



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Matemáticas**

**Escuela Profesional de Matemática**

**Algunos resultados en estereometría utilizando el  
álgebra geométrica**

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**AUTOR**

Jorge Gerardo BELLIDO TOHALINO

**ASESOR**

Edgar Diógenes VERA SARA VIA

Lima, Perú

2018



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Bellido, J. (2018). *Algunos resultados en estereometría utilizando el álgebra geométrica*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS  
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34  
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610  
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe  
Lima - Perú

### Escuela Profesional de Matemática

#### ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las .....17:14..... horas del Jueves 6 de diciembre de 2018, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (PRESIDENTE), Mg. Galindo Taza Chambi (MIEMBRO), Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «ALGUNOS RESULTADOS EN ESTEREOMETRÍA UTILIZANDO EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA», presentado por el señor Bachiller JORGE GERARDO BELLIDO TOHALINO, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:


..... Dieciocho ..... ( 18 ). sobresaliente

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, manifestó que el señor Bachiller JORGE GERARDO BELLIDO TOHALINO, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 18:10 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

  
DR. JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA  
PRESIDENTE

  
MG. GALINDO TAZA CHAMBI  
MIEMBRO

  
DR. EDGAR DIÓGENES VERA SARAVIA  
MIEMBRO ASESOR

ALGUNOS RESULTADOS EN ESTEREOMETRÍA  
UTILIZANDO EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

JORGE GERARDO BELLIDO TOHALINO

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobado por:



---

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya.  
Presidente del Jurado



---

Mg. Galindo Taza Chambi.  
Miembro del jurado



---

Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia.  
Miembro Asesor

**Lima - Perú**

**Diciembre - 2018**

## FICHA CATALOGRÁFICA

JORGE GERARDO BELLIDO TOHALINO

Algunos resultados en estereometría utilizando el álgebra geométrica,  $\text{\LaTeX}$ , (Lima) 2018.

viii, 91 p. 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2018)

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática.

I. UNMSM/Facultad de Ciencias Matemáticas

II. Algunos resultados en estereometría utilizando el álgebra geométrica (álgebra geométrica).

## ***DEDICATORIA***

- *A Mercedes Tohalino mi amada madre por el amor, apoyo, paciencia y los consejos que me brinda.*
- *A mis hermanos Ida y Alcides, por el apoyo y los consejos .*

# Agradecimientos

A mi familia en especial a mi madre, Mercedes, por su amor y la educación que me brindó.

A mi asesor profesor Dr. Edgar Vera Saravia, por dedicarme parte de su tiempo, por su paciencia, por las charlas académicas y las no académicas.

A mis amigos, en especial a Leyter Potenciano M. por darme aliento a continuar, por las aménas charlas y por creer en mí.

Um agradecimiento especial a mi hermano Alcides por ayudarme a elaborar los gráficos del presente trabajo.

Finalmente al cuerpo docente de nuestra facultad de Matemática por la transmisión de sus conocimientos.

## RESUMEN

# ALGUNOS RESULTADOS EN ESTEREOMETRÍA UTILIZANDO EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

JORGE GERARDO BELLIDO TOHALINO

Diciembre - 2018

Asesor : Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia.  
Título Obtenido : Licenciado en Matemática.

Muchas demostraciones que se ofrecen en la Geometría, tanto la clásica como la analítica, se inician recurriendo a trazos geométricos, en algunos casos intuitivos, continuando con un proceso estrictamente geométrico.

Surge por lo tanto la siguiente pregunta:

¿Es posible complementar esas demostraciones estrictamente geométricas?.

La respuesta es afirmativa porque existe la estructura matemática que permite esto: El álgebra geométrica que enriquece las demostraciones tradicionales con un sustento matemático algebraico, sin proponer que se prescindiera de los trazos geométricos.

Palabras Claves :   ÁLGEBRA GEOMÉTRICA  
                          BIVECTOR UNITARIO  
                          PROYECCIÓN ORTOGONAL

## ABSTRACT

# SOME RESULTS IN STEREOMETRY USING THE GEOMETRIC ALGEBRA

JORGE GERARDO BELLIDO TOHALINO

December - 2018

Adviser : Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia.  
Obtained Degree : Mathematician.

Many demonstrations that are offered in Geometry, both classical and analytical, are initiated by using geometric traces, in some cases intuitive, continuing with a strictly geometric process.

Therefore, the following question arises: Is it possible to complement these strictly geometric demonstrations?

The answer is affirmative because there is the mathematical structure that allows this: The geometric algebra that enriches the traditional demonstrations with an algebraic mathematical support, without proposing that the geometric traces are ignored.

Keywords : GEOMETRIC ALGEBRA  
UNIT BIVECTOR  
ORTOGONAL PROJECTION

# Índice general

<b>1. El álgebra geométrica euclídeana tridimensional</b>	<b>4</b>
1.1. El subespacio de los j-vectores . . . . .	12
1.2. Subespacios y subálgebras de $AG(3)$ . . . . .	15
1.3. Producto interior, exterior y escalar . . . . .	18
<b>2. Sobre Espacios Afines</b>	<b>25</b>
2.1. Bosquejando el Espacio Euclídeano Tridimensional . . . . .	26
<b>3. Preliminares</b>	<b>28</b>
3.1. Vector combinación lineal . . . . .	33
3.2. Desigualdad de Cauchy-Schwartz . . . . .	36
3.3. Módulo del bivector . . . . .	38
3.4. Bivector unitario . . . . .	41
3.5. Reflexión y Rotación . . . . .	45
3.6. Ángulo entre bivectores. . . . .	46
3.7. Resultados Auxiliares . . . . .	48
<b>4. Geometría euclídeana tridimensional</b>	<b>55</b>
4.1. Vector proyección a un plano . . . . .	56
4.2. Teorema de las tres perpendiculares . . . . .	66
4.3. Módulo del bivector proyección ortogonal respecto a otro bi- vector. . . . .	67
4.4. Diedros y ángulos determinados por las aristas . . . . .	70
4.4.1. Ley de senos para el trivector . . . . .	71
4.4.2. Teorema de cosenos para el trivector. . . . .	73
4.5. Teoremas de trivectores . . . . .	78

# Índice de figuras

3.1. Vector combinación líneal. . . . .	33
3.2. Bivector unitario. . . . .	41
3.3. Determinación del bivector unitario. . . . .	43
3.4. Ángulo diedro. . . . .	47
4.1. Descomposición de un vector respecto a un plano. . . . .	57
4.2. Posiciones relativas entre vectores. . . . .	60
4.3. Vector ortogonal al vector combinación líneal. . . . .	62
4.4. Vector proyección ortogonal a $\pi$ . . . . .	65
4.5. Teorema de las tres perpendiculares. . . . .	67
4.6. Proyección ortogonal del bivector respecto a otro. . . . .	69
4.7. Relación del ángulo diedro. . . . .	70
4.8. Ley de senos para el trivector. . . . .	72
4.9. Teorema de cosenos. . . . .	77
4.10. Circuncentro de un Trivector en particular. . . . .	79
4.11. Vector bisectriz. . . . .	80
4.12. Relación entre diedros y ángulos. . . . .	83
4.13. Trivector trirectángulo. . . . .	85
4.14. Cálculo del coseno del ángulo diedro. . . . .	87
4.15. Relación de Pitágoras en el espacio. . . . .	88
4.16. Ortocentro del trivector trirectángulo. . . . .	90
4.17. Relación entre módulos de vectores que determinan un trivector. . . . .	92

# Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar, recurriendo al álgebra geométrica una demostración alternativa de algunos resultados, que se estudian en geometría euclídeana tridimensional.

La parte de la geometría que se dedica al estudio de las figuras situadas en el espacio, se denomina **Estereometría**, que proviene del griego *στερομετρία* (stereometria), **stereo** que significa sólido y **metría** que viene de la raíz **me-tron** que significa medida.

Etimológicamente, Geometría quiere decir medida de la tierra. Esta denominación griega es justificada por el historiador Herodoto (siglo quinto A.C.), que atribuyo a los egipcios el origen de esa ciencia. Según él, el impuesto que pagaban los propietarios de tierras en Egipto era directamente proporcional al área de cada lote. Los rebalses del río Nilo muchas veces hacían desaparecer parte de las tierras de los agricultores. Entonces los cobradores de impuestos del Faraón tenían que recalcular cada área para que la cobranza fuese ajustada. También era necesario, para efectos del comercio, que se supiera calcular el volumen de cada depósito de grano.

Así, el cálculo de áreas y volúmenes es un asunto milenario, cuya importancia se reveló muy temprano, aún en las civilizaciones organizadas de forma simple en relación a los patrones actuales.

Descubrimientos históricos recientes revelaron que los conocimientos matemáticos de los babilonios (denominación genérica para los diversos pueblos que, durante 3,000 años, ocuparon sucesivamente Mesopotamia, región aproximadamente correspondiente al Irak de hoy) eran más extensos y avanzados que los de los egipcios. Esto es particularmente cierto en Álgebra y en cálculos numéricos, pero también ocurre en Geometría, donde además de conocer las áreas y volúmenes de figuras geométricas simples, los babilonios sabían resolver problemas que incluían la relación de Pitágoras, que les era familiar mil años antes que los pitagóricos.

Por lo tanto, sea en Egipto o Babilonia, áreas y volúmenes fueron las primeras nociones geométricas que despiertan el interés del ser humano. (Ver [11])

En tal sentido, este trabajo expondrá resultados con relación a áreas y volúmenes. Pues, como veremos en el desarrollo del mismo, el módulo de un bivector es el área del paralelogramo que determinan el par de vectores correspondientes y el módulo de un trivector es el volumen del paralelepípedo que determinan la terna de vectores correspondientes.

Veremos que un bivector unitario  $i_{ab}$ , determinado por dos vectores linealmente independientes  $a, b \in \mathbb{R}^3$ , es la generalización del bivector unitario determinado por dos vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^2$  (la unidad compleja  $i$ ), de tal modo que  $i_{ab}$  se relaciona con el plano determinado por los vectores  $a, b \in \mathbb{R}^3$  de modo completamente similar a como  $i$  se relaciona con  $\mathbb{R}^2$ .

La motivación para desarrollar este trabajo es que la estructura del álgebra geométrica y las herramientas que nos brinda permite demostraciones puramente algebraicas; es decir, sin la necesidad de realizar algún trazo o gráfico, lo que no sucede cuando se estudia del modo tradicional, por lo general ocurre que, llegado el momento de interpretar algún enunciado es indispensable realizar un bosquejo o gráfico que permita visualizar una estrategia adecuada que permita probar dicha afirmación.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el **Capítulo 1** se exponen: La definición de álgebra geométrica euclideana tridimensional **AG(3)**, que emplearemos a lo largo de este trabajo, algunos resultados fundamentales que nos llevará a desarrollar definiciones como: la subálgebra par y el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial impar de **AG(3)**, el producto interior y el producto exterior de multivectores, así como el producto escalar de  $j$ -vectores de **AG(3)**.

En el **Capítulo 2** hablaremos de la Geometría Afín, esto con el propósito de no tener ninguna restricción con respecto al origen.

En el **Capítulo 3** exponemos algunas definiciones con relación a la descomposición del producto geométrico entre un vector y un multivector de **AG(3)** y como consecuencia de esta, resultados que nos facilitarán desarrollar el capítulo siguiente.

En el **Capítulo 4** presentaremos resultados de la Estereometría empleando las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores.

# Capítulo 1

## El álgebra geométrica euclideana tridimensional

El álgebra geométrica fue creada por William K. Clifford, entre los años 1873 y 1879, como una estructura matemática para algebrizar la geometría. Lo hizo conjugando los aportes pioneros que Grassmann (creador de las álgebras de extensión) y Hamilton (formalizador de los números complejos y creador de los cuaterniones) presentaron en 1844 y 1843, respectivamente.

No se ha difundido como debe ser debido a que, de un lado la versión matemática, llamada Algebra de Clifford, tiene un desarrollo sofisticado y, de otro, porque la interpretación incompleta del tema que realizó Gibbs a fines del siglo XIX, al crear los espacios vectoriales, pareció ser la estructura matemática suficiente durante el siglo XX; aún cuando en la segunda década de dicho siglo Heisenberg manifestó que la física requería una matemática completamente nueva, que incluya álgebras no conmutativas. Fue precisamente lo que trabajaron Pauli y Dirac. (Ver [10] y [5])

En este Capítulo presentamos un proceso de abstracción de las ideas anteriores. Usando una estructura similar a las álgebras de matrices, sin usar matrices, lo que permite un mayor contenido algebraico-geométrico.

Para simplificar la notación, escribiremos

$$e_{12} = e_1e_2, \quad e_{31} = e_1e_3, \quad e_{23} = e_2e_3 \quad \text{y} \quad e_{123} = e_1e_2e_3.$$

La elección de las variables  $e_i$  es intencional porque pretendemos identificarlas con los elementos de la base canónica del  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Para mayor

referencia pueden consultar los siguientes: [7] y [9]

**Definición 1.0.1.** *El álgebra geométrica euclídeana  $AG(3)$  será el siguiente  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial en las variables vectoriales  $e_1, e_2$  y  $e_3$ .*

$$AG(3) = \{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_{12} + a_5e_{31} + a_6e_{23} + a_7e_{123}; a_j \in \mathbb{R}\}$$

*provisto del producto distributivo y asociativo pero no conmutativo, llamado **producto geométrico**:  $AG(3) \times AG(3) \rightarrow AG(3)$  una función bilineal determinada por la siguiente tabla.*

1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{31}$	$e_{23}$	$e_{123}$
$e_1$	1	$e_{12}$	$-e_{31}$	$e_2$	$-e_3$	$e_{123}$	$e_{23}$
$e_2$	$-e_{12}$	1	$e_{23}$	$-e_1$	$e_{123}$	$e_3$	$e_{31}$
$e_3$	$e_{31}$	$-e_{23}$	1	$e_{123}$	$e_1$	$-e_2$	$e_{12}$
$e_{12}$	$-e_2$	$e_1$	$e_{123}$	-1	$e_{23}$	$-e_{31}$	$-e_3$
$e_{31}$	$e_3$	$e_{123}$	$-e_1$	$-e_{23}$	-1	$e_{12}$	$-e_2$
$e_{23}$	$e_{123}$	$-e_3$	$e_2$	$e_{31}$	$-e_{12}$	-1	$-e_1$
$e_{123}$	$e_{23}$	$e_{31}$	$e_{12}$	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

TABLA DEL PRODUCTO GEOMÉTRICO DE  $AG(3)$

La tabla es construida utilizando las **3-condiciones de Dirac**,

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij} \quad \text{donde, } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

**Proposición 1.0.2.** *De la definición anterior se tiene*

1. *Las condiciones de Dirac son equivalentes a las condiciones de Grassmann-Clifford*

$$e_i e_i = 1 \quad \text{y} \quad e_j e_i = -e_i e_j \quad \text{donde } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

2. *Dados*

$$e_i e_j e_k \text{ y } e_l e_m e_n \text{ con } 0 \leq i \leq j \leq k \leq 3 \text{ y } 0 \leq l \leq m \leq n \leq 3$$

se tiene

$$e_i e_j e_k e_l e_m e_n = \pm e_r e_s e_t \quad \text{con } 0 \leq r \leq s \leq t \leq 3$$

Es decir, además de asociativo y no conmutativo, el producto geométrico es cerrado en  $AG(3)$

3. *Dado*  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  se tiene

$$a^2 = \left( \sum_{i=1}^3 a_i e_i \right) \left( \sum_{i=1}^3 a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \geq 0$$

4. *Dado*  $A = a_{12} e_{12} + a_{31} e_{31} + a_{23} e_{23}$  se tiene

$$A^2 = \left( \sum_{i<j} a_{ij} e_{ij} \right) \left( \sum_{i<j} a_{ij} e_{ij} \right) = - \sum_{i<j} a_{ij}^2 \leq 0$$

*Demostración.* Prueba del Ítem 1. Basta observar las **3-condiciones de Dirac**.

Prueba del Ítem 2. Sea  $A = \{r \in \mathbb{Z}/0 \leq r \leq 3\}$ , luego los índices  $i, j, k, l, m, n \in A$ .

Como son 6 índices y cada uno puede tomar 4 valores, esto nos permite analizar los siguientes casos.

**Caso 1.0.3.** *Siempre 4 índices son diferentes dos a dos.*

Entonces al menos un índice es cero, luego se tiene

$$\begin{aligned} e_i e_j e_k e_l e_m e_n &= \pm e_1 e_2 e_3 e_r e_s \quad \text{con } 0 \leq r \leq s \leq 3 \\ &= \pm e_r e_s e_t \quad \text{con } 0 \leq r \leq s \leq t \leq 3. \end{aligned}$$

**Caso 1.0.4.** *Siempre 3 índices son diferentes dos a dos.*

Sin pérdida de generalidad el conjunto  $\{i, j, k\}$ , cuyos elementos son dos a dos diferentes, así se tiene  $\{l, m, n\} \subseteq \{i, j, k\}$ , esto implica que

$$e_i e_j e_k e_l e_m e_n = \pm e_r e_s \quad \text{con } 0 \leq r \leq s \leq 3.$$

**Caso 1.0.5.** *Siempre 2 índices son diferentes.*

Así obtenemos

$$e_i e_j e_k e_l e_m e_n = \pm e_r e_s \quad \text{con } 0 \leq r \leq s \leq 3.$$

**Caso 1.0.6.** *Todos los índices son iguales.*

se sigue que

$$e_i e_j e_k e_l e_m e_n = 1.$$

Por lo tanto

$$e_i e_j e_k e_l e_m e_n = \pm e_r e_s e_t \quad \text{con } 0 \leq r \leq s \leq t \leq 3.$$

Prueba del Ítem 3.

