Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Espacios de Gurariĭ no arquimedianos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Henrri Wilmer QUINO HUERTA

ASESOR

Dr. Alex Armando CRUZ HUALLPARA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Quino, H. (2024). *Espacios de Gurariĭ no arquimedianos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Henrri Wilmer Quino Huerta
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	73638903
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0005-1603-4955
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alex Armando Cruz Huallpara
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40949706
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-5453-6885
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Víctor Hilario Tarazona Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09264893
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Funcional.
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Ninguna.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024

URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:40 horas del sábado 28 de septiembre del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda (MIEMBRO) y el Dr. Alex Armando Cruz Huallpara (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: **"ESPACIOS DE GURARIĬ NO ARQUIMEDIANOS"**, presentado por el señor **Bachiller HENRRI WILMER QUINO HUERTA**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación de sobresaliente, con un calificativo promedio de diecisiete (17).

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller HENRRI WILMER QUINO HUERTA**, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 12:20 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda
MIEMBRO

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Alex Armando Cruz Huallpara en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001328-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"ESPACIOS DE GURARIĬ NO ARQUIMEDIANOS",** presentado por el bachiller **Henrri Wilmer Quino Huerta**, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documentoevaluado cuenta con el porcentaje de 6% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuarcon los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor

DNI:40949706

Resumen

Sea $\mathcal{U}_{FNA}$ la clase de todos los espacios de Banach no arquimedianos de dimensión finita. Se muestran las condiciones bajo las cuales existen espacios de Banach no arquimedianos de tipo contable sobre un campo $\mathbb{K}$ no arquimediano, completo y no trivialmente valuado, que tienen disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$. Sea $\mathbb{G}$ tal espacio. Esto significa:

Para cada isometría $\varphi : X \to Y$, donde $X, Y \in \mathcal{U}_{FNA}$ y X es un subespacio de $\mathbb{G}$, y para cada $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$, existe una ε-isometría $\psi : Y \to \mathbb{G}$ tal que $\psi(\varphi(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Los espacios que verifican la condición arriba mencionada se denominan espacios de Gurariĭ no arquimedianos $\mathbb{G}$. Se muestra que todos los espacios de Gurariĭ definidos sobre $\mathbb{K}$ son ε-isométricos. Además, todos los espacios de Gurariĭ son isométricamente isomorfos si y solo si $\mathbb{K}$ es esféricamente completo y $\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} = \langle 0, \infty\rangle$.

PALABRAS CLAVES: Análisis no arquimediano, espacio de Banach no arquimediano, campo no arquimediano, embebimiento isométrico, disposición casi universal, disposición universal.

Abstract

Let $\mathcal{U}_{FNA}$ be the class of all non-archimedean finite-dimensional Banach spaces. We present the conditions under which non-archimedean Banach spaces of countable type exist over a non-archimedean, complete, and non-trivially valued field $\mathbb{K}$, which have almost universal disposition for the class $\mathcal{U}_{FNA}$. Let $\mathbb{G}$ be such a space. This means:

For every isometry $\varphi : X \to Y$, where $X, Y \in \mathcal{U}_{FNA}$ and X is a subspace of $\mathbb{G}$, and for every $\varepsilon \in (0, 1)$, there exists an ε-isometry $\psi : Y \to \mathbb{G}$ such that $\psi(\varphi(x)) = x$ for all $x \in X$.

Spaces that satisfy the aforementioned condition are called non-archimedean Gurariĭ spaces $\mathbb{G}$. We show that all Gurariĭ spaces defined over $\mathbb{K}$ are ε-isometric. Furthermore, all Gurariĭ spaces are isometrically isomorphic if and only if $\mathbb{K}$ is spherically complete and $\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} = (0, \infty)$.

KEYWORDS: Non-archimedean analysis, non-archimedean Banach space, isometric embedding, non-archimedean field, almost universal disposition, universal disposition.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Preliminares **3**
2.1. Campos no arquimedianos 3
2.2. Espacios ultramétricos 10
2.3. Análisis ultramétrico en campos valuados 21
2.4. Espacios normados no arquimedianos 28

3. Espacios de Banach no arquimedianos **37**
3.1. Completitud en espacios normados no arquimedianos 37
3.2. Ortogonalidad y sistemas ortogonales en espacios normados no arquimedianos 54
3.3. Bases de espacios de Banach no arquimedianos y espacios de tipo contable 76
3.4. Compleción, completitud esférica y bases de espacios de Banach no arquimedianos 94

4. Espacios de Banach de disposición casi universal y disposición universal **113**
4.1. Espacios de Banach no arquimedianos de disposición casi universal para espacios de dimensión finita 114
4.2. Espacios de Banach no arquimedianos de disposición universal para espacios de dimensión finita 126
4.3. Conclusión 129

A. **130**
A.1. Relación de orden parcial y Lema de Zorn 130

Capítulo 1

Introducción

Motivación de la tesis:

En 1966, el matemático ruso Vladimir Ivanovich Gurariĭ, construyó un espacio de Banach $\mathbb{G}$ separable (real) de *disposición casi universal* para espacios de dimensión finita (llamado más tarde el espacio de Gurariĭ). Ver en [3]. Lo que significa lo siguiente:

Para cada isometría (lineal) $g : X \to Y$, donde Y es un espacio de Banach de dimensión finita y X es un subespacio de $\mathbb{G}$, y para cada $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$ existe una ε-isometría $f : Y \to \mathbb{G}$ tal que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Un operador lineal $f : E \to F$ entre espacios de Banach E y F es una ε-isometría si se cumple $(1+\varepsilon)^{-1}\|x\| < \|f(x)\| < (1+\varepsilon)\|x\|$ para cada $x \in E$. Por isometría nos referimos a un operador lineal $f : E \to F$ que es una ε-isometría para cada $\varepsilon > 0$, es decir, $\|f(x)\| = \|x\|$ para cada $x \in E$.

El espacio de Gurariĭ $\mathbb{G}$ es único salvo isomorfismo de norma arbitrariamente cercana a uno. Sin embargo, la pregunta de si el espacio de Gurariĭ es único salvo isometría quedó abierta durante más tiempo. Fue respondida afirmativamente por Lusky en 1976, ver [6], quien utilizó métodos bastante técnicos y difíciles que involucran técnicas desarrolladas por Lazar y Lindenstrauss [5]. Una prueba mucho más simple ha sido proporcionada por Kubiś y Solecki en 2013, ver [7].

Un espacio normado E es separable si contiene un subconjunto denso numerable, lo que implica que sus subespacios unidimensionales son homeomorfos al campo K. Si E es separable, K también lo es. Sin embargo, existen campos K no separables [11], limitando la aplicabilidad del concepto de separabilidad en espacios normados. Esta limitación se supera al introducir el concepto de «tipo contable», que se refiere a un subconjunto numerable cuya envoltura lineal es densa en E, permitiendo el uso de técnicas analíticas en espacios sobre campos no arquimedianos.

En el presente trabajo de tesis, estudiamos las contrapartes no arquimedianas de lo que se ha mencionado anteriormente, que fueron desarrolladas por J. Kąkol, Kubiś y A. Kubzdela en su artículo de 2017, [8].

Estructura de la tesis:

En el Capítulo 2 se establecen los conceptos fundamentales para el estudio de los campos no arquimedianos y su relación con los espacios ultramétricos. Para los conceptos básicos de álgebra lineal, se ha consultado extensamente el texto de Hoffman y Kunze [4], mientras que la teoría de campos se apoya en el trabajo de Dorronsoro y Hernández [1]. Para la teoría específica de los campos no arquimedianos, se hace referencia al trabajo de Gouvêa [2] y Van Rooij [13], que proporcionan una introducción clara al análisis de estos campos.

Un punto central de este capítulo es la clasificación de los campos no arquimedianos mediante la Proposición 2.3.7, que establece que un campo no arquimediano puede tener una valoración discreta o densa, lo cual influye en la estructura de los valores absolutos del campo. Esta clasificación es clave para entender cómo se comportan las normas y bases de los espacios normados definidos sobre estos campos.

Además, se menciona que no siempre es posible encontrar un elemento x en el espacio normado con $\|x\| = 1$ en ciertos espacios normados no arquimedianos, lo que tendrá consecuencias en la construcción de bases y en el análisis funcional en los capítulos posteriores. El análisis ultramétrico introducido aquí sienta las bases para el estudio de los espacios normados y completitud que se exploran a profundidad en el Capítulo 3.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de los espacios de Banach no arquimedianos, y en particular, se enfatiza la sumabilidad en estos espacios. Para los resultados sobre espacios se hace uso extensivo de los trabajos de Schikhof [12] y Perez-Garcia Shikhof [11], que presentan una visión detallada del análisis de los espacios normados no arquimedianos.

Un aspecto crucial de este capítulo es el análisis de los espacios de tipo contable. Se demuestra que si un espacio tiene una base, entonces es necesariamente de tipo contable, aunque lo inverso no siempre es cierto. Esto lleva a una discusión detallada sobre la existencia de bases $t-$ortogonales para $0 < t < 1$ y la imposibilidad de construir bases ortogonales cuando $t = 1$, lo que se ejemplifica en el espacio $(\mathbb{K}^2, \nu)$ desarrollado en la Proposición 3.4.6.

La completitud esférica del campo $\mathbb{K}$ juega un papel crucial en la existencia de bases ortogonales, Teorema. Si $\mathbb{K}$ es esféricamente completo, es posible construir bases ortogonales en los espacios normados sobre este campo, lo cual facilita el desarrollo de isometrías y embebimientos. Este concepto será clave en el estudio de los espacios de disposición universal en el Capítulo 4

El Capítulo 4 se centra en el análisis de los espacios de Banach de disposición casi universal y disposición universal en el contexto no arquimediano. El trabajo desarrollado en este capítulo se basa enteramente en el artículo publicado por J. Kąkol, Kubiś y A. Kubzdela en 2017, según [8], en el cual se introducen los espacios de Gurariĭ no arquimedianos. Este artículo ha sido consultado ampliamente, y también se ha revisado la bibliografía que contiene, la cual incluye la íntima relación entre los espacios de tipo contable, la disposición casi universal y la disposición universal.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Campos no arquimedianos

En $\mathbb{R}$, una propiedad esencial es el *principio de Arquímedes*, o principio arquimediano, que se enuncia como:

Dado $x \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > 1$.

Este principio no está restringido a $\mathbb{R}$, sino que se extiende a una estructura algebraica más general llamada campo. Un campo que satisface el Principio arquimediano se denomina *campo arquimediano*; sin embargo, no todo campo es arquimediano. Por ello, en esta sección nos concentramos en construir e identificar las características o condiciones necesarias y suficientes para extender el principio arquimediano conocido en $\mathbb{R}$ a otros campos o cuerpos (como también se les denomina en la literatura matemática en español). Principalmente, nos interesa caracterizar a los campos que no son arquimedianos a los cuales naturalmente se les denomina *campos no arquimedianos*.

Comenzamos esta sección poniendo las definiciones necesarias para lograr el objetivo arriba mencionado. No abordamos de manera exhaustiva la teoría de grupos, anillos y campos en general, estas definiciones y algunos ejemplos pueden ser revisadas en [1].

Definición 2.1.1. Sea $\mathcal{A} \neq \emptyset$. El par $(\mathcal{A}, \bullet)$ se denomina *grupo* si:

1. "$\bullet$" es una *ley de composición interna*. Esto significa que existe una operación

$$\bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad \text{definida por} \quad (a, b) \mapsto a \bullet b.$$

2. "$\bullet$" es asociativa: Para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$ se cumple $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

3. Existencia del elemento neutro: Existe $e \in \mathcal{A} : a \bullet e = e \bullet a = a$, para todo $a \in \mathcal{A}$.

4. Existencia del inverso: Para cada $a \in \mathcal{A}$ existe $a' \in \mathcal{A}$ tal que $a \bullet a' = a' \bullet a = e$.

Observación 2.1.1. Si "$\bullet$" es conmutativa, entonces $(\mathcal{A}, \bullet)$ se *denomina grupo conmutativo* o *grupo abeliano*.

Ejemplo 2.1.1. Sea $p \in \mathbb{Z}$, primo, entonces $\left(\mathbb{Z}_p^*, \bullet\right)$ es un grupo [⋆], donde "$\bullet$" es el producto usual de clases residuales módulo p. Por otro lado, si $\left(\mathbb{Z}_p^*, \bullet\right)$ es un grupo, con $p > 1$, entonces p es primo. ■

Definición 2.1.2. Sea $(\mathcal{A}, \bullet)$ un grupo y H subconjunto no vacío de $\mathcal{A}$. Decimos que H es un *subgrupo* de $\mathcal{A}$ si H, con la ley de composición interna "$\bullet$", es un grupo.

La Proposición 2.1.1 permite verificar de manera inmediata si un subconjunto de un grupo tiene estructura de grupo.

Proposición 2.1.1. Sean $(\mathcal{A}, \bullet)$ un grupo y H subconjunto no vacío de $\mathcal{A}$. Son equivalentes:

1. H es subgrupo de $\mathcal{A}$.
2. $a \bullet b' \in H$ para todo $a, b \in H$, donde b' es el inverso de b.

Demostración.
[$1 \Rightarrow 2$] Sea $a, b \in H$. Como $b \in H$, entonces existe $b' \in H$. Así, $a \bullet b' \in H$.

[$2 \Rightarrow 1$] Como $H \neq \emptyset$, existe $x \in H$.

- Si tomamos $a = x$ y $b = x$, entonces por hipótesis $x \bullet x' \in \mathcal{A}$. Luego, $e = x \bullet x' \in H$, es decir, existe en H el elemento neutro.
- Como $e, x \in H$, entonces $x' = e \bullet x' \in H$, es decir, existe en H el inverso de cada elemento de H.
- "$\bullet$" es asociativa en $\mathcal{A}$, en particular lo es en H.
- Verifiquemos que "$\bullet$" es una ley interna en H. En efecto, sean $x, y \in H$ entonces $y', (y')' \in H$. Así $x \bullet y = x \bullet (y')' \in H$.

Concluimos que $(H, \bullet)$ es un grupo. □

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{A} \neq \emptyset$ provisto de dos leyes de composición interna, *suma* $(+)$ y *producto* $(\bullet)$. La terna $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ se llama *anillo* si se satisface:

1. $(\mathcal{A}, +)$ es un grupo abeliano.
2. "$\bullet$" es asociativa.
3. Se cumplen las leyes de distributividad

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ba + ca$$

para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$.

[⋆] $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}$.

Observación 2.1.2.

- Si en el anillo $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ el producto es conmutativo, entonces $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ es un *anillo conmutativo*.
- Si en el anillo $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ existe un elemento, el cual denotaremos con 1, que satisface

$$a1 = a = 1a, \quad \text{para todo } a \in \mathcal{A}$$

se dice que $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ es un *anillo con unidad*, y 1 es su *elemento unidad*. Además, este elemento unidad es único.

Ejemplo 2.1.2. $(\mathbb{Z}_p, +, \bullet)$, con $p \in \mathbb{N}$ primo, es un anillo conmutativo. Aquí, $+$ y $\bullet$ representan la suma y el producto de clases residuales módulo p, respectivamente. ■

Definición 2.1.4. Un anillo $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ conmutativo con unidad, donde $(\mathcal{A}^*, \bullet)$ es un grupo, se llama *campo*. Aquí,

$$A^* = \mathcal{A} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad 0 \text{ es el neutro de } (\mathcal{A}, +)\,.$$

Ejemplo 2.1.3. $(\mathbb{Z}_p, +, \bullet)$, con $p \in \mathbb{N}$ primo, es un campo. ■

Ejemplo 2.1.4. $\mathbb{Q}$, con la suma usual y el producto usual, es un campo. ■

Definición 2.1.5. Un campo $\mathcal{A}$ se llama *campo valuado* o campo valorado, si existe una función (llamada *función de valoración*) $|\cdot| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $|a| \geq 0, \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$
2. $|ab| = |a||b|.$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$, (desigualdad triangular).

Observación 2.1.3. Cuando decimos que un campo es *no trivialmente valuado*, nos referimos a que la función de valoración no es trivial, es decir, aquella que no asigna la misma valoración a todo los elementos del campo excepto al cero.

Proposición 2.1.2. Dado un campo $\mathcal{A}$, denotemos por $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ el valor absoluto usual de $\mathbb{R}$. Entonces:

1. $|-a| = |a|$ para todo $a \in A$. Además, $|1_{\mathcal{A}}| = |-1_{\mathcal{A}}| = 1$.
2. $|\,|a| - |b|\,|_{\mathbb{R}} \leq |a - b|$, para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Demostración. En efecto. Sean $a, b \in \mathcal{A}$.

[1] Notemos que $|1_{\mathcal{A}}| = |1_{\mathcal{A}} \bullet 1_{\mathcal{A}}| = |1_{\mathcal{A}}| \cdot |1_{\mathcal{A}}|$, luego $|1_{\mathcal{A}}| = 1$. Por la propiedad de los campos, $(-1_{\mathcal{A}}) \bullet (-1)_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}} \bullet 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$. Así:

$$|1_{\mathcal{A}}| = |-1_{\mathcal{A}}| = 1.$$

Entonces:

$$|-d| = |d(-1_{\mathcal{A}})| = |d| \cdot |-1_{\mathcal{A}}| = |d|$$

[2] Podemos hacer

- $|a| \leq |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$, entonces $|a|-|b| \leq |a-b|$.
- $|b| \leq |(a-b)+(-a)| \leq |a-b|+|-a|$, entonces $-|a-b| \leq |a|-|b|$.

Entonces:

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|.$$

Y así:

$$||a|-|b||_{\mathbb{R}} \leq |a-b|.$$

□

Ejemplo 2.1.5. Vamos a construir una función de valoración en $\mathbb{Q}$ diferente al valor absoluto usual. Fijado $p \in \mathbb{N}$ con p primo, para cada $x \in \mathbb{Q}$ definimos

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } x = 0 \\ \\ p^{-v_p(x)} & ; \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

donde, si $x \in \mathbb{Z}^*$, entonces $v_p(x) := \text{máx}\{\alpha \in \mathbb{N} : p^\alpha \text{ divide a } x\}$. Si $x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$, entonces $v_p(x) := v_p(m) - v_p(n)$.

La buena definición en $\mathbb{Q}^*$ se verifica al final, una vez que conozcamos las propiedades de $v_p(\cdot)$ en $\mathbb{Z}^*$, donde claramente está bien definido.

Veamos que $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función de valoración, es decir, el campo $\mathbb{Q}$ es un campo valuado. En efecto:

- Dado $p > 0$, se sigue que $p^{-v_p(x)} > 0$. Si $|x|_p = 0$, supongamos que $x \neq 0$, luego $p^{-v_p(x)} = 0$, lo cual es absurdo. Así, $|x|_p = 0$ si y solo si $x = 0$.
- Primero, veamos que $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$: Si $x, y \in \mathbb{Z}^*$ tenemos $p^{v_p(x)+v_p(y)}$ divide a xy, luego $v_p(x) + v_p(y) \leq v_p(xy)$. Por otra parte, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_p(xy) = \alpha_1 + \alpha_2$, donde p^{α_1} divide a x y p^{α_2} divide a y. Así, $v_p(xy) = \alpha_1 + \alpha_2 \leq v_p)x + v_p(y)$. Ahora, si $x = m/n$ y $y = r/s$, entonces:

$$\begin{aligned} v_p(xy) = v_p\left(\frac{mr}{ns}\right) &= v_p(mr) - v_p(ns) = (v_p(m) + v_p(r)) - (v_p(n) + v_p(s)) \\ &= (v_p(m) - v_p(n)) + (v_p(r) - v_p(s)) = v_p\left(\frac{m}{n}\right) + v_p\left(\frac{r}{s}\right) = v_p(x) + v_p(y). \end{aligned}$$

  Ahora vemos que $|xy|_p = |x|_p|y|_p$. En efecto:

$$|xy|_p = p^{-v_p(xy)} = p^{-(v_p(x)+v_p(y))} = P^{-v_p(x)}p^{-v_p(y)} = |x|_p|y|_p.$$

- Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_p(x) \leq v_p(y)$. Primero, desmotraremos que $v_p(x+y) \geq v_p(x)$. Sean $x, y \in \mathbb{Z}^*$:

$$x+y = p^{v_p(x)}x_1 + p^{v_p(y)}y_1 = p^{v_p(x)}\left(x_1 + p^{v_p(y)-\beta}y_1\right); \quad \text{donde } \beta = v_p(y) - v_p(x) \geq 0.$$

Así, $v_P(x) \leq v_p(x+y)$. Ahora, si $x = m/n$ y $y = r/s$ es inmediato que $v_p(ms) \leq v_p(nr)$ dado que $v_p(x) \leq v_p(y)$. Entonces $v_p(ms) \leq v_p(ms+nr)$ ya que $ms, nr \in \mathbb{Z}^*$. Así,

$$v_p(m) + v_p(s) - v_p(n) \leq v_p(ms+nr) - v_p(n)$$

$$v_p\left(\frac{m}{n}\right) \leq v_p\left(ms+nr\right) - v_p(ns) = v_p\left(\frac{ms+nr}{ns}\right) = v_p\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right).$$

Concluimos que

$$\text{mín}\left\{v_p(x), v_p(y)\right\} \leq v_p(x+y).$$

Ahora, veamos que:

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\left\{|x|_p + |y|_p\right\}.$$

Como $\text{mín}\left\{v_p(x), v_p(y)\right\} \leq v_p(x+y)$, obtenemos que:

$$|x+y|_p = p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-\,\text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}}. \tag{2.1}$$

Supongamos que $v_p(x) = \text{mín}\left\{v_p(x), v_p(y)\right\}$, entonces $v_p(x) \leq v_p(y)$, y por lo tanto:

$$p^{-v_p(y)} \leq p^{-\,\text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}} = p^{-v_p(x)} = \text{máx}\left\{p^{-v_p(y)}, p^{-v_p(x)}\right\}.$$

Si $v_p(y) = \text{mín}\left\{v_p(x), v_p(y)\right\}$, también se obtiene:

$$p^{-\,\text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}} = \text{máx}\left\{p^{-v_p(y)}, p^{-v_p(x)}\right\}.$$

Así, en (2.1) obtenemos

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\left\{|x|_p, |y|_p\right\}. \tag{2.2}$$

Por lo tanto, esta claro que $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$.

Finalmente, veamos la buena definición: $V_p(x) = v_p(m) - V_p(n)$ está bien definido desde que no depende de m ni de n. Es decir, si tomamos una fracción equivalemte, obtendremos el mismo valor $v_p(x)$. En efecto, si $x = \dfrac{m}{n} = \dfrac{a}{b}$, entonces $mb = na$. Así:

$$v_p(m) + v_p(n) = v_p(mb) = v_p(na) = v_p(n) + v_p(a).$$

Por lo tanto:

$$v_p(x) = v_p(m) - v_p(n) = v_p(a) - v_p(b).$$

■

Observación 2.1.4. La función de valoración definida en el Ejemplo 2.1.5 se denomina valor absoluto p-ádico del campo $\mathbb{Q}$.

A manera de aplicación sencilla e inmediata a estas herramientas, veamos la Proposición 2.1.3.

Proposición 2.1.3. Para todo número primo p, $\sqrt[n]{p}$ es irracional.

Demostración. Supongamos que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x = \sqrt[n]{p}$. Entonces $x^n = p$. Aplicando la norma p-ádica, tenemos:

$$p^{-nv_p(x)} = |x|_p^n = |x^n|_p = |p|_p = p^{-v_p(p)} = p^{-1}.$$

Así, $v_p(x) = 1/n$, lo cual contradice el hecho de que $v_p(x) \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, las raices $n-$ésimas de números primos son irracionales. □

Definición 2.1.6. Si en lugar de la desigualdad triangular mencionada en el ítem 3 de la Definición 2.1.5, la función de valoración satisface la desigualdad (llamada desigualdad ultramétrica),

$$|a+b| \leq \text{máx}\left\{|a|, |b|\right\},$$

se dice que $|\cdot|$ *es no arquimediano.*

Observación 2.1.5. $\text{máx}\{|a|, |b|\} \leq |a| + |b|$

Proposición 2.1.4. Sea $\mathcal{A}$ un campo valuado. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $|\cdot|$ es no arquimediano.
2. $|n1_{\mathcal{A}}| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Sabemos que $|1_{\mathcal{A}}| = 1$ por la proposición 2.1.2. Nuestra hipótesis inductiva: $|n1_{\mathcal{A}}| \leq 1$. Así, tenemos:

$$|(n+1)1_{\mathcal{A}}| = |1_{\mathcal{A}} + n1_{\mathcal{A}}| \leq \text{máx}\left\{|1_{\mathcal{A}}|, |n1_{\mathcal{A}}|\right\} \leq 1.$$

[2 $\Rightarrow$ 1]. Notemos que $|x^k| = |x|^k$ para $k \in \mathbb{N}$, cuya prueba es inmediata por inducción matemática. Así,

$$\begin{aligned} |a+b|^k = |(a+b)^k| &= \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}\right| \leq \sum_{j=0}^{k} \left|\binom{k}{j} \bullet 1_A\right| |a|^j \, |b|^{k-j} \\ &\leq \sum_{j=0}^{k} |a|^j |b|^{k-j} \leq (k+1)\left(\text{máx}\left\{|a|, |b|\right\}\right)^k \end{aligned}$$

pues, $\binom{k}{j} \in \mathbb{N}$. De donde se obtiene:

$$|a+b| \leq \sqrt[k]{k+1}\,\text{máx}\left\{|a|, |b|\right\}.$$

Finalmente, como $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1} = 1$, se concluye que $|a+b| \leq \text{máx}\left\{|a|, |b|\right\}$. □

Definición 2.1.7. Un campo valuado $\mathcal{A}$ satisface el principio de Arquímedes, o es *arquimediano*, si para cada $a \in \mathcal{A}^*$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|na| > 1.$$

Proposición 2.1.5. Sea $\mathcal{A}$ un campo valuado. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Dados $u, v \in \mathcal{A}$. Si $u \neq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$|nu| > |v|.$$
2. Dado $a \in \mathcal{A}^*$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|na| > 1$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2]. Sea $a \in \mathcal{A}^*$. Basta tomar $u = a$ y $v = 1_{\mathcal{A}}$, pues $|1_{\mathcal{A}}| = 1$.

[2 $\Rightarrow$ 1] Si $v = 0$, tenemos $|nu| > 0 = |v|$. Si $v \neq 0$, hacemos $a = uv^{-1}$; luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|n(uv^{-1})| > 1.$$

Multiplicando a ambos miembros por $|v|$ obtenemos $|nu| = |nuv^{-1}v| > |v|$. □

La proposición 2.1.6 justifica el nombre de *no arquimediano* dado en la Definición 2.1.6 a la función de valoración que satisface la desigualdad ultramétrica.

Proposición 2.1.6. Sea $\mathcal{A}$ un campo valuado. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $|\cdot|$ es arquimediano, esto es, no se cumple la desigualdad ultramétrica.
2. $\mathcal{A}$ es un campo arquimediano.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Sea $v \in \mathcal{A}^*$. Como $|\cdot|$ es no arquimediano, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|m| > 1$. Entonces $\lim_{k\to\infty} |m|^k = \infty$. Así, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|m|^{k_0} > |v^{-1}|$. Por inducción $|m|^k = |m^k|$. Así, existe $n = m^{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|n| \cdot |v| = |m^{k_0}| \cdot |v| = |m|^{k_0} \cdot |v| > |v^{-1}| \cdot |v| = |1| = 1.$$

Lo cual implica que $|nv| > 1$.

[2 $\Rightarrow$ 1] Como $\mathcal{A}$ es arquimediano, para $1 \in \mathcal{A}^*$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|n1| > 1$. Luego, por la contrarrecíproca de la Proposición 2.1.4 tenemos que $|\cdot|$ es arquimediano. □

Teorema 2.1.1. Un campo valuado $\mathcal{A}$ es no arquimediano si y solo si la función de valoración verifica la desigualdad ultramétrica.

Demostración. Se sigue inmediantemente de la Proposición 2.1.6 □

Ejemplo 2.1.6. El campo $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto p-ádico es un campo no arquimediano. Basta ver en el Ejemplo 2.1.5 se verifica la desigualdad (2.2) (desigualdad ultramétrica). ■

Observación 2.1.6 (Nocion de distancia y cercanía)**.** Algo interesante sobre las distancias en la valoración p-ádica es que contradicen nuestra intuición habitual. En la métrica $p-$ádica, la distancia entre dos números depende de la potencia más alta de p que divide su diferencia. Por ejemplo, si $p = 5$, la métrica natural que nos permite ver las distancias entre dos punto de $\mathbb{Q}$ es $d_p(a, b) = |a-b|_p$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}$. Así, los números 585 937 502 y 2 son más cercanos entre sí que 3 y 2, ya que:

- $d_5(585\,937\,502, 2) = |585937500|_5 = |2^2 \times 3 \times 5^{11}|_5 = 5^{-v_5(2^2\times 3\times 5^{11})} = 5^{-11}$
- $d_5(3, 2) = |1|_5 = 5^{-v_5(1)} = 5^{-v_5(5^0)} = 5^{-0} = 1$

Este comportamiento no intuitivo resalta la diferencia fundamental entre la « métrica $p-$ádica » y la métrica euclidiana, y nos sugiere, como veremos en el resto del trabajo, diferencias importantes entre el análisis funcional clásico (arquimediano, ya que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son campos «usualmente» arquimedianos) y el análisis funcional no arquimediano.

Ejemplo 2.1.7. El campo $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto usual es un campo arquimediano, ya que no verifica la desigualdad ultramétrica. En efecto:

$$|(-5) + (-3)| = 8 > 5 = \text{máx}\{|-5|, |-3|\}.$$

■

Observación 2.1.7. El Ejemplo 2.1.6 y el Ejemplo 2.1.7 muestran que es la función de valoración quien determina si el campo valuado es arquimediano o es no arquimediano.

2.2. Espacios ultramétricos

En esta sección estudiamos la relación íntima que existe entre la función de valoración no arquimediana y una métrica llamada ultramétrica, con especial atención a la topología [**] que genera.

Definición 2.2.1. Sea M un conjunto no vacío. Un *espacio métrico* es un par (M, d), donde $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una aplicación, llamada métrica o distancia, que satisface las siguientes propiedades

1. $d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
2. $d(x, y) = d(y, x).$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular)

Además, es común denominar a cada elemento de M como *punto*.

Las "bolas" en los espacios métricos son conjuntos que representan todos los puntos que están a una distancia menor (o menor o igual, en el caso de bolas cerradas) a un valor dado desde un "punto central". Estos conjuntos son fundamentales para describir conceptos como proximidad, vecindad, convergencia y topología en estos espacios.

Definición 2.2.2. Sea $a \in M$. Dado $r > 0$, definimos las bolas de *centro* a y distancia o *radio* r como sigue:

1. *Bola abierta*: $B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$.
2. *Bola cerrada*: $B[a, r] := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}$.

Definición 2.2.3. Sea A un subconjunto de M. Definimos:

1. *Conjunto abierto*: A es abierto si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.
2. *Conjunto cerrado*: A es cerrado si $M \setminus A$ es un conjunto abierto.
3. *Conjunto acotado o limitado*: A es acotado si existe $R > 0$ tal que $d(x, y) \leq R$ para todo $x, y \in A$.
4. *Punto de acumulación o punto límite*: Dado $x \in M$, decimos que x es un punto de acumulación de A si para cada $r > 0$ se tiene que $B(x, r) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$.
5. *Conjunto derivado*: El conjunto derivado de A es el conjunto
$$A' := \{x \in M \mid x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$
6. *Punto aislado:* Dado $x \in A$, decimos que x es un punto aislado de A si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$.

[**] Un espacio métrico es un tipo específico de espacio topológico donde se define una distancia entre puntos mediante una función llamada métrica. Esta métrica permite definir una topología métrica, en la que los conjuntos abiertos se describen en términos de bolas abiertas. Los espacios métricos, por tanto, combinan conceptos topológicos con una noción concreta de distancia.

7. *Conjunto discreto:* A es un conjunto discreto o subconjunto discreto de M si se cumple que $A' \cap A = \emptyset$. En otros términos, si todo $x \in A$ es un punto aislado.

8. *Clausura o cerradura de un conjunto*: La clausura de A es el conjunto $\overline{A} := A \cup A'$.

9. *Punto adherente*: Dado $x \in M$, decimos que x es un punto adherente de A si $x \in \overline{A}$. O de manera equivalente, x es un punto adherente de A si para cada $r > 0$ se tiene que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

10. *Conjunto denso*: A es denso en M si $\overline{A} = M$. O de manera equivalente, A es denso en M si dado $x \in A$ para cada $r > 0$ se tiene que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Proposición 2.2.1. Sea A subconjunto de M. Entonces, A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$. Es condición necesaria y suficiente que $A' \subset A$ para que A sea cerrado.

Demostración. Supongamos que A es cerrado. Entonces, por definición de cerradura, $\overline{A} := A \cup A'$ por lo que $A \subset \overline{A}$. Ahora, supongamos que $\overline{A} \not\subset A$. Entonces, existe $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin A$. Así, $x \in M \setminus A$ conjunto abierto por lo que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset (M \setminus A)$, esto implica que $B(x, r) \cap A = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que como $x \in \overline{A}$, esto significa que para r tenemos $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Entonces $\overline{A} \subset A$, y así $\overline{A} = A$.

Por otro lado. Ahora supongamos que $\overline{A} = A$. Sea $x \in M \setminus A$, entonces $x \notin \overline{A}$. Así, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$, entonces $B(x, r) \subset (M \setminus A)$. Esto muestra que $M \setminus A$, y por lo tanto, A es cerrado. □

Proposición 2.2.2. Sea A subconjunto de M. Se cumple que $\overline{A}$ es cerrado.

Demostración. Por la Proposición 2.2.1 debemos ver que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. En efecto, sea $x \in \overline{\overline{A}}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in \overline{A}$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Como $y \in \overline{A}$, para $\delta = \varepsilon - d(x, y) > 0$, existe $z \in A$ tal que $d(y, z) < \delta$. Entonces

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = d(x, y) + \varepsilon - d(x, y) = \varepsilon.$$

Así, $z \in A$ y $d(x, z) < \varepsilon$, es decir, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Luego $x \in \overline{A}$, por lo que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Concluimos que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. □

Definición 2.2.4. En (M, d) definimos:

1. *Sucesión*: Toda aplicación $n \mapsto x_n$ de $\mathbb{Z}^+ \to M$ se denomina sucesión de elementos de M. Para indicar tal sucesión escribimos $(x_j)_{j \geq 1}$.

2. *Convergencia de sucesiones*: $(x_j)_{j \geq 1}$ se dice que converge a un punto $x \in M$ si

   Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$.

   Es usual escribir $x_n \to x$ o $\lim_{n \to \infty} = x$. Además, note que este *punto de convergencia* es único.

3. *Sucesión de Cauchy o sucesión fundamental*: $(x_j)_{j \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy si

   Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$, entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Observación 2.2.1 (Secuencia)**.** Dada una sucesión $(x_j)_{j\geq 1}$, cuando escribamos $\{x_j\}_{j\geq 1}$ no nos referimos el conjunto de los elementos de la sucesión, sino a una «lista ordenada» de elementos. Por ejemplo, $(1_j)_{j\geq 1}$ al escribir $\{1_j\}_{j\geq 1} = \{1_1, 1_2, 1_3, \cdots\}$, que no es lo mismo que $\{x \mid x = x_j,\ j \geq 1\} = \{1\}$. Para distinguirlo de la sucesión, lo denominaremos *secuencia*. Un conjunto puede ser visto como secuencia si lo ordenamos de alguna manera.

Definición 2.2.5. Sea A subconjunto no vacío de M. Definimos:

1. Dado $x \in M$, la *distancia entre el punto x y el conjunto A*, denotado por $dist(x, A)$ se define como:
$$dist\,(x, A) := \inf_{y\in A} d(x, y).$$

2. El *diámetro de un conjunto*, denotado por $d(A)$, se define como:
$$d(A) := \sup_{x,y\in A} d(x, y),$$
donde, si A no es acotado, entonces $d(A) = \infty$.

Proposición 2.2.3. Sea $x \in M$. Son equivalentes:

1. $dist(x, A) = 0$.
2. $x \in \overline{A}$.

Demostración.
$[1 \Rightarrow 2]$ Si $dist(x, A) = 0$, entonces $\inf_{y\in A} d(x, y) = 0$. Para $\varepsilon > 0$, existe $y \in A$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Así, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, de donde $x \in \overline{A}$.

$[2 \Rightarrow 1]$ Supongamos que $dist(x, A) > 0$. Como $x \in \overline{A}$, para cada $\varepsilon = 1/m$, $m \geq 1$, existe $x_m \in A$ tal que $dis(x, x_m) < 1/m$. Como $d(x, A) > 0$, por la propiedad arquimediana en $\mathbb{R}$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/m_0 < d(x, A)$. Luego $d(x, x_{m_0}) < d(x, A)$. Esto contradice el hecho de que $dist(x, A) \leq d(x, x_{m_0})$, pues $x_{m_0} \in A$. La contradicción viene de suponer que $dist(x, A) > 0$, por lo que concluimos que $dist(x, A) = 0$. □

Definición 2.2.6. Un espacio métrico M es un *espacio métrico completo* si toda sucesión de Cauchy en M converge hacia algún punto de M.

Proposición 2.2.4. Sea M un espacio métrico. Son equivalentes:

1. M es completo.
2. Toda cadena $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de M con $\lim_{n\to\infty} d(F_n) = 0$, entonces existe $a \in M$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Demostración.
$[1 \Rightarrow 2]$ Sea $(x_j)_{j\geq 1}$ una sucesión en M donde x_j es tomado en F_j. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $d(F_n) < \varepsilon$. Sea $m > n > n_0$; entonces $x_m, x_n \in F_n$, por lo que $d(x_m, x_n) \leq d(F_n) < \varepsilon$. Así, $(x_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Como M es completo, $x_n \to a \in E$. Y como F_n es cerrado, $a \in F_n$ para todo $n \geq 1$. Así, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$. Ahora supongamos que existe $b \in E$ tal que $a, b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$. Entonces, $d(a, b) \leq d(F_n)$ para todo $n \geq 1$, lo que implica que $d(a, b) \leq \lim_{n\to\infty} d(F_n) = 0$.

Por lo tanto, $d(a,b)=0$, lo que implica que $a=b$. Concluimos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $(x_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en M. Definimos $F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}}$. Entonces, $F_1 \subset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de M. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n > n_0$, entonces $d(x,y) < \varepsilon/2$ para todo $x, y \in \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. Esto implica que $d(\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} d(\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}) = 0$. Y como $d(F_n) = d(\{x_n, x_{n+1}, \cdots\})$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} d(F_n) = 0$. Entonces, por hipótesis, existe $a \in E$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$. Así, $a \in F_n$ para todo $n \geq 1$. Entonces para cada $r_n = 1/n > 0$, donde $n \geq 1$, tenemos que $B(a, r_n) \cap \{x_n, x_{n+1}, \cdots\} \neq \emptyset$. Así, podemos hallar $(x_{j_n})_{n\geq 1}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_{j_n} = a$. Es inmediato ver que si alguna subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión original coverge al mismo límite. Concluimos que $x_n \to a \in E$. □

Definición 2.2.7. Sea $f : M \to N$ una aplicación entre espacios métricos. Definimos:

1. *Continuidad puntual*: Dado $x \in M$, decimos que f es continua en x si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

2. *Continuidad*: Decimos que f es continua en M, o simplemente, continua si f es continua en todos los puntos de M.

3. *Homeomorfismo*: Decimos que f es un homeomorfismo si f tiene inversa y tanto f como $f^{-1} : N \to M$ son continuas.

Proposición 2.2.5. Sea $f : M \to N$ una aplicación entre espacios métricos. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. f es continua en $x \in M$.

2. Para toda sucesión $(x_j)_{j\geq 1}$ en M tal que $x_n \to x$, la sucesión $(f(x_j)_{j\geq 1})$ en N es tal que $f(x_n) \to f(x)$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Sea $x \in M$. Queremos mostrar que si $(x_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión en M tal que $x_j \to x$, entonces $f(x_j) \to f(x)$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, y como f es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Como $x_j \to x$, para este δ, existe n_0 tal que si $j > n_0$, entonces $x_j \in B(x,\delta)$. Esto implica que $f(x_j) \in B(f(x), \varepsilon)$. Por lo tanto, $f(x_n) \to f(x)$.

[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $x \in M$. Supongamos que f no es continua en x. Esto significa que, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $y \in B(x,\delta)$ y $f(y) \notin B(f(x), \varepsilon)$. Entonces, para cada $\delta_n = 1/n$, existe $x_n \in B(x, \delta_n)$ tal que

$$f(x_n) \notin B(f(x, \varepsilon)). \tag{2.3}$$

Además, $x_n \to x$. Así, por hipótesis, tendremos que $f(x_n) \to f(x)$, con lo cual contradecimos (2.3). Por tanto, f es continua en x.

□

Las definiciones anteriores son ampliammente conocidas, y sus propiedades pueden ser revisadas en [9] o en cualquier libro que aborde espacios métricos, siempre cuidando el hecho de que el campo en el cual trabajamos ya no es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Pasemos ahora a definir lo que es un espacio ultramétrico y exploraremos las diferencias y propiedades específicas de estos espacios.

Definición 2.2.8. Sea $M = (M, d)$ un espacio métrico. Decimos que M es un *espacio ultramétrico* si la aplicación d satisface la desigualdad fuerte del triángulo, esto significa:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}; \quad \text{para todo } x, y, z \in M.$$

Decimos también que d es una ultramétrica.

Observación 2.2.2. Como $\max\{d(x, z), d(y, z)\} \leq d(x, z) + d(y, z)$, siempre que queramos probar o demostrar que un espacio es un espacio ultramétrico, podemos prescindir de la desigualdad triangular. Es suficiente verificar la desigualdad fuerte del triángulo.

Ejemplo 2.2.1. Las métricas usuales (no trivial) de $\mathbb{R}^n$ no son ultramétricas. En efecto:

- *Métrica euclideana*: $d(x, y) := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$. Consideremos $x = (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $y = (0, 1, 0 \cdots, 0)$ y $z = (0, \cdots, 0)$, entonces $d(x, y) = \sqrt{2}$, $d(x, z) = 1$ y $d(y, z) = 1$. Así,
$$d(x, y) = \sqrt{2} \not\leq 1 = \max\{d(x, z), d(y, z)\}.$$
- *Métrica del máximo*: $d(x, y) := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|$. Consideremos $x = (6, 0, 0, \cdots, 0)$, $y = (0, 3, 0 \cdots, 0)$ y $z = (1, 3, 0, \cdots, 0)$, luego $d(x, y) = 6$, $d(x, z) = 5$ y $d(y, z) = 1$. Así,
$$d(x, y) = 6 \not\leq 5 = \max\{d(x, z), d(y, z)\}.$$
- *Métrica de Manhattan*: $d(x, y) := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$. Consideremos $x = (6, 0, 0, \cdots, 0)$, $y = (0, 3, 0 \cdots, 0)$ y $z = (1, 3, 0, \cdots, 0)$, luego $d(x, y) = 9$, $d(x, z) = 8$ y $d(y, z) = 1$. Así,
$$d(x, y) = 9 \not\leq 8 = \max\{d(x, z), d(y, z)\}.$$

■

Ejemplo 2.2.2. Las métricas usuales (no trivial) de $\mathbb{C}$ no son ultramétricas. En efecto, recordemos que el módulo de un número complejo se define como:

$$|z| := \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}.$$

1. *Métrica euclideana*: $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$. Consideremos $z_1 = 1$, $z_2 = i$ y $z_3 = 0$, entonces $d(z_1, z_2) = \sqrt{2}$, $d(z_1, z_3) = 1$ y $d(z_2, z_3) = 1$. Así,
$$d(z_1, z_2) = \sqrt{2} \not\leq 1 = \max\{d(z_1, z_3), d(z_2, z_3)\}.$$
2. *Métrica del máximo*: $d(z_1, z_2) := \max\{|Re(z_1 - z_2)|, |Im(z_1 - z_2)|\}$. Consideremos $z_1 = 6$, $z_2 = 3i$ y $z_3 = 1 + 3i$, entonces $d(z_1, z_2) = 6$, $d(z_1, z_3) = 5$ y $d(z_2, z_3) = 1$. Así,
$$d(z_1, z_2) = 6 \not\leq 5 = \max\{d(z_1, z_3), d(z_2, z_3)\}.$$
3. *Métrica de Manhattan*: $d(z_1 - z_2) := |Re(z_1 - z_2)| + |Im(z_1 - z_2)|$. Consideremos $z_1 = 6$, $z_2 = 3i$ y $z_3 = 1 + 3i$, entonces $d(z_1, z_2) = 9$, $d(z_1, z_3) = 8$ y $d(z_2, z_3) = 1$. Así,
$$d(z_1, z_2) = 9 \not\leq 8 = \max\{d(z_1, z_3), d(z_2, z_3)\}.$$

■

Ejemplo 2.2.3. En $\mathbb{Z}^+$, definimos $\eta : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$\eta(x,y) := \begin{cases} 0 & ;\text{si } x = y \\ \text{máx}\left\{1+\dfrac{1}{x}, 1+\dfrac{1}{y}\right\} & ;\text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Entonces $(\mathbb{Z}^+, \eta)$ es un espacio ultramétrico completo.

En efecto.

- Por definición: $\eta(x,y) \geq 0$, además $\eta(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- Si $x = y$, entonces $\eta(x,y) = n(y,x)$. Si $x \neq y$, tenemos que $\text{máx}\{1+1/x,\, 1+1/y\} = \text{máx}\{1+1/y,\, 1+1/x\}$, por lo que $\eta(x,y) = \eta(y,x)$.
- Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$. Si $x = y$, entonces es claro que $d(x,y) \leq \text{máx}\,\{d(x,z), d(z,y)\}$. Si $x \neq y$, tenemos $\eta(x,y) = \text{máx}\{1+1/x,\, 1+1/y\}$ y consideramos los siguientes casos:
  - $x = z$: Así, $z \neq y$. Entonces, $\eta(x,y) = \eta(z,y)$, $\eta(x,z) = 0$, luego
  $$\eta(x,y) = \text{máx}\{\eta(x,z), \eta(z,y)\}.$$
  - $x \neq z$ y $z = y$: $\eta(z,y) = 0$ y $\eta(x,y) = \eta(x,z)$, entonces
  $$\eta(x,y) = \text{máx}\{\eta(x,z), \eta(z,y)\}.$$
  - $x \neq z$ y $x \neq y$: Como $\{1+1/y,\, 1+1/x\} \subset \{1+1/y,\, 1+1/x, 1+1/z\}$, entonces
  $$\begin{aligned} \eta(x,y) &= \text{máx}\left\{1+\frac{1}{x}, 1+\frac{1}{y}\right\} \leq \text{máx}\left\{1+\frac{1}{x}, 1+\frac{1}{y}, 1+\frac{1}{z}\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\text{máx}\left\{1+\frac{1}{x}, 1+\frac{1}{z}\right\}, \text{máx}\left\{1+\frac{1}{z}, 1+\frac{1}{y}\right\}\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\eta(x,z), \eta(z,y)\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta(\cdot)$ es una ultramétrica en $\mathbb{Z}^+$. Ahora, veamos que es completo. En efecto, sea $(x_j)_{j\geq}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Z}^+$. Para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m > n_0$, entonces se cumple $\eta(x_n, x_m) < 1$. Por definición, notemos que si $x_n \neq x_m$, entonces $\eta(x_n, x_m) = \text{máx}\{1+1/x_n, 1+1/x_m\} > 1$. Por lo tanto, $x_n = x_m$ para todo $n, m > n_0$. Esto significa que la sucesión converge, y lo hace en un punto de $\mathbb{Z}^+$. Concluimos que $(\mathbb{Z}^+, \eta)$ es completo. ■

Observación 2.2.3. Las ultramétricas, como veremos en la siguiente sección, están, por lo general, asociados a funciones de valoración de campos no arquimedianos. En el Ejemplo 2.2.1, el valor absoluto usual es una función de valoración arquimediana en el campo $\mathbb{R}$. En el Ejemplo 2.2.2, la aplicación que define el módulo de un numero complejo es una función de valoración arquimediana en el campo $\mathbb{C}$. Como podemos notar, estas métricas usuales (no trivial) están definidas a partir funciones de valoración arquimedianas, lo cual hace que estas métricas no verifiquen la desigualdad fuerte del triángulo.

En adelante, M es un espacio ultramétrico, a menos que se indique lo contrario.

Proposición 2.2.6. Sea M un espacio.

1. Todo punto de una bola es centro.
2. Toda bola es abierta y cerrada.
3. Dos bolas con radios distintos son disjuntas o una está contenida en la otra.
4. Sea $(x_j)_{j\geq 1}$ una sucesión en M. Son equivalentes:
   a) $(x_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.
   b) $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.

Demostración.
[1] Sea $B(a,r)$. Dado $b \in B(a,r)$, tenemos que $d(a,b) < r$, y debemos mostrar la igualdad $B(a,r) = B(b,r)$. En efecto. Sea $x \in B(b,r)$, entonces $d(b,x) < r$. Y como d es ultramétrica tenemos que

$$d(a,x) \leq \text{máx}\{d(x,b), d(b,a)\} < r,$$

entonces $x \in B(a,r)$. Así, $B(b,r) \subset B(a,r)$. Para demostrar que $B(b,r) \subset B(a,r)$, se procede de la misma manera. Por lo tanto, $B(a,r) = B(b,r)$. Para el caso de las bolas cerradas, se procede de forma análoga.

[2] Veamos primero que $B(a,r)$ es abierto y cerrado topológicamente.

- $B(a,r)$ es abierto: Dado $b \in B(a,r)$, debemos verificar que $B(b,r_1) \subset B(a,r)$ para algún $r_1 > 0$. En efecto. Consideremos $r_1 = r - d(b,a) > 0$. Sea $x \in B(b,r_1)$, entonces $d(b,x) < r_1$. Así,

  $$d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + r_1 = d(a,b) + r - d(a,b) = r.$$

  Por lo tanto, $d(a,x) < r$, es decir, $x \in B(a,r)$.

- $B(a,r)$ es cerrado: Por la Proposición 2.2.1, solamente debemos verificar que se cumpla que $B(a,r)' \subset B(a,r)$. En efecto, sea $x \in B(a,r)'$. Entonces, para cada $\varepsilon_n = 1/n > 0$, se cumple que $B(x,\varepsilon_n) \setminus \{a\} \cap B(a,r) \neq \emptyset$. Así, podemos hallar $x_n \in M$ tal que $d(a,x_n) < r$ y $d(x,x_n) < 1/n$. Por el principio arquimediano en $\mathbb{R}$ para $r > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < r$. Así, para n_0 tenemos que $d(x,a) \leq \text{máx}\{d(x,x_{n_0}), d(x_{n_0},a)\} < r$. Luego $x \in B(a,r)$.

Veamos ahora que $B[a,r]$ es abierto y cerrado topológicamente.

- $B[a,r]$ es cerrado: procediendo de menera similar a la demostración de la cerradura de $B(a,r)$, se tiene que $B[a,r]$ es cerrado.

- $B[a,r]$ es abierto: Sea $x \in (M \setminus B[a,r])'$. Entonces, para cada $\varepsilon_n = 1/n > 0$, se cumple que $B(x,\varepsilon_n) \setminus \{x\} \cap (M \setminus B[a,r]) \neq \emptyset$. Así, podemos hallar $x_n \in M$ tal que $d(a,x_n) < r$ y $d(x,x_n) < 1/n$. Por el principio arquimediano en $\mathbb{R}$, para $r > 0$ existe n_0 tal que $1/n_0 < r$. Así, para n_0 tenemos $d(x,a) \leq \text{máx}\{d(x,x_{n_0}), d(x_{n_0},a)\} < r$. Luego, $x \in M \setminus B[a,r]$. Así, $(M \setminus B[a,r])' \subset M \setminus B[a,r]$. Por la Proposición 2.2.1, se tiene que $M \setminus B[a,r]$ es cerrado. Concluimos, por definición, que $B[a,r]$ es abierto.

[3] Dados dos bolas, suceden tres casos: son disjuntas, una contiene a la otra, y si no están contenidas una en la otra, pueden no tener intersección no vacía. Veremos que este último caso no sucede. Para ello, supongamos que existen dos bolas B_1 de radio r_1 y B_2 de radio r_2 con $r_1 \leq r_2$, tales que existe $a \in B_1 \cap B_2$. Entonces $B_1 = B(a, r_1)$ y $B_2 = B(a, r_2)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r_1 < r_2$ y tomar $x \in B(a, r_1) \setminus B(a, r_2)$. Entonces $d(a, x) < r_1 < r_2$. Así, $x \in B(a, r_2)$, lo cual es una contradicción, pues $x \notin B(a, r_2)$. Luego, no existen bolas que no esten contenidas y que tengan intersección no vacía.

[4] Notemos que $d(x_m, x_n) \leq \max(d(x_m, x_{m-1}), \cdots d(x_{n+1}, x_n))$ para $m > n$.

