa de subespacios cíclicos de Jordan asociados a λ_i. Por tanto, existe una base β de $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\beta = \beta_1 \cup \cdots \cup \beta_k,$$

donde β_i es una base de $\mathcal{N}((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$, compuesta por cadenas de Jordan asociadas a λ_i, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

A continuación, ordenamos los vectores de la base β de forma que las cadenas asociadas a λ_1 aparezcan primero, seguidas de las de λ_2, y así sucesivamente hasta λ_k, siguiendo el mismo procedimiento que en la demostración del Lema 1.1.

Sea $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores de la base β en el orden descrito. Por el Corolario 3 de Hoffman y Kunze (1973) (p. 46), P es invertible. Siguiendo el mismo razonamiento del Lema 1.1, se concluye que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix},$$

donde cada bloque J_i tiene la forma:

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{k_{i1}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_{is_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix},$$

para $i = 1, \ldots, k$, y k_{ij} es la longitud de la j-ésima cadena de Jordan correspondiente al autovalor λ_i, con $j = 1, \ldots, s_i$.

De esta manera, se concluye que A es semejante a una matriz de Jordan, lo cual completa la demostración. □

Capítulo 2

Aplicaciones de la forma canónica de Jordán

En este capítulo se presentarán algunas aplicaciones de la forma canónica de Jordan, entre las que se incluyen el tratamiento de matrices no diagonalizables, el cálculo de potencias de matrices, la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y la descomposición espectral de una matriz. Para más detalle, se puede consultar López, Ramírez, Magdaleno, y Gutiérrez (2023), Jerónimo, Sabia, y Tesauri (2008), Benazic (2007) y Vidal (2018).

2.1. Matrices no diagonalizables

En esta sección se estudia el proceso de reducción de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, no diagonalizable, a su forma canónica de Jordan. El método se fundamenta en el análisis de los valores propios, sus multiplicidades algebraicas y geométricas, así como en la construcción de vectores propios y generalizados.

Ejemplo 2.1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Halle la forma canónica de Jordan de A y una matriz no singular P tal que $J = P^{-1}AP$.

Solución: Calculamos los valores propios de la matriz A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Luego, el único valor propio de A es $\lambda = 1$, con multiplicidad algebraica $m_\lambda = 2$.

A continuación, hallamos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$.

Sea $v_1 \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ tal que:

$$(A - I)v_1 = 0, \quad \text{donde} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Al resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos:

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Lo cual implica que $x = -y$. Por lo tanto, un vector propio es $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Como la dimensión del espacio propio es $\dim(\mathcal{N}(A - I)) = 1 = r_\lambda$, y $r_\lambda \neq m_\lambda$, concluimos que la matriz A no es diagonalizable.

A continuación, buscamos un vector generalizado $v_2 \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ que satisfaga:

$$(A - I)v_2 = v_1.$$

Al resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos:

$$\begin{cases} -x - y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

De aquí, obtenemos que $x = 1 - y$. Así, un vector generalizado es $v_2 = \begin{pmatrix} 1 - y \\ y \end{pmatrix}$. Tomando $y = 0$, se tiene $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ahora, construimos la matriz de cambio P, formada por el vector propio y el vector generalizado:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su inversa:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, obtenemos la forma canónica de Jordan de A mediante:

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.2. Halle la forma canónica de Jordan y la matriz de paso P, no singular, de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos los valores propios de la matriz A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2.$$

Por lo tanto, los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$, y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.

A continuación, hallamos los vectores propios asociados a estos valores propios.

Para $\lambda_1 = -1$:

El vector propio v_1 satisface la ecuación:

$$(A + I)v_1 = 0, \quad \text{donde} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Al resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

De aquí se deduce que $x = \frac{-3z}{4}$.

Por lo tanto, el vector propio es $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3z}{4} \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Tomando $z = 4$, obtenemos el vector propio $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, con dimensión geométrica $r_{\lambda_1} = 1$.

Para $\lambda_2 = 2$:

El vector propio v_2 satisface la ecuación:

$$(A - 2I)v_2 = 0, \quad \text{donde} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Al resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

De este sistema, obtenemos que $x = y = 0$, y $z \in \mathbb{C}$.

