Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Rayos extremos más cercanos en ℓ^∞ sobre politopos tropicales

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Roberto Carlos VÁSQUEZ AGUILAR

ASESOR

Dr. Alex Armando CRUZ HUALLPARA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Vásquez, R. (2024). *Rayos extremos más cercanos en ℓ^∞ sobre politopos tropicales*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Roberto Carlos Vásquez Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42011623
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0000-5324-367X
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alex Armando Cruz Huallpara
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40949706
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-5453-6885
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445739
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Joaquin Omar Perez Ortiz
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10525884
Datos de investigación	

Línea de investigación	Análisis Funcional
Grupo de investigación	Matemática Aplicada - Métodos Numéricos (METNUM)
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 9:40 horas del domingo 29 de septiembre del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024): Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (PRESIDENTE), Mg. Joaquin Omar Perez Ortiz (MIEMBRO) y el Dr. Alex Armando Cruz Huallpara (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: **"RAYOS EXTREMOS MÁS CERCANOS EN ℓ^∞ SOBRE POLITOPOS TROPICALES"**, presentado por el señor **Bachiller ROBERTO CARLOS VÁSQUEZ AGUILAR**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **Sobresaliente**, con un calificativo promedio de **Dieciocho**.

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller ROBERTO CARLOS VÁSQUEZ AGUILAR**, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 10:20 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
PRESIDENTE

Mg. Joaquin Omar Perez Ortiz
MIEMBRO

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Alex Armando Cruz Huallpara en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001332-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"RAYOS EXTREMOS MÁS CERCANOS EN ℓ^∞ SOBRE POLITOPOS TROPICALES"**, presentado por el bachiller **Roberto Carlos Vásquez Aguilar**, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 8% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuarcon los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor

DNI:40949706

FICHA CATALOGRÁFICA

Roberto Carlos VÁSQUEZ GUILAR

Rayos Extremos más cercanos en ℓ^∞ sobre Politopos Tropicales, (Lima) 2024

(UNMSM, Título, Matemática, 2024) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Matemática, UNMSM / FCM II. Título

(Series).

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres Víctor Vásquez y Rosa Aguilar y hermanos que siempre me apoyaron e incentivaron a seguir adelante con mis objetivos a pesar de las dificultades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por cuidar siempre de mí persona, por permitirme realizar un logro más en mi vida.

A mis padres Víctor Vásquez y Rosa Aguilar quienes son mi mayor fortaleza y brindarme su apoyo incondicional.

A mis hermanos que siempre están pendientes de mí y me incentivan a seguir creciendo profesionalmente.

A mi asesor el Dr. Alex Armando CRUZ HUALLPARA por haber dedicado tiempo orientándome con sus conocimientos sobre el tema en la elaboración de mi tesis.

A mis maestros por sus enseñanzas y haberme brindado todos sus conocimientos.

A mis amigos y personas que siempre me apoyaron.

El agradecimiento a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por acogerme y ser mi segunda casa. Por la exigencia académica y el apoyo durante estos años de estudio y por formarme profesionalmente para hacer posible la culminación de este trabajo.

RESUMEN

Rayos extremos más cercanos en ℓ^∞ sobre politopos tropicales

Roberto Carlos VÁSQUEZ AGUILAR

2024

Asesor : Dr. Alex Armando CRUZ HUALLPARA.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

En este trabajo de tesis, consideramos el conjunto de ultrametría $\mathcal{B}_n(d)$ y el conjunto de rayos extremos $\mathcal{E}_n(d)$ cumpliéndose que $\mathcal{B}_n(d) \supseteq \mathcal{E}_n(d)$. Este trabajo de tesis tiene como objetivo mostrar que la condición necesaria de Bernstein de los rayos extremos tropicales que afirma que $\mathcal{B}_n(d) = \mathcal{E}_n(d)$ se verifica solo cuando $n = 3$ y que para los $n \geq 4$ se tiene en general que $\mathcal{B}_n(d) \supsetneq \mathcal{E}_n(d)$. En este trabajo de Tesis consideraremos una descripción exterior para el politopo tropical además de las técnicas de hipergrafía tangente para una correcta caracterización de la extremalidad.

ABSTRACT

Closest Extreme Rays in ℓ^∞ Over Tropical Polytopes

Roberto Carlos VÁSQUEZ AGUILAR

2024

Asesor : Dr. Alex Armando CRUZ HUALLPARA.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

In this thesis work, we consider the ultrametry set $\mathcal{B}_n(d)$ and the set of extreme rays $\mathcal{E}_n(d)$ fulfilling that $\mathcal{B}_n(d) \supseteq \mathcal{E}_n(d)$. This thesis work aims to show that the necessary Bernstein condition of tropical extreme rays that states that $\mathcal{B}_n(d) = \mathcal{E}_n(d)$ is verified only when $n = 3$ and that for $n \geq 4$ it holds in general that $\mathcal{B}_n(d) \supsetneq \mathcal{E}_n(d)$. In this tesis we will consider an exterior description for the tropical polytope in addition to tangent hypergraph techniques for a correct characterization of the extremity.

INDICE GENERAL

1. Espacio Métrico **10**

1.1. Noción de distancia y métrica.....10

2. Espacio tropical **10**

2.1. Doble descripción tropical.....10

2.2. Árboles filogenéticos y ultrametría.....11

3. Descripción exterior de la ℓ^∞- ultramétrica más cecana **13**

3.1. Un pequeño ejemplo (n = 3).....14

4. Demostración del teorema 1.1 para el caso n = 3 **17**

5. Demostración del teorema 1.1 para el caso n ≥ 4 **21**

5.1 Un contraejemplo n = 4.....22

5.2. Construcción de contraejemplos para n > 4.....22

5.3. Un contraejemplo basado en los datos biológicos de [8].....27

6. Resumen **29**

7. Bibliografía **41**

Introducción

Los árboles filogenéticos son diagramas que representan relaciones evolutivas entre organismos, en particular la de sistemas como las especies biológicas.

Si nos remitimos al caso de la evolución biológica, las hojas de un árbol pueden entenderse como las especies conocidas y los nodos internos como los ancestros hipotéticos. Para dos especies, cuanto más arriba en el árbol esté su ancestro común, mayor será el avance evolutivo y relaciones que tienen. Con las longitudes de los bordes o los pesos de los nodos internos especificados, un árbol induce una métrica en las hojas, que mide la discrepancia entre las entidades bajo consideración. Una δ ultramétrica cumple todos los requisitos de ser una métrica, pero además verifica la llamada desigualdad triangular fuerte que afirma que $\delta_{ik} \leq \max(\delta_{ij}, \delta_{jk})$ para todo i, j y k, o equivalentemente, $\max(\delta_{ij}, \delta_{jk}, \delta_{ik})$ alcanzada al menos dos veces. Un ultramétrico codifica la topología del árbol filogenético subyacente y se puede recuperar cuando sea necesario.

Los mapas de disimilitud que se pueden obtener, aunque la mayoría de las veces no son exactos se sospecha que están en aproximación a ciertas medidas ultramétricas. Estos mapas de disimilitud miden la discrepancia por pares entre individuos. No es de extrañarse que muchas áreas científicas tengan gran interés en la reconstrucción de las ultrametrías a partir de mapas de disimilitud. Se sabe que para medir la distancia entre dos mapas de disimilitud se cuenta con múltiples opciones. Aquí consideraremos convenientemente la ℓ^{∞}- distancia ya que además de ser una opción más natural encaja mejor con el álgebra tropical $(\max, +)$ y la propiedad definitoria de la ultramétrica.

Bernstein demostró en [8] que el conjunto de ultrametrías más cercanas a un mapa de disimilitud dado d forma un politopo tropical. Un politopo tropical admite dos descripciones equivalentes por semiespacios tropicales (descripción exterior). En busca de un método directo para encontrar rayos extremos, Bernstein propuso un procedimiento y un criterio que pueden generar un conjunto de ultrametría $\mathcal{B}_n(d)$ y demostró que $\mathcal{B}_n(d) \supseteq \mathcal{E}_n(d)$, donde $\mathcal{E}_n(d)$ es el conjunto de rayos extremos. Pero no estaba claro si $\mathcal{B}_n(d) = \mathcal{E}_n(d)$. En esta tesis demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 1.1. La necesaria caracterización de extremalidad de Bernstein es suficiente sólo cuando $n = 3$, es decir, $\mathcal{B}_3(d) = \mathcal{E}_3(d)$; $\mathcal{B}_n(d) \supsetneq \mathcal{E}_n(d), \forall n \geq 4$.

Esto significa que para $n \geq 4$, también se pueden producir y pasar el criterio, algunos ultramétricos que no son rayos extremos. Por lo tanto, todavía se desconoce un procedimiento directo para producir todos y sólo los rayos extremos. La prueba de $n = 3$ se logra utilizando la descripción exterior y las técnicas de hipergrafía dirigida tangente [9] para caracterizar la extremidad. Mientras tanto, la refutación de $n \geq 4$ se realiza dando un contraejemplo explícito de $n = 4$ y luego usándolo para generar contraejemplos más grandes de manera inductiva. Además, se examina el ejemplo $n = 8$ dado en [8] basado en datos biológicos y resulta que también es un contraejemplo de la suficiencia.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma: En la sección 2 presentamos brevemente los antecedentes de la descripción interior/exterior tropical, así como los árboles filogenéticos y la ultrametría. En la sección 3 damos la descripción exterior del politopo ultramétrico más cercano. En la sección 4 demostramos el Teorema 1.1 para el caso $n = 3$ y en la sección 5 para el caso $n \geq 4$. Finalmente, resumimos en la sección 6.

1. Espacio Métrico

1.1. Noción de distancia y métrica

Sea X un conjunto no vacío y sea d una aplicación de $X \times X$ en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Definición 1.1 La aplicación d es una métrica en X si, y solo si las siguientes propiedades son verificadas para cada x, y, z de X.

1) $d(x,y) \geq 0$; (d es real no negativa)

2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$; (d es una identidad)

3) $d(x,y) = d(y,x)$; (d es simétrica)

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$; (propiedad de desigualdad triangular)

La aplicación d se denomina distancia y $d(x,y)$ se lee distancia de x a y.

2. Espacio tropical

2.1. Doble descripción tropical

En geometría tropical $(\max,+)$, la suma tropical $\oplus$ se define como max y la multiplicación tropical $\odot$ como la suma habitual. La terna formada por el conjunto $\mathbb{R}_{\mathbf{max}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ seguida de las operaciones de suma tropical y multiplicación tropical constituyen el semianillo tropical máximo denotado como $(\mathbb{R}_{\max},\oplus,\odot)$. El cono poliédrico y el poliedro son ejemplos de análogos tropicales de conceptos dados en geometría clásica. En la siguiente discusión, trabajamos en el d- espacio ambiental dimensional $\mathbb{R}_{\max}^{d}$ y usamos la notación vectorial habitual en negrita para los elementos $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_d\} \in \mathbb{R}_{\max}^{d}$. El producto interior tropical se define como: $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\max}^{d}$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \max_{1 \leq i \leq d} (x_i + y_i).$$

Sea $\operatorname{argmax}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \subset [d]$ el conjunto de índices que alcanzan el máximo. De manera similar, la multiplicación matriz-vector se define como: $\forall\, A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times d}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{d}$,

$$A\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{n} \text{ y } (A\mathbf{x})_k = A_k \cdot \mathbf{x} = \max_{1 \leq i \leq d} (A_{ki} + x_i),$$

Donde $k \in [n]$ y A_k denota la $k-$ ésima fila de la matriz A. El semiespacio tropical y el cono poliédrico son análogos directos de sus versiones clásicas:

Definición 2.1 (Semiespacio tropical). Dado $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\max}^{d}$, el semiespacio tropical es el conjunto:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{d} / \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}\}. \tag{2.1}$$

Definición 2.2 (Cono poliédrico tropical). Dado $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{nxd}$, el cono poliédrico tropical se define como:

$$\mathcal{C} \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{d} / A\mathbf{x} \leq B\mathbf{x}\} \tag{2.2}$$

A esta definición de cono poliédrico tropical que considera el conjunto de semiespacios definitorios se le conoce como la descripción exterior. Ahora si condideramos una descripción mediante un conjunto de puntos llamados rayos extremos se denominará descripción interior.

Definición 2.3 (Rayos extremos). Sea $\mathcal{C}$ un cono poliédrico tropical. El conjunto de rayos extremos de $\mathcal{C}$ es el conjunto mínimo de puntos $\{u_j\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{d} / \mathbf{x} = \bigoplus_{j} \lambda_j \mathbf{u}_j \, , \lambda_j \in \mathbb{R}_{\max}\}. \tag{2.3}$$

Dada la descripción exterior de un cono poliédrico tropical, el algoritmo de última generación para calcular su descripción interior fue proporcionado por [14]. Un poliédrico tropical de $\mathbb{R}_{\max}^{d}$ es una versión afín del cono poliédrico tropical:

Definición 2.4 (Poliedro tropical). Dado $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{nxd}$ y $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}_{\max}^{d}$, el poliedro tropical es el conjunto

$$\mathcal{P} \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{d} / A\mathbf{x} \oplus \mathbf{c} \leq B\mathbf{x} \oplus \mathbf{d}.\} \tag{2.4}$$

Se sabe [15] que un poliedro tropical en $\mathbb{R}_{\max}^{d}$ puede transformarse en un cono poliédrico tropical en $\mathbb{R}_{\max}^{d+1}$ mediante un proceso de homogenización que mostraremos en un ejemplo en la sección 3.

2.2. Árboles filogenéticos y ultrametría.

Un árbol filogenético es una representación mediante diagramas de las relaciones evolutivas entre organismos, estos diagramas pueden graficarse de varias maneras equivalentes. La característica resaltante es que dos especies están más relacionadas

si tienen un ancestro común más reciente es decir cuando más arriba en el árbol se encuentren y menos relacionadas si tienen un ancestro común menos reciente o que se encuentra más abajo en el árbol. Para dos especies, cuanto más arriba en el árbol esté su ancestro común, mayor será el avance evolutivo y relaciones que tienen.

Consideremos un conjunto finito X con n elementos además de etiquetas $i \in [n] = \{1,2,\dots,n\}$. Comenzaremos dando la definición de mapa de disimilitud.

Definición 2.5 (Mapa de disimilitud). Un mapa de disimilitud en X es una aplicación $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $d_{ii} = 0$ y $d_{ij} = d_{ji}$, $\forall i, j \in X$. Un mapa de disimilitud se puede expresar como una matriz simétrica con diagonal cero. También denotamos esta matriz por $d \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$.

Dados dos mapas de disimilitud d_1, d_2 en X, definimos la ℓ^∞- distancia como

$$\|d_1 - d_2\|_\infty = \max_{i,j\in[n]} \left|(d_1)_{ij} - (d_2)_{ij}\right|.$$

Los árboles filogenéticos se pueden presentan en varios tipos. En esta tesis estudiaremos al árbol enraizado y no asignaremos el peso del árbol en los bordes sino en los nodos internos del árbol. El árbol enraizado se define de la siguiente manera.

Definición 2.6 (árbol enraizado). Un árbol enraizado T en X es un árbol con un conjunto de hojas X y un nodo interior designado como raíz, denotado como raíz(T).

Los descendientes de un vértice v en T. Denotado como $\mathrm{Des}_T(v)$, son todos nodos $v' \neq v$ tales que el camino único desde v' hasta la raíz(T) contiene v. Denota por T^o al conjunto de nodos interiores de T. Sea $\alpha: T^o \to \mathbb{R}$ una ponderación de los nodos internos de T. El par (T, α) induce un mapa de disimilitud map $d_{T,\alpha}$ en X definido por $(d_{T,\alpha})_{ij} = \alpha(v)$ donde $v \in T^o$ es el nodo más cercano a root(T) en la ruta única de x_i a x_j.

Definición 2.7 (Ultramétrico). Dado el mapa de disimilitud δ en X, δ es un ultramétrico si es una métrica y satisface la desigualdad triangular fuerte

$$\forall\, i, j, k \in [n], \delta_{ik} \leq \max(\delta_{ij}, \delta_{jk}). \tag{2.5}$$

Denotemos por $\mathcal{U}_n$ el conjunto de ultramétricas en n elementos.

Dado un ultramétrico δ en X, podemos construir un árbol enraizado T con ponderación α que induce u. Además, dicha construcción es única si $\alpha(u) < \alpha(v)\ \forall\, u \in \mathrm{Des}_T(v)$.

Definición 2.8 (ℓ^∞- ultramétrico más cercano). Dado el mapa de disimilitud δ, el conjunto de ℓ^∞- ultrametrías más cercanas a d es

$$\underset{\delta \in \mathcal{U}_n}{\operatorname{argmin}} \|\delta - d\|_\infty. \tag{2.6}$$

La proposición 3.2 en [8] demostró que este conjunto es un politopo tropical. Sea $\mathcal{E}_n(d)$ el conjunto de todos los rayos extremos de este politopo.