Sea  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ , se tiene que

$$\begin{aligned} a^2 &= \left( \sum_{i=1}^3 a_i e_i \right) \left( \sum_{i=1}^3 a_i e_i \right), \\ &= a_1^2 + a_1 a_2 e_1 e_2 + a_1 a_3 e_1 e_3 + a_2 a_1 e_2 e_1 \\ &\quad + a_2^2 + a_2 a_3 e_2 e_3 + a_3 a_1 e_3 e_1 + a_3 a_2 e_3 e_2 + e_3^2, \end{aligned}$$

por el Ítem 1, se obtiene

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \geq 0.$$

Prueba del Ítem 4. Sea  $A = a_{12}e_{12} + a_{31}e_{31} + a_{23}e_{23}$ , luego se tiene

$$\begin{aligned} A^2 &= \left( \sum_{i<j} a_{ij}e_{ij} \right) \left( \sum_{k<l} a_{kl}e_{kl} \right) \\ &= -a_{12}^2 + a_{12}a_{13}e_{12}e_{13} + a_{12}a_{23}e_{12}e_{23} \\ &\quad - a_{13}^2 + a_{13}a_{23}e_{13}e_{23} + a_{23}a_{12}e_{23}e_{12} + a_{23}a_{13} - a_{23}^2, \end{aligned}$$

por el Ítem 1, obtenemos

$$A^2 = -a_{12}^2 - a_{31}^2 - a_{23}^2 = - \sum_{i<j} a_{ij}^2 \leq 0.$$

□

Los siguientes resultados serán usados posteriormente

**Corolario 1.0.7.** 1.  $AG(3)$  es no conmutativa.

2. Las variables  $e_i$  son raíces cuadradas de 1.

3. Los productos  $e_i e_j$  son raíces cuadradas de -1 si  $i \neq j$ .

4.  $e_1 e_2 e_3$  es raíz cuadrada de -1

5. Dados  $A = \sum_{i=1}^7 a_i e_i$  y  $B = \sum_{i=1}^7 b_i e_i$   
 (recordar que  $e_0 = 1$ ,  $e_4 = e_{12}$ ,  $e_5 = e_{31}$ ,  $e_6 = e_{23}$  y  $e_7 = e_{123}$ )  
 se pide calcular los  $c_i$  y verificar que  $AB = \sum_{i=1}^7 c_i e_i$

*Demostración.* Prueba del Ítem 1.

El producto geométrico definido en  $AG(3)$  es no conmutativo, debido a las **3-condiciones de Dirac**, en consecuencia  $AG(3)$  es no conmutativa.

Prueba del Ítem 2. Bastará observar las **3-condiciones de Dirac**.

Prueba del Ítem 3. Sí  $i \neq j$ , entonces

$$(e_i e_j)^2 = (e_i e_j)(e_i e_j),$$

por la Proposición 1.0.2, Ítem 1

$$(e_i e_j)^2 = (e_i e_j)(-e_j e_i),$$

por asociatividad del producto geométrico

$$(e_i e_j)^2 = -e_i(e_j e_j)e_i = -e_i(1)e_i = -e_i e_i = -1.$$

Prueba del Ítem 4.

$$(e_1 e_2 e_3)^2 = (e_1 e_2 e_3)(e_1 e_2 e_3),$$

por asociatividad del producto geométrico y por la Proposición 1.0.2, Ítem 1, tenemos

$$(e_1 e_2 e_3)^2 = e_1 e_2 (-e_1 e_3) e_2 e_3 = (e_1 e_1) e_2 e_3 e_2 e_3 = (e_2 e_3)^2,$$

por Ítem 3, se tiene

$$(e_1 e_2 e_3)^2 = -1.$$

Prueba del Ítem 5.

Sean  $A = \sum_{i=1}^7 a_i e_i$  y  $B = \sum_{i=1}^7 b_i e_i$ , entonces

$$\begin{aligned}
AB &= \left( \sum_{i=1}^7 a_i e_i \right) \left( \sum_{i=1}^7 b_i e_i \right), \\
&= a_1 b_1 + a_1 b_4 e_2 + a_1 b_5 e_3 + a_1 b_2 e_4 + a_1 b_3 e_5 + a_1 b_7 e_6 + a_1 b_6 e_7 + \\
&\quad - a_2 b_4 e_1 + a_2 b_2 + a_2 b_6 e_3 + a_2 b_1 e_4 - a_2 b_7 e_5 + a_2 b_3 e_6 - a_2 b_5 e_7 + \\
&\quad - a_3 b_5 e_1 - a_3 b_6 e_2 + a_3 b_3 + a_3 b_7 e_4 - a_3 b_1 e_5 - a_3 b_2 e_6 + a_3 b_4 e_7 + \\
&\quad a_4 b_2 e_1 - a_4 b_1 e_2 - a_4 b_7 e_3 - a_4 b_4 + a_4 b_6 e_5 - a_4 b_5 e_6 + a_4 b_3 e_7 + \\
&\quad a_5 b_3 e_1 + a_5 b_7 e_2 - a_5 b_1 e_3 - a_5 b_6 e_4 - a_5 b_5 + a_5 b_4 e_6 - a_5 b_2 e_7 + \\
&\quad - a_6 b_7 e_1 + a_6 b_3 e_2 - a_6 b_2 e_3 + a_6 b_5 e_4 - a_6 b_4 e_5 - a_6 b_6 + a_6 b_1 e_7 + \\
&\quad - a_7 b_6 e_1 + a_7 b_5 e_2 - a_7 b_4 e_3 + a_7 b_3 e_4 - a_7 b_2 e_5 + a_7 b_1 e_6 - a_7 b_7 \\
&= \sum_{i=1}^7 c_i e_i,
\end{aligned}$$

luego observando la expresión de arriba podemos decir como son los  $c_i$ .

□

**Proposición 1.0.8.**

$\beta = \{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{31}, e_{23}, e_{123}\}$  es una  $\mathbb{R}$ -base de  $AG(3)$ .

*Demostración.* Antes de probar el resultado probemos que la familia

$$\{1, e_{123}\} \text{ es linealmente independiente.} \quad (1.1)$$

En efecto. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a + b e_{123} = 0$ , luego se tiene que

$$0 \leq a^2 = (-b e_{123})^2 = b^2 (e_1 e_2 e_3)^2,$$

por Corolario 1.0.7, Ítem 4, se tiene

$$a^2 = -b^2 \leq 0,$$

en consecuencia se tiene  $a = b = 0$ .

Ahora probemos que  $\beta$  es una  $\mathbb{R}$ -base de  $AG(3)$ . Sean  $a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{R}$  tales que  $\sum_{i=0}^7 a_i e_i = 0$ , es decir

$$a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_{12} + a_5 e_{31} + a_6 e_{23} + a_7 e_{123} = 0. \quad (1.2)$$

Multiplicando a la izquierda y a la derecha por  $e_1$ , y por Proposición 1.0.2, Ítem 1, se obtiene

$$a_0 + a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_{12} - a_5 e_{31} + a_6 e_{23} + a_7 e_{123} = 0, \quad (1.3)$$

luego sumando (1.2) y (1.3) se obtiene

$$a_0 + a_1 e_1 + a_6 e_{23} + a_7 e_{123} = 0, \quad (1.4)$$

multiplicando a la izquierda y a la derecha por  $e_2$ , y por Proposición 1.0.2, Ítem 1, tenemos

$$a_0 - a_1 e_1 - a_6 e_{23} + a_7 e_{123} = 0, \quad (1.5)$$

luego sumando (1.4) y (1.5), obtenemos

$$a_0 + a_7 e_{123} = 0,$$

por (1.1), se tiene que

$$a_0 = a_7 = 0.$$

Así reemplazando en (1.2), se tiene

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_{12} + a_5e_{31} + a_6e_{23} = 0, \quad (1.6)$$

multiplicando a la izquierda y a la derecha por  $e_1$ , en (1.6), se obtiene

$$a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_{12} - a_5e_{31} + a_6e_{23} = 0, \quad (1.7)$$

sumando (1.6) y (1.7), tenemos

$$a_1e_1 + a_6e_{23} = 0,$$

finalmente por (1.1), se obtiene

$$a_1 = a_6 = 0,$$

siguiendo este proceso de forma análoga, se obtienen:

$$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

Por tanto  $\beta$  es una  $\mathbb{R}$ -base de  $AG(3)$ .

□

## 1.1. El subespacio de los $\mathbf{j}$ -vectores

**Definición 1.1.1.** *En esta definición transcribimos la terminología de los polinomios al contexto de las álgebras geométricas*

1. Los elementos de  $\langle AG(3) \rangle_j$ , la familia de los polinomios homogéneos de grado  $j$  de  $AG(3)$ , serán llamados  **$\mathbf{j}$ -vectores**,  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ .
2. Los elementos de  $AG(3)$  serán llamados *multi-vectores*.

**Definición 1.1.2.** *El operador grado*

$$\begin{aligned} \langle \rangle_j : AG(3) &\longrightarrow \langle AG(3) \rangle_j \\ M &\longmapsto \langle M \rangle_j. \end{aligned}$$

**Observación 1.1.3.** *El operador grado es lineal (Ver [7])*

**Corolario 1.1.4.** *De la proposición 1.0.8, se sigue que*

1. *Los  $\langle AG(3) \rangle_j$  son  $\mathbb{R}$ -subespacios vectoriales de dimensión  $C_j^3$ .*
2. *Todo elemento  $M$  de  $AG(3)$  se escribe de manera única como suma de  $j$ -vectores:*

$$M = \sum_{j=0}^3 \langle M \rangle_j \quad \text{donde} \quad \langle M \rangle_j \in \langle AG(3) \rangle_j$$

*esto es equivalente a la identidad*

$$AG(3) = \bigoplus_{j=0}^3 \langle AG(3) \rangle_j$$

*Demostración.* Prueba del Item 1. Por Proposición 1.0.8, se tiene que

$\{1\}$ ,  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\{e_{12}, e_{31}, e_{23}\}$  y  $\{e_{123}\}$  son conjuntos l.i, luego estos generan los siguientes conjuntos:

$$\{a : a \in \mathbb{R}\},$$

$$\{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

$$\{b_1 e_{12} + b_2 e_{31} + b_3 e_{23} : b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\{a e_{123} : a \in \mathbb{R}\},$$

Por Definición 1.1.1, estos conjuntos son, respectivamente, iguales a:

$$\langle AG(3) \rangle_0, \langle AG(3) \rangle_1, \langle AG(3) \rangle_2, \langle AG(3) \rangle_3.$$

Finalmente podemos observar que estos subconjuntos de  $AG(3)$  tienen estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y cuyas dimensiones respectivamente son:  $C_0^3$ ,  $C_1^3$ ,  $C_2^3$  y  $C_3^3$ .

Prueba del Ítem2. Sea  $M \in AG(3)$ , por Proposición 1.0.8, se tiene

$$M = \sum_{i=0}^7 a_i e_i, \text{ con } a_i \in \mathbb{R}.$$

Esta expresión para  $M$  es única. En efecto, supongamos que existan  $b_i \in \mathbb{R}$  con  $i \in \{0, \dots, 7\}$  tal que

$$M = \sum_{i=0}^7 b_i e_i,$$

restando estas dos expresiones para  $M$ , tenemos

$$\sum_{i=0}^7 (a_i - b_i) e_i = 0,$$

luego por Proposición 1.0.8, se tiene que

$$b_i = a_i \text{ para todo } i \in \{0, \dots, 7\}.$$

Por otro lado, por lo expuesto en la demostración del Ítem 1, se tiene que

$$M = \sum_{i=0}^7 a_i e_i = \sum_{j=0}^3 \langle M \rangle_j \quad \text{donde} \quad \langle M \rangle_j \in \langle AG(3) \rangle_j,$$

luego  $\langle AG(3) \rangle_j \cap \langle AG(3) \rangle_i = \{0\}$  para todo  $i \neq j$ .

Por lo tanto

$$AG(3) = \bigoplus_{j=0}^3 \langle AG(3) \rangle_j.$$

□

## 1.2. Subespacios y subálgebras de $AG(3)$

**Corolario 1.2.1.** *una vez más de la proposición 1.0.8, se sigue que*

1.  $\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$  es una subálgebra conmutativa de  $AG(3)$
2.  $\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_2$  es una subálgebra no conmutativa de  $AG(3)$
3. De lo anterior tenemos que existen las siguientes igualdades, como  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales,

$$\langle AG(3) \rangle_0 = \mathbb{R} \quad y \quad \langle AG(3) \rangle_3 = \mathbb{R}e_{123}.$$

*En particular tenemos que **todo trivector es múltiplo de**  $e_{123}$ .*

4. *Existe un isomorfismo natural, como  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales*

$$\langle AG(3) \rangle_1 \cong \mathbb{R}^3.$$

*En lo que sigue identificaremos estos dos  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales.*

5. *Del Ítem 3 del Corolario 1.0.7 sigue que existe un isomorfismo natural, como subálgebras no conmutativas*

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{H} \cong \langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_2.$$

*En lo que sigue identificaremos estas dos  $\mathbb{R}$ -álgebras no conmutativas.*

6. *Las identificaciones realizadas nos permiten considerar los siguientes encajes de álgebras*

$$\mathbb{R} < \mathbb{C} < AG(3) \quad y \quad \mathbb{H} < AG(3) \quad , \quad \text{también } \mathbb{R}^3 \subset AG(3)$$

*y escribir la siguiente identidad, como  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales,*

$$AG(3) = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{R}e_{123}.$$

*Demostración.* Prueba del Ítem 1. La estructura de  $AG(3)$ , al ser un espacio vectorial y como el producto geométrico es distributivo, asociativo y bilineal.

Entonces  $\forall A, B, C \in AG(3)$

y  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple:

1.  $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ ,
2.  $(A + B)C = AC + BC$ ,
3.  $C(A + B) = CA + CB$ ,
4.  $(AB)C = A(BC)$ .

De acuerdo con las Propiedades del 1 – 3 hacen de  $AG(3)$  un  $\mathbb{R}$ -álgebra. Con la Propiedad 4 hace de  $AG(3)$  un  $\mathbb{R}$ -álgebra asociativa.

Ahora probemos que  $\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$  es una subálgebra conmutativa de  $AG(3)$ .

En efecto. Como  $\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3 \subset AG(3)$ , entonces las propiedades del 1 – 3 son transferidas. Así, es una subálgebra de  $AG(3)$ .

$\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$  es conmutativa.

En efecto. Sean  $A = a_1 + a_2e_{123}$  y  $B = b_1 + b_2e_{123}$ , luego se tiene

$$\begin{aligned} AB &= a_1b_1 + a_1b_2e_{123} + a_2b_1e_{123} - a_2b_2, \\ &= b_1a_1 + b_2a_1e_{123} + b_1a_2e_{123} - b_2a_2, \\ &= BA. \end{aligned}$$

Prueba del Item 2. La prueba de subálgebra es análoga al Ítem 1. Probemos que no es conmutativa.

Sean  $A = a_1 + a_2e_{12} + a_3e_{31} + a_4e_{23}$  y  $B = b_1 + b_2e_{12} + b_3e_{31} + b_4e_{23}$ , se tiene

$$AB = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 + (a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)e_{12} + \\ (a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2)e_{31} + (a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1)e_{23},$$

ahora

$$BA = b_1a_1 - b_2a_2 - b_3a_3 - b_4a_4 + (b_1a_2 + b_2a_1 - b_3a_4 + b_4a_3)e_{12} + \\ (b_1a_3 + b_2a_4 + b_3a_1 - b_4a_2)e_{31} + (b_1a_4 - b_2a_3 + b_3a_2 + b_4a_1)e_{23},$$

se observa que  $AB \neq BA$ .

Prueba del Ítem 3. Por Definición 1.1.1 Ítem 1 y por inclusión de conjuntos.

Prueba del Ítem 4. Basta considerar la siguiente correspondencia biunívoca

$$\begin{array}{ccc} \langle AG(3) \rangle_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ e_1 & \longleftrightarrow & (1, 0, 0) \\ e_2 & \longleftrightarrow & (0, 1, 0) \\ e_3 & \longleftrightarrow & (0, 0, 1). \end{array}$$

Prueba del Ítem 5. Es análogo al Ítem 4

$$\begin{array}{ccc} \langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_2 & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ e_1e_2 & \longleftrightarrow & i \\ e_1e_3 & \longleftrightarrow & j \\ e_2e_3 & \longleftrightarrow & k. \end{array}$$

Prueba del Ítem 6. Basta observar el Ítem 2 del Corolario 1.1.4 y los Ítems 3, 4 y 5 anteriores.

□

### Definición 1.2.2.

La subálgebra no conmutativa (combinación lineal de multivectores pares)

$$AG^+(3) = \langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_2 \equiv \mathbb{H}$$

es llamada **subálgebra par** de  $AG(3)$ , por cuestiones de unificación también la llamaremos álgebra de los **números complejos tridimensionales**

El  $\mathbb{R}$ -subespacio vectorial (combinación lineal de multivectores impares)

$$AG^-(3) = \langle AG(3) \rangle_1 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$$

es llamado  $\mathbb{R}$ -**subespacio impar** de  $AG(3)$ .

Lo hecho hasta ahora nos muestra que es más cómodo trabajar con  $AG(3)$  debido a su directa vinculación con  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$ , pero esto es solo el comienzo.

## 1.3. Producto interior, exterior y escalar

**Definición 1.3.1.** Dados  $A_j \in \langle AG(3) \rangle_j, B_k \in \langle AG(3) \rangle_k$  y  $M \in AG(3)$ .

1.  $A_j \downarrow B_k = \langle A_j B_k \rangle_{|j-k|}$  si  $j, k \neq 0$  y cero de otro modo,  
es llamado **producto interior** del  $j$ -vector  $A_j$  con el  $k$ -vector  $B_k$ .
2.  $A_j \uparrow B_k = \langle A_j B_k \rangle_{j+k}$  si  $j+k \leq 3$  y cero de otro modo,  
es llamado **producto exterior** del  $j$ -vector  $A_j$  con el  $k$ -vector  $B_k$ .
3.  $A_j \cdot B_j = \langle A_j B_j \rangle_0$  es llamado **producto escalar** de los  $j$ -vectores  $A_j$  y  $B_j$ .
4.  $\|A_j\| = \sqrt{|A_j \cdot A_j|}$  es llamada **j-magnitud euclideana** del  $j$ -vector  $A_j$ .

5.  $\|M\|$ , donde

$$\|M\|^2 = \sum_{j=0}^3 \|\langle M \rangle_j\|^2$$

es llamada **magnitud** euclideana del multivector  $M$ .