Por lo tanto, el vector propio es $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Tomando $z = 1$, obtenemos el vector propio $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con dimensión geométrica $r_{\lambda_2} = 1$, lo cual es menor que la multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.

Dado que la dimensión geométrica de λ_2 es menor que su multiplicidad algebraica, buscamos los vectores generalizados v_3 que satisfacen la ecuación:

$$(A - 2I)v_3 = v_2, \quad \text{donde} \quad v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Al resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

De aquí, se deduce que $x = y = \frac{1}{3}$, y $z \in \mathbb{C}$.

Por lo tanto, el vector generalizado es $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ z \end{pmatrix}$. Tomando $z = 0$, obtenemos el vector generalizado $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ahora construimos la matriz P, colocando en sus columnas los vectores propios y generalizados de A:

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la matriz inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculamos la matriz de Jordan J como:

$$J = P^{-1}AP.$$

Al realizar las multiplicaciones, obtenemos:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.3.

Halle la forma canónica de Jordan y una matriz P no singular correspondiente a la siguiente matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos los valores propios de la matriz A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^3$$

Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$ y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 3$.

Ahora hallamos los vectores propios asociados a cada valor propio.

Para $\lambda_1 = 2$:

Existe v_1 tal que $v_1 \in \mathbb{C}^{4\times 1}$:

$$(A - 2I)v_1 = 0, \quad \text{donde} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $x = y = z = 0$ y $t \in \mathbb{C}$, por lo tanto:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Tomando $t = 1$, obtenemos:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con dimensión geométrica $r_{\lambda_1} = 1$. Observamos que $r_{\lambda_1} = m_{\lambda_1} = 1$.

Para $\lambda_2 = 1$:

Existe v_2 tal que $v_2 \in \mathbb{C}^{4\times 1}$:

$$(A - I)v_2 = 0, \quad \text{donde} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $x = y = 0$ y $t = -3z$, por lo tanto:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ -3z \end{pmatrix}$$

Tomando $z = 1$, obtenemos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Con dimensión geométrica $r_{\lambda_2} = 1$. Notamos que $r_{\lambda_2} \neq m_{\lambda_2}$.

Buscamos los vectores generalizados.

Existe v_3 tal que $v_3 \in \mathbb{C}^{4\times 1}$ que satisfaga:

$$(A-I)v_3 = v_2, \quad \text{donde} \quad v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Se obtiene que $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, y $t = -3 - 3z$, por lo tanto:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ z \\ -3 - 3z \end{pmatrix}$$

Tomando $z = 0$, obtenemos:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Existe v_4 tal que $v_4 \in \mathbb{C}^{4\times 1}$ que satisfaga:

$$(A-I)v_4 = v_3, \quad \text{donde} \quad v_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Se obtiene que $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$, y $t = -3 - 3z$, por lo tanto:

$$v_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ z \\ -3-3z \end{pmatrix}$$

Tomando $z = 0$, obtenemos:

$$v_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ahora construimos la matriz P, con los vectores propios y generalizados:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz de Jordan, donde $J = P^{-1}AP$:

$$J = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se obtiene la matriz de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2. Potencia de matrices

En esta sección se aborda el cálculo de las potencias de matrices no diagonalizables mediante su forma canónica de Jordan. Al descomponer la matriz en bloques de Jordan, se facilita el proceso al representarla con bloques diagonales y subdiagonales. Al elevar la matriz a una potencia m, se aprovechan las propiedades de estos bloques asociadas a cada valor propio.