3. Descripción exterior de la ℓ^∞- ultramétrica más cecana

Si consideramos la descripción a partir de la definición de ultrametría Ec, (2.5) además de una condición para que sea el más cercano estaríamos ante una descripción conocida como la descripción exterior.

Visto como una matriz simétrica con diagonal cero, un ultramétrico δ en n elementos consta de $n(n-1)/2$ entradas. Lo representamos como un vector δ, con estos $n(n-1)/2$ elementos dispuestos en orden lexicográfico. Por ejemplo, una ultramétrica de 3 elementos se organiza como $\delta = (\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23})$. Si miramos la Ec. (2.5)

$$\forall\, i, j, k \in [n], \delta_{ik} \leq \max(\delta_{ij}, \delta_{jk}), \tag{2.5}$$

Obtendremos $3 \times \binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/2$ semiespacios tropicales.

Luego consideramos que la condición para que sea de ℓ^∞- más cercano. Supongamos que se nos da el mapa de disimilitud $d = \{d_{ij}\}$, y, además, la distancia más cercana $q = \|d - \delta'\|_\infty$ donde δ' es ℓ^∞- ultramétrico más cercano. Para d dado, dicha distancia q existe y es única y puede calcularse mediante una instancia específica de ℓ^∞- ultramétrico más cercano. El siguiente algoritmo [16] encuentra un ℓ^∞- ultramétrico más cercano.

Teorema 3.1 (Chepoi y Fichet [16]). Sea d un mapa de disimilitud en n elementos. El mapa δ^*construido de la siguiente manera es un ℓ^∞- ultramétrico más cercanas a d.

- Sea $K_n = (X, E)$ un gráfico completo con pesos de arista d_{ij} y T su árbol de expansión mínima;
- Defina d^*_{ij} como el borde máximo del camino único en T que conecta i y j;
- Sea $q = \|d^* - d\|_\infty/2$ y $\delta^* = d^* + q\mathbf{1}$ donde $\mathbf{1}_{ij} = 1, \forall i \neq j \in [n]$.

El árbol de expansión mínimo se puede calcular fácilmente mediante algoritmos como el algoritmo de Kruskal. Vale la pena señalar que d_{ij}^{*} también se puede escribir como el cuello de botella mínimo entre i y j.

$$d_{ij}^{*} = \min_{\text{camino P de i a j}} \left(\max_{(u,v)\in P} d_{uv} \right). \tag{3.1}$$

La condición ℓ^{∞}- más cercanas da

$$\forall i \neq j \in [n], \left| \delta_{ij} - d_{ij} \right| \leq q. \tag{3.2}$$

O escrito por separado,

$$\forall i \neq j \in [n],\ \delta_{ij} - q \leq d_{ij}\ \ y\ \ d_{ij} \leq \delta_{ij} + q. \tag{3.3}$$

Esto nos da $2 \times \binom{n}{2} = n(n-1)$ desigualdades.

Estos dos conjuntos de desigualdades Ec. (2.5) y la Ec. (3.3) en conjunto nos dan la descripción del ℓ^{∞}- poliedro tropical exterior de la ultramétrica más cercana. En total hay $n^2(n-1)/2$ desigualdades por lo que la matriz del poliedro tropical es de dimensión $n^2(n-1)/2 \times n(n-1)/2$. Dado que el algoritmo de conversión de exterior a interior funciona en conos tropicales, necesitamos homogeneizar el poliedro tropical. Sumando la variable auxiliar ξ a ambos lados de la ecuación (2.5) y (3.3) y realizar reemplazo $\delta_{ij} + \xi \to \tilde{\delta}_{ij}$, tenemos

$$\tilde{\delta}_{ij} \leq \max\left(\tilde{\delta}_{jk}, \tilde{\delta}_{ik}\right), \tag{3.4}$$

$$\tilde{\delta}_{ij} - q \leq \xi + d_{ij}\ \ y\ \ \xi + d_{ij} \leq \tilde{\delta}_{ij} + q,$$

La ecuación (3.4) es la descripción del cono tropical exterior de los ℓ^{∞}- ultramétricos más cercanos.

Allamigeon et al. Brindan un algoritmo que puede calcular todos los rayos extremos a partir de las descripciones exteriores [14]. Supongamos que al usar este algoritmo encontramos p rayos extremos: $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{\delta}}_p$. Entonces cualquier ℓ^{∞}- ultramétrica más cercana se puede generar tomando una combinación lineal tropical de los extremos.

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \bigoplus_{i=1}^{p} \lambda_i \tilde{\boldsymbol{\delta}}_j, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}, \tag{3.5}$$

Seguido de una normalización tropical que resta el valor de la variable auxiliar.

3.1. Un pequeño ejemplo (n = 3)

Aquí presentamos explícitamente un pequeño ejemplo de n = 3 para demostrar el procedimiento anterior. En el caso de n = 3, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23})$. La condición ultramétrica da

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\delta} \leq \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \boldsymbol{\delta}, \tag{3.6}$$

Donde los espacios en blanco son cero tropical, es decir, $-\infty$. Y la condición más cercana da

$$\begin{pmatrix} & & \\ -q & & \\ & -q & \\ & & -q \end{pmatrix} \delta \oplus \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{23} \\ \\ \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} q & & \\ & q & \\ & & q \\ & & \end{pmatrix} \delta \oplus \begin{pmatrix} & \\ d_{12} & \\ d_{13} & \\ d_{23} & \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Sea $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = (\xi, \tilde{\delta}_{12}, \tilde{\delta}_{13}, \tilde{\delta}_{23})$. Después de la homogeneización obtenemos

$$\begin{pmatrix} & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ d_{12} & & & & \\ d_{13} & & & & \\ d_{23} & & & & \\ & -q & & & \\ & & -q & & \\ & & & -q & \end{pmatrix} \tilde{\delta} \leqslant \begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & q & & \\ & & q & \\ & & & q \\ d_{12} & & & \\ d_{13} & & & \\ d_{23} & & & \end{pmatrix} \tilde{\delta}. \tag{3.8}$$

Para ser más concreto, dejemos que el mapa de disimilitud dado sea

$$\mathrm{d} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

i.e., $\mathrm{d}_{12} = 2$, $\mathrm{d}_{13} = 4$, $\mathrm{d}_{23} = 8$. El ℓ^{∞}- ultramétrico más cercano dado por el teorema 3.1 es

$$\delta^* = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

Considerando el ultramétrico con su correspondiente árbol mostrado en la Fig. 1. también obtenemos $q = \|d - \delta^*\|_\infty = 2$.

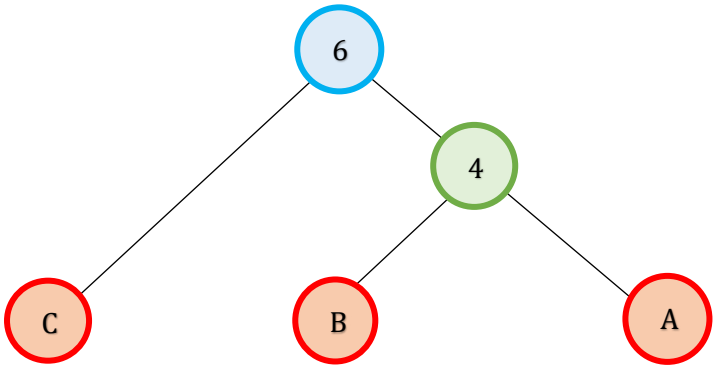


Fig. 1. Un ultramétrico obtenido por el teorema 3.1.

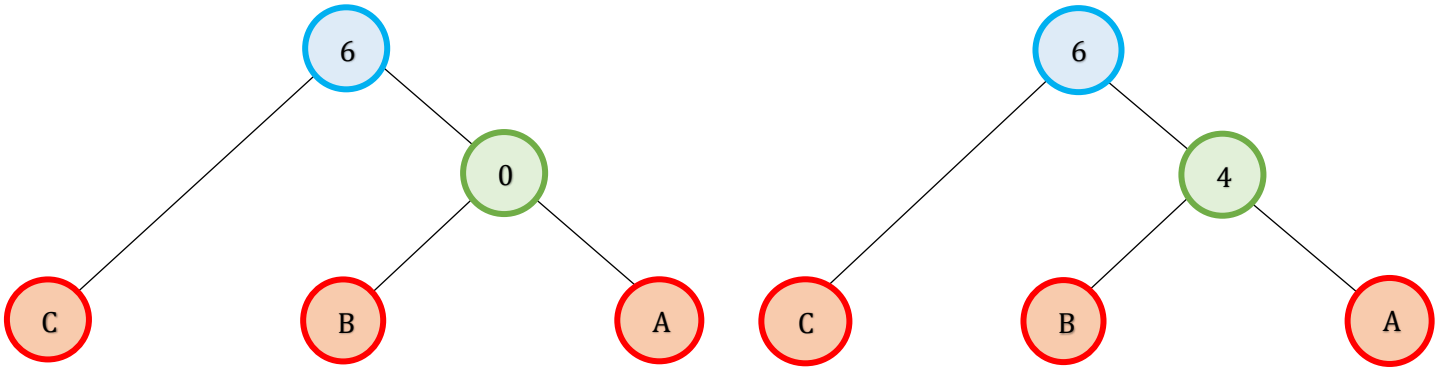


Fig. 2. Ultrametría extrema ℓ^∞- más cercana al mapa de disimilitud dado por la ecuación (3.9).

La ecuación (3.8) da cuenta de que

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 2 & & & \\ 4 & & & \\ 8 & & & \\ & -2 & & \\ & & -2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix} \tilde{\delta} \leq \begin{pmatrix} & 0 & 0 & \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ 2 & & & \\ 4 & & & \\ 8 & & & \end{pmatrix} \tilde{\delta}. \qquad (3.11)$$

Usando el algoritmo de computación extrema encontramos dos rayos extremos (normalizados):

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ y } \delta = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Corresponden a los árboles que se muestran en la Fig. 2 respectivamente.

Finalmente, cualquier ℓ^∞- ultramétrica más cercana se puede escribir como la combinación lineal tropical como en la ecuación. (3.5) de las dos ultramétricas anteriores.

4. Demostración del teorema 1.1 para el caso n = 3

Bernstein [8] da una condición necesaria para ser extremo. Genera un conjunto que contiene todos los rayos extremos y algunos no extremos, dentro del cual los extremos deben satisfacer el criterio. Antes de enunciar el teorema, necesitamos la siguiente definición de movilidad de nodos.

Definición 4.1 (Movilidad). Sea d un mapa de disimilitud en X y sea δ un ultramétrico más cercano a d en ℓ^∞- norma. Sea T una resolución de la topología de δ y sean α los nodos internos ponderados tales que $d_{T,\alpha} = \delta$. Los nodos internos v de T se dice móvil si existe un ultramétrico $\hat{\delta} \neq \delta$, expresable como $\hat{\delta} = d_{T,\hat{\alpha}}$ tal que

- $\hat{\delta}$ también es el más cercano a δ en la ℓ^∞- norma,
- $\hat{\alpha}(x) = \alpha(x), \forall x \in T^o, x \neq v$, y
- $\hat{\alpha}(v) \leq \alpha(v)$.

En este caso decimos que $\hat{\delta}$ se obtiene de δ deslizando v hacia abajo. Si además v ya no es móvil en $d_{T,\hat{\alpha}}$, es decir, si $\hat{\alpha}(v) = \max\{\alpha(y) : y \in Des_T(v)$, o $\hat{\alpha}(v)$ es el valor mínimo tal que $d_{T,\hat{\alpha}}$ es el más cercano a d en el ℓ^∞- norma, entonces decimos que $\hat{\delta}$ se obtiene de δ deslizando v completamente hacia abajo.

Intuitivamente, la movilidad de un nodo interno indica la posibilidad de disminuir su peso sin violar las condiciones ultramétricas y ℓ^∞- más cercanas.

Teorema 4.2 (Bernstein [8]). Sea d un mapa de disimilitud en X. Sea δ^* el ultramétrico generado por el teorema 3.1. Sea $S_o = \{\delta^*\}$, y para cada $i \geq 1$ defina S_i

como el conjunto de ultrametrícas obtenidas de algún $u \in S_{i-1}$ deslizando un nodo interno móvil de una resolución de la topología de u completamente hacia abajo. Definir

$$\mathcal{B}_n(d) = \{\delta \in \bigcup_i S_i \,/\, \delta \text{ tiene como máximo un nodo interno movil}\}.$$

Entonces $\mathcal{B}_n(d) \supseteq \mathcal{E}_n(d)$.

En esta demostración, utilizaremos las técnicas de hipergrafos dirigidos por tangente de [9]. Enunciamos algunas definiciones y un teorema que utilizaremos a continuación.

Teorema 4.3 (Hipergrafo dirigido tangentemente). El hipergrafo dirigido tangente en $\boldsymbol{v}$, denotado por $\mathcal{G}(v, \mathcal{C})$, que consiste en los hiperarcos $(\text{argmax}(\mathbf{B}_k\mathbf{v}), \text{argmax}(\mathbf{A}_k\mathbf{v}))$ para cada $k \in [p]$ tal que $\mathbf{A}_k\mathbf{v} = \mathbf{B}_k\mathbf{v} > -\infty$.

Como ejemplo, construimos los hipergrafos dirigidos por tangente de la ecuación (3.11) con respecto al vector no extremo $\boldsymbol{\delta} = (0, 2, 6, 6)^T$ y al extremo $\boldsymbol{\delta} = (0, 0, 6, 6)^T$, como

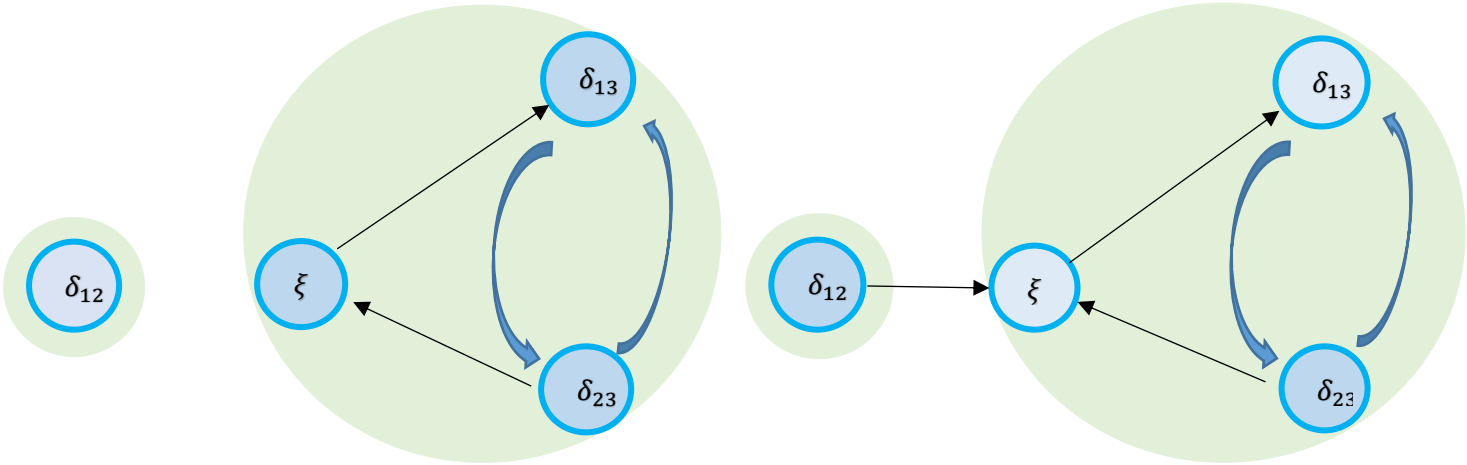


Fig. 3. Ejemplos de hipergrafos dirigidos por tangente (izquierda: $(0, 2, 6, 6)^T$, derecha: $(0, 0, 6, 6)^T$).

Como se muestra en la figura 3. Los índices correspondientes están etiquetados por $\xi, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$. En estos casos, los hipergrafos son en realidad gráficos habituales.

Definición 4.4 (Componentes fuertemente conectados (SCC)). Los componentes fuertemente conectados C de un hipergrafo dirigido $\mathcal{H}$ son las clases de equivalencia

de la relación $\equiv_{\mathcal{H}}$, definida por $u \equiv_{\mathcal{H}} v$ si $u \rightsquigarrow_H v$ y $v \rightsquigarrow_H u$. SCCs están parcialmente ordenados por la relación$\preceq_{\mathcal{H}}$ inducida por la alcanzabilidad: $C \preceq_{\mathcal{H}} C'$ si C y C' admiten un representante u tal que $u \rightsquigarrow_H u'$.