6. Diremos que los multivectores  $A_j$  y  $B_k$  son **ortogonales** si  $A_j \downarrow B_k = 0$

7. Diremos que los multivectores  $A_j$  y  $B_k$  son **colineales** si  $A_j \uparrow B_k = 0$

**Proposición 1.3.2.** *Tenemos algunas consecuencias importantes de la definición anterior*

1. Considerando la 1-magnitud euclideana de  $\langle AG(3) \rangle_1$ , del Ítem 6 del Corolario 1.1.4 resulta que la estructura de álgebra geométrica de  $AG(3)$  **determina la métrica euclideana canónica** de  $\mathbb{R}^3$ .

2. De 3 y 4 de la Proposición 1.0.2

$$A_j \in \langle AG(3) \rangle_j \implies A_j \cdot A_j = A_j A_j$$

3.  $(e_{123}e_i e_j e_k) \downarrow (e_i e_j e_k) = 0$  donde  $0 \leq i \leq j \leq k \leq 3$

4. De la conocida descomposición de un producto en su parte simétrica y antisimétrica, aplicada al producto geométrico  $vw$  de dos 1-vectores,

$$vw = \frac{vw + wv}{2} + \frac{vw - wv}{2}$$

se tienen las identidades

$$v \cdot w = \frac{vw + wv}{2} \in \langle AG(3) \rangle_0 \quad y$$

$$v \uparrow w = \frac{vw - wv}{2} \in \langle AG(3) \rangle_2$$

5. De lo anterior resulta que la descomposición del producto geométrico de dos 1-vectores, en su parte simétrica y antisimétrica, es equivalente a la descomposición única del producto geométrico de dichos 1-vectores como suma de un 0-vector con un 2-vector

$$vw = v.w + v \uparrow w.$$

*Demostración.* Prueba del Ítem 1.

Prueba del Ítem 2. Sea  $A_j \in \langle AG(3) \rangle_j$ , por Definición 1.3.1 Ítem 3, se tiene

$$A_j.A_j = \langle A_j A_j \rangle_0,$$

para  $j = 0$ , tenemos

$$A_0.A_0 = A_0 A_0,$$

para  $j = 1$ , sigue que  $A_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$ , por Proposición 1.0.2 Ítem 3

$$a^2 + b^2 + c^2 = A_1 A_1,$$

luego se tiene que

$$\langle A_1 A_1 \rangle_0 = A_1 A_1,$$

por Definición 1.3.1, obtenemos

$$A_1.A_1 = A_1 A_1,$$

para  $j = 2$ , sigue que  $A_2 = ae_{12} + be_{13} + ce_{23}$ , por Proposición 1.0.2 Ítem 4,

tenemos

$$-(a^2 + b^2 + c^2) = A_2 A_2,$$

$$\langle A_2 A_2 \rangle_0 =$$

por Definición 1.3.1

$$A_2.A_2 = A_2A_2,$$

para  $j = 3$ , se tiene  $A_3 = ae_{123}$ , entonces

$$-a_2 = A_3A_3,$$

$$\langle A_3A_3 \rangle_0 =$$

por Definición 1.3.1

$$A_3.A_3 = A_3A_3.$$

Prueba del Ítem 3. Es inmediato verificar que

$$(e_1e_2e_3e_i e_j e_k)(e_i e_j e_k) = \begin{cases} e_1e_2e_3 & \text{si, } i = j = k \\ -e_1e_2e_3 & \text{si, es otro caso} \end{cases}$$

entonces

$$\langle (e_1e_2e_3e_i e_j e_k)(e_i e_j e_k) \rangle_t = \begin{cases} \pm e_1e_2e_3 & \text{si, } t = 3 \\ 0 & \text{si, es otro caso} \end{cases} \quad (1.8)$$

llamemos  $A_n = e_1e_2e_3e_i e_j e_k$ ,  $n$ -vector y  $B_m = e_i e_j e_k$ ,  $m$ -vector.

Por Definición 1.3.1 Ítem 1

$$A_n \downarrow B_m = \langle A_n B_m \rangle_{|n-m|}.$$

Si  $|n - m| = 3$  implica  $n = 3$  y  $m = 0$  o  $n = 0$  y  $m = 3$ , en cualquiera de estos casos, de acuerdo a Definición 1.3.1 Ítem 1, se tiene que

$$A_n \downarrow B_m = 0.$$

Por otro lado, si  $|n - m| \neq 3$ , entonces por (1.8), se tiene

$$A_n \downarrow B_m = 0.$$

Por lo tanto se tiene

$$(e_{123}e_i e_j e_k) \downarrow (e_i e_j e_k) = 0 \quad \text{con } 0 \leq i \leq j \leq k \leq 3.$$

Prueba del Ítem 4. Sean los 1-vectores  $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  y  $w = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ , se tiene

$$\begin{aligned} vw &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12} + \\ &\quad (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_{31} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_{23} \end{aligned} \quad (1.9)$$

de forma similar

$$\begin{aligned} wv &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) e_{12} + \\ &\quad (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_{31} + (a_3 b_2 - a_2 b_3) e_{23} \end{aligned} \quad (1.10)$$

sumando, luego restando (1.9) y (1.10) respectivamente, se tienen

$$\frac{vw + wv}{2} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad (1.11)$$

$$\frac{vw - wv}{2} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12} + (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_{31} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_{23}, \quad (1.12)$$

por Definición 1.3.1 Ítem 4 y por (1.9), obtenemos

$$v.w = \langle vw \rangle_0 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

por (1.11) se tiene

$$v.w = \frac{vw + wv}{2}.$$

Por Definición 1.3.1 Ítem 2 y por (1.10), se obtiene

$$v \uparrow w = \langle vw \rangle_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12} + (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_{31} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_{23},$$

por (1.12) se tiene

$$v \uparrow w = \frac{vw - wv}{2}.$$

Prueba del Ítem 5. Bastará ver el Ítem 4. □

**Definición 1.3.3.** 1. *La aplicación*

$$M \in AG(3) \longmapsto e_{123}M \in AG(3)$$

*es llamada **operador dualidad geométrica** de  $AG(3)$ .*

2. *El llamado **producto vectorial** de Gibbs es definido, del modo apropiado, mediante*

$$v \times w = -e_{123}v \uparrow w.$$

**Observación 1.3.4.** *De las definiciones anteriores tenemos:*

1. *El operador dualidad geométrica de  $AG(3)$  lleva  $j$ -vectores en  $(3-j)$ -vectores y reciprocamente, donde  $j \in \{1, 2, 3\}$ , es decir se cumplen las identidades*

$$e_{123}\langle AG(3) \rangle_j = \langle AG(3) \rangle_{3-j} \quad (\Leftrightarrow e_{123}\langle AG(3) \rangle_{3-j} = \langle AG(3) \rangle_j)$$

*En particular*

$$v \times w = -e_{123}v \uparrow w \quad \Leftrightarrow v \uparrow w = e_{123}v \times w.$$

2.  $A_j \in \langle AG(3) \rangle_j \Rightarrow (e_{123}A_j) \downarrow A_j = 0.$

3. *Las igualdades del Item 5 del Corolario 1.1.4, muestran el caso particular  $j = 0$  de las dos primeras identidades arriba.*
4.  $AG(3) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus e_{123}\mathbb{R}^3 \oplus e_{123}\mathbb{R}.$
5. *Cuando se trate la versión alternativa de las formas diferenciales se verá que el operador estrella de Hoesh está relacionado naturalmente con el operador dualidad geométrica.*

# Capítulo 2

## Sobre Espacios Afines

Ofrecemos una introducción geométrica del espacio euclideo tridimensional  $\mathbb{E}^3$  utilizando el enfoque geométrico del  $\mathbb{R}$ -espacio afin tridimensional. Estas notas, dirigidas a docentes universitarios de Física y Matemática, tratan de emular lo propuesto por Felix Klein en la primera década del siglo XX.

En su Erlanger Programm de 1908 Felix Klein propuso: Un docente puede abordar con mayor solvencia y convicción el tema de matemática que le corresponda transmitir a sus alumnos, estudiando previamente dicho tema desde un punto de vista matemático avanzado. Klein plasmó sus ideas en su libro, para docentes preuniversitarios de Matemática, Matemática Básica desde un punto de vista superior acorde con la evolución matemática hasta el siglo XIX.

Pretendemos hacer Matemática Básica para docentes universitarios de Física y Matemática, (Ver [3], [4] y [6].)

- Mostrando el aspecto avanzado de la misma y
- Acompañando su evolución hasta el siglo XX.

## 2.1. Bosquejando el Espacio Euclideo Tridimensional

Ofrecemos un enfoque geométrico del espacio euclideo tridimensional  $\mathbb{E}^3$  mostrando que se trata de un tipo de variedad que tiene la propiedad de que tanto ella como su fibrado tangente  $T\mathbb{E}^3 \equiv \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  son representados en un mismo ambiente.

Para tal fin el espacio euclideo tridimensional  $\mathbb{E}^3$  es matematizado como el conjunto de ternas ordenadas de números reales  $\mathfrak{R}_3 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  en el siguiente contexto:

EA1.- Con  $\mathbb{R}^3$  denotaremos el conjunto  $\mathfrak{R}_3$  provisto de la estructura usual de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

EA2.- Todo punto sirve de origen de una estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial isomorfa a  $\mathbb{R}^3$ :

EA3.- Representaremos  $\mathbb{E}^3$  del modo tradicional y/o mediante cortes bidimensionales, usando una pizarra, una hoja de papel o una pantalla, que denotaremos  $\mathcal{P}$ ; de tal modo que:

1. Cada elemento  $P \in \mathbb{E}^3$  es representado por un punto  $P \in \mathcal{P}$ . Usaremos la misma letra  $P$  en ambos casos.
2. Cada elemento  $(P; Q) \in T\mathbb{E}^3$  es representado por una flecha  $PQ \subset \mathcal{P}$ , con origen el punto asociado a  $P$  y extremo el punto asociado a  $Q$ . También usaremos  $PQ$  para referirnos al par ordenado  $(P, Q)$  y en ambos casos será llamado vector tangente de  $\mathbb{E}^3$  en  $P \in \mathbb{E}^3$  (también llamado vector libre).  
 $T_P\mathbb{E}^3 = \{P\} \times \mathbb{E}^3$  indicará la familia de los vectores tangentes de  $\mathbb{E}^3$  en  $P \in \mathbb{E}^3$ ; representados con flechas con origen en  $P$ .

EA4.- Se establece una conexión entre los diferentes espacios tangentes mediante la llamada traslación paralela que establece:

1. Cada vector tangente  $XY \in T_X\mathbb{E}^3$  es biunívocamente asociado a un vector tangente  $XY := OY - OX \in T_O\mathbb{E}^3$ ; donde  $O = (0; 0; 0)$ ; determinando un isomorfismo, como  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales,  $T_X\mathbb{E}^3 \equiv T_O\mathbb{E}^3 \equiv \mathbb{R}^3$ .
2. Se dice que

$$PX \in T_P\mathbb{R}^3 \text{ y } QY \in T_Q\mathbb{R}^3 \text{ son igualmente paralelos } \iff \underline{PX} = \underline{QY}.$$

3. Para cada  $R \in \mathbb{R}^3$  se establece la **suma de vectores libres**, con valores en  $T_R\mathbb{R}^3$ ; mediante:

$$PX + QY = RZ \iff \underline{PX} + \underline{QY} = \underline{RZ}.$$

4. Finalmente ampliamos el producto geométrico de vectores libres mediante

$$(PX)(QY) = (\underline{PX})(\underline{QY}).$$

Donde el bivector  $(PX)(QY)$  es representado con el paralelogramo que representa  $(\underline{PX})(\underline{QY})$  trasladado paralelamente del punto  $O \equiv (0; 0)$  al punto que interesa.

Para concluir, presentaremos algunos resultados que nos permitan extender el álgebra geométrica  $AG(3)$  del espacio vectorial euclideo  $\mathbb{R}^3$ ; al álgebra geométrica afin  $AG(3)$  del espacio afin euclideo  $\mathbb{E}^3$ ; así por ejemplo, dados  $AB \in T_A\mathbb{E}^3$  y  $XY \in T_X\mathbb{E}^3$  dos vectores libres no nulos consideraremos

- $\|AB\| := \|\underline{AB}\|$  y  $\|XY\| := \|\underline{XY}\|$ .
- Para cada  $R \in \mathbb{E}^3$  se establece la suma de vectores libres, con valores en  $T_R\mathbb{E}^3$ ; mediante:

$$AB + XY = RZ \iff \underline{AB} + \underline{XY} = \underline{RZ}.$$

- El producto geométrico de vectores libres mediante

$$(AB)(XY) = (\underline{AB})(\underline{XY}).$$

Donde el bivector  $(AB)(XY)$  es representado con el paralelogramo que representa  $(\underline{AB})(\underline{XY})$  trasladado paralelamente del punto  $O \equiv (0; 0; 0)$  al punto que interesa.

- De esto y la identidad geométrica de Euler en  $AG(3)$  se obtiene la siguiente Identidad Geométrica de Euler (Vea 3.23) Afin en  $AG(3)$ :

$$(AB)(XY) = \|AB\| \|XY\| e^{\theta i_{uv}},$$

donde  $\theta = \mu\angle(\underline{AB}; \underline{XY}) \in ]-\pi; \pi]$  es el correspondiente ángulo orientado. ( convenio :  $\angle(\underline{AB}, \underline{XY})$ , el ángulo orientado de  $\underline{AB}$  hacia  $\underline{XY}$ .)

# Capítulo 3

## Preliminares

El objetivo de este capítulo es exponer algunos resultados importantes del álgebra geométrica, tales como las Proposiciones 3.1.1, 3.3.1 y 3.4.1, con el fin de abordar y desarrollar el capítulo siguiente con mayor facilidad. (Ver [1], [4], [9], [10], [12] y [14]).

**Definición 3.0.1.** *El producto geométrico entre un vector  $a$  de  $\langle AG(n) \rangle_1$  y un  $r$ -vector  $A_r$  es*

$$aA_r = a \downarrow A_r + a \uparrow A_r.$$

*Esta definición generaliza el producto geométrico entre vectores.*

*El producto interior y exterior son dados por:*

$$a \downarrow A_r = \frac{1}{2}(aA_r - (-1)^r A_r a) = (-1)^{r+1} A_r \downarrow a, \quad (3.1)$$

$$a \uparrow A_r = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^r A_r a) = (-1)^r A_r \uparrow a. \quad (3.2)$$

**Observación 3.0.2.** *Podemos hacer uso frecuente del hecho que  $a \downarrow A_r$  es un  $(r-1)$ -vector (un escalar si  $r = 1$  y denotaremos en este caso con  $\cdot$  en vez de  $\downarrow$ ), mientras  $a \uparrow A_r$  es un  $(r+1)$ -vector.*

Se deriva la regla asociativa para el producto exterior, a partir de la asociatividad del producto geométrico

$$a(bc) = (ab)c.$$

$$a(b.c + b \uparrow c) = (a.b + a \uparrow b)c.$$

$$a(b.c) + a \downarrow (b \uparrow c) + a \uparrow (b \uparrow c) = (a.b)c + (a \uparrow b) \downarrow c + (a \uparrow b) \uparrow c.$$

Ahora identificamos los términos  $a(b.c)$ ,  $a \downarrow (b \uparrow c)$  como vectores, y el término  $a \uparrow (b \uparrow c)$  como un trivector.

Puesto que los vectores son diferentes de trivectores, podemos separar igualmente parte vector y trivector en cada lado de la ecuación y así obtenemos: asociatividad del producto exterior

$$a \uparrow (b \uparrow c) = (a \uparrow b) \uparrow c. \quad (3.3)$$

Además, obtenemos la siguiente identidad algebraica

$$a(b.c) + a \downarrow (b \uparrow c) = (a.b)c + (a \uparrow b) \downarrow c.$$

Gracias a la Definición 3.0.1 y (3.1), obtenemos

$$A_r a = (-1)^{r+1}(a \downarrow A_r - a \uparrow A_r). \quad (3.4)$$

En particular en este trabajo usaremos el caso cuando  $r = 2$ , así el producto geométrico entre un bivector y un vector será

$$A_2 a = a \uparrow A_2 - a \downarrow A_2. \quad (3.5)$$

**Proposición 3.0.3.** En  $\langle AG(3) \rangle_1$  el producto escalar es bilineal, simétrico y el producto exterior es bilineal, asimétrico.