- $[a) \Rightarrow b)]$ Como $(x_j)_{j\geq 1}$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$, entonces $d(x_m, d_n) < \varepsilon$. En particular para $m = n + 1$ tenemos que $d(x_{n+1}, d_n) < \varepsilon$. De donde podemos implicar que $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$

- $[b) \Rightarrow a)]$ Como $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, se cumple $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $m > n > n_0$. Entonces, $d(x_m, x_{m-1}) < \varepsilon, \cdots, d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$. Así,

  $$d(x_m, x_n) \leq \max(d(x_m, x_{m-1}), \cdots d(x_{n+1}, x_n)) < \varepsilon.$$

  De donde $(x_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

□

Observación 2.2.4. En el ítem 2 de la Proposición 2.2.6 no se afirma que $\overline{B(a, r)} = B[a, r]$, sino que, debido a la ultramétrica, las bolas abiertas, que usualmente no son cerradas, son cerradas en el sentido topológico. De igual manera, las bolas cerradas, que usualmente no son abiertas, debido la ultramétrica son abiertas topológicamente.

Lema 2.2.1 (Principio del triángulo isósceles)**.** Sean $x, y, z \in M$. Si $d(x, z) \neq d(z, y)$, entonces

$$d(x, y) = \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Demostración. Su pérdida de generalidad, podemos suponer que $d(x, z) < d(z, y)$. Entonces,

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} = d(z, y)$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad ultramétrica, para $d(z, y)$, tenemos

$$d(z, y) \leq \max\{d(z, x), d(x, y)\}.$$

Además, $\max\{d(z, x), d(x, y)\} = d(x, y)$, pues si $\max\{d(z, x), d(x, y)\} = d(z, x)$, entonces $d(z, y) \leq d(z, x)$, lo cual contradice a lo suposición $d(x, z) < d(z, y)$. Así, resumiendo tenemos

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \leq d(x, y).$$

□

Observación 2.2.5. El nombre "principio del triángulo isósceles" se debe a la analogía con la geometría euclidiana. En un triángulo isósceles, dos de sus lados son de igual longitud. En la Figura 2.1 se muestra gráficamente este hecho.

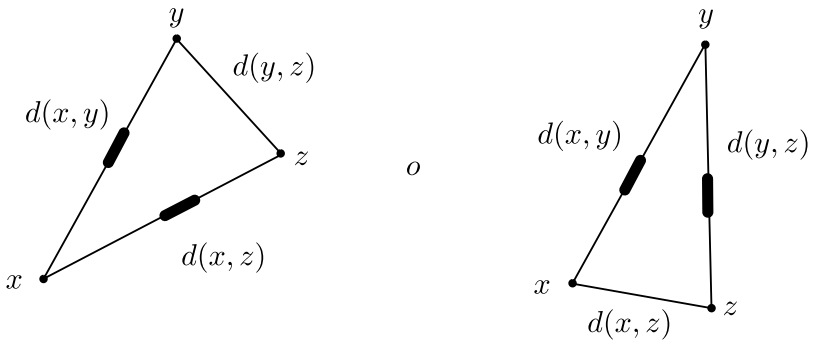


Figura 2.1: Si $d(x,z) \neq d(y,z)$, entonces $d(x,y) = \max\{d(x,z), d(z,y)\}$.

Proposición 2.2.7. Sean B una bola y $a \notin B$.

1. $d(a,x) = d(a,y)$; para todo $x, y \in B$.
2. Sí B_1 y B_2 son dos bolas disjuntas, entonces

$$d(x,y) = cte; \quad \text{para todo } x \in B_1 \text{ y } y \in B_2.$$

Demostración.

[1] Como $a \notin B$ y todo elemento de la bola es centro, se tiene que $d(x,y) < d(a,y)$. Entonces, por el Lema 2.2.1, se cumple que $d(a,x) = \max\{d(a,y), d(y,x)\} = d(a,y)$.

[2] Sea $x_0, x \in B_1$ y $y_0, y \in B_2$. Como las bolas son disjuntas, aplicando el Ítem 1, se tiene que $d(x_0,y_0) = d(x_0,y) = d(x,y)$. De donde se concluye el resultado. □

Proposición 2.2.8. Sea$(x_j)_{j\geq 1}$ una sucesión en M que converge a $x \in M$. Dado $a \in M$ con $x \neq a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > n_0$, entonces $d(x_n,a) = d(x,a)$.

Demostración. Como $x_n \to x$, para $\varepsilon = d(x,a) > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > n_0$, entonces $d(x_n,x) < d(x,a)$. Luego, se tiene que

$$\max\{d(x_n,x), d(x,a)\} = d(x,a); \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Por otro lado, sabemos que $d(x_n,x) \neq (x,a)$ para todo $n > n_0$. Entonces, aplicando el Lema 2.2.1, se obtiene que $d(x_n,a) = \max\{d(x_n,x), d(x,a)\}$. Así, concluimos que $d(x_n,a) = d(x,a)$ para todo $n > n_0$. □

Definición 2.2.9. Decimos que M es *esféricamente completo* si toda cadena decreciente de bolas $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ tienen una intersección no vacía.

Observación 2.2.6. En la Definición 2.2.9 no se precisa que todas las bolas sean cerradas o abiertas, dado que hemos visto que toda bola es abierta y cerrada a la vez en el sentido topológico. Además, no tenemos la condición de la Proposición 2.2.4 sobre los diámetros que convergen a cero. La Proposición 2.2.9 es propia de la estructura ultramétrica del espacio.

Ejemplo 2.2.4. El espacio $(\mathbb{Z}^+, \eta)$ del Ejemplo 2.2.3 es un espacio completo; pero no es esféricamente completo.

En efecto, definimos

$$B_n := \left\{ x \in \mathbb{Z}^+ \mid \eta(n,x) \leq 1 + \frac{1}{n} \right\}; \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Sea $x \in B_n$, entonces $\eta(n,x) \leq 1 + 1/n$. Es claro que $n \in B_n$, por lo que analizamos el caso $n \neq x$. Esto significa que

$$\eta(n,x) = \text{máx}\{1 + \frac{1}{x}, 1 + \frac{1}{n}\} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{si y solo si} \quad x > n.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$B_n = \left\{ x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \geq n \right\}.$$

Entonces, es claro que $B_1 \supset B_2 \supset \cdots B_n \supset \cdots$ es una cadena decreciente de bolas en $\mathbb{Z}^+$. Además,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \geq n \right\} = \emptyset.$$

Construimos una cadena decreciente de bolas en $\mathbb{Z}^+$ con intersección vacía, por lo tanto, $(\mathbb{Z}^+, \eta)$ no es esféricamente completo.

■

Proposición 2.2.9. Si M es esféricamente completo, entonces M es completo. La recíproca no es verdadera.

Demostración. Sea $(x_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en M. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$, entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Para cada $\varepsilon_n = 1/n$ podemos hallar $r_n > n_0$ tal que, si $m, k \geq r_n$, entonces $d(x_m, x_k) < \varepsilon_n$. Definimos la cadena

$$B(x_{r_1}, \varepsilon_1) \supset B(x_{r_2}, \varepsilon_2) \supset \cdots \supset B(x_{r_n}, \varepsilon_n) \supset \cdots$$

En efecto, dado $r_{n+1} > r_n$,tenemos que $x_{r_{n+1}} \in B(x_{r_n}, \varepsilon_n)$, y como $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, se cumple que $B(x_{r_{n+1}}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(x_{r_n}, \varepsilon_n)$, pues en la Proposición 2.2.6 las bolas o son disjuntas o están contenidas. Por hipótesis, M es esféricamente completo, esto implica que existe $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_{r_n}, \varepsilon_n)$. Por lo tanto $a \in B(x_{r_n}, \varepsilon_n)$ para todo $n \geq 1$. Ahora, para $\varepsilon > 0$, tomado al inicio, por la propiedad arquimediana, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/m_0 < \varepsilon$ y que, convenientemente podemos ajustar para que $m_0 > n_0$. Así, para $m, r_n > m_0$, tenemos $d(x_{r_n}, a) < \varepsilon$ y $d(x_m, x_{r_n}) < \varepsilon$. Y como $d(x_m, a) \leq \text{máx}\{d(x_{r_n}, a), d(x_m, x_{r_n})\} < \varepsilon$, concluimos que $x_m \to a \in M$, es decir, M es completo. □

Proposición 2.2.10. Sea M un espacio. Son equivalentes:

1. M es esféricamente completo.
2. Si $\{B_j\}_{j\in I}$ es una familia de bolas en M tal que $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ para cualesquiera $j, k \in I$, entonces
$$\bigcap_{j\in I} B_j \neq \emptyset$$
.

Demostración.

[1 $\Rightarrow$ 2] Por la Proposición 2.2.6, si $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ para cualesquiera $j, k \in I$, entonces $B_j \subset B_k$ o $B_k \subset B_j$. Por lo que, podemos elegir una subcadena decreciente de bolas

$$B_{k_1} \supset B_{k_2} \supset \cdots B_{k_n} \supset \cdots$$

de modo que para cada $j \in I$ existe k_n tal que $B_{k_n} \subset B_j$. Entonces, por hipótesis, tenemos que existe $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{k_n}$. Luego $a \in B_j$ para todo $j \in I$. Así,

$$\bigcap_{j \in I} B_j \neq \emptyset$$

[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ una cadena decreciente de bolas en M. Notemos que $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ para todo $j, k \neq 1$. Entonces, por hipótesis la cadena tiene intersección no vacía. Concluimos que M es esféricamente completo.

□

Definición 2.2.10. Sean X un subconjunto de M y $\xi \in M$. Decimos que ξ *tiene una mejor aproximación* en X si se alcanza $dis(\xi, X)$, es decir, existe mín$\{d(a, y \mid y \in X)\}$. Los puntos en X que tienen esta distancia mínima a ξ se denominan *mejores aproximaciones* (de ξ en X).

Teorema 2.2.1 (Teorema de aproximación óptima)**.** Sea X un subespacio de M. Si X es esféricamente completo, entonces para cada $y \in M$ existe $x_0 \in X$ tal que $dist(y, X) = d(y, x_0)$.

Demostración. Podemos tomar $r_1 > r_2 > \cdots > r_n > \cdots$ tal que $r_n \to dist(y, X)$ y definir $B_n := \{x \in M \mid d(y, x) \leq r_n\}$. Para $\varepsilon_n = r_n - dist(y, X) > 0$, existe $x_n \in X$ tal que

$$d(y, x_n) < dist(y, X) + \varepsilon_n = r_n.$$

Así, $x_n \in X \cap B_n$, por lo que $B_n \cap X \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Tenemos que

$$B_1 \cap X \supset B_2 \cap X \supset \cdots \supset B_n \cap X \supset \cdots$$

es un cadena decrecientes de bolas en X. Como X es esféricamente completo, existe $x_0 \in M$ tal que

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \cap X).$$

Por lo tanto, $d(y, x_0) \leq r_n$. Al hacer $n \to \infty$, obtenemos que $d(y, x_0) \leq d(y, X)$, y como $x_0 \in X$, tenemos que $d(y, x_0) = d(y, X)$. □

Observación 2.2.7. El Teorema 2.2.1 garantiza que cada punto del espacio de M tiene una mejor aproximación en subespacios de M que son esféricamente completos.

2.3. Análisis ultramétrico en campos valuados

En esta sección, exploramos los espacios métricos inducidos por funciones de valoración en campos valuados. A diferencia de los espacios métricos generales, donde la métrica puede ser definida de manera abstracta, los espacios métricos inducidos por una función de valoración se caracterizan por su conexión directa con la estructura algebraica del campo. En estos espacios, la métrica se define en función de las propiedades de la función de valoración, lo que ofrece una visión específica y detallada de los espacios métricos en el contexto de campos valuados.

Proposición 2.3.1. Sea $(K, |\cdot|)$ un campo valuado, la aplicación

$$\begin{aligned} d : K \times K &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (a, b) &\longmapsto |a - b| \end{aligned}$$

es una métrica. Además, d es una ultramétrica si K es un campo no arquimediano.

Demostración. Sean $a, b, c \in K$. Aplicamos la definición y propieades de $|\cdot|$. En efecto:

- $d(a, b) = |a - b| \geq 0$. Además, $d(a, b) = |a - b| = 0$ si y solo si $a - b = 0$, es decir, $a = b$.
- $d(a, b) = |a - b| = |-(a - b)| = |b - a| = d(b, a)$.
- $d(z, b) = |a - b| = |a - c + c - b| \leq |a - c| + |c - b| = d(a, c) + d(c, b)$.

Así, d es una métrica. Ahora supongamos que K es un campo no arquimediano, esto es, la función de valoración verifica: $|\alpha + \beta| \leq \text{máx}\{|\alpha|, |\beta|\}$ para todo $\alpha, \beta \in K$.

- $d(a, b) = |a - c + c - b| \leq \text{máx}\,(|a - c|, |c - b|) = \text{máx}\,\{d(a, c), d(c - b)\}$.

Así, d es una ultramétrica. □

Observación 2.3.1. Los campos pueden ser vistos también como espacios métricos.

Definición 2.3.1. Sea $(K, |\cdot|)$ un campo no arquimediano.

1. K es *completo* si es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la función de valoración.
2. K es *esféricamente completo* si es un espacio ultramétrico esféricamente completo con la métrica inducida por la función de valoración

Dado que el propósito del presente trabajo no es estudiar al campo $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ ni $(\mathbb{C}_p, |\cdot|_p)$, no justificaremos el Ejemplo 2.3.1 ni el Ejemplo 2.3.3, ya que requieren de resultados que no contempla este trabajo. Sin embargo, cabe mencionarlos porque son ejemplos típicos que ilustran los conceptos tratados.

Ejemplo 2.3.1. $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ no es completo.

Puede verse en [2] que, considerando la norma $p-$ádica, se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{n^2} = 1 + p + p^4 + p^9 + p^{16} + \dots$$

Las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$; pero la serie no pertence a $\mathbb{Q}$. ■

Ejemplo 2.3.2. El campo $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ de los números $p-$ádicos es completo. Este campo es la compleción de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ tal como podemos ver el el Ejemplo 3.4.1. Además, por el Corolario 2.3.1 también es esféricamente completo.

■

Ejemplo 2.3.3. $(\mathbb{C}_p, |\cdot|_p)$ no es esféricamente completo. Véase [2]. $\mathbb{C}_p$ es el campo de los *números complejos p−ádicos*, que es la compleción del cierre algebraico (campo en el que todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$ tienen raíces) de $\mathbb{Q}_p$. También, se puede ver que

$$|\mathbb{C}_p^*|_p = \{\, p^q \mid q \in \mathbb{Q}\} \tag{2.4}$$

Además, $|\mathbb{C}_p^*|_p$ es denso (con la métrica usual en $\mathbb{R}$) en $\langle 0, \infty\rangle$. En efecto, sea $x \in \{y \in \mathbb{R}\}$ y $\varepsilon > 0$. Para $y/\ln(p)$ y $\varepsilon/\ln(p) > 0$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|q - y/\ln(p)|_{\mathbb{R}} < \varepsilon/\ln(p)$, es decir, $|q\ln(p) - y|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$. Así,

$$\{\, q\ln(p) \mid q \in \mathbb{Q}\,\} \text{ es denso en } \mathbb{R}.$$

Es ampliamente conocido que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función exponencial, es continua y, por lo tanto, la imagen de subconjuntos densos son densos en su rango. Esto significa que

$$\exp\left(\{\, q\ln(p) \mid q \in \mathbb{Q}\,\}\right) \text{ es denso en } \exp(\mathbb{R}) = \langle 0, \infty\rangle.$$

Y como $\exp\left(\{\, q\ln(p) \mid q \in \mathbb{Q}\,\}\right) = \{\exp(q\ln(p)) \mid q \in \mathbb{Q}\} = \{p^q \mid q \in \mathbb{Q}\}$, concluimos que $|\mathbb{C}_p^*|_p$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$.

■

Un campo no arquimediano, completo y no trivialmente valuado se denota por $\mathbb{K}$.

Si bien la Proposición 2.3.2 puede demostrarse sin la necesidad de recurrir a un espacio métrico la prueba que damos es una aplicación del Principio del triángulo isóseles.

Proposición 2.3.2. Dados $a, b \in \mathbb{K}$. Si $|a| \neq |b|$, entonces $|a+b| = \max\{|a|, |b|\}$.

Demostración. Por la Proposición 2.1.2 se tiene $|-b| = |b|$, entonces $|a| \neq |-b|$. Así, $d(a,0) = |a-0| = |a| \neq |-b| = d(0,-b)$. Luego, por el Lema 2.2.1, tenemos que

$$d(a,-b) = \max\{d(a,0), d(0,-b)\}.$$

Por lo que $|a-(-b)| = \max\{|a-0|, |0-(-b)|\}$. Así, por las propiedades del campo,

$$|a+b)| = \max\{|a|, |b|\}.$$

□

Proposición 2.3.3. Dado $(z_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{K}$ tal que $\lim_{k\to\infty} z_k = L$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} |z_k| = \left|\lim_{k\to\infty} z_k\right|.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{K}$ tal que si $k > k_0$, entonces $|z_k - L| < \varepsilon$. Sabemos por la Proposición 2.1.2 que $| \, |z_k| - |L| \, |_{\mathbb{R}} \leq |z_k - L|$, donde $| \cdot |_{\mathbb{R}}$ es el valor absoluto usual de $\mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$| \, |z_k| - |L| \, |_{\mathbb{R}} < \varepsilon.$$

Así,

$$\lim_{k\to\infty} |z_k| = |L| = \left| \lim_{k\to\infty} z_k \right|.$$

□

La Proposición2.3.3 nos garantiza que el límite puede ingresar dentro de la función de valoración (valor absoluto) del campo.

Proposición 2.3.4. Sea $(a_j)_{j\geq 1}$ en $\mathbb{K}$. Si $a_n \to a$ con $a \neq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > n_0$, entonces $|a_n| = |a|$.

Demostración. Aplicando la Proposición 2.2.8 tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > n_0$, entonces $|a_n - 0| = |a - 0|$. Así, $|a_n| = |a|$. □

Definición 2.3.2. El conjunto $|\mathbb{K}^*|$ se denomina grupo de valores de $\mathbb{K}$.

$$|\mathbb{K}^*| := \{ \, |\lambda| \;\; | \;\; \lambda \in \mathbb{K}^* \, \}$$

La siguiente proposición justifica que $|\mathbb{K}^*|$ se denomine grupo.

Proposición 2.3.5. $|\mathbb{K}^*|$ es un subgrupo multiplicativo de $\langle 0, \infty \rangle$.

Demostración. $|\mathbb{K}^*| \neq \emptyset$ desde que $\mathbb{K} \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Sean $x, y \in |\mathbb{K}^*|$, entonces existen $a, b \in \mathbb{K}^*$ tales que $x = |a|, y = |b| \neq 0$. Por otro lado, existe $b^{-1} \in \mathbb{K}^*$ tal que $bb^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$ y $|b^{-1}| \neq 0$. Luego, $|b||b^{-1}| = |bb^{-1}| = |1_{\mathbb{K}}| = 1$, de donde $|b^{-1}| = |b|^{-1}$. Así, tenemos $xy^{-1} = |a||b|^{-1} = |a||b^{-1}| = |ab^{-1}| \in |\mathbb{K}^*|$ pues $ab^{-1} \in \mathbb{K}^*$. Por la Proposición 2.1.1 concluimos el resultado. □

Proposición 2.3.6. La esfera unitaria, $\mathbb{S} := B[0_{\mathbb{K}}, 1] \backslash B(0_{\mathbb{K}}, 1) = \{ \, a \;\; | \;\; |a| = 1, \, a \in \mathbb{K}^* \}$, es un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{K}^*$.

Demostración. Como $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{S}$, entonces $\mathbb{S} \neq \emptyset$. Sea $a, b \in \mathbb{S}$, luego $|a| = |b| = 1$. Además, $|b||b^{-1}| = 1$, por lo que $|b^{-1}| = 1$. Así, $|ab^{-1}| = |a||b^{-1}| = 1$, entonces $ab^{-1} \in \mathbb{S}$. Luego, por la Proposición 2.1.1 concluimos la esfera unitaria es un subgrupo. □

Observación 2.3.2.

1. Recordemos que, como $\mathbb{K}$ es un campo, por definición $\mathbb{K}^*$ es un grupo multiplicativo.

2. Si $\mathbb{S} = \{1_{\mathbb{K}}\}$, no es una contradicción ni ningún absurdo ya que podemos verificar directamente que cumple todas las condiciones para ser grupo con la ley de composición interna de $\mathbb{K}^*$.

Si bien hemos dicho que consideramos al campo un campo no trivialmente valuado, la Observación 2.3.3, la Observación 2.3.4 y la Observación 2.3.5 nos permitirán entender la Definición 2.3.3; mientras que la Proposición 2.3.7 las justificará.

Observación 2.3.3. Sea $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Por definición, existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $|\lambda| \neq 1$. Entonces, existe también λ^{-1}. Si $|\lambda| > 1$, luego $|\lambda^{-1}| < 1$. Si $|\lambda| < 1$, entonces $|\lambda^{-1}| > 1$. Así podemos tomar $a \in \mathbb{K}\backslash$ tal que $|a| < 1$. Luego, $|a^m| = |a|^m$. Sabemos por análisis real que $\lim_{m\to\infty} |a|^m = 0$. Así,

$$\text{Para todo } r > 0 : \ B(0,r) \setminus \{0\} \cap |\mathbb{K}^*| \neq \emptyset,$$

es decir, 0 es un punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$.

Observación 2.3.4. Sea $(K, |\cdot|)$ un campo trivialmente valuado, es decir

$$|\lambda| := \begin{cases} 0\,, & \text{si } \lambda = 0 \\ 1\,, & \text{si } \lambda \in \mathbb{K}^* \end{cases},$$

entonces $|K^*| = \{1\}$. Por lo tanto, $|K^*|$ no tiene puntos de acumulación.

Observación 2.3.5. Sea cualquier sucesión $(a_j)_{j\geq 1}$ en $\mathbb{K}$ tal que $a_n \to a$ en $a \in \mathbb{S}$, entonces por la Proposición 2.3.4 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se tiene $|x_n| = |a| = 1$. Así, se podría pensar que

$$\text{Para todo } r > 0 : \ B(1,r) \setminus \{0\} \cap |\mathbb{K}^*| \neq \emptyset,$$

lo cual no es correcto. El hecho de que 1 sea o no un punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$ depende de $\mathbb{S}$, por ende, depende de la naturaleza de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Por ejemplo:

- $|\mathbb{Q}_p^*|$: En la prueba del Corolario 2.3.1, en (2.8), vemos que el grupo de valores del campo $\mathbb{Q}_p$ es discreto en $\langle 0, \infty\rangle$, por lo que, 1 o es un punto de acumulación de su grupo de valores. Además, su único punto de acumulación en $0 \in \mathbb{R}$.
- $|\mathbb{C}_p^*|$: En el Ejemplo 2.3.3, en (2.4), vemos que el grupo de valores de $\mathbb{C}_p$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$. Por lo que 1 es un punto de acumulación de su grupo de valores.

Lo annterior permite entender a cabalidad la Definición 2.3.3.

Definición 2.3.3. Sea $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, decimos que:

1. $\mathbb{K}$ tiene *valoración discreta* si 1 no es punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$.
2. $\mathbb{K}$ tiene *valoración densa* si 1 es un punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$, es decir, si $\mathbb{K}$ no tiene valoración discreta.

Proposición 2.3.7. Sea $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

1. Si $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta, entonces
   a) Existe mín $\{|\lambda| \ | \ \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad |\lambda| > 1\}$.
   b) Existe un $\rho \in \mathbb{K}$ con $0 < |\rho| < 1$, denominado *elemento uniformizante* de $|\mathbb{K}^*|$, tal que $|\mathbb{K}^*| = \{\ |\rho|^n \ \ | \ \ n \in \mathbb{Z}\ \}$.
   c) $|\mathbb{K}^*|$ es un subconjunto discreto (con el valor absoluto usual en $\mathbb{R}$) de $\langle 0, \infty\rangle$.
   d) 0 es el único punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$.
2. Si $\mathbb{K}$ tiene valoración densa, entonces $|\mathbb{K}^*|$ es un subconjunto denso (con el valor absoluto usual en $\mathbb{R}$) de $\langle 0, \infty\rangle$.

Demostración.
[1] Procedamos como sigue:

a) Sea $H := \{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad |\lambda| > 1\}$. Como $1 \notin |\mathbb{K}^*|$, existe $\delta > 0$ de modo que $|1 - |\lambda||_{\mathbb{R}} \geq \delta$. En particular, $1 + \delta \leq |\lambda|$ para todo $|\lambda| \in H$. Así, $1 < m = \text{ínf}\, H$. Veamos que $m = \text{mín}\, H$. En efecto, supongamos que $m \notin H$, por lo que $m < |\lambda|$ para todo $|\lambda| \in H$. Entonces, para cada $\varepsilon_n = 1/n$, $n \geq 1$ existe $|\lambda_n| \in H$ tal que

$$m < |\lambda_n| < m + \frac{1}{n}.$$

Así, $|\lambda_n| \to m$. Definimos $a_n := |\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1}| \in \mathbb{K}^*$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n+1}|} = \frac{\lim_{n\to\infty} |\lambda_n|}{\lim_{n\to\infty} |\lambda_{n+1}|} = \frac{m}{m} = 1.$$

Luego, 1 es un punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$, lo cual contradice la hipótesis principal. Por lo tanto, existe $m = \text{mín}\, H$.

b) Sea $|\rho_1| = \text{mín}\,\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad |\lambda| > 1\}$. Entonces, no existe $\lambda \in |\mathbb{K}|^*$ tal que

$$0 < \log|\lambda| < \log|\rho_1|, \quad \text{si } |\lambda| > 1 \quad \text{o} \quad 0 < \log|\lambda^{-1}| < \log|\rho_1|, \text{ si } |\lambda| < 1. \tag{2.5}$$

Veamos que $|\mathbb{K}^*| := \{\, |\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{K}^* \,\} = \{\, |\rho_1|^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$. En efecto, como $\rho_1 \in \mathbb{K}^*$ y $|\mathbb{K}^*|$ es un grupo multiplicativo (Proposición 2.3.5), entonces $|\rho_1|^n \in |\mathbb{K}^*|$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $\{\, |\rho_1|^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\} \subset |\mathbb{K}^*|$. Por otro lado, sea $a \in |\mathbb{K}^*|$. Entonces, como $a, |\rho_1| \in \mathbb{R}$, por la tricotomía, se tiene que $a = |\rho_1|$ o $|\rho_1| < a$ o $|\rho_1| > a$.

- Si $a = |\rho_1|$, entonces existe $n = 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = |\rho_1|^1$.
- Si $|\rho_1| < a$, entonces como $1 < |\rho_1|$, tenemos $0 < \log|\rho_1| < \log a$. Así, tomando el máximo entero *** tenemos $1 \leq k := [\![\, \log a / \log|\rho_1| \,]\!] \in \mathbb{Z}^+$. Así,

$$k \leq \frac{\log a}{\log|\rho_1|} < k + 1.$$

De donde $0 \leq \log\left(a|\rho_1|^{-k}\right) < \log|\rho_1|$, y como $a|\rho_1|^{-k} \in |\mathbb{K}^*|$ por ser grupo multiplicativo, entonces por (2.5) tenemos que $\log\left(a|\rho_1|^{-k}\right) = 0$. Entonces, $a = |\rho_1|^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.

- Si $|\rho_1| > a$, entonces si $a \neq 1$ tenemos $0 < a < |\rho_1|^{-1} < 1$. En efecto, siguiendo un procedimiento similar al ítem *a*) existe $\alpha = \text{máx}\{\, |\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{K}^*, |\lambda| < 1\}$. Entonces, $|\rho_1|^{-1} \leq \alpha$. Y como $a^{-1} > 1$, entonces $|\rho_1| \leq \alpha^{-1}$. Así, $\alpha = |\rho_1|^{-1}$. Entonces $|\rho_1| > a^{-1}$, y como $a^{-1} \in |\mathbb{K}^*|$, por ser grupo multipilicativo, entonces por el caso anterior existe $k_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a^{-1} = |\rho_1|^{k_1}$. Haciendo $k = -k_1$ tenemos que $a = |\rho_1|^k$, para algún $k \in \mathbb{Z}^-$. Por otro lado. Si $a = 1$ entonces existe $n = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = |\rho_1|^0$.

En cualquier caso tenermos que $a = |\rho_1|^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Luego, tenemos que $|\mathbb{K}^*| \subset \{\, |\rho|^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$. Como $|\rho_1| > 1$, entonces consideremos $\rho := \rho_1^{-1} \in \mathbb{K}^*$. Concluimos que $|\mathbb{K}^*| = \{\, |\rho|^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ con $0 < |\rho| < 1$.

*** El máximo entero de $x \in \mathbb{R}$, denotado por $[\![x]\!]$, se define como $[\![x]\!] := \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

c) Supongamos que existe $|\lambda| \in |\mathbb{K}^*|$ tal que $|\lambda|$ sea un punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$. Etonces podemos construir $(|\lambda_j|)_{j\geq 1}$ una sucesión en $|\mathbb{K}^*|$ tal que $|\lambda_n| \to |\lambda|$. Luego $|\lambda_n\lambda^{-1}| \to 1$ con $\lambda_n\lambda^{-1} \in \mathbb{K}^*$. Así, 1 es un punto de acumulaciónde $\mathbb{K}^*$, lo cual contradice la hipótesis principal. Así, todos los puntos de $|\mathbb{K}^*|$ son aislados.

d) Se sigue inmediatamente del ítem *c*) y de la Observación 2.3.3 donde vimos que $0 \in |\mathbb{K}^*|'$.

[2] Sea $x \in \langle 0, \infty\rangle$. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos $0 < x < x + \varepsilon$. Como $1 < (x+\varepsilon)/x$ y $1 \in |\mathbb{K}^*|$, existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $1 < |\lambda| < \lambda\left((x+\varepsilon)/x\right)$, es decir, $0 < \log|\lambda| < \log(x+\varepsilon) - \log x$. Podemos hallar $m \in \mathbb{Z}$ mínimo tal que $m \geq \log(x+\varepsilon)/\log|\lambda|$. Entonces, se cumple $\log(x+\varepsilon) \leq m\log|\lambda|$ y

$$(m-1)\log|\lambda| < \log(x+\varepsilon). \tag{2.6}$$

Por otro lado, tenemos que $\log x < (m-1)\log|\lambda|$. Si $\log x \geq (m-1)\log|\lambda|$, entonces

$$\log(x+\varepsilon) - \log x \leq m\log|\lambda| - (m-1)\log|\lambda| = \log|\lambda| < \log(x+\varepsilon) - \log x,$$

lo cual es una contradicción. Entonces, junto la desgualdad de (2.6) tenemos que

$$\log x < (m-1)\log|\lambda| < \log(x+\varepsilon).$$

Como $|\mathbb{K}^*|$ es un grupo multiplicativo, Propisción 2.3.5, tenemos

$$x < \left|\lambda^{m-1}\right| < x + \varepsilon; \quad \lambda^{m-1} \in \mathbb{K}^*.$$

Es decir, que dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(x,\varepsilon)\setminus\{x\} \cap |\mathbb{K}^*| \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \overline{|\mathbb{K}^*|}$. Así, $\langle 0,\infty\rangle \subset \overline{|\mathbb{K}^*|}$, lo que implica que $\overline{|\mathbb{K}^*|} = \langle 0,\infty\rangle$. □

Observación 2.3.6. La Proposición 2.3.7 caracteriza a un campo $\mathbb{K}$ como discreto o denso en $\langle 0,\infty\rangle$. Utilizamos esto para estudiar la completitud esférica del campo.

Teorema 2.3.1. Si $\mathbb{K}$ tiene una valoración discreta, entonces $\mathbb{K}$ es esféricamente completo.

Demostración. Notemos que si B es una bola, entonces $d(B) = \sup_{x,y\in B}|x-y| \in |\mathbb{K}^*|$. En efecto, para cada $\varepsilon_n = 1/n$, $n \neq 1$, existe $x_n, y_n \in B$ tal que $d(B) - 1/n < |x_n - y_n| \leq d(B)$. Entonces, como $|z_n| = |x_n - y_n| \in |\mathbb{K}^*|$, tenemos que $|z_n| \to d(B)$ con $d(B) > 0$. Como $|\mathbb{K}|$ tiene valuación discreta, Proposición 2.3.7, $|\mathbb{K}^*|$ es discreto en $\langle 0,\infty\rangle$ y que $|\mathbb{K}^*|' = \{0\}$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ entonces $|z_n| = d(B)$. Así, $d(B) \in |\mathbb{K}^*|$.

Ahora veamos el resultado que busca. Sea $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ una cadena decreciente de bolas en $\mathbb{K}$. Así, $d(B_1) \geq d(B_2) \geq \cdots d(B_n) \geq \cdots$ es un sucesión decreciente de elementos de $|\mathbb{K}^*|$, y por lo tanto es convergente. Y como $|\mathbb{K}|$ tiene valuación discreta, Proposición 2.3.7, $\mathbb{K}$ es discreto en $\langle 0,\infty\rangle$ y que $|\mathbb{K}|' = \{0\}$. Por lo tanto, tenemos dos casos: existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_1$ se cumple $d(B_{n_1}) = d(B_n)$, o $d(B_n) \to 0$.

- Si $(d(B_n)_{n\geq 1})$ es estacionaria, entonces la cadena de bolas es estacionaria, por lo que se cumple que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.
- Si $d(B_n) \to 0$ y toda bola es cerrada entonces por la Proposición 2.2.4, ya que $\mathbb{K}$ es completo, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

En cualquier caso, la intersección de la cadena decreciente de bolas no es vacía, por lo que concluimos que $\mathbb{K}$ es esféricamente completo. □

Corolario 2.3.1. $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ es esféricamente completo.

Demostración. Notemos,según el Ejemplo 2.1.5, que dado $x \in \mathbb{Q}$, entonces $v_p(x) \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, tenemos

$$|\mathbb{Q}^*|_p = \{\, |x|_p \mid x \in \mathbb{Q}_p \,\} = \left\{p^{-v_p(x)} \mid x \in \mathbb{Q}_p\right\} \subset \{\, p^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Y es claro que $\{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset |\mathbb{Q}^*|_p$. Así,

$$|\mathbb{Q}^*|_p = \{\, p^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}. \tag{2.7}$$

Por lo que tenemos:

- $|\mathbb{Q}^*|$ es discreto en $\langle 0, \infty\rangle$: Por (2.7) tenemos que

  $$|\mathbb{Q}^*|_p = \left\{\cdots, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2, \cdots\right\}.$$

  De donde, podemos observar que, $|\mathbb{Q}_p^*|$ es discreta (con el valor absoluto estandar de $\mathbb{R}$) en $\langle 0, \infty\rangle$.

- 0 es el único punto de acumulación de $|\mathbb{Q}^*|$: Considremos la sucesión $(p^{-m})_{m\geq 1}$. Entonces, $\lim_{m\to\infty} p^{-m} = 0$. Esto implica que 0 es un punto de acumulación de $|\mathbb{Q}^*|$. La unicidad se sigue del hecho de que $|\mathbb{Q}^*|$ es discreto en $\langle 0, \infty\rangle$.

Ahora veamos que $|\mathbb{Q}_p| = \{\, p^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$. En efecto, por la definición 3.4.2 y el Ejemplo 3.4.1 sabemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}_p$. Entonces, dado $x \in |\mathbb{Q}_p^*|_p$, existe $(x_j)_{j\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$. Por la Proposición 2.3.3 tenemos que $|x_n|_p \to |x|_p$. Como $(|x_j|_p)_{j\geq 1}$ es un sucesión en $|\mathbb{Q}^*|_p$ conjunto discreto con 0 su único punto de acumulación, entonces $|x_n| \to 0$ o $|x_n|_p = |x|_p$ a partir de un índice. Si suponemos que $|x|_p = 0$ entonces $x = 0$ lo cual contradice el hecho de que $x \in \mathbb{Q}_p^*$. Por lo tanto $|x|_P = |x_n|_p \in |\mathbb{Q}^*|$. Esto significa que $|\mathbb{Q}_p^*|_p \subset |\mathbb{Q}^*|_p$; y claramente $|\mathbb{Q}^*|_p \subset |\mathbb{Q}_p^*|_p$ por lo que

$$|\mathbb{Q}_p^*|_p = |\mathbb{Q}^*|_p = \{\, p^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}. \tag{2.8}$$

Entonces, $|\mathbb{Q}_p^*|_p$ es discreta en $\langle 0, \infty\rangle$. Así, 1 no es un punto de acumulación de $|\mathbb{Q}_p^*|_p$; y por lo tanto, el campo $\mathbb{Q}_p$ completo tiene una valoración discreta. El Teorema 2.3.1 nos permite concluir que $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ es esféricamente completo.

□

Propiedad	$\mathbb{Q}$ **Racionales**	$\mathbb{Q}_p$ **Números p-ádicos**	$\mathbb{C}_p$ **Complejos p-ádicos**
Completitud	No	Sí	Sí
Completitud esférica	No	Sí	No
Valoración discreta	Sí	Sí	No
Valoración densa	No	No	Sí

Cuadro 2.1: Comparación de propiedades de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$, y $\mathbb{C}_p$.

Observación 2.3.7. De la prueba del Corolario 2.3.1 en (2.7) podemos ver que 1 no es un punto de acumulación de $|\mathbb{Q}^*|_p$; por lo tanto, $\mathbb{Q}$ tiene una valoración discreta; sin embargo, no podemos concluir que es esféricamente completo pues $\mathbb{Q}$ no es un campo completo como se exije en las hipótesis del Teorema 2.3.1.

2.4. Espacios normados no arquimedianos

En el análisis clásico, los espacios normados son esenciales para abordar conceptos como la convergencia, la continuidad,... Además, permiten la formulación y el análisis de operadores lineales y la teoría de espacios duales, lo que contribuye a una comprensión profunda de la estructura matemática y la resolución de problemas en diversas áreas.

En el contexto de espacios normados definidos sobre campos no arquimedianos, buscamos establecer una estructura que permita aplicar principios similares al análisis clásico. Para esto, es necesario considerar espacios normados en los cuales la norma satisface una desigualdad ultramétrica, lo que asegura propiedades robustas en términos de convergencia y proximidad. La definición de estos espacios sobre campos completos, campos completos no arquimedianos, garantiza que las propiedades de los espacios normados sean análogas a las de los espacios de Banach en el contexto clásico, proporcionando así una base sólida para el análisis en este entorno no arquimediano.

Definición 2.4.1. Sea E un espacio vectorial (ver definición en [4]) sobre un campo valuado K. Una *norma* en E es una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que se cumple:

1. Dados $x \in E$: $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. Dados $\alpha \in K$ y $x \in E$: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
3. Dados $x, y \in E$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (Desigualdad triangular).

Definición 2.4.2. Sean E y F dos espacios normados. Decimos que

- Una aplicación $f : E \to F$ es una *isometría* si $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.
- Si además f es lineal, decimos que f es un *embebimiento isométrico*.

Antes de centrar el estudio en los «espacios normados no arquimedianos» veamos algunas propiedades que se cumplen de manera general.

Proposición 2.4.1. Denotemos por $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ el valor absoluto usual de $\mathbb{R}$. Entonces:

1. $\|-x\| = \|x\|$, para todo $x \in E$.
2. $|\,\|x\| - \|y\|\,|_{\mathbb{R}} \leq \|x - y\|$, para todo $x, y \in E$.

Demostración. En efecto. Sean $x, y \in E$.

[1] $\|-x\| = \|(-1_K) \cdot x\| = |-1_K| \cdot \|x\| = 1 \cdot \|x\| = \|x\|$.

[2] Notemos que

- $\|x\| \leq \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, luego $\quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.
- $\|y\| \leq \|(x - y) + (-x)\| \leq \|x - y\| + \|-x\|$, luego $\quad -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$.

Entonces

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

de donde

$$|\,\|x\| - \|y\|\,|_{\mathbb{R}} \leq \|x - y\|.$$

□

Proposición 2.4.2. Dado $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \left\| \lim_{n\to\infty} x_n \right\|.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $\|x_n - L\| < \varepsilon$. Sabemos por la Proposición 2.4.1 que $|\, \|x_n\| - \|L\| \,|_{\mathbb{R}} \leq \|x_n - L\|$, donde $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ es el valor absoluto usual de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $|\, \|x_n\| - \|L\| \,|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|L\| = \left\| \lim_{n\to\infty} x_n \right\|.$$

□

La Proposición 2.4.2 nos garantiza que el límite puede ingresar dentro de la norma.

Definición 2.4.3 (Operadores lineales)**.** Sean E, F dos espacios normados y $L : E \to F$ una aplicación lineal. Decimos que L es *acotado* si existe $R > 0$ tal que $\|L(x)\| \leq R \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$.

Un resultado muy importante y útil es la Proposición 2.4.3, que sabemos que es válida en espacios normados cuyos campos son $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En dichas demostraciones, se usa la normalización de un vector al dividirlo por su norma $x/\|x\|$. Este hecho no es posible, al menos de manera general, como se puede ver en la Proposición 2.4.7, pues el campo K es no arquimediano, cuyos elementos no son, en general, «números». Por lo tanto, es necesario dar una prueba que nos dé su validez.

Proposición 2.4.3. Sea $L : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios normados. Son equivalentes:

1. L es continua en $0 \in E$.
2. L es continua en E.
3. L es acotada.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Sea $\varepsilon > 0$. Como L es continua en 0, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|h\| < \delta$, entonces $\|L(h)\| < \varepsilon$. Veamos que L es continua en E. Sea $x \in E$ tal que $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|L(x) - L(y)\| = \|L(x - y)\| < \varepsilon$. Así, L es continua en $x \in E$. Por lo tanto, L es continua.

[2 $\Rightarrow$ 3] Como L es continua en E, en particular es continua en $0 \in E$. Así, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|y\| < \delta$, entonces $\|L(y)\| < 1$. Como $0 \leq \|y\| < \delta$ y en la Observación 2.3.3 vimos que $0 \in |\mathbb{K}^*|'$, podemos hallar $|\lambda| \in |\mathbb{K}^*|$ con $|\lambda| \neq 1$, tal que $0 < |\lambda| < \delta$. Dado $x \in E$, como $|\lambda| \neq 1$, podemos hallar $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|\lambda|^{m+2} < \|x\| \leq |\lambda|^{m+1}$. Así, tenemos

$$\|L(x)\| = |\lambda|^m \cdot \|\lambda^{-m} L(x)\| = |\lambda|^m \cdot \|L(\lambda^{-m} x)\| < |\lambda|^m < |\lambda|^{-2} \cdot \|x\|.$$

Como $|\lambda|^m < |\lambda|^{-2} \cdot \|x\|$, tomamos $R = |\lambda|^{-2} > 0$. Por lo tanto, tenemos $\|L(x)\| < R\|x\|$ para todo $x \neq 0$, pues la existencia de R no depende de ningún x desde que la existencia de λ no depende de ningún x. Si $x = 0$, entonces $\|L(x)\| = 0 = R \cdot \|x\|$. Así, $\|L(x)\| \leq R\|x\|$ para todo $x \in E$, es decir, L es acotado.

[3 $\Rightarrow$ 1] Por hipótesis, existe $R > 0$ tal que $\|L(x)\| \leq R\|x\|$ para todo $x \in E$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon/R > 0$. Entonces, si $\|x\| < \delta$, tenemos que $\|L(x)\| \leq R\|x\| < R(\varepsilon/R) = \varepsilon$. De donde se concluye que L es continua en $0 \in E$. □

Definición 2.4.4. Sean E y F dos espacios normados. Definimos por $\mathcal{B}(E,F)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales acotadas de E en F. Es decir,

$$\mathcal{B}(E,F) := \{L : E \to F \mid L \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Observación 2.4.1. Como se puede ver en [9], $\mathcal{B}(E,F)$ es un $K-$ es un espacio normado con las operaciones:

- $(L+T)(x) = L(x) + T(x)$, para todo $x \in E$.
- $(\lambda T)(x) = T(\lambda x)$, para todo $\lambda \in K$ y todo $x \in E$.

y la norma

$$\|L\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}.$$

(En el Ejemplo 2.4.1 se demuestra que esta definición es válida.)

Definición 2.4.5. Un espacio normado es no arquimediano si tiene una norma no arquimediana. Una norma se dice que es *no arquimediana* si, la desigualdad triangular en la Definición 2.4.1, se reemplaza por desigualdad ultramétrica:

$$\|x+y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Observación 2.4.2. Si $\|x\| \neq \|y\|$, entonces $\|x-y\| = \|x+y\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$.

En efecto. Sin pérdida de generalidad, consideremos que $\|y\| < \|x\|$. Entonces, $\|x+y\| \leq \|x\|$. Supongamos que $\|x+y\| < \|x\|$. Como $x = (x+y) + (-y)$, entonces:

$$\|x\| \leq \text{máx}\{\|x+y\|, \|y\|\} < \|x\|.$$

Este absurdo viene de suponer la desigualdad estricta por lo que $\|x+y\| = \|x\|$. Finalmente, tenemos $\|x-y\| = \|x+(-y)\| = \text{máx}\{\|x\|, \|-y\|\} = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} = \|x+y\|$.

Definición 2.4.6. Un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach* si E es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma: $d(x,y) := \|x-y\|$.

Recordemos que con $\mathbb{K}$ denotamos un campo no arquimediano completo y no trivialmente valuado. Y siempre que no se especifique otro campo, debe entenderse que nos referimos a este campo.

Definición 2.4.7. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Decimos que es un espacio de *Banach no arquimediano* si $\|\cdot\|$ es una norma no arquimediana.

Ejemplo 2.4.1. Si E y F son espacios normados, y si F es un espacio de Banach no arquimediano, entonces $\mathcal{B}(E,F)$ es un espacio de Banach no arquimediano con la norma

$$\|L\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}.$$

En efecto. Iniciemos mostrando que $\mathcal{B}(E,F)$ es un espacio de Banach no arquimediano. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$, y $L, T \in \mathcal{B}(E,F)$.

- Como $0 \leq \|L(x)\|/\|x\| \leq \|L\|$, entonces $\|L\| \geq 0$. Si $L = 0$, entonces tenemos $\|L\| = \sup_{x\neq}\{0\} = 0$. Por otro lado, si $\|L\| = 0$, entonces $\|L(x)\| = 0$ para todo $x \neq 0$. Como L es una aplicación lineal se cumple que $L(x) = 0$ si $x = 0$. Así, $L(x) = 0$ para todo $x \in E$, por lo que $L = 0$.

- Por propiedad del supremo, tenemos

$$\|\lambda L\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|L(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = |\lambda|\|L\|.$$

- Como $\|L(x) + T(x)\| \leq \text{máx}\{\|L(x)\|, \|T(x)\|\}$, se tiene que

$$\frac{\|(L+T)(x)\|}{\|x\|} \leq \text{máx}\left\{\frac{\|L(x)\|}{\|x\|}, \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}\right\} \leq \text{máx}\{\|L\|, \|T\|\}; \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

  Entonces,

$$\|L + T\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|(L+T)(x)\|}{\|x\|} \leq \text{máx}\{\|L\|, \|T\|\}.$$

Ahora debemos ver que $\mathcal{B}(E, F)$ es completo. Sea $(L_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(E, F)$. Así, para cada $x \in E$ la sucesión $(L_j(x))_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en F. Como F es completo, entonces $L_n(x) \to y_x \in F$. Definimos la aplicación $L : E \to F$ por

$$L(x) := \begin{cases} y_x & ;\text{si } x \neq 0 \\ 0 & ;\text{si } x = 0 \end{cases}$$

Debemos verificar que L es lineal y acotado. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$, y $x, z \in E$.

- L es lineal: Dado que $L_n(x + \lambda z) = L_n(x) + \lambda L_n(z)$, al tomar el límite cuando $n \to \infty$, y por la unicidad del límite, obtenemos $L(x + \lambda z) = L(x) + \lambda L(z)$.

- L es acotada: Como $(L_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión de cauchy, es acotada, es decir, existe $R > 0$ tal que $\|L_n\| \leq R$ para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, $L_n(x) \leq R\|x\|$ para todo $x \neq 0$. Al tomar el límite cuando $n \to \infty$, y aplicando la Proposición 2.4.2, obtenemos que $\|L(x)\| \leq R \cdot \|x\|$ para todo $x \neq 0$. Si $x = 0$, entonces tenemos $\|L(x)\| = 0 = R \cdot \|x\|$. Por tanto, $\|L(x)\| \leq R\|x\|$ para todo $x \in E$.

Tenemos entonces que $L \in \mathcal{B}(E, F)$. Como útltimo paso, debemos verificar que $L_n \to L$. Dado $\varepsilon > 0$, como $(L_j)_{j\geq 1}$ de una sucesión de Cauchy, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ se cumple que $\|L_m - L_n\| < \varepsilon/2$. Así, para $n, n_0 + h > n_0$ tenemos:

$$\|L_n(x) - L_{n_0+h}(x)\| \leq \|x\|\varepsilon/2; \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Haciendo $h \to \infty$ y aplicando la Proposición 2.4.2, obtenemos:

$$\frac{\|L_n(x) - L(x)\|}{\|x\|} < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Por lo tanto:

$$\|L_n - L\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|(L_n - L)(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon.$$

Esto muestra que $L_n \to L \in \mathcal{B}(E, F)$. Así, $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach no arquimediano. ■

Ejemplo 2.4.2. Fijado $1 \leq r < \infty$, para $\mathbb{K} := (\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$. El espacio

$$\ell^r := \left\{ x = (x_j)_{j\geq 1} \;\middle|\; x_j \in \mathbb{K},\ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|_p^r < \infty \right\}$$

es un espacio de Banach con la norma $\|x\|_r := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|_p^r\right)^{1/r}$, ver [9]; pero no es un espacio de Banach no arquimediano. En efecto, consideremos

$$x = (1, 0, 0, \cdots);\ y = (0, 1, 0, \cdots) \in \ell^r.$$

Calculeamos sus normas:

- $\|x\|_r = \left(|1|_p^r + |0|_p^r + |0|_p^r + \cdots\right)^{1/r} = \left(p^{-v_p(1)} + 0 + 0 + \cdots\right)^{1/r} = (p^{-0})^{1/r} = 1$
- $\|y\|_r = \left(|0|_p^r + |1|_p^r + |0|_p^r + \cdots\right)^{1/r} = \left(0 + p^{-v_p(1)} + 0 + \cdots\right)^{1/r} = (p^{-0})^{1/r} = 1$
- $\|x+y\|_r = \left(|1|_p^r + |1|_p^r + |0|_p^r + \cdots\right)^{1/r} = \left(p^{-v_p(1)} + p^{-v_p(1)} + 0 + \cdots\right)^{1/r} = (2)^{1/r}$

Así,

$$\|x+y\|_r = 2^{1/r} > 1 = \max\{\|x\|_r, \|y\|_r\}$$

■

Ejemplo 2.4.3. El *espacio de sucesiones acotadas*

$$\ell^\infty := \left\{ x = (x_j)_{j\geq 1} \;\middle|\; x_j \in \mathbb{K};\ \sup_{j\geq 1} |x_j| < \infty \right\}$$

es un espacio de Banach no arquimediano con la norma $\|x\|_\infty := \sup_{j\geq 1} |x_j|$.

Justificaremos este hecho en la Observación 2.4.4. Por lo pronto, veamos que la norma es no arquimediano. En efecto, sean $x, y \in \ell^\infty$. Como $\mathbb{K}$ es un campo no arquimediano tenemos $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ para todo $a, b \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$|x_j + y_j| \leq \max\{|x_j|, |y_j|\} \leq \max\left\{\sup_{j\geq 1} |x_j|, \sup_{j\geq 1} |y_j|\right\} = \max\{\|x\|_\infty, \|y\|_\infty\}.$$

Por lo tanto, $\sup_{j\geq 1} |x_j + y_j| \leq \max\{\|x\|_\infty, \|y\|_\infty\}$. Finalmente,

$$\|x+y\|_\infty \leq \max\{\|x\|_\infty, \|y\|_\infty\}.$$

Ejemplo 2.4.4. El *espacio de sucesiones que convergen a cero*, c_0, es un subespacio vectorial cerrado de ℓ^∞ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Este espacio es un espacio de Banach no arquimediano. Se define como

$$c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{K};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}.$$

■

Observación 2.4.3. En c_0, la norma $\|\cdot\|_\infty$ alcanza un máximo. Esto significa que

$$\|(x_n)_{n\geq 1}\|_\infty = \max_{n\geq 1} |x_n|.$$

Vamos a justificar, en un contexto general, que los espacios ℓ^∞ y c_0 son espacio de Banach no arquimedianos, utilizando la *norma ponderada* que se define como:

$$\|(\lambda_j)_{j\in I}\| := \sup_{j\in I} |\lambda_j| \cdot s(j),$$

donde I es un conjunto de índices y $s : I \to \langle 0, \infty\rangle$ es una aplicación.

Proposición 2.4.4. El *espacio de sucesiones acotadas ponderadas*, $\ell^\infty(I : s)$, con la norma ponderada es un espacio de Banach no arquimediano. Se define como:

$$\ell^\infty(I, s) := \left\{ x = (x_j)_{j\in I} \;\middle|\; x_j \in \mathbb{K};\ \sup_{j\in I} |x_j| \cdot s(j) < \infty \right\}.$$

Demostración. Primero veamos que

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \ell^\infty(I, s) &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (\lambda_j)_{j\in I} &\longmapsto \sup_{j\in I} |\lambda_j| \cdot s(j) \end{aligned}$$

es una norma no arquimediana. En efecto, sean $x, y \in \ell^\infty(I, s)$.