Proposición 2.1. *Sean las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $M \in \mathbb{C}^n$ tales que $A = MBM^{-1}$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple que:*

$$A^m = MB^mM^{-1}.$$

Demostración. Demostraremos la igualdad por inducción matemática sobre m.
Para $m = 1$, la igualdad se cumple claramente.
Supongamos que la afirmación es verdadera para algún $m \in \mathbb{N}$; es decir,

$$A^m = MB^mM^{-1}.$$

Entonces, para $m + 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= A^mA \\ &= \left(MB^mM^{-1}\right)\left(MBM^{-1}\right) \\ &= MB^m\underbrace{M^{-1}M}_{I}BM^{-1} \\ &= MB^{m+1}M^{-1}. \end{aligned}$$

Con esto, se concluye que la igualdad también se cumple para $m + 1$, completando así la demostración por inducción. □

Observación 2.1. Con la proposición 2.1, exploraremos ahora las potencias de matrices en su forma canónica de Jordan.

a) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable, el cálculo de A^m resulta sencillo. En este caso, existe una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz diagonal $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$, que representa la forma canónica de Jordan de A, tal que

$$A = PJP^{-1}.$$

Elevando ambos lados a la potencia m, se obtiene:

$$A^m = PJ^mP^{-1}.$$

Como J es diagonal, su potencia se calcula fácilmente elevando cada elemento de la diagonal (los autovalores de A) a la potencia m. Es decir, si

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

entonces

$$J^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

b) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no es diagonalizable, consideramos su forma canónica de Jordan J, que puede expresarse como

$$J = \lambda_0 I + N,$$

donde $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ es un autovalor y N es una matriz nilpotente. Analicemos cómo se comporta J^m para distintos valores de m:

$$J^2 = (\lambda_0 I + N)^2 = \lambda_0^2 I + 2\lambda_0 N + N^2$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & & \\ 0 & \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2\lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & \binom{2}{1}\lambda_0 & \binom{2}{2} & & \\ 0 & \lambda_0^2 & \binom{2}{1}\lambda_0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & \ddots & \binom{2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{2}{1}\lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0^2 \end{pmatrix},$$

$$J^3 = (\lambda_0 I + N)^3 = \lambda_0^3 I + 3\lambda_0^2 N + 3\lambda_0 N^2 + N^3$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & 3\lambda_0 & 1 & & \\ 0 & \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & 3\lambda_0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^3 & \ddots & 3\lambda_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 3\lambda_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^3 & \binom{3}{1}\lambda_0^2 & \binom{3}{2}\lambda_0 & \binom{3}{3} & & \\ 0 & \lambda_0^3 & \binom{3}{1}\lambda_0^2 & \binom{3}{2}\lambda_0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_0^3 & \binom{3}{1}\lambda_0^2 & \ddots & \binom{3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^3 & \ddots & \binom{3}{2}\lambda_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{3}{1}\lambda_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0^3 \end{pmatrix}.$$

En general, se tiene la expresión:

$$J^m = (\lambda_0 I + N)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \lambda_0^{m-i} N^i,$$

lo que da lugar a una matriz del tipo:

$$J^m = \begin{pmatrix} \lambda_0^m & \binom{m}{1}\lambda_0^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda_0^{m-2} & \cdots & \binom{m}{n-1}\lambda_0^{m-(n-1)} \\ 0 & \lambda_0^m & \binom{m}{1}\lambda_0^{m-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_0^m & \ddots & \binom{m}{2}\lambda_0^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{m}{1}\lambda_0^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0^m \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si J está compuesta por bloques de Jordan $J_1, J_2, \ldots, J_s$, entonces su potencia se calcula bloque por bloque, es decir,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{pmatrix}, \quad J^m = \begin{pmatrix} J_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s^m \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 2.4. Halle A^{10}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Sabemos que $A^{10} = P^{-1}J^{10}P$, donde J es la forma canónica de Jordan de la matriz A. Para calcular esta expresión, comenzamos determinando dicha forma canónica, lo cual requiere hallar primero los valores propios de A.

El polinomio característico de la matriz A es:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^3$$

Por lo tanto, el único valor propio de A es $\lambda = 2$, con multiplicidad algebraica $m_\lambda = 3$.