*Demostración.* Vea [7]. □

**Proposición 3.0.4.** *Si  $v \in \langle AG(n) \rangle_1$  y  $B \in \langle AG(n) \rangle_2$ , entonces se cumplen las siguientes proposiciones:*

1.  $vB = v \downarrow B + v \uparrow B.$

2.  $Bv = B \downarrow v + B \uparrow v.$

3.  $v \downarrow B = -B \downarrow v.$

4.  $v \uparrow B = B \uparrow v.$

*Demostración.* Prueba del Item 1. Por hipótesis se tiene que  $v$  y  $B$  son respectivamente de la forma

$$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i; \quad B = \sum_{1 \leq r < k \leq n} b_{rk} e_{rk},$$

luego se tiene

$$\begin{aligned} vB &= \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq r < k \leq n} a_i b_{rk} e_i e_{rk}, \\ &= \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} a_i b_{rk} e_i e_{rk} + \sum_{1 \leq i = r < k \leq n} a_r b_{rk} e_r e_{rk} + \sum_{1 \leq r < i < k \leq n} a_i b_{rk} e_i e_{rk} \\ &\quad + \sum_{1 \leq r < k = i \leq n} a_k b_{rk} e_k e_{rk} + \sum_{1 \leq r < k < i \leq n} a_i b_{rk} e_i e_{rk}, \end{aligned}$$

empleando la condición de Dirac, tenemos

$$\begin{aligned} vB &= \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} a_i b_{rk} e_{irk} + \sum_{1 \leq r < k \leq n} a_r b_{rk} e_k + \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} a_r b_{ik} e_r e_{ik} \\ &\quad - \sum_{1 \leq r < k \leq n} a_k b_{rk} e_r + \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} a_k b_{ir} e_k e_{ir}, \end{aligned}$$

usando la condición de Dirac, se obtiene

$$\begin{aligned} vB = & \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} a_i b_{rk} e_{irk} + \sum_{1 \leq r < k \leq n} a_r b_{rk} e_k - \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} a_r b_{ik} e_{irk} \\ & - \sum_{1 \leq r < k \leq n} a_k b_{rk} e_r + \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} a_k b_{ir} e_{irk}. \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente, se tiene

$$vB = \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} (a_r b_{rk} e_k - a_k b_{rk} e_r) + \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} (a_i b_{rk} - a_r b_{ik} + a_k b_{ir}) e_{irk} \quad (3.6)$$

luego podemos observar que

$$v \downarrow B = \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} (a_k b_{rk} e_k - a_k b_{rk} e_r) \in \langle AG(n) \rangle_1,$$

y

$$v \uparrow B = \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} (a_i b_{rk} - a_r b_{ik} + a_k b_{ir}) e_{irk} \in \langle AG(n) \rangle_3,$$

entonces

$$vB = v \downarrow B + v \uparrow B.$$

Ahora probemos el Ítem 2. Procedemos de forma análoga al Ítem 1:

$$\begin{aligned} Bv = & \sum_{i=1} \sum_{i < r < k \leq n} a_i b_{rk} e_{rk} e_i, \\ = & \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} a_i b_{rk} e_{rk} e_i + \sum_{1 \leq i=r < k \leq n} a_r b_{rk} e_{rk} e_r + \sum_{1 \leq r < i < k \leq n} a_i b_{rk} e_{rk} e_i \\ & + \sum_{1 \leq r < k < i \leq n} a_k b_{rk} e_{rk} e_k + \sum_{1 \leq r < k < i \leq n} a_i b_{rk} e_{rk} e_i, \\ = & \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} (a_k b_{rk} e_r - a_r b_{rk} e_k) + \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} (a_i b_{rk} - a_r b_{ik} + a_k b_{ir}) e_{irk}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Así, tenemos que

$$B \downarrow v = \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} (a_k b_{rk} e_r - a_r b_{rk} e_k),$$

y

$$B \uparrow v = \sum_{1 \leq i < r < k \leq n} (a_i b_{rk} - a_r b_{ik} + a_k b_{ir}) e_{irk},$$

entonces

$$Bv = B \downarrow v + B \uparrow v.$$

De (3.6) y (3.7), se tiene

$$v \downarrow B = -B \downarrow v \quad y \quad v \uparrow B = B \uparrow v,$$

esto prueba los items 3 y 4. □

**Proposición 3.0.5.** Sean  $a, b$  y  $c \in \langle AG(3) \rangle_1$ , entonces

1.  $\{a, b\}$  es l.i. si y sólo si  $a \uparrow b \neq 0$ .
2.  $\{a, b, c\}$  es l.i. si y sólo si  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ .

*Demostración.* Vea [7]. □

**Definición 3.0.6.** Sea  $v \in \langle AG(3) \rangle_1$ , definimos el conjunto  $\ell_v$  como el **subespacio vectorial unidimensional** de  $AG(3)$  generado por  $v$ , donde  $\ell_v = \{x \in \langle AG(3) \rangle_1; x \uparrow v = 0\}$ .

**Definición 3.0.7.** Sea  $B \in \langle AG(3) \rangle_2$ , definimos el conjunto  $\pi_B$  como el **subespacio vectorial bidimensional** de  $AG(3)$  generado por  $B$ , donde  $\pi_B = \{x \in \langle AG(3) \rangle_1; x \uparrow B = 0\}$ . (Ver [7])

Sean  $a, b \in \langle AG(3) \rangle_1$ , denotaremos con  $\pi[a, b]$  al subespacio vectorial bidimensional de  $AG(3)$  generado por  $a$  y  $b$ , es decir

$$\pi[a, b] = \pi_{a \uparrow b} = \{x \in \langle AG(3) \rangle_1; x \uparrow (a \uparrow b) = 0\}.$$

En adelante. Al trabajar en un subespacio vectorial unidimensional (la recta), lo haremos con un vector y con el subespacio vectorial bidimensional (el plano), lo haremos con el bivector. Esto es justificado en el Capítulo 2.

### 3.1. Vector combinación lineal

Se tienen tres vectores linealmente independientes de  $\langle AG(3) \rangle_1$ , luego realizando una combinación entre los productos interior y exterior, es posible encontrar un vector en función de estos, con dos características importantes. Que hacen de él una herramienta importante en el desarrollo de este trabajo. (Vea la figura 3.1 )

**Proposición 3.1.1.** *Para todo  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$ , se tiene la identidad*

$$a \downarrow (b \uparrow c) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b.$$

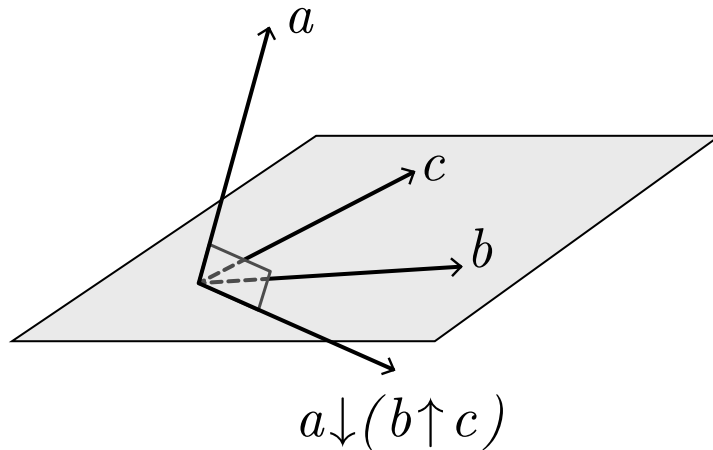


Figura 3.1: Vector combinación lineal.

*Demostración.* Por Definición 3.1

$$\begin{aligned} a \downarrow (b \uparrow c) &= \frac{1}{2}(a(b \uparrow c) - (b \uparrow c)a), \\ &= \frac{1}{2}\left(a\frac{(bc - cb)}{2} - \frac{(bc - cb)}{2}a\right), \end{aligned}$$

por la bilinealidad del producto geométrico, se tiene

$$\begin{aligned} a \downarrow (b \uparrow c) &= \frac{1}{4}(abc - acb - bca + cba), \\ 4a \downarrow (b \uparrow c) &= abc - acb - bca + cba, \end{aligned} \tag{3.8}$$

por la asociatividad del producto geométrico, tenemos

$$\begin{aligned} 4a \downarrow (b \uparrow c) &= (ab)c - (ac)b - b(ca) + c(ba), \\ &= (a.b + a \uparrow b)c - (a.c + a \uparrow c)b - b(c.a + c \uparrow a) \\ &\quad + c(b.a + b \uparrow a), \end{aligned}$$

por la bilinealidad del producto geométrico, se tiene

$$\begin{aligned} 4a \downarrow (b \uparrow c) &= (a.b)c + (a \uparrow b)c - (a.c)b - (a \uparrow c)b - (c.a)b - b(c \uparrow a), \\ &\quad + c(b.a) + c(b \uparrow a) \\ &= 2(a.b)c - 2(a.c)b + (a \uparrow b)c - (a \uparrow c)b - b(c \uparrow a) + c(b \uparrow a). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Desarrollando  $A = (a \uparrow b)c - (a \uparrow c)b - b(c \uparrow a) + c(b \uparrow a)$ , tenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(abc - bac - acb + cab - bca + bac + cba - cab), \\ &= \frac{1}{2}(abc - acb - bca + cba), \end{aligned} \tag{3.10}$$

reemplazando (3.10) en (3.9), obtenemos

$$4a \downarrow (b \uparrow c) = 2(a.b)c - 2(a.c)b + \frac{1}{2}(abc - acb - bca + cba), \tag{3.11}$$

reemplazando (3.8) en (3.11), se tiene

$$4a \downarrow (b \uparrow c) = 2(a.b)c - 2(a.c)b + 2a \downarrow (b \uparrow c),$$

por lo tanto

$$a \downarrow (b \uparrow c) = (a.b)c - (a.c)b.$$

□

Veamos ahora una versión generalizada de lo anterior.

**Proposición 3.1.2.** *Para todo  $a, b \in \langle AG(n) \rangle_1$  y  $C_k \in \langle AG(n) \rangle_k, k \geq 1$ , entonces*

$$a \downarrow (b \uparrow C_k) = (a.b)C_k - b \uparrow (a \downarrow C_k).$$

*Demostración.* De la definición tenemos

$$ab = -ba + 2a.b,$$

luego se tiene

$$abC_k = -b(aC_k) + 2a.bC_k, \quad (3.12)$$

de la definición 3.1 en (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} abC_k &= -b((-1)^k C_k a + 2a \downarrow C_k) + 2a.bC_k \\ abC_k &= -(-1)^k bC_k a - 2b(a \downarrow C_k) + 2a.bC_k, \end{aligned}$$

luego de esta última igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} (a.b)C_k - b(a \downarrow C_k) &= \frac{1}{2}[a(bC_k) + (-1)^k (bC_k)a], \\ &= \frac{1}{2}[a(b \downarrow C_k + b \uparrow C_k) + (-1)^k (b \downarrow C_k + b \uparrow C_k)a], \\ &= \frac{1}{2}[a(b \downarrow C_k) + a(b \uparrow C_k) + (-1)^k (b \downarrow C_k)a \\ &\quad + (-1)^k (b \uparrow C_k)a], \end{aligned}$$

luego reordenando, se tiene

$$(a.b)C_k - b(a \downarrow C_k) = \frac{1}{2}[a(b \downarrow C_k) + (-1)^k(b \downarrow C_k)a] \\ + \frac{1}{2}[a(b \uparrow C_k) + (-1)^k(b \uparrow C_k)a],$$

como  $b \downarrow C_k$  es un  $k-1$  vector,  $b \uparrow C_k$  es un  $k+1$  vector, luego por Definición 3.1, obtenemos

$$(a.b)C_k - b(a \downarrow C_k) = a \downarrow (b \downarrow C_k) + a \downarrow (b \uparrow C_k) \\ (a.b)C_k - b \downarrow (a \downarrow C_k) - b \uparrow (a \downarrow C_k) = a \downarrow (b \downarrow C_k) + a \downarrow (b \uparrow C_k),$$

por igualdad de multivectores, obtenemos que

$$a \downarrow (b \uparrow C_k) = (a.b)C_k - b \uparrow (a \downarrow C_k).$$

Además  $a \downarrow (b \downarrow C_k) = -b \downarrow (a \downarrow C_k)$ .

□

La siguiente desigualdad es muy conocida. Además bastante utilizada en diferentes áreas de la matemática tales como la Geometría, Análisis, etc.

## 3.2. Desigualdad de Cauchy-Schwartz

**Teorema 3.2.1.**

$$|(v.w)| \leq \|v\| \|w\| \quad \text{para todo } v, w \in \langle AG(3) \rangle_1.$$

*Demostración.* Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;  $v, w \in \langle AG(3) \rangle_1$  se tiene que;

$$0 \leq (\alpha v - \beta w)^2$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\alpha v - \beta w)^2 = (\alpha v - \beta w)(\alpha v - \beta w) \\
0 &\leq \alpha^2 v^2 - \alpha\beta vw - \alpha\beta wv + \beta^2 w^2,
\end{aligned}$$

luego obtenemos

$$\begin{aligned}
\alpha\beta(vw + wv) &\leq \alpha^2 v^2 + \beta^2 w^2 \\
\alpha\beta(2v \cdot w) &\leq \alpha^2 v^2 + \beta^2 w^2 \\
2\alpha\beta(v \cdot w) &\leq \alpha^2 v^2 + \beta^2 w^2, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

en particular tomando  $\alpha = \|w\|$  y  $\beta = \|v\|$ , y reemplazando en (3.13), se tiene que

$$\begin{aligned}
2\|w\|\|v\|(v \cdot w) &\leq \|w\|^2 v^2 + \|v\|^2 w^2, \\
&\leq \|w\|^2 \|v\|^2 + \|v\|^2 \|w\|^2 = \|w\|^2 \|v\|^2,
\end{aligned}$$

esto implica que

$$v \cdot w \leq \|v\| \|w\|.$$

Análogamente para  $-v$  en vez de  $v$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
(-v) \cdot w &\leq \|v\| \|w\| \\
-(v \cdot w) &\leq \|v\| \|w\|,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$|(v \cdot w)| \leq \|v\| \|w\|.$$

□

### 3.3. Módulo del bivector

A continuación definiremos el módulo de un bivector, para ello necesitamos del siguiente resultado, que nos brindará el camino correcto para hacerlo. Pues como sabemos el producto exterior de dos vectores es anticonmutativo.

**Proposición 3.3.1.** *Un bivector al cuadrado es siempre menor o igual a cero, esto es*

$$(v \uparrow w)^2 \leq 0 \text{ para todo } v, w \in \langle AG(3) \rangle_1.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} (v \uparrow w)^2 &= (v \uparrow w)(v \uparrow w) \\ &= \frac{1}{4}(vw - wv)(vw - wv) \\ &= \frac{1}{4}((vw)^2 - 2w^2v^2 + (wv)^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

desarrollando  $(vw)^2 + (wv)^2$ , tenemos

$$\begin{aligned} (vw)^2 + (wv)^2 &= (v.w + v \uparrow w)^2 + (w.v + w \uparrow v)^2 \\ &= (v.w)^2 + (v.w)(v \uparrow w) + (v \uparrow w)(v.w) + (v \uparrow w)^2 \\ &\quad + (w.v)^2 + (w.v)(w \uparrow v) + (w \uparrow v)(w.v) + (w \uparrow v)^2 \\ &= 2(v.w)^2 + 2(v \uparrow w)^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

reemplazando (3.15) en (3.14), se obtiene

$$\begin{aligned} (v \uparrow w)^2 &= \frac{1}{4}(2(v.w)^2 + 2(v \uparrow w)^2 - 2w^2v^2) \\ (v \uparrow w)^2 &= (v.w)^2 - w^2v^2, \end{aligned}$$

en consecuencia tenemos

$$(v \uparrow w)^2 \in \mathbb{R}.$$

Luego bastará, probar que  $(v.w)^2 - v^2w^2 \leq 0$ ,

$$\iff (v.w)^2 \leq v^2w^2$$

$$\iff |(v.w)| \leq \|v\|\|w\|,$$

que no es más que la desigualdad de Cauchy-Schwartz, introducida en el Teorema 3.2.1.

□

En adelante denotaremos  $|\cdot| = \|\cdot\|$  al módulo o norma de un  $j$ -vector.

**Definición 3.3.2.** Sean  $w, u \in \langle AG(3) \rangle_1$ , se define la norma de un bivector como  $|w \uparrow u| = \sqrt{(w \uparrow u)(u \uparrow w)} = \sqrt{w^2u^2 - (w.u)^2}$ .

**Proposición 3.3.3.** Sean  $w, u \in \langle AG(3) \rangle_1$ .  $u \uparrow w \neq 0$  y  $B = \frac{w \uparrow u}{|w \uparrow u|}$ .

Se cumplen las siguientes proposiciones:

1.  $(w \uparrow u)u \in \langle AG(3) \rangle_1$ .
2.  $((w \uparrow u)u).u = 0$ .
3.  $(Bu).u = 0$ .
4. si  $u \in S^2$  entonces  $Bu \in S^2$ .
5.  $|w \uparrow u| = w.(Bu)$ .

*Demostración.* Prueba del Ítem 1. Por (3.5), se tiene

$$(w \uparrow u)u = u \uparrow (w \uparrow u) - u \downarrow (w \uparrow u).$$

Por asociatividad del producto exterior (3.3) y por Proposición 3.0.3 se tiene que  $u \uparrow (w \uparrow u) = 0$ , entonces  $(w \uparrow u)u = -u \downarrow (w \uparrow u)$ , luego por Proposición 3.1.1, se tiene  $u \downarrow (w \uparrow u) \in \langle AG(3) \rangle_1$ .

Prueba del Ítem 2. Por el Ítem 1 y por Proposición 3.1.1, obtenemos

$$(w \uparrow u)u = u^2w - (u.w)u.$$

Así obtenemos que

$$[(w \uparrow u)u].u = u^2(w.u) - (u.w)u^2 = 0.$$

La prueba del Ítem 3 es consecuencia inmediata del Ítem 2

$$\begin{aligned} 0 &= ((w \uparrow u)u).u = (|w \uparrow u|B)u.u \\ &= |w \uparrow u|(Bu).u, \end{aligned}$$

por hipótesis  $u \uparrow w \neq 0$  en consecuencia  $|w \uparrow u| > 0$ .

Entonces  $(Bu).u = 0$ .

Prueba del Ítem 4, por hipótesis  $u^2 = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} (Bu)^2 &= \frac{1}{|w \uparrow u|^2}(w - (u.w)u)^2 \\ &= \frac{1}{|w \uparrow u|^2}(w^2 - (u.w)^2), \end{aligned}$$

por Definición 3.3.2 y como  $u^2 = 1$ , tenemos que  $|w \uparrow u|^2 = w^2 - (u.w)^2$ .

Entonces  $(Bu)^2 = 1$ ,

por el Ítem 1  $Bu \in \langle AG(3) \rangle_1$ .

Finalmente probemos el Ítem 5. Es claro que

$$\begin{aligned} w.(Bu) &= w.\left(\frac{w \uparrow u}{|w \uparrow u|}u\right), \\ &= \frac{1}{|w \uparrow u|}(w.((w \uparrow u)u)), \end{aligned} \tag{3.16}$$

luego veamos el desarrollo de  $w.((w \uparrow u)u)$ .

$$w.((wu - w.u)u) = w.(w - (w.u)u) = w.w - (w.u)^2 = (w \uparrow u)(u \uparrow w) \tag{3.17}$$

por Definición 3.3.2  $(w \uparrow u)(u \uparrow w) = |w \uparrow u|^2$ . Luego reemplazando (3.17) en (3.16), obtenemos lo deseado

$$w.(Bu) = |w \uparrow u|.$$

□

### 3.4. Bivector unitario

Sean  $x, y \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $x \uparrow y \neq 0$ , así, se tienen el subespacio  $\pi[x, y]$  e  $i_{xy} = \frac{x \uparrow y}{|x \uparrow y|}$ , llamado bivector unitario respecto a  $\pi = \pi[x, y]$ .