- Es claro que $|x_j| \geq 0$, de donde $\|x\| \geq |x_j| \cdot s(j) \geq 0$. Si $\|x\| = 0$, entonces

  $$|x_j| \cdot s(j) \leq \|x\| = 0, \text{ y además } s(j) > 0$$

  para todo $j \in I$. Por lo que $x = 0$. Por otro lado, si $x = 0$, entonces $\|x\| = 0$.

- Sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ es un campo valuado:

  $$\|\alpha x\| = \sup_{j\in I} |\alpha x_j| \cdot s(j) = \sup_{j\in I} |\alpha| \cdot |x_j| \cdot s(j) = |\alpha| \sup_{j\in I} |x_j| \cdot s(j) = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

- Como $\mathbb{K}$ es no arquimediano, tenemos $|x_j + y_j| \leq \max\{|x_j|, |y_j|\}$ para todo $x_j, y_j \in \mathbb{K}$, de donde

  $$|x_j + y_j| \cdot s(j) \leq \max\{|x_j|, |y_j|\}\, s(j) = \max\{|x_j| \cdot s(j), |y_j| \cdot s(j)\},$$

  pues $s(j) > 0$. Entonces,

  $$\begin{aligned} |x_j + y_j| \cdot s(j) &\leq \max\{|x_j| \cdot s(j), |y_j| \cdot s(j)\} \\ &\leq \max\left\{ \sup_{j\in I} |x_j| \cdot s(j), \sup_{j\in I} |y_j| \cdot s(j) \right\} = \max\{\|x\|, \|y\|\}. \end{aligned}$$

  Finalmente,

  $$\|x + y\| = \sup_{j\in I} |x_j + y_j| \cdot s(j) \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

Ahora probamos la completitud del espacio. Sea $\left(x^k\right)_{k\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^\infty(I, s)$, donde cada $x^k = \left(x_j^k\right)_{j\in I}$ pertenece a $\ell^\infty(I, s)$. Fijamos $j \in I$ arbitrario. Dado $\varepsilon > 0$, para $s(j)\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $l, k > k_0$, entonces $\|x^k - x^l\| < s(j) \cdot \varepsilon$. De donde se sigue que:

$$\left|x_j^k - x_j^l\right| \cdot s(j) < s(j) \cdot \varepsilon, \text{ por lo tanto } \left|x_j^k - x_j^l\right| < \varepsilon.$$

La sucesión $\left(x_j^k\right)_{k\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, que es campo completo, por lo que existe $x_j \in \mathbb{K}$ tal que $x_j^k \to x_j$. Definimos $x := (x_j)_{j\in I}$. Así definido tenemos:

- $\lim_{k\to\infty} x^k = x$: Dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon/2$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $k, l > k_1$, entonces
$$\sup_{j\in I} \left|x_j^k - x_j^l\right| \cdot s(j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Fijado $j \in I$, tenemos $\left|x_j^k - x_j^l\right| < \varepsilon/2 \cdot s(j)$. Luego, por la Proposición 2.3.3, al hacer $l \to \infty$, tenemos
$$\left|x_j^k - x_j\right| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot s(j)}.$$
Entonces, para todo $j \in I$, tenemos $\left|x_j^k - x_j\right| \cdot s(j) \leq \varepsilon/2$, por lo que
$$\left\|x^k - x\right\| = \sup_{j\in I} |x_j^k - x_j| \cdot s(j) < \varepsilon.$$

- $x \in \ell^\infty(I, s)$: Del punto anterior, $\left(x^k\right)_{k\geq 1}$ es convergente, luego es acotado. Así, para cada $j \in I$ tenemos
$$\begin{aligned} |x_j| \cdot s(j) &= \left|x_j - x_j^k + x_j^k\right| \cdot s(j) \leq \text{máx}\left\{\left|x_j^k - x_j\right| \cdot s(j), \left|x_j^k\right| \cdot s(j)\right\} \\ &\leq \text{máx}\left\{\left\|x^k - x\right\|, \left\|x^k\right\|\right\}. \end{aligned}$$
De donde
$$\|x\| = \sup_{j\in I} |x_j| \cdot s(j) \leq \text{máx}\left\{\left\|x^k - x\right\|, \left\|x^k\right\|\right\} < \infty.$$

□

Proposición 2.4.5. El *espacio de sucesiones nulas ponderadas*, $c_0(I, s)$, es un subespacio vectorial cerrado de $\ell^\infty(I, s)$ con la norma ponderada, y es un espacio de Banach no arquimediano. Se define como:
$$c_0(I, s) := \{x = (x_j)_{j\in I} \in \ell^\infty(I, s) \mid \forall \varepsilon > 0 : \{\, j \in I \,/\, |x_j| s(j) \geq \varepsilon \,\} \text{ es finito}\}.$$

Demostración. Primero probamos que $c_0(I, s)$ es cerrado. En efecto, sea $x \in \overline{c_0(I, s)}$, entonces existe una sucesión $\left(x^k\right)_{k\geq 1}$ en $c_0(I, s)$ tal que $x^k \to x$ en $\ell^\infty(I, s)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^k - x\| < \varepsilon/2$. En particular, para $k_1 = k_0 + 1$ tenemos
$$|x_j^{k_1} - x_j| \cdot s(j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Por otro lado, como $\left(x_j^{k_1}\right)_{j\in I} \in c_0(I, s)$, sabemos que el conjunto
$$J := \left\{\, j \in I \,/\, \left|x_j^{k_1}\right| s(j) \geq \frac{\varepsilon}{2} \,\right\} \text{ es finito.}$$
Es decir,
$$\left|x_j^{k_1}\right| s(j) < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \forall\, j \in I \setminus J.$$
Entonces,
$$|x_j| \cdot s(j) \leq \left|x_j^{k_1} - x_j\right| + \left|x_j^{K_1}\right| \cdot s(j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{para todo } j \in I \setminus J.$$
Así, el conjunto
$$J = \{\, j \in I \,/\, |x_j| \cdot s(j) \geq \varepsilon \,\} \text{ es finito.}$$
Por lo tanto, $x = (x_j)_{j\in I} \in c_0(I, s)$.

Para finalizar, recordemos que $\ell^\infty(I, s)$ es completo. Entonces, $c_0(I, s)$ es completo ya que es cerrado. □

Observación 2.4.4. Recordemos que $s : I \to \langle 0, \infty \rangle$. Al definir $s(j) := 1$, para todo $j \in I$, en la Proposición 2.4.4 y la Proposición 2.4.5 obtenemos los siguientes resultados:

1. Si $I := \mathbb{N}$, se justifican el Ejemplo 2.4.3 y el Ejemplo 2.4.4
2. Si I es arbitrario, se escribe $\ell^\infty(I)$ y $c_0(I)$.

Proposición 2.4.6. Si E y F son dos espacios de Banach no arquimedianos, entonces $E \times F$ es un espacio de Banach no arquimediano con la norma no arquimediana

$$\|(x, y)\| := \text{máx}\{\, \|x\|, \|y\| \,\}; \quad \text{para todo } (x, y) \in E \times F.$$

Observación 2.4.5. Recuerde que, en álgebra lineal, $E \times F$ es un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

Suma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Producto escalar: $\lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Demostración. Primero, probamos que

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E \times F &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} \end{aligned}$$

es una norma no arquimediana. En efecto, sean $(x, y), (r, s) \in E \times F$.

- Como $\|x\| \geq 0$ y $\|y\| \geq 0$, se tiene que $\|(x, y)\| \geq 0$. Si $\|(x, y)\| = 0$, entonces $\|x\| = \|y\| = 0$, de donde $(x, y) = 0$. Si $(x, y) = 0$, es claro que $\|(x, y)\| = 0$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \|\lambda(x, y)\| = \|(\lambda x, \lambda y)\| &= \text{máx}\{\|\lambda x\|, \|\lambda y\|\} = \text{máx}\{|\lambda| \cdot \|x\|, |\lambda| \cdot \|y\|\} \\ &= |\lambda| \,\text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} = |\lambda| \cdot \|(x, y)\|. \end{aligned}$$

- Como $\|x + r\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|r\|\}$, $\|y + s\| \leq \text{máx}\{\|y\|, \|s\|\}$, junto con la definición de la norma en $E \times F$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|(x, y) + (r, s)\| = \|(x + r, y + s)\| &= \text{máx}\{\|x + r\|, \|y + s\|\} \\ &\leq \text{máx}\{\text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}; \text{máx}\{\|r\|, \|s\|\}\} \\ &= \text{máx}\{\|x\|, \|y\|, \|r\|, \|s\|\}. \end{aligned}$$

Por otro lado: $\|(x, y)\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$; $\|(r, s)\| = \text{máx}\{\|r\|, \|s\|\}$, luego

$$\begin{aligned} \text{máx}\{\|(x, y)\|, \|(r, s)\|\} &= \text{máx}\{\text{máx}\{\|x\|, \|ry\|\}, \text{máx}\{\|r\|, \|s\|\}\} \\ &= \text{máx}\{\|x\|, \|y\|, \|r\|, \|s\|\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\|(x, y) + (r, s)\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|, \|r\|, \|s\|\} = \text{máx}\{\|(x, y)\|, \|(r, s)\|\}$$

Así, hemos demostrado que la norma en $E \times F$ es una norma no arquimediana. Finalmente, probamos la completitud del espacio $E \times F$. En efecto, sea $\left(\xi^k\right)_{k\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $E \times F$, donde $\xi^k = (x_k, y_k)$, con $x_k \in E$, $y_k \in F$ para todo $k \geq 1$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l \geq k_0$, entonces $\|\xi^k - \xi^l\| < \varepsilon$. En particular, esto implica que

$$\|x_k - x_l\| < \varepsilon; \quad \|y_k - y_l\| < \varepsilon.$$

Así, las sucesiones $(x_k)_{k\geq 1}$ en E y $(y_k)_{k\geq 1}$ en F son sucesiones de Cauchy es sus respetivos espacios de Banach. Por lo tanto, existen $x \in E$ y $y \in F$ tales que $x_k \to x$ y $y_k \to y$.

Definimos $\xi = (x, y) \in E \times F$. Debemos verificar que $\xi^k \to \xi$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_1$, entonces

$$\|x_k - x\| < \varepsilon; \quad \|y_k - y\| < \varepsilon.$$

Así,

$$\|\xi^k - \xi\| = \|(x_k - x), (y_k - y)\| = \max\{\|x_k - x\|, \|y_k - y\|\} < \varepsilon.$$

Esto muestra que la sucesión $(\xi^k)_{k\geq 1}$ converge en $E \times F$. Concluimos que $E \times F$ es completo, y por lo tanto, es un espacio de Banach no arquimediano. □

Observación 2.4.6. Note que $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}-$espacio espacio vectorial. Y su función de valoración cumple con la definición de norma (norma no arquimediana) y, además, es completo con esta norma. Por lo tanto, $\mathbb{K}$ es un espacio de Banach no arquimediano.

La Observación 2.4.6 y la Proposición 2.4.6 permiten considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.5. El espacio $\mathbb{K}^n$, con la norma

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| := \max_{1\leq j\leq n} |x_j|,$$

es un espacio de Banach no arquimediano.

La Observación 2.4.6 nos dice que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es un espacio normado no arquimediano, y como $\mathbb{K}$ es un campo, existe $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tal que $|1_{\mathbb{K}}| = 1$. Del Corolario 2.3.1, en (2.8), tenemos que

$$|\mathbb{Q}_p| = \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \subsetneq [0, \infty\rangle.$$

Y del Ejemplo 2.3.3, en (2.4), tenemos que

$$|\mathbb{C}_p| = \{p^q \mid q \in \mathbb{Q}\} \cup \{0\} \subsetneq [0, \infty\rangle.$$

Entonces, podemos contruir espacios de Banach no arquimedianos para los cuales no existe un elemento con norma igual a uno, tal como se puede ver en la Proposición 2.4.7 ■

Proposición 2.4.7. Si $|\mathbb{K}| \subsetneq [0, \infty\rangle$, tomando $s \in [0, \infty\rangle \setminus |\mathbb{K}|$, definamos $\|x\| := s \cdot |x|$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Entonces $(\mathbb{K}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach no arquimediano sobre $\mathbb{K}$ tal $\|x\| \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

Demostración. No es difícil ver que $(\mathbb{K}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach no arquimediano. Supongamos que existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $s \cdot |x| =: \|x\| = 1$. Entonces, $|x| = s^{-1} \in |\mathbb{K}^*|$. Por la Proposición 2.3.5, $|\mathbb{K}|$ es un grupo multiplicativo, lo que implica que $s \in |\mathbb{K}|$, lo cual contradice el hecho de que $s \notin |\mathbb{K}|$. □

Capítulo 3

Espacios de Banach no arquimedianos

El objetivo de este capítulo es proporcionar una visión detallada de los espacios normados de Banach no arquimedianos, abarcando diversos aspectos cruciales para comprender su estructura y propiedades.

Con frecuencia utilizamos el hecho de que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base algebraica cuyo número de elementos coincide con la dimensión del espacio. Además, cada vector admite una representación única como combinación lineal de los vectores de su base algebraica. Ver [4].

En este capítulo, todos los espacios están definidos sobre el campo $\mathbb{K}$, y todos los espacios normados son espacios normados no arquimedianos. Por lo tanto, si un espacio normado es completo, entonces es un espacio de Banach no arquimediano. En consecuencia, nos referimos a ellos como espacios de Banach.

3.1. Completitud en espacios normados no arquimedianos

Iniciamos esta sección recordando la Observación 2.2.1, donde vimos la diferencia entre conjunto, sucesión y secuencia. También notamos la posibilidad de indexar un conjunto con el mismo cardinal mediante una biyección $j \mapsto w_j$ de I sobre S, y escribir al conjunto como una secuencia $S = \{w_j\}_{j\in I}$. Esta indexación facilita la manipulación de los elementos.

Definición 3.1.1. Dado una secuencia $\{w_j\}_{j\geq 1}$ en un espacio normado E, decimos que la secuencia es *sumable* con una *suma* $x \in E$ si

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{n} w_j \right\| = 0.$$

Este hecho se expresa generalmente como $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$. También decimos que la serie, o suma infinita, es convergente o converge a x.

Observación 3.1.1. Es claro que todas las propiedades conocidas sobre series se aplican aquí: la linealidad de la suma, multiplicación por un escalar, criterio de Cauchy, la «convergencia absoluta». Y otras propiedades de espacios de Banach, que no necesariamente son no arquimedianas. Para más detalles, consulte [9] y [10].

Proposición 3.1.1. Si una secuencia $\{w_j\}_{j\geq 1}$ en un espacio normado E es sumable, es decir, si existe $x \in E$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} w_j,$$

entonces $\lim_{j\to\infty} w_j = 0$.

Demostración. Primero definimos $s_n = \sum_{j=1}^{n} w_j$. Como $\lim_{n\to\infty} \|x - s_n\| = 0$, es inmediato que $(s_j)_{j\geq 1}$ converja a x. Esto implica que (s_n) es una sucesión de Cauchy en E. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$, entonces $\|s_n - s_m\| < \varepsilon$. En particular, tomando $m = n - 1$, obtenemos

$$\|w_n - 0\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} w_j - \sum_{j=1}^{n-1} w_j \right\| < \varepsilon.$$

Esto muestra que $\|w_n\| \to 0$. Concluimos que $w_n \to 0$. □

Observación 3.1.2. La Proposición 3.1.1 es un resultado clásico sobre series. De hecho, se utiliza como un criterio necesario para que una serie sea sumable (o convergente). Es decir, si $w_n \not\to 0$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$ es «divergente». Sin embargo, este criterio no es suficiente por sí solo. Esta es una diferencia importante, ya que en un espacio de Banach no arquimediano la condición de que $w_n \to 0$ sí es suficiente para la sumabilidad de la secuencia(serie).

Lema 3.1.1. Sea $\{w_j\}_{j\geq 1}$ una secuencia en un espacio de Banach E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La secuencia $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es sumable.
2. $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$.

Demostración.

[1 $\Rightarrow$ 2] Este hecho es la Proposición 3.1.1.

[2 $\Rightarrow$ 1] Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $\|w_n\| < \varepsilon$. Definimos la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ mediante $s_n = \sum_{j=1}^{n} w_j$. Tomemos $n > m > n_0$:

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} w_j \right\| \leq \max_{m+1\leq j\leq n} \|w_j\| < \varepsilon.$$

Así, $(s_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en E. Como E es un espacio completo, esta sucesión converge a un elemento $x \in E$. Como

$$\|x - s_n\| = \left\| x - \sum_{j=1}^{n} w_j \right\|,$$

usando la Proposición 2.4.2 podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{n} w_j \right\| = \left\| x - \lim_{n\to\infty} s_n \right\| = \|x - x\| = 0$$

□

Teorema 3.1.1 (Criterio de completitud)**.** Sea E un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. E es completo.
2. Toda sucesión que converge a 0 (cero) es sumable.

Demostración.

[1 $\Rightarrow$ 2] Este hecho es el Lema 3.1.1.

[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $(x_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en E. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$, entonces $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. Definimos $(w_j)_{j\geq 1}$ como la sucesión en E dada por $w_j := x_{j+1} - x_j$. Entonces, para $m = n+1 > n > n_0$, tenemos $\|w_n\| = \|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$. De aquí, $w_n \to 0$. Por hipótesis, existe $x \in E$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{n} w_j \right\| = 0.$$

Veamos que $x_n \to x + x_1$. En efecto, notamos que

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} (x_{j+1} - x_j) = x_{n+1} - x_1.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1$, entonces

$$\|(x + x_1) - x_{n+1}\| = \|x - (x_{n+1} - x_1)\| = \left\| x - \sum_{j=1}^{n} w_j \right\| < \varepsilon.$$

De aquí, $x_n \to x + x_1 \in E$, pues $x, x_1 \in E$. Entonces, la sucesión $(x_j)_{j\geq 1}$, tomada arbitrariamente como una sucesión de Cauchy, converge en E. Concluimos que E es completo. □

Observación 3.1.3. Este criterio de completitud en el análisis clásico, como se revisa en [10], se enuncia de la siguiente manera:

> Un espacio normado es completo si, y solamente si, toda serie «absolutamente convergente» es convergente.

Esta condición es equivalente en espacios normados no arquimedianos al Teorema 3.1.1.

Definición 3.1.2. Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas en un mismo espacio vectorial E decimos que son *normas equivalentes* si existen constantes positivas γ y Γ tales que, para todo $x \in E$, se cumple:

$$\gamma\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \Gamma\|x\|_1.$$

Proposición 3.1.2. Todas las normas no arquimedianas definidas sobre un mismo espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

Demostración. Realizamos la prueba por inducción. En efecto:

- Para $n = 1$: Sea $\{w\}$ una base de E,. Entonces, para cada $x \in E$, existe un único $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tal que $x = \lambda_x w$. Definimos $\|\cdot\|_1 : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por $\|x\|_1 := |\lambda_x|$ para todo $x \in E$. La norma $\|\cdot\|$ es una norma no arquimediana, ya que $|\cdot|$ es una función de valoración no arquimediana. Ahora, sea $\|\cdot\|$ una norma no arquimediana arbitraria en E. Entonces

$$\|x\| = \|\lambda_x w\| = |\lambda_x|\|w\| = \gamma\|x\|_1; \qquad \text{donde } \gamma = \|w\| > 0$$

  Por lo tanto, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes.

- Hipótesis inductiva: Suponemos que el resultado es verdadero un espacio de dimesión n.

- Para $n + 1$: Sea $\{w_1, w_2, \cdots, w_{n+1}\}$ una base del espacio E. Cada $x \in E$ se escribe de manera única como $x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j w_j$ de donde $\lambda_j \in \mathbb{K}$. Escribiendo $\lambda_j := x_j$ definimos

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : E &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \max_{1\leq j\leq n+1} |x_j| \end{aligned}$$

  Así definido, $\|\cdot\|_1$ es una norma no arquimediana, ya que $|\cdot|$ es una función de valoración no arquimediana.

  Sea $\|\cdot\|$ una norma arbitraria no arquimediana en E. Veamos que esta norma es equivalente a $\|\cdot\|_1$. Dado $x = \sum_{j=1}^{n+1} x_j w_j \in E$ con $x \neq 0$, por la desigualdad ultramétrica de la norma tenemos

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^{n+1} x_j w_j\right\| \leq \max_{1\geq j\leq n+1} |x_j|\|w_j\| \leq \Gamma \max_{1\geq j\leq n+1} |x_j| \leq= \Gamma\|x\|_1,$$

  donde $\Gamma := \max_{1\geq j\leq n+1} \|w_j\|$. Así, tenemos que $\|x\| \leq \Gamma\|x\|_1$ para todo $x \in E$. Como $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ es linealmente independiente, entonces sea F el espacio vectorial generado esa base. Así, $\dim F = n$. Notemos que F es cerrado con la norama $\|\cdot\|_1$ inducida. En efecto,

  - Sea $y \in \overline{F}$. Entonces podemos hallar una sucesión $(y^k)_{k\geq 1}$ en F tal que $y^k \to y$.
  - Como $(\, y^k \,)_{k\geq 1}$ converge, es una sucesión de Cauchy. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k, m > k_0$, cada y^k se escribe como $\|y^m - y^k\|_1 < \varepsilon$. como $y^k \in F$, entonces cada $y^k = \sum_{j=1}^{n} y_j^k w_j$ con $y_j^k \in \mathbb{K}$ para todo $1 \leq j \leq n$. Luego, tenemos:

$$\left|y_j^m - y_j^k\right| \leq \max_{1\leq j\leq n} \left|y_j^m - y_j^k\right| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \left(y_j^m - y_j^k\right) w_j\right\|_1 = \left\|y^m - y^k\right\|_1 < \varepsilon.$$

    Esto indica que $(y_j^k)_{k\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, donde campo completo. Por lo tanto, $\lim_{k\to\infty} y_j^k = y_j \in \mathbb{K}$.

- Definimos $z = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j$. Veamos que $y^k \to z$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_1$, entonces $\left|y_j^k - y_j\right| < \varepsilon$. Luego:

$$\left\|y^k - z\right\|_1 = \left\|\sum_{j=1}^{n} \left(y_j^k - y_j\right)\right\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \left|y_j^k - y_j\right| < \varepsilon.$$

  De donde $y^k \to z$, y como $y^k \to y$, entonces $z = y \in F$. Así, $\overline{F} = F$, por lo que F es cerrado.

Como F es cerrado y $w_{n+1} \notin F$, de la Proposición 2.2.3 podemos deducir que $dist(w_{n+1}, F) > 0$. Notemos que $x = y + x_{n+1}w_{n+1}$, donde $y = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$. Entonces, podemos (si no fuera así podríamos reordenar la base de E) suponer que $x_{n+1} \neq 0$. Por lo tanto,

$$0 < dist(w_{n+1}, F) \leq \|w_{n+1} + x_{n+1}^{-1} y\|.$$

Así, definimos $\sigma = \dfrac{dist(w_{n+1}, F)}{\|w_{n+1}\|} > 0$, y notamos que $\sigma \leq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|x\| = \|y + x_{n+1}w_{n+1}\| &= |x_{n+1}| \cdot \|w_{n+1} + x_{n+1}^{-1} y\| \\ &\geq |x_{n+1}| \cdot \|w_{n+1}\| \left(\frac{dist(w_{n+1}, F)}{\|w_{n+1}\|}\right) = \sigma \|x_{n+1}w_{n+1}\|.\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\|x\| \geq \sigma \|x_{n+1}w_{n+1}\|; \quad \text{para todo } x \neq 0. \tag{3.1}$$

Con lo cual, tenemos que $\|x\| \geq \sigma\|y\|$. En efecto,

- Supongamos que $\|x\| < \sigma\|y\|$. Dado que $\sigma \leq 1$, se tiene

$$\|x\| = \|y + x_{n+1}w_{n+1}\| < \|y\|.$$

  Entonces, por la Observación 2.4.2 tenemos que

$$\|\left(y + x_{n+1}w_{n+1}\right) - y\| = \max\{\|y + x_{n+1}w_n + 1\|, \|y\|\} = \|y\|$$

  Así, $\|x_{n+1}w_{n+1}\| = \|\left(y + x_{n+1}w_{n+1}\right) - y\| = \|y\|$, y por (3.1) tenemos que $\|x\| \geq \sigma\|x_{n+1}w_{n+1}\|$, por lo que $\|x\| \geq \sigma\|y\|$, lo cual contradice la hipótesis auxiliar.

Entonces tenemos $\|x\| \geq \sigma \cdot |x_{n+1}| \cdot \|w_{n+1}\|$ y $\|x\| \geq \sigma\|y\|$. Por hipótesis inductiva, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes en F, por lo que existe $\sigma_1 > 0$ tal que $\|y\| \geq \sigma_1\|y\|_1$. Entonces $\|x\| \geq \sigma \cdot \sigma_1 \max_{1\geq j\leq n} |x_j|$. Así, tomando $\gamma := \sigma \min\{\|w_{n+1}\|, \sigma_1\}$, tenemos que

$$\|x\| \leq \gamma \max_{1\leq j\leq n+1} |x_j| = \gamma\|x\|_1; \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Esta desigualdad también se verifica para $x = 0$ de manera trivial.

En resumen, tenemos que $\gamma\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \Gamma\|x\|_1$ para todo $x \in E$.

La prueba por inducción nos permite concluir que todas las normas no arquimedianas en los espacios métricos no arquimedianos de dimensión finita son equivalentes. □

Proposición 3.1.3. Sean E y F dos espacios normados, y $L : E \to F$ una aplicación lineal. Si E es de dimensión finita, entonces L es continua.

Demostración. Sean $\dim E = n < \infty$ y $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ una base de E. Dado $x \in E$, tenemos $x = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$. Por la desigualdad triangular se obtiene

$$\begin{aligned}\|L(x)\| &= \left\| L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j w_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j L(w_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j L(w_j)\| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \|L(w_j)\| \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \|L(w_j)\|\right) \sum_{j=1}^{n} |x_j|.\end{aligned}$$

En E consideramos la norma no arquimediana $\|x\|_1 = \max_{1\geq j\leq n} |x_j|$. Entonces, $\|L(x)\| \leq (\max_{1\leq j\leq n} \|L(w_j)\|)\, \|x\|_1$. Por la Proposición 3.1.2, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq \delta\|x\|$. Tomando $R := \delta \max_{1\leq j\leq n} \|L(w_j)\|$, tenemos que $R > 0$, ya que L es una transformación lineal. Luego,

$$\|L(x)\| \leq R\|x\|; \quad \text{para todo } x \in E.$$

Entonces, por la Proposición 2.4.3, concluimos que L es continua. □

Lema 3.1.2. Sea E un espacio normado con $dim E = n < \infty$, entonces los espacios E y $\mathbb{K}^n$ son linealmente homeomorfos.

Demostración. Sea $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ una base de E. Entonces, dado $x \in E$, existen únicos $x_j \in \mathbb{K}$ tales que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$. Así, definimos

$$\begin{aligned} L : E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto (x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

Veamos que L es lineal, biyectiva y tiene inversa (es también una aplicación lineal). Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

- L es lineal:

$$\begin{aligned}L(x + \lambda y) &= L\left(\sum_{j=1}^{n} (x_j + \lambda y_j)\, w_j\right) = (x_1 + \lambda y_1, \cdots, x_n + \lambda y_n) \\ &= (x_1, \cdots, x_n) + \lambda(y_1, \cdots, y_n) = L(x) + \lambda L(y).\end{aligned}$$

- L es inyectiva:

$$\ker L := \{x \in E \mid L(x) = 0\} = \{x \in E \mid x_j = 0 \text{ para todo } 1 \leq j \leq n\} = \{0\}.$$

  Por lo tanto, si $L(x) = L(y)$, se tiene que $L(x - y) = 0$, lo que implica que $x - y \in \ker L$. Así, $x - y = 0$, luego $x = y$. Entonces L es inyectiva.

- L es sobreyectiva: Sea $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ en $\mathbb{K}^n$. Entonces, existe $z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \in E$ tal que $L(z) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

- Existe $L^{-1} : \mathbb{K}^n \to E$ y es lineal: L^{-1} existe ya que L es biyectiva. Sean $v, u \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces:

$$L\left(L^{-1}(v + \lambda u)\right) = v + \lambda u = L(L^{-1}(v)) + \lambda L\left(L^{-1}(u)\right) = L\left(L^{-1}(v) + \lambda L^{-1}(v)\right).$$

  De donde $L^{-1}(v + \lambda u) = L^{-1}(v) + \lambda L^{-1}(u)$.

Como E y $\mathbb{K}^n$ son espacios normados no arquimedianos de dimensión finita, por la Proposición 3.1.3, sabemos que L y L^{-1} son continuas. Así, concluimos que L es un homeomorfismo lineal. □

Teorema 3.1.2. Todo espacio normado (no arquimediano) de dimensión finita es completo, y cada uno de sus subespacios es cerrado.

Demostración. $\mathbb{K}^n$ es un espacio no arquimediano completo con la norma no arquimediana $\|(x_1, \cdots, x_n)\| = \text{máx}_{1\leq j\leq} |x_j|$, como se indica en el Ejemplo 2.4.5. Por la misma razón, si V es un subespacio de $\mathbb{K}^n$, entonces V también es completo. Veamos que V es cerrado. Sea $y \in \overline{V}$. Entonces, podemos construir $(y^j)_{j\geq 1}$ una sucesión en V tal que $y^k \to y$. Como la sucesión es convergente, es de Cauchy, y ya que V es completo, se tiene que $y \in V$. Por lo que $\overline{V} \subset V$, de donde se deduce que $\overline{V} = V$.

Sea E un espacio normado no arquimediano. Entonces, por el Lema 3.1.2, existe un homeomorfismo lineal $L : E \to \mathbb{K}^n$. Así, se tiene que $L(E) = \mathbb{K}^n$, de donde se deduce que E es completo. Si F es un subespacio de E, entonces $L(F)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$, y como tal, F es cerrado. □

Teorema 3.1.3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y D un subespacio de E. Si $\|\cdot\|_D$ es una norma en D tal que

$$\gamma\|x\| \leq \|x\|_D \leq \Gamma\|x\|; \quad \text{para todo } x \in D,$$

donde $\gamma, \Gamma > 0$ constantes numéricas. Entonces $\|\cdot\|_D$ se puede extender a una norma (ultramétrica) $\|\cdot\|_E$ en E, tal que

$$\gamma\|x\| \leq \|x\|_E \leq \Gamma\|x\|; \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demostración. Sea $x \in E$. Definimos

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E : E &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \inf_{d\in D} \{\text{máx}\{\, \Gamma\|x-d\|,\ \|d\|_D \,\}\} \end{aligned}$$

Antes de mostrar que es una norma, vamos a verificar las desigualdades de la tesis y que la aplicación es una extensión de la norma en D. En efecto,

- De la definición $\|\cdot\|_E$, obtenemos $\|x\|_E \leq \text{máx}\{\, \Gamma\|x-d\|,\ \|d\|_D \,\}$ para todo $d \in D$. En particular, tomando $d = 0 \in D$, se obtiene

$$\|x\|_E \leq \Gamma\|x\|; \quad \text{para todo } x \in E$$

- Notemos que $\gamma\|d\| \leq \gamma\|d\|_D$ y $\gamma < \Gamma$. Luego, $\gamma\|x-d\| \leq \Gamma\|x-d\|$. Entonces, como $\|\cdot\|$ es una norma ultramétrica, podemos hacer

$$\gamma\|x\| \leq \text{máx}\{\gamma\|x-d\|, \gamma\|d\|\} \leq \text{máx}\{\Gamma\|x-d\|, \gamma\|d\|_D\}; \quad \text{para todo } d \in D.$$

  De donde se deduce que

$$\gamma\|x\| \leq \|x\|_E; \quad \text{para todo } x \in E.$$

Así, se concluye que las normas $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes, ya que

$$\gamma\|x\| \leq \|x\|_E \leq \Gamma\|x\|; \quad \text{para todo } x \in E,$$

Ahora, procedamos a demostrar la extensión. Sea $x \in D$:

- De la definición de $\|\cdot\|_E$ se obtiene que $\|x\|_E \leq \text{máx}\{\, \Gamma\|x-d\|,\ \|d\|_D \,\}$ para todo $d \in D$. En particular, tomando $d = x \in D$ se obtiene

$$\|x\|_E \leq \|x\|_D; \quad \text{para todo } x \in D.$$

- Notemos que $\|x\|_D \leq \Gamma\|x\|$. Entonces, como $\|\cdot\|_D$ es una norma ultramétrica, se puede hacer

$$\|x\|_D \leq \text{máx}\,\{\|x-d\|_D, \|d\|_D\} \leq \text{máx}\,\{\Gamma\|x-d\|, \|d\|_D\}\,; \quad \text{para todo } d \in D.$$

  De donde se deduce que

$$\|x\|_D \leq \|x\|_E; \quad \text{para todo } x \in D.$$

Así, $\|\cdot\|_E$ es una extensión de $\|\cdot\|_D$, ya que

$$\|x\|_E = \|x\|_D; \quad \text{para todo } x \in D.$$

Ahora, se verifica que la aplicación definida es una norma ultramétrica. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in E$.

- Dado que $\gamma\|x\| \leq \|x\|_E$ con $\gamma > 0$, se tiene que $\|x\|_E \geq 0$. Por otro lado, si $\|x\|_E = 0$, entonces $\|x\| = 0$, lo que implica que $x = 0$. Además, si $x = 0$, por definición se obtiene que $\|x\|_E = 0$.

- Si $\lambda = 0$, por definición de la función de valoración del campo, $|0| = 0$, por lo que $\|\lambda x\|_E = \|0\|_E = 0 = |0| \cdot \|x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$. Cuando $\lambda \neq 0$, existe $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ (inverso multiplicativo) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_E &= \inf_{d\in D} \{\text{máx}\,\{\, \Gamma\|\lambda x - d\|,\ \|d\|_D \,\}\} \\
&= \inf_{d\in D} \left\{\text{máx}\left\{\, |\lambda| \cdot \Gamma \cdot \|x - \lambda^{-1}d\|,\ |\lambda| \cdot \|\lambda^{-1}d\|_D \,\right\}\right\} \\
&= \inf_{d\in D} \left\{|\lambda|\, \text{máx}\left\{\, \Gamma\|x - \lambda^{-1}d\|,\ \|\lambda^{-1}d\|_D \,\right\}\right\} \\
&= |\lambda| \inf_{d\in D} \left\{\text{máx}\left\{\, \Gamma\|x - \lambda^{-1}d\|,\ \|\lambda^{-1}d\|_D \,\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

  Notemos que $\lambda^{-1}D = D$ porque D es un subespacio. Luego,

$$\inf_{d\in D} \{\text{máx}\,\{\, \Gamma\|x-d\|,\ \|d\|_D \,\}\} = \inf_{d\in D} \left\{\text{máx}\left\{\, \Gamma\|x - \lambda^{-1}d\|,\ \|\lambda^{-1}d\|_D \,\right\}\right\}.$$

  Así, obtenemos que $\|\lambda x\|_E = |\lambda|\|x\|_E$.

- De la definición de $\|\cdot\|_E$ tenemos $\|x+y\|_E = \text{ínf}_{d\in D}\{\text{máx}\{\Gamma\|x+y-d\|, \|d\|_D\}\}$. Además, como $D = D+D$ por ser un subespacio, se cumple que

$$\begin{aligned}\|x+y\|_E &= \inf_{d\in D}\{\text{máx}\{\Gamma\|x-d+y-d\|, \|d+d\|_D\}\}\\ &\leq \inf_{d\in D}\{\text{máx}\{\Gamma\|x-d\|, \Gamma\|y-d\|\}, \text{máx}\{\|d\|_D, \|d\|_D\}\}\\ &\leq \inf_{d\in D}\{\text{máx}\{\Gamma\|x-d\|, \Gamma\|y-d\|, \|d\|_D\}\}.\end{aligned}$$

  Por otro lado, del análisis real sabemos que $\text{ínf}\{A\cup B\} \leq \text{máx}\{\text{ínf}\, A, \text{ínf}\, B\}$, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}&\text{máx}\left\{\inf_{d\in D}\{\text{máx}\{\,\Gamma\|x-d\|,\ \|d\|_D\,\}\}, \inf_{d\in D}\{\text{máx}\{\,\Gamma\|y-d\|,\ \|d\|_D\,\}\}\right\}\\ &\qquad\geq \inf_{d\in D}\{\text{máx}\{\,\Gamma\|x-d\|,\ \|d\|_D\}, \text{máx}\{\,\Gamma\|y-d\|,\ \|d\|_D\}\}\\ &\qquad= \inf_{d\in D}\{\text{máx}\{\Gamma\|x-d\|, \Gamma\|y-d\|, \|d\|_D\}\}\end{aligned}$$

  Así, $\text{máx}\{\|x\|_E, \|y\|_E\} \geq \text{ínf}_{d\in D}\{\text{máx}\{\Gamma\|x-d\|, \Gamma\|y-d\|, \|d\|_D\}\}$. Junto a la inecuación anterior, se concluye que

$$\|x+y\|_E \leq \text{máx}\{\|x\|_E, \|y\|_E\}; \quad \text{para todo } x\in E.$$

□

Teorema 3.1.4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $\|\cdot\|_E$ una norma en E equivalente a $\|\cdot\|$. Entonces, $(E, \|\cdot\|_E)$ también es un espacio de Banach.

Demostración. Como $\|\cdot\|_E$ es una norma ultramétrica en E, resta ver que toda sucesión de Cauchy con esta norma es convergente en E. En efecto, existen $\gamma, \Gamma > 0$ tales que

$$\gamma\|x\| \leq \|x\|_E \leq \Gamma\|x\|; \quad \text{para todo } x\in E.$$

Sea $(x_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|_E$ en E. Dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon\gamma > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$, entonces $\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon\gamma$. Como $\gamma\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_E$, tenemos que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Así, $(x_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en E con la norma $\|\cdot\|$. Es decir, existe $\xi \in E$ tal que la sucesión $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \xi$. Ahora hay que mostrar que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} \xi$. Sea $\varepsilon > 0$. Para ε/Γ, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $\|x_n - \xi\| < \varepsilon/\Gamma$ y como $\|\cdot\|_E \leq \Gamma\|\cdot\|$, entonces

$$\|x_n - \xi\|_E \leq \Gamma\|x_n - \xi\| < \varepsilon.$$

Así, $(x_n)_{j\geq 1}$ converge en E con la norma $\|\cdot\|_E$.

□

Como ya advertimos en la prueba de la Proposición 2.4.3 existe una necesidad de normalizar un vector no nulo x, lo cual en el análisis clásico se hace tomando $x/\|x\|^{-1}$. En nuestro caso, esto no es posible directamente, pero se puede esperar encontrar un $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| = \|x\|$; entonces, $\lambda^{-1}x$ tendría longitud 1. Desafortunadamente, si $|\mathbb{K}|$ está estrictamente contenido en $[0, \infty)$ podemos dar contraejemplos, como se muestra en la Proposición 2.4.7. Sin embargo, tenemos lo siguiente:

Proposición 3.1.4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre el campo $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta, entonces existe una norma $\|\cdot\|_1$ en E tal que $\|E\|_1 \subset |\mathbb{K}|$.

Demostración. Dado $x \in E$ no nulo y como 0 es un punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$, por la Observación 2.3.3, podemos hallar $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $|\lambda| \leq \|x\|$. Entonces, ya que $|\mathbb{K}^*|$ es discreto en $[0, \infty\rangle$, por la Proposición 2.3.7, definimos

$$\|x\|_1 := \text{máx}\{\, |\lambda| \;\mid\; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \|x\| \,\}.$$

Así, $\|\cdot\|$ es una norma en E. En efecto, sean $x, y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

- Si $x \neq 0$, sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $\|x\| \geq |\lambda| > 0$. Si $x = 0$, entonces existe un único $\lambda = 0$ tal que $|\lambda| \leq \|x\|$ por lo que $\|x\|_1 = 0$. Por otro lado, si $\|x\|_1 = 0$, entonces $\|x\| = 0$. Suponiendo lo contrario, existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $\|x\| \geq |\lambda|$. Entonces, por definición $|\lambda| \leq \|x\|_1$, de donde se deduce que $|\lambda| = 0$, lo cual implica que $\lambda \notin \mathbb{K}^*$. Esto contradice el hecho de que $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Así, $\|x\| = 0$, esto significa que $x = 0$.

- Si $\alpha = 0$, el resultado es trivial. Si $\alpha \neq 0$, como $\mathbb{K}$ es un campo y $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, entonces

$$\begin{aligned}\|\alpha x\|_1 &= \text{máx}\{\, |\lambda| \;\mid\; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \|\alpha x\| \,\} = \text{máx}\left\{\, |\lambda| \;\mid\; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda \cdot \alpha^{-1}| \leq \|x\| \,\right\} \\ &= |\alpha| \,\text{máx}\left\{\, |\lambda \cdot \alpha^{-1}| \;\mid\; \lambda \cdot \alpha^{-1}\mathbb{K}, |\lambda \cdot \alpha^{-1}| \leq \|x\| \,\right\} = |\alpha| \cdot \|x\|_1\end{aligned}$$

- Tenemos que $\|x + y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$. entonces,

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= \text{máx}\{\, |\lambda| \;\mid\; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \|x + y\| \,\} \\ &\leq \text{máx}\{\, |\lambda| \;\mid\; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} \,\} \\ &= \text{máx}\,\{\text{máx}\{\, |\lambda| \;\mid\; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \|x\| \,\}, \text{máx}\{\, |\lambda| \;\mid\; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \|y\| \,\}\} \\ &= \text{máx}\{\|x\|_1, \|y\|_1\}\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|$. En efecto, de la definición tenemos que $\|x\|_1 \leq \|x\|$. Por otro lado, consideremos $x \neq 0$. Como $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta, en la prueba del ítem *b*) de la Proposición 2.3.7 existe un $\rho \in \mathbb{K}$ con $0 < |\rho| < 1$ de modo que $|\mathbb{K}^*| = \{\, |\rho|^n \;\mid\; n \in \mathbb{Z} \,\}$. Como $\|x\|_1 \in |\mathbb{K}^*|$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\|x\|_1 = |\rho|^n$. Supongamos que $\|x\|_1 < |\rho| \cdot \|x\|$, entonces $|\rho|^{n-1} < \|x\|$ por lo que por definición tenemos $|\rho|^{n-1} \leq \|x\|_1$. Así, $|\rho|^{n-1} \leq |\rho|^n$, luego $1 \leq |\rho|$ lo cual contradice el hecho de que $1 > |\rho|$. Entonces, $|\rho| \cdot \|x\| \leq \|x_1\|$ para todo $x \neq 0$. Si $x = 0$ también verifica la desigualdad. Así tenemos

$$|\rho| \cdot \|x\| \leq \|x_1\| \leq \|x\|; \quad \text{para todo } x \in E.$$

De donde $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes. Además, $\|E\|_1 = \{\|x\|_1 \in \mathbb{K} \mid x \in E\}$, por lo tanto $\|E\|_1 \subset |\mathbb{K}|$. □

Observación 3.1.4. Si $\mathbb{K}$ tiene valoración densa el resultado sigue abierto, es decir, aún es desconocido, ver [11]. Sin embargo, es muy útil una «normalización aproximada», es decir, para cada $x \in E$ no nulo existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\|\lambda x\|$ sea muy cercano a 1. Este hecho se obtiene si $\|E\| \subset \overline{|\mathbb{K}|}$.

Esto motiva la Definición 3.1.3

Definición 3.1.3. Dada una norma $\|\cdot\|$ es un espacio normado E, decimos que:

1. $\|\cdot\|$ es una *norma sólida* si $\|E\| \subset \overline{|\mathbb{K}|}$.
2. $\|\cdot\|$ es una *norma fuertemente sólida* si $\|E\| \subset |\mathbb{K}|$.

Ejemplo 3.1.1. La norma $\|\cdot\|_\infty$ del espacio c_0 es una norma fuertemente sólida. De hecho, $\|c_0^*\|_\infty = |\mathbb{K}^*|$ y $\|c_0\|_\infty = |\mathbb{K}|$.

En efecto. Por definición:

$$\|c_0^*\|_\infty := \{\, \|x\|_\infty \mid x \in c_0^*\} = \left\{ \max_{n\geq 1} |x_n| \;\;\middle|\;\; x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0^* \right\} \subset |\mathbb{K}^*|.$$

Por otro lado, sea $|\lambda| \in |\mathbb{K}^*|$ y definamos $x = (\lambda, 0, 0, 0 \cdots)$. Entonces $x \in c_o^*$ y además $\|x\|_\infty = |\lambda| > 0$, por lo que $|\lambda| \in \|c_0^*\|_\infty$. Así, $|\mathbb{K}^*| \subset \|c_0^*\|_\infty$. Por lo tanto $\|c_0^*\|_\infty = |\mathbb{K}^*|$, y así $\|c_0\|_\infty = |\mathbb{K}|$.

■

Teorema 3.1.5. Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K}$ tiene valoración densa, entonces todas las normas sobre E son sólidas.

Demostración. Por la Proposición 2.3.7, sabemos que $|\mathbb{K}^*|$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$. Esto implica que $\|E\| \subset \overline{|\mathbb{K}|}$. □

Teorema 3.1.6. Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta, entonces son equivalentes:

1. $\|\cdot\|$ es sólida.
2. $\|\cdot\|$ es fuertemente sólida.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Como $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta, por la Proposición 2.3.7 sabemos que $|\mathbb{K}^*|$ es discreto en $\langle 0, \infty\rangle$ y que 0 es el único punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$. Entonces, $|\mathbb{K}| = \overline{|\mathbb{K}^*|}$, y así $|\mathbb{K}| = \overline{|\mathbb{K}|}$. Por lo tanto, $\|E\| \subset \overline{|\mathbb{K}|} = |\mathbb{K}|$.

[2 $\Rightarrow$ 1] Como $|\mathbb{K}| \subset \overline{|\mathbb{K}|}$, entonces $\|E\| \subset \overline{|\mathbb{K}|}$. □

Teorema 3.1.7. Toda norma es equivalente a una norma solida.

Demostración. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta, de la Proposición 3.1.4 existe $\|\cdot\|_1$ norma equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $\|E\|_1 \subset |\mathbb{K}|$, y por el Teorema 3.1.6 esta norma es sólida. Por otro lado, si $\mathbb{K}$ tiene valoración densa, entonces, por el Teorema 3.1.5, esta norma es sólida (es equivalente a sí misma). □

También nos interesa conocer las propiedades de los espacios vectoriales cocientes, tales como tener una norma no arquimediana y la completitud del espacio.

Definición 3.1.4. Sea E un espacio vectorial y D un subespacio. Dado $x \in E$ la *clase* o clase lateral ("coset") de x respecto a D, denotado por $x + D$, se define como

$$x + D := \{x + y \mid y \in D\}.$$

Observación 3.1.5. Al definir la relación $x \sim y$ si y solo si $x - y \in D$, entonces " $\sim$" es una relación de «equivalencia» que induce una partición cuyas clases de equivalencia son los $x + D$. Denotamos con E/D el conjunto de todas las clases de equivalencia:

$$E/D := \{x + D \mid x \in E\}.$$

Además, E/D tiene estructura de espacio vectorial mediante las operaciones de adición y multiplicación por un escalar: $(x + D) + (y + D) := (x + y) + D$ y $\lambda(x + D) := \lambda x + D$.

También se tiene $\pi : E \to E/D$, que se denomina *aplicación cociente*, que se define por $\pi(x) := x + D$ para todo $x \in D$. Así definida, π es una aplicación lineal y sobreyectiva. Como se puede ver en [9].

Proposición 3.1.5. Sea D un subespacio cerrado del espacio normado E. Entonces E/D es un espacio normado (no arquimediano) con la norma

$$\|\pi(x)\| := dist\,(x, D)\,; \quad x \in E$$

Esta norma se denomina *norma cociente* no arquimediana.

Demostración. La aplicación $\|\cdot\|$ en E/D está bien definida, ya que si $x \sim y$, entonces $\pi(x) = \pi(y)$, es decir, $\|\cdot\|$ no depende de x. Veamos ahora que es una norma no arquimediana.

- $\pi(x) = dist(x, D) \geq 0$. Si $\pi(x) = 0 \in E/D$, entonces $\pi(x) = \pi(0)$, y como $0 \in D$, tenemos que $\|\pi(x)\| = dis(0, D) = 0$. Si $\|\pi(x)\| = 0$, entonces $dis(x, D) = 0$. Como D es cerrado, por la Proposición 2.2.3 tenemos que $x \in D$. Como $x, 0 \in D$, se sigue que $x \sim 0$, y por lo tanto $\pi(x) = \pi(0) = 0 \in E/D$.
- Como π es lineal, tenemos $\|\lambda\pi(x)\| = \|\pi(\lambda x)\| = \text{ínf}_{y\in D}\,\|\lambda x - y\|$. Como D es subespacio, se cumple que $\text{ínf}_{y\in D}\,\|\lambda x - y\| = \text{ínf}_{y\in D}\,\|\lambda x - \lambda y\|$. Entonces:

$$\|\lambda\pi(x)\| = \inf_{y\in D}\|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \inf_{y\in D}\|x - y\| = |\lambda| \cdot \|\pi(x)\|.$$

- Por la linealidad de π y la norma no arquimediana de E, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\pi(x) + \pi(y)\| = \|\pi(x + y)\| &= \inf_{z\in D}\|(x + y) - z\| \\
&\leq \inf_{z_1, z_2 \in D}\|(x - z_1) + (y - z_2)\| \\
&\leq \inf_{z_1, z_2 \in D}(\text{máx}\{\|x - z_1\|, \|y - z_2\|\}) \\
&= \text{máx}\left(\inf_{z_1\in D}\|x - z_1\|, \inf_{z_2\in D}\|y - z_2\|\right) \\
&= \text{máx}\left\{\|\pi(x)\|, \|\pi(y)\|\right\}.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.1.6. La necesidad de que D sea cerrado, como vimos, es para garantizar $\|p(x)\| = 0$ si y solo si $\pi(x) = \pi(0) =: 0 \in E/D$. Es decir, si D no fuera cerrado, no tendríamos una norma en E/D, sino una «seminorma».

Observación 3.1.7. Como $\|\pi(x)\| = dist(x, D) \leq \|x\|$, tenemos que $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. Así, π es continua (Proposición 2.4.3), y $\|\pi\| \leq 1$, pues

$$\|\pi\| := \inf_{x \neq 0} \frac{\|\pi(x)\|}{\|x\|} \leq 1.$$

Proposición 3.1.6. Sea D un subespacio cerrado de E, un espacio normado no arquimediano. Entonces:

1. $\pi\left(B(0,1)\right) = B(0+D,1)$.
2. Si A es abierto en E, entonces $\pi(A)$ es un abierto en E/D. Es decir, π es una aplicación abierta.
3. $\pi^{-1}(U)$ es abierto en E si y solo si U es abierto en E/D.

Demostración.
[1] Notemos que

$$\pi(B(0,1)) = \{x + D \mid \|x\| < 1\} \quad \text{y} \quad B(0+D,1) = \{x + D \mid \|x + D\| < 1\}.$$

- Sea $x \in \pi(B(0,1))$. Entonces $\|x+D\| := dist(x, D) \leq \|x\| < 1$. Luego, $\|x+D\| < 1$, por lo que $x + D \in B(0+D,1)$. Así, $\pi\left(B(0,1)\right) \subset B(0+D,1)$.
- Sea $x + D \in B(0+D,1)$. Entonces $\|x + D\| < 1$, es decir, $dist(x, D) < 1$. Para $\varepsilon = 1 - dist(x, D) > 0$, existe $z \in D$ tal que

  $$\|x - z\| < dist(x, D) + \varepsilon = 1.$$

  Sea $y = x - z$. Entonces $x = y + z$ con $z \in D$ y $y \in B(0,1)$. Así, $\pi(y) \in \pi(B(0,1))$ y como $\pi(x) = \pi(y) + \pi(z) = \pi(y)$, entonces $\pi(x) \in \pi(B(0,1))$. Luego tenemos que $B(0+D,1) \subset \pi(B(0,1))$.

De la doble inclusión se tiene la igualdad, es decir,

$$B(0+D,1) = \pi(B(0,1)).$$

[2] Sea A un conjunto abierto en E. Entonces, dado $x + D \in \pi(A)$, existe $\varepsilon > o$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A$. Por la Observación 2.3.3, podemos tomar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\lambda| < \varepsilon$. Entonces, como $|\lambda| < \varepsilon$, tenemos que $B(x,|\lambda|) \subset B(x,\varepsilon) \subset A$. Notemos que

$$B(x,|\lambda|) = x + \lambda B(0,1) := \{x + \lambda y \mid \|y\| < 1\}.$$

Entonces,

$$\pi(x + \lambda B(0,1)) \subset \pi(A). \tag{3.2}$$

Por el ítem 1) anterior, $\pi(B(0,1)) = B(0+D,1)$, entonces

$$\pi(x + \lambda B(0,1)) = \pi(x) + \lambda\pi(B(0,1)) = (x + D) + \lambda B(0+D,1).$$

Y notemos también que

$$B(x+D,|\lambda|) = (x+D) + \lambda B(0+D,1) := \{(x+D) + \lambda(y+D) \mid \|y+D\| < 1\}.$$

Entonces

$$\pi(x + \lambda B(0,1)) = B(x + D, |\lambda|).$$

Luego en 3.2 tenemos que existe $r := |\lambda| > 0$ tal que

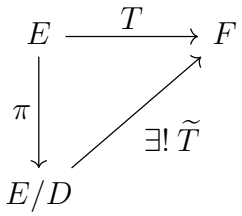
$$B(x + D, r) \subset \pi(A).$$

Así, $\pi(A)$ es un conjunto abierto.