A continuación, buscamos los vectores propios asociados a este valor propio. Consideramos los vectores v_1 que satisfacen $(A - 2I)v_1 = 0$. Sea:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Entonces, el sistema asociado es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual equivale al sistema:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos: $x = 0$, $y = -z$. Por tanto, un vector propio es:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como la dimensión del espacio propio es $r_\lambda = 1$ y $m_\lambda = 3$, concluimos que A no es diagonalizable. Necesitamos entonces construir una cadena de vectores propios generalizados. Buscamos ahora un vector v_2 tal que $(A - 2I)v_2 = v_1$. Sea:

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

El sistema asociado es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo cual da:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ -3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene: $x = -1$, $y = -1 - z$. Tomando $z = 0$, tenemos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A continuación, buscamos un tercer vector v_3 tal que $(A - 2I)v_3 = v_2$. Sea:

$$v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

El sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nos lleva a:

$$\begin{cases} -x + y + z = -1 \\ 2x - y - z = -1 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene: $x = -2$, $y = -3 - z$. Tomando $z = 0$, tenemos:

$$v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con los vectores v_1, v_2, v_3, construimos la matriz P como:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su inversa es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La forma canónica de Jordan se obtiene como $J = P^{-1}AP$. Calculando:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Elevando J a la décima potencia, se tiene:

$$J^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & \binom{10}{1}2^9 & \binom{10}{2}2^8 \\ 0 & 2^{10} & \binom{10}{1}2^9 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 & 5120 & 11520 \\ 0 & 1024 & 5120 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculamos A^{10} usando la relación $A^{10} = PJ^{10}P^{-1}$:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & 5120 & 11520 \\ 0 & 1024 & 5120 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El resultado es:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} -4096 & 5120 & 5120 \\ -1280 & 7124 & 6400 \\ -3840 & 1280 & -256 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.5. Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule la potencia A^{11} utilizando la forma canónica de Jordan.

Solución: Para calcular A^{11}, utilizamos la relación

$$A^{11} = PJ^{11}P^{-1},$$

donde J es la forma canónica de Jordan de la matriz A. Comenzamos determinando sus valores propios.

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$, ambos con multiplicidad algebraica 2.

Para $\lambda = 2$, se encuentra un vector propio resolviendo $(A - 2I)v = 0$, obteniendo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como la dimensión geométrica es 1, se busca un vector generalizado v_2 que satisfaga $(A - 2I)v_2 = v_1$. Una solución es

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$, se obtienen dos vectores propios linealmente independientes resolviendo $(A + I)v = 0$:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se construye la matriz de paso con los vectores propios y generalizados:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Separando en bloques,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se calcula J^{11} como

$$J_1^{11} = \begin{pmatrix} 2^{11} & 11 \cdot 2^{10} \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 11264 \\ 0 & 2048 \end{pmatrix}, \qquad J_2^{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$J^{11} = \begin{pmatrix} 2048 & 11264 & 0 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, se calcula

$$A^{11} = PJ^{11}P^{-1} = \begin{pmatrix} -9216 & 0 & 11264 & 0 \\ -11264 & -1 & 13313 & 0 \\ -11264 & 0 & 13312 & 0 \\ -11264 & 0 & 13313 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales

En esta sección se presenta el método de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales utilizando la forma canónica de Jordan. Esta técnica es particularmente útil cuando la matriz del sistema no es diagonalizable, ya que permite simplificar el problema transformándolo en uno equivalente cuya solución es más accesible. Al representar la matriz mediante bloques de Jordan, se facilita el cálculo de la matriz exponencial, herramienta clave para encontrar la solución general del sistema.

Teorema 2.1. *Sea A una matriz de orden $n \times n$ y sea $x_0 \in \mathbb{C}^n$ una condición inicial que depende del parámetro t. Consideramos el siguiente problema de valor inicial (P.V.I.):*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

La solución única de este sistema está dada por:

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Demostración. Supongamos que $x(t) = e^{At}x_0$. Entonces, la derivada de $x(t)$ es:

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{At}x_0\right) = Ae^{At}x_0 = Ax(t),$$

lo cual satisface la ecuación diferencial $x'(t) = Ax(t)$, es decir, cumple con la primera ecuación del problema (2.1).

Evaluando en $t = 0$, se tiene:

$$x(0) = e^{A\cdot 0}x_0 = Ix_0 = x_0,$$

lo que verifica la condición inicial $x(0) = x_0$, correspondiente a la segunda ecuación del problema (2.1).