Teorema 4.5 (Allamigeon, Gaubert y Goubault [9]). Sea C un cono poliédrico tropical. Un vector $v \in \mathcal{C}$ es tropical extremo si, y solo si, el conjunto de los componentes fuertemente conexos del hipergrafo dirigido tangente en v en $\mathcal{C}$, parcialmente ordenados por la relación de alcanzabilidad, admite un mayor elemento.

En la Fig. 3, los SCCs se indican sombreados. El no extremo de la izquierda tiene dos SCCs desconectados, por lo que no tiene uno mayor. Por otro lado, el extremo tiene un SCC $\{\xi, \delta_{13}, \delta_{23}\}$.

Ahora estamos listos para demostrar el Teorema 1.1 para el caso n = 3.

Prueba. Sin pérdida de generalidad, supongamos $d_{12} \leq d_{13} \leq d_{23}$ (esto se puede hacer volviendo a etiquetar los tres elementos). El ultramétrico más cercano dado por el teorema 3.1 es

$$\delta^* = \begin{pmatrix} 0 & d_{12}+q & d_{13}+q \\ d_{12}+q & 0 & d_{13}+q \\ d_{13}+q & d_{13}+q & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

Donde $q = (d_{23} - d_{13})/2$. A continuación, analizamos por casos.

Caso 1. Primero consideramos $d_{12} < d_{13} < d_{23}$. Dado que $d_{13} + q - d_{13} = q$ y $d_{13} + q - d_{23} = -q$, sabemos que el nodo raíz está inmóvil. Por otro lado, podemos deslizarnos hacia abajo por el otro

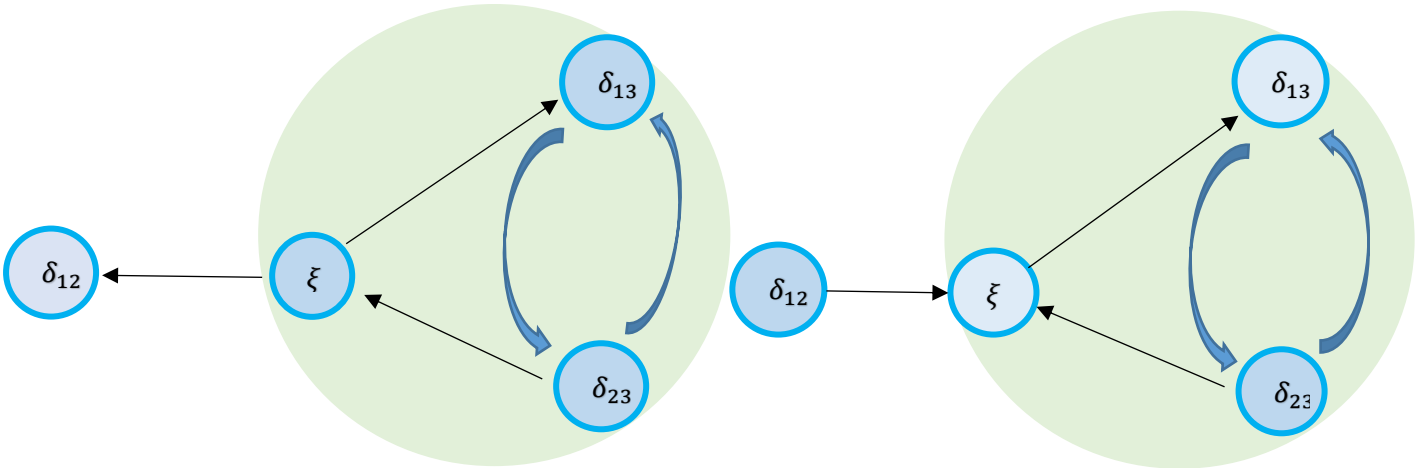


Fig. 4. Hipergrafías tangentes del caso $d_{12} < d_{13} < d_{23}$.

nodo a $d_{12} - q$ mientras lo mantiene más cerca. Entonces tenemos los siguientes dos rayos candidatos (uno en el caso de $d_{13} = d_{23}$):

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{12} + q \\ d_{13} + q \\ d_{13} + q \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{12} - q \\ d_{13} + q \\ d_{13} + q \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

Donde el primero tiene un nodo móvil y el segundo ninguno. Recuerde la descripción Ec. (3.8):

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ d_{12} & & & \\ d_{13} & & & \\ d_{23} & & & \\ & -q & & \\ & & -q & \\ & & & -q \end{pmatrix} \tilde{\delta} \leqslant \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \\ q & & \\ & q & \\ & & q \\ d_{12} & & \\ d_{13} & & \\ d_{23} & & \end{pmatrix} \tilde{\delta}. \tag{3.8}$$

Sus correspondientes hipergrafías dirigidas tangentes se muestran en la Fig. 4, donde los índices están etiquetados con $\xi, \delta_{13}, \delta_{13}, \delta_{23}$ y los SCCs se indican mediante sombreado. Todos tienen un SCC mayor: $\{\delta_{12}\}$ para el primero y $\{\xi, \delta_{13}, \delta_{23}\}$ el segundo, lo que significa que ambos son rayos extremos.

Caso 2. En el caso de $d_{12} = d_{13} < d_{23}$, el árbol no es binario. Cada una de las dos resoluciones corresponde a un rayo candidato:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{12} + q \\ d_{12} - q \\ d_{12} + q \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{12} - q \\ d_{12} + q \\ d_{12} + q \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

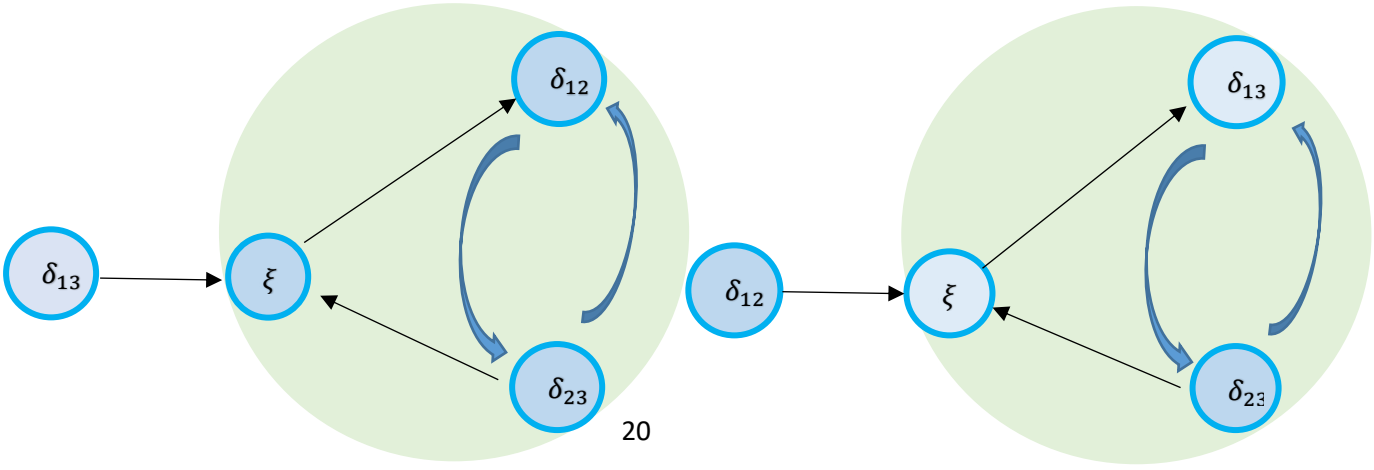


Fig. 5. Hipergrafías tangentes del caso $d_{12} = d_{13} < d_{23}$.

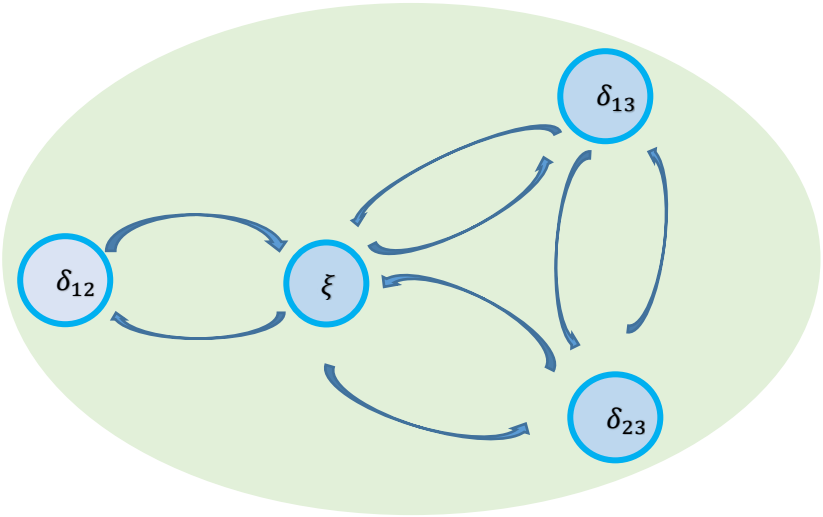


Fig. 6. Hipergrafía tangentes del caso $d_{12} \leq d_{13} = d_{23}$.

Como se muestra en la Fig. 5, todas sus hipergrafías tangentes correspondientes tienen el mayor SCC: $\{\xi, \delta_{12}, \delta_{23}\}$ para el primero y $\{\xi, \delta_{13}, \delta_{23}\}$ para el segundo. Entonces ambos son rayos extremos.

Caso 3. En el caso de $d_{12} \leq d_{13} = d_{23}$, tenemos $q = 0$. No hay libertad para deslizar los nodos internos. Por tanto, el único rayo candidato es precisamente el dado por el teorema 3.1:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{13} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Su hipergrafía tangente correspondiente es en sí misma un SCC, por lo que es mayor, lo que indica que es un rayo extremo. El hipergráfico se muestra en la Fig. 6.

Con todos los casos posibles discutidos anteriormente, ahora podemos concluir que la caracterización de Bernstein es suficiente cuando $n = 3$.

5. Demostración del teorema 1.1 para el caso $n \geq 4$

En esta sección, mostramos mediante contraejemplos que la caracterización de Bernstein [8] no es suficiente para $n \geq 4$. Primero damos un contraejemplo de $n = 4$.

5.1 Un contraejemplo $n = 4$

El mapa de disimilitud dado y el ℓ^∞- ultramétrico más cercano dado por el Teorema 3.1 son

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 14 & 12 \\ 6 & 14 & 0 & 9 \\ 5 & 12 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 & 9 \\ 10 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 0 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } q = 4. \tag{5.1}$$

Al construir la descripción exterior y utilizar el algoritmo de cálculo extremo, encontramos 8 rayos extremos, que se muestran como columnas en la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 8 & 2 & 2 & 10 & 10 & 9 \\ 5 & 2 & 10 & 10 & 10 & 9 & 2 & 10 \\ 1 & 5 & 1 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 8 & 8 & 9 & 10 & 10 & 8 \\ 5 & 5 & 10 & 10 & 10 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Los árboles correspondientes se muestran en la Fig. 7. Sin embargo, el procedimiento en [8] generará dos árboles más que también satisfacen la caracterización, como se muestra en la Fig. 8.

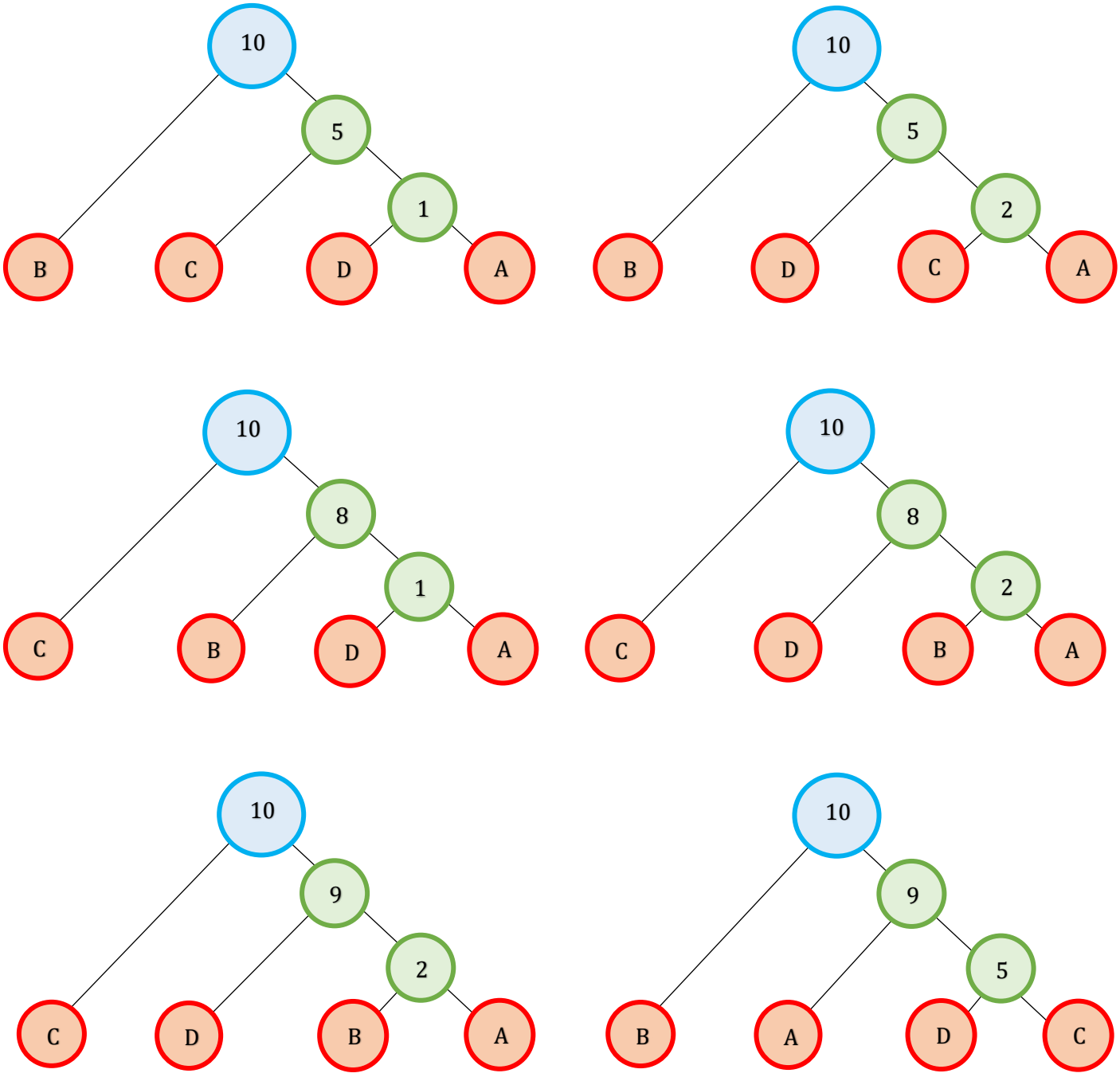
5.2. Construcción de contraejemplos para $n > 4$

Presentamos una forma de construir inductivamente $n > 4$ unos cualesquiera, es decir, un contraejemplo de tamaño $n + 1$ puede generarse a partir de un contraejemplo de tamaño n. Primero demostramos el siguiente lema.

Lema 5.1. Supongamos que $\delta \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ representa un ℓ^∞- ultramétrico más cercano a un mapa de disimilitud dado d en $n \geq 3$ elementos. Defina el mapa de disimilitud extendido d' en $n + 1$ elementos mediante $d'_{ij} = d_{ij}$ si $i, j \leq n$ y $d'_{i,n+1} = r + q + \epsilon$ si $i \leq n$ donde r es el peso raíz de ultramétrico δ y $\epsilon > 0$ es un número positivo arbitrario.

Defina el ultramétrico extendido $\delta' \in \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$ por $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$ si $i, j \leq n$ y $\delta'_{i,n+1} = r + \epsilon$. Entonces la extremalidad de δ' dado d' es la misma que la extremalidad de δ dado d, es decir $\delta' \in \mathcal{E}_n(d') \Leftrightarrow \delta \in \mathcal{E}_n(d)$.