[3] Si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en E, entonces por el Ítem 2) anterior, $\pi\left(\pi^{-1}(U)\right)$ es abierto. Y como π es sobreyectiva, según la Observación 3.1.5, tenemos $\pi\left(\pi^{-1}(U)\right) = U$, de donde U es abierto. Por otro lado, si U es abierto en E/D, por la continuidad de π, ver [9], se tiene que $\pi^{-1}(U)$ es abierto en E.

□

Lema 3.1.3 (Propiedad universal del cociente)**.** Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal y D un subespacio de E tal que $D \subset KerT$. Entonces existe una única aplicación lineal $\widetilde{T} : E/D \to F$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo, es decir, $\widetilde{T} \circ \pi = T$



Demostración. Definimos la aplicación $\widetilde{T} : E/D \to F$ por $\widetilde{T}\left(x + D\right) = T(x)$ para todo $x \in E$. Así definido, $\widetilde{T}$ cumple:

- Buena definición: Si $x \sim y$, entonces $z := x - y \in D$. Luego, como $x = z + y$ y T es lineal, tenemos que $T(x) = T(z) + T(y)$. Como $z \in D \subset KerT$, se tiene que $T(z) = 0$, por lo que $T(x) = T(y)$. Así, $\widetilde{T}\left(x + D\right) = \widetilde{T}\left(y + D\right)$.
- El sistema es conmutativo: $T(x) = \widetilde{T}\left(x + D\right) = \widetilde{T}\left(\pi(x)\right) = \widetilde{T} \circ \pi(x)$ para todo $x \in E$. Así, $\widetilde{T} \circ \pi = T$.
- $\widetilde{T}$ es lineal: Sean $x + D$, $y + D \in E/D$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Por la linealidad de π y T, tenemos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}\left((x + D) + \lambda\left(y + D\right)\right) &= \widetilde{T}\left(\pi(x) + \lambda\pi(y)\right) \\
&= \widetilde{T}\left(\pi(x + \lambda y)\right) \\
&= T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \\
&= \widetilde{T} \circ \pi(x) + \lambda\widetilde{T} \circ \pi(y) \\
&= \widetilde{T}\left(\pi(x)\right) + \lambda\widetilde{T}\left(\pi(y)\right) \\
&= \widetilde{T}(x + D) + \lambda\,\widetilde{T}(y + D).
\end{aligned}$$

- Unicidad: Supongamos que existen $\widetilde{T}_1$ y $\widetilde{T}$ que verifiquen las mismas condiciones. Entonces, $\widetilde{T}_1(x + D) = T(x) = \widetilde{T}(x + D)$ para todo $x + D \in E/D$. Por lo tanto, $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}$, lo que prueba que $\widetilde{T}$ es única.

□

Proposición 3.1.7. En las condiciones de Lema 3.1.3, si $T \in \mathcal{B}(E,F)$ y D es cerrado, entonces se cumple que $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E, E/D)$ y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Demostración. Primero, veamos que $\widetilde{T}$ es acotado. En efecto, dado U_1 en E/D, consideremos $U = \widetilde{T}^{-1}(U_1)$. Entonces, como

$$\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}\left(\widetilde{T}^{-1}(U_1)\right) = \left(\widetilde{T} \circ \pi\right)^{-1}(U_1) = T^{-1}(U_1),$$

tenemos que $\pi^{-1}(U)$ es abierto, ya que $T^{-1}(U_1)$ es abierto por la continuidad de T. Por el ítem 3 de la Proposición 3.1.6, se deduce que U es abierto. Así, $\widetilde{T}^{-1}(U_1)$ es abierto para todo U_1 abierto en E/D. Luego podemos implicar, ver en [9] sobre la continuidad por imágenes inversas de abiertos, que $\widetilde{T}^{-1}$ es continua, y por la Proposición 2.4.3 tenemos que $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E/D, F)$.

Ahora veamos que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Como $\widetilde{T}$ es acotado, podemos escribir

$$\|T(x)\| = \|\widetilde{T}(x+D)\| \leq \|\widetilde{T}\| \cdot \|x+D\| \leq \|\widetilde{T}\|\|x\|.$$

Así, tenemos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|\widetilde{T}\|; \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Entonces,

$$\|T\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|\widetilde{T}\|.$$

Por otro lado, sea $z \in D$. Como T es lineal, se cumple

$$\|T(x)\| \leq \text{máx}\{\|T(x-z)\|, \|T(z)\|\}.$$

Y como $D \subset KerT$, se tiene $T(z) = 0$, entonces $\|T(x)\| \leq \|T(x-z)\|$ para todo $z \in D$. Como T es continua, es acotado por la Proposición 3.1.6, por lo que

$$\|T(x)\| \leq \|T(x-z)\| \leq \|T\| \cdot \|z\|.$$

De la definición de $\widetilde{T}$, podemos hacer

$$\|\widetilde{T}(x+D)\| = \|T(x)\| \leq \|T(x-z)\| \leq \|T\| \cdot \|z\| \leq \|T\| \cdot \|x-z\|.$$

Esto es,

$$\frac{\|\widetilde{T}(x+D)\|}{\|T\|} \leq \|x-z\|; \quad \text{para todo } z \in D.$$

Luego,

$$\frac{\|\widetilde{T}(x+D)\|}{\|T\|} \leq \inf_{x\neq 0} \|x-z\| = \|x+D\|.$$

Así,

$$\frac{\|\widetilde{T}(x+D)\|}{\|x+D\|} \leq \|T\|; \text{para todo } x+D \neq 0+D.$$

Por lo tanto, $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$.

Resumiendo, tenemos $\|T\| \leq \|\widetilde{T}\|$ y $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$, luego $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. □

Teorema 3.1.8. Sea D un subespacio cerrado de E, entonces

1. Si E es un espacio de Banach, entonces E/D es un espacio de Banach.
2. Si D y E/D son espacios de Banach, entonces E es un espacio de Banach.

Demostración.
[1] Sea $(x_j + D)_{j\geq 1}$ una sucesión en E/D tal que $x_n + D \to 0 + D$. Para cada $\varepsilon_n = 1/n > 0$ con $n \geq 1$ existe, $z_n \in D$ tal que

$$\|x_n - z_n\| < \|x_n + D\| + \frac{1}{n}.$$

Tomando $n \to \infty$, por la Proposición 2.4.2, tenemos que $\|x_n - z_n\| \to 0$, de donde $(x_j - z_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión en E, espacio de Banach, tal que $x_n - z_n \to 0$. Luego, por el Teorema 3.1.1, existe $x \in E$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j - z_j). \tag{3.3}$$

Sea $S_n = \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)$. Entonces, por la linealidad de π, tenemos que

$$\pi(S_n) = \sum_{i=1}^{n}\pi(x_j - z_j).$$

Haciendo $n \to \infty$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\pi(S_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\pi(x_j - z_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\pi(x_j - z_j). \tag{3.4}$$

Notemos que, como π es continua, entonces $\lim_{n\to\infty}\pi(S_n) = \pi\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right)$. Luego, de (3.3) y (3.4), tenemos

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\pi(x_j - z_j).$$

Como $z_j \in D$, tenemos que $\pi(z_j) = 0$, luego $\pi(x_j - z_j) = \pi(x_j)$, de donde

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\pi(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j + D).$$

Así, toda sucesión en E/D que converge a cero es sumable, por lo que, aplicando el Teorema 3.1.1, E/D es completo. Esto significa que E/D es un espacio de Banach no arquimediano.

[2] Sea (x_j) una sucesión de cauchy en E. Como $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$, tenemos que $(\pi(x_j)_{j\geq 1})$ es una sucesión de Cauchy en E/D. Entonces, como E/D es completo, existe $y \in D$ tal que $x_n + D \to y + D$. Luego, $(y - x_n) + D \to 0 + D$. Para cada $\varepsilon_n = 1/n > 0$ con $n \geq 1$, existe $z_n \in D$ tal que:

$$\|y - x_n - z_n\| < \|(y - x_n) + D\| + \frac{1}{n}.$$

Haciendo $n \to \infty$, por la Proposición 2.4.2, tenemos que $y - x_n - z_n \to 0$. Así, $(y - x_n - z_n)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en E. Dado $\varepsilon > 0$, pordemos hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$, entonces:

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x_m - z_n + z_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Luego:

$$\begin{aligned}\|z_m - z_n\| &= \|\,(x_m - z_n + z_m - x_n) + (x_n - x_m)\| \\ &= \max\{\|x_m - z_n + z_m - x_n\|, \|x_n - x_m\|\} < \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(z_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en D, que es un espacio de Banach. Entonces, existe $z \in D$ tal que $z_n \to z$. Recordemos que $y - x_n - z_n \to 0$, por lo que $x_n \to y - z \in E$. Así, toda sucesión de Cauchy en E converge en E. Por lo tanto, E es completo, es decir, es un espacio de Banach no arquimediano. □

En el estudio de los espacios vectoriales normados, los conceptos de suma directa y producto de subespacios vectoriales son fundamentales. Sin embargo, cuando se trabaja con espacios de dimensión infinita y se requiere un análisis más detallado de las normas, surge la necesidad de extender estos conceptos a la suma directa normada y al producto normado. Estas generalizaciones permiten tratar espacios de dimensión infinita, donde la estructura de las normas desempeña un papel crucial en su análisis.

Definición 3.1.5. Sea Λ un conjunto de índices. Para cada $j \in \Lambda$, sea E_j un espacio normado. El *producto normado* de los E_j es el espacio vectorial

$$\left\{\prod_{j\in\Lambda} E_j \;\mid\; \{\|x_j\| : j \in \Lambda\} \text{ está acotado}\right\}.$$

Equipado con la norma

$$(x_j)_{j\in\Lambda} \longmapsto \sup_{j\in\Lambda} \|x_j\|.$$

Estos espacios se denotan simplemento como $\prod_{j\in\Lambda} E_j$, teniendo en cuenta lo antes mencionado.

Definición 3.1.6. La *suma directa normada* de $\{E_\Lambda\}_{j\in\Lambda}$ es el subespacio vectorial de $\prod_{j\in\Lambda} E_j$, ver Definición 3.1.5, definido como

$$\left\{(x_j)_{j\in\Lambda} \in \prod_{j\in\Lambda} E_j \mid \forall\, \varepsilon > 0,\ \{j \in \Lambda : \|x_j\| \geq \varepsilon\} \text{ es finito}\right\}.$$

Equipado con la norma

$$(x_j)_{j\in\Lambda} \longmapsto \sup_{j\in\Lambda} \|x_j\|.$$

Estos espacios se denotan por $\bigoplus_{j\in\Lambda} E_i$ o por $\coprod_{j\in\Lambda} E_j$. Usamos la primera notación.

Ejemplo 3.1.2. Si $\Lambda = \{1, 2, \cdot, n\}$, entonces

$$\prod_{j\in\Lambda} E_j = \bigoplus_{j\in\Lambda} E_j$$

Y si además $E_j = \mathbb{K}$ para todo $j \in \Lambda$, tenemos que

$$\prod_{j\in\Lambda} E_j = \bigoplus_{j\in\Lambda} E_j = \mathbb{K}^n.$$

■

Ejemplo 3.1.3. Si $\Lambda = \mathbb{N}$ y $E_j = \mathbb{K}$, tenemos que

$$\prod_{j\in\Lambda} E_j = \ell^\infty; \quad \text{y} \quad \bigoplus_{i\in\Lambda} E_i = c_0.$$

■

Observación 3.1.8. Vimos en el Ejemplo 2.4.3 y en el Ejemplo 2.4.4 que ℓ^∞ y c_0, respectivamente, son espacios de Banach no arquimedianos. En general, para el producto normado y la suma directa normada, se cumple que si E_j son espacios de Banach no arquimedianos para todo $j \in \Lambda$, entonces $\prod_{j\in\Lambda} E_j$ y $\bigoplus_{j\in\Lambda} E_j$ son espacios de Banach no arquimedianos. Las pruebas son muy similares a lo realizado para ℓ^∞ y c_0.

3.2. Ortogonalidad y sistemas ortogonales en espacios normados no arquimedianos

Definición 3.2.1. Sea G conjunto no vacío del espacio normado E. El conjunto $[G]$ denota el menor subespacio vectorial generado por los elementos de G que lo contiene. Podemos escribir

$$[G] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \;\middle|\; z_i \in G, \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Proposición 3.2.1. Sea E un espacio normado. Dado $x \in E$, la envoltura lineal del conjunto $\{x\}$ es el conjunto $\mathbb{K}x := \{\, \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K} \,\}$, es decir,

$$[\{x\}] = \mathbb{K}x.$$

Demostración. Tenemos

$$[\{x\}] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sea $y \in [\{x\}]$. Entonces

$$y = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i x = \left(\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \right) x; \quad \text{donde } \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Así, $[\{x\}] \subset \mathbb{K}x$. Por otro lado, es inmediato ver que $\mathbb{K}x \subset [\{x\}]$. □

Observación 3.2.1. Si $G = \{z\}$, escribimos $[z]$ o $\mathbb{K}z$ en lugar de $[\{z\}]$.

Definición 3.2.2. Sea E un espacio normado. Dados $x, y \in E$. Decimos que x *es ortogonal a* y si

$$dist(x, \mathbb{K}y) = \|x\|.$$

Y se denota por

$$x \perp y.$$

Observación 3.2.2. Recordamos que $dist(x, \mathbb{K}y)$ es la distancia de x hacia el conjunto $\mathbb{K}y$. Esto es

$$dist(x, \mathbb{K}y) = \inf_{\xi\in\mathbb{K}y} \|x - \xi\|.$$

Lema 3.2.1 (Principio de Van Rooij)**.** Sea un espacio normado E. Dado $t \in \langle 0, 1]$ y sean $x, y \in E$ tales que $\|x + y\| \geq t\|x\|$. Entonces $\|x + y\| \geq t\|y\|$.

Demostración. Si $\|x\| \geq \|y\|$, es inmediato que $\|x + y\| \geq t\|y\|$. Veamos el caso en el que $\|x\| < \|y\|$. En efecto, por la Observación 2.4.2, tenemos $\|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Y como $t \in \langle 0, 1]$, entonces $\|x + y\| = \|y\| \geq t\|y\|$. □

Teorema 3.2.1 (Simetría)**.** Sea E un espacio normado. Dados $x, y \in E$. Son equivalentes:

1. x es ortogonal a y.
2. $\| \alpha x + \beta y \| = \max\{ \| \alpha x \|, \| \beta y \| \}$; para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Si $\alpha = 0$, es trivial. Cuando $\alpha \neq 0$, tenemos $|\alpha| > 0$ y solo basta probar que $\| \alpha x + \beta y \| \geq \max\{ \| \alpha x \|, \| \beta y \| \}$. En efecto, como $x \perp y$, para $-\alpha^{-1}\beta \in \mathbb{K}$, de la definicion, tenemos $\|x\| \leq \|x + \alpha^{-1}\beta y\|$. Así:

$$\|\alpha x + \beta y\| = |\alpha|\|x + \alpha^{-1}\beta y\| \geq |\alpha|\|x\| = \|\alpha x\|. \tag{3.5}$$

Por otro lado, aplicando el Lema 3.2.1 para $t = |\alpha|/|\alpha| = 1$ en $\|x + \alpha^{-1}\beta y\| \geq t\|x\|$ obtenemos que $\|x + \alpha^{-1}\beta y\| \geq t\|\alpha^{-1}\beta y\|$. Así:

$$\|\alpha x + \beta y\| = |\alpha|\|x + \alpha^{-1}\beta y\| \geq |\alpha|\|\alpha^{-1}\beta y\| = \|\beta y\|. \tag{3.6}$$

De (3.5) y (3.6), se tiene que $\| \alpha x + \beta y \| \geq \max\{ \| \alpha x \|, \| \beta y \| \}$.

[2 $\Rightarrow$ 1] Dado que $\beta \in \mathbb{K}$ es arbitrario, podemos escribir $\| \alpha x - \beta y \| = \max\{ \| \alpha x \|, \| \beta y \| \}$. Haciendo $\alpha = 1_{\mathbb{K}}$, obtenemos:

$$\|x - \beta y\| = \max\{ \| x \|, \| \beta y\| \} \| \geq \|x\|; \quad \text{para todo } \beta \in \mathbb{K}.$$

Luego, por definición de distancia de x a $\mathbb{K}y$, tenemos $\|x\| \leq dist\,(x, \mathbb{K}y)$.

Por otro lado, de la distancia de x a $\mathbb{K}y$, se tiene que $dist\,(x, \mathbb{K}y) \leq \|x - \gamma y\|$ para todo $\gamma \in \mathbb{K}$. En particular, para $\gamma = 0$, tenemos $dist\,(x, \mathbb{K}y) \leq \|x\|$.

Finalmente, como $\|x\| \leq dist\,(x, \mathbb{K}y) \leq \|x\|$, concluimos que $x \perp y$.

□

Observación 3.2.3. El Teorema 3.2.1 se denomina de Simetría, pues garantiza que

$$x \perp y \quad \text{ si y solo si } \quad y \perp x,$$

ya que $\| \alpha x + \beta y \| = \| \beta y + \alpha x \|$.

Proposición 3.2.2. Sea E un espacio normado. Dados $x, y \in E$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $0 \perp x$, para todo $x \in E$.
2. Si $x \perp x$, entonces $x = 0$.
3. Si $x \perp y$, entonces $\alpha x \perp \beta y$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Demostración.
[1] Dado $x \in E$, es inmediato ver que $\|\alpha 0 + \beta x| = \|\beta x\| = \max\{\|\alpha o\|, \|\beta x\|\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Por el Teorema 3.2.1, podemos concluir que $0 \perp x$.

[2] De la definición de ortogonalidad, se obtiene $\|x\| \leq \|x - \lambda x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. En particular, para $\lambda = 0$, tenemos $\|x\| \leq 0$. Así, $x = 0 \in E$.

[3] Si $\alpha = 0$, tenemos $0x \perp \beta y$. Veamos el caso cuando $\alpha \neq 0$. En efecto, sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $x \perp y$, para $\lambda\alpha^{-1}\beta \in \mathbb{K}$, tenemos $\|x\| \leq \|x - \lambda\alpha^{-1}\beta\|$. Multiplicando por $|\alpha|$ se obtiene:

$$\|\alpha x\| \leq \|\alpha x - \lambda(\beta y)\|; \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Así, concluimos que que $dist\,(\alpha x, \mathbb{K}\beta y) = \|\alpha x\|$. □

Definición 3.2.3. Sean G y G_0 dos subconjuntos del espacio normado E. Diremos que G y G_0 *son ortogonales* si $x \perp y$ para todo $x \in G$ y $y \in G_0$. Se denota $G \perp G_0$.

Observación 3.2.4. Sabemos que la ortogonalidad de elemento de E es simétrica, esto implica que la ortogonalidad de subconjuntos también es simétrica. Es decir:

$$G \perp G_0 \quad \text{ si y solo si } \quad G_0 \perp G.$$

Observación 3.2.5. Si $G = \{x\}$, entonces escribimos simplemente $x \perp G_0$.

Ejemplo 3.2.1. En el espacio $\mathbb{K}^2$, definimos los conjuntos

$$G_1 = \{\,(x, 0) \mid x \in \mathbb{K}\,\}, \quad G_2 = \{\,(0, y) \mid y \in \mathbb{K}\,\}.$$

Los conjuntos G_1 y G_2 son ortogonales.

En efecto, sean $\xi \in G_1$ y $\psi \in G_2$, entonces $\xi = (x, 0)$ y $\psi = (0, y)$. Luego

$$\begin{aligned}
\max\{\|\alpha\xi\|, \|\beta\psi\|\} &= \max\{\|(\alpha x, 0)\|, \|(0, \beta y)\|\} \\
&= \max\{\max\{|\alpha x, 0|, |0|\}; \max\{|0|, |\beta y|\}\} \\
&= \max\{|\alpha x|, |\beta y|\} = \|(\alpha x, \beta y)\| \\
&= \|(\alpha x, 0) + (0, \beta y)\| = \|\alpha(x, 0) + \beta(0, y)\| \\
&= \|\alpha\xi + \beta\psi\|.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\max\{\|\alpha\xi\|, \|\beta\psi\|\} = \|\alpha\xi + \beta\psi\|; \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Por el Teorema 3.2.1, tenemos $\xi \perp \psi$ para todo $\xi \in G_1$ y $\psi \in G_2$. Por lo tanto, $G_1 \perp G_2$. ■

Proposición 3.2.3. Sea D un subespacio de un espacio normado E. Dado $x \in E$, son equivalentes:

1. $x \perp D$
2. $dist\,(x, D) = \|x\|$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Sea $y \in D$. Entonces, $x \perp y$, y por el Teorema 3.2.1, tendemos

$$\|x - y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Así, dado que $y \in D$ es arbitrario, se sigue que

$$\|x\| \leq \|x - y\|; \quad \text{para todo } y \in D.$$

Por lo que

$$\|x\| \leq dist(x, D) \leq \|x - y\|; \quad \text{para todo } y \in D.$$

Y como D es un subespacio, en particular para $y = 0$, tenemos

$$\|x\| \leq dist(x, D) \leq \|x - 0\| = \|x\|$$

[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $y \in D$. Dado $\beta \in \mathbb{K}$, tenemos que $\beta y \in D$ por ser subespacio. Luego, de la definición de distancia, tenemos $\|x\| \leq \|x - \beta y\|$. Y como β es arbitrario,

$$\|x\| \leq \|x - \beta y\|; \quad \text{para todo } \beta \in \mathbb{K}.$$

Entonces,

$$\|x\| \leq dist\,(x, \mathbb{K}y)\,.$$

De aquí deducimos que $dist\,(x, \mathbb{K}y) = \|x\|$. Por lo tanto, $x \perp y$ para todo $y \in D$. Es decir, $x \perp D$. □

Definición 3.2.4. Sean D_1 y D_2 dos subespacios del espacio normado E. Decimos que D_2 es el *complemento ortogonal* de D_1 si se cumple lo siguiente:

1. $D_1 \perp D_2$.
2. $E = D_1 + D_2$.

También podemos decir que D_1 es *ortocomplementado* si D_2 es su complemento ortogonal.

Teorema 3.2.2. Sean D_1 y D_2 dos subespacios del espacio normado E. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $D_1 \perp D_2$.
2. $\|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ para todo $x \in D_1$ y $y \in D_2$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Sean $x \in D_1$ y $y \in D_2$. Como $D_1 \perp D_2$, tenemos que $x \perp y$. Por el Teorema 3.2.1, implicamos que $\|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

[2 $\Rightarrow$ 1] sean $x_0 \in D_1$ y $y_0 \in D_2$. Basta demostrar que

$$\|x_0\| \leq \|x_0 - \lambda y_0\|; \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Para $\lambda = 0$, es trivial. Consideramos ahora $\lambda \neq 0$. Definimos $y = -\lambda y_0$. Como $y_0 \in D_2$ y D_2 es subespacio vectorial, entonces $y \in D_2$. Para x_0 y y, por hipótesis, se tiene que

$$\|x_0 + y\| = \max\{\|x_0\|, \|y\|\} \geq \|x_0\|.$$

Reemplazando y ordenando, obtenemos

$$\|x_0\| \leq \|x_0 + (-\lambda y_0)\| = \|x_0 - \lambda y_0\|; \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Por lo tanto, $x_0 \perp y_0$ para todo $x_0 \in D_1$ y $y_0 \in D_2$. Concluimos que $D_1 \perp D_2$. □

Observación 3.2.6. El Teorema 3.2.2 permite caracterizar la ortogonalidad de subespacios de E. En la prueba, se observa la necesidad de que sean subespacios, por lo que el resultado no se aplica en general a subconjuntos arbitrarios.

Proposición 3.2.4. Sean D_1 y D_2 dos subespacios del espacio normado E. Si $D_1 \perp D_2$, entonces $D_1 \cap D_2 = \{0\}$.

Demostración. Sea $x \in D_1 \cap D_2$. Como $D_1 \perp D_2$, entonces $x \perp x$. Luego, por la Proposición 3.2.2, tenemos $x = 0$. Por lo tanto, $D_1 \cap D_2 = \{0\}$. □

Observación 3.2.7. Si D_1 y D_2 son subespacios de E, entonces sabemos que $D_1 + D_2$ es un subespacio de E. Además, si $D_1 \perp D_2$ de la Proposición 3.2.4 tenemos $D_1 \cap D_2 = \{0\}$ por lo tanto, $D_1 + D_2 = D_1 \oplus D_2$, es decir, es una suma directa.

Teorema 3.2.3. Sean D_1 y D_2 dos subespacios del espacio normado E. Si D_2 es complemento ortogonal de D_1, entonces $E = D_1 \oplus D_2$.

Demostración. De la definición de complemento ortogonal tenemos que $E = D_1 + D_2$ y que $D_1 \perp D_2$. Por la Observación 3.2.7, tenemos $D_1 + D_2 = D_1 \oplus D_2$. Por lo tanto, $E = D_1 \oplus D_2$. □

Observación 3.2.8. Del álgebra lineal, ver [4], sabemos que dado $x \in E$, la suma directa nos permite escribir de manera única a x como suma de los elementos de D_1 y D_2. Es decir,

$$E = \{\, x = x_1 + x_2 \mid \text{ existen únicos } x_1 \in D_1 \text{ y } x_2 \in D_2 \}\,.$$

Definición 3.2.5. Sea E un espacio normado. Si $P : E \to E$ una aplicación lineal tal que $P \circ P = P$, entonces se dice que P es una proyección en E.

Ejemplo 3.2.2. Sea $k \in I$ fijo. Consideremos la aplicación $P : \ell^\infty(I, s) \to \ell^\infty(I, s)$ definida por $P((x_j)_{j\in I}) = (x_j\delta_{jk})_{j\in I}$, donde δ_{jk} es la función delta de Kronecker. Entonces P es una proyección en $\ell^\infty(I, s)$.

En efecto. Dados $\lambda \in \mathbb{K}, (x_j)_{j\in I}, (y_j)_{j\in I} \in \ell^\infty(I, s)$:

- Linealidad:

$$\begin{aligned} P\left(\lambda\,(x_j)_{j\in I} + (y_j)_{j\in I}\right) &= P\left((\lambda x_j + y_j)_{j\in I}\right) = \left((\lambda x_j + y_j)\,\delta_{jk}\right)_{j\in I} \\ &= (\lambda x_j\delta_{jk} + y_j\delta_{jk})_{j\in I} = \lambda\,(x_j\delta_{jk})_{j\in I} + (y_j\delta_{jk})_{j\in I} \\ &= \lambda P\left((x_j)_{j\in I}\right) + P\left((y_j)_{j\in I}\right). \end{aligned}$$

- $P^2 = P$:

$$P \circ P\left((x_j)_{j\in I}\right) = P\left((x_j\delta_{jk})_{j\in I}\right) = (x_j\delta_{jk}\delta_{jk})_{j\in I} = (x_j\delta_{jk})_{j\in I} = P\left((x_j)_{j\in I}\right).$$

■

Definición 3.2.6. Si en la Definición 3.2.5 se tiene que la imagen y el nucleo de P son ortogonales, es decir,

$$KerP \perp ImP,$$

entonces decimos que P es una *proyección ortogonal* o simplemente *ortoproyección*.

Para el siguiente ejemplo, recordemos del Álgebra lineal que la imagen y el nucleo de un aplicación lineal son subespacios vectoriales, ver [4] para detalles adicionales.

Ejemplo 3.2.3. La proyección $P : \ell^\infty(I,s) \to \ell^\infty(I,s)$ dado en el Ejemplo 3.2.2 es una proyección ortogonal.

En efecto. Sabemos que

$$KerP := \left\{ (\lambda_j)_{j\in I} \in \ell^\infty(I,s) \;\middle|\; P\left((\lambda_j)_{j\in I}\right) = 0; \quad 0 \in \ell^\infty(I,s) \right\}$$
$$Im\,(P) := \left\{ P\left((\lambda_j)_{j\in I}\right) \;\middle|\; (\lambda_j)_{j\in I} \in \ell^\infty(I,s) \right\}$$

son subespacios vectoriales por lo que emplearemos el Teorema 3.2.2 para mostrar que $KerP \perp ImP$. Sean $x = (x_j)_{j\in I}, y \in \ell^\infty(I,s)$

- Como $x \in KerP$ tenemos que $x_k = 0$. Así $\|x\| = \sup_{j\in I\setminus k} \{\, |x_j|s(j) \,\}$.
- Sea $y = P(z)$. Entonces. $y = (z_j\delta_{jk})_{j\in I}$. Así $\|y\| = |z_k|s(k)$; pues $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$.

Y como $x + y = (x_j + z_j\delta_{jk})_{j\in K}$ tenemos

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \sup_{j\in I} \{\, |x_j + z_j\delta_{jk}|s(j) \,\} = \sup_{j\in I} \{\, |x_j|s(j), |z_k|s(k) \,\} \\ &= \text{máx}\left\{ \sup_{j\in I\setminus k} \{\, |x_j|s(j) \,\}; \quad |z_k|s(k) \right\} \\ &= \text{máx}\left\{\|x\|,\ \|y\|\right\}.\end{aligned}$$

■

Recordemos que no toda aplicación lineal es continua cuando se trabaja en espacios normados en general. Sin embargo, si se cumple la continuidad, por la Proposición 2.4.3, la aplicación es acotada (según la Definición 2.4.3). En este caso, sabemos que existe

$$\|P\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|P(x)\|}{\|x\|}.$$

En particular, podemos escribir la desigualdad $\|P(y)\| \leq \|P\|\|y\|$ para todo $y \in E$.

Proposición 3.2.5. Sea E un espacio normado. Si $P : E \to E$ una proyección continua con $P \neq 0$. Entonces, se cumple que $\|P\| \geq 1$.

Demostración. Como P es continua, se tiene que $\|P(y)\| \leq \|P\|\|y\|$ para todo $y \in E$. En particular, sea $y = P(x)$ con $x \neq 0$. Así, $P(x) \neq 0$ y $\|P(P(x))\| \leq \|P\|\|P(x)\|$. Como $P^2 = P$, se cumple que $\|P(x)\| \leq \|P\|\|P(x)\|$, de donde se deduce que $1 \leq \|P\|$. □

Observación 3.2.9. Sea $P : E \to E$ una proyección. Si $x \in ImP$, entonces

$$P(x) = x.$$

En efecto, como $x \in ImP$, existe $y \in E$ tal que $x = P(y)$. Entonces, como $P^2 = P$, tenemos

$$P(x) = P(P(y)) = P(y) = x.$$

Proposición 3.2.6. Sea E un espacio normado. Si $P : E \to E$ es una ortoproyección, entonces se cumple:

1. $E = KerP \oplus ImP$, con $KerP \perp ImP$.
2. P es continua.

Demostración.
[1] Por definición, tenemos que $KerP \perp ImP$, por lo que, según la Observación 3.2.7, se cumple que $KerP \oplus ImP$. Por otro lado, sea $x \in E$, entonces:

$$P\left(x - P(x)\right) = P(x) - P^2(X) = P(x) - P(x) = 0.$$

Así,

$$x = (x - P(x)) + P(x); \quad x - P(x) \in KerP, \quad P(x) \in ImP.$$

De donde de tiene que $E \subset KerP \oplus ImP$. Por lo tanto $E = KerP \oplus ImP$.

[2] De la primera parte, dado $x \in E$, se tiene que $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in KerP$ y $x_2 \in ImP$. Por la Observación 3.2.9, sabemos que $P(x_2) = x_2$. Así,

$$P(x) = P(x_1) + P(x_2) = 0 + x_2 = x_2.$$

Entonces, como $KerP \perp ImP$, aplicando el Teorema 3.2.2, se tiene:

$$\|x\| = \|x_1 + x_2\| = \text{máx}\left\{\|x_1\|,\ \|x_2\|\right\}.$$

De donde $\|P(x)\| = \|x_2\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. Es decir,

$$\|P(x)\| \leq 1\|x\|. \tag{3.7}$$

Por lo tanto, P es acotado, y por la Proposición 2.4.3, tenemos que P es continua. □

Teorema 3.2.4. Sean E un espacio normado y $P : E \to E$ es una proyección tal que $P \neq 0$. Entonces, Son equivalentes:

1. P es una ortoproyección.
2. $\|P\| = 1$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Por la Propoisicón 3.2.5, sabemos que $\|P\| \geq 1$. Por otro lado, de la demostración del segundo ítem de la Proposición 3.2.6, es decir, de la desigualdad (3.7), obtenemos que

$$\frac{\|P(x)\|}{\|x\|} \leq 1, \quad \text{para todo } x \in E \setminus \{0\}.$$

Por lo que $\|P\| \leq 1$. Así, concluimos que $\|P\| = 1$.

[2 $\Rightarrow$ 1] Sean $x \in KerP$ y $y \in ImP$. Por la Observación 3.2.9, sabemos que $P(x) = 0$ y $P(y) = y$. Además $\|P\| = 1$, entonces

- $\|y\| = \|0 + y\| = \|P(x) + P(y)\| = \|P(x + y)\| \leq \|P\| \cdot \|x + y\| = 1 \cdot \|x + y\|$, es decir,

$$\|y\| \leq \|x + y\|.$$

- $\|x\| = \|(x+y)-y\| \leq \max\{\|x+y\|, \|-y\|\} = \max\{\|x+y\|, \|y\|\}$, por el punto anterior, implicamos que $\max\{\|x+y\|, \|y\|\} = \|x+y\|$. Entonces,

$$\|x\| \leq \|x+y\|.$$

De las dos desigualdades anteriores, obtenemos que $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x+y\|$.Por lo que

$$\|x+y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}; \quad \text{para todo } x \in KerP \text{ y todo } y \in ImP.$$

Esto implica, por el Teorema 3.2.2, que $KerP \perp ImP$. Por lo tanto, P es ortoproyección. □

Observación 3.2.10. Si consideramos que P es una ortoproyección, notamos que $P = 0$ también cumple con la Definición 3.2.6. Por lo tanto, de manera general, podemos afirmar que para cualquier ortoproyección P, se cumple $\|P\| \leq 1$.

La Proposición 3.2.6 dice que si $P : E \to E$ es una ortoproyección, entonces ImP es el complemento ortogonal de $KerP$ con $E = KerP \oplus ImP$. Además, como se ha visto, P es continua. Consideremos ahora la Proposición 3.2.7, que garantiza la existencia de una proyección ortogonal si tenemos que el espacio E se puede expresar como una suma directa de subespacios que son «ortocomplementarios».

Proposición 3.2.7. Sea E un espacio normado. Dados D_1 y D_2 dos subespacios de E. Si D_2 es complemento ortogonal de D_1, entonces existe una ortoproyección $P : E \to E$ tal que $KerP = D_1$ y $ImP = D_2$.

Demostración. Por el Teorema 3.2.3, sabemos que $E = D_1 \oplus D_2$. Definimos

$$\begin{aligned} P : E = D_1 \oplus D_2 &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_2 \end{aligned}$$

Así, P está bien definido desde que $x_1 \in D_1$, y $x_2 \in D_2$ son únicos. Ahora, verificamos que P es una proyección ortogonal:

- P es una aplicación lineal: Sean $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2 \in E$. Entonces

$$P(\lambda x + y) = P((\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)) = \lambda x_2 + y_2 = \lambda P(x) + P(y).$$

- $P^2 = P$: Dado $x = x_1 + x_2 \in E$, tenemos que $P(x) = x_1$. Luego,

$$P(P(x)) = P(x_1) = x_1 = P(x).$$

- $KerP = D_1$: Por definición, $KerP := \{x \in E \mid P(x) = 0\}$. Entonces,

$$KerP = \{x = x_1 + x_2 \in E \mid x_2 = 0\} = \{x = x_1 \in E \mid x_1 \in D_1\} = D_1.$$

- $ImP = D_2$: Por definición, $ImP := \{P(x) \in E \mid x \in E\}$. Entonces,

$$ImP = \{P(x) \in E \mid x = x_1 + x_2 \in E\} = \{x_2 \in E \mid x_2 \in D_2\} = D_2.$$

□

Teorema 3.2.5. Sea un espacio normado E. Dados D_1 y D_2 dos subespacios de E. Son equivalentes:

1. $E = D_1 \oplus D_2$ con $D_1 \perp D_2$.
2. Existe $P : E \to E$ proyección ortogonal tal que $KerP = D_1$ y $ImP = D_2$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Se sigue de la Proposición 3.2.7. [2 $\Rightarrow$ 1] Se sigue de Proposición 3.2.6. □

El Teorema 3.2.5 permite caracterizar como son los espacios ortocomplementados respecto de la proyección ortogonal. Sin embargo, aún queda pendiente determinar si todo subespacio puede ser ortocomplementado. La Proposición 3.2.8 nos permitirá resolver esta cuestión y dar una definición equivalente a la Definición 3.2.4. En lo que resta del capítulo se ven algunas condiciones bajo las cuales podemos garantizar que un subespacio es ortocomplementado.

Proposición 3.2.8. Sea E un espacio normado. Si existe $P : E \to E$ una proyección continua tal que $P(E) = D_2$, entonces

$$D_2 = ImP \quad \text{y} \quad D_1 = KerP$$

son subespacios cerrados.

Demostración.

- D_1 es cerrado: Sea $x \in \overline{D_1}$, entonces existe una sucesión $(x_j)_{j\geq 1}$ en D_1 tal que $x_n \to x$. Como P es continua, por la Proposición 2.2.5, tenemos que $P(x_n) \to P(x)$. Y como $x_j \in KerP$, tenemos que $P(x_j) = 0$ para todo $j \geq 1$. Entonces $P(x) = 0$, de donde $x \in KerP$. Así, $\overline{D_1} \subset D_1$, por lo que $\overline{D_1} = D_1$.

- D_2 es cerrado: Veamos primero que $I-P : E \to E$ es un proyección continua, donde I es la aplicación lineal identidad. En efecto, como I y P son lineales y continuas, entonces $I - P$ es lineal y continua. Además,

$$\begin{aligned}(I-P)\circ(I-P)(x) &= (I-P)(x-P(x)) = x - P(x) - P(x-P(x)) \\ &= x - P(x) - P(x) + P\circ P(x) = x - P(x) - P(x) + P(x) \\ &= x - P(x) = I(x) - P(x) = (I-P)(x)\end{aligned}$$

  Así, $(I-P)\circ(I-P) = I - P$. De donde $I - P$ es una proyección continua.

  Ahora veamos que D_2 sea cerrado. Como en el punto anterior, podemos ver, analogamente, que $Ker(I-P)$ es cerrado. Y como

$$Ker(I-P) := \{x \in E \mid (I-P)(x) = 0\} = \{x \in E \mid P(x) = x\} = Im(P).$$

  Entonces, $KerP$ es cerrado.

□

Observación 3.2.11. La proposición 3.2.8 y el Teorema 3.2.5 afirman que si un subespacio admite una ortocomplementación en el sentido de que $E = D_1 + D_2$ y $D_1 \perp D_2$, es decir, $E = D_1 \oplus D_2$ entonces D_1 y D_2 son cerrados.

Ahora podemos dar una definición equivalente a la Definición 3.2.4, desde la cual son válidas, claramente, las propiedades previamente trabajadas.

Definición 3.2.7. Sea D un subespacio cerrado de un espacio normado E. Decimos que D es *ortocomplementado* en E si existe un subespacio D_0 de E de modo que $E = D \oplus D_0$ con $D \perp D_0$.

Debilitando las condiciones de la Definición 3.2.7, obtenemos:

Definición 3.2.8. Sea D un subespacio de un espacio normado E. Decimos que D es *complementado* en E si existe un subespacio D_0 de E tal que $E = D \oplus D_0$.

Proposición 3.2.9. Sea E un espacio normado. Si existe $P : E \to E$ una proyección, entonces $P(E)$ es complementado en E.

Demostración. Del algebra lineal sabemos que la $KerP$ y $P(E) = Im(P)$ son subespacios de E ya que $P : E \to E$ es una aplicación lineal, ver [4].

Sea $x \in P(E) \cap KerP$, entonces tenemos que $P(x) = 0$ y existe $y \in E$ tal que $x = P(y)$. Luego, como $P \circ P = P$ tenemos

$$0 = P(x) = P(P(y)) = P \circ P(y) = P(y) = x.$$

Así, obtenemos que

$$KerP \cap P(E) = \{0\} \tag{3.8}$$

Por otro lado, sea $x \in E$. Como $P(x - p(x)) = P(x) - P \circ P(x) = P(x) - P(x) = 0$ entonces $x - P(x) \in KerP$. De ahí,

$$x = (x - P(x)) + P(x) \in KerP + P(E); \quad \text{para todo } x \in E.$$

Así, obtenemos que $E = KerP + P(E)$,y por (3.8) tenemos que

$$E = KerP \oplus P(E).$$

□

Recordemos que un sistema de vectores es ortogonal es un espacio vectorial con producto interno, ver [4], es cuando cada par de vectores distintos es ortogonal entre sí. Además, sabemos que el hecho de que el sistema sea ortogonal implica la independencia lineal del propio sistema. Pues bien, dado que no tenemos producto interno, ahora veremos cómo podemos tener sistemas ortogonales. Primero, veamos algunas diferencias entre la ortogonaldidad de vectores en espacios con producto interno y en aquellos que no lo tiene, para entender la Definición 3.2.9.

En $\mathbb{K}^2$, con la norma $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$, el conjunto $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ es un sistema tal que sus elementos son ortogonales sí, tomados de dos en dos, según la Definición 3.2.2. En efecto, notamos que $\|e_1\| = |1|$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces:

- $e_1 \perp e_2$: $|1| \leq \max\{|1|, |-\lambda|\} = \|(1, -\lambda)\| = \|e_1 - \lambda e_2\|$; para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Luego $|1| \leq dist\,(e_1, \mathbb{K}e_2)$. Así $dist\,(e_1, \mathbb{K}e_2) = \|e_1\|$.

- $e_1 \perp e_1+e_2$: $|1| = |1-\lambda+\lambda| \leq \max\{|1-\lambda|, |\lambda|\} = \max\{|1-\lambda|, |-\lambda|\}$. De donde $\|e_1\| \leq \max\{|1-\lambda|, |-\lambda|\} = \|(1-\lambda, \lambda)\| = \|e_1 + \lambda(e_1+e_2)\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Luego $\|e_1\| \leq dist(e_1, \mathbb{K}(e_1+e_2))$. Así, $dist(e_1, \mathbb{K}(e_1+e_2)) = \|e_1\|$.

- $e_2 \perp e_1 + e_2$: Notemos que $\|e_2\| = |1|$, y procediendo de forma similar al punto anterior, obtenemos que $dist(e_2, \mathbb{K}(e_1+e_2)) = \|e_2\|$.

Sin embargo, el conjunto $\{e_1, e_2, e_1+e_2\}$ no es linealmente independiente. Esto no presenta ningún incoveniente ni contradicción, ya que la ortogonalida definida para los puntos de espacio normado no arquimediano no proviene de un producto interno. Al eliminar e_1+e_2 del sistema, obtenemos la independencia lineal del sistema. Además, el vector $0 \in \mathbb{K}$ es ortogonal a todo los vectores, aunque no se considera parte del sistema. También, por la propiedad de ortogonalidad, $e_1 \perp \lambda e_2$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, es decir, $e_1 \perp [\mathbb{K}^2 \setminus \{e_2\}]$. De manera similar, $e_2 \perp [\mathbb{K}^2 \setminus \{e_1\}]$. Estos hechos nos permiten entender claramente la Definición 3.2.9.

Definición 3.2.9. Sea S de un subconjunto, con $0 \notin S$, de un espacio normado E. Decimos que S es un *sistema (conjunto) ortogonal* si para cada $x \in S$ se cumple que $x \perp [S \setminus \{x\}]$. Si, además, $\|x\| = 1$ para todos $x \in S$, decimos que S es un *sistema ortonormal*.

Ejemplo 3.2.4. En ℓ^∞, consideramos $S := \left\{ e_k \in \ell^\infty \;\middle|\; e_k = (\delta_{kj})_{j\geq 1}\,; \quad k = 1, 2, 3, \cdots \right\}$. Entonces, S es un sistema ortogonal. Es más, S es un sistema ortonormal.

En efecto, para $r \neq s$ tenemos $\|e_r\| = \sup_{j\geq 1} |\delta_{rj}| = |1|$. Por otro lado, sabemos que:

$$[S \setminus \{e_r\}] := \left\{ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s e_s \;\middle|\; e_s \in S \setminus \{e_r\}, \lambda_s \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Veamos que $e_r \perp y$ para todo $y \in [S \setminus \{e_r\}]$. Como $y = \sum_{s\neq r}^{n} \lambda_s e_s$, se tiene:

$$\|e_r - \lambda y\| = \left\| e_r - \sum_{s\neq r,\, s\in\{1,\cdots,n\}}^{n} \lambda\lambda_s y_s \right\| = \sup_{s\neq r,\, n\in\{1,\cdots,n\}} \{|1|, |-\lambda\lambda_s|\} \geq |1| = \|e_r\|.$$

Entonces, $\|e_r\| \leq \|e_r - \lambda y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Esto implica que $\|e_r\| \leq dist(e_r, \mathbb{K}y)$. Luego, $dist(e_r, \mathbb{K}y) = \|e_r\|$ para todo $y \in [S \setminus \{e_r\}]$. Así, $e_r \perp [S \setminus \{e_r\}]$ para todo $e_r \in S$. Por lo tanto, S es un sistema ortogonal.

Para demostrar la ortonormalidad, usamos la Proposición 2.1.2, según la cual obtenemos $\|e_r\| = |1| = 1$ para todo $e_r \in S$.

■

Proposición 3.2.10. Sea S un subconjunto, con $0 \notin S$, de un espacio normado E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. S es un sistema ortogonal.

2. Todo subconjunto finito de S es un sistema ortogonal.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Sea $J = \{w_1, \cdots, w_n\}$ subconjunto de S. Del álgebra lineal (ver [4]) sabemos que, como $J \setminus \{w_j\} \subset S \setminus \{w_j\}$, entonces $[J \setminus \{w_j\}] \subset [S \setminus \{w_j\}]$. Así, $w_j \perp y$ para todo $y \in [S \setminus \{w_j\}]$, en particular, $w_j \perp y$ para todo $y \in [J \setminus \{w_j\}]$. Como J es arbitrario, se concluye que todo subconjunto finito de S es un sistema ortogonal.

[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $x \in S$ y $y \in [S \setminus \{x\}]$. Entonces existen $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $z_j \in S \setminus \{x\}$ tales que $y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j$. Definimos $J = \{x, z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ como un subconjunto finito de S. Según la hipótesis, J es un sistema ortogonal, por lo que $x \perp y$ desde que $y \in [J \setminus \{x\}]$. Así, $x \perp y$ para todo $y \in [S \setminus \{x\}]$. Por lo tanto, S es un sistema ortogonal. □

Teorema 3.2.6. Un sistema ortogonal es linealmente independiente.

Demostración. Sea S un conjunto ortogonal. Debemos probar que toda combinación lineal finita igual a cero implica que los escalares deben ser necesariamente cero. En efecto, sean $x_1, x_2, \cdots x_n \in S$, y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Entonces, tenemos

$$-\lambda_j x_j = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_{j-1} x_{j-1} + \lambda_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Por otro lado, como S es un sistema ortogonal, $x_j \perp [S \setminus \{x_j\}]$. En particular,

$$x_j \perp (\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_{j-1} x_{j-1} + \lambda_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \lambda_n x_n).$$

De aquí, tenemos

$$x_j \perp (-\lambda_j)\, x_j.$$

Supongamos que $-\lambda_j \neq 0$. Entonces, existe $(-\lambda_j)^{-1} \in \mathbb{K}$, que es el inverso multiplicativo. Por la Proposición 3.2.2, podemos escribir

$$x_j \perp (-\lambda_j)^{-1} (-\lambda_j) x_j.$$

Esto implica que $x_j \perp x_j$. Nuevamente, por la Proposición 3.2.2, se tiene que $x_j = 0$ lo cual es absurdo ya que, por definición, $0 \notin S$. Entonces, $-\lambda_j = 0$, y así $\lambda_j = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Por lo tanto, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son linealmente independientes. Concluimos que S es linealmente independiente. □

Proposición 3.2.11. Sean $w_1, \ldots, w_n$ vectores distintos y no nulos de un espacio normado E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es un sistema ortogonal.
2. Para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n\| = \max_{j \in \{1,2,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\|.$$

3. Para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$w_{j+1} \perp [w_1, \ldots, w_j].$$

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Consideremos $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$.

- Como S es un sistema ortogonal, por la Proposición 3.2.10, sabemos que el subconjunto $S_2 = \{w_1, w_2\}$ es un sistema ortogonal. Por lo que, $w_1 \perp \lambda_2 w_2$, y por el Teorema 3.2.1, tenemos que

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| = \max\{\|\lambda_1 w_1\|, \|\lambda_2 w_2\|\}.$$

- Como S es un sistema ortogonal, por la Proposición 3.2.10, sabemos que el subconjunto $S_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ es un sistema ortogonal. Por lo que, $w_3 \perp (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)$, y por el Teorema 3.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_1\| &= \max\{\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\|, \|\lambda_3 w_3\|\} \\ &= \max\{\max\{\|\lambda_1 w_1\|, \|\lambda_2 w_2\|\}, \|\lambda_3 w_3\|\} \\ &= \max_{j\in\{1,2,3\}} \|x_j\|.\end{aligned}$$

- Siguiendo el proceso $n-2$ veces, obtenemos que

$$\|\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{n-1} w_{n-1}\| = \max_{j\in\{1,2,\cdots,n-1\}} \|\lambda_j w_j\|,$$

  y repitiendo una vez más el proceso, obtenemos

$$\|\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n\| = \max_{j\in\{1,2,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\|.$$

[2 $\Rightarrow$ 3] Sea $y \in [w_1, \ldots, w_j]$. Entonces, $y = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_j w_j$. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, como $j \leq n$ si es necesario, hacemos $\lambda_{j+2} = \lambda_{j+3} = \cdots = \lambda_n = 0$; $\lambda_k = -\lambda\alpha_k$ para $1 \leq k \leq j$, y $\lambda_{j+1} = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}\|w_{j+1} - \lambda y\| &= \|w_{j+1} - (\lambda\alpha_1 + \cdots \lambda\alpha_j w_2)\| = \|\lambda_{j+1} w_{j+1} + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_j w_j\| \\ &= \|\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_j w_j + \lambda_{j+1} w_{j+1}\| \\ &= \|\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_j w_j + \lambda_{j+1} w_{j+1} + \lambda_{j+2} w_{j+2} + \cdots + \lambda_n w_n\|\end{aligned}$$

Como por hipótesis,

$$\|\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n\| = \max_{k\in\{1,2,\cdots,n\}} \|\lambda_k w_k\|,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumple:

$$\|w_{j+1}\| = \|\lambda_{j+1} w_{j+1}\| \leq \max_{k\in\{1,2,\cdots,n\}} \|\lambda_k w_k\| = \|w_{j+1} - \lambda y\|.$$

Esto implica que $\|w_{j+1}\| = dist\,(w_{j+1}, \mathbb{K}y)$, para todo $y \in [w_1, \ldots, w_j]$. Por lo tanto,

$$w_{j+1} \perp [w_1, \ldots, w_j].$$

[3 $\Rightarrow$ 1] Consideremos $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$. Debemos probar que $w_k \perp [S \setminus \{w_k\}]$. En efecto, sea $y \in [S \setminus \{w_k\}]$, Entonces $y = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_{k+1} w_{k+1} + \cdots + \lambda_n w_n$. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, para $\lambda \neq 0$:

- Convenientemente hacemos

$$\begin{aligned}\|w_k - \lambda y\| &= \|w_k - \lambda\left(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1}w_{k-1} + \lambda_{k+1}w_{k+1} + \cdots + \lambda_n w_n\right)\| \\ &= \left\|(-\lambda\lambda_n)w_n - \lambda\left(\lambda_1 w_1 + \cdots + \left(-\lambda^{-1}\right)w_k + \cdots \lambda_{n-1}w_{n-1}\right)\right\|.\end{aligned}$$

  Por otro lado, por hipótesis, $w_n \perp [w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}]$. Entonces,

$$(-\lambda\lambda_n)w_n \perp [w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}],$$

  de donde

$$\left\|-\lambda\lambda_n w_n\right\| \leq \left\|(-\lambda\lambda_n)w_n - \lambda\left(\lambda_1 w_1 + \cdots + \left(-\lambda^{-1}\right) + \cdots \lambda_{n-1}w_{n-1}\right)\right\| = \|w_k - \lambda y\|.$$

  Por el Lema 3.2.1, tenemos

$$\left\|-\lambda\left(\lambda_1 w_1 + \cdots + \left(-\lambda^{-1}\right) + \cdots \lambda_{n-1}w_{n-1}\right)\right\| \leq \|w_k - \lambda y\|.$$

  Reorganizando, obtenemos

$$\left\|(-\lambda\lambda_{n-1})w_{n-1} - \lambda\left(\lambda_1 w_1 + \cdots + \left(-\lambda^{-1}\right) + \cdots \lambda_{n-2}w_{n-2}\right)\right\| \leq \|w_k - \lambda y\|.$$

- Por hipótesis $w_{n-1} \perp [w_1, w_2, \cdots, w_{n-2}]$. Entonces, $-\lambda\lambda_{n-1}w_{n-1} \perp [w_1, w_2, \cdots, w_{n-2}]$, de donde

$$\| - \lambda\lambda_{n-1}w_{n-1}\| \leq \left\|(-\lambda\lambda_{n-1})w_{n-1} - \lambda\left(\lambda_1 w_1 + \cdots + \left(-\lambda^{-1}\right) + \cdots \lambda_{n-2}w_{n-2}\right)\right\|.$$

  Aplicando nuevamente el Lema 3.2.1, obtenemos

$$\left\|-\lambda\left(\lambda_1 w_1 + \cdots + \left(-\lambda^{-1}\right) + \cdots \lambda_{n-2}w_{n-2}\right)\right\| \leq \|w_k - \lambda y\|.$$

  Reorganizando, obtenemos

$$\left\|(-\lambda\lambda_{n-2})w_{n-2} - \lambda\left(\lambda_1 w_1 + \cdots + \left(-\lambda^{-1}\right) + \cdots \lambda_{n-3}w_{n-3}\right)\right\| \leq \|w_k - \lambda y\|.$$

- Dado que $1 \leq k \leq n$, seguimos este proceso de manera finita y, en alguna iteración, obtenemos que

$$\left\|-\lambda\left(-\lambda^{-1}\right)w_k\right\| \leq \|w_k - \lambda y\|.$$

  Entonces, $\|w_k\| \leq \|w_k - \lambda y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Esto implica que $dist\,(w_k, \mathbb{K}y) = \|w_k\|$, es decir, $w_k \perp y$ para todo $y \in [S \setminus \{w_k\}]$. Por lo tanto, S es un sistema ortogonal, ya que w_k es tomado de manera arbitraria.