A continuación, probaremos que esta solución es única.

Supongamos que existe otra solución $\phi(t)$ que también satisface el problema:

$$\begin{cases} \phi'(t) = A\phi(t), \\ \phi(0) = x_0. \end{cases}$$

Definimos la función auxiliar $y(t) = e^{-At}\phi(t)$. Derivando, se obtiene:

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\phi(t)\right) = -Ae^{-At}\phi(t) + e^{-At}\phi'(t).$$

Como $\phi'(t) = A\phi(t)$, sustituimos:

$$y'(t) = -Ae^{-At}\phi(t) + e^{-At}A\phi(t) = 0.$$

Por lo tanto, $y(t)$ es constante:

$$y(t) = c.$$

Evaluando en $t = 0$, se obtiene:

$$y(0) = e^0\phi(0) = \phi(0) = x_0,$$

lo que implica que $c = x_0$, y así:

$$y(t) = x_0 \quad \text{y} \quad \phi(t) = e^{At}x_0.$$

Dado que $\phi(t)$ coincide con $x(t)$, concluimos que la solución es única. Esto completa la demostración. □

Definición 2.1 (**Exponencial de una matriz**). *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Para $t \in \mathbb{R}$, la exponencial de A se define mediante la siguiente serie de potencias:*

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots$$

Teorema 2.2. *Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un valor $t_0 \in \mathbb{C}$ con $t_0 > 0$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^nt^n}{n!}$$

es absolutamente y uniformemente convergente para todo t tal que $|t| \leq t_0$.

Demostración. Sea $\|A\| = a$. Entonces, tenemos que

$$\|A^n t^n\| \leq \|A\|^n |t|^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Por lo tanto, para cada $n \geq 0$, se cumple

$$\left\| \frac{A^n t^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n |t|^n}{n!} = a^n \frac{|t|^n}{n!} \leq \frac{a^n t_0^n}{n!}.$$

Es bien conocido que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t_0^n}{n!} = e^{at_0}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\left\| \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n t^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{k} \frac{\|A\|^n |t|^n}{n!}.$$

Aplicando el criterio de Weierstrass para la convergencia absoluta y uniforme, concluimos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

es convergente de manera absoluta y uniforme para $|t| \leq t_0$. □

Teorema 2.3. *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$

ii) Si $AB = BA$, *entonces* $e^{A+B} = e^A e^B$

Demostración.

i) Sea $S = PAP^{-1}$. Por definición, la exponencial de S es:

$$e^S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{S^k}{k!}. \tag{2.2}$$

Además, podemos calcular las potencias de S como sigue:

$$\begin{aligned} S^2 &= (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA^2P^{-1}, \\ S^3 &= PA^3P^{-1}, \\ &\vdots \\ S^k &= PA^kP^{-1}, \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} e^S &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{PA^kP^{-1}}{k!} \\ &= P\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^A P^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que $e^S = Pe^A P^{-1}$.

ii) Supongamos que $AB = BA$. Esto implica que:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!j!} A^{k-j}B^j = k! \sum_{j=0}^{k} \frac{A^{k-j}B^j}{(k-j)!j!}.$$

Como esta sucesión es convergente, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{A^{k-j}B^j}{(k-j)!j!} \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) \\ &= e^A \cdot e^B. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2. *Si P es invertible, entonces para cualquier matriz diagonal*

$$A = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\right),$$

se cumple que

$$e^A = diag\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}, \ldots, e^{\lambda_n}\right).$$