Prueba. Primero realizamos el procedimiento de homogeneización en δ dado δ' dejando $\xi = 0$, obteniendo $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}$ **y** $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}'$. Recuerde la descripción exterior del ℓ^∞- cono tropical más cercano (Ec. 3.4): cono tropical más cercano (Ec. 3.4):



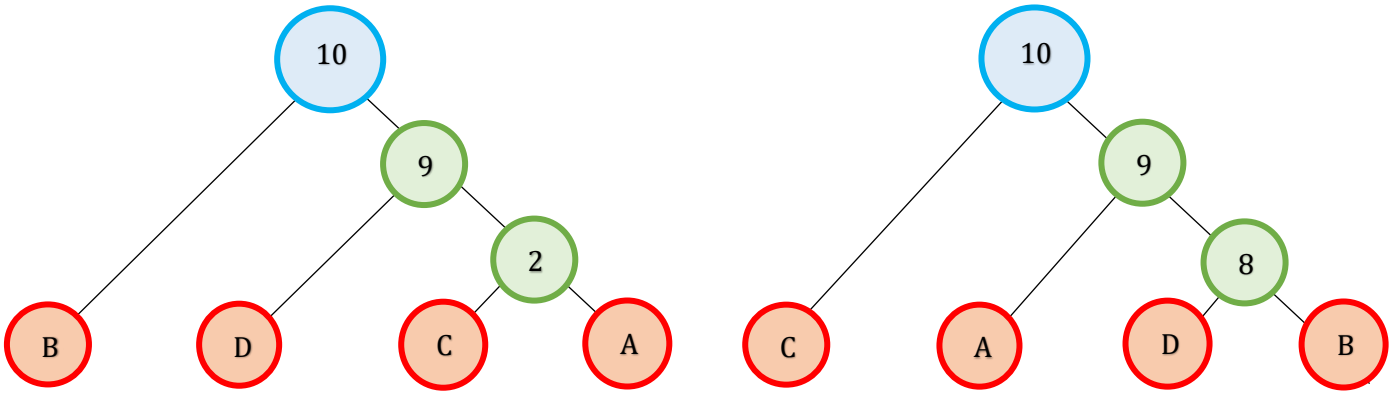


Fig. 7. Rayos extremos ℓ^{∞}- más cercanos al mapa de disimilitud dado por la ecuación. (5.1).

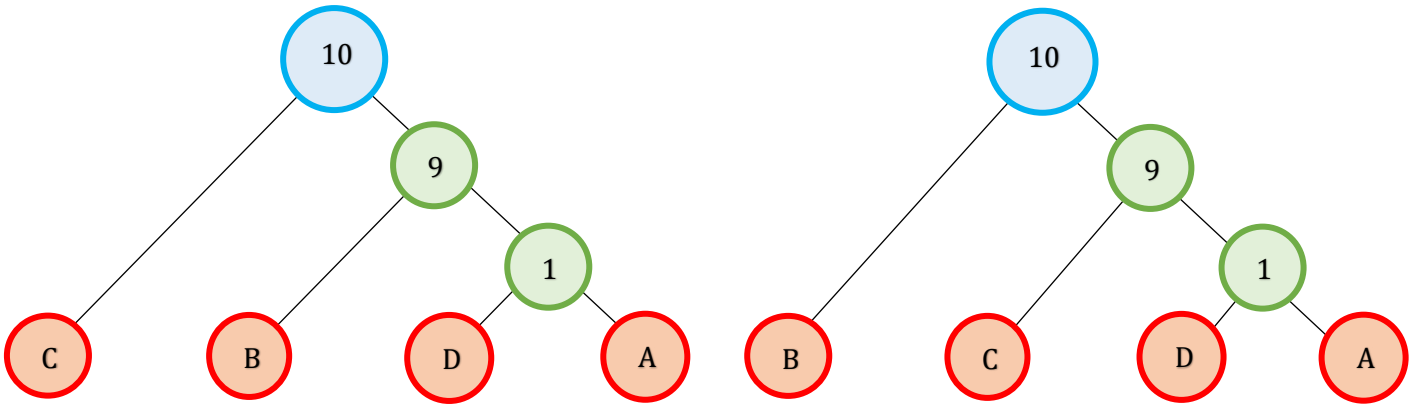
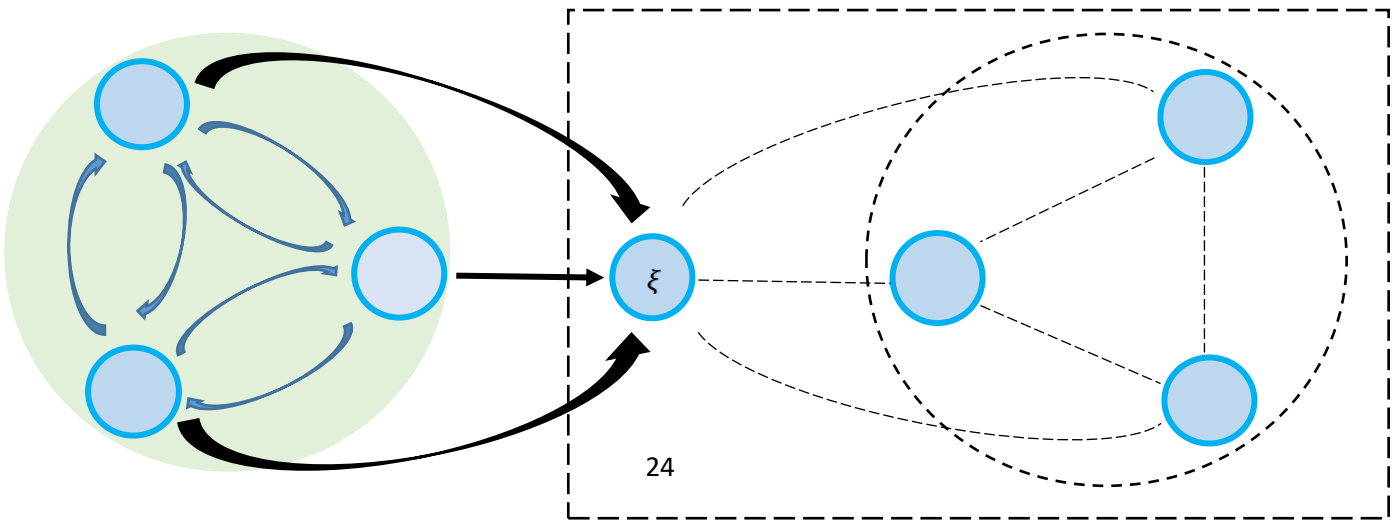


Fig. 8. Ultramétricas no extremas que satisfacen la caracterización.

$$\tilde{\delta}_{ij} \leq \max(\tilde{\delta}_{jk}, \tilde{\delta}_{ik}), \tag{3.4}$$

$$\tilde{\delta}_{ij} - q \leq \xi + d_{ij} \;\; y \;\; \xi + d_{ij} \leq \tilde{\delta}_{ij} + q.$$

Considere la diferencia entre hipergrafos dirigidos tangentes construidos a partir de la $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ en d y $\tilde{\boldsymbol{\delta}}'$ en d′. El hipergrafo de $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ tendrá $\binom{n}{2} + 1$ nodos y el de $\tilde{\boldsymbol{\delta}}'$ tendrá $\binom{n+1}{2} + 1$,



n nodos adicionales (un SCC)

Original $\binom{n}{2} + 1$ nodos

(incluir el nodo de la variable auxiliar)

Fig. 9. Hipergrafo tangente esquemático de tamaño n + 1 ultramétrico $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$.

Donde n nodos adicionales corresponden a las n variables $\tilde{\delta}_{i,n+1}$. En la fig. 9 se muestra un diagrama esquemático.

Nos centramos en los hiperarcos adicionales entre estos n nodos adicionales y los $\binom{n}{2} + 1$ nodos originales. El primer conjunto de desigualdades de la ecuación. (3.4) no hará ninguna diferencia ya que cualquier combinación de $(i, j, n+1)$ con $i, j \leq n$ solo generará hiperarcos entre los n nodos adicionales, pero no entre los dos grupos, debido al hecho de que $\tilde{\delta}'_{i,n+1} = r + \epsilon > \tilde{\delta}'_{i,j}\ \forall\, i, j \leq n$. Por otro lado, el segundo conjunto de desigualdades contribuirá con hiperarcos adicionales. Considere las desigualdades $\xi + d_{ij} \leq \tilde{\delta}_{i,j} + q$. Dado que $\delta'_{i,n+1} + q = r + \epsilon + q = d'_{i,n+1}$, se generarán hiperarcos adicionales desde cada uno de los n nodos adicionales hasta el primer nodo que representa la variable de homogeneización ξ. Entonces, la diferencia general entre estos dos hipergráficos es que un SCC adicional que consta de n nodos adicionales apuntará hacia el primer nodo. Ahora es obvio ver que esto no cambiará el hecho de si el hipergráfico tiene o no un SCC mayor, ya que este SCC recién agregado no puede ser el mayor. Por lo tanto, según el teorema 4.5, la extremalidad de δ' dado d' es la misma que la extremalidad de δ dado d.

El Lema 5.1. nos dice que una vez que el ultramétrico no sea extremo, siempre habrá una manera de construir otro ultramétrico no extremo más grande sobre él. Entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.2. Sea $d^{(n)}$ un mapa de disimilitud en $n \geq 4$ elementos. Si $d^{(n)}$ es un contraejemplo de la caracterización de Berstein, entonces existe $d^{(n+1)}$ en $(n + 1)$ elementos que también es un contraejemplo.

Prueba. Supongamos que $\delta^{(n)} \in \mathbb{R}_{\max}^{\binom{n}{2}}$ es una ultramétrica producida por el teorema 4.2 de Bernstein, pero no extrema. Construimos $d^{(n+1)}$ y $\delta^{(n+1)}$ de la misma manera que en el Lema 5.1, basándonos en $d^{(n)}$ y $\delta^{(n)}$. Dado que $\delta^{(n)}$ no es extremo, según el Lema 5.1, $\delta^{(n+1)}$ tampoco lo es un rayo extremo. Ahora sólo nos queda demostrar que $\delta^{(n+1)}$ satisface la caracterización de Bernstein, es decir, se puede generar a partir

del procedimiento deslizante y tiene como máximo un nodo móvil. Primero, para $d^{(n+1)}$, el ℓ^∞- ultramétrico más cercano dado por el teorema 3.1 solo diferirá del de $d^{(n+1)}$ cuando involucre el $(n+1)$-ésimo elemento. Esto se debe a que, por construcción, la distancia desde cualquier elemento hasta $(n+1)$-ésimo elemento es el más grande. Tenemos $\delta_{ij}^{*(n+1)} = \delta_{ij}^{*(n)}$ si $i,j \leq n$ y $\delta_{i,n+1}^{*(n+1)} = r + 2q + \epsilon$. El árbol construido a partir de $\delta^{*(n+1)}$ tendrá un nodo raíz con peso $r + 2q + \epsilon$, cuyos dos hijos son el $(n+1)$-ésimo elemento y todo el árbol construido a partir de $\delta^{*(n)}$. Tenga en cuenta que el nodo raíz es móvil y podemos deslizarlo hasta $r + \epsilon$. Ahora el nodo raíz es inmóvil y tiene un peso mayor que la raíz de $\delta^{*(n)}$. Por lo tanto, los procedimientos de deslizamiento adicionales solo se realizarán en el subárbol $\delta^{*(n)}$. Esto significa que todos los árboles posibles generados al deslizar $\delta^{*(n)}$ también aparecerán, como hijos del nodo raíz cuyo peso es $r + \epsilon$. Además, todos deberían tener como máximo un nodo móvil, ya que la raíz misma es inmóvil. Debido a que el $\delta^{(n)}$ anterior se genera a partir de $\delta^{*(n)}, \delta^{(n+1)}$ definido como en el Lema 5.1 debería aparecer en el procedimiento deslizante y tener como máximo un nodo móvil, satisfaciendo así la caracterización de Bernstein.

Ahora podemos completar la demostración del teorema 1.1.

Prueba. Dado el contraejemplo $n = 4$ de la Ec. (5.1), podemos construir inductivamente un contraejemplo de cualquier tamaño $n(\geq 4)$ según el teorema 5.2.

Como ejemplo, aquí mostramos cómo construir un contraejemplo $n = 5$ basado en el contraejemplo $n = 4$ de la ecuación (5.1). Nos centraremos en la ultrametría no extrema izquierda en la Fig. 8. Dado que el peso de la raíz es $r = 10$ y $q = 4$. Elegimos $\epsilon = 1$, entonces podemos escribir el siguiente mapa de disimilitud $n = 5$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 5 & 15 \\ 6 & 0 & 14 & 12 & 15 \\ 6 & 14 & 0 & 9 & 15 \\ 5 & 12 & 9 & 0 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

y el ℓ^∞- ultramétrico más cercano dado por el teorema 3.1 es

$$\delta^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 & 9 & 19 \\ 10 & 0 & 10 & 10 & 19 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 19 \\ 9 & 10 & 10 & 0 & 19 \\ 19 & 19 & 19 & 19 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Es sencillo comprobar que el siguiente ultramétrico que se muestra en la Fig. 10 con peso de raíz $q + \epsilon = 11$ satisface la caracterización de Bernstein pero no es un rayo extremo.

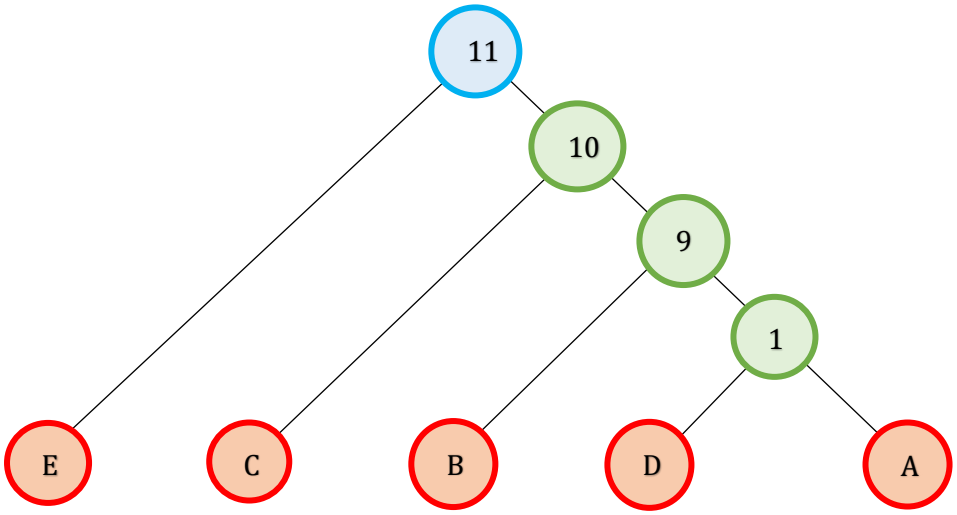


Fig. 10. La ultrametría no extrema construida desde la izquierda en la Fig. 8 satisface la caracterización.

5.3. Un contraejemplo basado en los datos biológicos de [8]

El contraejemplo dado anteriormente está lejos de ser único. Para mostrar esto, examinemos el ejemplo de n = 8. El mapa de disimilitud dado es

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 32 & 48 & 51 & 50 & 48 & 98 & 148 \\ 32 & 0 & 26 & 34 & 29 & 33 & 84 & 136 \\ 48 & 26 & 0 & 42 & 44 & 44 & 92 & 152 \\ 51 & 34 & 42 & 0 & 44 & 38 & 86 & 142 \\ 50 & 29 & 44 & 44 & 0 & 24 & 89 & 142 \\ 48 & 33 & 44 & 38 & 24 & 0 & 90 & 142 \\ 98 & 84 & 92 & 86 & 89 & 90 & 0 & 148 \\ 148 & 136 & 152 & 142 & 142 & 142 & 148 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Este conjunto de datos representa distancias inmunológicas entre el punto (D), el oso (B), el mapache (R), la comadreja (W), la foca (S), el león marino (SL), el gato (C), el mono (M). El ultramétrico más cercano dado por el teorema 3.1 es

$$\delta^* = \begin{pmatrix} 0 & 41 & 41 & 43 & 41 & 41 & 93 & 145 \\ 41 & 0 & 35 & 43 & 38 & 38 & 93 & 145 \\ 41 & 35 & 0 & 43 & 38 & 38 & 93 & 145 \\ 43 & 43 & 43 & 0 & 43 & 43 & 93 & 145 \\ 41 & 38 & 38 & 43 & 0 & 33 & 93 & 145 \\ 41 & 38 & 38 & 43 & 33 & 0 & 93 & 145 \\ 93 & 93 & 93 & 93 & 93 & 93 & 0 & 145 \\ 145 & 145 & 145 & 145 & 145 & 145 & 145 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Este ultramétrico corresponde al árbol de la Fig. 11. La ℓ^∞- distancia más cercana q = 9. Luego podemos construir la descripción exterior, que serán matrices de tamaño 224 × 29. Mediante el algoritmo de cálculo extremo, se encuentran 16 rayos extremos de la siguiente manera, donde cada columna representa un rayo extremo.