El siguiente resultado nos garantiza: Dado un subespacio vectorial bidimensional  $\pi$ , queda determinado un bivector unitario,  $i_\pi$  que hace el papel de  $i \in \mathbb{C}$ ; es decir,  $i_\pi$  queda relacionado a una orientación de  $\pi$  y  $-i_\pi$  a la opuesta. (Vea la figura 3.2.)

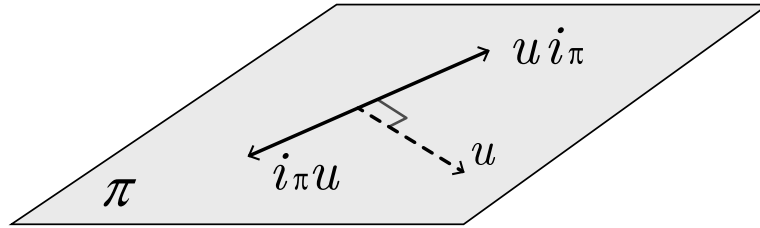


Figura 3.2: Bivector unitario.

**Proposición 3.4.1.** Sean  $a, b, c, d \in \pi$ , subespacio vectorial bidimensional de  $AG(3)$ , son tales que  $\{a, b\}$  e  $\{c, d\}$  son l.i.

Entonces

$$\frac{a \uparrow b}{|a \uparrow b|} = \pm \frac{c \uparrow d}{|c \uparrow d|}.$$

*Demostración.* Como  $a$  y  $b$  determinan una base, entonces  $c$  y  $d$  pueden ser expresados como una combinación lineal de  $a$  y  $b$ . Existen  $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ,

tales que

$$c = \lambda_1 a + \beta_1 b \text{ y } d = \lambda_2 a + \beta_2 b,$$

luego realizamos el producto exterior  $c$  con  $d$ , obtenemos

$$c \uparrow d = (\lambda_1 a + \beta_1 b) \uparrow (\lambda_2 a + \beta_2 b),$$

por la bilinealidad del producto exterior, se tiene

$$c \uparrow d = \lambda_1 \lambda_2 (a \uparrow a) + \lambda_2 \beta_1 (b \uparrow a) + \beta_2 \lambda_1 (a \uparrow b) + \beta_2 \beta_1 (b \uparrow b). \quad (3.18)$$

Por Proposición 3.0.3, se tienen  $a \uparrow a = 0$ ,  $b \uparrow b = 0$  y  $b \uparrow a = -(a \uparrow b)$ .

Reemplazando estos resultados en (3.18), se obtiene

$$c \uparrow d = (\beta_2 \lambda_1 - \lambda_2 \beta_1) a \uparrow b \quad (3.19)$$

$$|c \uparrow d| = |\beta_2 \lambda_1 - \lambda_2 \beta_1| |a \uparrow b|, \quad (3.20)$$

luego tenemos que  $\beta_2 \lambda_1 - \lambda_2 \beta_1 \neq 0$ , pues de darse lo contrario, es decir,  $\beta_2 \lambda_1 - \lambda_2 \beta_1 = 0$ , en (3.19), tendríamos que  $c \uparrow d = 0$  esto implicaría que  $c$  y  $d$  sean *l.d.* que es una contradicción con las hipótesis.

Así en (3.20), obtenemos

$$\frac{c \uparrow d}{|c \uparrow d|} = \frac{(\beta_2 \lambda_1 - \lambda_2 \beta_1)(a \uparrow b)}{|\beta_2 \lambda_1 - \lambda_2 \beta_1| |a \uparrow b|}.$$

Por lo tanto

$$\frac{a \uparrow b}{|a \uparrow b|} = \pm \frac{c \uparrow d}{|c \uparrow d|}.$$

□

(ver figura 3.3)

**Observación 3.4.2.** Sean  $a, b, c, d \in \langle AG(3) \rangle_1$  tales que  $\{a, b\}$  y  $\{c, d\}$  son l.i. Si dichos vectores pertenecen a un mismo subespacio vectorial bidimensional entonces  $i_{ab} = i_{cd}$ . Diremos que los vectores son coplanares.

Pero no necesariamente se cumple el recíproco. Pues si los subespacios vectoriales bidimensionales fuesen paralelos entonces no se cumple que  $i_{ab} = i_{cd}$ .

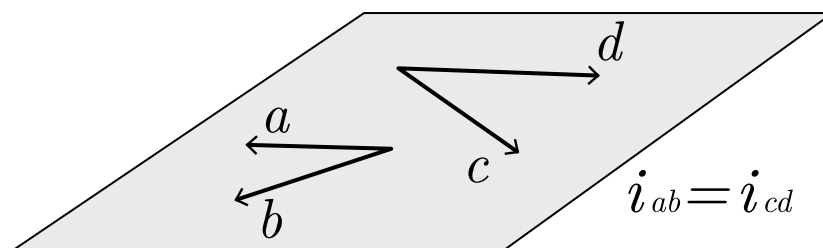


Figura 3.3: Determinación del bivector unitario.

Sean  $a, b, c \in S^2$ , (esfera unitaria), linealmente independientes, se tiene la siguiente identidad

$$ab = acb. \quad (3.21)$$

Por otro lado se tiene la identidad (generalización de la identidad de Euler.)

$$ab = e^{\alpha i_{ab}} = \cos \alpha + i_{ab} \operatorname{sen} \alpha, \quad (3.22)$$

con  $\alpha = \mu \angle(a, b) \in ] - \pi, \pi[$  e  $i_{ab} = \frac{a \uparrow b}{|a \uparrow b|}$ .

En general sean  $a, b \in \langle AG(3) \rangle_1$

$$ab = a \cdot b + a \uparrow b = |a||b| \cos \alpha + |a||b| \operatorname{sen} \alpha i_{ab} = |a||b| e^{\alpha i_{ab}}. \quad (3.23)$$

**Convenio.** A cada par ordenado  $(a, b) \in S^2 \times S^2$  quedarán asociados unívocamente

1.  $\angle(a, b)$ , el ángulo orientado de  $a$  hacia  $b$ .
2.  $\mu \angle(a, b) \in ] - \pi, \pi[$  la medida orientada de  $\angle(a, b)$ , si  $a + b \neq 0$  y  $\mu \angle(a, -a) = \pi \forall a \in S^2$ .
3.  $\alpha = \mu \angle(a, b) \iff ab = e^{\alpha i_{ab}}$ .

**Definición 3.4.3.** *Dados los pares ordenados  $(a, b), (u, v) \in S^2 \times S^2$ , definimos:*

1.  $\angle(a, b) = \angle(u, v)$  y  $\mu\angle(a, b) = \mu\angle(u, v)$  si  $ab = uv$ .
2.  $\angle(a, b) = -\angle(u, v)$  y  $\mu\angle(a, b) = -\mu\angle(u, v)$  si  $ab = vu$ , excepto si  $a + b = 0$  y  $u + v = 0$ .

**Proposición 3.4.4.** *Sean  $a, b, u, v \in \langle AG(3) \rangle_1$ , tales que  $\{a, b\}$  y  $\{u, v\}$  son l.i. Si  $\mu\angle(a, b) = \mu\angle(u, v)$ , entonces*

$$\frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \quad \text{y} \quad \frac{|a \uparrow b|}{|a||b|} = \frac{|u \uparrow v|}{|u||v|}.$$

*Demostración.* Por la identidad (3.23) y por hipótesis, se tiene lo pedido.  $\square$

**Proposición 3.4.5.** *Sean  $a, b, u, v \in \langle AG(3) \rangle_1$ , coplanares, tales que  $\{a, b\}$  y  $\{u, v\}$  son l.i. Entonces*

$$\mu\angle(a, b) = \mu\angle(u, v) \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{u \cdot v}{|u||v|}.$$

*Demostración.*  $(\Leftarrow)$  Por Definición 3.4.3.

$(\Rightarrow)$  Por la identidad (3.23) y por Observación 3.4.2.  $\square$

**Proposición 3.4.6.** *Sean  $a, b \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $\{a, b\}$  es l.i. Si  $c$  es bisectriz del  $\angle(a, b)$ , entonces*

$$c \uparrow \left(a + \frac{|a|}{|b|}b\right) = c \uparrow \left(b + \frac{|b|}{|a|}a\right) = 0.$$

*Demostración.* Por hipótesis se tiene  $\mu\angle(a, c) = \mu\angle(c, b)$ .

Además  $a, c$  y  $b$  son coplanares, por Proposición 3.4.5, obtenemos

$$\frac{ac}{|a|} = \frac{cb}{|b|}.$$

Por hipótesis  $\{a, b\}$  es l.i. entonces existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$  tales que  $c = \alpha a + \beta b$ . Reemplazando en la identidad obtenida, tenemos  $\frac{\beta}{|a|} = \frac{\alpha}{|b|}$ . Por lo tanto  $c = \alpha(a + \frac{|a|}{|b|}b) = \beta(b + \frac{|b|}{|a|}a)$ .  $\square$

### 3.5. Reflexión y Rotación

**Definición 3.5.1.** Dado  $u \in S^2$  (la superficie de la esfera unitaria), la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_u : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ w &\longmapsto -uwu. \end{aligned}$$

es la **reflexión** respecto de  $\pi_u$ , ortogonal a  $u$ .

**Proposición 3.5.2.** Sea  $u \in S^2$ , entonces

1.  $\rho_u^{-1} = \rho_u$ .
2. Toda reflexión es una isometría.

*Demostración.* Prueba del Item 1. Sea  $v \in \mathbb{R}^3$ , entonces

$$\rho_u(\rho_u(v)) = \rho_u(-uvu) = -u(-uvu)u = v.$$

Por lo tanto  $\rho_u^{-1} = \rho_u$ ,

Prueba del Item 2.

$$(\rho_u(v))^2 = (-uvu)^2 = (uvu)(uvu) = v^2 \text{ entonces } |\rho_u(v)| = |v|.$$

Por lo tanto  $\rho_u$  es una isometría.  $\square$

**Definición 3.5.3.** Dados  $u, v \in S^2$ ,  $\theta = \mu\angle(u, v)$  con  $\theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_{2\theta} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ w &\longmapsto e^{-\theta i_{uv}} w e^{\theta i_{uv}}, \end{aligned}$$

es una **rotación orientada** (en el ángulo orientado  $2\theta$ ).

**Proposición 3.5.4.** *La composición de dos reflexiones determinan una rotación y recíprocamente, toda rotación se descompone de ese modo, sin unicidad de las reflexiones.*

*Demostración.* ( $\implies$ )

Sean  $u, v \in S^2$ , con  $\theta = \mu\angle(u, v)$ ,  $w \in \mathbb{R}^3$  tenemos

$$\rho_v(\rho_u(w)) = vuwv = e^{-\theta i_{uv}} w e^{\theta i_{uv}} = \varrho_{2\theta}(w),$$

entonces  $\rho_v \rho_u = \varrho_{2\theta}$ .

( $\impliedby$ ) Sean  $a, b \in S^2$  tal que  $\theta = \mu\angle(a, b)$  y  $x \in \mathbb{R}^3$ , tenemos

$$\varrho_{2\theta}(x) = e^{-\theta i_{ab}} x e^{\theta i_{ab}} = baxab = \rho_b(\rho_a(x)),$$

entonces  $\varrho_{2\theta} = \rho_b \rho_a$ .

Pero no necesariamente  $u = a$  y  $v = b$ . □

## 3.6. Ángulo entre bivectores.

En la geometría clásica al conjunto determinado por la unión de la intersección de dos planos diferentes no paralelos y los semiplanos determinados por dicha intersección, es llamada Diedro o ángulo Diedro. En el contexto del álgebra geométrica es el ángulo entre bivectores y para tal efecto veamos la definición.

**Definición 3.6.1.** *Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $\{a, b, c\}$  es l.i. Definimos el **diedro o ángulo diedro** como el ángulo entre un par de bivectores, que tienen un vector en común.*

*Además los bivectores  $a \uparrow b$  y  $c \uparrow a$  determinan un diedro. (ver figura 3.4)*

Se dice que el diedro se ubica en  $a$  y denotaremos al diedro de estos bivectores como

$$\angle(a \uparrow b ; c \uparrow a) \equiv \angle(i_{ab}a ; ai_{ca}) = \angle(ai_{ab} ; i_{ca}a),$$

donde,  $i_{ab} = \frac{a \uparrow b}{|a \uparrow b|}$ ,  $i_{ca} = \frac{c \uparrow a}{|c \uparrow a|}$  e  $i_{ab}a, ai_{ca} \in \langle AG(3) \rangle_1$ .

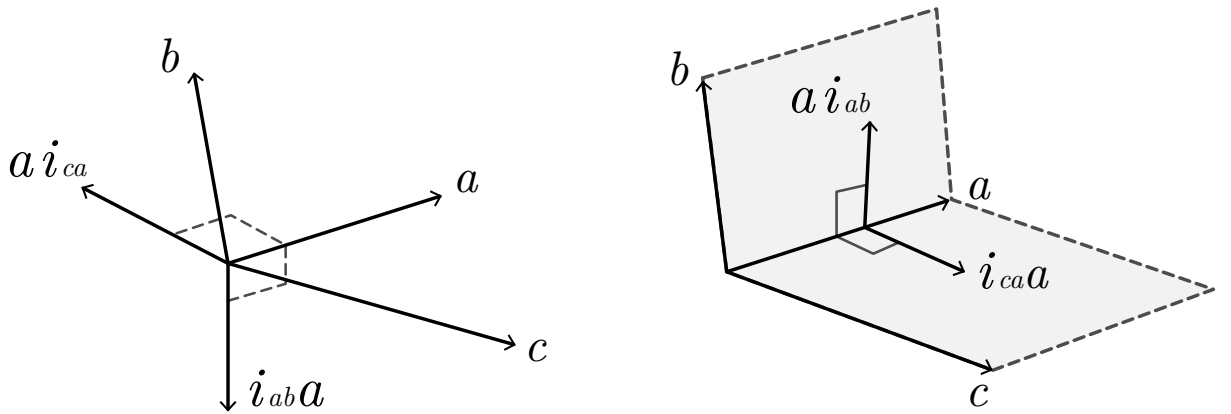


Figura 3.4: Ángulo diedro.

**Observación 3.6.2.** 1. Sea  $\theta = \mu\angle(a \uparrow b ; c \uparrow a)$ . Si  $\theta = 0$

$\{a, b, c\}$  es l.d., por definición esto no puede ser entonces  $\theta \neq 0$ , análogamente se tiene  $\theta \neq \pi$ .

2. La medida del diedro se encuentra entre 0 y  $\pi$ , es decir,

$$0 < \mu\angle(a \uparrow b ; c \uparrow a) < \pi.$$

3.  $ai_{ab} \cdot a = 0$  y  $a \cdot i_{ca}a = 0$ .

4. Los otros ángulos diedros son :  $\angle(b \uparrow c ; a \uparrow b)$  y  $\angle(c \uparrow a ; b \uparrow c)$ .

5. Al vector común entre los bivectores será llamado **arista**.

### 3.7. Resultados Auxiliares

En esta sección presentamos y probamos algunos resultados que usaremos en el capítulo siguiente, con el sólo propósito de agilizar las demostraciones de tal capítulo.

**Proposición 3.7.1.** *Sean  $a, b \in \langle AG(3) \rangle_1$ ,  $\{a, b\}$  es l.i., entonces*

$$|a(a \uparrow b)| = |(a \uparrow b)a| = |(a \uparrow b) \downarrow a| = |a \downarrow (a \uparrow b)| = |a||a \uparrow b|.$$

*Demostración.* Por Proposición 3.1.1, tenemos

$$\begin{aligned} a \downarrow (a \uparrow b) &= a^2b - (a.b)a, \\ |a \downarrow (a \uparrow b)|^2 &= (a^2b - (a.b)a)(a^2b - (a.b)a), \end{aligned}$$

luego se obtiene que

$$\begin{aligned} |a \downarrow (a \uparrow b)|^2 &= a^4b^2 - a^2(a.b)ba - (a.b)a^2ab + (a.b)^2a^2, \\ &= a^4b^2 - a^2(a.b)(ab + ba) + (a.b)^2a^2. \end{aligned}$$

Por la identidad del Item 4 de la Proposición 1.3.2, del producto escalar, se tiene

$$\begin{aligned} |a \downarrow (a \uparrow b)|^2 &= a^4b^2 - 2a^2(a.b)^2 + a^2(a.b)^2 \\ &= a^2(a^2b^2 - (a.b)^2), \end{aligned}$$

por Definición 3.3.2  $|a \uparrow b|^2 = a^2b^2 - (a.b)^2$ , entonces

$$\begin{aligned} |a \downarrow (a \uparrow b)|^2 &= a^2|a \uparrow b|^2, \\ |a \downarrow (a \uparrow b)| &= |a||a \uparrow b|, \end{aligned} \tag{3.24}$$

por Proposición 3.0.4,  $(a \uparrow b) \downarrow a = -(a \downarrow (a \uparrow b))$ , se obtiene

$$|(a \uparrow b) \downarrow a| = |a \downarrow (a \uparrow b)|, \tag{3.25}$$

tambien se tiene por Proposición 3.0.4 y por (3.5)

$$a(a \uparrow b) = -(a \uparrow b)a = -(a \uparrow b) \downarrow a - (a \uparrow b) \uparrow a = -(a \uparrow b) \downarrow a, \quad (3.26)$$

de (3.24), (3.25) y (3.26), se tiene

$$|a(a \uparrow b)| = |(a \uparrow b)a| = |(a \uparrow b) \downarrow a| = |a \downarrow (a \uparrow b)| = |a||a \uparrow b|.$$

□

**Proposición 3.7.2.** Sean  $a, b$  y  $c \in \langle AG(3)_1 \rangle$  tal que  $\{a, b, c\}$  es l.i.

Entonces

$$c(b \uparrow c) \cdot (c \uparrow a)c = (b \uparrow c)c \cdot c(c \uparrow a) = c^2(c^2(b.a) - (c.a)(b.c)).$$

*Demostración.* Por la Proposición 3.0.4

$$\begin{aligned} (b \uparrow c)c \cdot c(c \uparrow a) &= ((b \uparrow c) \downarrow c + (b \uparrow c) \uparrow c) \cdot (c \downarrow (c \uparrow a) + c \uparrow (c \uparrow a)), \\ &= (b \uparrow c) \downarrow c \cdot c \downarrow (c \uparrow a), \end{aligned}$$

por las proposiciones (3.1.1) y (3.0.4), obtenemos

$$\begin{aligned} (b \uparrow c)c \cdot c(c \uparrow a) &= (c^2b - (c.b)c) \cdot (c^2a - (c.a)c), \\ &= c^2(c^2(b.a) - (c.a)(b.c)). \end{aligned}$$

Análogamente se tiene para  $c(b \uparrow c) \cdot (c \uparrow a)c$ .