Demostración. Por inducción, se puede demostrar fácilmente que:

$$A^s = \text{diag}[\lambda_1^s, \lambda_2^s, \ldots, \lambda_n^s], \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Luego, para cualquier $m \geq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!} A^s &= \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!} \text{diag}[\lambda_1^s, \lambda_2^s, \ldots, \lambda_n^s] \\ &= \sum_{s=0}^{m} \text{diag}\left[\frac{1}{s!}\lambda_1^s, \frac{1}{s!}\lambda_2^s, \ldots, \frac{1}{s!}\lambda_n^s\right] \\ &= \text{diag}\left[\sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!}\lambda_1^s, \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!}\lambda_2^s, \ldots, \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!}\lambda_n^s\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} e^A = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} A^s &= \lim_{m\to\infty} \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!} A^s \\ &= \text{diag}\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\lambda_1^s, \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\lambda_2^s, \ldots, \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\lambda_n^s\right] \\ &= \text{diag}[e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}]. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3 (**Exponencial de una matriz de bloques de Jordan**). *Sea J una matriz cuyo bloque diagonal está compuesto por bloques de Jordan, es decir,*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix},$$

entonces la exponencial de J es dada por

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_r} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sea $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_r)$. Entonces, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$J^k = \operatorname{diag}(J_1^k, J_2^k, \ldots, J_r^k).$$

A partir de esta propiedad, obtenemos:

$$\begin{aligned} e^J &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{diag}(J_1^k, J_2^k, \ldots, J_r^k)}{k!} \\ &= \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_2^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_r^k}{k!} \right) \\ &= \operatorname{diag}(e^{J_1}, e^{J_2}, \ldots, e^{J_r}). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6. Resuelva el problema con valores iniciales

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2, \qquad & x_1(0) &= 1, \\ x_2' &= 2x_2, & x_2(0) &= 2 \end{aligned}$$

Solución: Sea $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ y $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matriz asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Reescribimos el problema como:

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0.$$

La solución general está dada por:

$$x(t) = e^{tA}x_0 = Pe^{tJ}P^{-1}x_0,$$

donde J es la forma canónica de Jordan de A.

Calculamos los valores propios de A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Así, $\lambda = 2$ es el único valor propio, con multiplicidad algebraica $m_\lambda = 2$.

Buscamos los vectores propios:

$$(A - 2I)v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce que $y = 0$, y tomando $x = 1$, obtenemos:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $m_\lambda = 2$ y la dimensión del espacio propio es 1, la matriz no es diagonalizable. Buscamos un vector generalizado v_2 tal que:

$$(A - 2I)v_2 = v_1.$$

Esto equivale a:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que implica $-y = 1 \Rightarrow y = -1$. Tomando $x = 0$, tenemos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Formamos la matriz P con v_1 y v_2 como columnas:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con inversa} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La forma canónica de Jordan es:

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos e^{tJ}, usando la fórmula para la exponencial de un bloque de Jordan:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x(t) &= Pe^{tJ}P^{-1}x_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7. Se tiene una población inicial de 100 lobos que llegan a un ecosistema donde se encuentran 400 conejos. Determinar el comportamiento demográfico de las especies después de 5 años, bajo el supuesto de que obedecen al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 3y, \end{aligned}$$

donde $x(t)$ representa la población de lobos (depredadores), $y(t)$ la población de conejos (presas), y t está medido en décadas.

Solución: Sea $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ y $\varphi_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \end{pmatrix}$. La matriz asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos el problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A\varphi(t), \\ \varphi(0) &= \varphi_0. \end{aligned}$$

Su única solución está dada por

$$\varphi(t) = e^{tA}\varphi_0 = e^{t(PJP^{-1})}\varphi_0 = Pe^{tJ}P^{-1}\varphi_0.$$

Calculamos e^{At}. Para ello, primero obtenemos la forma canónica de Jordan de la matriz A. Comenzamos calculando sus autovalores:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2.$$

Los valores propios de A son $\lambda = 2$ (con multiplicidad algebraica 2).

A continuación, determinamos los vectores propios correspondientes a los valores propios. Para $\lambda = 2$, sea v_1 tal que $v_1 \in \mathbb{C}^{2\times 1}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$x = y$$

Luego, $v_1 = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$, tomando $y = 1$, se tiene:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Buscamos un vector $v_2 \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ generalizado que satisfaga:

$$(A - 2I)v_2 = v_1,$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 1, \\ -x + y = 1. \end{cases}$$

lo que implica $y = 1 + x$. Luego, $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ 1+x \end{pmatrix}$. Tomando $x = 0$, obtenemos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Construimos la matriz P, poniendo los vectores propios y generalizados como columnas de A, es decir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de P es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la forma canónica de Jordan, donde $J = P^{-1}AP$. Entonces:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Continuamos con el cálculo de e^{tJ}. Como J es de la forma $J = I + N$, donde N es una matriz nilpotente de orden 2 ($N^2 = 0$), se tiene:

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{t(2I+N)} = e^{2t}e^{tN} \\ &= e^{2t}\left[I + Nt\right] \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, la solución es:

$$\varphi(t) = Pe^{tJ}P^{-1}\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

La solución es:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 100e^{2t} + 300t \\ 300t + 400e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para $t = 0.5$ (5 años = 0.5 décadas):

$$\varphi(0.5) = \begin{pmatrix} 100e^{2(0.5)} + 300(0.5) \\ 300(0.5) + 400e^{2(0.5)} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 422 \\ 1237 \end{pmatrix}.$$

Luego de 5 años, habrá aproximadamente 422 lobos y 1237 conejos.

2.4. Descomposición espectral de matrices

El siguiente teorema describe una descomposición espectral de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en términos de matrices idempotentes y nilpotentes asociadas a sus autovalores.

Teorema 2.4. *(Vidal, 2018) Para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y para cada autovalor λ_i de A, existe una matriz idempotente P_i y una matriz nilpotente D_i tales que:*

1) $P_i^2 = P_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, h$,

2) $P_i P_j = 0$ *para todo* $i \neq j$,

3) $\sum_{i=1}^{h} P_i = I$,

4) $\sum_{i=1}^{h} (\lambda_i P_i + D_i)$ *(Descomposición espectral).*

Observación 2.2. Sin embargo, encontrar las matrices P_i y D_i para una matriz arbitraria puede ser complicado. No obstante, para matrices en forma de Jordan, este proceso resulta mucho más sencillo. Por ejemplo, para la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se puede descomponer como:

$$J = \left(-2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D_1} \right) + \left(1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D_2} \right),$$

donde $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$ son los autovalores de J. Las matrices P_1 y P_2 son idempotentes, ya que $P_1^2 = P_1$ y $P_2^2 = P_2$. Asimismo, D_1 y D_2 son nilpotentes, pues $D_1^2 = D_2^2 = 0$.

Teniendo todo esto en cuenta, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.8. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -23 & 21 & 7 \end{pmatrix}.$$

Determinaremos la forma canónica de Jordan y su descomposición espectral.

Solución. Comenzamos calculando la forma canónica de Jordan de la matriz A. Para ello, hallamos sus autovalores:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & 8 & 2 \\ -4 & 5-\lambda & 1 \\ -23 & 21 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$, y $\lambda_2 = 2$, con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.

A continuación, determinamos los vectores propios correspondientes a los valores propios.

Para $\lambda = 1$, sea $v_1 \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ tal que:

$$(A - I)v_1 = 0, \quad \text{donde } v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 8 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \\ -23 & 21 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De este sistema se obtiene:

$$x = \frac{3z}{8}, \quad y = \frac{z}{8} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \frac{3z}{8} \\ \frac{z}{8} \\ z \end{pmatrix}.$$

Tomando $z = 8$, se tiene $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. La dimensión del espacio propio es $r_{\lambda_1} = 1$.

Para $\lambda = 2$, sea $v_2 \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ tal que:

$$(A - 2I)v_2 = 0, \quad \text{donde } v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -23 & 21 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De este sistema se deduce:

$$x = \frac{2z}{5}, \quad y = \frac{z}{5} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{2z}{5} \\ \frac{z}{5} \\ z \end{pmatrix}.$$

Tomando $z = 5$, obtenemos $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Como $r_{\lambda_2} = 1$ y $m_{\lambda_2} = 2$, concluimos que A no es diagonalizable.