□

Cuando consideramos la ortogonalidad de un conjunto $S \subseteq E \setminus \{0\}$, a veces es útil indexar S tomando un conjunto I con la misma cardinalidad que S, mediante una biyección $j \mapsto w_j$ de I sobre S, y escribir $S = \{w_j\}_{j\in I}$. Esta indexación facilita la manipulación de los elementos, especialmente cuando los vectores ortogonales forman parte de «bases» de espacios vectoriales. Tener un ínidice claro para cada elemento puede simplifica la presentación y comprensión de los argumentos.

Observación 3.2.12. Si $I \subset \mathbb{N}$, la Definición 3.2.9 se reescribe como: $\{w_j\}_{j\in I}$ es un sistema ortogonal si y solamente si $w_n \perp [w_m \mid m \neq n]$ para todo $n \in I$.

En espacios con producto interno, se sabe que un perturbación "ligera" de un sistema puede llevar a un sistema que ya no es ortogonal. Por ejemplo, consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual y $\{e_1, e_2\}$ su base canónica, que es un sistema ortogonal. Si definimos $e_1' = (1, \varepsilon)$ y $e_2' = (\varepsilon, 1)$, con $\|e_1 - e_1'\| \leq \|e_1\|$ y $\|e_2 - e_2'\| < \|e_2\|$, el sistema resultante, $\{e_1', e_2'\}$ ya no es ortogonal, pues $\langle e_1', e_2' \rangle = 2\varepsilon \neq 0$

En los espacio de normados no arquimedianos la ortogonalidad no se ve afectada por perturbaciones, como veremos en el Lema 3.2.2.

Lema 3.2.2 (Lema de perturbación)**.** Sean E un espacio normado y $\{w_j\}_{j\in I}$ un sistema ortogonal en E. Para cada $j \in I$, sea $v_j \in E$ tal que $\|w_j - v_j\| < \|w_j\|$. Entonces, $\{v_j\}_{j\in I}$ también es un sistema ortogonal en E.

Demostración. Por la Proposicón 3.2.10, suponemos que $I = \{1, 2, \cdots, n\}$. Para esta demostración, empleamos la Proposición 3.2.11. En efecto, sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Notemos que:

- $\|v_j\| = \|w_j\|$: Como $\|w_j - v_j\| < \|w_j\|$, tenemos que

  $$\|v_j\| = \|v_j - w_j + w_j\| \leq \max\{\|v_j - w_j\|, \|w_j\|\} = \max\{\|w_j - v_j\|, \|w_j\|\} = \|w_j\|.$$

  Es decir, $\|v_j\| \leq \|w_j\|$ para todo $j \in I$. Ahora, supongamos que $\|v_j\| < \|w_j\|$. Entonces, por la Observación 2.4.2, se tiene que $\|w_j - v_j\| = \max\{\|w_j\|, \|v_j\|\}$, lo que implica que $\|w_j - v_j\| = \|w_j\|$, lo cual contradice la hipótesis, ya que tenemos $\|w_j - v_j\| < \|w_j\|$. Por lo tanto $\|v_j\| = \|w_j\|$ para todo $j \in I$.

- Veamos que

  $$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j - w_j) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\|.$$

  En efecto, como $\{w_1, \cdots, w_n\}$ es un sistema ortogonal, por la Proposición 3.2.11, tenemos que

  $$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\| = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} |\lambda_j| \|w_j\|.$$

  Como $\|w_j - v_j\| < \|w_j\|$ y por la desigualdad ultramétrica de la norma, tenemos que

  $$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j - w_j) \right\| &\leq \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j (v_j - w_j)\| = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} |\lambda_j| \|v_j - w_j\| \\ &< \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} |\lambda_j| \|w_j\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\|. \end{aligned}$$

  Luego, por la Observación 2.4.2, se sigue lo afirmado.

Podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j - w_j) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j.$$

Entonces, tomando la norma en ambos lados y usando la desigualdad ultramétrica, y del punto anterior, obtenemos que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j v_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(v_j - w_j\right) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_j\right\|.$$

Y del primer punto, $\|w_j\| = \|v_j\|$, por lo que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j v_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_j\right\| = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}|\lambda_j|\|w_j\| = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}|\lambda_j|\|v_j\|.$$

Tenemos que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j v_j\right\| = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}|\lambda_j|\|v_j\|; \quad \text{para todo } \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K}.$$

Por lo tanto, por la Proposición 3.2.11, se concluye el Lema. □

Dado que es más sencillo probar o demostrar una desigualdad que una igualdad, construimos una forma de tratar la ortogonalidad, ya sea de dos puntos o como sistema ortogonal, debilitando primero la Definición 3.2.9 con la Definición 3.2.10. Como consecuencia del Teorema 3.2.7, se construyen de manera natural las herramientas necesarias.

Definición 3.2.10. Sea S de un subconjunto de un espacio normado E, con $0 \notin S$, diremos que S es *(sistema) ortogonal* si existe una norma equivalente para la cual S es un sistema ortogonal en el sentido de la Definición 3.2.9.

Para diferenciar la Definición 3.2.9, que se refiere a «sistema ortogonal», de la Definición 3.2.10, a esta última solo nos referimos como «ortogonal». Además, es importante precisar que esta nueva definición solo es relevante en esta sección; fuera de ella, «ortogonal» hace referencia a «sistema ortogonal» en el sentido de la Definición 3.2.9.

Observación 3.2.13. No está de más hacer notar que, según la Proposición 3.2.10, un sistema es ortogonal si y solo si cada subconjunto es un sistema ortogonal, y esto también es válido para esta norma. Además, el Teorema 3.2.6, establece que cualquier sistema ortogonal es linealmente independiente, esta propiedad también es válida para esta norma. De hecho, la independencia lineal no depende de la norma.

Con la Definición 3.2.10, la Proposición 3.2.11 se traduce al Teorema 3.2.7.

Teorema 3.2.7. Sea S un subconjunto de un espacio normado E, con $0 \notin S$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. S es ortogonal
2. Existe $t \in \langle 0, 1]$, tal que para todo $w_1, w_2, \cdots, w_n \in S$, distintos, y para cualquier $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, se cumple

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_j\right\| \geq t \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}\|\lambda_j w_j\|.$$

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Por hipótesis, S no es un sistema ortogonal con la norma $\|\cdot\|$; sin embargo, existe una norma equivalente $\|\cdot\|^{\perp}$ tal que S es un sistema ortogonal con respecto a esta norma. Luego, existen $\phi, \Phi > 0$ tales que $\phi\|\cdot\| \leq \|\cdot\|^{\perp} \leq \Phi\|\cdot\|$. Entonces, aplicando la Proposición 3.2.11 para la norma $\|\cdot\|^{\perp}$, tenemos

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j\right\| \geq \Phi^{-1} \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j\right\|^{\perp} = \Phi^{-1} \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\|^{\perp} \geq \phi\Phi^{-1} \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\|.$$

Por otro lado, notamos que $t = \phi\Phi^{-1} \leq 1$, por lo que se obtiene

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j\right\| \geq t \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\|.$$

[2 $\Rightarrow$ 1] Podemos considerar $S = \{w_j\}_{j\in I}$ y, para evitar el uso excesivo de subíndices, podemos tomar a I como numerable. Primero, notemos que, dado $x \in [S]$, x tiene representación única. En efecto, supongamos que $x = \alpha_1 w_1 \cdots \alpha_n w_n$ y $w = \beta_1 w_1 + \cdots \beta_m$. Podemos suponer que $n = m$ pues de lo contrario, basta con definir $\alpha_{j+1} = 0$ o $\beta_{j+1} = 0$ para tener $m = n$. Definimos $\lambda_j = \alpha_j - \beta_j$,entonces $\lambda_1 w_1 + \cdots = \lambda_n w_n = 0$. Por hipótesis, tenemos

$$t\|\lambda_j w_j\| \leq t \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j\right\| = \|0\| = 0.$$

De aquí $\|\lambda_j w_j\| = 0$, lo que implica $|\lambda_j|\|w_j\| = 0$. Como $0 \notin S$, esto significa que $\lambda_j = 0$ para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$. Por lo tanto, $\alpha_j = \beta_j$ para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$. Esto muestra que S es linealmente independiente.

Ahora definimos una norma en $[S]$ mediante la aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\|' : [\,S\,] &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x = \sum_{j\in I} \lambda_j w_j &\longmapsto \max_{j\in I} \|\lambda_j w_j\| \end{aligned}$$

La aplicación $\|\cdot\|'$ está bien definida, ya que cada $x \in [S]$ se expresa de manera única como una combinación lineal finita. Ahora verifiquemos que $\|\cdot\|'$ es una norma. Sean $x = \alpha_1 w_1 + \cdots \alpha_n w_n$, $y = \beta_1 w_1 + \cdots \beta_m w_m \in [s]$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $\|x\|' \geq 0$ porque $\|\lambda_j w_j\| \geq 0$. Si $\|x\| = 0$, entonces $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = 0$. Como $[S]$ es linealmente independiente, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, por lo que $x = 0$. Así, $\|x\|' = 0$ si y solo si $x = 0$.

- Como cada elemento de $[S]$ tiene representación única, tenemos

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|' &= \max_{j\in I} \|(\lambda\alpha_j)w_j\| = \max_{j\in I} \|\lambda(\alpha_j w_j)\| = \max_{j\in I} |\lambda| \cdot \|\alpha_j w_j\| \\ &= |\lambda| \max_{j\in I} \|\alpha_j w_j\| = |\lambda| \cdot \|x\|' \end{aligned}$$

- Podemos suponer que $m = n$. Como la norma $\|\cdot\|$ es ultramétrica, tenemos

$$\begin{aligned} \|x + y\|' &= \max_{j\in I} \|(\alpha_j + \beta_j)w_j\| = \max_{j\in I} \|\alpha_j w_j + \beta_j w_j\| \\ &\leq \max_{j\in I} \{\max\{\|\alpha_j w_j\|, \|\beta_j w_j\|\}\} = \max_{j\in I} \{\|\alpha_j w_j\|, \|\beta_j w_j\|\}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\max\{\|x\|', \|y\|'\} = \max\left\{\max_{j\in I}\|\alpha_j w_j\|, \max_{j\in I}\|\beta_j w_j\|\right\} = \max_{j\in I}\{\|\alpha_j w_j\|, \|\beta_j w_j\|\}.$$

Por lo que obtenemos

$$\|x+y\|' \leq \max_{j\in I}\{\|\alpha_j w_j\|, \|\beta_j w_j\|\} = \max\{\|x\|', \|y\|'\}.$$

Ahora verifiquemos que las normas sean equivalentes. En efecto:

- Para $t \in \langle 0, 1]$, que existe por hipótesis, tenemos

$$t\|x\|' = t\max_{j\in I}\|\alpha_j w_j\| = t\max_{j\in\{1,\cdots,n\}}\|\alpha_j w_j\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j w_j\right\| = \|x\|.$$

- Como $\|\cdot\|$ es una ultramétrica, tenemos

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j w_j\right\| \leq \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}\|\alpha_j w_j\| = \max_{j\in I}\|\alpha_j w_j\| = \|x\|'.$$

Resumiendo, existen $t, 1 > 0$ tales que

$$t\|x\|' \leq \|x\| \leq 1\cdot\|x\|'; \quad \text{para todo } x \in [S].$$

Hemos construido una norma equivalente a $\|\cdot\|$; sin embargo, no esta definida en todo E. Para obtener una norma equivalente en E aplicaremos el Teorema 3.1.3. Así, existe una norma ultramétrica $\|\cdot\|^\perp$ en E tal que es equivalente a $\|\cdot\|$, y su restricción a $[S]$ es la norma $\|\cdot\|'$. Para garantizar que $\left(E, \|\cdot\|^\perp\right)$ es un espacio de Banach no arquimediano, empleamos el Teorema 3.1.3.

Ahora probemos que S es un sistema ortogonal con la norma $\|\cdot\|^\perp$. En efecto, por definición, $\|z\|' = \max_{j\in I}\|\lambda_j w_j\|$. En particular, si $z = w_j$, obtenemos $\|w_j\|' = \|w_j\|$ para todo $j \in I$. Tomemos $\{w_1, \cdots, w_n\}$, subconjunto arbitrario de S. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Entonces, de la definición de $\|\cdot\|'$, obtenemos

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_i w_j\right\|' = \max_{j\in I}\|\lambda_j w_j\| = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}|\lambda_j|\cdot\|w_j\| = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}|\lambda_j|\cdot\|w_j\|' = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}\|\lambda_j w_j\|'.$$

Como $\|x\|^\perp = \|x\|'$ para todo $x \in [S]$, tenemos

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_i w_j\right\|^\perp = \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}\|\lambda_j w_j\|^\perp; \quad \text{para todo } \lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Entonces, por la Proposición 3.2.11, $\{w_1, \cdots, w_n\}$ es un sistema ortogonal respecto a la norma $\|\cdot\|^\perp$. Como es tomado de manera arbitraria, todo subconjunto finito de S es un sistema ortogonal respecto a la norma $\|\cdot\|^\perp$. Aplicando la Proposición 3.2.10, se tiene que S es un sistema ortogonal con la norma $\|\cdot\|^\perp$, la cual es equivalente a la norma $\|\cdot\|$. Por lo tanto, S es ortogonal. □

El hecho de debilitar la definición de «sistema ortogonal» por la Definición 3.2.10 y el Teorema 3.2.7 conduce a la Definición 3.2.11.

Definición 3.2.11. Sea E un espacio normado. Dados $x, y \in E$, y $t \in \langle 0, 1]$, decimos que x es $t-$*ortogonal* a y si

$$dist\,(x, \mathbb{K}y) \geq t\,\|x\|.$$

Observación 3.2.14. La Definición 3.2.11 generaliza la Definición 3.2.2. En efecto, cuando $t = 1$, tenemos $\|x\| \leq dist\,(x, \mathbb{K}y)$, de donde se obtiene $dist\,(x, \mathbb{K}y) = \|x\|$. Es decir, que x sea $1-$ortogonal a y es equivalente a $x \perp y$.

Proposición 3.2.12. Sea E un espacio normado. Dados $x, y \in E$, y $t \in \langle 0, 1]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. x es $t-$ortogonal a y.
2. $\|\alpha x + \beta y\| \geq t \cdot \max\{\|\alpha x\|, \|\beta y\|\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Si $\alpha = 0$, dado que $1 \geq t$, tenemos que $\|\beta y\| \geq t\|\beta y\|$. Entonces se tiene que $\|\alpha x+\beta y\| \geq t\|\alpha x+\beta y\|$. Ahora, consideremos el caso cuando $\alpha \neq 0$. Como existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$, inverso multiplicativo, y como x es $t-$ortognal a y, se cumple que $t\|x\| \leq \|x - \lambda y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. En particular, tomando $\lambda = -\alpha^{-1}\beta$, se obtiene que $t\|x\| \leq \|x + \alpha^{-1}\beta y\|$. De donde

$$\|\alpha x + \beta y| = |\alpha| \cdot \|x + \alpha^{-1}\beta y\| \geq |\alpha| \cdot t \cdot \|x\| = t\|\alpha x\|.$$

Entonces $\|\alpha x+\beta y| \geq t\|\alpha x\|$. Aplicando el Lema 3.2.1, se obtiene que $\|\alpha x+\beta y| \geq t\|\beta y\|$. Así. Combinando las dos desigualdades, se tiene que $\|\alpha x + \beta y| \geq t\max\{\|\alpha x\|, \|\beta y\|\}$.

[2 $\Rightarrow$ 1]. Como β es arbitrario, se puede escribir $\|\alpha x - \beta y\| \geq t\max\{\|\alpha x\|, \|\beta y\|\}$. Tomando $\alpha = 1 \in \mathbb{K}$, se obtiene

$$t\|x\| \leq \|x - \beta y\|; \quad \text{para todo } \beta \in \mathbb{K}.$$

Así, $t\|x\| \leq dist\,(x, \mathbb{K}y)$. Es decir, $dist\,(x, \mathbb{K}y) \geq t\|x\|$. □

Observación 3.2.15. La Proposición 3.2.12 garantiza que

$$x \text{ es } t - \text{ortogonal a } y, \quad \text{si y solamente si,} \quad y \text{ es } t - \text{ortogonal a } x.$$

Esto se debe a que $\|\alpha x + \beta y\| = \|\beta y + \alpha x\|$.

Definición 3.2.12. Sean E un espacio normado, $t \in \langle 0, 1]$ y S subconjunto de E con $0 \notin S$. Decimos que S es $t-$*ortogonal* si para cada $x \in S$ y cada $y \in [S \setminus \{x\}]$ se cumple que x es $t-$ortogonal a y.

Si, además, $\|x\| = 1$ para todos $x \in S$, decimos que S es $t-$*ortonormal*.

Proposición 3.2.13. Sean E un espacio normado y S subconjunto de E con $0 \notin S$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. S es t-ortogonal.
2. Todo subconjunto finito de S es $t-$ortogonal.

Demostración.
[1 $\Rightarrow$ 2] Del álgebra lineal , ver [4], dado que $J \setminus \{w_j\} \subset S \setminus \{w_j\}$, se tiene que $[J \setminus \{w_j\}] \subset [S \setminus \{w_j\}]$. Así, w_j es $t-$ortogonal a y para todo $y \in [S \setminus \{w_j\}]$. En particular, x es $t-$ortogonal a y, para todo $y \in [J \setminus \{w_j\}]$. Como J es tomado arbitrario, concluimos que todo subconjunto finito de S es $t-$ortogonal.

[2 $\Rightarrow$ 1] Sean $x \in S$ y $y \in [S \setminus \{x\}]$. Entonces, existen $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $z_j \in S \setminus \{x\}$ tales que $y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j$. Definimos $J = \{x, w_1, \cdots, w_n\}$ un subconjunto finito de S. Luego, por hipótesis, J es $t-$ortogonal, por lo que x es $t-$ortogonal a y ya que $y \in [J \setminus \{x\}]$. Así, tenemos que x es $t-$ortogonal a y para todo $y \in [S \setminus \{x\}]$. Por lo tanto, S es $t-$ortogonal. □

Proposición 3.2.14. Sean E un espacio normado y S un subconjunto de E con $0 \notin S$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. S es ortogonal.
2. Existe $t \in \langle 0, 1]$ tal que S es $t-$ortogonal.

Demostración.

[1 $\Rightarrow$ 2] Como S es ortogonal, por el Teorema 3.2.7, existe $t \in \langle 0, 1]$ tal que para todo $v_1, \cdots, v_m \in S$, distintos, y cualquier $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, se cumple:

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j \right\| \geq t \max_{j \in \{1, \cdots, m\}} \|\alpha_j w_j\| .$$

Sean $x \in S$ y $y \in [S \setminus \{x\}]$. Tenemos que $y = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$, donde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $w_j \in S$. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos $\alpha_j = -\lambda\lambda_j$, $\alpha_{n+1} = 1_{\mathbb{K}}$, $v_j = w_j$, $v_{n+1} = x$. Así, en particular para $m = n + 1$, tenemos:

$$\left\| x - \lambda \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j v_j \right\| \geq t \max_{j \in \{1, \cdots, n+1\}} \|\alpha_j v_j\| \geq t\|\alpha_{n+1} v_{n+1}\| = t\|x\|.$$

Esto implica que $t\|x\| \leq \|x - \lambda y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, por lo que $t\|x\| \leq dist\,(x, \mathbb{K}y)$. Notemos que la construcción de $t \in \langle 0, 1]$ no depende de $x \in S$ ni de $y \in [S \setminus \{x\}]$, por lo tanto, x es $t-$ortogonal a y para todo $x \in S$ y $y \in [S \setminus \{x\}]$. Es decir, S es $t-$ortogonal.

[2 $\Rightarrow$ 1] Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ y $w_1, \cdots, \cdots, w_n \in S$. Por hipótesis, existe $t \in \langle 0, 1]$ tal que S es $t-$ortogonal. Entonces:

- Como S es $t-$ortogonal, por la Proposición 3.2.13, tenemos que $S_2 = \{w_1, w_2\}$ es $t-$ortogonal. Luego, w_1 es $t-$ortogonal w_2, y por la Proposición 3.2.12, tenemos que:
$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| \geq t \cdot \max \{\|\lambda_1 w_1\|, \|\lambda_2 w_2\|\}$$
- Como S es $t-$ortogonal, por la Proposición 3.2.13, tenemos que $S_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ es $t-$ortogonal. Luego:
  - w_1 es $t-$ortogonal con $\lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$, y por la Proposición 3.2.12, tenemos que:
$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_1\| \geq t \cdot \max \{\|\lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\|, \|\lambda_1 w_1\|\} \geq t \cdot \|\lambda_1 w_1\|$$

- w_2 es $t-$ortogonal con $\lambda_1 w_1 + \lambda_3 w_3$, y por la Proposición 3.2.12, tenemos que:

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_1\| \geq t \cdot \max\{\|\lambda_1 w_1 + \lambda_3 w_3\|, \|\lambda_2 w_2\|\} \geq t \cdot \|\lambda_2 w_2|$$

- w_3 es $t-$ortogonal con $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, y por la Proposición 3.2.12, tenemos que:

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_1\| \geq t \cdot \max\{\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\|, \|\lambda_3 w_3\|\} \geq t \cdot \|\lambda_3 w_3\|$$

Así, de las tres desigualdades se obtiene que

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_1\| \geq t \cdot \max\{\|\lambda_1 w_1\|,\ \|\lambda_2 w_2\|,\ \|\lambda_3 w_3\|\}$$

- Siguiendo el proceso un número finito de veces, deducimos que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j\right\| \geq t \cdot \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\|$$

Finalmente, por el Teorema 3.2.7, concluimos que S es ortogonal.

□

Teorema 3.2.8. Sean E un espacio normado y S subconjunto de E con $0 \notin S$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe $t \in \langle 0, 1]$ tal que S es $t-$ortogonal.
2. Para todo $w_1, w_2, \cdots, w_n \in S$, distintos, y cualquier $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, se cumple

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j\right\| \geq t \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j w_j\|.$$

3. S es ortogonal.

Demostración. La prueba se sigue de las equivalencias establecidas en el Teorema 3.2.7 y la Proposición 3.2.14. □

Corolario 3.2.1. Si $\{w_j\}_{j\in I}$ es $t-$ortogonal, entonces $\{\alpha_j w_j\}_{j\in I}$ es $t-$ortogonal, donde $\alpha_j \in \mathbb{K}^*$ es tomado de manera arbitraria. Si $t = 1$, el resultado se aplica a sistemas ortogonales.

Demostración. Sean $w_1, w_2, \cdots, w_n$, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ es campo, entonces $\lambda_j \alpha_j \in \mathbb{K}$. Como $\{w_j\}_{j\in I}$ es $t-$ortogonal, por el Teorema 3.2.8 se tiene que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j \alpha_j) w_j\right\| \geq t \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|(\lambda_j \alpha_j) w_j\|.$$

Dado que E es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, se cumple que $(\lambda_j \alpha_j) w_j = \lambda_j (\alpha_j w_j)$. Por lo que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\alpha_j w_j)\right\| \geq t \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} \|\lambda_j (\alpha_j w_j)\|.$$

Como los escalares λ_j son tomados de manera arbitraria, por el Teorema 3.2.8, concluimos que $\{\alpha_j w_j\}_{j\in I}$ es $t-$ortogonal. □

Corolario 3.2.2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\{w_j\}_{j\in I}$ sea $t-$ortogonal. Si $\|\cdot\|$ es una norma fuertemente sólida, entonces existen $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tales que $\{\alpha_j w_j\}$ es $t-$ortonormal.

Demostración. Como $\||E\|| \subset |\mathbb{K}|$ y $\|\cdot\|$ es una norma sólida, para cada w_j existe $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tal que $\|w_j\| = |\lambda_j|$. Como $w_j \neq 0$ por definición, al tomar $\alpha_j = \lambda_j^{-1}$, obtenemos $\|\alpha_j w_j\| = 1$. Por la Proposición 3.2.1, deducimos que $\{\alpha_j w_j\}$ es $t-$ortogonal. Concluimos que $\{\alpha_j w_j\}$ es $t-$ortonormal. □

La Proposición 3.2.15 es de gran utilidad práctica en espacios normados.

Proposición 3.2.15. Sean $0 < \delta < 1$ y $\omega > 0$. Entonces, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\delta \leq \delta^m \omega \leq 1.$$

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que para todo $m \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\delta > \delta^m\omega$ o $\delta^m\omega > 1$. Examinemos en cada caso:

- Si $\delta > \delta^m\omega$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, en particular para $m = -n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to+\infty} (\delta^{-1})^n = +\infty$, pues $\delta^{-1} > 1$. Esto contradice el hecho de que $(\delta^{-1})^n < \delta/\omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $\delta^m\omega > 1$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, en particular $m = n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to+\infty} \delta^n = 0$, pues $0 < \delta < 1$. Esto contradice el hecho de que $1/\omega < \delta^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Cada uno de estos supuestos lleva a una contradicción, por lo que concluimos que el resultado es verdadero. □

Corolario 3.2.3. Sean $\rho \in \mathbb{K}^*$ tal que $0 < |\rho| < 1$ y $\{w_j\}_{j\in I}$ $t-$ortogonal. Dado $\varepsilon > 0$, entonces existen $\alpha_j \in \mathbb{K}^*$ tales que $\{\alpha_j w_j\}_{j\in I}$ es $t-$ortogonal y que $|\rho|\varepsilon \leq \|\alpha_j w_j\| \leq \varepsilon$.

Si $t = 1$, este resultado se aplica a sistemas ortogonales.

Demostración. Dados $\varepsilon > 0$ y w_j, notemos que $\|w_j\|/\varepsilon > 0$. Como $0 < |\rho| < 1$, por la Proposición 3.2.15, para $\omega = \|w_j\|/\varepsilon$, existe $m_j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$|\rho| \leq |\rho|^{m_j} \cdot \left(\frac{\|w_j\|}{\varepsilon}\right) \leq 1.$$

Definimos $\alpha_j = \rho^{m_j}$ [⋆], entonces $|\rho|\varepsilon \leq \|\alpha_j w_j\| \leq \varepsilon$. Finalmente, por el Corolario 3.2.1 concluimos que $\{\alpha_j w_j\}_{j\in I}$ es $t-$ortogonal. □

El Teorema 3.2.8 permite reformular la Definición 3.2.12 de manera equivalente. Además, recordemos que podemos expresar $S = \{w_j\}_{j\in I}$ para algún índice I con la misma cardinalidad que S. Así, tenemos la Definición 3.2.13, que es la forma usualmente empleada en textos y artículos especializados.

Definición 3.2.13. Sea $t \in \langle 0, 1]$. Un subconjunto $\{w_j\}_{j\in I}$ de E se denomina $t-$ortogonal si, para cada subconjunto finito J de I y para todo los $\lambda_j \in \mathbb{K}$ con $j \in J$, se cumple

$$\left\|\sum_{j\in J} \lambda_j w_j\right\| \geq t \cdot \max_{j\in J} |\lambda_j| \|w_j\|.$$

[⋆] Si $m < 0$, entonces $\rho^m := \left(\rho^{-1}\right)^n$ para $n = -m > 0$. Si $m = 0$, entonces $\rho^m := 1_{\mathbb{K}}$.

3.3. Bases de espacios de Banach no arquimedianos y espacios de tipo contable

Como sabemos, «las bases» en espacios vectoriales, de Banach, de Hilbert, ... son fundamentales porque proporcionan una representación concreta de elementos, permiten analizar la estructura del espacio, simplifican de cálculos y son esenciales para extender teorías que ya se conocen a contextos más generales. Este enfoque incluye los espacios no arquimedianos, donde el estudio de las bases igualmente relevante para comprender y trabajar con la estructura del espacio.

Definición 3.3.1. Sean E un espacio normado y $t \in \langle 0, 1]$. Un subconjunto (secuencia) $\{w_j\}_{j\geq 1}$ de E se denomina *base $t-$ortogonal* de E si $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal y cada $x \in E$ tiene una expansión

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j; \quad \text{donde } \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

La base $\{w_j\}_{j\geq 1}$ se denomina *base ortogonal* si $t = 1$, y *base ortonormal* si además $\|w_j\| = 1$ para todo $j \geq 1$.

Ejemplo 3.3.1. El conjunto $S := \{e_k = (\delta_{kj})_{j\geq 1}\}_{k\geq 1}$, donde δ_{kj} es la función delta de Kronecker, es una base $1-$ortonomal del espacio c_0 del Ejemplo 2.4.4. Además, tiene representación única en c_0.

En efecto, en el Ejemplo 3.2.4 mostramos que S es un sistema ortonormal. Dado $x \in c_0$, entonces $x = (x_j)_{j\geq 1}$ tal que $x_n \to 0$, de donde $x_n e_n \to 0$. Por el Teorema 3.1.1, tenemos

$$x = (x_j)_{j\geq 1} = x_1 e_1 + \cdots + x_j e_j + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j; \quad x_j \in \mathbb{K}$$

Por tanto S es una base ortogonal (1-ortogonal) de c_0. Veamos ahora que tiene representación única en c_0. Para todo $y \in c_0$, tenemos $\|y\|_\infty = \sup_{j\geq 1} |y_j|$. Supongamos que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \in c_0.$$

Definimos $\lambda_j = x_j - \alpha_j$. Entonces, $(\lambda_j)_{j\geq 1} \in c_0$ por ser espacio vectorial. Así, por la Proposición 2.4.2, se tiene que

$$\|0\|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \right\|_\infty = \left\| \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \right\|_\infty = \left\| (\lambda_j)_{j\geq 1} \right\|_\infty = \sup_{j\geq 1} |\lambda_j|.$$

Entonces, $\sup_{j\geq 1} |\lambda_j| = 0$, de donde $|\lambda_j| = 0$ para todo $j \geq 1$. Esto implica que $0 = \lambda_j = x_j - \alpha_j$, es decir, $x_j = \alpha_j$ para todo $j \geq 1$. Por lo tanto, la representación es única.

■

El Ejemplo 3.3.1 advierte que en los espacios normados no arquimedianos las bases $t-$ortogonales admiten representación única. Este hecho se confirma con la Proposición 3.3.1, donde se demuestra que la expansión en una base $t-$ortogonal es única.

Proposición 3.3.1. Sea E un espacio normado. La expansión de cualquier elemento de E en términos de una base $t-$ortogonal es única.

Demostración. Sea $\{w_j\}_{j\geq 1}$ una base $t-$ortogonal de E. Dado $x \in E$, supongamos que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j w_j = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j w_j; \quad \text{donde } \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{K}.$$

Definimos $\lambda_j = \alpha_j - \beta_j$. Como $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal, por el Teorema 3.2.8, tenemos

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \right\| \geq t \max_{1\leq j\leq m} \|\lambda_j w_j\|.$$

Luego, por la Proposición 2.4.2, tenemos

$$\|0\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j w_j - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j w_j \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| \geq t \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j w_j\|.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j w_j\| = \sup_{j\geq 1} \|\lambda_j w_j\| = 0.$$

De aquí, $|\lambda_j| \cdot \|w_j\| = \|\lambda_j w_j\| = 0$ para todo $j \geq 1$, y como $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal, $w_j \neq 0$ para todo $j \geq 1$. Esto implica que $\lambda_j = 0$, es decir, $\alpha_j = \beta_j$ para todo $j \geq 1$. Concluimos que la representación o expansión en una base $t-$ortogonal es única. □

Proposición 3.3.2. Sea $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es una base ortogonal de un espacio normado E. Si $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$, entonces

$$\|x\| = \max_{j\geq 1} \|\lambda_j x_j\|.$$

Demostración. Como $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$ existe, entonces $\{\lambda_j w_j\}_{j\geq 1}$ es sumable, y por la Proposición 3.1.1, se tiene que $\lambda_j w_j \to 0$. Esto implica que $\|\lambda_j w_j\| \to 0$, es decir, es arbitrariamente pequeño a partir de un ínidice, lo que implica que $\sup_{j\geq 1} \|\lambda_j w_j\| = \max_{j\geq 1} \|\lambda_j w_j\|$. Por otro lado, por la Proposición 3.2.11, se cumple que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| = \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j x_j\|.$$

Entonces, por la Proposición 2.4.2, tenemos

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| = \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j x_j\| = \sup_{j\geq 1} \|\lambda_j w_j\| = \max_{j\geq 1} \|\lambda w_j\|.$$

□

En espacios vectoriales, ver [4], las aplicaciones lineales preservan las bases algebraicas. En el contexto de los espacios normados no arquimedianos, las bases t-ortogonales, que tienen una estructura especial basada en la métrica no arquimediana, no siempre se preservan bajo aplicaciones lineales generales. Sin embargo, los embebimientos isométricos, que son aplicaciones lineales que preservan la métrica exacta, sí conservan la t-ortogonalidad de las bases. Es decir, la imagen de una base t-ortogonal bajo un embebimiento isométrico sigue siendo una base t-ortogonal en la imagen del espacio. La Proposición 3.3.3 muestra este hecho.

Proposición 3.3.3. Sean E, F dos espacios normados, y $T : E \to F$ un embebimiento isométrico. Si $\{w_j\}_{j\geq 1}$ una base $t-$ortogonal con $t \in \langle 0, 1]$, entonces $\{T(w_j)\}_{j\geq 1}$ es una base $t-$ortogonal para el subespacio $T(F)$ de F.

Demostración. Tenemos que $T : E \to F$ es lineal y $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Como $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal, por el Teorema 3.2.8, tenemos

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T(w_j)\right\| = \left\|T\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j\right\| \geq t \max_{1\leq j\leq k} |\lambda_j|\cdot\|w_j\| = t \max_{1\leq j\leq k} |\lambda_j|\cdot\|T(w_j)\|$$

Así, por el Teorema 3.2.8, tenemos que $\{T(w_j)\}_{j\geq 1}$ es un conjunto $t-$ortogonal de F.

Por otro lado, como $\|T(x)\| = 1 \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$, entonces T es acotado. Luego, por la Proposición 2.4.3, T es continua. Dado $x \in T(F)$, existe $y \in E$ tal que $x = T(x)$. Para $x \in E$, tenemos que $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$. Entonces $y = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j\right)$. Por la continuidad y la linealidad de T, podemos implicar, tal como se hizo en (3.4) para otra aplicación lineal y continua, que

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T(w_j); \quad y \in T(F).$$

Así. Concluimos que $\{T(w_j)\}$ es una base $t-$ortogonal de $T(F)$. □

Observación 3.3.1. Sea $T : E \to F$ es un isomorfismo isométrico. Si $\{w_j\}_{1\leq j\leq m}$ es una base t ortogonal de E con $t \in \langle 0, 1]$, entonces la Proposición 3.3.3 permite implicar que $\{Tw_j\}_{1\leq j\leq m}$ es una base $t-$ortogonal de F.

Hallar una base $t-$ortogonal para espacios normados de dimensión finita es menos complicado que para espacios normados de dimensión infinita, ya que podemos usar la propia base algebraica del espacio vectorial para construir una secuencia $t-$ortogonal que sea base $t-$ortogonal. Este hecho se establece en el Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.1. Si E es un espacio normado de dimensión finita, entonces E tiene, para cada $t \in \langle 0, 1\rangle$, una base $t-$ortogonal.

Demostración. Sea $dimE = n < \infty$. Entonces, dado $t \in \langle 0, 1\rangle$ podemos elegir valores $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1} \in \langle 0, 1\rangle$ tales que $t_1 \cdot t_2 \cdot \cdots \cdot t_{n-1} \geq t$. Como E es un espacio vectorial de dimensión finita, existe $\{x_j\}_{1\leq j\leq 1}$ una base algebraica. Así:

- Sean $w_1 := x_1$ y $G_1 := [x_1]$. Tenemos que $D_1 = [w_1]$ y, por el Teorema 3.1.2, G_1 es cerrado. Entonces $dist(x_2, G_1) > 0$ pues $x_2 \notin G_1$. Como $0 < t_1 < 1$, tomamos $\varepsilon_1 = \left(t_1^{-1} - 1\right) dist(x_2, G_1) > 0$. Existe $y_1 \in G_1$ tal que

$$\|x_2 - y_1\| < dist(x_2, G_1) + \varepsilon_1 = t_1^{-1} dist(x_2, G_1). \tag{3.9}$$

- Sean $w_2 := x_2 - y_1$ y $G_2 := [w_1, w_2]$. Tenemos que $G_2 = [x_1, x_2]$ ya que $y_1 \in G_1$, y además G_2 es cerrado por el Teorema 3.1.2. Entonces, $dist(x_3, G_2) > 0$ pues $x_3 \notin G_2$. Como $0 < t_2 < 1$, tomamos $\varepsilon_2 = \left(t_2^{-1} - 1\right) dist(x_3, G_2) > 0$. Existe $y_2 \in G_2$ tal que

$$\|x_3 - y_2\| < dist(x_3, G_2) + \varepsilon_2 = t_2^{-1} dist(x_3, G_2). \tag{3.10}$$

- Sean $w_3 := x_3 - y_2$ y $G_3 := [w_1, w_2, w_3]$. Entonces, $G_3 = [x_1, x_2, x_3]$ ya que $y_1 \in G_1$ y $y_2 \in G_2$, y además G_3 es cerrado por el Teorema 3.1.2. Entonces $dist(x_4, G_3) > 0$ pues $x_4 \notin G_3$. Como $0 < t_3 < 1$, tomamos $\varepsilon_3 = \left(t_3^{-1} - 1\right) dist(x_4, G_3) > 0$. Existe $y_3 \in G_3$ tal que

$$\|x_4 - y_3\| < dist(x_4, G_3) + \varepsilon_3 = t_3^{-1} dist(x_4, G_3). \tag{3.11}$$

- De (3.9) tenemos $\|w_2\| < t_1^{-1} dist(w_2, G_1)$. De (3.10) tenemos $\|w_3\| < t_1^{-1} dist(w_3, G_2)$. De (3.11) tenemos $\|w_4\| < t_1^{-1} dist(w_3, G_3)$. Continuando este proceso $n-1$ veces, donde $w_n = x_n - y_{n-1}$ y $G_n := [w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}]$, tenemos que $G_n = [x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$. De las contrucciones anteriores, se sigue que

$$\left|\begin{array}{ll} t_1\|w_2\| & < dist\left(w_2, [w_1]\right) \\ & \\ t_2\|w_3\| & < dist\left(w_3, [w_1, w_2]\right) \\ & \\ t_3\|w_4\| & < dist\left(w_4, [w_1, w_2, w_3]\right) \\ & \vdots \\ t_{n-1}\|w_n\| & < dist\left(w_n, [w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}]\right). \end{array}\right. \tag{3.12}$$

- Veamos que $\{w_j\}_{1 \leq j \leq n}$ es $t-$ortogonal. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

  - Debemos ver que $\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| \geq t_1 \operatorname{máx}_{1 \leq j \leq 2} \|\lambda_j w_j\|$:

    Como λ_2 es arbitrario tenemos $\lambda_2 = 0$ o $\lambda_2 \neq 0$.

    Si $\lambda_2 = 0$. Como $1 > t_1 > 0$, tenemos que $\|\lambda_1 w_1\| > t_1 \|\lambda_1 w_1\|$. De donde

    $$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| > t_1 \operatorname{máx}\left\{\|\lambda_1 w_1\|, \|\lambda_2 w_2\|\right\}.$$

    Si $\lambda_2 \neq 0$, entonces existe λ_2^{-1}, por lo que $\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| = |\lambda_2| \| w_2 + \lambda_1 \lambda_2^{-1} w_1\|$. Por (3.12) se se sabe que $t_1\|w_2\| < \|w_2 - \lambda w_1\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces para $\lambda = -\lambda_1 \lambda_2^{-1}$ tenemos

    $$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| = |\lambda_2| \cdot \left\| w_2 + \lambda_1 \lambda_2^{-1} w_1 \right\| > t_1 \cdot |\lambda_2| \cdot \|w_2\| = t_1 \|\lambda_2 w_2\|.$$

    Entonces, $\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| > t_1 \|\lambda_2 w_2\|$, y como $0 < t_1 < 1$, por el Lema 3.2.1, tenemos que $\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| > t_1 \|\lambda_1 w_1\|$. Así,

    $$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| > t_1 \operatorname{máx}\left\{\|\lambda_1 w_1\|, \|\lambda_2 w_2\|\right\}.$$

  - Debemos ver que $\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| \geq t_1 t_2 \operatorname{máx}_{1 \leq j \leq 3} \|\lambda_j w_j\|$:

    Como λ_3 es arbitrario tenemos $\lambda_3 = 0$ o $\lambda_3 \neq 0$.

Si $\lambda_3 = 0$, como $1 > t_1 > 0$ y $1 > t_2 > 0$, se tiene $1 > t_1 t_2 > 0$. Por el punto anterior, se tiene que $\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| > t_1 t_2 \|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\|$. De aquí,

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| > t_1 t_2 \operatorname{máx}\{\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2, \lambda_3 w_3\}.$$

Si $\lambda_3 \neq 0$, entonces existe λ_3^{-1}, por lo que

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| = |\lambda_3| \cdot \left\| w_3 + \lambda_3^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \right\|.$$

Por (3.12), se sabe que $t_2\|w_3\| < \|w_3 - \lambda(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, entonce para $\lambda = -\lambda_3^{-1}$ tenemos

$$\begin{aligned}\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| &= |\lambda_3| \cdot \left\| w_3 + \lambda_3^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \right\| \\ &> t_2 |\lambda_3| \cdot \|w_3\| = t_2 \|\lambda_3 w_3\|.\end{aligned}$$

Así, $\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| > t_2 \|\lambda_3 w_3\|$, y como $0 < t_2 < 1$, por el Lema 3.2.1 tenemos que $\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| > t_2 \|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\|$. Luego, por el punto anterior

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| > t_2 \|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\| > t_1 t_2 \operatorname{máx}\{\|\lambda_1 w_1\|, \|\lambda_2 w_2\|\}.$$

Ademas, como $1 > t_1$, entonces $t_2 > t_1 t_2$, por lo que

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| > t_1 t_2 \|\lambda_3 w_3\|.$$

Así,

$$\|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3\| > t_1 t_2 \operatorname{máx}\{\|\lambda_1 w_1\|, \|\lambda_2 w_2\|, \|\lambda_3 w_3\|\}.$$

- Siguiendo el proceso anterior, $n-1$ veces, obtenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| > (t_1 \cdot t_2 \cdots t_{n-1}) \max_{1 \geq j \leq n} \|\lambda_j w_j\|.$$

Y como $t_1 \cdot t_2 \cdots t_{n-1} \geq t$, entonces

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| > t \max_{1 \leq j \leq n} \|\lambda_j w_j\|.$$

Luego, por el Teorema 3.2.8, tenemos que $\{w_j\}_{1 \leq j \leq n}$ es $t-$ortogonal.

- Del proceso de construcción, obtenemos que $[w_1, w_2, \cdots, w_n] = E$ y que $\{w_j\}_{1 \leq j \leq n}$ es $t-$ortogonal. De esto, cumplimos con la Definición 3.3.1 y concluimos el teorema.

□

Observación 3.3.2. Notemos que si $dim E = n < \infty$, entonces la base $t-$ortogonal tiene n elementos. Además, los conjuntos $t-$ortogonales son linealmente independiente (ver Observación 3.2.13), por lo que una base $t-$ortogonal es una base algebraica cuando tratamos con espacios de dimensión finita.

El Teorema 3.3.2 es muy util para garantizar la existencia de bases $t-$ortogonales en espacios de dimensión infinita.

Teorema 3.3.2. Sean E un espacio de Banach y $t \in \langle 0, 1]$, y sea $\{w_j\}_{j\geq 1}$ una secuencia (conjunto) $t-$ortogonal. Si $[\{w_j\}_{j\geq 1}]$ es densa en E, entonces $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es una base $t-$ortogonal de E. Además, E es linealmente homeomorfo a c_0

Demostración. Sea $\rho \in \mathbb{K}^*$ tal que $0 < |\rho| < 1$, ver Observación 2.3.3. Entonces, por el Corolario 3.2.3, podemos suponer que

$$|\rho| \leq \|w_j\| \leq 1 \text{ para todo } j \geq 1. \tag{3.13}$$

Sea $(\lambda_j) \in c_0$. Entonces, $\lambda_n \to 0$. Así, $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n|\|w_n\| = 0$, por lo que $(\lambda_j w_j)_{j\geq}$ es una sucesión en E tal que $\lambda_n w_n \to 0$. Como E es completo, aplicando el Teorema 3.1.1, existe $x \in E$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n w_n$. Entonces, la siguiente aplicación está bien definida:

$$\begin{aligned} L : c_0 &\longrightarrow E \\ (\lambda_j)_{j\geq 1} &\longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j \end{aligned}$$

Dado que $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal y $\|w_j\| \geq |\rho|$ para todo $j \geq 1$, entonces, aplicando el Teorema 3.2.8, tenemos:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| \geq t \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|\|w_j\| \geq t|\rho| \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|; \quad \text{para todo } \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Luego, por la Proposición 2.4.2 se obtiene:

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| \geq t|\rho| \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j| = t|\rho| \sup_{j\geq 1} |\lambda_j|. \tag{3.14}$$

Ahora, veamos que la aplicación L es un homeomorfismo lineal:

- Linealidad: Sean $(\alpha_j)_{j\geq 1}, (\beta_j)_{j\geq 1} \in c_0$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$\begin{aligned} L\left((\alpha_j)_{j\geq 1} + \lambda\,(\beta_j)_{j\geq 1}\right) &= L\left((\alpha_j w_j + \lambda\alpha_j w_j)_{j\geq 1}\right) = L\left(((\alpha_j + \lambda\beta_j)\, w_j)_{j\geq 1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j + \lambda\beta_j)\, w_j = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j w_j + \lambda\beta_j w_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j w_j + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda\beta_j w_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j w_j + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j w_j \\ &= L\left((\alpha_j)_{j\geq 1}\right) + \lambda L\left((\beta_j)_{j\geq 1}\right). \end{aligned}$$

- Inyectividad: Como L es lineal basta ver que $kerL = \{0\}$. En efecto, el núcleo de L esta dado por

$$kerL := \left\{ (\lambda_j)_{j\geq 1} \in c_0 \;\middle|\; L\left((\lambda_j)_{j\geq 1}\right) = 0 \right\} = \left\{ (\lambda_j)_{j\geq 1} \in c_0 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j = 0 \right\}$$

Entonces, de (3.14) tenemos

$$t|\rho| \sup_{j\geq 1} |\lambda_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j \right\| = \|0\| = 0,$$

se sigue que $\lambda_j = 0$ para todo $j \geq 1$. Así, se obtiene que $kerL = \{0\}$.

- L es continua: Como $\|w_j\| \leq 1$ para todo $j \geq 1$, se tiene:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| \leq \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j w_j\| \leq \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|; \quad \text{para todo } \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Entonces, para $(\lambda_j)_{j\geq} \in c_0$ y usando la Proposición 2.4.2, obtenemos:

$$\left\| L\left((\lambda_j)_{j\geq 1}\right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \max_{1\geq j\geq n} |\lambda_j|$$
$$= \sup_{j\geq 1} |\lambda_j| = \|(\lambda_j)_{j\geq 1}\|_{\infty}.$$

Esto significa que:

$$L(x) \leq 1\|x\|_{\infty} \text{ para todo } x \in c_0, \tag{3.15}$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.4.3, L es continua.

- Sobreyectividad: Sea $x \in E = \overline{[\{w_j\}_{j\geq 1}]}$. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap [\{w_j\}_{j\geq}] \neq \emptyset.$$

Entonces, existe un número finito de w_j, que podemos asumir $j = 1, \cdots, n_0$, y $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tales que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_0} \alpha_j w_j \right\| < \varepsilon. \tag{3.16}$$

Definimos $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ como

$$\lambda_j := \begin{cases} \alpha_j\,, & \text{si } 1 \leq j \leq n_0 \\ 0\,, & \text{si } j > n_0 \end{cases}.$$

Es claro que $\lambda_n \to 0$, por lo que $(\lambda_j)_{j\geq 1} \in c_0$. Entonces, (3.16) tenemos que para todo $n > n_0$, se cumple

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| < \varepsilon. \tag{3.17}$$

Esto es, existe $(\lambda_j)_{\geq 1} \in c_0$ tal que

$$L\left((\lambda_j)_{j\geq 1}\right) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j = x.$$

- Como L es biyectiva, luego existe $L^{-1} : E \to c_0$.
- L^{-1} es continua: De (3.14) se tiene:

$$\left\| L\left((\lambda_j)_{j\geq 1}\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j\right\| \geq t|\rho| \sup_{j\geq 1} |\lambda_j| = t|\rho| \cdot \left\|(\lambda_j)_{j\geq 1}\right\|_\infty .$$

Así:

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{t|\rho|} \|L(x)\| ; \quad \text{para todo } x \in c_0. \tag{3.18}$$

Sea $y \in E$. Entonces, $L^{-1}(y) \in c_0$ y se tiene:

$$\left\|L^{-1}(y)\right\|_\infty \leq \frac{1}{t|\rho|} \left\|L\left(L^{-1}(y)\right)\right\| = \frac{1}{t|\rho|} \|y\| ; \quad \text{para todo } y \in E.$$

Entonces, por la Proposición 2.4.3, se tiene que L^{-1} es continua.

Tenemos que $L : E \to c_0$ es un homemomorfismo. Dado $x \in E$, cuando mostramos la sobreyectividad de L, vemos en (3.17) que $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$, de donde se sigue que $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es una base $t-$ortogonal. □

Teorema 3.3.3. Sea $t \in \langle 0, 1]$ y E un espacio de Banach con una base $t-$ortogonal. Entonces

1. E es linealmente homeomorfo a c_0.
2. Si $t = 1$ y la norma es fuertemente sólida, entonces el homeomorfismo lineal es una isometría. Es decir, E es isométricamente isomorfo ** a c_0.

Demostración.
[1] Consideremos la aplicación vista en la Proposición 3.3.2, que es

$$\begin{aligned} L : c_0 &\longrightarrow E \\ (\lambda_j)_{j\geq 1} &\longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j. \end{aligned}$$

El único cambio en la prueba es en la sobreyectividad. Y esto se tiene, L es sobreyectiva, ya que E tiene una base $t-$ortogonal.

[2] Como $\|E\| \subset |\mathbb{K}|$ por ser una norma fuertemente sólida, en la prueba de la Proposición 3.3.2 podemos retormar, por el Corolario 3.2.2, en (3.13) de manera que

$$|\rho| = \|w_j\| = 1 \text{ para todo } j \geq 1. \tag{3.19}$$

Entonces, de (3.15) y (3.18) tenemos

$$t \cdot |\rho| \cdot \|x\|_\infty \leq \|L(x)\| \leq \|x\|_\infty.$$

Y como $t = 1$ y $|\rho| = 1$, se concluye que $\|L(x)\| = \|x\|_\infty$. □

** En el contexto de espacios normados, un isomorfismo es una aplicación lineal y biyectiva entre dos espacios normados.

Definición 3.3.2. Sea E un espacio normado. Si existe un subconjunto contable *** G de E tal que $[G]$ es denso en E, decimos que E es de *tipo contable*.

Ejemplo 3.3.2. El espacio c_0, del Ejemplo 2.4.4, es de tipo contable.

En efecto, el espacio

$$c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{K};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}.$$

con norma $\|x\|_\infty := \sup_{j\geq 1} |x_j|$. Consideremos G como el conjunto de los vectores unitarios. Entonces $G = \{(\delta_{nj})_{n\geq 1} \in c_0 \mid j \geq 1\}$, donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker, por lo tanto, es numerable. Veamos que $[G]$ es denso en c_0. Sea $x \in c_0$, entonces $x = (w_j)_{j\geq 1}$, donde $w_n \to 0$. Definimos $x^m := (w_1, \cdots, w_m, 0, 0, 0, \cdots) \in [G]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > n_0$, entonces $\|w_n - 0\| < \varepsilon$. Como $\|x - x^m\| = \sup_{j\geq m+1} |w_j| \leq \sup_{j\geq 1} |w_j| = \|x\|$, entonces para $m > n_0$ se cumple que $\|x - x^m\| < \varepsilon$. Así, $x^m \to x$, de donde $x \in \overline{[G]}$. Concluimos que $E = \overline{[G]}$.