□

**Proposición 3.7.3.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$ ,  $\{a, b, c\}$  es l.i. y

$\theta = \mu\angle(a \uparrow c; b \uparrow a)$ , entonces

$$|(b \times a) \uparrow (a \times c)| = |b \times a| |a \times c| \operatorname{sen} \theta, \quad (3.27)$$

$$(b \times a) \cdot (a \times c) = -|b \times a| |a \times c| \cos \theta. \quad (3.28)$$

*Demostración.* Probemos (3.27). Hacemos  $u = ai_{ac}$  y  $v = i_{ba}a$ , luego por (3.23), tenemos

$$i_{uv}|u| |v| \operatorname{sen} \theta = u \uparrow v, \quad (3.29)$$

como  $\theta = \mu(\angle(a \uparrow c; b \uparrow a))$  entonces  $|\operatorname{sen} \theta| = \operatorname{sen} \theta$ , luego de (3.29) y por la última relación, se tiene

$$|u| |v| \operatorname{sen} \theta = |u \uparrow v|,$$

es decir

$$|ai_{ac}||i_{ba}a| \operatorname{sen} \theta = |ai_{ac} \uparrow i_{ba}a|, \quad (3.30)$$

por Proposición 3.7.1 en (3.30), obtenemos

$$a^2 \operatorname{sen} \theta = |ai_{ac} \uparrow i_{ba}a|,$$

luego, por la identidad del Item 4 de la Proposición 1.3.2, del producto exterior, se tiene

$$a^2 \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}|(ai_{ac})(i_{ba}a) - (i_{ba}a)(ai_{ac})| = \frac{1}{2}|(-i_{ac}a)(-ai_{ba}) - (i_{ba}a)(ai_{ac})|,$$

luego por asociatividad del producto geométrico

$$a^2 \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}|i_{ac}(aa)i_{ba} - i_{ba}(aa)i_{ac}| = \frac{1}{2}a^2|i_{ac}i_{ba} - i_{ba}i_{ac}|,$$

reemplazando  $i_{ac}$ ,  $i_{ba}$  respectivamente, se tiene

$$|a \uparrow c||b \uparrow a| \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}|(a \uparrow c)(b \uparrow a) - (b \uparrow a)(a \uparrow c)|,$$

luego por la dualidad entre un bivector y el producto vectorial, se tiene

$$|a \uparrow c||b \uparrow a| \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}|(e_{123} a \times c)(e_{123} b \times a) - (e_{123} b \times a)(e_{123} a \times c)|,$$

por asociatividad del producto geométrico

$$\begin{aligned}
|a \uparrow c| |b \uparrow a| \sin \theta &= \frac{1}{2} |(e_{123} a \times c e_{123}) b \times a - (e_{123} b \times a e_{123}) a \times c|, \\
&= \frac{1}{2} |(a \times c)(b \times a) - (b \times a)(a \times c)|, \\
&= |(a \times c) \uparrow (b \times a)|.
\end{aligned}$$

Además  $|a \uparrow c| = |a \times c|$  y  $|b \uparrow a| = |b \times a|$ .

Por lo tanto

$$|(a \times c) \uparrow (b \times a)| = |a \times c| |b \times a| \sin \theta.$$

**Ahora probemos** la identidad (3.28). Se tiene que

$$|i_{ba}a| |ai_{ac}| \cos \theta = (i_{ba}a) \cdot (ai_{ac}),$$

por Proposición 3.0.4 y por Lema 3.7.1

$$a^2 \cos \theta = \frac{1}{|b \uparrow a| |a \uparrow c|} (-a \downarrow (b \uparrow a)) \cdot (a \downarrow (a \uparrow c)),$$

luego por Definición (3.0.1)

$$a^2 \cos \theta = \frac{-1}{4|b \uparrow a| |a \uparrow c|} (a(b \uparrow a) - (b \uparrow a)a) \cdot (a(a \uparrow c) - (a \uparrow c)a).$$

Denotemos con  $k = \frac{-1}{4|b \uparrow a| |a \uparrow c|}$ , luego por la dualidad entre un bivector y el producto vectorial entre vectores, en la última igualdad, se tiene

$$a^2 \cos \theta = k[a(e_{123}b \times a) - (e_{123}b \times a)a] \cdot [a(e_{123}a \times c) - (e_{123}a \times c)a],$$

luego por asociatividad y como  $ae_{123} = e_{123}a$ , se tiene

$$\begin{aligned}
a^2 \cos \theta &= k(e_{123}a (b \times a) - (e_{123}b \times a)a) \cdot (e_{123}a (a \times c) - (e_{123}a \times c)a), \\
&= k(e_{123}[a(b \times a) - (b \times a)a]) \cdot (e_{123}[a(a \times c) - (a \times c)a]),
\end{aligned}$$

luego por definición del producto exterior, se tiene

$$a^2 \cos \theta = 4k[e_{123}\{a \uparrow (b \times a)\}] \cdot [e_{123}\{a \uparrow (a \times c)\}],$$

luego por la dualidad entre bivector y vector, se tiene

$$a^2 \cos \theta = 4k[a \times (a \times b)] \cdot [a \times (c \times a)] = 4ka^2(a \times b) \cdot (c \times a),$$

por lo tanto

$$(c \times a) \cdot (a \times b) = -|c \times a||a \times b| \cos \theta.$$

□

**Observación 3.7.4.**

Si  $\alpha = \mu\angle(b \uparrow a; c \uparrow b)$  y  $\beta = \mu\angle(c \uparrow b; a \uparrow c)$ , entonces

$$|(b \times a) \uparrow (c \times b)| = |b \times a| |c \times b| \operatorname{sen} \alpha,$$

$$(b \times a) \cdot (c \times b) = -|b \times a| |c \times b| \cos \alpha$$

y

$$|(c \times b) \uparrow (a \times c)| = |c \times b| |a \times c| \operatorname{sen} \beta,$$

$$(c \times b) \cdot (a \times c) = -|c \times b| |a \times c| \cos \beta.$$

**Proposición 3.7.5.** Sean  $a, b$  y  $c \in \langle AG(3) \rangle_1$  y  $\{a, b, c\}$  es l.i.

$$\alpha = \mu\angle(c, a) \quad ; \quad x = \mu\angle(b \uparrow c; a \uparrow b),$$

$$\beta = \mu\angle(a, b) \quad ; \quad y = \mu\angle(c \uparrow a; b \uparrow c),$$

$$\theta = \mu\angle(b, c) \quad ; \quad z = \mu\angle(a \uparrow b; c \uparrow a).$$

Entonces se tienen las identidades:

$$\begin{aligned}\frac{b^4 - (bi_{bc} \cdot i_{ab}b)^2}{c^4 - (ci_{ca} \cdot i_{bc}c)^2} &= \frac{b^6|c \uparrow a|^2}{c^6|a \uparrow b|^2}, \\ \frac{a^4 - (ai_{ab} \cdot i_{ca}a)^2}{b^4 - (bi_{bc} \cdot i_{ab}b)^2} &= \frac{a^6|b \uparrow c|^2}{b^6|c \uparrow a|^2}, \\ \frac{c^4 - (ci_{ca} \cdot i_{bc}c)^2}{a^4 - (ai_{ab} \cdot i_{ca}a)^2} &= \frac{c^6|a \uparrow b|^2}{a^6|b \uparrow c|^2}.\end{aligned}$$

*Demostración.* Probemos la primera, los otros son análogos. Reemplazando  $i_{bc}, i_{ab}, i_{ca}$  e  $i_{bc}$ , se tiene

$$\frac{b^4 - (bi_{bc} \cdot i_{ab}b)^2}{c^4 - (ci_{ca} \cdot i_{bc}c)^2} = \frac{b^4 - \frac{[(b \ b \ \uparrow \ c) \cdot (a \ \uparrow \ b \ b)]^2}{|b \ \uparrow \ c|^2 |a \ \uparrow \ b|^2}}{c^4 - \frac{[(c \ c \ \uparrow \ a) \cdot (b \ \uparrow \ c \ c)]^2}{|c \ \uparrow \ a|^2 |b \ \uparrow \ c|^2}},$$

por Proposición 3.7.2, obtenemos

$$\frac{b^4 - (bi_{bc} \cdot i_{ab}b)^2}{c^4 - (ci_{ca} \cdot i_{bc}c)^2} = \frac{b^4|c \ \uparrow \ a|^2[|a \ \uparrow \ b|^2|b \ \uparrow \ c|^2 - (b^2(a \cdot c) - (a \cdot b)(b \cdot c))^2]}{c^4|a \ \uparrow \ b|^2[|c \ \uparrow \ a|^2|b \ \uparrow \ c|^2 - (c^2(a \cdot b) - (a \cdot c)(b \cdot c))^2]}. \quad (3.31)$$

Denotaremos con  $T$  al cociente

$$T = \frac{|a \ \uparrow \ b|^2|b \ \uparrow \ c|^2 - (b^2(a \cdot c) - (a \cdot b)(b \cdot c))^2}{|c \ \uparrow \ a|^2|b \ \uparrow \ c|^2 - (c^2(a \cdot b) - (a \cdot c)(b \cdot c))^2}.$$

**Afirmación 3.7.6.**  $T = \frac{b^2}{c^2}$ .

En efecto, por Definición 3.3.2, tenemos

$$T = \frac{(a^2b^2 - (a \cdot b)^2)(b^2c^2 - (b \cdot c)^2) - [b^2(a \cdot c) - (a \cdot b)(b \cdot c)]^2}{(c^2a^2 - (c \cdot a)^2)(b^2c^2 - (b \cdot c)^2) - [c^2(a \cdot b) - (a \cdot c)(b \cdot c)]^2},$$

desarrollando, se tiene

$$T = \frac{b^2[a^2b^2c^2 - a^2(b \cdot c)^2 - c^2(a \cdot b)^2 - b^2(a \cdot c)^2 + 2(a \cdot c)(a \cdot b)(b \cdot c)]}{c^2[a^2b^2c^2 - a^2(b \cdot c)^2 - b^2(a \cdot c)^2 - c^2(a \cdot b)^2 + 2(a \cdot b)(a \cdot c)(b \cdot c)]}.$$

Así, se tiene que  $T = \frac{b^2}{c^2}$ .

Luego por la identidad (3.31), obtenemos

$$\frac{b^4 - (bi_{bc} \cdot i_{ab}b)^2}{c^4 - (ci_{ca} \cdot i_{bc}c)^2} = \frac{b^6 |c \uparrow a|^2}{c^6 |a \uparrow b|^2}.$$

Análogamente se obtienen las otras identidades.

□

# Capítulo 4

## Geometría euclidea tridimensional

En este capítulo se estudia más detalladamente que antes la parte de la geometría relativa a la posición de las rectas y planos en el espacio. La parte de la geometría que se dedica al estudio de las figuras situadas en el espacio, se denomina Estereometría.

En la Estereometría, al igual que en la Planimetría, las propiedades de las figuras geométricas se establecen mediante la demostración de teoremas correspondientes partiendo de las propiedades de las figuras geométricas elementales expresadas por los axiomas.

Las nociones principales de la Estereometría son el punto, la recta y el plano. El espacio está constituido por un conjunto infinito de puntos. Las rectas y los planos constan de un conjunto infinito de puntos del plano y no coinciden con todo el espacio.

Enunciemos los axiomas principales de la Estereometría.

Supongamos, que para cualquier plano del espacio se cumplan todos los axiomas, definiciones y teoremas de la planimetría. Supongamos además, que son válidos los siguientes axiomas de la Estereometría:

1. A través de dos puntos distintos cualesquiera se traza una sola recta.
2. Si dos puntos distintos de una recta pertenecen al plano, todos los puntos de la recta pertenecen a este plano.
3. A través de tres puntos cualesquiera, que no están situados en una

misma recta, pasa uno y sólo un plano.

4. Sí dos planos distintos se cortan, entonces se intersecan por la recta. (Ver [1])

A continuación presentamos resultados de la Geometría Euclideana tridimensional, particularmente en Estereometría, desde el punto de vista del álgebra geométrica. (Ver [1] y [15]).

Utilizando la estructura del álgebra geométrica y los resultados expuestos en los capítulos anteriores, hace posible el desarrollo de este capítulo. (Ver [2], [8] y [13]).

Antes de presentar dichos resultados necesitamos descomponer un vector en otros que nos faciliten su estudio en relación a un plano arbitrario.

## 4.1. Vector proyección a un plano

Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$ ,  $\{a, b, c\}$  un conjunto linealmente independiente. Luego trabajando en el subespacio vectorial bidimensional generado por  $a$  y  $b$  podemos construir dos vectores con las siguientes condiciones.

- 1)  $c_1 = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ ,
- 2)  $c_2 = c - c_1$ ,
- 3)  $c_2 \cdot a = c_2 \cdot b = 0$ .

Así, de la condición 3, deducimos que existe  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$  tal que

$$c_2 = \lambda_3(a \times b),$$

también se deduce de las condiciones 1 y 3 que

$$c_1 \cdot c_2 = 0,$$

finalmente el vector  $c$  puede ser expresado de la siguiente forma

$$c = c_1 + c_2 = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3(a \times b).$$

Observamos que el vector  $c$  puede descomponerse en suma de dos vectores, uno pertenece a  $\pi[a, b]$  y el otro vector, ortogonal a todo vector de  $\pi[a, b]$ . Esto motiva la siguiente definición. (Ver figura 4.1)

**Definición 4.1.1.** Sea  $\pi$  un subespacio vectorial bidimensional y  $v \in \langle AG(3) \rangle_1$ . El vector  $v_{\perp} \in \pi$  es llamado vector proyección ortogonal de  $v$  sobre  $\pi$  y  $v_{\parallel} := v - v_{\perp}$  es ortogonal a todo vector de  $\pi$ , es llamado vector ortogonal a  $\pi$ .

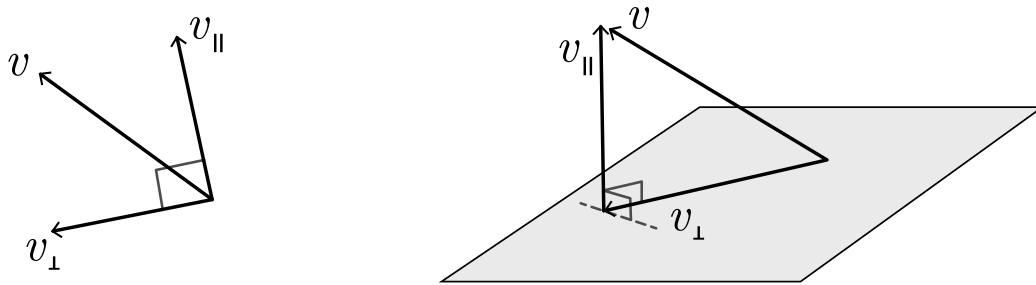


Figura 4.1: Descomposición de un vector respecto a un plano.

**Propiedad 4.1.2.** En las condiciones anteriores se cumplen

$$1- v_{\perp} \cdot v_{\parallel} = 0.$$

$$2- v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2.$$

*Demostración.* **Probemos 1.** Por Definición 4.1.1,  $v_{\parallel} \cdot u = 0$  para todo  $u \in \pi$ , como  $v_{\perp} \in \pi$ , entonces

$$v_{\parallel} \cdot v_{\perp} = 0.$$

**Ahora probemos 2.** Por Definición 4.1.1, tenemos que  $v_{\parallel} = v - v_{\perp}$ , entonces

$$v^2 = (v_{\parallel} + v_{\perp})^2 = (v_{\parallel} + v_{\perp})(v_{\parallel} + v_{\perp}) = v_{\parallel}^2 + 2v_{\parallel} \cdot v_{\perp} + v_{\perp}^2,$$

por lo tanto

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2.$$

□

**Lema 4.1.3.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$ . Si  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$  y  $a$  es ortogonal a  $\pi[b, c]$  entonces

$$a_{\perp} = a \downarrow (b \uparrow c) = 0,$$

donde  $a_{\perp}$  es la proyección ortogonal de  $a$  sobre  $\pi[b, c]$ .

*Demostración.* Por hipótesis  $a.b = 0$  y  $a.c = 0$ , luego se tiene

$$a_{\perp}.b = (a_{\parallel} + a_{\perp}).b = 0 = (a_{\parallel} + a_{\perp}).c = a_{\parallel}.c + a_{\perp}.c = a_{\perp}.c,$$

entonces  $a_{\perp} \parallel a_{\parallel}$ , y por Propiedad 4.1.2 ( $a_{\perp} \perp a_{\parallel}$ ), se tiene  $a_{\perp} = 0$ .

Por otro lado por Proposición 3.1.1, tenemos  $a \downarrow (b \uparrow c) = (a.b)c - (a.c)b$ ,

luego por hipótesis  $a.b = 0$  y  $a.c = 0$ , por tanto  $a \downarrow (b \uparrow c) = 0$ .

□

**Proposición 4.1.4.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$  y  $a_{\perp}$  es la proyección ortogonal de  $a$  sobre  $\pi[b, c]$  es diferente de cero, entonces

$$a_{\perp} \neq a \downarrow (b \uparrow c).$$

*Demostración.* (Vea la figura 4.2). Procedamos por contradicción, supongamos que

$a_{\perp} = a \downarrow (b \uparrow c)$ , por la Proposición 3.1.1, tenemos

$$a_{\perp} = (a.b)c - (a.c)b,$$

$$a_{\perp}.a = (a.b)c.a - (a.c)b.a,$$

entonces

$$0 = a_{\perp}.a = a_{\perp}.(a_{\parallel} + a_{\perp}) = a_{\perp}^2$$

entonces  $a_{\perp} = 0$ , pero esto es una contradicción.