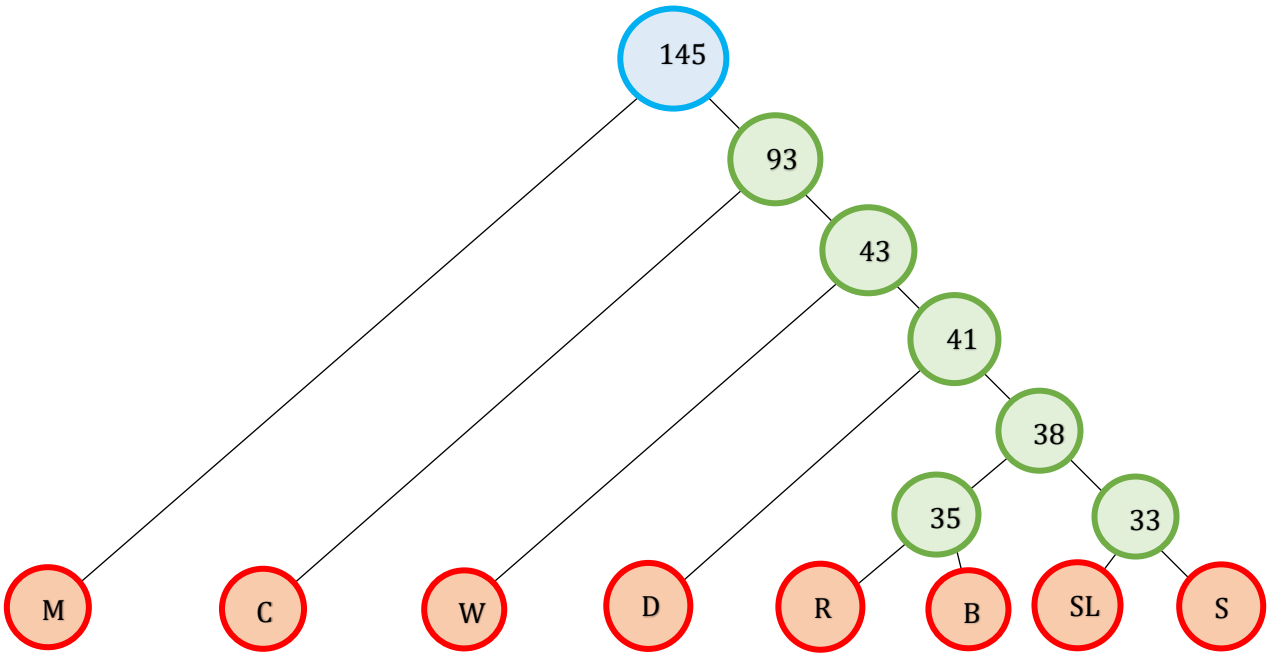


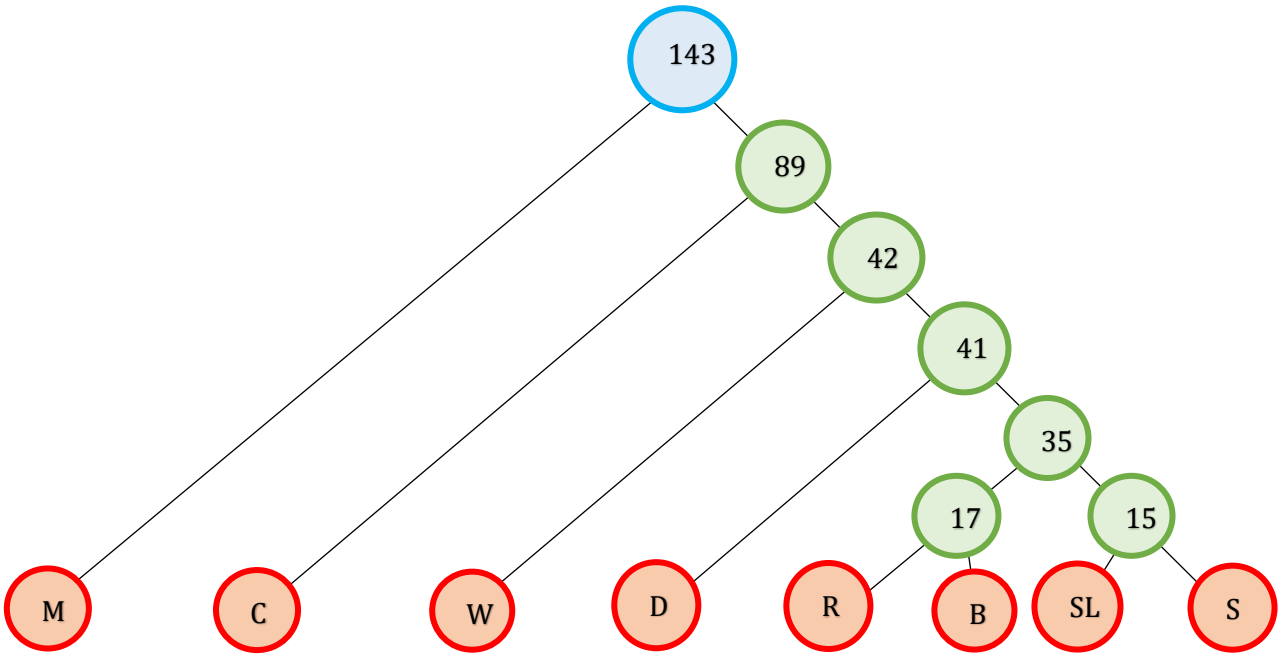
Fig. 11. Un ultramétrico obtenido por el teorema 3.1.

$$\begin{pmatrix}
41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 \\
41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 \\
42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 42 \\
41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 \\
41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 & 41 \\
89 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 \\
143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 \\
35 & 35 & 17 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 42 \\
24 & 20 & 35 & 24 & 24 & 33 & 24 & 20 & 20 & 20 & 20 & 35 & 35 & 38 & 35 & 35 \\
24 & 24 & 35 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 33 & 24 & 35 & 35 & 38 & 35 & 35 \\
89 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 \\
143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 \\
42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 42 \\
35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 38 & 35 & 35 \\
35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 38 & 35 & 35 \\
89 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 \\
143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 \\
42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 42 \\
42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 43 & 42 & 42 & 42 & 42 \\
89 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 \\
143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 \\
15 & 24 & 15 & 15 & 15 & 33 & 15 & 24 & 24 & 33 & 24 & 15 & 15 & 15 & 33 & 15 \\
89 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 \\
143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 \\
89 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 & 93 & 89 & 89 & 89 \\
143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 \\
143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 145 & 143 & 143 & 143 & 143 & 145
\end{pmatrix} \tag{5.7}$$

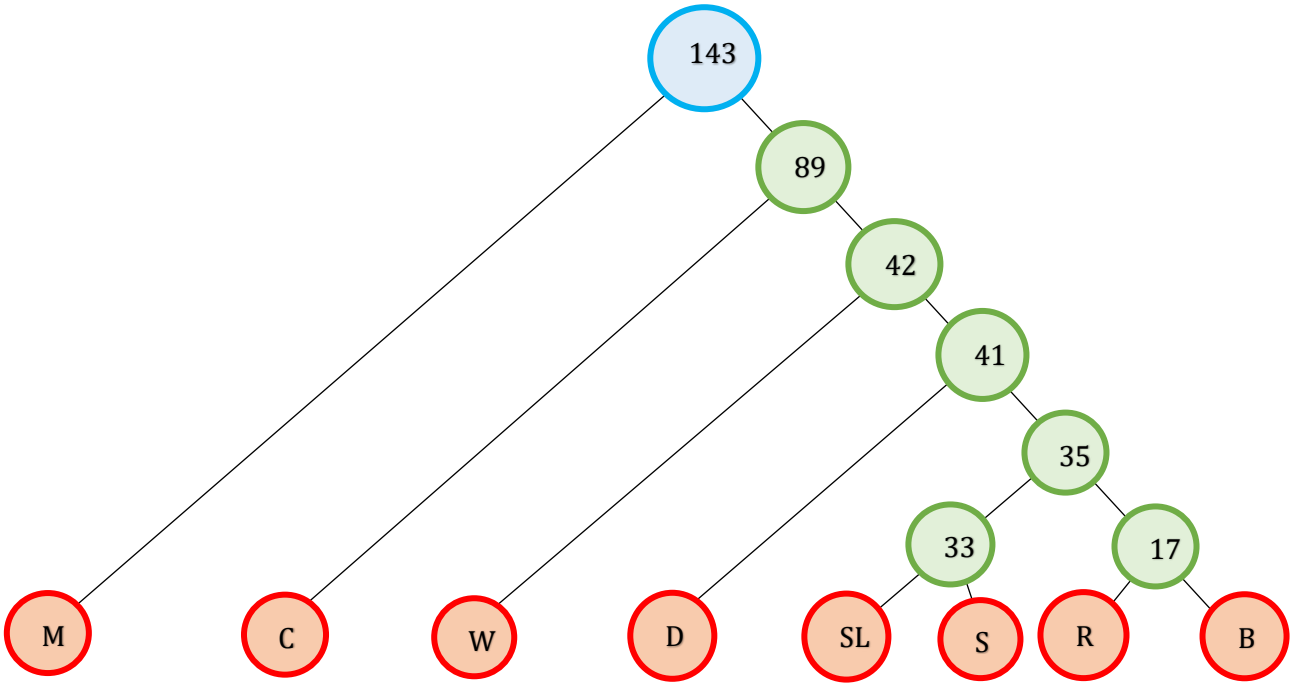
Los árboles correspondientes se muestran en la Fig.12. Los índices debajo de los árboles indican el orden en que están organizados en [8]. Tenga en cuenta que en (f), el nodo con peso 89 tiene un peso 93 en [8], lo que podría ser un error tipográfico en el artículo original. Hay 4 ultrametrías no extremas más que no cumplen con la caracterización, como se muestra en la Fig. 13.

6. Resumen

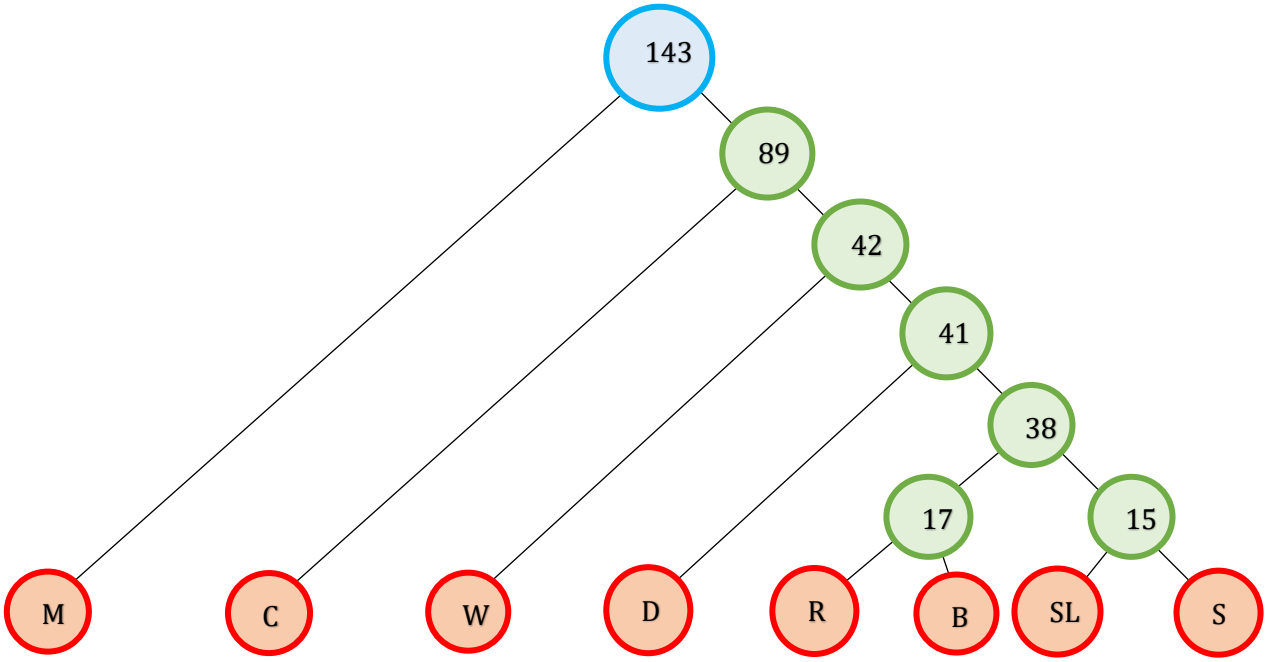
En esta tesis, demostramos que la caracterización de Bernstein [8] para los rayos extremos del politopo tropical formado por sistemas ultramétricos más cercanos a un mapa de disimilitud dado es suficiente si y sólo si n = 3. Primero damos la descripción exterior de este politopo tropical