■

Proposición 3.3.4. Sea E un espacio normado con una base $t-$ortogonal, con $t \in \langle 0, 1]$. Entonces, E es de tipo contable.

Demostración. Sea $\{w_j\}_{j\geq}$ una base $t-$ortogonal de E. Definimos $G := \{w_1, w_2, w_3, \cdots\}$, entonces G es un subconjunto contable de E. Por otro lado, dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, como $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $\|x - y\| < \varepsilon$, donde $y = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j w_j \in [G]$. Entonces, $y \in B(x, \varepsilon) \cap [G]$. Por lo que $[G]$ es denso en E. Concluimos que E es de tipo contable. □

Observación 3.3.3. El recíproco de la Proposición 3.3.4 es cierto para $t \in \langle 0, 1\rangle$ cuando el espacio noramdo es completo. Este hecho se aprecia en el Teorema 3.3.1 y el Teorema 3.3.5. Sin embargo, si $t = 1$, es falso en general, como se observa en la Proposición 3.4.6. Se necesitan condiciones adicionales para su veracidad, como se señala en el Teorema 3.4.3.

Proposición 3.3.5. Los espacios normados de dimensión finita son de tipo contable.

Demostración. Sea E un espacio normado con $dimE = n < \infty$. Sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ una base algebraica de E. Consideremos $G := \{x_1, \cdots, x_2\}$, entonces G es contable. Además, como $[G] = E$, tenemos que $\overline{[G]} = E$. Concluimos que E es de tipo contable. □

Proposición 3.3.6. Sean E y F dos espacios normados de tipo contable, entonces $E \times F$ es un espacio de tipo contable con la norma del máximo.

Demostración. Por hipótesis, existen $G_E = \{x_j\}_{j\geq 1}$ y $G_F = \{y_j\}_{j\geq 1}$ tales que $[G_E]$ es denso en E y $[G_F]$ es denso en F. Definimos

$$G := \{(x_j, 0) \mid i \geq 1\} \cup \{(0, y_j) \mid j \geq 1\}.$$

*** G es contable si y solo si existe una aplicación biyectiva $f : G \to \mathbb{N}$ (si es infinito) o una aplicación inyectiva desde G a $\mathbb{N}$ (si es finito).

Así definido, G es contable. Además,

$$[G] = \left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{j_k}; \sum_{r=1}^{n} \alpha_r y_{j_r} \right) \mid \lambda_k, \alpha_r \in \mathbb{K};\ m, n \geq 1 \right\}.$$

Resta ver que $[G]$ sea denso en $E \times F$. En efecto, sea $(x, y) \in E \times F$. Dado $\varepsilon > 0$, para $x \in E = [G_E]$ existe $\tilde{x} \in G_E$ tal que $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$, donde $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{j_k}$. Para $y \in F = [G_F]$ existe $\tilde{y} \in G_F$ tal que $\|y - \tilde{y}\| < \varepsilon$, donde $\tilde{y} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r y_{j_r}$. Entonces $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [G]$ y $\|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\| = \|(x - \tilde{x}, y - \tilde{y})\| := \text{máx}\{\|(x - \tilde{x})\|, \|(y - \tilde{y})\|\} < \varepsilon$. De donde $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in B((x, y), \varepsilon) \cap [G]$. Concluimos que G es denso en $E \times F$. □

Teorema 3.3.4. Sea D un subespacio denso de un espacio normado E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. E es de tipo contable.

2. D es de tipo contable.

Demostración.

[1 $\Rightarrow$ 2] Por hipótesis, tenemos que $\overline{D} = E$. Por otro lado, como E es de tipo contable, existe un subconjunto numerable G de E con $[G]$ denso en E. Dado $w \in G$, como $\overline{[D]} = E$, podemos hallar $(x_j)_{j \geq 1}$ en D tal que $x_n \to w$. Definimos $Y_w := \{x_1, x_2, x_3 \cdots\}$. Entonces, $Y_w \subset D$ y es contable para todo $w \in G$. Luego,

$$Y := \bigcup_{w \in G} Y_w \subset D \text{ y es contable.}$$

Entonces, $G \subset \overline{Y}$, y como $Y \subset [Y]$, tenemos que $G \subset \overline{[Y]}$. Como la cerradura de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial, luego $[G] \subset \left[\overline{[Y]}\right] = \overline{[Y]}$, y como $E = \overline{D} = \overline{[G]}$, tenemos que $\overline{D} \subset \overline{[Y]}$. Por otro lado, como $[Y] \subset [D] = D$, entonces $\overline{[Y]} \subset \overline{D}$. Así, $\overline{[Y]} = \overline{D}$, entonces $\overline{[Y]}^D = E \cap \overline{[Y]} = E \cap \overline{D} = \overline{D}^D = D$. Concluimos que D es de tipo contable.

[2 $\Rightarrow$ 1] Aquí empleamos la topología relativa inducida por la norma de E sobre D. En efecto, como D es de tipo contable, existe un subconjunto numerable G de D, que también es subconjunto numerable de E, con $[G]$ denso en D, es decir, $\overline{[G]}^D = D$. Como D es cerrado en D, tenemos $\overline{D}^D = D$. Así, $\overline{[G]}^D = \overline{D}^D$. Por otro lado, por la hipótesis, D es denso en E, por lo que $\overline{D} = E$. Entonces $E = E \cap \overline{D} = \overline{D}^D$. Por lo tanto, $E = \overline{[G]}^D$, y como $\overline{[G]}^D \subset \overline{[G]}$, se conlcuye que $E = \overline{[G]}$. □

Proposición 3.3.7. Sea D un subespacio cerrado del espacio normado E de tipo contable. Entonces E/D es de tipo contable.

Demostración. Recordemos que, según la Proporsición 3.1.5, E/D es un espacio normado con la norma

$$\|x + D\| := dist(x, D); \qquad \text{para todo } x + D \in E/D.$$

Como E es de tipo contable, existe un subconjunto G de E tal que $\overline{[G]} = E$. Definimos $H = \{x+D \mid x \in G\}$ como un subconjunto de E/D. Dado que G es contable, H también es contable. Por otro lado, sea $y+D \in E/D$, como $y \in E = \overline{[D]}$, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$B(y,\varepsilon) \cap G \neq \emptyset.$$

Así, existe $x \in G$ tal que $\|x-y\| < \varepsilon$. Consideremos $x+D \in H$, se tiene

$$\|(x+D)-(y+D)\| = \|(x-y)+D\| \leq \|x-y\| < \varepsilon.$$

Luego $x+D \in B(y+D,\varepsilon) \cap H$. Así, dado $y+D \in E/D$ para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$B(y+D,\varepsilon) \cap H \neq \emptyset.$$

Entonces $\overline{H} = E/D$, lo cual implica que $\overline{[H]} = E$.

Resumiendo. Existe H subconjunto de E/D tal que $[H]$ es denso en E/D. Concluimos que E/D es de tipo contable. □

Proposición 3.3.8. Sea $0 < a < 1$. Entonces existe $(a_j)_{j\geq 1}$ en $\mathbb{R}$, con $0 < a_j < 1$ para todo $j \geq 1$, tal que

$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j = a.$$

Demostración. Definimos $a_j = a^{2^{-j}}$. Entonces:

- $0 < a_j < 1$: Como $0 < a < 1$ y $2^{-j} > 0$, entonces

$$0 < a^{2^{-j}} < 1; \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

- $\prod_{j=1}^{\infty} a_j = a$: Por definición,

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = \prod_{j=1}^{n} a^{2^{-j}}.$$

Tomando logaritmo, tenemos

$$\log\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right) = \log\left(\prod_{j=1}^{n} a^{2^{-j}}\right) = \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\log(a).$$

Así ,

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = a^{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}}.$$

Y como

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1,$$

entonces

$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} a_j = a^{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}} = a^1 = a$$

□

El Teorema 3.3.1 indica que si $dimE < \infty$, para cada $0 < t < 1$ existe una base $t-$ortogonal, por lo que este caso está cubierto. Ahora se analiza el caso en el que E es infinito dimensional.

Teorema 3.3.5. Sea E es un espacio de Banach, de dimensión infinita y de tipo contable. Entonces, para cada $t \in \langle 0, 1\rangle$, E tiene una base $t-$ortogonal.

Demostración. Tenemos $dimE = \infty$.

- Como E es de tipo contable, existe un subconjunto numerable G de E tal que $\overline{[G]} = E$. Si G es linealmente independiente, entonces el proceso que se realiza en el caso en que G sea linealmente dependiente se omite claramente. En efecto, si G es linealmente dependiente, definimos

$$\mathcal{F} := \{R \mid G \setminus R \quad \text{es linealmente independiente.}\}$$

  Notemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pues de lo contrario G sería linealmente independiente. Por la proposición A.1.1, la inclusión de conjuntos "$\subset$" es una relación de orden parcial en $\mathcal{F}$. Ahora tomemos un cadena $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots$ en $\mathcal{F}$ y definimos $H := \bigcup_{j\geq 1} R_j$. Luego

$$G \setminus H = G \setminus \bigcup_{j\geq 1} R_j = \bigcap_{j\geq 1} (G \setminus R_j) \subset G \setminus R_j.$$

  Notemos que si $G \setminus H = \emptyset$, esto no es ninguna contradicción, pues $\emptyset$ es considerado linealmente independiente. Veremos después que esto no sucede. Como $G \setminus H \subset G \subset R_j$, y $G \setminus R_j$ es linealmente independiente, entonces $G \setminus H$ es linealmente independiente. Así, H es una cota superior de la cadena, tomada arbitraria. Luego, aplicando el Lema A.1.1 (*Lema de Zorn*), existe un elemento maximal, H_m, tal que $G \setminus H_m$ es linealmente independiente. Además, observamos que $[G] = [G \setminus H_m]$, lo que implica que $\overline{[G]} = \overline{[G \setminus H_m]} = E$. Así, tenemos que $G \setminus H_m$ no es finito ni mucho menos vacío.

- Por lo anterior, es posible considerar $G = \{x_j\}_{j\geq 1}$ como conjunto linealmente independiente, y tenemos que $\overline{[\{x_j\}_{j\geq 1}]} = E$.

- Definimos $G_n := [x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$ para $n \geq 2$. Para cada $n \geq 2$, podemos hallar $y_{n-1} \in G_{n-1}$ tal que

$$t_{n-1}\|x_n - y_{n-1}\| \leq dist(x_n, G_{n-1}).$$

  Para mayor claridad, esta construcción en la demostración del Teorema 3.3.1. Ahora definimos $w_1 = x_1$ y $w_j = x_j - y_{j-1}$ para todo $2 \leq j \leq n$.

- Como $t \in \langle 0, 1\rangle$ por la Proposición 3.3.8 existe $(t_j)_{j\geq 2}$, con $0 < t_j < 1$, tal que $\prod_{j=2}^{\infty} t_j \geq t$. Dado que cada $0 < t_j < 1$, y utilizando el mismo proceso de la demostración del Teorema 3.3.1, obtenemos que, para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, se cumple:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j\right\| \geq \left(\prod_{j=1}^{n-1} t_j\right) \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j w_j\|. \tag{3.20}$$

Notemos que $1 > t_1 > 0$, $1 > t_2 > t_1t_2 > 0$, $1 > t_3 > t_2t_3 > t_1t_2t_3 > 0$, por lo que podemos escribir

$$\prod_{j=1}^{n-1} t_j > \prod_{j=1}^{h} t_j; \quad \text{para todo } h \geq n.$$

Tomando límite (en $\mathbb{R}$), obtenemos:

$$\prod_{j=1}^{n-1} t_j \geq \lim_{h\to\infty} \prod_{j=1}^{h} t_j = t.$$

Así, en (3.20) tenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \right\| \geq t \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j w_j\|.$$

Entonces, por el Teorema 3.2.8, tenemos que $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal.

- Veamos que $\overline{[\{w_j\}_{j\geq 1}]} = E$. En efecto, por el proceso de construcción de G_n, hemos visto también en la demostración del Teorema 3.3.1 que

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [w_1, w_2, \cdots, w_n]; \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Sea $x \in [x_1, x_2, \cdots]$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in [x_1, x_2, \cdots, x_m] = [w_1, w_2, \cdots, w_n] \subset [w_1, w_2, \cdots],$$

por lo que $x \in [w_1, w_2, \cdots]$. De aquí, obtenemos $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \subset [w_1, w_2, \cdots, w_n]$. Siguiendo el mismo razonamiento, también tenemos la otra inclusión, es decir, $[w_1, w_2, \cdots, w_n] \subset [x_1, x_2, \cdots, x_n]$. Así, $[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [w_1, w_2, \cdots, w_n]$, entonces

$$E = \overline{[x_1, x_2, \cdots, x_n]} = \overline{[w_1, w_2, \cdots, w_n]}$$

En resumen, tenemos que $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal y que $[\{w_j\}_{j\geq 1}]$ es denso en E. Por lo tanto, por el Teorema 3.3.2, concluimos que $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es una base $t-$ortogonal. □

Observación 3.3.4. El Teorema 3.3.1 y el Teorema 3.3.5, respectivamente, implican existe una base $t-$ortogonal para cada $t \in \langle 0, 1\rangle$. El caso de bases ortogonales, es decir, $t = 1$, se presenta en el Teorema 3.4.3.

Corolario 3.3.1. Cada espacio de Banach no arquimediano de dimensión infinita y de tipo contable es linealmente homeomorfo a c_0.

Demostración. Por el Teorema 3.3.1, sabemos que E tiene una base $t-$ *ortogonal* para cada $0 < t < 1$. Aplicando el Teorema 3.3.3, E es linealmente homeomorfo a c_0. □

Teorema 3.3.6. Sea E un espacio de Banach de tipo contable. Entonces, cada subespacio cerrado D de E es complementado. De hecho, para cada $\varepsilon > 0$, existe una proyección continua $P : E \to E$ con $P(E) = D$ y $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$.

Demostración. Como D es cerrado, por la Proposición 3.3.7 sabemos que E/D es de tipo contable. Recordemos que

$$\|x + D\| := dist(x, D); \quad \text{para todo } x + D \in E/D,$$

es la norma de E/D. Además, como E es un espacio de Banach, E/D también es un espacio de Banach, por el Teorema 3.1.8.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos $t = (1 + \varepsilon)^{-1/2}$ y notemos que $0 < t < 1$. Entonces, ya sea E/D de dimensión finita o infinita, el Teorema 3.3.1 y el Teorema 3.3.5, respectivamente, implican que existe una base $t-$ortogonal para E/D. Procederemos en el caso infinito, pues el caso finito sigue el mismo procedimiento. Sea $\{w_j + D\}_{j\geq 1}$ una base $t-$ortogonal de E/D. Como $\|w_j + D\| > 0$ por ser base $t-$ortogonal y $t^{-1} - 1 > 0$, entonces para cada $\delta_j = (t^{-1} - 1)\|w_j + D\| > 0$ existe $z_j \in D$ tal que

$$\|w_j - z_j\| < \|x + D\| + \delta_j = t^{-1}\|w_j + D\|.$$

Como $\pi(w_j - z_j) = \pi(w_j) = w_j + D$, podemos escribir que, para cada $w_j + D$, existe $x_j = w_j - z_j \in E$ tal que

$$\pi(x_j) = w_j + D \quad \text{y} \quad \|x_j\| < t^{-1}\|w_j + D\|.$$

Por otro lado, como $\{w_j + D\}_{j\geq 1}$ es una base $t-$ortogona, dado $x + D \in E/D$ se tiene

$$x + D = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (w_j + D); \quad \text{donde } \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Entonces, definimos la aplicación

$$L : E/D \longrightarrow E$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (w_j + D) \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j$$

Así definido L, tenemos:

- L está bien definida: Como $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (w_j + D)$ existe (es sumable) para cada elemento de E, por el Lema 3.1.1, tenemos que $\lambda_j (w_j + D) \to 0 + D$. Entonces $|\lambda_j| \|w_j + D\| \to 0$, y como $|\lambda_j| \cdot \|x_j\| \leq t^{-1} |\lambda_j| \cdot \|w_j + D\|$, tenemos que $|\lambda_j| \cdot \|x_j\| \to 0$, de donde $\lambda_j x_j \to 0$. Como E es un espacio de Banach, por el Teorema 3.1.1, tenemos que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j$ existe (es sumable).
- L es lineal: Sea $x, y \in E/D$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (w_j + D); \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (w_j + D); \quad x + \lambda y = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + \lambda \alpha_j)(w_j + D).$$

  Entonces

$$L(x + \lambda y) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + \lambda \alpha_j) x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j = L(x) + \lambda L(y).$$

- $\pi \circ L$ es la aplicación identidad en E/D: Como $x + D = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (w_j + D)$, entonces

$$\pi\left(L(x+D)\right) = \pi\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j\right).$$

Como π es lineal y continua, puede ingresar dentro de la serie (podemos seguir el procedimiento mostrado en la demostración del Teorema 3.1.8), y además tenemos que $\pi(x_j) = w_j + D$, entonces

$$\pi\left(L(x+D)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi\left(\lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (w_j + D) = x + D.$$

- $\|L\| \leq 1 + \varepsilon$: Como $\|\lambda_j x_j\| \to 0$ y $\|\lambda_j (w_j + D)\| \to 0$, entonces son acotados. Así, existen $\sup_{j\geq 1} \|\lambda_j x_j\|$ y $\sup_{j\geq 1} \|\lambda_j (w_j + D)\|$. Aplicando la Proposición 2.4.2 tenemos

$$\begin{aligned}
\|L(x+D)\| &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n x_j\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_n x_j\right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j x_j\| = \sup_{j\geq 1} \|\lambda_j x_j\| \\
&\leq \sup_{j\geq 1} t^{-1} \|\lambda_j (w_j + D)\| = t^{-1} \sup_{j\geq 1} \|\lambda_j (w_j + D)\|.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|L(x+D)\| \leq t^{-1} \sup_{j\geq 1} \|\lambda_j (w_j + D)\|. \tag{3.21}$$

Como $\{w_j + D\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal, por el Teorema 3.2.8 tenemos que

$$\left\|\sum_{j=}^{n} \lambda_j (w_j + D)\right\| \geq t \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j (w_j + D)\|.$$

Esto implica, aplicando el Teorema 2.4.2, que

$$\left\|\sum_{j=}^{\infty} \lambda_j (w_j + D)\right\| \geq t \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \|\lambda_j (w_j + D)\| = t \sup_{j\geq 1} \|\lambda_j (w_j + D)\|.$$

Entonces en (3.21) junto a $t^{-2} = 1 + \varepsilon$, tenemos

$$\|L(x+D)\| \leq t^{-2} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (w_j + D)\right\| = t^{-2} \|x + D\| = (1+\varepsilon)\|x + D\|. \tag{3.22}$$

Así,

$$\frac{\|L(x+D)\|}{\|x+D\|} \leq 1 + \varepsilon; \quad \text{para todo } x + D \neq 0 + D.$$

Entonces,

$$\|L\| := \sup_{x+D\neq 0+D} \frac{\|L(x+D)\|}{\|x+D\|} \leq 1 + \varepsilon.$$

- $L \in \mathcal{B}(E/D, E)$: Del punto anterior en 3.22 tenemos que

$$\|L(x+D)\| \leq (1+\varepsilon)\|x+D\|; \quad \text{para todo } x+D \in E/D.$$

Sea $I : E \to E$ la aplicación identidad, y definimos $P := I - L \circ \pi$. Así definido, $P : E \to E$ es lineal, ya que $I, L, L \circ \pi$ son lineales y continuas, por lo que P también es continua. Además, como $\pi \circ L : E/D \to E/D$ es la aplicación identidad en E/D, tenemos:

$$\begin{aligned} P \circ P &= P \circ (I - L \circ \pi) = P \circ I - P \circ (L \circ \pi) = P - (P \circ L) \circ \pi \\ &= P - ((I - L \circ \pi) \circ L) \circ \pi = P - (I \circ L - L \circ (\pi \circ L)) \circ \pi \\ &= P - (L - L) \circ \pi = P \circ 0 \circ \pi = P - 0 = P. \end{aligned}$$

Entonces, $P : E \to E$ es una proyección continua.

Ahora ocupemonos de ver que $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$. En efecto, notemos que

$$\|I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|I(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0}\{1\} = 1.$$

Además, $\|L \circ \pi(x)\| = \|L(\pi(x))\| \leq \|L\| \cdot \|\pi(x)\| \leq \|L\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$. Entonces

$$\|L \circ \pi\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|L\pi \circ (x)\|}{\|x\|} \leq \|L\|.$$

En Ejemplo 2.4.1 vimos que $\mathcal{B}(E, E)$ es un espacio normado no arquimediano. Dado que $\|L\| \leq 1 + \varepsilon$, tenemos que

$$\|P\| = \|I - L \circ \pi\| \leq \text{máx}\{\|I\|, \|L \circ \pi\|\} \leq \text{máx}\{1, \|L\|\} \leq 1 + \varepsilon.$$

Así, tenemos que $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$.

Finalmente, veamos que D es complementado. En efecto, recordemos de la Observación 3.1.5 que $x \sim y$ si y solo si $\pi(x) = \pi(y)$. Como $0 \in D$, tenemos que $\pi(x) = 0 + D$ para todo $x \in D$, por lo que

$$Ker(\pi) := \{x \in E \mid \pi(x) = 0 + D\} = D. \tag{3.23}$$

Por otro lado, tenemos que $\pi \circ P = \pi \circ (I - L \circ \pi) = \pi \circ I - (\pi \circ L) \circ \pi$, y vimos que $\pi \circ L$ es un aplicación indentidad. Luego, $\pi \circ P = \pi - \pi = 0$ es la aplicación nula. Entonces, $\pi(P(x)) = 0$ para todo $x \in E$, lo que implica que $P(E) \subset Ker(\pi)$. Supongamos que $Ker(\pi) \not\subset P(E)$. Entonces, existe $x \in Ker(\pi)$ tal que $x \notin P(E)$. Como $\pi(x) = 0 + D$ y L es una aplicación lineal, tenemos que

$$P(x) = (I - L \circ \pi)(x) = I(x) - L(\pi(x)) = x - L(0) = x - 0 = x.$$

Así, $x = P(x) \in P(E)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$P(E) = Ker(\pi) \tag{3.24}$$

De (3.23) y (3.24) se concluye que $P(E) = D$. Luego, por la Proposición 3.2.9, D es complementado. □

Corolario 3.3.2. Del Teorema 3.3.6, dado $\varepsilon > 0$, sea $t = (1+\varepsilon)^{-1/2}$ y sea $P : E \to E$ una proyección continua con $\|P\| \leq 1+\varepsilon$ tal que $E = KerP \oplus ImP$. Entonces

$$\|u+v\| \geq \sqrt{t}\,\text{máx}\{\|u\|, \|v\|\}; \quad \text{para todo } u \in KerP, v \in ImP.$$

Demostración. Sea $u \in KerP$ y $v \in ImP$. Tomemos $x = u+v$. Como $v \in ImP$, por la Observación 3.2.9, se sabe que $P(v) = v$. Así, $P(x) = P(u+v) = P(u)+P(v) = P(v) = v$. Dado que $\|P\| \leq 1+\varepsilon$, entonces $\|v\| = \|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\| \leq (1+\varepsilon)\|u+v\|$. De donde

$$\|v\|\sqrt{t} \leq \|u+v\|.$$

Como $0 < t < 1$, entonces $0 < \sqrt{t} < 1$. Aplicando el Lema 3.2.1, tenemos que

$$\|u\|\sqrt{t} \leq \|u+v\|.$$

Así, concluimos que

$$\|u+v\| \geq \sqrt{t}\,\text{máx}\{\|u\|, \|v\|\}.$$

□

Para concluir esta sección, estudiamos los espacios con bases ortogonales.

Lema 3.3.1. Sea E espacio normado que tiene una base ortogonal. Entonces, cada subespacio unidimensional tiene un complemento ortogonal.

Demostración. Consideremos $\{w_j\}_{j\geq 1}$, una base ortogonal de E. Sea D un subespacio unidimensional; entonces, existe $x \in E$, no nulo, tal que $D = [x]$. Como $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$ por la Proposición 3.3.2 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\| = \|\lambda_m w_m\|$. Definimos D_0 como

$$D_0 := [\{w_n \mid n \neq m\}].$$

Así, dados $z \in D_0$ tenemos $z = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j w_j$ con $\alpha_m = 0$. Por la Proposición 3.2.11, se cumple que

$$\left\| x - \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \alpha_j w_j \right\| = \left\| \lambda_m w_m - \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \alpha_j w_j \right\| = \max_{1\leq j\leq k,\, j\neq m} \{\|\lambda_m w_m\|, \|\alpha_j wj\|\} \geq \|x\|.$$

Entonces, por la Proposición 2.4.2, tenemos

$$\|x - z\| = \lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \right\| \geq \|x\|; \quad \text{para todo } z \in D.$$

Así, $\|x\| \leq dist(x, D)$, por lo que $dist(x, D) = \|x\|$. Entonces, por la Proposición 3.2.3, tenemos que $x \perp D_0$, y por la Proposición 3.2.2, podemos implicar que $\lambda x \perp D_0$. Como $D = [x]$ tenemos que $D \perp D_0$. Por otro lado, cada $y \in E$ se escribe como

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j w_j = \beta_m w_m + \sum_{j=1, j\neq m}^{\infty} \beta_j w_j,$$

y como $D = [x] = [\lambda_m w_m] = [w_m]$, entonces $y \in D + D_0$, por lo que $E = D + D_0$. Concluimos que D_0 es el complemento ortogonal de D.

□

Lema 3.3.2. Sea E un espacio normado tal que cada subespacio unidimensional tiene un complemento ortogonal. Entonces, cada subespacio de dimensión finita tiene un complemento ortogonal.

Demostración. Realizamos la prueba por inducción sobre la dimensión de los subespacios.

- Para subespacios de dimensión $n = 1$, la afirmación es verdadera por hipótesis.
- Hipótesis inductiva: El resultado es válido para subespacios de dimensión n.
- Para $n+1$: Sea D un subespacio tal que $dimD = n+1$, entonces podemos escribir $D = D_1 \oplus [x]$ para algún $x \notin D_1$ y no nulo, tal que $dimD_1 = n$. Por hipótesis inductiva, sabemos que D_1 es ortocomplementado. Entonces, por el Teorema 3.2.5, existe una proyección ortogonal $P : E \to E$ tal que $P(E) = D_1$. Además, como $x \in KerP$, tenemos $P(x) = 0$. Por hipótesis sabemos que $[x]$ es ortocomplementado, entonces por el Teorema 3.2.5 existe una proyección ortogonal $P_1 : E \to E$ tal que $P_1(E) = [x]$. Además, como $D = D_1 \oplus [x]$, se sigue que, $[x] \subset KerP$ por lo que $P \circ P_1 = 0$. Definimos $Q := P + P_1 - P_1 \circ P : E \to E$. Así definido, Q cumple las siguientes propiedades:

  - Q es lineal: Q es la suma y composición de aplicaciones lineales.
  - Q es una proyección: Como $P^2 = P$, $P_1^2 = P_1$ y $P \circ P_1 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} Q \circ Q &= (P + P_1 - P_1 \circ P) \circ (P + P_1 - P_1 \circ P) \\ &= P^2 + PP_1 - (PP_1)P + P_1P + P_1^2 - P_1(P_1P) \\ &\quad - P_1P^2 - P_1(PP_1) + P_1(PP_1)P \\ &= P + P_1 - PP_1 = Q. \end{aligned}$$

  - Q es una proyección ortogonal: Como P y P_1 son proyecciones ortogonales, por la Proposición 3.2.6, se tiene que P y P_1 son continuas, lo que implica que $Q = P + P_1 - P_1 \circ P$ es continua. Además, por la Proposición 2.4.3, sabemos que $P, P_1, P_1 \circ P \in \mathcal{B}(E, E)$, cuya norma es no arquimediana. Dado que $\|P\| = 1$ y $\|P_1\| = 1$, ver Proposición 3.2.4, se cumple que $\|P_1 \circ P\| \leq \|P_1\|\|P\| = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \|Q\| &= \|P + P_1 - P_1 \circ P\| \leq \text{máx}\{\|P + P_1\|, \|P_1 \circ P\|\} \\ &\leq \text{máx}\{\|P\|, \|P_1\|, \|P_1 \circ P\|\} \leq 1. \end{aligned}$$

    Por otro lado, como Q es una proyección continua, por la Proposición 3.2.5 se tiene que que $\|Q\| \geq 1$. Entonces, $\|Q\| = 1$. Luego, por el Teorema 3.2.4, se tiene que Q es una proyección ortogonal.

  - $Q(E) = D$: Sea $y \in D = D_1 \oplus [x]$, entonces $y = y_1 + \lambda x$. Como $P_1(E) = [x]$, se tiene que $D_1 \subset KerP_1$. Además, como $P(x) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} Q(y) &= P(y_1 + \lambda x) + P_1(y_1 + \lambda x) - P_1(P(y_1 + \lambda x)) \\ &= P(y_1) + \lambda P_1(x) - P_1(y_1) = y_1 + \lambda x = y. \end{aligned}$$

    De donde $y = Q(y) \in Q(E)$, luego $D \subset Q(E)$. Por otro lado, supongamos que $Q(E) \not\subset D$, entonces existe $y \in Q(E)$ tal que $y \notin D = D_1 \oplus [x]$. Luego, $y \in KerP$ y $y \in KerP_1$, por lo que $Q(y) = 0$. Como $y \notin D$, entonces $y \neq 0 \in D$, lo cual contradice el hecho de que $y = 0$. Entonces, $Q(E) = D$.

Tenemos $Q : E \to E$ una proyección ortogonal con $Q(E) = D$, entonces por la Proposición 3.2.5, $KerQ$ es el complemento ortogonal de D.

De la prueba por inducción, se concluye el resultado. □

Corolario 3.3.3. Sea E un espacio normado de dimensión finita con una base ortogonal. Entonces, todo subespacio de E tiene una base ortogonal y es ortocomplementado.

Demostración. Por el Lema 3.3.1, cada subespacio unidimensional de E tiene un complemento ortogonal. Como E es finito dimensional, todos sus subespacios también son de dimensión finita, por lo que, por el Lema 3.3.2, cada subespacio de E es ortocomplementado.

Ahora, resta verificar la existencia de una base ortogonal para cada subespacio de E. En efecto, sea $\{w_j\}_{1\leq j\leq n}$ una base ortogonal de E y sea D un subespacio de E. Como D es ortocomplementado, por la Proposición 3.2.7, existe una proyección ortogonal $P : E \to E$ tal que $E = KerP + P(E)$, $P(E) \perp KerP$ y $P(E) = D$. Consideremos $J = \{P(w_j) \in D \mid P(w_j) \neq 0\}$. Este conjunto es no vacío, pues si lo fuera, tendríamos $KerP = E$, lo cual no es cierto. Si $P(w_j) \in J$, entonces $w_j \in D$; de lo contrario, $P(w_j) = 0$, por lo que $P(w_j) \notin J$. Sea $x \in D = P(E)$, por la Observación 3.2.9, $P(x) = x$. En particular, para todo $P(w_j) \in J$, tenemos $w_j = P(w_j)$. Así, el conjunto $J = \{w_j \mid w_j \in D\}$. Entonces, por la Proposición 3.2.10, tenemos que J es un sistema ortogonal, pues es un subconjunto de un sistema ortogonal (la base ortogonal del espacio). Dado $x \in D$, tenemos $x \in E$ se escribe $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j$. Entonces:

$$x = P(x) = P\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(w_j) = \sum_{P(w_j)\in J} \lambda_j P(w_j) = \sum_{w_j \in J} \lambda_j w_j.$$

Concluimos que J es una base ortogonal de D. □

La discusión sobre si un espacio normado infinito dimensional con base ortogonal tiene la propiedad de que sus subespacios también tengan una base ortogonal se retoma en el Teorema 3.4.2.

3.4. Compleción, completitud esférica y bases de espacios de Banach no arquimedianos

Cuando se trabaja en un espacio normado E que no es completo, surge un problema fundamental: no todas las sucesiones de Cauchy convergen dentro del espacio. Esta carencia limita el alcance de los resultados ya obtenidos, ya que los resultados importantes requieren la completitud del espacio. Para superar esta limitación, se recurre a la compleción del espacio E, denotada por $E^\wedge$. La compleción, $E^\wedge$, es un espacio de Banach (completo) que contiene a E como un «subespacio». Esto garantiza que cualquier estructura y propiedad que E tenga se preserve en $E^\wedge$, permitiéndo seguir trabajando con los elementos de E dentro de un entorno completo y matemáticamente «robusto». De esta manera, $E^\wedge$ no solo extiende E, sino que también asegura que cualquier sucesión de Cauchy en E converge dentro de $E^\wedge$, resolviendo así el problema inicial de incompletitud.

Teorema 3.4.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado que no es completo. Entonces, existe un espacio normado $(E^\wedge, \|\cdot\|^\wedge)$ tal que:

1. Existe un embebimiento isométrico $\iota : E \to E^\wedge$.
2. $\iota(E)$ es denso en $E^\wedge$.
3. $E^\wedge$ es completo.

Demostración. Definimos los conjuntos:

$$A := \{(x_j)_{j\geq 1} \subset E \mid (x_j)_{j\geq 1} \text{ es una sucesión de Cauchy}\}$$
$$A_0 := \{(x_j)_{j\geq 1} \subset E \mid x_n \to 0\}$$

Así definido, tenemos que $A_0 \neq \emptyset$ y $A_0 \subsetneq A$.

Definimos una relación en A como sigue:

$$(x_j)_{j\geq 1} \sim (y_j)_{j\geq 1} \quad \text{si y solo si } \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Así definido "$\sim$", tenemos:

- Reflexiva: Dado $(x_j)_{j\geq 1} \in A$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_n\| = 0$. Entonces tenemos que $(x_j)_{j\geq 1} \sim (x_j)_{j\geq 1}$.
- Simétrica: Dados $(x_j)_{j\geq 1}$ y $(y_j)_{j\geq 1} \in A$. Si $(x_j)_{j\geq 1} \sim (y_j)_{j\geq 1}$, entonces tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0 = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\|$. Luego, $(y_j)_{j\geq 1} \sim (x_j)_{j\geq 1}$.
- Transitiva: Dados $(x_j)_{j\geq 1}$, $(y_j)_{j\geq 1}$ y $(zj)_{j\geq 1} \in A$. Si $(x_j)_{j\geq 1} \sim (y_j)_{j\geq 1}$ y también $(y_j)_{j\geq 1} \sim (z_j)_{j\geq 1}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - z_n\| = 0$, y como $\|x_n - z_n\| \leq \max\{\|x_n - y_n\|, \|y_n - z_n\|\}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$. De donde, $(x_j)_{j\geq 1} \sim (z_j)_{j\geq 1}$.

Entonces, la relación de equivalencia "$\sim$" induce una partición cuyas clases de equivalencia son $(x_j)_{j\geq 1} + A_0$. Denotemos con $E^\wedge$ el conjunto de todas las clases de equivalencia:

$$E^\wedge := \{(x_j)_{j\geq 1} + A_0 \mid (x_j)_{j\geq 1} \in A\}.$$

Al definir en $E^\wedge$ las siguientes operaciones:

$$((x_j)_{j\geq 1} + A_0) + ((y_j)_{j\geq 1} + A_0) := (x_j + y_j)_{j\geq 1} + A_0.$$
$$\lambda\,((x_j)_{j\geq 1} + A_0) := (\lambda x_j)_{j\geq 1} + A_0; \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

El conjunto $E^\wedge$ adquiere una estructura de espacio vectorial.

En $E^\wedge$ definimos $\|\cdot\|^\wedge : E^\wedge \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mediante:

$$\|(x_j)_{j\geq 1} + A_0\|^\wedge := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Así definido, tenemos que:

- Existencia del límite: Sea $(x_j)_{j\geq 1} \in A$. Entonces, por la Proposición 2.4.1, tenemos que $|\,\|x_n\| - \|x_m\|\,|_{\mathbb{R}} \leq \|x_n - x_m\|$, de donde podemos deducir que $\{\|x_j\|\}_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\cdot|_{\mathbb{R}})$, espacio completo. Entonces, existe $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|$.

- Buena definición: Si $(x_j)_{j\geq 1} \sim (y_j)_{j\geq 1}$, entonces $(x_j)_{j\geq 1} + A_0 = (y_j)_{j\geq 1} + A_0$, de donde se deduce $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|$.

- $\|(x_j)_{j\geq 1}+A_0\|^\wedge := \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \geq 0$. Si $\|(x_j)_{j\geq 1}+A_0\| = 0$, entonces, por definición, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, luego $x_n \to 0$. Esto significa que $\{x_j\}_{j\geq 1} \in A_0$, y por lo tanto $(x_j)_{j\geq 1} + A_0 = 0 \in E^\wedge$. Por otro lado, si $(x_j)_{j\geq 1} + A_0 = 0 \in E^\wedge$, entonces $(x_j)_{j\geq 1} \sim \{0\}_{j\geq 1}$. Luego, $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|0\| = 0$. Así, $\|(x_j)_{j\geq 1} + A_0\| = 0$.

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|\lambda\left((x_j)_{j\geq 1} + A_0\right)\|^\wedge = \|(\lambda x_j)_{j\geq 1} + A_0\|^\wedge &:= \lim_{n\to\infty} \|\lambda x_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty} |\lambda| \cdot \|x_n\| = |\lambda| \cdot \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \\ &= |\lambda| \cdot \|(x_j)_{j\geq 1} + A_0\|^\wedge.\end{aligned}$$

- Como $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ para todo $x, y \in E$, tenemos:

$$\begin{aligned}\|\left((x_j)_{j\geq 1} + A_0\right) + \left((x_j)_{j\geq 1} + A_0\right)\|^\wedge = \|(x_j + y_j)_{j\geq 1} + A_0\|^\wedge &= \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \\ &\leq \max\{\lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \lim_{n\to\infty} \|y_n\|\} \\ &= \max\left\{\|(x_j)_{j\geq 1} + A_0\|^\wedge, \|(y_j)_{j\geq 1} + A_0\|^\wedge\right\}\end{aligned}$$

Esto muestra que $\|\cdot\|^\wedge$ es una norma no arquimediana.

Definimos ahora $\iota : E \to E^\wedge$ por $\iota(x) := (x)_{j\geq 1} + A_0$. Con esta definición de $\iota(\cdot)$, tenemos

- Buena definición: Dado $x \in E$, entonces $(x)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces $(x)_{j\geq 1} \in A$, lo que implica que $(x)_{j\geq 1} + A_0 \in E^\wedge$.

- ι es lineal: Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}\iota(x + \lambda y) &= \iota\left((x + \lambda y)_{j\geq 1}\right) = (x + \lambda y)_{j\geq 1} + A_0 \\ &= \left((x)_{j\geq 1} + A_0\right) + \lambda\left((y)_{j\geq 1} + A_0\right) \\ &= \iota(x) + \lambda \cdot \iota(y).\end{aligned}$$

- Dado $x \in E$, entonces

$$\|\iota(x)\|^\wedge = \|(x)_{j\geq 1}\|^\wedge := \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|. \tag{3.25}$$

Así, $\iota(\cdot)$ es una aplicación lineal e isométrica, es decir, $\iota : E \to E^\wedge$ es un embebimiento isométrico.

Ahora veamos que $\iota(E)$ es denso en $E^\wedge$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $(x_j)_{j\geq 1} + A_0 \in E^\wedge$. Entonces $(x_j)_{j\geq 1} \in A$, es decir, es una sucesión de Cauchy. Para $\varepsilon/2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si

$n > N$, entonces $\|x_n - x_{N+1}\| < \varepsilon/2$. De aquí, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{N+1}\| \leq \varepsilon/2$. Consideremos $x_{N+1} \in E$. Así,

$$\|(x_j)_{j\geq 1} + A_0 - \iota(x_{N+1})\|^\wedge = \|(x_n - x_{N+1}) + A_0\|^\wedge := \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{N+1}\| < \varepsilon.$$

Esto implica que $x_{N+1} \in B\left((x_j)_{j\geq 1} + A_0, \varepsilon\right) \cap \iota(E)$. Se deduce que $\iota(E)$ es denso en $E^\wedge$.

Finalmente, veamos que $E^\wedge$ es completo. Sea $(x^m)_{m\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $E^\wedge$, donde $x^m = (x_j^m)_{j\geq 1} + A_0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > \tilde{N}$, entonces:

$$\|x^m - x^n\|^\wedge < \varepsilon.$$

Esto implica que:

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k^m - x_k^n\| < \varepsilon; \quad \text{para todo } m, n > \tilde{N}. \tag{3.26}$$

Fijado n_0 tal que $n_0 > \tilde{N}$, definimos $y = (y_j)_{j\geq 1} \in E$ donde $y_j := x_j^{n_0}$. Como $(x^m)_{m\geq 1}$ es de Cauchy, podemos ver que $(y_j)_{j\geq 1}$ es de Cauchy. Así, $y \in A$. luego $y + A_0 \in E^\wedge$. Por (3.26), se tiene:

$$\|x^m - (y + A_0)\|^\wedge = \|(x_k^m - y_k) + A_0\|^\wedge = \lim_{k\to\infty} \|x_k^m - y_k\| < \varepsilon; \quad \text{para } m > \tilde{N}.$$

Esto implica que $x^m \to y + A_0 \in E^\wedge$. Concluimos que $E^\wedge$ es completo. □

Lema 3.4.1. Sean E y F dos espacios de Banach, y $f : D_E \to D_F$ un isomorfismo isométrico entre los subconjuntos D_E y D_F de E y F respectivamente. Si D_E es denso en E y D_F es denso en F, entonces, f se extiende de manera única a un isomorfismo $h : E \to F$, es decir, $h|_{D_E} = f$.

Demostración. Sea $x \in E$. Como D_E es denso en E, existe $(x_j)_{j\geq 1}$ en D_E tal que $x_n \to x$. Definimos $h : E \to F$ por $h(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Así definido h, tenemos:

- El límite existe: Como f es una isometría lineal y $(x_j)_{\geq 1}$ es de Cauchy (por ser convergente), entonces $(f(x_j))_{j\geq 1}$ es de Cauchy en F, que es un espacio completo. Esto implica que, existe $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ y está en F.

- Buena definición: Sean $(x_j)_{j\geq 1}$ y $(y_j)_{j\geq 1}$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to x$. Entonces, $\|x_n - y_n\| \to 0$. Como f es una isometría lineal, se tiene que

  $$\lim_{n\to\infty} \|f(x_n) - f(y_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|f(x_n - y_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

  Esto implica que $\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$. Así, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, lo que asegura que la definición de $h(x)$ no depende de la sucesión elegida en D_E que converge a x.

- h es lineal: Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Dados $x, y \in E$, existen $(x_j)_{j\geq 1}$ y $(y_j)_{j\geq 1}$ en D_E tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Entonces, $x_n + \lambda y_n \to x + \lambda y$. Como f es lineal, se tiene que

  $$\begin{aligned} h(x + \lambda y) &:= \lim_{n\to\infty} f(x_n + \lambda y_n) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + \lambda f(y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lambda \lim_{n\to\infty} f(y_n) = h(x) + \lambda h(y). \end{aligned}$$

- h inyectiva: Como f es una isometría, tenemos que

$$\begin{aligned} Ker(h) &:= \{x \in E \mid h(x) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \exists (x_j)_{j\geq 1} \subset A/x_n \to x \text{ y } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \exists (x_j)_{j\geq 1} \subset A/x_n \to x \text{ y } \lim_{n\to\infty} \|f(x_n)\| = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \exists (x_j)_{j\geq 1} \subset A/x_n \to x \text{ y } \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \exists (x_j)_{j\geq 1} \subset A/x_n \to x \text{ y } x_n \to 0\} \\ &= \{x \in E \mid x = 0\} = \{0\}. \end{aligned}$$

  Así, $Ker(h) = \{0\}$, lo que demuestra que h es inyectiva.

- h es sobreyectiva: Sea $y \in F$. Como D_F es denso en F, existe $(y_j)_{æ\geq 1}$ en D_F tal que $y_n \to y$. Consideremos $(f^{-1}(y_j))_{j\geq 1}$ en D_E. Dado $f : D_E \to D_F$ es un isomorfismo isométrico, la sucesión $(f^{-1}(y_j))_{j\geq 1}$ es de Cauchy en E, ya que $(y_j)_{j\geq 1}$ es de Cauchy. Como E es completo, entonces existe $x = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) \in E$. Así, tenemos:

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(f^{-1}(y_n)\right) = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

  Esto muestra que h es sobreyectiva.

- h es isométrico: Sea $x \in E$. Consideremos $(x_j)_{j\geq 1}$ en D_E tal que $x_n \to x$. Como f es una isometría, por la Proposición 2.4.2, tenemos que: $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Así,

$$\|h(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} f(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|f(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$$

- $h|_{D_E} = f$: Dado $x \in D_E$, consideremos $(x)_{j\geq 1}$ en D_E tal que $x_n \to x$. Entonces,

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x).$$

  Esto muestra que h coincide con f en D_E.

Entonces, dada la linealidad, la isometría y la biyectividad h tenemos, y aplicando la Proposición 2.4.3, concluimos que $h : E \to F$ es un isomorfismo isométrico. Además, hemos demostrado que $h|_{D_E} = f$.

Finalmente, demostramos que h es único. Sean h y h_1 dos extensiones de h que son isometrías isométricas de E en F. Entonces, tenemos

$$h(x) = f(x) = h_1(x); \quad \text{para todo } x \in D_E.$$

Ahora, consideremos $x \in E$ y $(x_j)_{j\geq 1}$ en D_E tal que $x_n \to x$. Como h y h_1 son continuas, por la Proposición 2.2.5, se cumple que

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} h_1(x_n) = h_1(x); \quad \text{para todo } x \in E.$$

□

Proposición 3.4.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado que no es completo. Si $(E^\wedge, \|\cdot\|^\wedge)$ y $(E^\triangle, \|\cdot\|^\triangle)$ son compleciones de $(E, \|\cdot\|)$, entonces $E^\wedge$ y $E^\triangle$ son isométricamente isomorfos.

Demostración. Por el Teorema 3.4.1, existen $\iota : E \to E^{\wedge}$ y $\varsigma : E \to E^{\triangle}$ dos embebimientos isométricos. Definimos $T : \iota(E) \to \varsigma(E)$ por $T(\iota(x)) := \varsigma(x)$ para todo $x \in E$. Así definido T, tenemos:

- T es lineal: Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Como ι y ς son lineales, se cumple que

$$T(\iota(x) + \lambda\iota(y)) = T(\iota(x + \lambda y)) = \varsigma(x + \lambda y) = \varsigma(x) + \lambda\varsigma(y) = T(\iota(x)) + \lambda T(\iota(y)).$$

- T es inyectiva: Como ς es lineal, $Ker\varsigma = \{0\}$. Dado que ι también es lineal, se tiene

$$\begin{aligned} KerT &:= \{\iota(x) \mid T(\iota(x) = 0)\} = \{\iota(x) \mid \varsigma(x) = 0\} \\ &= \{\iota(x) \mid x \in Ker\varsigma\} = \{\iota(x) \mid x = 0\} = \{0\}. \end{aligned}$$

  Así, $KerT = \{0\}$, lo que implica que T es inyectiva.

- T es sobreyectiva: Dado $\varsigma(x) \in \varsigma(E)$, existe $\iota(x) \in \iota(E)$. Por definición, tenemos $T(\iota(x)) = \varsigma(x)$, lo cual demuestra la sobreyectividad.

- Como $\|\iota(x)\|^* = \|x\|$ y $\|\varsigma(x)\|\triangle* = \|x\|$, se cumple

$$\|T(\iota(x))\|^{\triangle} = \|\varsigma(x)\|^{\triangle} = \|x\| = \|\iota\|^{\wedge}.$$

De la linealidad, la isometría y la biyectividad de T, y aplicando la Proposición 2.4.3, $T : \iota(E) \to \varsigma(E)$ es un isomorfismo isométrico.

Ahora extendamos $T : E^{\wedge} \to E^{\triangle}$. Por la proposición 3.4.1, podemos extender T a $E \to F$ de manera única, tal que restringido $\iota(E)$ obtenemos T. □

Del Teorema 3.4.1 y la Proposición 3.4.1, obtenemos la Definición 3.4.1.

Definición 3.4.1. Decimos que un espacio normado $(E^{\wedge}, \|\cdot\|^{\wedge})$ es la *compleción* o completación del espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ si cumple las siguientes condiciones:

1. Existe un embebimiento isométrico $\iota : E \to E^{\wedge}$.
2. $\iota(E)$ es denso en $E^{\wedge}$.
3. $E^{\wedge}$ es completo.

Observación 3.4.1. La Definición 3.4.2, que es una definición más práctica y a cual llamamos *Definición simplificada* aprovecha que E se identifica con su imagen $\iota(E)$ en $E^{\wedge}$ bajo el embebimiento isométrico. Al considerar E como un subespacio denso de $E^{\wedge}$, se evita la necesidad de mencionar explícitamente la aplicación ι y a la completitud de $E^{\wedge}$, ya que ambas propiedades se implican directamente al definir $E^{\wedge}$ como un espacio de Banach. Además, la norma en el espacio completado $E^{\wedge}$ extiende la norma del espacio inicial E, como se aprecia en (3.25), donde $\|\iota(x)\|^{\wedge} = \|x\|$ para todo $x \in E$.

Definición 3.4.2 (Definición simplificada)**.** Decimos que un espacio de Banach $(E^{\wedge}, \|\cdot\|^{\wedge})$ es la *compleción* o completación del espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ si cumple las siguientes condiciones:

1. E es subespacio de $E^{\wedge}$.

2. $\|x\|^\wedge = \|x\|$, para todo $x \in E$.

3. E es denso en $E^\wedge$.

Ejemplo 3.4.1. Del Ejemplo 2.3.1 sabemos que $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ no es un campo completo. La compleción de este campo (visto como espacio normado) que se denota como $\mathbb{Q}_p$ y a la extensión de la norma $p-$ádica de $\mathbb{Q}$ también la denotamos como $|\cdot|_p$ y llamamos norma $p-$ádica. Así, $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$, conocido como el *campo de los números* $p-$ádicos, es un campo completo. Esta ssituación la presentamos en el Ejemplo 2.3.2.

■

Proposición 3.4.2. Sea E un espacio normado que no es completo. Si E es de tipo contable, entonces $E^\wedge$ es de tipo contable.

Demostración. Por definición, E es denso en $E^\wedge$. Dado que E es de tipo contable, aplicamos la Proposición 3.3.4 para concluir que $E^\wedge$ es de tipo contable. □

Proposición 3.4.3. Si un espacio normado es de tipo contable, entonces todo subespacio de dicho espacio también es de tipo contable.

Demostración. Sea D un subespacio de E. Como E es de tipo contable, por la Proposición 3.4.2, $E^\wedge$ es de tipo contable. Además, por definición, $E^\wedge$ es un espacio de Banach. Como $D \subset E^\wedge$, para $\overline{D}$, subespacio de $E^\wedge$, por el Teorema 3.3.6 existe proyección ortogonal $P : E^\wedge \to E^\wedge$ tal que $P(E^\wedge) = \overline{D}$. Como $E^\wedge$ es de tipo contable, existe G, un subconjunto contable de $E^\wedge$, tal que $\overline{[G]} = E^\wedge$. Veamos que $P(E^\wedge)$ es de tipo contable. En efecto, $P(G)$ es contable desde que G es contable. Como P es lineal, tenemos: $x \in P([G])$, si y solo si, $x = P\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j\right)$, donde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $x_j \in G$ para $1 \leq j \leq m$. Si y solo si, $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j P(x_j) \in [P(G)]$. Entonces, $P([G]) = [P(G)]$. Como P es continua, Proposición 3.2.6, dado que $[G]$ es denso en $E^\wedge$ tenemos que $P([G])$ es denso en $P(E^\wedge)$. Entonces $P(E^\wedge)$ es de tipo contable. Así, $\overline{D}$ es de tipo contable. Por otro lado, como D es un subespacio de $\overline{D}$ y es claro que D es denso en $\overline{D}$, entonces, por la Proposición 3.3.4 tenemos que D es de tipo contable. □

Teorema 3.4.2. Sea E un espacio normado de dimensión infinita con una base ortogonal. Entonces, todo subespacio de E tiene una base ortogonal.

Demostración. Como E tiene una base ortogonal, por la Proposición 3.3.4, E es de tipo contable. Sea D un subespacio de dimensión infinita de E. Entonces, aplicando la Proposición 3.4.3, D es de tipo contable.