Por otro lado

$$a \downarrow (b \uparrow c) \neq 0.$$

En efecto, supongamos que

$$a \downarrow (b \uparrow c) = 0 \text{ sí y sólo sí } b \uparrow c = 0 \text{ ó } a \perp b \text{ y } a \perp c, \quad (4.1)$$

entonces  $\{b, c\}$  es l.d., ó por Lema 4.1.3,  $a_{\perp} = 0$ . En ambos casos hay contradicción.  $\square$

**Observación 4.1.5.** *Se verifica que  $a \downarrow (b \uparrow c) \perp a$ .*

*En efecto,  $(a \downarrow (b \uparrow c)).a = (a.b)c.a - (a.c)b.a = 0$ .*

**Proposición 4.1.6.** *Bajo las hipótesis de la Proposición 4.1.4, se cumple*

$$a \downarrow (b \uparrow c) \perp a_{\perp}.$$

*Demostración.* (Vea la figura 4.2). Por Definición 4.1.1, se tiene que  $a = a_{\parallel} + a_{\perp}$ , entonces

$$a \downarrow (b \uparrow c) = (a_{\parallel} + a_{\perp}) \downarrow (b \uparrow c) = a_{\parallel} \downarrow (b \uparrow c) + a_{\perp} \downarrow (b \uparrow c). \quad (4.2)$$

Veamos ahora que  $a_{\parallel} \downarrow (b \uparrow c) = 0$ . En efecto. Por Proposición 3.1.1 y por Definición 4.1.1, tenemos que

$$a_{\parallel} \downarrow (b \uparrow c) = (a_{\parallel}.b)c - (a_{\parallel}.c)b = 0,$$

esta última relación en (4.2), se sigue que

$$a \downarrow (b \uparrow c) = a_{\perp} \downarrow (b \uparrow c),$$

realizando el producto escalar entre  $a_{\perp}$  y lo anterior, se tiene

$$a_{\perp} \cdot (a \downarrow (b \uparrow c)) = a_{\perp} \cdot (a_{\perp} \downarrow (b \uparrow c)),$$

por Proposición 3.1.1, en el término de la derecha, sigue

$$\begin{aligned} a_{\perp} \cdot (a \downarrow (b \uparrow c)) &= a_{\perp} \cdot [(a_{\perp} \cdot b)c - (a_{\perp} \cdot c)b], \\ &= (a_{\perp} \cdot b)(a_{\perp} \cdot c) - (a_{\perp} \cdot c)(a_{\perp} \cdot b), \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

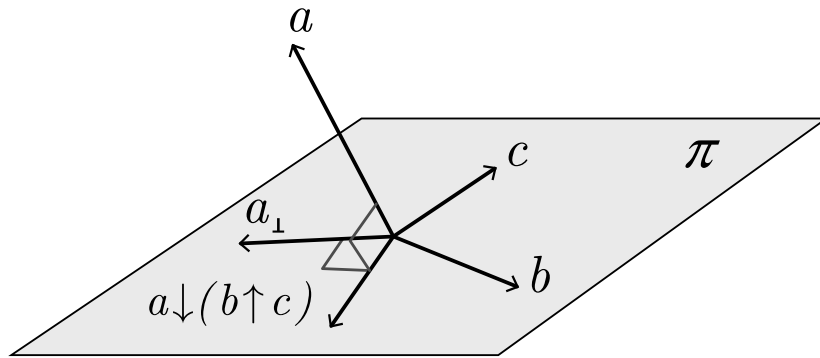


Figura 4.2: Posiciones relativas entre vectores.

**Propiedad 4.1.7.** *Asumamos las hipótesis de la Proposición 4.1.4.*

*Entonces  $a_{\perp}$  satisface las siguientes condiciones:*

$$1 \quad a_{\perp} \cdot a_{\parallel} = 0.$$

$$2 \quad a_{\perp} \cdot [a \downarrow (b \uparrow c)] = 0.$$

*Demostración.* La condición 1 se satisface por Definición 4.1.1 y la condición 2 se satisface por la Proposición 4.1.6. □

**Proposición 4.1.8.** *Asumamos las hipótesis de la Proposición 4.1.4. Entonces*

*todo vector de  $\pi[b, c]$  distinto de  $a \downarrow (b \uparrow c)$  que satisface las condiciones de la Propiedad 4.1.7, es paralelo al vector  $a_{\perp}$ .*

*Demostración.* Procedemos por contradicción (Vea la figura 4.3). Supongamos que existe un vector  $x \in \pi[b, c]$  que satisface las condiciones de la Propiedad 4.1.7 y además no es paralelo al vector  $a_{\perp}$ .

Luego por la condición 2 de la Propiedad 4.1.7, se tiene que  $\{a_{\perp}, a \downarrow (b \uparrow c)\}$  es *l.i.* entonces existen  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tales que

$$x = \lambda_1 a_{\perp} + \lambda_2 a \downarrow (b \uparrow c). \quad (4.3)$$

Luego por la condición 2 de la Propiedad 4.1.7 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot [a \downarrow (b \uparrow c)] \\ &= [\lambda_1 a_{\perp} + \lambda_2 a \downarrow (b \uparrow c)] \cdot [a \downarrow (b \uparrow c)] \\ &= \lambda_1 a_{\perp} \cdot [a \downarrow (b \uparrow c)] + \lambda_2 [a \downarrow (b \uparrow c)]^2, \end{aligned}$$

por la condición 2,  $a_{\perp} \cdot [a \downarrow (b \uparrow c)] = 0$  así se tiene que

$$0 = \lambda_2 [a \downarrow (b \uparrow c)]^2,$$

si  $[a \downarrow (b \uparrow c)]^2 = 0$  en consecuencia  $a \downarrow (b \uparrow c) = 0$ , por (4.1).

Se tiene que  $\{b, c\}$  es *l.d.* lo cual es una contradicción ó  $a$  es ortogonal a  $\pi[b, c]$ , entonces  $a_{\perp} = 0$ , que también es una contradicción con las hipótesis.

Así tenemos que  $\lambda_2 = 0$ .

Luego en (4.3), se obtiene que  $x = \lambda_1 a_{\perp}$ , es decir, son paralelos lo cual es una contradicción con la hipótesis auxiliar.  $\square$

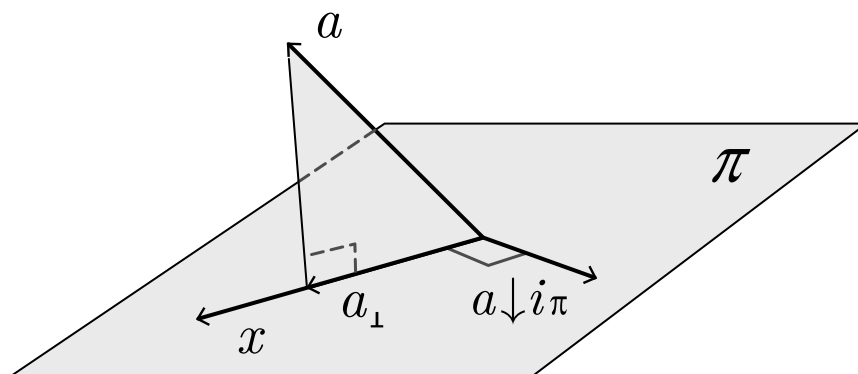


Figura 4.3: Vector ortogonal al vector combinación lineal.

**Observación 4.1.9.** Como sabemos la relación de **paralelismo** es transitiva, este resultado lo justifica.

Dado un subespacio vectorial bidimensional y un vector no contenido en dicho subespacio. Una pregunta que nos planteamos, es la siguiente.

¿ Se podría determinar la proyección ortogonal de dicho vector sobre el subespacio vectorial bidimensional, en función del vector y los vectores que generan dicho subespacio ?.

La respuesta es afirmativa, el Corolario 4.1.11 responde esta interrogante.

Para ello veamos antes el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.10.** Con las hipótesis de la Proposición 4.1.4, se sigue que

$$i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c)) \text{ es paralelo al vector } a_\perp,$$

donde  $i_\pi = \frac{b \uparrow c}{|b \uparrow c|}$  y  $\pi = \pi[b, c]$ .

*Demostración.* Por Proposición 3.0.4, se tiene

$$i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c)) = i_\pi \downarrow (a \downarrow (b \uparrow c)) + i_\pi \uparrow (a \downarrow (b \uparrow c)). \quad (4.4)$$

Por otro lado por Proposición 3.1.1, se tiene

$$\begin{aligned}(b \uparrow c) \uparrow (a \downarrow (b \uparrow c)) &= (b \uparrow c) \uparrow ((a.b)c - (a.c)b), \\ &= (a.b)(b \uparrow c \uparrow c) - (a.c)(b \uparrow c \uparrow b) = 0.\end{aligned}$$

En consecuencia

$$i_\pi \uparrow (a \downarrow (b \uparrow c)) = 0,$$

así en (4.4), obtenemos

$$i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c)) = i_\pi \downarrow (a \downarrow (b \uparrow c)),$$

por Proposición 3.1.1

$$i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c)) = i_\pi \downarrow ((a.b)c - (a.c)b) = (a.b)i_\pi \downarrow c - (a.c)i_\pi \downarrow b$$

substituyendo  $i_\pi$

$$i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c)) = (a.b) \frac{b \uparrow c}{|b \uparrow c|} \downarrow c - (a.c) \frac{b \uparrow c}{|b \uparrow c|} \downarrow b, \quad (4.5)$$

luego por proposiciones 3.0.4 y 3.1.1 en (4.5), se tiene que

$$\begin{aligned}i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c)) &= \frac{1}{|b \uparrow c|} [(a.b)(c^2b - (c.b)c) - (a.c)((b.c)b - b^2c)] \\ &= \left( \frac{(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)}{|b \uparrow c|} \right) b + \left( \frac{(a.c)b^2 - (a.b)(c.b)}{|b \uparrow c|} \right) c. \quad (4.6)\end{aligned}$$

El vector  $i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c))$  es una combinación lineal de  $b$  y  $c$ , entonces pertenece al plano  $\pi$ , así, se tiene

$$[i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c))].a_{\parallel} = 0. \quad (4.7)$$

Por otro lado veamos que sucede con el producto **escalar** entre los vectores  $[i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c))]$  y  $(a \downarrow (b \uparrow c))$ .

El vector  $a \downarrow (b \uparrow c) \in \pi$ , (plano), luego sabemos que el producto geométrico entre un vector y el bivector  $i_\pi$ , lo hace rotar  $\frac{\pi}{2}$  respecto de dicho vector, es decir, para todo vector  $a \in \pi$ , (plano), se tiene que

$$a.(ai_\pi) = 0, \quad (4.8)$$

así tenemos que

$$[i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c))].(a \downarrow (b \uparrow c)) = 0, \quad (4.9)$$

por (4.6), (4.7) y (4.9) el vector  $i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c))$  satisface las hipótesis de la Proposición 4.1.8. Por lo tanto  $i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c))$  es paralelo a  $a_\perp$ .

□

Luego el vector  $i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c))$  sería candidato a ser el vector proyección ortogonal del vector  $a$  sobre  $\pi$ .

El siguiente corolario nos dice como es el vector proyección ortogonal .

**Corolario 4.1.11.** *Con las hipótesis del Teorema 4.1.10, se tiene*

$$a_\perp = i_\pi(a \downarrow i_\pi) = \left( \frac{(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)}{|b \uparrow c|^2} \right) b + \left( \frac{(a.c)b^2 - (a.b)(b.c)}{|b \uparrow c|^2} \right) c.$$

*Demostración.* (Vea la figura 4.4) Por Teorema 4.1.10, existe un  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$a_\perp = \lambda i_\pi(a \downarrow (b \uparrow c)), \quad (4.10)$$

por otro lado se tiene que

$$a_\perp.b = a.b. \quad (4.11)$$

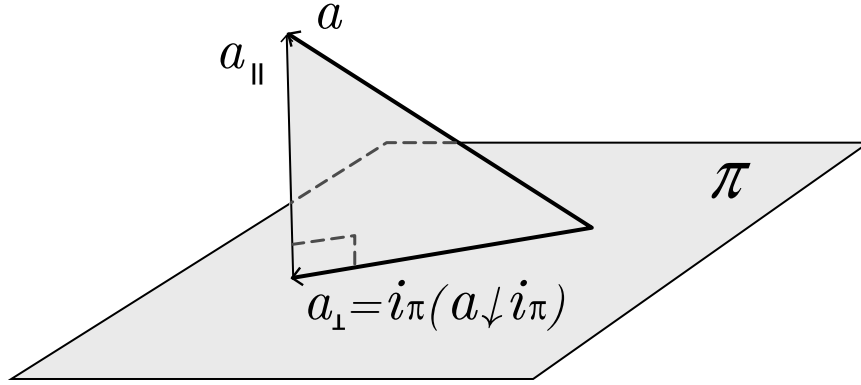


Figura 4.4: Vector proyección ortogonal a  $\pi$ .

Análogamente se tiene  $a_{\perp}.c = a.c$ .

De (4.6) y (4.10), obtenemos

$$\begin{aligned} a_{\perp}.b &= \lambda \left[ \left( \frac{(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)}{|b \uparrow c|} \right) b^2 + \left( \frac{(a.c)b^2 - (a.b)(c.b)}{|b \uparrow c|} \right) c.b \right], \\ &= \lambda(a.b) \left[ \frac{c^2 b^2 - (c.b)^2}{|b \uparrow c|} \right], \end{aligned}$$

por (4.11) y de la Definición 3.3.2 obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{|b \uparrow c|}.$$

Luego esta última relación en (4.10), sigue que

$$\begin{aligned} a_{\perp} &= i_{\pi}(a \downarrow i_{\pi}) \\ &= \left( \frac{(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)}{|b \uparrow c|^2} \right) b + \left( \frac{(a.c)b^2 - (a.b)(c.b)}{|b \uparrow c|^2} \right) c. \end{aligned}$$

□

Otro camino para llegar a este resultado es el siguiente. Para mayores detalles vea la referencia [7].

Sean  $a \in \langle AG(3) \rangle_1$  y  $B \in \langle AG(3) \rangle_2$  tal que  $|B| = 1$ . Si  $a \notin \pi_B$ , por Definición 3.0.1, tenemos

$$aB = a \downarrow B + a \uparrow B.$$

Por otro lado existe el inverso de  $B$ , denotado con  $B^{-1} = -\frac{B}{|B|^2}$ . Luego multiplicando a la derecha por  $B^{-1}$  en la relación anterior, se tiene

$$a = (a \downarrow B)B^{-1} + (a \uparrow B)B^{-1},$$

por hipótesis, se tiene

$$\begin{aligned} a &= -(a \downarrow B)B - (a \uparrow B)B, \\ &= B(a \downarrow B) - (a \uparrow B)B. \end{aligned}$$

Luego se verifican que

1.  $B(a \downarrow B).(a \uparrow B)B = 0$ ,
2.  $B(a \downarrow B) \in \pi_B$ ,
3.  $-(a \uparrow B)B \notin \pi_B$ .

Finalmente denotamos con  $a_{\perp} = B(a \downarrow B)$  y  $a_{\parallel} = -(a \uparrow B)B$ .

## 4.2. Teorema de las tres perpendiculares

Sea un plano y una recta perpendicular a dicho plano, el punto  $Q$  es la intersección de estos, desde  $Q$  trazamos una perpendicular a una recta cualquiera contenida en el plano cuya intersección es  $R$ , entonces toda recta que pasa por  $R$  y un punto cualquiera de la recta perpendicular al plano, es perpendicular a la recta contenida a dicho plano.

Veamos este resultado de la geometría tridimensional en el contexto del álgebra geométrica. Vea la figura 4.5

**Proposición 4.2.1.** *Sean  $a, b, v \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \neq 0$ .*

*Si  $v$  es una combinación lineal de  $a$  y  $b$ . Entonces*

$$(a \times b + v i_{\pi}) \perp v,$$

donde  $\pi = \pi[a, b]$  e  $i_{\pi} = \frac{a \uparrow b}{|a \uparrow b|}$ .

*Demostración.* Es claro que

$$(a \times b + vi_\pi).v = (a \times b).v + (vi_\pi).v,$$

como  $(a \times b).v = 0$  y por (4.8) sigue que  $(vi_\pi).v = 0$ .

Por lo tanto,  $(a \times b + vi_\pi).v = 0$ .

□

**Observación 4.2.2.** *Este teorema es conocido en geometría del espacio como “El teorema de las tres perpendiculares”.*

*La primera perpendicular es  $a \times b$ , la segunda  $vi_\pi$  y la tercera  $a \times b + vi_\pi$ , esto con respecto al vector  $v$ .*

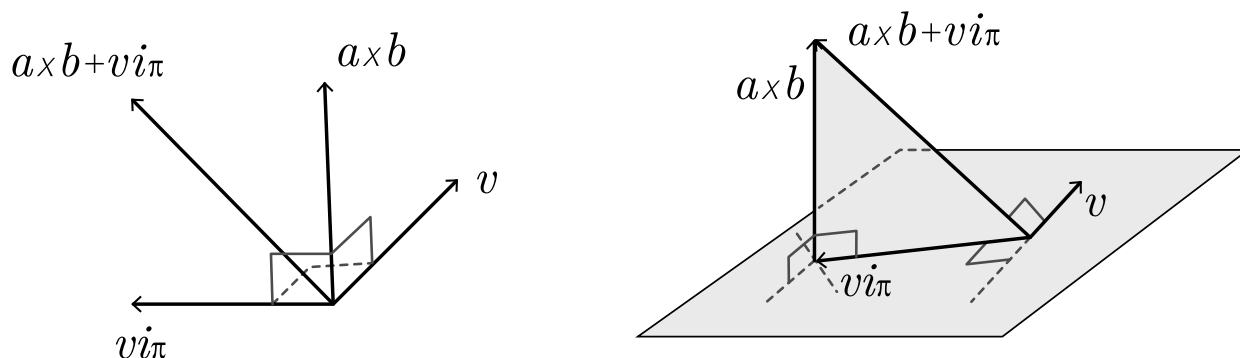


Figura 4.5: Teorema de las tres perpendiculares.