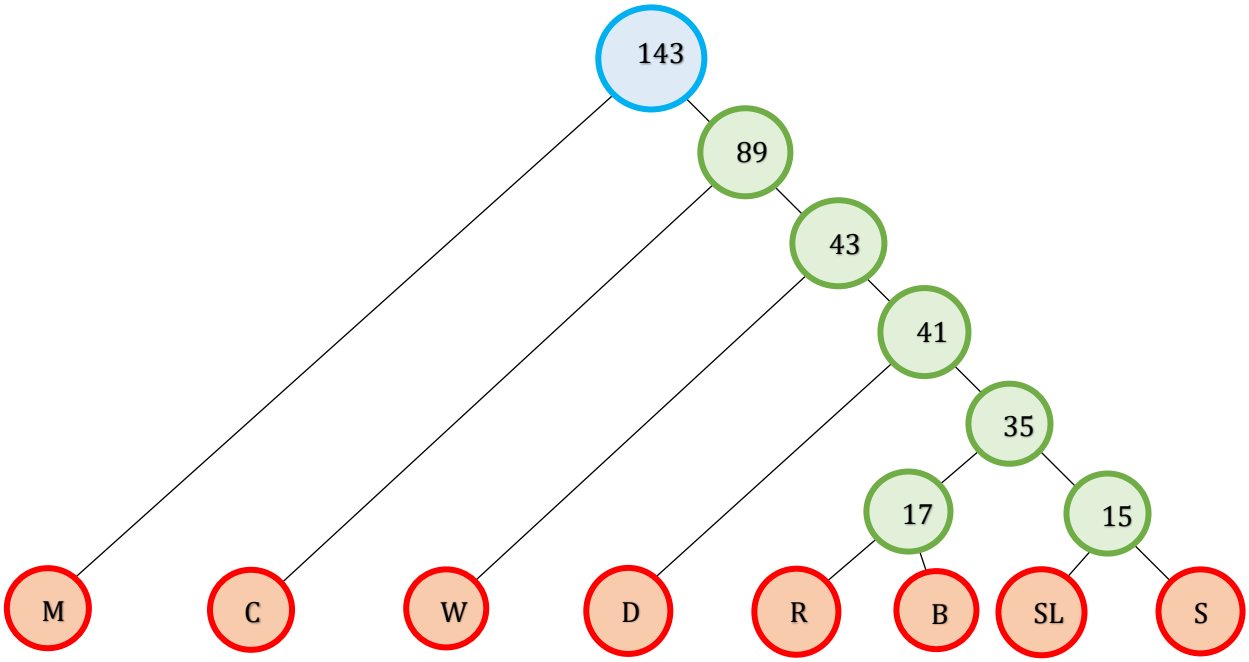
(a) No. 1



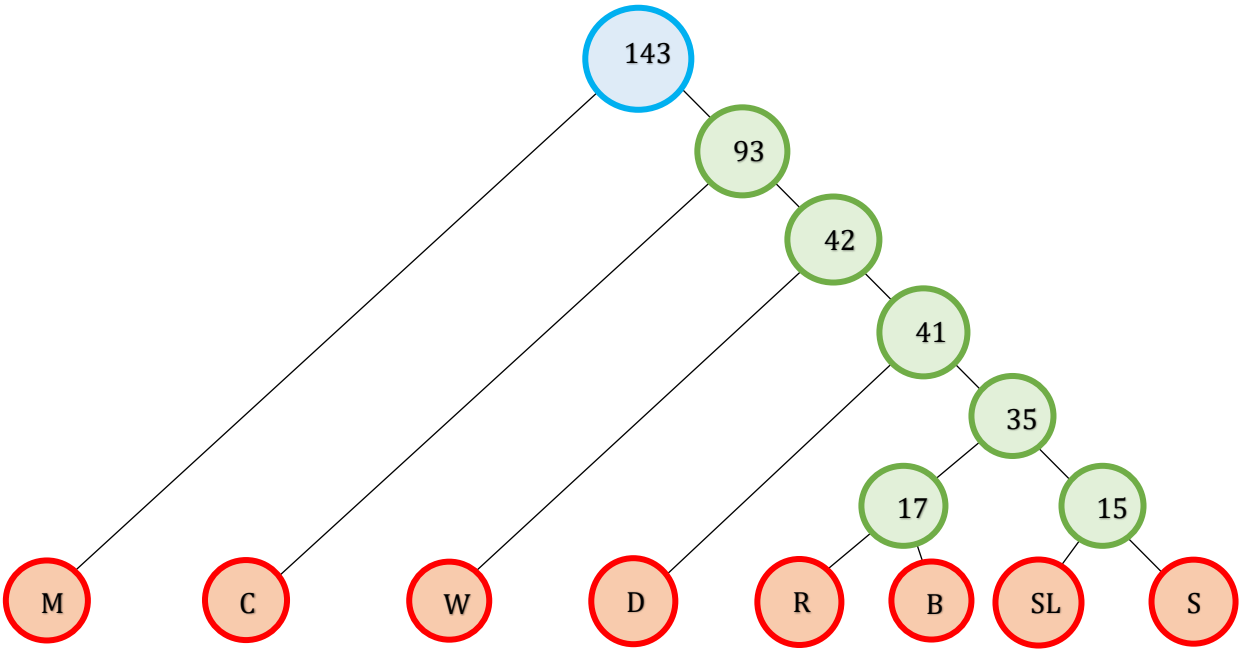
(b) No. 3



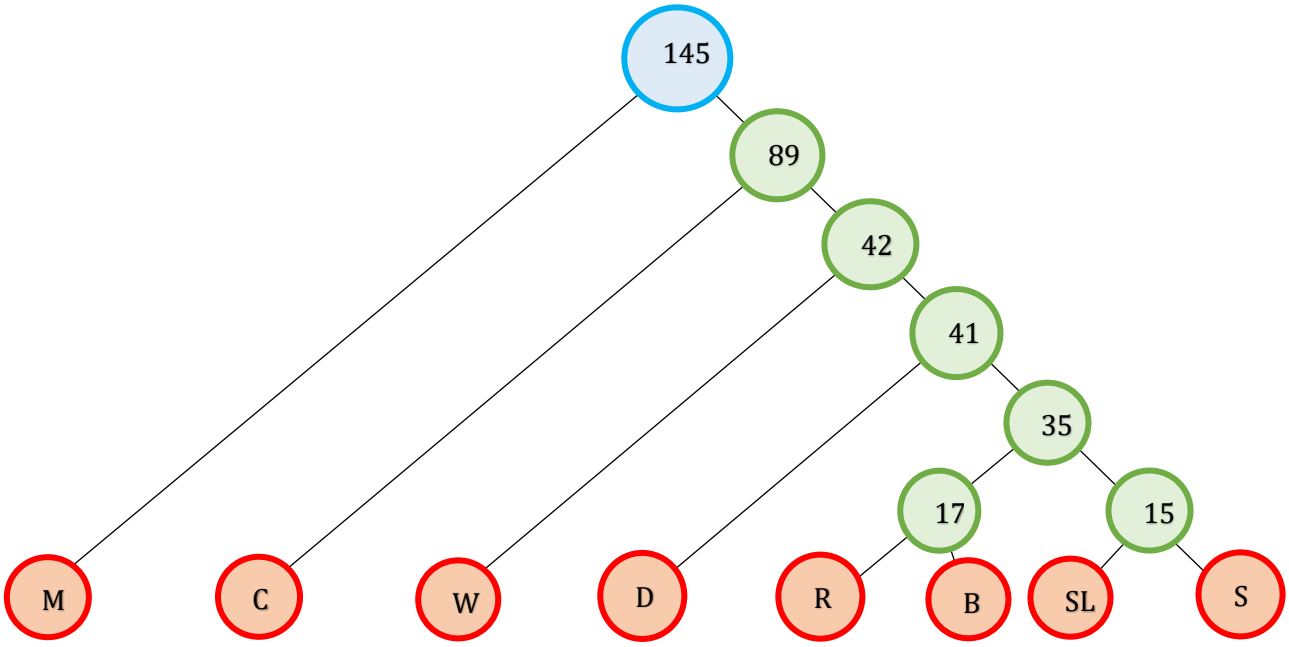
(c) No. 4



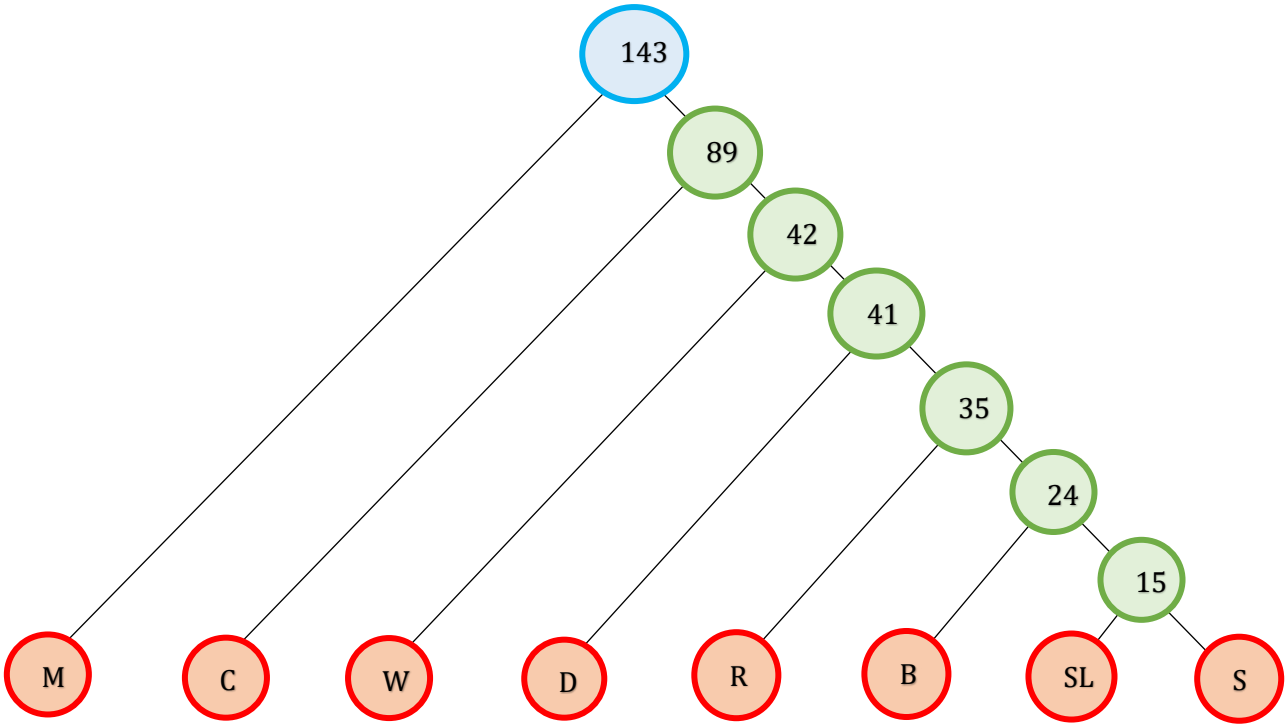
(d) No. 5



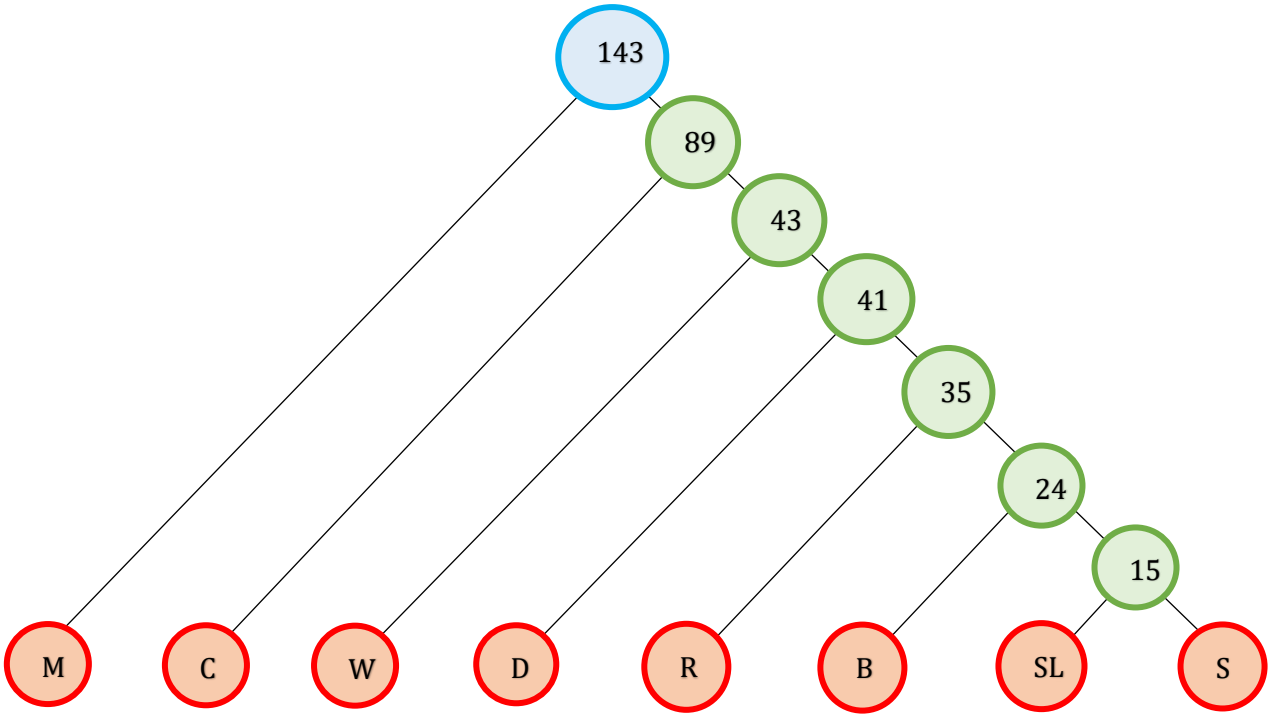
(e) No. 6



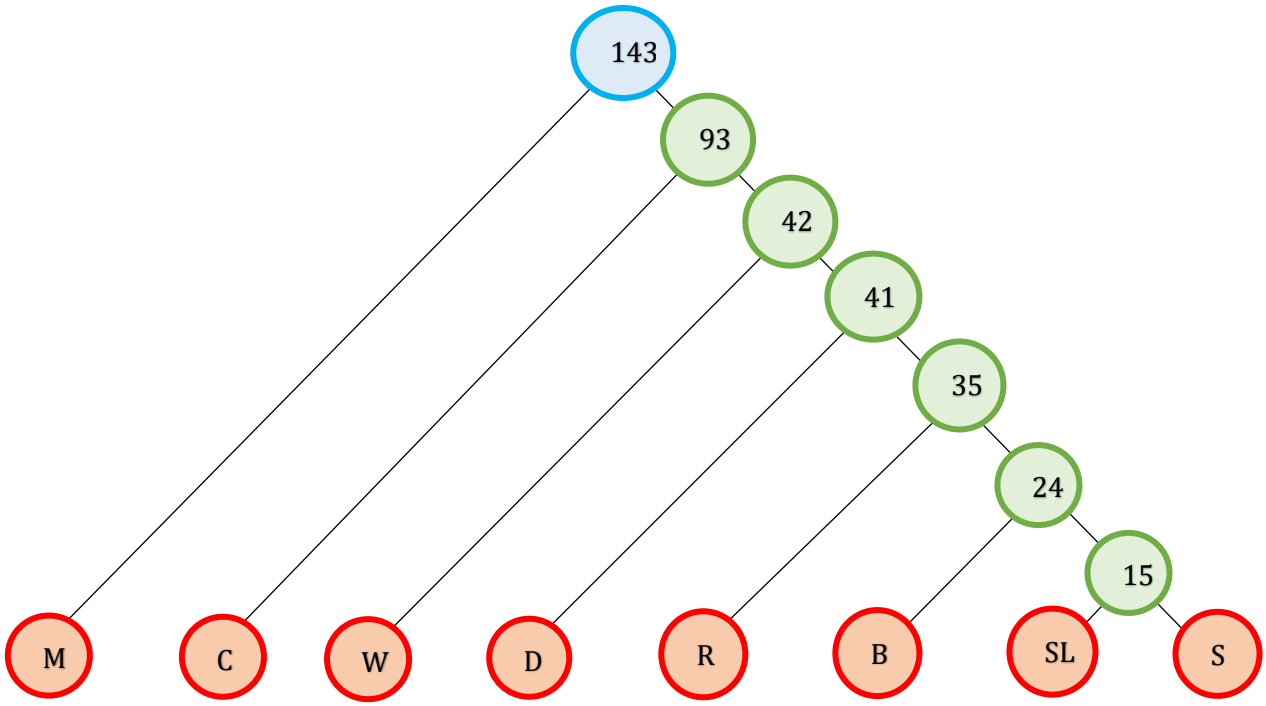
(f) No. 7 (*)