Supongamos que D es de dimensión infinita. Como D es de tipo contable, existe G, un subconjunto contable y denso en D. Siguiendo el mismo argumento del Teorema 3.3.5, podemos suponer que $G = \{x_j\}_{j\geq 1}$ es linealmente independiente y que $\overline{[\{x_j\}_{j\geq 1}]} = D$. Definimos $D_n := [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ para $n \geq 1$. Tenemos que $dim D_n < \infty$ para todo $n \geq 1$. Entonces, por el Corolario 3.3.3, D_{n-1} es ortocomplementado en D_n para todo $n \geq 2$. Así, para cada $n \geq 2$, existe $d_n \neq 0$ tal que $d_n \perp D_{n-1}$. Para cada $j \in \{1, \cdots, n-1\}$, se cumple que $d_{j+1} \perp [d_1, \cdots, d_j]$. Entonces, por la Proposición 3.2.11, D_n es un sistema ortogonal, y como n es arbitrario, podemos deducir que $[\{d_j\}_{j\geq 1}]$ es ortogonal. Por otro lado, podemos ver que $D_n = [d_1, \cdot, d_n]$, por lo tanto, $[\{x_j\}_{j\geq 1}] = [\{d_j\}_{j\geq 1}]$, lo que implica que $[\{d_j\}_{j\geq 1}]$ es denso en D. Así, tenemos que $\{d_j\}_{j\geq 1}$ un sistema ortogonal tal que $[\{d_j\}_{j\geq 1}]$ es denso en

D. Entonces, por la Proposición 3.3.2, concluimos que $\{d_j\}_{j\geq 1}$ es una base ortogonal de D.

Si D es de dimensión finito, consideramos su base algebraica para definir los subespacios D_n con $n \leq dimD$. El proceso realizado anteriormente se trunca después de un numero finito de pasos; pero nos permite concluir lo mismo, es decir, D tiene una base ortogonal. □

Definición 3.4.3. Decimos que un espacio normado E es *esféricamente completo* si, con la métrica inducida por su norma, E es un espacio ultramétrico esféricamente completo, según la Definición 2.2.9.

Proposición 3.4.4. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas equivalentes. Si $(E, \|\cdot\|_1)$ es esféricamente completo, entonces $(E, \|\cdot\|_2)$ es esféricamente completo.

Demostración. Existe Γ, constantes positiva, tal que

$$\|x\|_2 \leq \Gamma\|x\|_1; \quad \text{para todo } x \in E.$$

Sea $B_1^2 \supset B_2^2 \supset \cdots B_n^2 \supset \cdots$ una cadena de bolas definidas con la norma $\|\cdot\|_2$, cuyos radios son r_n para cada $n \geq 1$. Definimos B_n^1 una bola con la norma $\|\cdot\|_1$ de radio $r_n\Gamma$, de modo que $B_n^1 \subset B_n^2$ para todo $n \geq 1$. Así, $B_1^1 \supset B_2^1 \supset \cdots B_n^1 \supset \cdots$ es una cadena decreciente de bolas en $(E, \|\cdot\|_1)$. Como $(E, \|\cdot\|_1)$ es esféricamente completo, se tiene que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^1 \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^2.$$

Concluimos que $(E, \|\cdot\|_2)$ es esféricamente completo. □

Proposición 3.4.5. Si E y F son espacios normados esféricamente completos, entonces $E \times F$ también es un espacio esféricamente completo.

La norma no arquimediana, ver Proposición 2.4.6, en $E \times F$ se define como

$$\|(x, y)\| := \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Demostración. Sea B una bola en $E \times F$. Notemos que B se puede escribir como

$$B = B_E \times B_F; \quad \text{donde } B_E \text{ y } B_F \text{ son bolas en } E \text{ y } F \text{ respectivamente.}$$

Sea $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ una cadena decreciente de bolas en $E \times F$. Entonces, $B_n = B_E^n \times B_F^n$, donde B_E^n y B_F^n son bolas en E y F, respectivamente. Por lo tanto, tenemos las siguientes cadenas decrecientes:

$$B_E^1 \supset B_E^2 \supset \cdots \supset B_E^n \supset \cdots \quad \text{cadena decreciente de bolas en } E,$$

$$B_F^1 \supset B_F^2 \supset \cdots \supset B_F^n \supset \cdots \quad \text{cadena decreciente de bolas en } F.$$

Como E y F son esféricamente completos, se sigue que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_E^n \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_F^n \neq \emptyset.$$

Entonces,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset.$$

Concluimos que $E \times F$ es esféricamente completo. □

Lema 3.4.2. Si $\mathbb{K}$ es esféricamente completo. Sea D un espacio normado de dimensión finita. Entonces:

1. D es esféricamente completo
2. Para cada subespacio propio H, existe un elemento no nulo $y \in D$ tal que $y \perp H$.

Demostración. Sea $dimD = n$. La prueba se realiza por inducción.

- Para $n = 1$: Sea w una base algebraica de D. Entonces, $D = \mathbb{K}w$. Como $\mathbb{K}$ es esféricamente completo, $\mathbb{K}w$ es esféricamente completo. El único subespacio propio de D es $H = \{0\}$. Por la Proposición 3.2.2, se tiene que $w \perp 0$. Por lo que, tomando $y = w$ se tiene $y \perp H$.
- Hipótesis inductiva: Suponemos que las conclusiones son válidas para n.
- Para $n+1$: Sin pérdida de generalidad, suponemos que $dimH = n$ (de lo contrario completamos la base algebraica del subespacio de D). Entonces, por hipótesis inductiva, H es esféricamente completo. Sea $x \in D \setminus H$, luego, por el Teorema 2.2.1, existe $x_1 \in H$ tal que $dist(x, H) = \|x - x_1\|$. Definimos $y = x - x_1 \in D$, entonces:

$$dist(y, H) := \inf_{z \in H} \|y - z\| = \inf_{z \in D} \|x - x_1 - z\| = \|x - x_1\| = \|y\|.$$

  Así, por la Proposición 3.2.3, obtenemos que $y \perp H$. Ahora, verifiquemos que D es esféricamente completo. En efecto, como $\mathbb{K}y$ y F son esféricamente completos, por la Proposición 3.4.5, el espacio $\mathbb{K}_y \times H$, con la norma $\|(x, z)\| := \text{máx}\{\|x\|, \|z\|\}$, es esféricamente completo. Al tomar en D la norma del máximo de $\mathbb{K}y \times F$, deducimos que D es esféricamente completo. Como $dimD < \infty$, sabemos por la Proposición 3.1.2 que la norma de D es equivalente a la norma del máximo, y por la Proposición 3.4.4, D es esféricamente completo.

De la prueba por inducción, concluimos el resultado. □

Teorema 3.4.3. Si $\mathbb{K}$ es esféricamente completo, entonces cada espacio normado de tipo contable tiene una base ortogonal (1−ortogonal).

Demostración. Sea E un espacio de tipo contable infinito dimensional (para el caso finito, ver la Observación 3.4.2). Como E es de tipo contable, para $0 < t < 1$ fijo, pero arbitrario, existe $\{w_j\}_{j \geq 1}$ una base $t-$ortogonal (según el Teorema 3.3.5). Además, por la observación 3.2.13, sabemos que $\{w_j\}_{j \geq 1}$ es linealmente independiente. Definimos $D_n = [w_1, \cdots, w_n]$, con $n \geq 1$. Así, D_n es un subespacio de E tal que $dimD_n = n$, y también se cumple que $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots$. Además,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = [w_1, \cdots, w_n; \cdots].$$

Notemos que, como $\{w_j\}_{j \geq 1}$ es una base $t-$ortogonal, es denso en E, esto significa que $\overline{\{w_j\}_{j \geq 1}} = E$, de donde $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es denso en E.

Por el Lema 3.4.2, tenemos lo siguiente: como $D_1 \subset D_2$, existe $x_2 \in D_2$ tal que $x_2 \perp D_1$. Como $D_2 \subset D_3$, existe $x_3 \in D_3$ tal que $x_3 \perp D_2$. Continuando de esta manera, para

$D_{n-1} \subset D_n$, existe $x_n \in D_n$ tal que $x_n \perp D_{n-1}$.

Dado que $D_1 = [w_1]$, al tomar $x_1 = w_1$, obtenemos que para cada $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ se cumple $x_{j+1} \perp [x_1, \cdots x_j]$. Entonces, por la Proposición 3.2.11, tenemos que $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es un sistema ortogonal.

Notemos que $D_n = [x_1, \cdots, x_n]$ para todo $n \geq 1$, por lo que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = [x_1, \cdots, x_n; \cdots].$$

De lo anterior, se sigue que $[\{x_j\}_{j\geq 1}]$ es denso en E. Aplicando el Teorema 3.3.2, concluimos que $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es una base ortogonal. □

Observación 3.4.2. En el caso de que E sea de dimensión finita, basta con tomar su base algebraica para definir los subespacios D_n. Además, no es necesario asumir que E es de tipo contable como hipótesis, ya que, por la Proposición 3.3.5, sabemos que los espacio de dimensión finita son de tipo contable.

Si $\mathbb{K}$ no es esféricamente completo, no podemos garantizar la existencia de una base $1-$ortgonoal. La Proposición 3.4.6 evidencia este hecho.

Proposición 3.4.6. Si $\mathbb{K}$ no es esféricamente completo, entonces existe una norma fuertemente sólida en $\mathbb{K}^2$ tal que $\mathbb{K}^2$ no admite una base $1-$ortogonal con esta norma.

Demostración. Como $\mathbb{K}$ no es esféricamente completo, existe una cadena decreciente de bolas en $\mathbb{K}$ con intersección vacia. Sea $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ una cadena decreciente de bolas en $\mathbb{K}$ con intersección vacia. Para cada $n \neq 1$, tomamos $b_n \in B_n$. Definimos

$$\nu(u, v) := \lim_{n\to\infty} |u - v \cdot b_n|.$$

Así definito ν, tenemos:

- ν está bien definido: Debemos garantizar que el límite existe. En efecto, si $v = 0$, el resultado es inmediato. Si $v \neq 0$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq m$ se cumple que $u \cdot v^{-1} \notin B_n$. De lo contrario, $u \cdot v^{-1}$ pertenece a la intersección de todas las bolas, la cual es vacía. Aplicando la Proposición 2.2.7, tenemos que $|u \cdot v^{-1} - b_n| = |u \cdot v^{-1} - b_m|$ para todo $n \geq m$, ya que $b_m \in B_n$ para todo $n \geq m$. Por lo tanto, $|u - v \cdot b_n| = |u - v \cdot b_m|$ para todo $n \geq m$, lo que implica que el límite existe. Además, $\nu(u, v) = |u - v \cdot b_m|$ para todo $n \geq m$

- $\nu(E) \subset |\mathbb{K}|$: Esto se verifica ya que $u - v \cdot b_m \in \mathbb{K}$ y $\nu(u, v) = |u - v \cdot b_m|$, a partir de un índice, como vimos en el punto anterior.

- Como $|a| \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{K}$, entonces $\nu(u, v) \geq 0$. Si $(u, v) = 0$, entonces $\nu(u, v) = \lim_{n\to\infty} |0 - 0 \cdot b_n| = 0$. Por otro lado, si $\nu(u, v) = 0$, supongamos que $u \neq 0$ o $v \neq 0$. Tenemos:

  - Si $u \neq 0$ y $v = 0$: Por definición, $\nu(u, v) = |u| > 0$, lo cual contradice el hecho de que $\nu(u, v) = 0$.

- Si $v \neq$ y $u = 0$: Por definición, $\nu(u, v) = |v| \cdot \lim_{n\to\infty} |b_n|$, entonces, como $|v| > 0$, tenemos que $|b_n| \to 0$. Luego, $b_n \to 0$, y como cada b_n es centro de bola B_n, podemos ver que $0 \in B_n$ en un principio a partir de un índice. Como es una cadena decreciente $0 \in B_n$ para todo $n \geq 1$. Así, $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo que $b_n \not\to 0$, lo cual es una contradicción.
- Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$: Por definición, $\nu(u, v) = \lim_{n\to} |u - v \cdot b_n| = 0$. Entonces, $u - v \cdot b_n \to 0$. Como $v \neq 0$, tenemos que $b_n \to u \cdot v^{-1}$. Como cada b_n es centro de bola B_n, podemos ver que $u \cdot v^{-1} \in B_n$ en un principio a partir de un índice. Como es una cadena decreciente, $u \cdot v^{-1} \in B_n$ para todo $n \geq 1$. Así, $u \cdot v^{-1} \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo que $b_n \not\to u \cdot v^{-1}$, lo cual es una contradicción.

Cada caso que surge al suponer que $u \neq 0$ o $v \neq 0$ nos lleva a una contradicción, por lo que necesariamente $u = 0$ y $v = 0$. Así, $(u, v) = 0 \in \mathbb{K}^2$.

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$\nu(\lambda(u, v)) = \nu(\lambda u, \lambda v) := \lim_{n\to\infty} |\lambda \cdot u - \lambda \cdot v \cdot b_n| = |\lambda| \lim_{n\to\infty} |u - v \cdot b_n| = |\lambda| \cdot \nu(u, v).$$

- Como $|\alpha + \beta| \leq \text{máx}\{|\alpha|, |\beta|\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\nu((u_1, v_1) + (u_2, v_2)) = \nu(u_1 + u_2, v_1 + v_2) &:= \lim_{n\to\infty} |(u_1 + u_2) - (v_1 + v_2) \cdot b_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} |(u_1 - v_1 \cdot b_n) + (u_2 - v_2 \cdot b_n)| \\
&\leq \text{máx}\left\{ \lim_{n\to\infty} |u_1 - v_1 \cdot b_n|, \lim_{n\to\infty} |u_2 - v_2 \cdot b_n| \right\} \\
&= \text{máx}\left\{\nu(u_1, v_1), \nu(u_2, v_2)\right\}.
\end{aligned}$$

Así, ν es una norma no arquimediana de $\mathbb{K}^2$, y como $\nu(E) \subset |\mathbb{K}|$, tenemos que es una norma fuertemente sólida. Ahora, veamos que no existe una base base $1-$ortogonal. Supongamos que $(\mathbb{K}^2, \nu)$ tiene una base ortogonal. Entonces, por el Corolario 3.3, el subespacio $[e_1]$, donde $e_1 = (1, 0)$, admite un complemento ortogonal. Así, existe $x \in \mathbb{K}^2 \setminus [e_1]$ tal que $x \perp e_1$. Sin perdidda de generalidad, podemos escribir $x = (\alpha, 1)$ para algún $\alpha \in \mathbb{K}$. Como la intersección de las bolas es vacia, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \notin B_m$; de lo contrario, α pertenece a la intersección de las bolas. Entonces,

$$\nu(x) = \lim_{n\to\infty} |\alpha - b_n| = |\alpha - b_m| > |b_n - b_m|; \quad \text{para todo } n > m,$$

ya que $b_n \in B_m$ y $\alpha \notin B_m$. Además, recordemos que $|b_n - b_m|$ es constante para $n > m$ (Proposición 2.2.7). Entonces, consideremos $\beta = \alpha - b_m \in \mathbb{K}$. Luego,

$$\nu(x - \beta e_1) = \nu(b_m, 1) = \lim_{n\to\infty} |b_m - b_n| = |b_m - b_n| < \nu(x).$$

Así, $dist(x, \mathbb{K}e_1) \leq \nu(x - \beta e_1) < \nu(x)$. Es decir, $dist(x, \mathbb{K}e_1) \neq \nu(x)$, por lo que x no es ortogonal a e_1. Esto contradice el hecho de que $x \perp e_1$. Concluimos que $(\mathbb{K}^2, \nu)$ no tiene una base ortogonal. □

Observación 3.4.3. Por el Teorema 3.1.2, $(\mathbb{K}^2, \nu)$ es un espacio de Banach. Además, por la Proposición 3.3.5, $(\mathbb{K}^2, \nu)$ es de tipo contable.

Lema 3.4.3. Sean E y F dos espacios normados, con F esféricamente completo. Sean D un subespacio de E y $T \in \mathcal{B}(D,F)$. Tomemos $\mathfrak{B}$ un subconjunto no vacío de $\mathcal{B}(E,F)$, para el cual se cumple se cumple:

1. $\|U - V\| \leq \max\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}$ para todo $U, V \in \mathfrak{B}$.
2. $\|T(x) - U(x)\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x\|$ para todo $x \in D$, $U \in \mathfrak{B}$,

donde $\varepsilon_U, \varepsilon_V$ son números positivos asociados (existen) a U y V.

Entonces existe $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E,F)$, una extensión de T, tal que

$$\|\widetilde{T} - U\| \leq \varepsilon_U; \quad \text{para todo } U \in \mathfrak{B}.$$

Demostración. Definimos

$$\mathcal{F} := \left\{ (G,g) \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subset G \subset E,\ G \text{ es un subespacio tal que } g \in \mathcal{B}(G,F), \\ g|_D = T, \quad \text{y} \quad \|g - U\| \leq \varepsilon_U \text{ para todo } U \in \mathfrak{B} \end{array} \right\}.$$

Así definido, $\mathcal{F}$ es no vacío. En efecto, consideremos $G = D$ y $g = T \in \mathcal{B}(D,F)$. Entonces, $g|_D = T$, y como $\|T(x) - U(x)\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x\|$ para todo $x \in D$, se tiene

$$\|g - U\| = \|T - U\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T-U)(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon_U.$$

Ahora, definimos en $\mathcal{F}$ la relación:

$$(H,h) \prec (G,g), \quad \text{si y solo si,} \quad H \subset G \text{ y } g|_H = h$$

Así definido, "$\prec$" es una relación de orden parcial en $\mathcal{F}$. En efecto:

- Reflexividad: Sea $(G,g) \in \mathcal{F}$, entonces, como $G \subset G$ y $g|_G = g$, se tiene que $(H,g) \prec (H,g)$.
- Antisimetría: Sean $(G,g), (H,h) \in \mathcal{F}$ tales que $(G,g) \prec (H,h)$ y $(H,h) \prec (G,g)$. Luego, como $G \subset H$ y $H \subset G$, tenemos que $H = G$. Además, como $g = h|_h$ y $H = G$ tenemos que $g = h$. Así, $(G,g) = (H,h)$.
- Transitividad: Sean $(G,g), (H,h), (Q,q) \in \mathcal{F}$ tales que $(G,g) \prec (H,h)$ y $(H,h) \prec (Q,q)$. Entonces, como $G \subset H$ y $H \subset Q$, se tiene que $G \subset Q$. Además, como $q|_H = h$, $h|_G = g$ y $G \subset H$ deducimos que $q|_G = g$. Así, $(G,g) \prec (Q,q)$.

Entonces, según la Definición A.1.1, "$\prec$" es una relación de orden parcial en $\mathcal{F}$.

Ahora mostramos que toda cadena en $\mathcal{F}$ tiene una cota. En efecto, sea

$$(G_1,g_1) \subset (G_2,g_2) \subset (G_3,g_3) \subset \cdots$$

una cadena en $\mathcal{F}$. Definimos $H := \bigcup_{j \geq 1} G_j$. Como $D \subset G_j \subset E$ para todo $j \geq 1$, H es un subespacio de E tal que $D \subset H \subset E$. Definimos

$$\begin{aligned} h :& H \longrightarrow F \\ & x \longmapsto g_j(x); \quad \text{para algún } j \geq 1. \end{aligned}$$

Con esta definición de h, tenemos:

- h está bien definida: La buena definición de h se asegura al verificar que tiene una única imagen. Esto se sigue de hecho de que $(G_j, g_j) \prec (G_{j+1}, g_{j+1})$ para todo $j \geq 1$.
- $h \in \mathcal{B}(H, F)$: Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in H$. Existen j y k tales que $x \in G_j$ y $y \in G_k$. Podemos suponer que $k \leq j$. Luego, $x + \lambda y \in G_j$. Como g_j es lineal, se cumple
$$h(x + \lambda y) = g_j(x + \lambda y) = g_j(x) + \lambda g_j(y) = h(x) + \lambda h(y).$$
- $h|_D = T$: Sea $x \in D$. Como $D \subset G_1$, se tiene que $h(x) = g_1(x) = T_D(x)$.
- $\|h - U\| \leq \varepsilon_U$: Sea $x \in H$. Entonces, $x \in G_j$ para algún $j \geq 1$, y como $\|g_j - U\| \leq \varepsilon_U$, se tiene que $\|g_j(x) - U(x)\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x\|$. Luego, $\|h(x) - U(x)\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x\|$. Así,
$$\|h - U\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|h(x) - U(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon_U; \quad \text{para todo } U \in \mathfrak{B}.$$

Entonces, $(H, h) \in \mathcal{F}$ y es tal que $(G_j, g_j) \prec (H, h)$ para todo $j \geq 1$. Es decir, (H, h) es una cota superior de la cadena. Como la cadena es arbitraria, por el Lema A.1.1 (*Lema de Zorn*), existe $(G, \widetilde{T}) \in \mathcal{F}$ que es un elemento maximal.

Para obtener el resultado, basta con ver que $G = E$. Supongamos que $E \not\subset G$. Entonces, existe $\xi \in E$ tal que $\xi \notin G$. Consideremos $G \oplus [\xi] = \{x + \lambda\xi \mid x \in G,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$, que es un subespacio de E. Además, como $D \subset G$, tenemos que $D \subset G \oplus [\xi]$.

Dado $x \in G$, tenemos que $U(x) \in F$ y $\widetilde{T}(x) \in F$. Además, como $\xi \in G$, también se tiene que $U(\xi) \in G$. Definimos para cada $x \in G$ las bolas en F como:
$$B_{xU} := B\left[U(x) + U(\xi) - \widetilde{T}(x),\ \varepsilon_U \cdot \|x + \xi\|\right]; \quad \text{para todo } U \in \mathfrak{B}.$$

Sean $x, y \in G$ y $U, V \in \mathfrak{B}$. Podemos suponer que $\varepsilon_U \leq \varepsilon_V$. Entonces, como $U, V, \widetilde{T}$ son lineales y $\|U - V\| \leq \max\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\} = \varepsilon_V$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(U(x) + U(\xi) - \widetilde{T}(x)\right) - \left(V(y) + V(\xi) - \widetilde{T}(y)\right)\right\| \\
&= \left\|(U(x) - U(y)) + (U(y) - V(y)) + (U(\xi) - V(\xi)) - \left(\widetilde{T}(x) - \widetilde{T}(y)\right)\right\| \\
&= \left\|(U - V)(y + \xi) + \left(U - \widetilde{T}\right)(x - y)\right\| \\
&\leq \max\left\{\|U - V\| \cdot \|y + \xi\|\ ,\ \left\|U - \widetilde{T}\right\| \cdot \|x - y\|\right\} \\
&\leq \max\{\varepsilon_V \cdot \|y + \xi\|\ ,\ \varepsilon_U \cdot \|x - y\|\} \\
&\leq \max\{\varepsilon_V \cdot \|y + \xi\|\ ,\ \varepsilon_U \cdot \max\{\|x + \xi\|\,,\ \|\xi + y\|\}\} \\
&\leq \max\{\varepsilon_V \cdot \|y + \xi\|\ ,\ \varepsilon_U \cdot \|x + \xi\|\ ,\ \varepsilon_U \cdot \|\xi + y\|\} \\
&\leq \max\{\varepsilon_V \cdot \|y + \xi\|\ ,\ \varepsilon_U \cdot \|x + \xi\|\}.
\end{aligned}$$

Es decir,
$$\left\|\left[U(x) + U(\xi) - \widetilde{T}(x)\right] - \left[V(x) + V(\xi) - \widetilde{T}(x)\right]\right\| \leq \max\{\varepsilon_V \cdot \|y + \xi\|\,,\ \varepsilon_U \cdot \|x + \xi\|\}.$$
Entonces, tenemos dos casos:

- Si $\varepsilon_V \cdot \|y+\xi\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x+\xi\|$:

$$U(x)+U(\xi)-\widetilde{T}(x) \in B\left[V(y)+V(\xi)-\widetilde{T}(y),\ \varepsilon_V \cdot \|y+\xi\|\right] \cap B_{xU}.$$

- Si $\varepsilon_U \cdot \|x+\xi\| \leq \varepsilon_V \cdot \|y+\xi\|$:

$$V(y)+V(\xi)-\widetilde{T}(y) \in B\left[U(x)+U(\xi)-\widetilde{T}(x),\ \varepsilon_U \cdot \|y+\xi\|\right] \cap B_{yV}.$$

En cualquier caso, tenemos que $B_{xU} \bigcap B_{yV} \neq \emptyset$ para todo $x, y \in G$ y $U, V \in \mathfrak{B}$. Entonces, como F es esféricamente completo, aplicando la Proposición 2.2.10, tenemos

$$\bigcap_{x\in G,\, U\in\mathfrak{B}} B_{xU} \neq \emptyset.$$

Así, existe $\zeta \in B_{xU}$ para todo $x \in G$ y $U \in \mathfrak{B}$. Esto significa que

$$\left\| \Big(U(x)+U(\xi)-\widetilde{T}(x)\Big) - \zeta \right\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x+\xi\|\,; \quad \text{para todo } x \in G, U \in \mathfrak{B}.$$

Multiplicando por $|\lambda| \in |\mathbb{K}|$, tenemos

$$\left\| \Big(U(\lambda x+\lambda\xi)-\widetilde{T}(\lambda x)\Big) - \lambda\zeta \right\| \leq \varepsilon_U \cdot \|\lambda x+\lambda\xi\|\,; \quad \text{para todo } x \in G, U \in \mathfrak{B}.$$

Como $\lambda N = N$ para todo $\lambda \neq 0$, podemos escribir

$$\left\| \Big(U(x+\lambda\xi)-\widetilde{T}(x)\Big) - \lambda\zeta \right\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x+\lambda\xi\|\,; \quad \text{para todo } x \in G, U \in \mathfrak{B}.$$

Como podemos ver, para $\lambda = 0$ tenemos la desigualdad de la hipótesis. Reescribiendo, obtenemos

$$\left\| \Big(\widetilde{T}(x)+\lambda\zeta\Big) - U(x+\lambda\xi) \right\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x+\lambda\xi\|\,; \quad \text{para todo } x \in G, U \in \mathfrak{B}, \lambda \in \mathbb{K}. \tag{3.27}$$

Definimos

$$\begin{aligned} f : G \oplus [\xi] &\longrightarrow F \\ x+\lambda\xi &\longmapsto \widetilde{T}(x)+\lambda\zeta. \end{aligned}$$

Así definido f, cumple:

- Buena definición: Como $\zeta \in F$ y $\widetilde{T}$ es una aplicación, f está bien definida, ya que $f\left(G \oplus [\xi]\right) \subset F$ y $\widetilde{T}$ es una aplicación.
- f es lineal: Como $\widetilde{T}$ y $\lambda\xi \mapsto \lambda\zeta$ son lineales, f es lineal.
- $f|_D = T$: Como $f|_G = \widetilde{T}$ y $D \subset G$, entonces $f|_D = \widetilde{T}|_D = T$.

Además, sea $z \in G \oplus [\xi]$, es decir, $z = x+\lambda\xi$. Por (3.27), tenemos

$$\begin{aligned} \|f(z)-U(z)\| &= \|f(x+\lambda\xi)-U(x+\lambda\xi)\| \\ &= \left\| \Big(\widetilde{T}+\lambda\zeta\Big) - U(x+\lambda\xi) \right\| \\ &\leq \varepsilon_U \cdot \|x+\lambda\xi\| = \varepsilon_U \cdot \|z\|. \end{aligned}$$

Esto implica que $\|f - U\| \leq \varepsilon_U$ para todo $U \in \mathfrak{B}$.

Resumiendo, hemos construido $(G \oplus [G], f) \in \mathcal{F}$ tal que $G \subset G \oplus [\xi]$ y $f|_G = \widetilde{T}$. Es decir, $\left(G, \widetilde{T}\right) \prec (G \oplus [\xi], f)$. Esto contradice el hecho de que $\left(G, \widetilde{T}\right)$ es un elemento maximal de $\mathcal{F}$. Esta contradicción surge de suponer que $E \not\subset G$. Por lo tanto, $G = E$ y $\|\widetilde{T} - U\| \leq \varepsilon_U$ para todo $U \in \mathfrak{B}$.

□

Proposición 3.4.7. Sean E y F dos espacios normados. El espacio normado $\mathcal{B}(E, F)$ es esféricamente completo si F es esféricamente completo.

Demostración. Denotemos por B_r una bola en $\mathcal{B}(E, F)$ de radio r. Sea

$$B_{r_1} \supset B_{r_2} \supset \cdots \supset B_{r_n} \supset \cdots$$

una cadena decreciente de bolas en $\mathcal{B}(E, F)$. En el Lema 3.4.3 consideremos:

- $D := \{0\}$. Por lo que D es un subespacio cerrado de E.
- T la aplicación nula, por lo que $T \in \mathcal{B}(D, F)$.
- En cada B_{r_n} elige U_n. Definimos $\mathfrak{B} := \{U_j \mid j \geq 1\}$ un subconjunto de $\mathcal{B}(E, F)$. Para cada U_n, consideremos $\varepsilon_{U_n} := r_n > 0$. Entonces:
  - Sea $U, V \in \mathfrak{B}$. Existen $j, k \in \mathbb{N}$ tal que $U = U_j$ y $V = U_k$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $j < k$. Como $B_{r_j} \supset B_{r_k}$, tenemos que $\|U_k - U_j\| \leq r_j = \max\{r_j, r_k\} = \max\{\varepsilon_{U_j}, \varepsilon_{U_k}\}$. Es decir,

    $$\|U - V\| \leq \max\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}; \quad \text{para todo } U, V \in \mathfrak{B}.$$

  - Sea $U \in \mathfrak{B}$. Como $D = \{0\}$ y T es la aplicación nula, tenemos que

    $$\|T(x) - U(x)\| = \|0 - U(0)\| = 0 \leq \varepsilon_U \cdot \|x\|; \quad \text{para todo } x \in D$$

Tenemos todas las condiciones del Lema 3.4.3, de donde, existe $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E, F)$ tal que

$$\|\widetilde{T} - U_j\| \leq \varepsilon_{U_j}; \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Como $r_j = \varepsilon_{U_j}$, se tiene que $\widetilde{T} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}$. Esto significa que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n} \neq \infty.$$

Concluimos que $\mathcal{B}(E, F)$ es esféricamente completo. □

Proposición 3.4.8. Todo subespacio esféricamente completo de un espacio normado es ortocomplentado.

Demostración. Sean E un espacio normado y D un subespacio esféricamente completo de E. En el Lema 3.4.3 consideremos lo siguiente:

- $F := D$, por lo que F es esféricamente completo.

- $T = id_D$, es decir, $id_D : D \to D$ es la aplicación identidad. Entonces, $T \in \mathcal{B}(D, F)$.
- Considemos $\mathfrak{B} := \{0 \mid 0 : E \to F\}$, es decir, el único elemento de $\mathfrak{B}$ es la aplicación nula de E hacia F. Es claro que $\mathfrak{B}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}(E, F)$. Además, si $\varepsilon_0 := 1$, de manera trivial se cumplen:
  - $\|U - V\| \leq \text{máx}\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}$ para todo $U, V \in \mathfrak{B}$.
  - $\|T(x) - U(x)\| = \|x\| \leq \varepsilon_U \cdot \|x\|$ para todo $x \in D$ y $U \in \mathfrak{B}$.

Tenemos todas las condiciones del Lema 3.4.3. Entonces, existe $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E, F)$ tal que $\|\widetilde{T} - U\| \leq \varepsilon_U$ para todo $U \in \mathfrak{B}$. Esto implica que que $\|\widetilde{T}\| \leq 1$, y como es una extensión de $T = id_D$, se tiene que $\widetilde{T} \neq 0$ y $\widetilde{T}(E) = D$. Así, $\|\widetilde{T}\| = 1$. Esto implica, por el Teorema 3.2.4, que $\widetilde{T} : E \to E$ es una ortoproyección con $\widetilde{T}(E) = D$. Concluimos, por el Teorema 3.2.5, que $Ker\widetilde{T}$ es el complemento ortogonoal de D. □

Teorema 3.4.4. Sean E y F dos espacios normados, y D un subespacio de E. Si el subespacio D o el espacio F es esféricamente completo, entonces cada $T \in \mathcal{B}(D, F)$ tiene una extensión $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E, F)$ tal que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Demostración. Analizamos cada caso:

- Si D es esféricamente completo: Por la Proposición 3.4.8, D es ortocomplementado. Según el Teorema 3.2.4, existe una ortoproyección $P : E \to E$ tal que $P(E) = D$ y $E = KerP \oplus D$ con $KerP \perp D$. Definimos $\widetilde{T} : E \to F$ por $\widetilde{T}(x) := T \circ P(x)$. Así definida, $\widetilde{T}$ se cumple
  - $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E, F)$: $T \circ P$ es lineal y acotada, ya que T y P son lineales y acotadas.
  - $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$: Por la Observación 3.2.10, sabemos que $\|P\| \leq 1$. Entonces,

    $$\|\widetilde{T}\| = \|T \circ P\| \leq \|T\| \cdot \|P\| \leq \|T\|$$

    Por otro lado, como $T : D \to F$ y $P : E \to D$, si $x \in D$, por la Observación 3.2.9, tenemos que $P(x) = x$ para todo $x \in D$. Así,

    $$\|T(x)\| = \|T(P(x))\| = \|T \circ P(x)\| = \|\widetilde{T}(x)\| \leq \|\widetilde{T}\| \cdot \|x\|; \quad \text{para todo } x \in D.$$

    Esto implica que $\|T\| \leq \|\widetilde{T}\|$. Por lo tanto, de las dos desigualdades, tenemos que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.
- Si F es esféricamente completo: En las condiciones del Lema 3.4.3 consideremos
  - $T \in \mathcal{B}(D, F)$.
  - Definimos $\mathfrak{B} := \{0 \mid 0 : E \to F\}$, es decir, el único elemento de $\mathfrak{B}$ es la aplicación nula de E hacia F. Es claro que $\mathfrak{B}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}(E, F)$. Sea $\varepsilon_U := \|T\| > 0$ para todo $U \in \mathfrak{B}$. Se cumple
    - $\|U - V\| \leq \text{máx}\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}$ para todo $U, V \in \mathfrak{B}$.
    - $\|T(x) - U(x)\| = \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| = \varepsilon_U \cdot \|x\|$ para todo $x \in D$ y $U \in \mathfrak{B}$.

Tenemos todas las condiciones del Lema 3.4.3. Entonces, existe $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E,F)$ tal que $\|\widetilde{T} - U\| \leq \varepsilon_U$ para todo $U \in \mathfrak{B}$. Esto implica que $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. Además, $\widetilde{T}$ extiende T, y por propiedad del supremo, tenemos que $\|T\| \leq \|\widetilde{T}\|$. Por lo tanto, de las dos desigualdades, tenemos que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

□

Definición 3.4.4. Sea D un subespacio de E. Diremos que E es un *extensión inmediata* de D si $0 \in E$ es el único elemento que es ortogonal a D.

Recordemos por la Proposición 3.2.3 que $x \in E$ es ortogonal a un subespacio D si y solamente si $dist(x, D) = \|x\|$.

Proposición 3.4.9. Sea D un subespacio de E. Son equivalenntes:

1. E es una extensión inmediata de D.
2. Para todo $x \in E \setminus \{0\}$ existe $y \in D$ tal que $\|x - y\| < \|x\|$.
3. Para todo $x \in E \setminus D$ se cumple: $dist(x, D) < \|x - y\|$ para todo $y \in D$.

Demostración.

[1 $\Rightarrow$ 2] Si suponemos lo contrario existe $x \in E \setminus \{0\}$ tal que $\|x\| \leq \|x - y\|$ para todo $y \in D$. Así $dist(x, D) = \|x\|$ con $x \neq 0$, es decir, $x \neq 0$ es ortogonal a D. Esto contradice el hechco de que $0 \in E$ es el único elemento ortogonal a D.

[2 $\Rightarrow$ 1] Supongamos que existe $x \neq 0$ tal que $dist(x, D) = \|x\|$, entonces $\|x\| \leq \|x - z\|$ para todo $z \in D$. Por otro lado. Como $x \neq 0$ existe $y \in D$ tal que $\|x - y\| < \|x\|$. Entonces si $z = y$ se obtiene $\|x - y\| < \|x\| \leq \|x - y\|$ lo cual es una contradicción.

[1 $\Rightarrow$ 3] Supongamos que existe $x \in E \setminus D$ y $y \in D$ tal que $dis(x, D) \geq \|x - y\|$. Entonces $dis(x, D) = \|x - y\| = \min_{z \in D} \|x - z\| > 0$. Así dado $z \in D$ tenemos

$$\|x - z\| \leq \max\{\|x - y\|, \|y - z\|\}.$$

- Si $\|x - y\| < \|y - z\|$, entonces por la Observación 2.4.2 tenemos que $\|x - z\| = \|y - z\|$ por lo que
$$\|x - y\| = \min_{z \in D} \|y - z\| = 0; \quad \text{pues } y \in D.$$
Así $\|x - y\| = 0$, de donde $x = y$, luego $x \in D$ lo cual contradice el hecho de que $x \in E \setminus \{D\}$.

Por lo anterior escribimos

$$\|x - z\| \leq \max\{\|x - y\|, \|y - z\|\} = \|x - y\| \text{ para todo } z \in D.$$

En particular para $z = 0$ implica que $dist(x, D) = \|x\|$ con $x \neq 0$. Esto contradice el hecho 0 sea el único elemento ortogonal a D.

3 $\Rightarrow$ 1] Sea $x \in E$ con tal que $dist(x, D) = \|x\|$. Como $x \in D$ o $x \in E \setminus D$ tenemos. Si $x \in D$ entonces $\|x\| = dis(x, D) = 0$, luego $x = 0$. Si $x \in E \setminus D$, notese que $x \neq 0$, por hipótesis $dist(x, y) < \|x - y\|$ para todo $y \in D$, luego haciendo $y = 0$ tenemos $\|x\| = dist(x, D) < \|x\|$ lo cual es una contradicción. En resumen hemos visto que el único elemento ortogonal en E a D es $x = 0$. □

Corolario 3.4.1. Sea E un espacio normado no arquimediano de dimensión finita y F un subespacio lineal. Sea $\{u_1, ...u_{m_E}\}$ un conjunto maximal ortogonal en E tal que $\{u_1, ..., u_{m_F}\}$ es un conjunto ortogonal maximal en F para algún $m_F \leq m_E$. Si $H_E = [u_{m_{F+1}}, ..., u_{m_E}]$, entonces $H_E \perp F$.

Demostración. Supongamos que $m_E > m_F$ (de lo contrario, no hay nada que demostrar). Tomemos cualquier $x \in F$ y $y \in H_E$. Si $x \in [u_1, ..., u_{m_F}]$, la conclusión es obvia. Así que supongamos que $x \notin [u_1, ..., u_{m_F}]$. Notemos que F es una extensión inmediata de $[u_1, ..., u_{m_F}]$, entonces existe $x_0 \in [u_1, ..., u_{m_F}]$ con

$$\|x - x_0\| < \|x\| = \|x_0\|.$$

Así, dado que

$$\|x_0 + y\| = \text{máx}\{\|x_0\|, \|y\|\},$$

entonces

$$\|x + y\| = \|x - x_0 + x_0 + y\| = \|x_0 + y\| = \text{máx}\{\|x_0\|, \|y\|\} = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}.$$

□

Corolario 3.4.2. Sea E, F sean espacios normados no arquimedianos, D sea un subespacio lineal de E tal que E es una extensión inmediata de D, F esféricamente completo, y $T : D \to F$ un encaje isométrico. Entonces, T puede extenderse a una isometría lineal $T' : E \to F$.

Demostración. Aplicando el Teorema 3.4.4 podemos extender la isometría $T : D \to F$ al operador lineal $T' : E \to F$ tal que $||T'|| \leq 1$. Además T' también es una isometría.

Tomemos $x \in E \setminus D$. Entonces, como E es una extensión inmediata de D, existe $x_d \in D$ tal que

$$\|x - x_d\| < \|x_d\| = \|x\|.$$

Así obtenemos

$$\|T'(x) - T'(x_d)\| \leq \|T'\| \cdot \|x - x_d\| < \|x_d\| = \|T'(x_d)\|$$

y

$$\|T'(x)\| = \|T'(x) - T'(x_d) + T'(x_d)\| = \|T'(x_d)\|.$$

Por lo tanto, finalmente $\|T'(x)\| = \|x\|$. □

Proposición 3.4.10. Sean D_1, D_2 subespacio de E tales que $D_1 \subset D_2$. Si D_2 es una extensión inmediata de D_1 entonces son equivalentes:

1. E es una extensión inmediata de D_2.
2. E es una extensión inmediata de D_1.

Demostración. Aplicaremos constantemente el Ítem 2 la Proposición 3.4.9 a conveniencia.

[1 $\Rightarrow$ 2] Sea $x \in E \setminus \{0\}$. Como E es extensión inmediata de E de D_2 existe y_2 tal que $\|x - y_2\| < \|x\|$, luego por la Observación 2.4.2 tenemos que $\|x - y_2 - x\| = \|x\|$ entonces $\|x\| = \|y_2\|$ y $y_2 \neq 0$. Por otro lado. Como $y_2 \neq 0$ y D_2 es una extensión inmediata de D_1

existe $y_1 \in D_1$ tal que $\|y_2 - y_1\| < \|y_2\|$. Así tenemos $\|x - y_2\| < \|x\|$ y $\|y_2 - y_1\| < \|x\|$. Entonces

$$\|x - y_1\| \leq \max\{\|x - y_2\|, \|y_1 - y_2\} = \|x\|.$$

De done se tiene que E es una extensión inmediata de D_1.

[$2 \Rightarrow 1$] Sea $x \in E \setminus \{0\}$. Como E es una extensión inmediata de D_1, entonces existe $y \in D_1$ tal que $\|x - y\| < \|x\|$. Sabemos que $D_1 \subset D2$, entonce $y \in D_2$ tal que $\|x - y\| < \|x\|$. Así E es una extensión inmediata de D_2. □

Definición 3.4.5. Espacio normado E es *esféricamente completo* si es un espacio ultramétrico esféricamente completo, Definición 2.2.9, con la métrica inducida por su norma.

Teorema 3.4.5. Ningún espacio normado esféricamente completo acepta extensión inmediata.

Demostración. Supongamos que existe E una extensión inmediata de D, no olvidemos, D subespacio de E por lo que D es esfericemnte completo con la norma inducida de E en D. Sea $x \in E \setminus D$. Por definición de distancia para $\varepsilon_n = 1/n$, $n \geq 1$ tenemos que existe $x_n \in D$ tales que

$$\|x_n - x\| \leq dist(x, D) + \frac{1}{n}.$$

Escribiendo $r_n = dist(x, D) + 1/n$ podemos ver que es decreciente y $r_n \to dis(x, D)$. Por la Proposición 2.2.6 cualquier elemento de una bola es centro, entonces

$$B(a, r_n) = B(x_n, r_n); \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Y además en la Proposición 2.2.6 se vio dos bolas que comparten un elemento implica que una está contenida en la otra. Y como $r_{n+1} \geq r_n$ tenemos una cadena decreciente de bolas en E, esto es

$$B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2) \supset \cdots \supset B(x_n, r_n) \supset \cdots$$

Y como cada $B(x_n, r_n) \cap D$ es una bola en D tenemos una cadena de bolas decrecientes en D, esto es

$$B(x_1, r_1) \cap D \supset B(x_2, r_2) \cap D \supset \cdots \supset B(x_n, r_n) \cap D \supset \cdots$$

Por hipótesis D es esféricamente completo, entonces de la definición de esféricamente completo existe $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$. Así $y \in B(x_n, r_n)$ para todo $n \geq 1$. Entonces tenemos que $y \in B(x_n, r_n) = B(x, r_n)$, luego $\|x - y\| \leq r_n$ para todo $n \neq 1$. De donde

$$\|x - y\| \leq dist(x, D) \tag{3.28}$$

Por otro lado. Como $x \in E \setminus D$ por el ítem 3 de la Proposición 3.4.9 tenemos que $dist(x, y) < \|x - z\|$ para todo $z \in D$. En particular para $z = y$ tenemos

$$dist(x, y) < \|x - y\|$$

lo cual contradice (3.28). Así concluimos que D no admite extensión inmediata. □

Capítulo 4

Espacios de Banach de disposición casi universal y disposición universal

Con $\mathcal{U}$ denotamos la clase de los espacios normados de dimensión finita, y centramos el estudio en una clase $\mathcal{U}_{FNA}$, que se denota así por sus siglas en Inglés "Finite-dimensional Non-Archimedian", la cual consiste en todos los espacios normados no arquimedianos de dimensión finita. Es decir, un espacio con norma no arquimediana pertenece a $\mathcal{U}_{FNA}$ si es de dimensión finita, está definido sobre un campo no arquimediano $\mathbb{K}$, que es completo y valuado.

Suponemos en este capítulo que $|\mathbb{K}^*| \subset \|E^*\|$, donde E es un espacio de Banach no arquimediano arbitrario, a menos que se indique lo contrario.

La razón de suponer que $|\mathbb{K}^*| \subset \|E^*\|$ es que, como ya se advierte en la Proposición 2.4.7, a diferencia del análisis funcional clásico, en un espacio normado no arquimediano no podemos asegurar la existencia un elemento con norma uno. Esta condición es esencial en este capítulo, ya que garantiza una estrutura adecuada para las extensiones de operadores y la preservación de normas. Podemos ver que:

«Existe $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$» es equivalente a «$|\mathbb{K}^*| \subset \|E^*\|$»

En efecto. Supogamos que existe $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$. Sea $|\lambda| \in |\mathbb{K}^*|$, entonces $|\lambda| = |\lambda x| \in \|E^*\|$, por lo que $|\mathbb{K}^*| \subset \|E^*\|$. Ahora, supongamos que, $|\mathbb{K}^*| \subset \|E^*\|$. Entonces como $\mathbb{K}$ es un campo existe $1_{\mathbb{K}}$ tal que $|1_{\mathbb{K}}| = 1 \in |\mathbb{K}^*|$, por lo que $1 \in |E^*|$. Esto implica que existe $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$.

En este capítulo, todos los espacios están definidos sobre el campo $\mathbb{K}$, y todos los espacios normados son espacios normados no arquimedianos. Por lo tanto, si un espacio normado es completo, entonces es un espacio de Banach no arquimediano. En consecuencia, nos referimos a ellos como espacios de Banach.

4.1. Espacios de Banach no arquimedianos de disposición casi universal para espacios de dimensión finita

Definición 4.1.1. Sean E y F dos espacios normados, $\psi : E \to F$ una aplicación lineal, y $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$. Decimos que ψ es $\varepsilon-$*isometría* si se cumple

$$(1-\varepsilon)\,\|x\| \leq \|\psi(x)\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|; \quad \text{para todo } x \in E$$

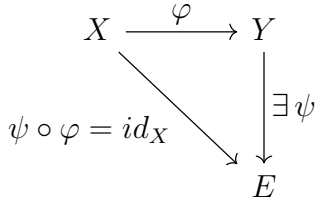
Observación 4.1.1. Si $\psi : E \to F$, como en la Definición 4.1.1, es una $\varepsilon-$ isometría para todo $\varepsilon > 0$, entonces obtenemos que

$$\|\psi(x)\| = \|x\|; \quad \text{para todo } x \in E.$$

Esto significa que $\psi : E \to F$ es una *isometría* lineal, también llamada *embebimiento isométrico.*

Definición 4.1.2. Un espacio de Banach E se dice que tiene *disposición casi universal* para la clase $\mathcal{U}$ (clase de los espacios normados de dimensión finita) si satisface lo siguiente:

Para cada embebimiento isométrico $\varphi : X \to Y$, donde $X, Y \in \mathcal{U}$ y $X \subset E$, y para cada $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$, existe una $\varepsilon-$isometría $\psi : Y \to E$ tal que $\psi \circ \varphi(x) = x$ para todo $x \in X$.



Observación 4.1.2. Cuando nos restringimos a la clase $\mathcal{U}_{FNA}$, decimos que el espacio de Banach E tiene *disposición casi universal para la clase* $\mathcal{U}_{FNA}$ (clase de los espacios normados no arquimedianos de dimensión finita) como se menciona en la Definición 4.1.2.

Lema 4.1.1. Sean E un espacio de Banach de tipo contable, D un subespacio de E de dimensión finita, $t \in \langle 0, 1\rangle$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base $\sqrt{t}$-ortogonal de D. Entonces, existen $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots \in E \setminus D$ tales que $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es una base t-ortogonal de E.

Demostración. Como $0 < t < 1$, entonces $\delta := t^{-1/2} - 1 > 0$, y así $t = (1+\delta)^{-1/2}$. Como D es un subespacio cerrado de E, que es un espacio de Banach de tipo contable, para $\delta > 0$, por el Teorema 3.3.6, existe D_0 subespacio de E tal que $E = D \oplus D_0$. Del Corolario 3.3.2, se tiene que

$$\|u + v\| \geq \sqrt{t}\,\max\{\|u\|, \|v\|\}; \quad \text{para todo } u \in D_0, v \in D.$$

Por otro lado, como $0 < \sqrt{t} < 1$, para D_0 (notenomos que también es de tipo contable) el Teorema 3.3.5 asegura que existe una base $\sqrt{t}-$ortogonal. Procedemos con el caso infinito, pues el caso finito sigue un procedimiento similar. Sea $(x_j)_{j\geq 1}$ la base $\sqrt{t}-$ortogonal de D_0. Definimos $w_{m+j} = x_j$ para todo $j \geq 1$. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ (podemos asumir que $k > m$), entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_j w_j\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_j w_j + \sum_{i=m+1}^{k} \lambda_j w_j\right\| \geq \sqrt{t}\,\max\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_j w_j\right\|, \left\|\sum_{i=m+1}^{k} \lambda_j w_j\right\|\right\}, \quad (4.1)$$

pues

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_j w_j \in D \quad \text{y} \quad \sum_{i=m+1}^{k} \lambda_j w_j \in D_0.$$

En D y D_0, por Definición 3.3.1, las bases son conjuntos $\sqrt{t}-$ ortogonales. Entonces, por el Teorema 3.2.8, se tiene:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_j w_j \right\| \geq \sqrt{t} \max_{1 \leq j \leq m} \|\lambda_j w_j\| \tag{4.2}$$

$$\left\| \sum_{i=m+1}^{k} \lambda_j w_j \right\| \geq \sqrt{t} \max_{m+1 \leq j \leq k} \|\lambda_j w_j\|. \tag{4.3}$$

De (4.2) y (4.3) en (4.1), obtenemos:

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_j w_j \right\| \geq \sqrt{t} \left\{ \sqrt{t} \max_{1 \leq j \leq m} \|\lambda_j w_j\|;\ \sqrt{t} \max_{m+1 \leq j \leq k} \|\lambda_j w_j\| \right\} \geq t \max_{1 \leq j \leq k} \|\lambda_j w_j\|.$$

Así, por el Teorema 3.2.8, se tiene que $\{w_j\}_{j \geq 1}$ es un conjunto $t-$ortogonal. Dado $x \in E$, se escribe $x = u + v$ con $u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \in D$ y $v = \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_j w_j \in D_0$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j; \quad \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Finalmente, Concluimos que $\{w_j\}_{j \geq 1}$ es una base $t-$ortogonal de E. □

Teorema 4.1.1. Sea E un espacio de Banach de tipo contable. Son equivalentes:

1. $\|E^*\|$ es un subconjunto denso de $\langle 0, \infty \rangle$.
2. E tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$

Donde $\|E^*\| := \{ \|x\| \mid x \in E^* \}$.

Demostración.

$[1 \Rightarrow 2]$ Sean $X, Y \in \mathcal{U}_{FNA}$ con $X \subset E$, y sea $\varphi : X \to Y$ un embebimiento isométrico, es decir, φ es lineal y $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Sean $dimX = m_0$ y $dimY = m$. Del álgebra lineal (ver [4]), sabemos que, como $\varphi : X \to Y$ es una aplicación lineal, se tiene que $dimX \leq dimY$, es decir, $m_0 \leq m$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos t fijo tal que $(1+\varepsilon)^{-1/2} < t < 1$. Como $dimX < \infty$ y $0 < \sqrt{t} < 1$, por el Teorema 3.3.1, existe una base $\sqrt{t}-$ortogonal de X. Sea $\{x_1, \cdots x_{m_0}\}$ la base $\sqrt{t}-$ortogonal de X. Por la Proposición 3.3.3, sabemos que $\{\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_{m_0})\}$ es una base $\sqrt{t}-$ortogonal para $\varphi(X)$, subespacio de Y. Como $dimY < \infty$, por la Proposición 3.3.5, sabemos que Y es de tipo contable. Luego, por el Lema 4.1.1, podemos hallar $\{y_j\}_{1 \leq j \leq m}$ una base $t-$ortogonal de Y, donde $y_j = \varphi(x_j)$ para $1 \leq j \leq m_0$. Por otro lado, como E es de tipo contable, por el Lema 4.1.1, podemos hallar $x_{m_0+1}, x_{m_0+2}, x_{m_0+3} \cdots \in E$ tal que $\{x_j\}_{j \geq 1}$ sea una base $t-$ortogonal de E.