Buscamos un vector propio generalizado v_3 que satisfaga:

$$(A - 2I)v_3 = v_2, \quad \text{donde } v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Esto equivale a resolver:

$$\begin{pmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -23 & 21 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Del sistema resultante:

$$x = \frac{2z - 2}{5}, \quad y = \frac{z - 1}{5} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} \frac{2z-2}{5} \\ \frac{z-1}{5} \\ z \end{pmatrix}.$$

Tomando $z = 1$, se tiene $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Construimos la matriz P con los vectores propios y generalizados como columnas:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forma canónica de Jordan es:

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así, $A = PJP^{-1}$, es decir, A es semejante a J. Además, la descomposición espectral de J es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \lambda_1 P_1 + D_1 + \lambda_2 P_2 + D_2.$$

Dicha descomposición espectral es equivalente a la descomposición espectral de la matriz A.

Ejemplo 2.9. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinaremos la forma canónica de Jordan de A y su descomposición espectral.

Solución. Comenzamos calculando la forma canónica de Jordan de la matriz A. Para ello, primero determinamos sus autovalores:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)^5.$$

Los valores propios de A son $\lambda = -1$ con multiplicidad algebraica $m_\lambda = 5$.

A continuación, determinamos los vectores propios correspondientes a este valor propio.

Para $\lambda = -1$, sea $v_1 \in \mathbb{C}^5$ tal que:

$$(A + I)v_1 = 0, \quad \text{donde} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ r \end{pmatrix}.$$

Esto da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y + z + 2t = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -2t.$$

Por lo tanto, los vectores propios v_1 tienen la forma:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ -2t \\ 0 \\ t \\ r \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de vectores propios es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

con dimensión $r_\lambda = 3$, lo que implica que la matriz no es diagonalizable, ya que $m_\lambda \neq r_\lambda$.

Buscamos ahora los vectores propios generalizados. Sea $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Queremos encontrar v_4 tal que:

$$(A + I)v_4 = v_2.$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$(A+I)v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que da el sistema:

$$\begin{cases} y + z + 2t = 1, \\ z = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 1 - 2t.$$

Por lo tanto, uno de los vectores generalizados es:

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2t \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando $t = 0$, obtenemos:

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sea v_5 tal que $(A+I)v_5 = v_4$. El proceso es similar y termina con:

$$v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz P que tiene como columnas los vectores propios y generalizados de A es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su inversa es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculamos la forma canónica de Jordan como $J = P^{-1}AP$, obteniendo:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esto demuestra que A es semejante a J.

La descomposición espectral de J es:

$$J = (\lambda P_1 + D_1) + (\lambda P_2 + D_2) + (\lambda P_3 + D_3),$$

y es equivalente a la descomposición espectral de A.

Conclusión

En esta tesis se ha abordado de manera didáctica la forma canónica de Jordán, destacando su papel fundamental en el estudio de matrices no diagonalizables. A través del desarrollo teórico de los vectores propios generalizados y de las cadenas cíclicas de Jordán, se ha demostrado el Teorema 1.6, el cual garantiza la existencia de una representación estructurada para toda matriz cuadrada compleja mediante bloques de Jordán.

Además, se han presentado ejemplos aplicados que ilustran la utilidad de dicha forma canónica, tales como el cálculo de potencias de matrices, la exponencial de una matriz, la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y la descomposición espectral de una matriz.

Referencias bibliográficas

Benazic, R. (2007). *Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias.* UNI, Perú.

Costa, F. P. d. (2012). *Matrizes não-diagonalizáveis: a forma canónica de jordan.* Descargado de `http://acervodigital.unesp.br/handle/10400.2/3743`

Grossman, S. I., y Godoy, J. J. F. (2012). *Álgebra lineal.* McGraw-Hill.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1973). *Algebra lineal.* Ediciones Castillo.

Jerónimo, G., Sabia, J., y Tesauri, S. (2008). *Álgebra lineal.* Universidad de Buenos Aires, Argentina.

Lancaster, P., y Tismenetsky, M. (1985). *The theory of matrices.* Academic Press.

López, F. I. B., Ramírez, A. C., Magdaleno, A. M. H., y Gutiérrez, O. M. (2023). *Teoría de espacios vectoriales* (Vol. 24). Sociedad Matemática Mexicana.

Vidal, V. G. O. (2018). *Notas de clase de Álgebra lineal II.* UNMSM, Perú.