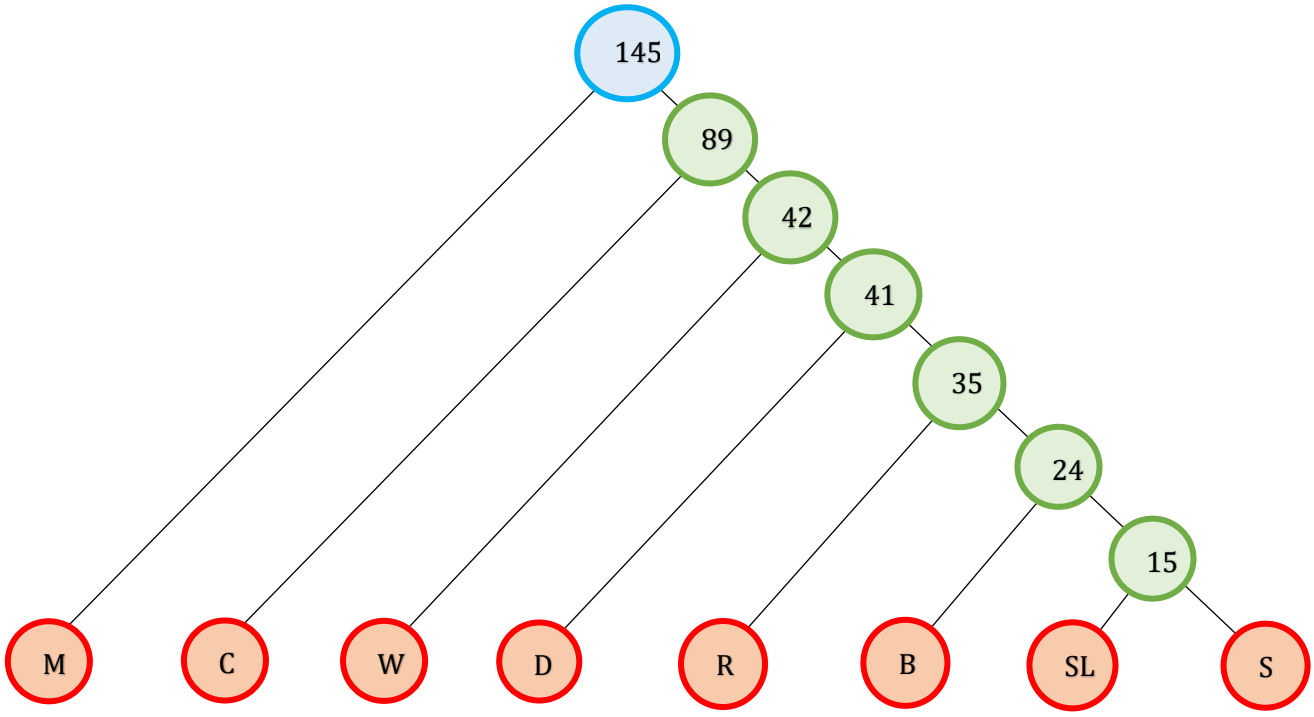
(g) No. 8



(h) No. 11

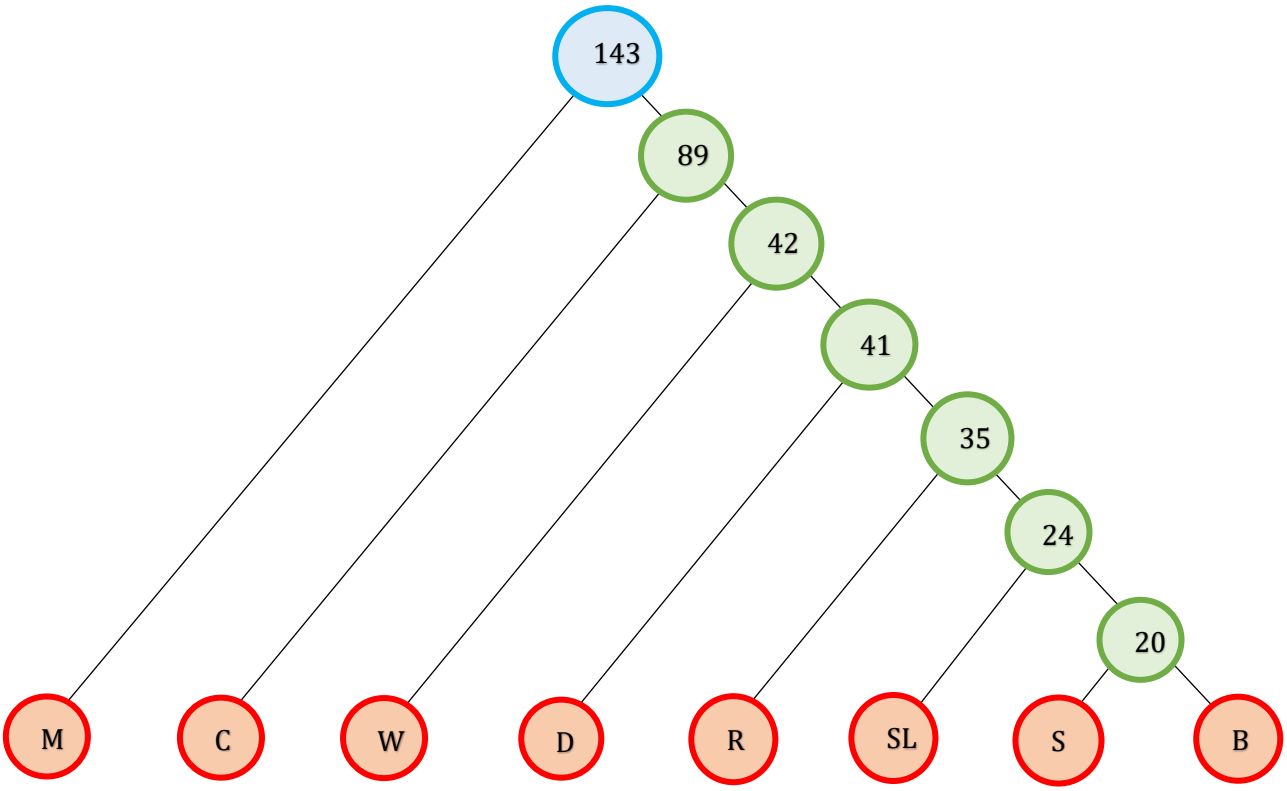


(i) No. 12

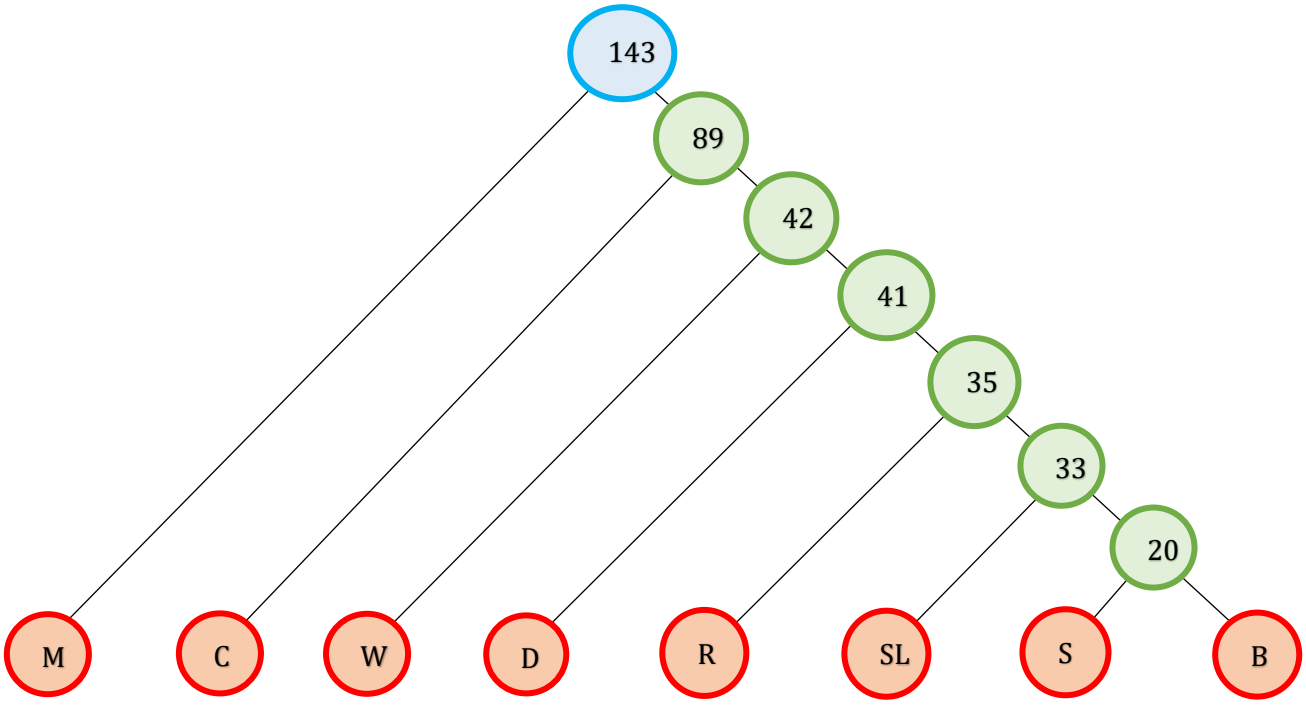


(j) No. 13

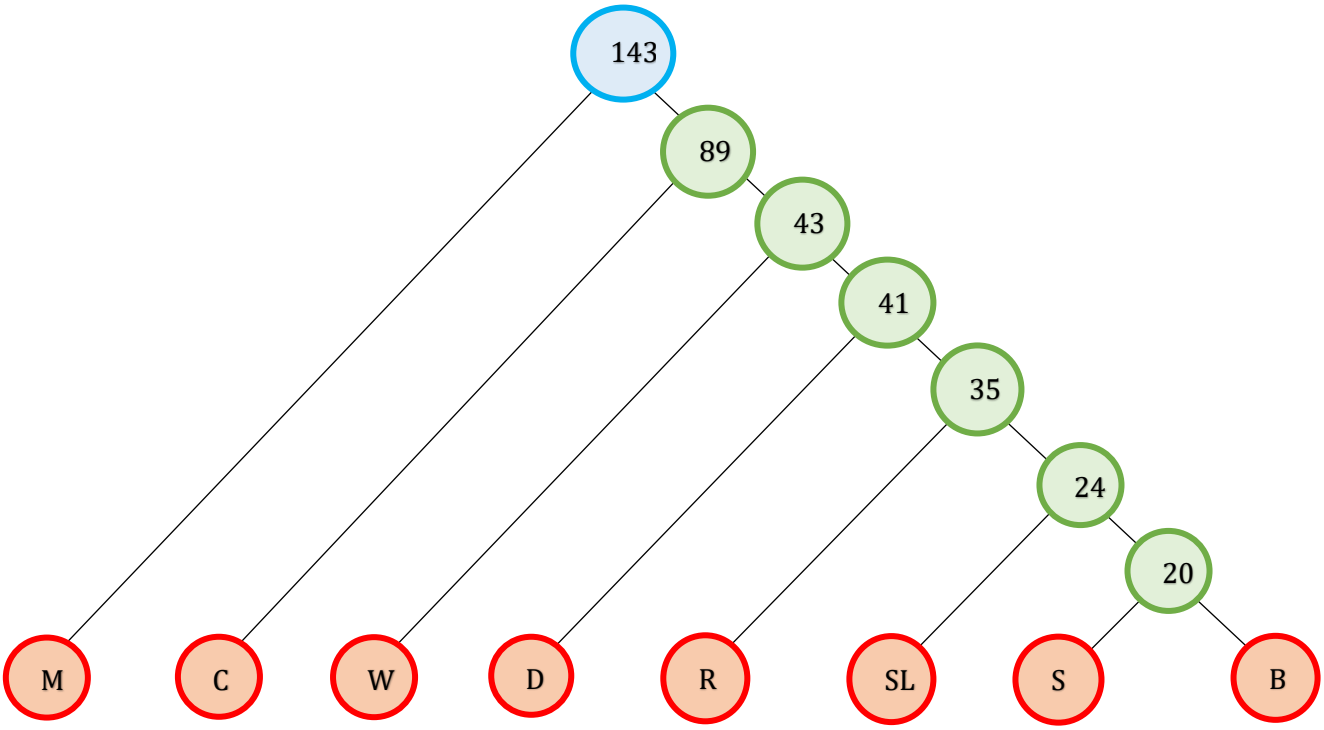
Fig. 12. Rayos extremos ℓ^∞- más cercanos al mapa de disimilitud dado por la ecuación (5.5).