Tenemos que $\|x_j\| = \|\varphi(x_j)\| = \|y_j\|$ para todo $1 \leq j \leq m_0$, y como $0 < t < 1$, entonces

$$t\|x_j\| < \|y_j\| = \|x_j\|; \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq m_0.$$

Como $\|E^*\|$ es denso en $\langle 0, \infty \rangle$, podemos suponer que

$$t\|x_j\| \leq \|y_j\| \leq \|x_j\|; \quad \text{para } 1 \leq j \leq m.$$

Además, Dado que cada $y \in Y$ se escribe de manera única (Observación 3.3.2) como $y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j$. Entonces, definimos

$$\begin{aligned} \psi : Y &\longrightarrow E \\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \end{aligned}$$

Así definido, ψ cumple:

- $\psi(\varphi(x)) = x$ para todo $x \in X$: Dado $x \in X$, se escribe de manera única, según la Observación 3.3.2, como $x = \sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j x_j$. Dado que φ es lineal y $y_j := \varphi(x_j)$ para $1 \leq j \leq m_0$, se tiene

$$\begin{aligned} \psi\left(\varphi\left(x\right)\right) &= \psi\left(\varphi\left(\sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j x_j\right)\right) = \psi\left(\sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j \varphi(x_j)\right) \\ &= \psi\left(\sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j x_j = x. \end{aligned}$$

- $\|y\| \geq t^2\|\psi(y)\|$ para todo $y \in Y$: Sea $y \in Y$, entonces $y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j$. Dado que $\{y_1, \cdots, y_m\}$ es conjunto $t-$ortogonal y $\|y_j\| \geq t\|x_j\|$ para $1 \leq j \leq m$, se tiene

$$\begin{aligned} \|y\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j\right\| &\geq t \max_{1 \leq j \leq m} \|\lambda_j y_j\| = t \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j| \cdot \|y_j\| \\ &\geq t^2 \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j| \cdot \|x_j\| = t^2 \max_{1 \leq j \leq m} \|\lambda_j x_j\|. \end{aligned}$$

  Por otro lado, por la la norma ultramétrica en E, se tiene que

$$\|\psi(y)\| = \left\|\psi\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_k\right\| \leq \max_{1 \leq j \leq m} \|\lambda_j x_j\|.$$

  Así, de las desigualdades anterior, se establece que

$$\|y\| \geq t^2 \max_{1 \leq j \leq m} \|\lambda_j x_j\| \geq t^2\|\psi(y)\|.$$

- $\|y\| = 1/t \cdot \|\psi(y)\|$ para todo $y \in Y$: Sea $y \in Y$, entonces $y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j$. Por la norma ultramétrica de Y y dado que $\|y_j\| \leq \|x_j\|$ para $1 \leq j \leq m$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|y\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j\right\| &\leq \max_{1 \leq j \leq m} \|\lambda_j y_j\| = \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j| \cdot \|y_j\| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j| \cdot \|x_j\| = \max_{1 \leq j \leq m} \|\lambda_j x_j\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es $t-$ortogonal, se tiene que

$$\|\psi(y)\| = \left\|\psi\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_k\right\| \geq t \max_{1\leq j\leq m}\|\lambda_j x_j\|.$$

Así, de las desigualdades anteriores, se establece que

$$\|y\| \leq \frac{1}{t}\cdot\|\psi(y)\|.$$

Entonces, se tiene:

$$t\cdot\|y\| \leq \|\psi(y)\| \leq \frac{1}{t^2}\cdot\|y\|; \quad \text{para todo } y\in Y.$$

Ya que $(1+\varepsilon)^{-1/2} < t < 1$, se cumple lo siguiente:

- Como $\dfrac{1}{1+\varepsilon} < t^2$, entonces $\dfrac{1}{t^2}\cdot\|y\| < (1+\varepsilon)\cdot\|y\|$.
- Como $1-\varepsilon \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} < t$, entonces $(1-\varepsilon)\cdot\|y\| < t\cdot\|y\|$.

Por lo tanto,

$$(1-\varepsilon)\cdot\|y\| \leq \|\psi(y)\| \leq (1+\varepsilon)\cdot\|y\|; \quad \text{para todo } y\in Y.$$

[$2 \Rightarrow 1$] Supongamos que $\|E^*\|$ no es denso en $\langle 0,\infty\rangle$. Entonces, existen $\xi\in\langle 0,\infty\rangle$ y $\delta>0$ tal que $B(\xi,\delta)\cap\|E^*\| = \emptyset$. Podemos ajustar δ tal que $\delta < 2\xi$ y se siga cumpliendo

$$B(\xi,\delta)\cap\|E^*\| = \emptyset; \quad \text{con } \delta < 2\xi. \tag{4.4}$$

Como $|\mathbb{K}*| \subset \|E^*\|$, existe $z\in E$ tal que $\|z\| = 1$. Definimos $X := [z]$ subconjunto de E y $Y := \mathbb{K}^2$ con la norma $\|(y_1,y_2)\| := \max\{|y_1|, \xi\cdot|y_2|\}$, que hace que Y sea un espacio normado (no arquimediano). Como $[z] = \{\lambda z \mid z\in\mathbb{K}\}$, definimos $\varphi : X\to Y$ por $\varphi(\lambda z) := (\lambda,0)$. Así definida, φ cumple lo siguiente:

- φ es lineal: Sean $x,w\in X$ y $\lambda\in\mathbb{K}$, como existen (únicos) $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ tal que $x=\alpha z$ y $y=\beta z$, entonces

$$\varphi(x+\lambda y) = \varphi((\alpha+\lambda\beta)z) = (\alpha+\lambda\beta,0) = (\alpha,0)+\lambda(\beta,0) = \varphi(x)+\lambda\varphi(w).$$

- $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ para todo $x\in X$: Dado $x\in X$, existe (un único) $\lambda\in\mathbb{K}$ tal que $x=\lambda z$, entonces

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(\lambda z)\| = \|(\lambda,0)\| = \max\{|\lambda|,\xi|0|\} = |\lambda|\cdot 1 = |\lambda|\cdot\|z\| = \|\lambda z\| = \|x\|.$$

Tenemos que $\varphi : X\to Y$ es un embebimiento isométrico. Para $\varepsilon = \delta/(2\xi) > 0$. Como E tiene dispocisión casi univesal, entonces para ε existe $\psi : Y\to E$, una $\varepsilon-$isometría tal que $\psi(\varphi(x)) = x$ para todo $x\in X$. Esto es

$$(1-\varepsilon)\cdot\|y\| \leq \|\psi(y)\| \leq (1+\varepsilon)\cdot\|y\|; \quad \text{para todo } y\in Y. \tag{4.5}$$

Consideremos $y = (0,1) \in Y$, por (4.5) se cumple que: $(1-\varepsilon)\cdot\|(0,1)\| \leq \|\psi(y)\|$, y como $\|(0,1)\| = \text{máx}\{|0|, \xi|1|\} = \xi > 0$, por (4.4), sabemos que $\delta < 2\xi$, se sigue que $\varepsilon = \delta/(2\xi) < 1$. Por lo que $0 < (1-\varepsilon)\cdot\|(0,1)\| \leq \|\psi(y)\|$. Entonces $\|\psi(y)\| \in \|E^*\|$, y por (4.4) se tiene que $\|\psi(y)\| \notin B(\xi,\delta)$. Como $\varepsilon = \delta/(2\cdot\xi)$, obtenemos que:

$$\|\psi(y)\| \leq \xi - 2\cdot\varepsilon\cdot\xi \quad \text{o} \quad \|\psi(y)\| \geq \xi + 2\cdot\varepsilon\cdot\xi.$$

Dado que $\|y\| = \xi$, se obtiene que:

$$\|\psi(y)\| < (1-\varepsilon)\cdot\|y\| \quad \text{o} \quad \|\psi(y)\| > (1+\varepsilon)\cdot\|y\|.$$

Esto contradice a (4.5). Por lo tanto, concluimos que $\|E^*\|$ es denso en $\langle 0,\infty\rangle$. □

Corolario 4.1.1. Si $\mathbb{K}$ tiene valoración densa, entonces:

1. Cada espacio de Banach de tipo contable tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.
2. Todos los espacios de Banach de tipo contable y tienen disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$ son ε-isométricos, donde $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño.

Demostración.

[1] Como $|\mathbb{K}^*| \subset \|E^*\|$ y, por la Proposición 2.3.7, tenemos que $\overline{|\mathbb{K}^*|} = \langle 0,\infty\rangle$. Entonces, tenemos que $\langle 0,\infty\rangle = \overline{\|E^*\|}$, es decir, $\|E^*\|$ es denso en $\langle 0,\infty\rangle$. Dado que, por hipótesis, E es un espacio de Banach de tipo contable , conlcuimos , por el Teorema 4.1.1, E tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.

[2] Sean E y F dos espacios de tipo contable y que tengan disposición universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$. Por el Teorema 4.1.1 tenemos que $\|E^*\|$ es denso en $\langle 0,\infty\rangle$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea t tal que $(1+\varepsilon)^{-1/2} < t < 1$. Como E y F son de tipo contable entonces por el Teorema 3.3.1 o Teorema 3.3.5 existen $\{x_j\}_{j\geq 1}$ y $\{y_j\}_{j\geq 1}$ bases $t-$ortogonales de E y F respectivamente. Como $\|E^*\|$ es denso en $\langle 0,\infty\rangle$ podemos suponer que $t\|x_j\| \leq \|y_j\| \leq \|x_j\|$. Entonces definimos $f : \{x_j\}_{j\geq 1} \to \{y_j\}_{j\geq 1}$ por $f(x_j) = y_j$. Ahora extendamos f como sigue

$$\begin{aligned} f : \left[\{x_j\}_{j\geq 1}\right] &\longrightarrow \left[\{y_j\}_{j\geq 1}\right] \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \end{aligned}$$

Definido así f es lineal y seguiendo el mismo proceso del Teorema 4.1.1 se obtiene que

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leq \|f(x)\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|, \quad \text{para todo } x \in \left[\{x_j\}_{j\geq 1}\right].$$

Además f es continua en $[\{x_j\}_{j\geq 1}]$ ya que esta acotado. Como $[\{x_j\}_{j\geq 1}]$ es denso en E y $[\{y_j\}_{j\geq 1}]$ es denso en F podemos extender $f : E \to F$. En efecto, sea $x \in E$, entonces existe la sucesión $\{z^n\}_{n\geq 1}$ en $[\{x_j\}_{j\geq 1}]$. Así, definimos $f : E \to F$ por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(z^n)$. Procediendo como en el Lema 3.4.1 podemos ver que el límite existe, no depende de la elección de la sucesión, es lineal, es una extensión y

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leq \|f(x)\| \leq (1+\varepsilon)\|x\| \quad \text{para todo } x \in E.$$

□

Afirmación 4.1.1. Si $\mathbb{K}$ no es esféricamente completo, entonces $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, Ejemplo 2.4.4, y $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$ tienen disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.

Donde $(\mathbb{K}^2, \nu)$ es el espacio de la Proposición 3.4.6. Y $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$ es la suma directa normada, Definición 3.1.6, con la norma en este caso $\|\xi, x)\|_\oplus := \max\{\|x\|_\infty, \nu(\xi)\}$.

Demostración. Por la Definición 2.3.3 tenemos que $\mathbb{K}$ o tiene valoración densa o tine valoración discreta. Si suponemos que $\mathbb{K}$ no es esféricamente completo entonces por la contrarrecíproca del Teorema 2.3.1 tenemos que $\mathbb{K}$ no tiene una valoración discreta por lo que $\mathbb{K}$ tiene valoración densa. Entonces por la Proposición 2.3.7 tenemos que $|\mathbb{K}^*|$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$.

Veamos que c_0 tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$. En efecto. Sea $a \in \langle 0, \infty\rangle$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos

- Como $\overline{|\mathbb{K}^*|} = \langle 0, \infty\rangle$, entonces $B(a, \varepsilon) \cap |\mathbb{K} * | \neq \emptyset$. Esto es, existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tal que $|\,|\alpha| - a|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$.
- Elijamos $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0$ con $\|x\|_\infty > 0$. Luego para $|\alpha| > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $|x_n| < |\alpha|$.
- Definimos $y = (y_n)_{n\geq 1}$ donde

$$y_n := \begin{cases} \alpha\,, & \text{si } 1 \leq n \leq N \\ x_n\,, & \text{si } n \geq N+1 \end{cases}.$$

  Así definido $y = (y_n)_{n\geq 1}$ tenemos que $y_n \to 0$ desde que $x_n \to 0$, luego $y \in c_0$. Además $\|y\|_\infty = |\alpha| > 0$ por lo que $|\,\|y\|_\infty - a|_{\mathbb{R}} = |\,|\alpha| - a|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$.

Tenemos entonces que $\|y\|_\infty \in B(a, \varepsilon) \cap \|c_0^*\|_\infty$. Entonces $a \in \overline{\|c_0^*\|_\infty}$. Luego $\langle 0, \infty\rangle \subset \overline{\|c_0^*\|_\infty}$, de donde implicamos que $\|c_0^*\|_\infty$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$. Y en el Ejemplo 3.3.2 vimos que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ es de tipo contable. Entonces por el Teorema 4.1.1 tenemos que c_0 tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.

Ahora veamos que $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$ tiene disposición casi universal. En efecto. Por la Observación 3.4.3 sabemos que $(\mathbb{K}^2, \nu(\cdot))$ es un espacio de Banach de tipo contable y sabemos que c_0 es un espacio de Banach de tipo contable. Entonces por la Proposición 2.4.6 tenemos que $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$ es un espacio de Banach con la norma $(\xi, x) \longmapsto \max\{\nu(\xi), \|x\|_\infty\}$. Por la Proposición 3.3.6 tenemos que $c_0 \times \mathbb{K}^2$ es de tipo contable. Y como $c_0 \times \mathbb{K}^2 = c_0 \oplus \mathbb{K}^2$, Ejemplo 3.1.2, tenemos que $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$ es de tipo contable. Por otro lado. Sea $a \in \langle 0, \infty\rangle$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos

- Como $|\mathbb{K}^*|$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$ existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $|a - |\lambda||_{\mathbb{R}} < \varepsilon$. Así. Considerando $(\lambda, 0) \in \mathbb{K}^*$ tenemos $\nu(\lambda, 0) := \lim_{n\to\infty} |\lambda - 0.b_n| = |\lambda|$. Entonces $|\,a - \nu(\lambda, 0)\,|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$
- Como $\|c_0^*\|_\infty$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$ existe $z \in c_0$ tal que $|a - \|z\|_\infty|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$.
- Definimos (z, ξ) donde $\xi = (\lambda, 0)$. Así definido tenemos que $(z, \xi) \in c_o \oplus \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ y además

$$|a - \|(z, \xi)\|_\oplus|_{\mathbb{R}} := |a - \max\{\nu(\xi), \|z\|_\infty\}|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$$

Tenemos entonces que $\|(z,\xi)\| \in B(a,\varepsilon) \cap \|c_0^*\|$. Entonces $a \in \overline{\|c_0 \oplus \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}\|_\oplus}$. Luego $\langle 0,\infty\rangle \subset \overline{\|c_0 \oplus \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}\|_\oplus}$, de donde implicamos que $\|c_0 \oplus \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}\|_\oplus$ es denso en $\langle 0,\infty\rangle$. Y ya vimos que $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$ es de tipo contable. Entonces por el Teorema 4.1.1 tenemos que $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$ tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$. □

Afirmación 4.1.2. Si E y F son espacios normados isométricamente isomorfos, entonces $\|E^*\| = \|F^*\|$.

Demostración. Sea $T : E \to F$ el isomorfismo tal que $\|T(x)\| = \|x\|$. Sea $a \in \|F^*\|$, entonces existe $y \in F*$ tal que $a = \|y\|$. Para $y \in F^*$ existe $x \in E^*$ tal que $y = T(x)$ y $\|T(x)\| = \|y\| = \|x\|$. Entonces $a = \|x\| \in \|E^*\|$, luego $\|F^*\| \subset \|E^*\|$. Para tener la otra inclusión procedemos de manera análga con $T^{-1} : F \to E$ y tenemos que $\|E^*\| \subset \|F^*\|$. Concluimos que $\|E^*\| = \|F^*\|$. □

Teorema 4.1.2. Son equivalentes:

1. $\mathbb{K}$ es esféricamente completo y $|\mathbb{K}^*| = \langle 0,\infty\rangle$.
2. Todos los espacios de Banach no arquimedeanos sobre $\mathbb{K}$ de tipo contable y de disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$ son isométricamente isomorfos.

Demostración.

[1 $\Rightarrow$ 2] Sea E, F dos espacios de Banach no arquimedianos de tipo contable sobre $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ es esféricamente completo entonces por el Teorema 3.4.3 existe una base $1-$ortogonal de E. Por otro lado. Como $|\mathbb{K}^*| = \langle 0,\infty\rangle$, entonces $\|E\| \subset |\mathbb{K}|$. Así tenemos que $\|\cdot\|$ es una norma fuertemente sólida. Aplicando el Teorema 3.3.3 tenemos que E es isometricamente isomorfo a c_0. Análogamente tenemos que F es isométricamente isomoerfo a c_0. Concluimos que E y F son isométricamente isomorfos.

[2 $\Rightarrow$ 1] Supongamos que $\mathbb{K}$ no es esféricemante completo. Entonces por la Afirmación 4.1.1 tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y $(c_0 \oplus \mathbb{K}^2, \|\cdot\|_\oplus\|)$ son de disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$, luego por hipótesis son isométricamente isomorfos. Sabemos por el Ejemplo 3.3.1 que c_0 tiene una base ortogonal, entonces por la Observación 3.3.1 la imagen de esa base via el isomorfismo isométrico es una base ortogonal de $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$. Y como $\mathbb{K}^2$ es un subespacio (via identifiación con $\{0\} \times \mathbb{K}^2$ con la norma inducida $\|\cdot\|_\oplus = \nu(\cdot)$) de $c_0 \oplus \mathbb{K}^2$ por el Teorema 3.4.2 tenemos que $(\mathbb{K}^2, \nu(\cdot))$ tiene una base ortogonal, lo cual contradice el hecho de que por la Proposición 3.4.6 el espacio $(\mathbb{K}^2, \nu(\cdot))$ no tiene una base ortogonal. Por lo que es falso que $\mathbb{K}$ no sea esféricamente completo. Entonces $\mathbb{K}$ es esféricamente completo.

Ahora supongamos que $|\mathbb{K}^*| \neq \langle 0,\infty\rangle$. Por la Definición 2.3.3 tenemos que $\mathbb{K}$ o tiene valoración discreta o tiene valoración densa. Como estamos suponiendo $|\mathbb{K}^*| \neq |\langle 0,\infty\rangle$, ambos casos pueden suceder. Analicemos cada caso:

- Si $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta: Por la Proposición 2.3.7 existe un $\rho \in \mathbb{K}$ con $0 < |\rho| < 1$, denominado *elemento uniformizante* de $|\mathbb{K}^*|$, tal que $|\mathbb{K}^*| = \{\, |\rho|^n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$. Escojamos $A, B \subset \langle |\rho|, 1]$ tales que $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ con $A \cap B = \{1\}$ y $\overline{A} = \overline{B} = [\, |\rho|, 1\,]$ (intervalo cerrado). En el conjunto

$$c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{K};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}.$$

Como A y B son acotados entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot |x_n| = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot |x_n| = 0$ por lo que el máximo existe en las siguientes definiciones

$$\|x\|_A = \max_{n\geq 1}\{a_n \cdot |x_n|\}; \quad \text{y} \quad \|x\|_B = \max_{n\geq 1}\{b_n \cdot |x_n|\}$$

Así definidos $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_A$ procediendo como en la Proposición 2.4.4 podemos ver que $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_B$ son normas no arquimedianas. Veamos que $(c_0, \|\cdot\|_A)$ y $(c_0, \|\cdot\|_B)$ sean completos. En efecto. Sin pérdida de generalidad trabajemos en $(c_0, \|\cdot\|_A)$. En efecto. Sea $(x^m)_{m\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(c_0, \|\cdot\|_A)$, donde $x^m = (x_j^m)_{j\geq 1} \in c_0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $\|x^m - x^n\|_A < |\rho|\varepsilon$. Luego $\max_{k\geq 1} a_k \cdot |x_k^m - x_k^n < |\rho|\varepsilon$, y como $|\rho| < a_k$ para todo $k \geq 1$ tenemos

$$|x_k^m - x_k^n| < \varepsilon; \quad \text{para todo } k \geq 1 \text{ y } m, n > N.$$

Entonces para todo $k \geq 1$ la sucesión $(x_k^m)_{k\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ campo completo. Así, existe $x_k = \lim_{m\to\infty} x_k^m$. Definimos $x = (x_k)_{k\geq 1}$. Sabemos que como $x^m \in c_0$ luego $\lim_{k\to\infty} x_k^m = 0$, y como

$$|x_k| \leq \max\{|x_k - x_k^m|, |x_k^m|\}$$

podemos implicar que $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, por lo que $x = (x_k)_{k\geq 1} \in c_0$. Debemos ver que $x^m \to x$. En efecto.

$$\|x^m - x\|_A = \|(x_k^m - x_k)_{k\geq 1}\|_A = \max_{k\geq 1} a_k |x_k^m - x_k| \leq \max_{k\geq 1} |x_k^m - x_k|.$$

Haciendo $m \to \infty$ y la Proposición 2.3.3 tenemos que $\lim_{m\to\infty} \|x^m - x\| = 0$, de donde $\lim_{m\to\infty} x^m = x \in c_0$. Entonces $(c_0, \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach, de manera análoga $(c_0, \|\cdot\|_B)$ también es un espacio de Banach.

Ahora veamos que $(c_0, \|\cdot\|_A)$ y $(c_0, \|\cdot\|_B)$ sean de tipo contable. Sin pérdida de generalidad trabajemos en $(c_0, \|\cdot\|_A)$. En efecto.

Consideremos el subconjunto $G = \{(\delta_{nj})_{n\geq 1} \in c_0 \mid j \geq 1\}$ de c_0, donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker, por lo tanto es numerable. Veamos que $[G]$ es denso en $(c_0, \|\cdot\|_s)$. Sea $x \in c_0$, entonces $x = (w_j)_{j\geq 1}$ tal que $x_n \to 0$. Definimos el siguiente elemento $x^m := (w_1, \cdots, w_m, 0, 0, 0, \cdots) \in [G]$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $|x_n - 0| < \varepsilon$. Como $\|x - x^m\|_s = \max_{k\geq m+1} a_j \cdot |w_j| \leq \max_{k\geq m+1} |w_j|$, entonces para $m > n_0$ tenemos que $\|x - x^m\|_s < \varepsilon$. Así $\lim_{m\to\infty} x^m = x$, de donde $x \in \overline{[G]}$. Concluimos que $c_0 = \overline{[G]}$. Entonces $(c_0, \|\cdot\|_A)$ es de tipo contable. Análogamente $(c_0, \|\cdot\|_B)$ también es de tipo contable.

Nos interesa también ver que $\|c_0^*\|_A$ y $\|c_0^*\|_B$ sean densos en $\langle 0, \infty\rangle$. Sin pérdida de generalidad veamos que $\|c_0^*\|_A$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$. En efecto. Sea $a \in \langle 0, \infty\rangle$. Como $|\rho| < 1$, entonces consideremos $q = |\rho|^{-1} > 0$, podemos hallar un único $r_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $q^{r_1 - 1} \leq a < q^{r_1}$, ver este resultado en [14], entonces haciendo $r = -r_1$ tenemos

$$\frac{a}{|\rho|^r} \in [\,|\rho|, 1\rangle \subset \overline{A}; \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ para $\varepsilon/|\rho|^r > 0$ existe $a_{k_0} \in A$ tal que

$$| a - a_{k_0} \cdot |\rho|^r |_{\mathbb{R}} < \varepsilon \tag{4.6}$$

Definimos $x = (\rho^r \cdot \delta_{jk_0})_{j\geq 1} \in c_0$, es decir, las «componentes» de x son ceros excepto en la posición k_0. Entonces $\|x\|_A = a_{k_0} \cdot |\rho^r| = a_{k_0} \cdot |\rho|^r$. Reemplazando en (4.6) tenemos que

$$| \|x\|_A - a |_{\mathbb{R}} < \varepsilon; \quad x \in c_0$$

Tenemos entonces que $\|x\|_A \in B(a,\varepsilon) \cap \|c_0^*\|_A$. Entonces $a \in \overline{\|c_0^*\|_A}$. Luego $\langle 0, \infty\rangle \subset \overline{\|c_0^*\|_A}$, de donde implicamos que $\|c_0^*\|_A$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$. Análogamente tenemos que $\|c_0^*\|_B$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$.

Como $(c_0, \|\cdot\|_A)$ y $(c_0, \|\cdot\|_A)$ son espacios de Banach de tipo contable, además $\|c_0^*\|_B$ y $\|c_0^*\|_B$ son densos en $\langle 0, \infty\rangle$. Entonces por el Teorema 4.1.1 tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_A)$ y $(c_0, \|\cdot\|_A)$ son de disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$. Luego por hipótesis general tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_A)$ y $(c_0, \|\cdot\|_B)$ son isométricamente isomorfos.

Por la Afirmación 4.1.2 tenemos que

$$\|c_0^*\|_A = \|c_0^*\|_B.$$

Y como $a_1 = \|(1,0,0,0,\cdots)\| \in \|c_0^*\|_A$, entonces existe $b_k \in B$ tal que $a_1 = b_k \cdot |x_k| \in$. Además sabemos que $|x_k| = |\rho|^m$ para algún $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, pues si $m = 0$ tendriamos $a_1 = b_k \in B$ lo cual por construcción de A y B no sucede. Entonces

$$|\rho| < a_1 = b_k \cdot |\rho|^m < 1 \tag{4.7}$$

Y como $|\rho| < b_k \leq 1$, entonces $|\rho| \cdot |\rho|^m < b_k \cdot |\rho|^m \leq |\rho|^m$. Luego junto a (4.7) tenemos

$$\left|\begin{array}{ll} |\rho|^{m+1} & < 1 \\ |\rho| & < |\rho|^m \\ m & \neq 0 \end{array}\right. \tag{4.8}$$

De la primera desigualdad y que $m \neq 0$ en (4.8) tenemos que $m + 1 > 1$. Entonces $|\rho|^m < |\rho|$ lo cual contradice la segunda desigualdad en (4.8). Entonces

$$\|c_0^*\|_A \neq \|c_0^*\|_B.$$

Luego por la contrarrecíproca de la Afirmación 4.1.2 tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_A)$ y $(c_0, \|\cdot\|_B)$ no son isométricamente isomorfos. Esto contradice a la hipotesis general, es decir, por la cual sí son isométricamente isomorfos.

- Si $\mathbb{K}$ tiene valoración densa: Como $|\mathbb{K}^*| \neq \langle 0, \infty\rangle$. Entonces podemos elegir un elemento $s \in \langle 0, \infty\rangle \setminus |\mathbb{K}^*|$. En el espacio vectorial

$$c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{K};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

definimos

$$\|x\|_s = \text{máx}\{\ s \cdot |x_1|,\ \max_{n\geq 2} |x_n|\ \}. \tag{4.9}$$

Así definido tenemos:

- Como $s > 0$ y $|\alpha| \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\|x\|_s \geq 0$. Si $x = 0$, entonces $x_k = 0$ para todo $k \geq 1$, entonces $\|x\|_s = \text{máx}\{s \cdot |0|, \text{máx}_{k\geq 2}\,|0|\} = 0$. Por otro lado. Si $\|x\|_s = 0$, entonces $s \cdot |x_1| \leq 0$ y $|\,\text{máx}_{k\geq 2}\,|x_k| \leq 0$, luego $x_k = 0$ para todo $k \geq 1$.Así $x = 0$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y como $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_s = \|(\lambda x_n)_{n\geq 1}\|_s &:= \text{máx}\left\{ s \cdot |\lambda x_1|,\ \max_{k\geq 2} |\lambda x_n| \right\} \\
&= \text{máx}\left\{ s \cdot |\lambda| \cdot |x_1|,\ |\lambda| \cdot \max_{k\geq 2} |x_n| \right\} \\
&= |\lambda|\,\text{máx}\left\{ s \cdot |x_1|,\ \max_{k\geq 2} |x_n| \right\} = |\lambda| \cdot \|x\|_s
\end{aligned}$$

- Como $|\alpha + \beta| \leq \text{máx}\{|\alpha|, |\beta|\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_s = \|(x_n + y_n)_{n\geq 2}\|_s &:= \text{máx}\left\{ s \cdot |x_1 + y_1|,\ \max_{n\geq 2} |x_n + y_n| \right\} \\
&\leq \text{máx}\left\{ s \cdot \text{máx}\{|x_1|, |y_1|\},\ \text{máx}\left\{ \max_{n\geq 2}\{x_n\}, \max_{n\geq 2}\{y_n\} \right\} \right\} \\
&= \text{máx}\left\{ \text{máx}\left\{ s \cdot |x_1|,\ \max_{n\geq 2}\{x_n\} \right\},\ \text{máx}\left\{ s \cdot |y_1|,\ \max_{n\geq 2}\{y_n\} \right\} \right\} \\
&= \text{máx}\left\{ \|x\|_s,\ \|y\|_s \right\}.
\end{aligned}$$

- Sea $(x^m)_{m\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(c_0, \|\cdot\|_s)$, donde $x^m = (x_k^m)_{k\geq 1}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $\|x^m - x^n\| < \varepsilon$. Así

$$|x_k^m - x_k^n| < \frac{\varepsilon}{s},\ \text{si } k = 1 \quad \text{y} \quad |x_k^m - x_k^n| < \varepsilon,\ \text{si } k \geq 2.$$

  Entonces para cada $k \geq 1$ tenemos que $(x_k^m)_{m\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ campo completo. Luego existe $\lim_{m\to\infty} x_k^m = x_k \in \mathbb{K}$. Definimos el elemento $x = (x_k)_{k\geq 1}$. Como $x^m = (x_k^m)_{k\geq 1} \in c_0$ tenemos que $\lim_{k\to\infty} x_k^m = 0$. Y como

$$|x_k| \leq \text{máx}\{|x_k - x_k^m|; |x_k^m|\}$$

  podemos implicar que $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ por lo que $x \in c_0$. Ahora veamos que $x^m \to x$. En efecto.

$$\|x^m - x\|_s := \text{máx}\left\{ s \cdot |x_1^m - x_1|;\ \max_{k\geq 2} |x_k^m - x_k| \right\}$$

  haciendo $m \to \infty$ y por la Proposición 2.3.3 tenemos $\|x^m - x\|_s \to 0$ de donde $\lim_{m\to\infty} x^m = x \in c_0$

Entonces tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_s)$ es un espacio de Banach.

Ahora nos interesa saber que $\|c_0^*\|_s$ sea denso en $\langle 0, \infty\rangle$. En efecto. Sea $a \in \langle 0, \infty\rangle$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos

- Como $\mathbb{K}$ tiene valoración densa entonces por la Proposición 2.3.7 tenemos $\overline{|\mathbb{K}^*|} = \langle 0, \infty\rangle$, entonces $B(a, \varepsilon) \cap |\mathbb{K}^*| \neq \emptyset$. Esto es, existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tal que $|\,|\alpha| - a|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$.
- Elijamos $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0$ con $\|x\|_s > 0$. Luego para $|\alpha| > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $|x_n| < |\alpha|$.
- Definimos $y = (y_n)_{n\geq 1}$ donde

$$y_n := \begin{cases} 0\,, & \text{si } n = 1 \\ \alpha\,, & \text{si } 2 \leq n \leq N\,. \\ x_n\,, & \text{si } n \geq N+1 \end{cases}$$

  Así definido $y = (y_n)_{n\geq 1}$ tenemos que $y_n \to 0$ desde que $x_n \to 0$, luego $y \in c_0$. Además $\|y\|_s = |\alpha| > 0$ por lo que $|\,\|y\|_s - a|_{\mathbb{R}} = |\,|\alpha| - a|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$.

Tenemos entonces que $\|y\|_s \in B(a, \varepsilon) \cap \|c_0^*\|_s$. Entonces $a \in \overline{\|c_0^*\|_s}$. Luego $\langle 0, \infty\rangle \subset \overline{\|c_0^*\|_s}$, de donde implicamos que $\|c_0^*\|_s$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$.

Veamos ahora que $(c_0, \|\cdot\|_s)$ es de tipo contable. En efecto. Consideremos el subconjunto $G = \{(\delta_{nj})_{n\geq 1} \in c_0 \mid j \geq 1\}$ de c_0, donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker, por lo tanto es numerable. Veamos que $[G]$ es denso en $(c_0, \|\cdot\|_s)$. Sea $x \in c_0$, entonces $x = (w_j)_{j\geq 1}$ tal que $x_n \to 0$. Definimos el siguiente elemento $x^m := (w_1, \cdots, w_m, 0, 0, 0, \cdots) \in [G]$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $|w_n - 0| < \varepsilon$. Como $\|x - x^m\|_s = \max_{k\geq m+1} |w_j|$, entonces para $m > n_0$ tenemos que $\|x - x^m\|_s < \varepsilon$. Así $\lim_{m\to\infty} x^m = x$, de donde $x \in \overline{[G]}$. Concluimos que $c_0 = \overline{[G]}$. Entonces $(c_0, \|\cdot\|_s)$ es de tipo contable.

En resumen. Tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_s)$ es un espacio de Banach de tipo contable y que $\|c_0^*\|_s$ es denso en $\langle 0, \infty\rangle$. Entonces por el Teorema 4.1.1 tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_s)$ tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.

Por otro lado. En la prueba de la Afirmación 4.1.1 ($\mathbb{K}$ no es esféricamente completo implica que $\mathbb{K}$ tiene valoración densa.) que al tener $\mathbb{K}$ una valoración densa $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.

Entonces por hipótesis $(c_0, \|\cdot\|_s)$ y $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ son isométricamente isomorfos.

Por otro lado. Del Ejemplo 3.1.1 tenemos $\|c_0^*\|_\infty = |\mathbb{K}^*|$ y por la Proposición 2.3.5 sabemos que $|\mathbb{K}^*|$ es un grupo multiplicativo. Como $s \in \langle 0, \infty\rangle \setminus |\mathbb{K}^*|$, entonces existe $|\alpha| \in |\mathbb{K}^*|$ talq que $s \cdot |\alpha| \notin |\mathbb{K}^*| = \|c_0^*\|_\infty$. Entonces para $s \cdot |\alpha|$ tenemos

$$s \cdot |\alpha| \notin \|c_0^*\|_\infty \quad \text{y} \quad s \cdot |\alpha| = \|(\alpha, 0, 0, 0, \cdots)\|_s \in \|c_0^*\|_s.$$

Así $\|c_0^*\|_\infty \neq \|c_0^*\|_s$, entonces por la contrarrecíproca de la Afirmación 4.1.2 tenemos que $(c_0, \|\cdot\|_s)$ y $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ no son isométricamente isomorfos. Esto contradice a lo obtenido por las hipótesis, es decir, por la cual sí son isométricamente isomorfos.

En cada caso llegamos a una contradicción. Concluimos que $|\mathbb{K}^*| = \langle 0, \infty \rangle$. □

Teorema 4.1.3. Sea $\mathbb{K}$ un campo valuado no arquimediano. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. Cada espacio de Banach de tipo contable sobre $\mathbb{K}$ tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.
2. $\mathbb{K}$ tiene valoración densa.

Demostración.

[1 $\Rightarrow$ 2] Supongamos que $\mathbb{K}$ no es densa. En la demostración de la Afirmación 4.1.1 explicamos que o $\mathbb{K}$ tiene valoración densa o $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta. Entonces $\mathbb{K}$ tiene valoración discreta. Por la Proposición 2.3.7 existe un $\rho \in \mathbb{K}$ con $0 < |\rho| < 1$, denominado *elemento uniformizante* de $|\mathbb{K}^*|$, tal que $|\mathbb{K}^*| = \{\, |\rho|^n \;\mid\; n \in \mathbb{Z} \,\}$. Consideremos el espacio $E := (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y sabemos por el Ejemplo 3.1.1 que $\|E^*\|_\infty = |\mathbb{K}^*|$. Por otro lado. Definimos $s := (|\rho| + 1)/2$ y elegimos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < \frac{1-s}{s} = \frac{s - |\rho|}{s}.$$

También en $\mathbb{K}^2$ definimos $\|(u,v)\|_s := \text{máx}\{\, |u|,\ s \cdot |v| \,\}$. Procediento de manera análoga como para la norma en (4.9) tenemos que $\|\cdot\|_s$ es una norma no arquimediana. Luego definiendo $Y := (\mathbb{K}, \|\cdot\|_s) \in \mathcal{U}_{FNA}$, es decir, Y es un espacio normado no arquimediano de dimensión finita. Sea $X := [(1,0,0,0,\cdots)]$ subespacio normado de E, entonces $X \in \mathcal{U}_{FNA}$. Ahora definimos $\varphi : X \to Y$ por $\varphi(\lambda \cdot e_1) := (\lambda, 0)$. Así definido φ tenemos

- φ está bien definido desde que para cada $x \in X$ existe un único $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $x = \lambda \cdot e_1$.
- φ es lineal: Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 \cdot e_1 + \alpha \cdot \lambda_2 \cdot e_1) = \varphi((\lambda_1 + \alpha \cdot \lambda_2)e_1) &:= (\lambda_1 + \alpha \cdot \lambda_2, 0) \\ &= (\lambda_1, 0) + \alpha(\lambda_2, 0) = \varphi(\lambda_1 \cdot e_1) + \alpha \cdot \varphi(\lambda_2 \cdot e_1).\end{aligned}$$

- φ es una isometría: Sea $x = \lambda \cdot e_1 \in X$, entonces

$$\|\varphi(x)\|_s = \|(\lambda, 0)\|_s := \text{máx}\{|\lambda|, s \cdot |0|\} = |\lambda| = \|x\|_\infty$$

Tenemos que $\varphi : X \to Y$ es un embebimiento isométrico. Por hipótesis E tiene disposición universal, por lo que que existe una ε-isometría $f : Y \to E$ con $f \circ i = \text{id}_X$. Entonces, para $x = (0,1) \in Y$ obtenemos $\|x\|_s = s$ y

$$(1-\varepsilon) \cdot s \leq \|f(x)\| \leq (1+\varepsilon) \cdot s.$$

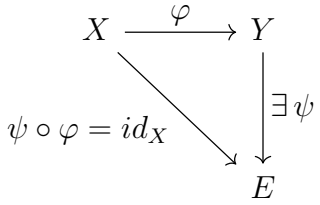
Notemos que $\|E^*\| = \{|\rho|^n : n \in \mathbb{Z}\}$, por lo tanto (revisar la construcción de ρ en la Proposición 2.3.7), $\langle |\rho|, 1 \rangle \cap \|E^*\| = \emptyset$. Pero $(1-\varepsilon) \cdot s > |\rho|$ y $(1+\varepsilon) \cdot s < 1$, lo cual es una contradicción.

[2 $\Rightarrow$ 1] Como $\mathbb{K}$ tiene valoración densa, entonces por el Corolario 4.1.1 concluimos que cada espacio de Banach de tipo contable definido sobre $\mathbb{K}$ tiene disposición casi universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$. □

4.2. Espacios de Banach no arquimedianos de disposición universal para espacios de dimensión finita

Definición 4.2.1. Un espacio de Banach E se dice que tiene *disposición universal* para la clase $\mathcal{U}$ (clase de los espacios normados de dimensión finita) si satisface:

Para cada embebimiento isométrico $\varphi : X \to Y$, donde $X, Y \in \mathcal{U}$ y $X \subset E$, existe un embebimiento isométrico $\psi : Y \to E$ tal que $\psi \circ \varphi(x) = x$ para todo $x \in X$.



Observación 4.2.1. Cuando nos restrinjamos a la clase $\mathcal{U}_{FNA}$ diremos que E espacio de Banach tiene *disposición universal para la clase* $\mathcal{U}_{FNA}$ (clase de los espacios normados no arquimedianos de dimensión finita) como se menciona en la Definición 4.2.1.

Afirmación 4.2.1. Sean X, Y dos espacios normados no arquimedianos. Si $\varphi : X \to Y$ es un embebimiento isométrico, entonces φ es inyectiva.

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = 0$. Como φ es lineal e isometría tenemos $\|x - y\| = \|\varphi(x - y)\| = 0$ de donde $x - y = 0$, esto es, $x = y$. Concluimos que φ es inyectiva. □

Los espacios de Banach no arquimedianos que tienen disposición universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$ se caracterizan según el Teorema 4.2.1, lo que nos permite verificar de manera inmediata si un espacio posee esta disposición universal.

Teorema 4.2.1. Sea E un espacio de Banach no arquimediano que cumpla la siguiente propiedad:

Para cada espacio normado no arquimediano Y de dimensión finita y cada embebimiento isométrico $g : Z \to E$, donde $Z \subset Y$ un subespacio, existe un embebimiento isométrico $f : Y \to E$ tal que $\| g - f|_Z \| < 1$.

Entonces, E tiene disposición universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.

Demostración. Sean $t = \|g - f|_Z\|$, $n_Z = \dim Z$ y $n_Y = \dim Y$. Entonces, $n_Z \leq n_Y$. Como $t \in \langle 0, 1\rangle$, entonces por el Teorema 3.3.1 existe $\{y_1, \ldots, y_{n_Y}\}$, una base $\sqrt{t}$-ortogonal de Y, y por la Observación 3.3.2 podemos tomar $[y_1, \ldots, y_{n_Z}] = Z$.

Definimos $\Psi : Y \to E$ primeramente en la base de Y por

$$\Psi(x_n) := \begin{cases} g(y_n); & \text{si } n \leq n_Z \\ f(y_n); & \text{si } n_Z < n \leq n_Y. \end{cases}$$

Ahora definimos para $y \in Y$. En efecto. Como

$$y = \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j y_j + \sum_{j=n_Z+1}^{n_Y} \lambda_j y_j$$

de manera única, entonces

$$\Psi(y) := \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j g(y_j) + \sum_{j=n_Z+1}^{n_Y} \lambda_j f(y_j).$$

Así defindo Ψ tenemos

- $\Psi(y) = g(y)$ para todo $y \in Z$ desde que g es una aplicación lineal.
- Ψ es lineal desde que g y f son lineales.

Además Ψ es una isometría. En efecto. Sea

$$y = \sum_{j=1}^{n_Y} \lambda_j y_j \in Y, \quad y \neq 0$$

entonces como $f : Y \to E$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(y)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j g(y_j) + \sum_{j=n_Z+1}^{n_Y} \lambda_j f(y_j) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j g(y_j) - \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j f(y_j) + \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j f(y_j) + \sum_{j=n_Z+1}^{n_Y} \lambda_j f(y_j) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j \left(g(y_j) - f(y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n_Y} \lambda_j f(y_j) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j \left(g(y_j) - f(y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n_Y} \lambda_j f(y_j) \right\| \\
&= \left\| (g-f)\left(\sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j y_j \right) + f\left(\sum_{j=1}^{n_Y} \lambda_j y_j \right) \right\| \\
&= \|(g-f)(y_0) - f(x)\|.
\end{aligned}$$

Esto es

$$\|\Psi(y)\| = \|(g-f)(y_0) - f(x)\|, \quad \text{donde } y_0 = \sum_{j=1}^{n_Z} \lambda_j y_j \in Z. \tag{4.10}$$

Por otro lado. Como $y = y_0 + \sum_{j=n_Z+1}^{n_Y} \lambda_j y_j$ y $\{y_1, \cdots, y_{n_Z}\}$ es $\sqrt{t}-$ortogonal, entonces por el Teorema 3.2.8 tenemos

$$\|y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n_Y} \lambda_j y_j \right\| \geq \sqrt{t} \cdot \max_{1 \leq j \leq n_Y} \|\lambda_j y_j\| = \sqrt{t} \cdot \max\left\{ \max_{1 \leq j \leq n_Z} \|\lambda_j y_j\|, \max_{n_Z+1 \leq j \leq n_Y} \|\lambda_j y_j\| \right\}$$

y por la desigualdad ultramétrica tenemos

$$\max\left\{ \|y_0\|, \left\| \sum_{j=n_Z+1}^{n_Y} \right\| \right\} \leq \max\left\{ \max_{1 \leq j \leq n_Z} \|\lambda y_j\|, \max_{n_Z+1 \leq j \leq n_Y} \|\lambda_j y_j\| \right\}.$$

Entonces tenemos

$$\|y\| \geq \sqrt{t} \cdot \max \left\{ \|y_0\|, \left\| \sum_{j=n_Z+1}^{n_Y} \lambda_j y_j \right\| \right\} \geq \sqrt{t} \cdot \|y_0\|$$

Luego como $t = \|g - f|_Z\|$ y f es una isometría tenemos

$$\|(g-f)(y_0)\| \leq \|g - f|_Z\| \cdot \|y_0\| = t \cdot \|y_0\| \leq \sqrt{t} \cdot \|y\| < \|y\| = \|f(y)\|.$$

Esto es $\|(g-f)(y_0)\| < \|f(y)\|$. Entonces por la Observación 2.4.2 tenemos que

$$\|(g-f)(y_0) + f(x)\| = \max \{\|(g-f)(y_0)\|, \|f(y)\| \} = \|f(y)\|.$$

Así. En (4.10) tenemos

$$\|\Psi(y)\| = \|f(y)\| = \|y\|; \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Procedamos a mostrar que E tiene disposición universal. Sea $\varphi : X \to Y$ un embebimiento isométrico, donde $X, Y \in \mathcal{U}_{FNA}$ y $X \subset E$. Definimos $Z = \varphi(X)$, entonces Z es un subespacio de Y. Por la Afirmación 4.2.1 tenemos que φ es inyectiva por lo que podemos definir $g : Z \to E$ por $g(\varphi(x)) = x \in X \subset E$. Así definido g tenemos

- g es lineal: Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y como φ es lineal, entonces

$$g\left(\varphi(x) + \lambda\varphi(y)\right) = g\left(\varphi(x + \lambda y)\right) = x + \lambda y = g(\varphi(x)) + \lambda g(\varphi(y)).$$

- g es una isometría: Como $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ y $g(\varphi(x)) = x$, entonces

$$\|g(\varphi(x))\| = \|\varphi(x)\|; \quad \text{para todo } \varphi(x) \in Z$$

Tenemos que $g \to Z \to Y$ es un embebimiento isométrico. Por hipótesis existe $f : Y \to E$ un embebimiento isométrico tal que $\|g - f_Z\| < 1$. Al inicio construimos bajo las condiciones que tenemos a $\Psi : Y \to E$ un embebimiento isométrico tal que $\Psi|_Z = g$. Finalmente debemos verificar que $\Psi(\varphi)(x) = x$ para todo $x \in X$. En efecto. Sea $x \in X$, entonces $g(x) \in Z$, luego $\Psi(\varphi(x)) = \Psi|_Z(\varphi(x)) = g(\varphi(x)) = x$. Haciendo $\psi := \Psi$ tenemos las notaciones de la Definición 4.2.1. Concluimos que E tiene disposición universal.

□

El Teorema 4.2.1 es fundamental en la teoría de los espacios de Banach no arquimedianos con disposición universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$, que agrupa a los espacios normados no arquimedianos de dimensión finita. Este teorema asegura que si un espacio de Banach E tiene la propiedad de extender cualquier embebimiento isométrico de un subespacio Z de un espacio finito-dimensional Y a un embebimiento isométrico de Y en E, entonces E tiene disposición universal para la clase $\mathcal{U}_{FNA}$.

La relevancia de este teorema radica en que proporciona una herramienta esencial para construir espacios universales en el contexto no arquimediano, demostrando que cualquier espacio de Banach de tipo numerable sobre un campo densamente valuado puede ser embebido isométricamente en un espacio universal. Esto resulta crucial para el estudio de la completitud esférica y las propiedades isométricas en estos espacios.

Estos resultados se presentan en el artículo de J. Kąkol, Kubiś y A. Kubzdela (2017) [8]. Dado que el enfoque del presente trabajo no es estudiar estos espacios en particular, no se sigue el desarrollo completo de dicho artículo, sino que se destaca la aplicabilidad del Teorema 1.3 en el marco de este análisis.

4.3. Conclusión

Conclusión

En esta tesis, se ha explorado exhaustivamente la estructura y propiedades de los espacios de Gurariĭ no arquimedianos, un tema de gran relevancia en el análisis funcional no arquimediano. A través de un enfoque riguroso y detallado, se han establecido las condiciones necesarias para la existencia de estos espacios en relación con campos no arquimedianos, completos y no trivialmente valuados.

Se ha demostrado que los espacios de Banach no arquimedianos de tipo contable tienen una disposición casi universal, como se establece en el Teorema 4.1.3, que especifica que estos espacios solo pueden existir en espacios métricos no arquimedianas definidas sobre campos con valoración densa. Este resultado subraya la importancia de la estructura del campo en el comportamiento de los espacios en cuestión.

Además, la afirmación de que el espacio $c_0(\mathbb{K})$ es un espacio de Gurariĭ si $\mathbb{K}$ tiene valoración densa se ha validado mediante la Afirmación 4.1.1. Esto proporciona un ejemplo concreto que ilustra la aplicabilidad de los conceptos teóricos desarrollados a lo largo de la tesis.

El Teorema 4.2.1 nos da un criterio efectivo para identificar espacios con disposición universal, que se traduce en una herramienta práctica para el estudio de los espacios de Gurariĭ. Esto permite clasificar y analizar nuevos ejemplos de espacios de Banach no arquimedianos, enriqueciendo así el campo de estudio.

En conclusión, la tesis no solo cumple con lo que se propone en el resumen e introducción, sino que también expande el entendimiento de los espacios de Gurariĭ en el contexto no arquimediano, proporcionando herramientas prácticas para su identificación y análisis.

Apéndice A

A.1. Relación de orden parcial y Lema de Zorn

Definición A.1.1 (Relación de orden parcial)**.** Dada una relación "$\prec$" en un conjunto $\mathcal{F}$, decimos que $\prec$ es una *relación de orden parcial* si cumple:

1. *Reflexividad*: Para todo $a \in \mathcal{F}$, se cumple que $a \prec a$.
2. *Antisimetría*: Para todos $a, b \in \mathcal{F}$, si $a \prec b$ y $b \prec a$, entonces $a = b$.
3. *Transitividad*: Para todos $a, b, c \in \mathcal{F}$, si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$.

Observación A.1.1. Sean $a, b \in \mathcal{F}$. Decimos que a es *mayor* que b si $b \prec a$.

Proposición A.1.1. La relación de inclusión "$\subset$" es una relación de orden parcial en el conjunto de subconjuntos de un conjunto dado.

Demostración. Sea X un conjunto y consideremos $\mathcal{F}$, un subconjunto del conjunto potencia de X con la relación de inclusión "$\subset$". Entonces

- *Reflexividad*: Para cualquier subconjunto $A \subset X$, se cumple que $A \subset A$.
- *Antisimetría*: Para cualesquiera subconjuntos $A, B \subset X$, si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$.
- *Transitividad*: Para cualesquiera subconjunto $A, B, C \subset X$, si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Concluimos que "$\subset$" es una relación de orden parcial en $\mathcal{F}$. □

Definición A.1.2 (Orden total)**.** Sea $\mathcal{F}$ un conjunto con una relación de orden parcial $\prec$. Decimos que $\prec$ es un *orden total* (o *orden lineal*) en $\mathcal{F}$ si cumple la siguiente propiedad:

4. *Comparabilidad*: para cualquier par de elementos $a, b \in \mathcal{F}$, se cumple que $a \prec b$ o $b \prec a$ (o ambos).

Definición A.1.3. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto parcialmente ordenado con una relación de orden parcial "$\prec$". Un subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ se llama *cadena* si $\mathcal{C}$ es totalmente ordenado con la relación "$\prec$".

Observación A.1.2. Sea $d \in \mathcal{F}$. Decimos que d es una *cota superior* de $\mathcal{C}$ si $a \prec d$ para todo $a \in \mathcal{C}$.

Lema A.1.1 (Lema de Zorn)**.** Supongamos que $\mathcal{F}$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada cadena en $\mathcal{F}$ tiene una cota superior en $\mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{F}$ contiene al menos un elemento maximal(no existe otro elemento que sea estrictamente mayor que él con la relación de orden).

Bibliografía

[1] Dorronsoro, J. & Hernández, E. (1996). *Números, grupos y anillos*. Universidad Autónoma de Madrid.

[2] Gouvêa, F. (2020). *p−adict Numbers: An Introduction*. Springer.

[3] Gurariĭ, V. (1966). *Spaces of universal placement, isotropic spaces and a problem of Mazur on rotations of Banach spaces, Sibirsk*. Mat. Zh. 7. 1002 - 10013. (En Ruso).

[4] Hoffman, K. & Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. Prentice Hall.

[5] Lazar, A. & Lindenstrauss, J. (1971). *Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representing matrices*. Acta Math. 126. 165 - 193.

[6] Lusky, W. (1976). *The Gurariĭ spaces are unique*. Arch. Math. (Basel) 27. 627 - 635.

[7] Kubiś, W. & Solecki, S. (2013). *Proof of Uniqueness of the Gurariĭ space*. Israel J. Math 195. 449 - 456.

[8] Kąkol, J. & Kubiś, W. & Kubzdela, A. (2017) *On non-archimedean Gurariĭ spaces*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 450, no. 2, pp. 969-981. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.01.072

[9] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley.

[10] Panzone, R. (1983). *Lecciones Preliminares de Análisis Funcional*. Universidad Naciona del Sur Bahia Blanca. Argentina.

[11] Perez-Garcia, C. & Shikhof, W. (2010). *Locally Convex Spaces over Non-Arquimedian Valued Fields*. Cambridge University Press. Cambridge.

[12] Shikhof, W. (1984). *Ultramretic Calculus*. Cambridge University Press.

[13] Van Rooij, A. (1978). *Non-Archimedian Functional Analysis*. Marcel Dekker. New York.

[14] Zorich, V. (2004). *Mathematical Analysis I*. Springer.