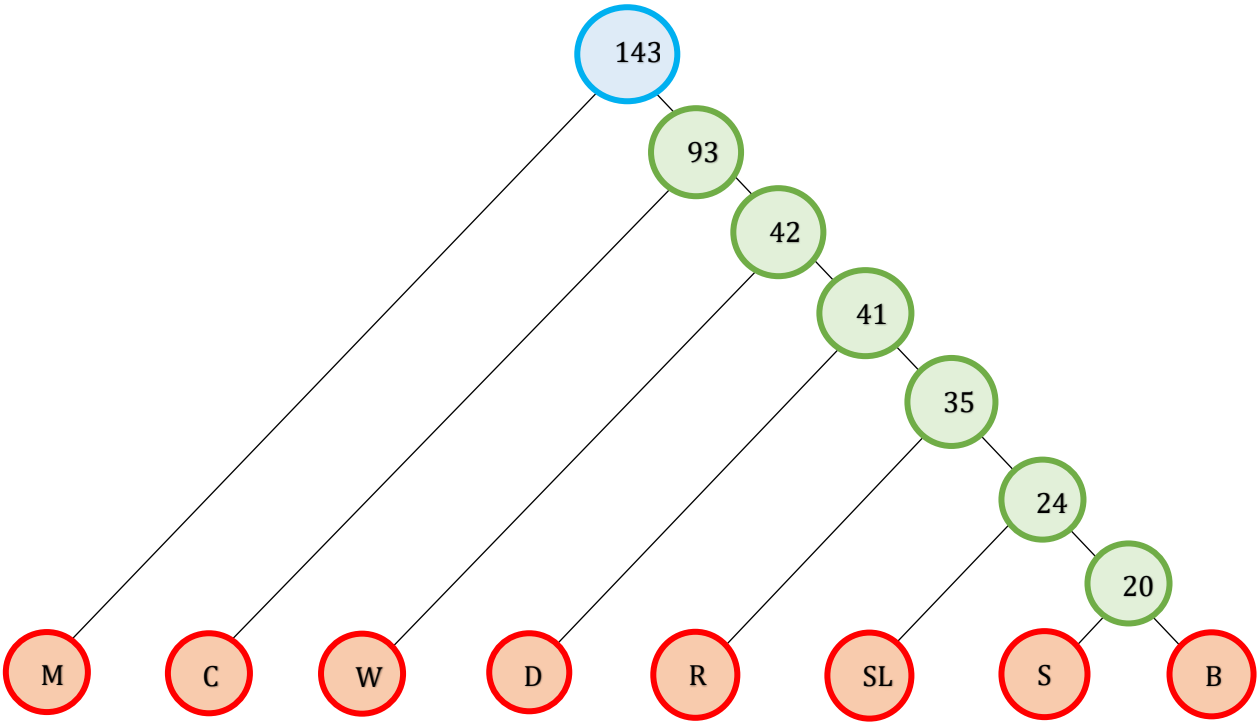
(k) No. 14



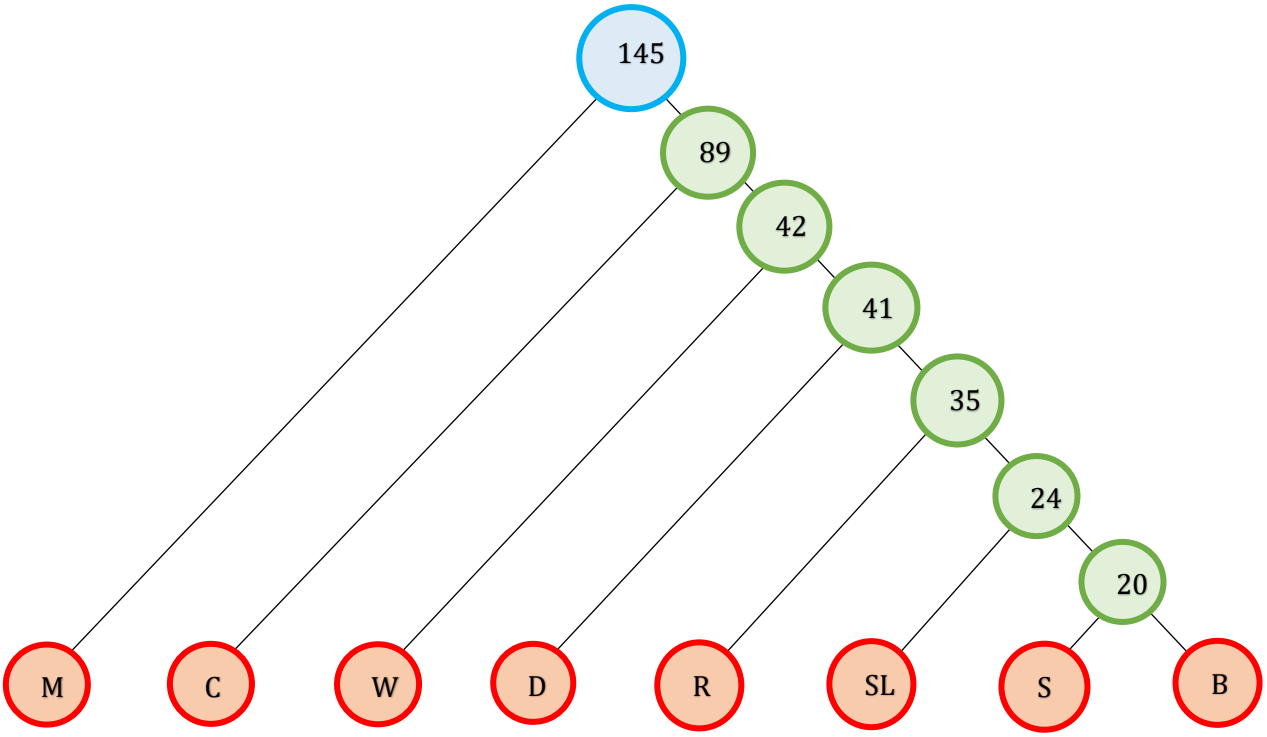
(I) No. 15



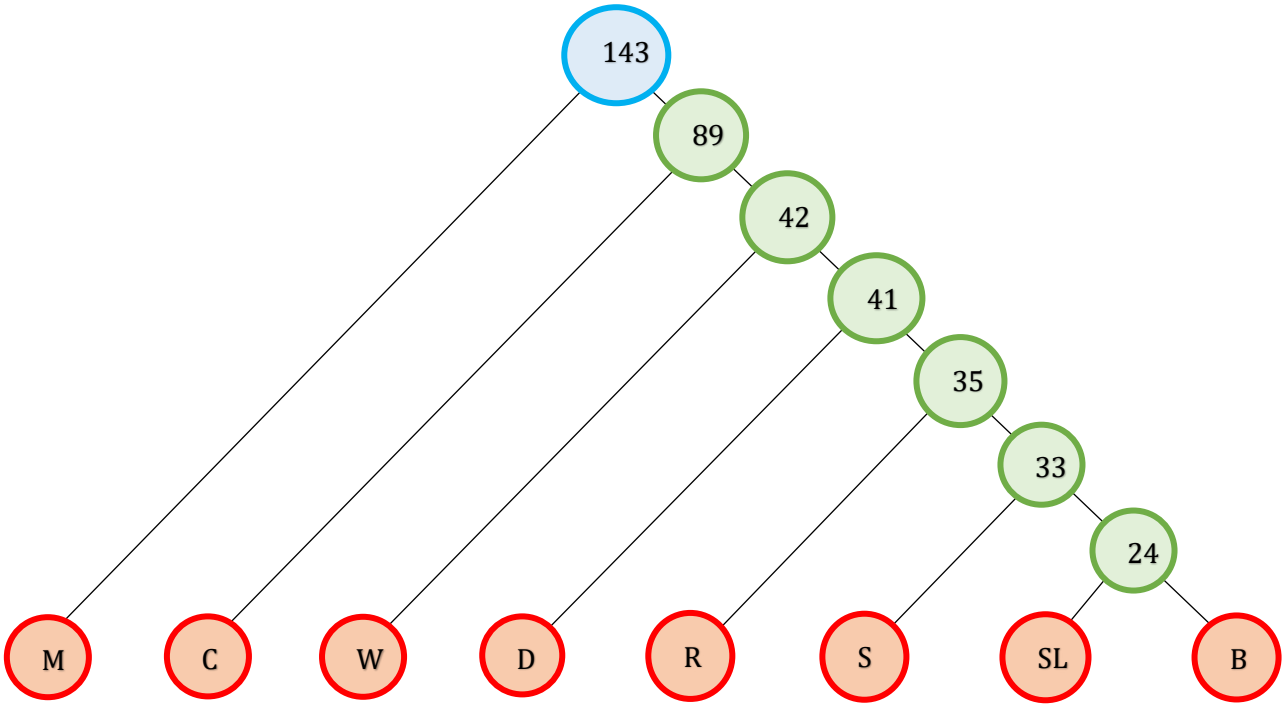
(m) No. 17



(n) No. 18



(o) No. 19



(p) No. 20

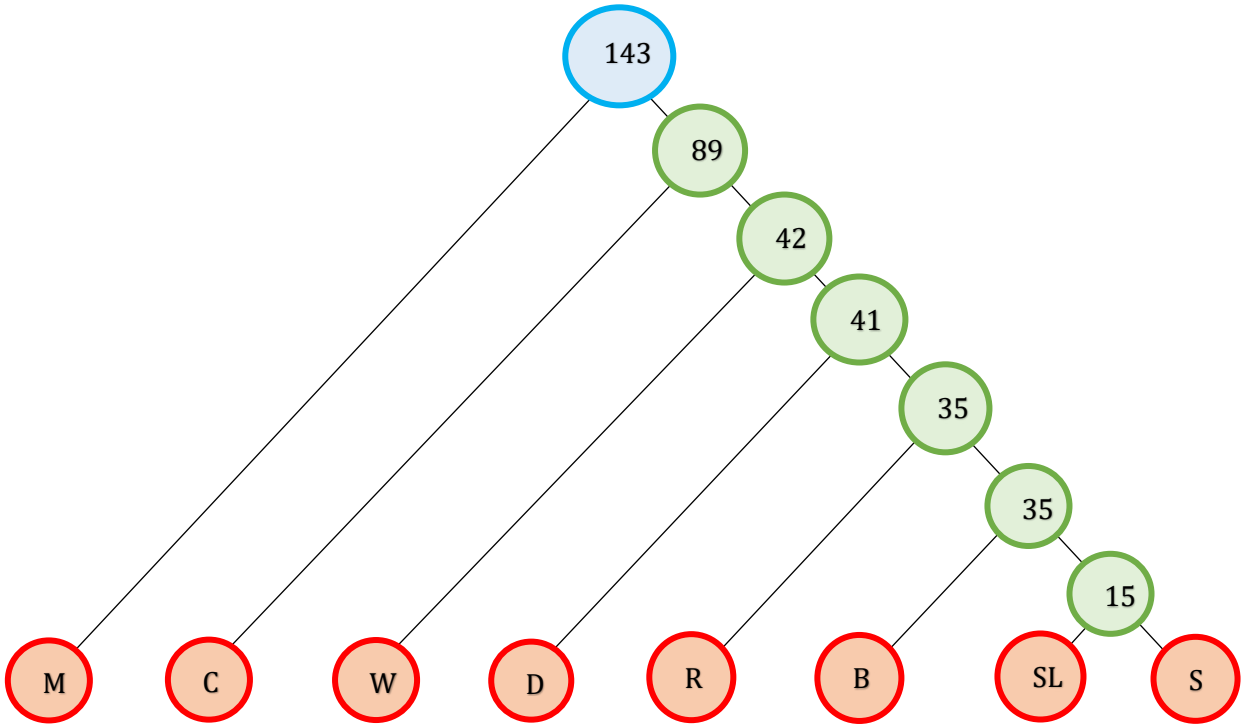
Fig. 12. (continuación)

Politopo, que puede usarse no sólo para el propósito de esta prueba, sino también para calcular todos los rayos extremos del politopo mediante el algoritmo propuesto en [9]. La prueba utiliza la técnica del hipergrafo dirigido tangente [14] que determina la extremalidad de un vector mediante la construcción del hipergrafo dirigido tangente basado en la descripción exterior del politopo tropical. La suficiencia $n = 3$ se prueba directamente mediante esta técnica y la insuficiencia $n \geq 4$ se prueba inductivamente.

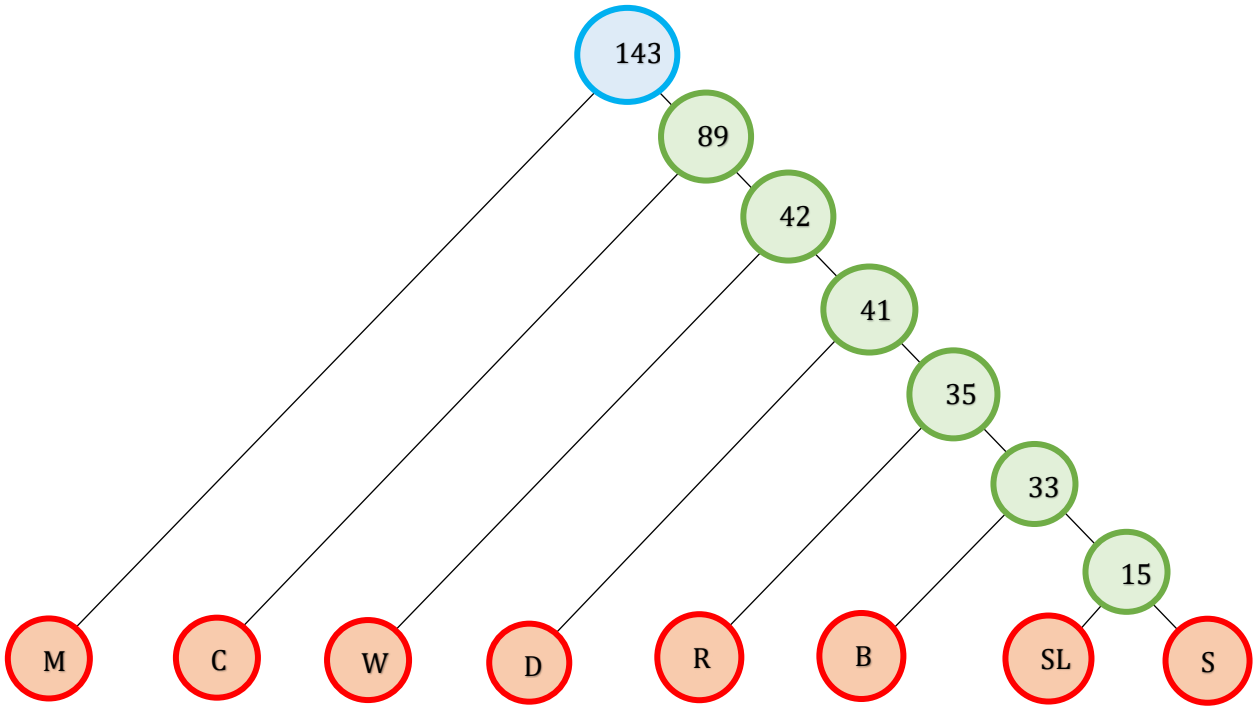
Hay dos preguntas abiertas importantes. Primero, ¿existe una caracterización directa de los árboles filogenéticos que distinga los extremos y los no extremos? Una posibilidad, por ejemplo, podría ser añadir algunas limitaciones adicionales a la caracterización de Bernstein. En segundo lugar, ¿existe un algoritmo eficiente para generar todos los rayos extremos de nuestro politopo en particular? El algoritmo existente de Allamigeon et al. Para casos generales crece exponencialmente con n ya que tanto las filas como las columnas de la matriz son crecientes.

Declaración de intereses contrapuestos

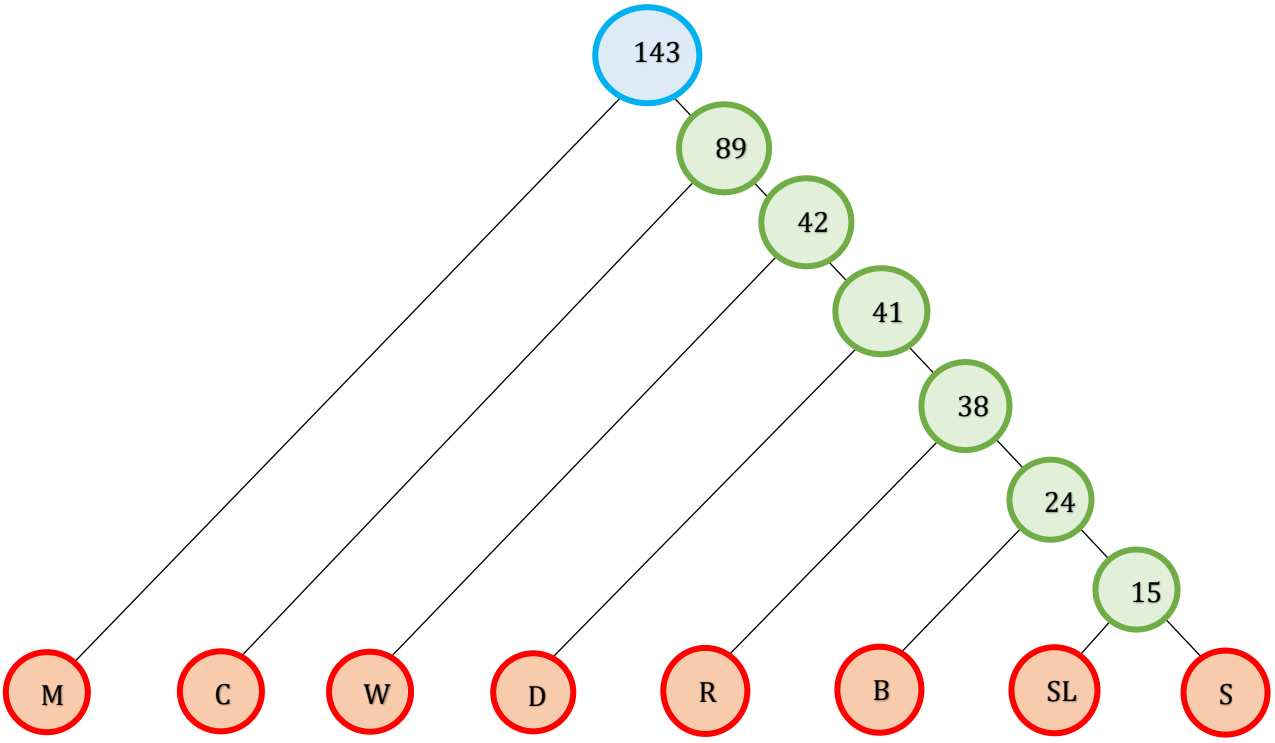
No hay intereses competitivos.



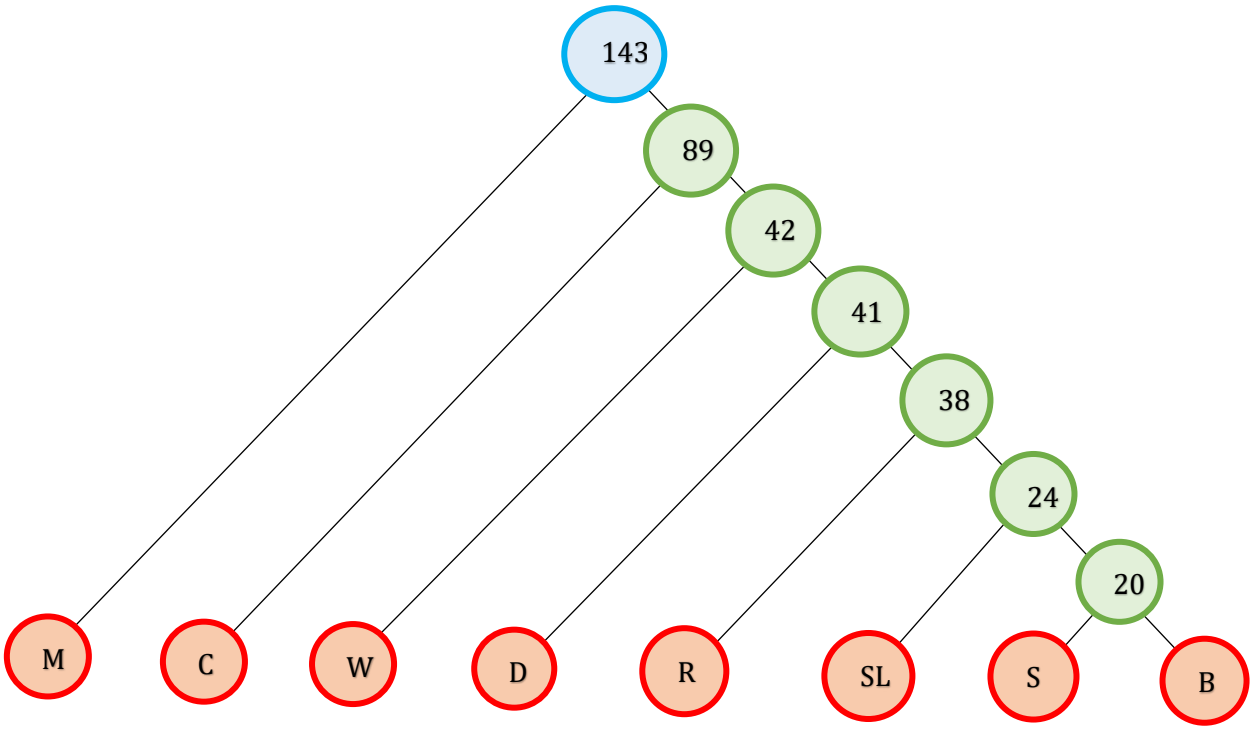
(a) No. 2



(b) No. 9



(c) No. 10



(d) No. 16

Fig. 13. Ultramétricas no extremas que satisfacen la caracterización.

Bibliografía

[**1**] Naoko Takezaki, Masatoshi Nei, Genetic distances and reconstruction of phylogenetic trees from microsatellite dna, Genetic 144 (1) (1996) 389-399.

[2] Naruya Saitou, Masatoshi Nei, The neighbor-joining method: a new method for reconstructing phylogenetic trees, Mol. Biol. Evol. 4 (4) (1987) 406-425.

[3] Korbinian Strimmer, Arndt Von Haeseler, Quartel puzzling: a quartet máximum-likelihood method for reconstructing tree topologies, Mol. Biol. Evol. 13 (7) (1996) 964-969.

[4] Federico Ardila, Caroline J. Klivans, The Bergman complex of a matroid and phylogenetic trees, J. Combin. Theory Ser. B 96 (1) (2006) 38-49.

[5] Bo Lin, Anthea Monod, Ruriko Yoshida, Tropical foundations for probability & statistics on phylogenetic tree space, arXiv preprint, arXiv: 1805. 12400, 2018.

[6] Christopher Manon, Phylogenetic trees and the tropical geometry of flag varieties, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. (2012).

[7] Ruriko Yoshida, Leon Zhang, Xu Zhang, Tropical principal component analysis and its application to phylogenetics, Bull. Math. Biol. 81 (2) (2019) 568-597.

[8] Daniel Irving Bernstein, L-infinity optimization to Bergman fans of matroids whith an application to phylogenetics, arXiv preprint, arXiv: 1702. 05141, 2017.

[9] Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert, Éric Goubault, Computing the vértices of tropical polyhedra using directed hypergraphs, Discrete Comput. Geom. 49 (2) (2013) 247-279.

[10] Diane Maclagan, Bernd Sturmfels, Introduction to Tropical Geometry, vol. 161, American Mathematical Soc., 2015.

[11] Peter Butkovič, Max-Linear Systems: Theory and Algorithms, Springer Science & Business Media, 2010.

[12] François Baccelli, Guy Cohen, Geert Jan Olsder, Jean-Pierre Quadrat, Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems, 1992.

[13] David Speyer, Bernd Sturmfels, Tropical mathematics, Math. Mag. 82 (3) (2009) 163-173.

[14] Xavier Allamigeon, On the complexity of strongly connected components in directed hypergraphs, Algorithmica 69 (2) (2014) 335-369.

[15] Stéphane Gaubert, Ricardo D. Katz, The Minkowski theorem for max-plus convex sets, Linear Algebra Appl. 421 (2-3) (2007) 356-369.

[16] Victor Chepoi, Bernard Fichet, 1(infinity)-approximation via subdominants, J. Math. Psych. 44 (4) (2000) 600-616.