### 4.3. Módulo del bivector proyección ortogonal respecto a otro bivector.

En todo diedro el área de una región contenida en un plano, multiplicado por el coseno de la medida del ángulo diedro, resulta ser el área proyectada

en el otro plano.

En el álgebra geométrica esta proposición, se plasma, es el siguiente teorema. (Vea la figura 4.6).

**Teorema 4.3.1.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$

y  $\theta = \mu\angle(c \uparrow a; b \uparrow c)$ .

Entonces

$$a_{\perp} \uparrow c = |c \uparrow a| \cos \theta i_{bc},$$

donde  $a_{\perp}$  es la proyección ortogonal de  $a$  sobre  $\pi[b, c]$ .

*Demostración.* Por Corolario 4.1.11, se tiene

$$a_{\perp} = \left( \frac{(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)}{|b \uparrow c|^2} \right) b + \left( \frac{(a.c)b^2 - (a.b)(b.c)}{|b \uparrow c|^2} \right) c,$$

luego tenemos que

$$a_{\perp} \uparrow c = \left( \frac{(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)}{|b \uparrow c|} \right) i_{bc}. \quad (4.12)$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} |ci_{ca}| |i_{bc}c| \cos \theta &= (ci_{ca}) \cdot (i_{bc}c), \\ \left| c \frac{c \uparrow a}{|c \uparrow a|} \right| \left| \frac{b \uparrow c}{|b \uparrow c|} c \right| \cos \theta &= \left( c \frac{c \uparrow a}{|c \uparrow a|} \right) \cdot \left( \frac{b \uparrow c}{|b \uparrow c|} c \right), \\ |c(c \uparrow a)| |(b \uparrow c)c| \cos \theta &= c(c \uparrow a) \cdot (b \uparrow c)c, \end{aligned} \quad (4.13)$$

por proposiciones: 3.7.1 y 3.7.2 en (4.13)

$$\begin{aligned} |c| |c \uparrow a| |c| |b \uparrow c| \cos \theta &= c^2(c^2(b.a) - (c.a)(b.c)), \\ |b \uparrow c| |c \uparrow a| \cos \theta &= c^2(b.a) - (c.a)(b.c). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Finalmente (4.14) en (4.12), se obtiene

$$a_{\perp} \uparrow c = |c \uparrow a| \cos \theta i_{bc}.$$

□

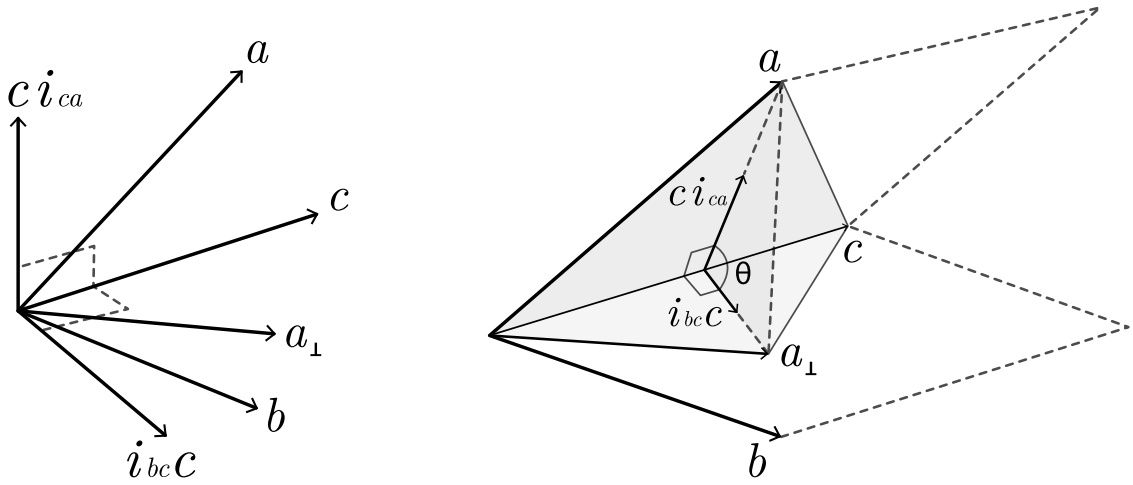


Figura 4.6: Proyección ortogonal del bivector respecto a otro.

**Observación 4.3.2.** Sea  $\theta = \mu\angle(c \uparrow a; b \uparrow c)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 a_{\perp} \parallel c &\Leftrightarrow a_{\perp} \uparrow c = 0 \\
 &\Leftrightarrow |a \uparrow c| \cos \theta i_{bc} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Además en (4.14), tenemos  $(a.b)c^2 - (a.c)(b.c) = 0$ , en consecuencia obtenemos

$$(a.b)c^2 = (a.c)(b.c).$$

Análogamente sea  $\beta = \mu\angle(b \uparrow c; a \uparrow b)$ , entonces

$$a_{\perp} \parallel b \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (a.c)b^2 = (a.b)(b.c).$$

Como  $a_{\perp} \uparrow c = |c \uparrow a| \cos \theta i_{bc}$  entonces  $|a_{\perp} \uparrow c| = |c \uparrow a| |\cos \theta|$ .

## 4.4. Diedros y ángulos determinados por las aristas

El ángulo determinado por las rectas perpendiculares a los planos del diedro y la medida de dicho diedro son suplementarios. (Vea [15])

Con el álgebra geométrica se reinterpreta como (Vea la figura 4.7)

**Teorema 4.4.1.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ . Si  $\theta = \mu\angle(a \uparrow c; b \uparrow a)$  y  $\omega = \mu\angle(b \times a; a \times c)$ .

Entonces

$$\omega + \theta = \pi.$$

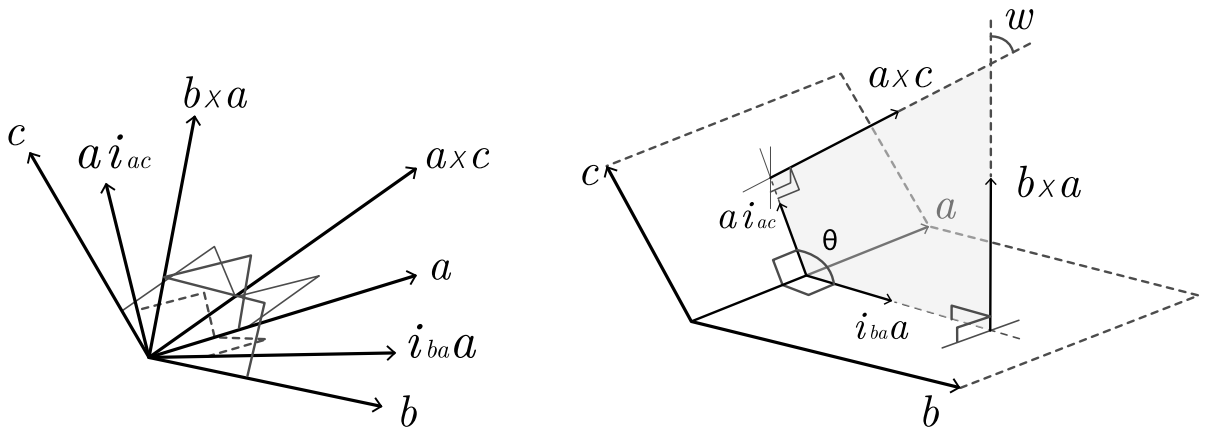


Figura 4.7: Relación del ángulo diedro.

*Demostración.* Por demostrar que

$$\omega + \theta = \pi \text{ sí y sólo sí, } \text{sen } \omega = \text{sen } \theta \text{ y } \text{cos } \theta = -\text{cos } \omega.$$

Por Proposición 3.7.3, se tiene  $|(a \times c) \uparrow (b \times a)| = |a \times c| |b \times a| \text{sen } \theta$ .

Por otro lado, se tiene  $|(a \times c) \uparrow (b \times a)| = |a \times c| |b \times a| |\text{sen } \omega|$ . Así de estas

dos últimas relaciones, se obtiene

$$|\operatorname{sen} \omega| = \operatorname{sen} \theta. \quad (4.15)$$

Por Proposición 3.7.3  $(a \times c) \cdot (b \times a) = -|a \times c||b \times a| \cos \theta$ .

Por otro lado se tiene  $(a \times c) \cdot (b \times a) = |a \times c||b \times a| \cos \omega$ ,

luego de estas dos últimas relaciones, tenemos  $\cos \theta = -\cos \omega$ .

Finalmente de (4.15) y esta última relación, obtenemos  $\omega + \theta = \pi$ .

□

**Observación 4.4.2.** Si  $\alpha = \mu\angle(b \uparrow a; c \uparrow b)$ ,  $\beta = \mu\angle(c \uparrow b; a \uparrow c)$ ,  $\psi = \mu\angle(c \times b; b \times a)$  y  $\phi = \mu\angle(a \times c; c \times b)$ , entonces

$$\psi + \alpha = \pi \quad \text{y} \quad \phi + \beta = \pi.$$

#### 4.4.1. Ley de senos para el trivector

Sean  $\alpha, \beta$  y  $\theta$  las medidas de las caras del ángulo triedro, y sean  $x, y, z$  las medidas de los ángulos diedros opuestos a estas caras respectivamente.

Entonces se tiene (4.16). Con el álgebra geométrica es (Vea la figura 4.8).

**Teorema 4.4.3.** Sean  $a, b, y c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$  y denotemos

$$\alpha = \mu\angle(c, a) \quad ; \quad x = \mu\angle(b \uparrow c; a \uparrow b),$$

$$\beta = \mu\angle(a, b) \quad ; \quad y = \mu\angle(c \uparrow a; b \uparrow c),$$

$$\theta = \mu\angle(b, c) \quad ; \quad z = \mu\angle(a \uparrow b; c \uparrow a).$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} z}. \quad (4.16)$$

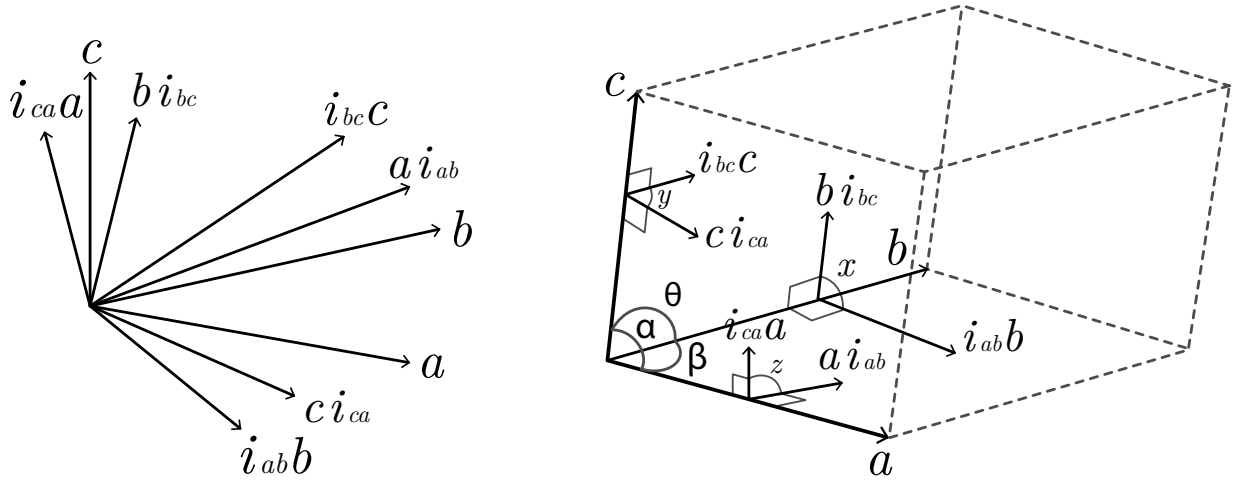


Figura 4.8: Ley de senos para el trivector.

*Demostración.* Se tiene que

$$|b i_{bc} \uparrow i_{ab} b| = |b i_{bc}| |i_{ab} b| \operatorname{sen} x,$$

por Proposición 3.7.1, se obtiene

$$|b i_{bc} \uparrow i_{ab} b| = b^2 \operatorname{sen} x. \quad (4.17)$$

Análogamente, se obtiene

$$|c i_{ca} \uparrow i_{bc} c| = c^2 \operatorname{sen} y, \quad (4.18)$$

luego dividiendo (4.17) por (4.18), tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{c^2 |b i_{bc} \uparrow i_{ab} b|}{b^2 |c i_{ca} \uparrow i_{bc} c|},$$

por Definición 3.3.2

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{c^2 [(b i_{bc})^2 (i_{ab} b)^2 - ((b i_{bc}) \cdot (i_{ab} b))^2]^{1/2}}{b^2 [(c i_{ca})^2 (i_{bc} c)^2 - (c i_{ca}) \cdot (i_{bc} c)]^{1/2}},$$

por Proposición 3.7.1, tenemos

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{c^2[(b^4 - ((bi_{bc}) \cdot (i_{abb}))^2)^{1/2}]}{b^2[(c^4 - (ci_{ca}) \cdot (i_{bcc}))^2]^{1/2}},$$

por Proposición 3.7.5, obtenemos

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{c^2|b|^3|c \uparrow a|}{b^2|c|^3|a \uparrow b|} = \frac{|b||c \uparrow a|}{|c||a \uparrow b|}.$$

Así, se tiene que

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta},$$

entonces

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } y}.$$

Análogamente, se obtiene

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } z}.$$

□

#### 4.4.2. Teorema de cosenos para el trivector.

Antes de presentar este teorema, veamos el siguiente lema que ayudará a probar las siguientes proposiciones.

**Lema 4.4.4.** Sean  $a, b, c \in S^2$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ . Si  $\alpha = \mu\angle(a, b)$ ,

$\beta = \mu\angle(b, c)$  y  $\theta = \mu\angle(c, a)$ , entonces

$$i_{ca}i_{bc} = \frac{-1}{|c \times a||b \times c|}((c \times a) \cdot (b \times c) + (c \times a) \uparrow (b \times c)),$$

$$i_{ca}i_{ab} = \frac{-1}{|c \times a||a \times b|}((c \times a) \cdot (a \times b) + (c \times a) \uparrow (a \times b)).$$

*Demostración.* Es claro que

$$i_{ca} i_{bc} = \left( \frac{c \uparrow a}{|c \uparrow a|} \right) \left( \frac{b \uparrow c}{|b \uparrow c|} \right), \quad (4.19)$$

por la dualidad entre bivector y vector, tenemos  $c \times a = -e_{123}(c \uparrow a)$  y  $b \times c = -e_{123}(b \uparrow c)$ .

Luego, reemplazando estas dos últimas igualdades en (4.19), tenemos

$$\begin{aligned} i_{ca} i_{bc} &= \left( \frac{e_{123}(c \times a)}{|c \times a|} \right) \left( \frac{e_{123}(b \times c)}{|b \times c|} \right), \\ &= \frac{1}{|c \times a||b \times c|} (e_{123}(c \times a)e_{123})(b \times c), \end{aligned} \quad (4.20)$$

por otro lado, se tiene que  $e_{123}(c \times a)e_{123} = -(c \times a)$ . Reemplazando esta igualdad en (4.20), obtenemos

$$i_{ca} i_{bc} = \frac{-(c \times a)(b \times c)}{|c \times a||b \times c|} = \frac{-1}{|c \times a||b \times c|} ((c \times a) \cdot (b \times c) + (c \times a) \uparrow (b \times c)).$$

Análogamente se prueba para  $i_{ca} i_{ab}$ .

□

Esto nos lleva a formular la siguiente proposición.

**Proposición 4.4.5.** Sean  $a, b, c \in S^2$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ . Si  $\alpha = \mu\angle(a, b)$ ,  $\beta = \mu\angle(b, c)$ ,  $\theta = \mu\angle(c, a)$  y  $\gamma = \mu\angle(c \times a, b \times c)$ , entonces

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \beta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta \cos \gamma \quad (4.21)$$

y

$$\operatorname{sen} \alpha i_{ab} + \cos \theta \operatorname{sen} \beta i_{bc} + \operatorname{sen} \theta \cos \beta i_{ca} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma i_\gamma = 0, \quad (4.22)$$

donde  $i_\gamma = i_{c \times a} b \times c$ .

*Demostración.* Por (3.22) y (3.21), se tiene

$$e^{\alpha i_{ab}} = ab = accb = e^{-\theta i_{ca}} e^{-\beta i_{bc}},$$

luego por, la identidad generalizada de Euler, (3.22)

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha i_{ab} &= (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta i_{ca})(\cos \beta - \operatorname{sen} \beta i_{bc}) \\ &= \cos \theta \cos \beta - \cos \theta \operatorname{sen} \beta i_{bc} - \operatorname{sen} \theta \cos \beta i_{ca} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta i_{ca} i_{bc} \end{aligned} \quad (4.23)$$

por Lema 4.4.4 en (4.23) e igualando términos, se tiene

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \beta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta \frac{(-1)}{|c \times a| |b \times c|} ((c \times a) \cdot (b \times c)), \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha i_{ab} &= -\cos \theta \operatorname{sen} \beta i_{bc} - \operatorname{sen} \theta \cos \beta i_{ca} \\ &\quad + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta \left( \frac{(-1)}{|c \times a| |b \times c|} \right) ((c \times a) \uparrow (b \times c)). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por otro lado, tenemos

$$(c \times a) \cdot (b \times c) = |c \times a| |b \times c| \cos \gamma$$

y

$$(c \times a) \uparrow (b \times c) = i_\gamma |c \times a| |b \times c| \operatorname{sen} \gamma,$$

luego reemplazando estas relaciones respectivamente en (4.24) y (4.25), se deduce que

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \beta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta \cos \gamma$$

y

$$\operatorname{sen} \alpha i_{ab} + \cos \theta \operatorname{sen} \beta i_{bc} + \operatorname{sen} \theta \cos \beta i_{ca} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma i_\gamma = 0.$$

□

#### Observación 4.4.6.

Si  $\gamma = 0$  entonces  $\cos\gamma = 1$ . Esto nos llevaría a trabajar en el subespacio vectorial bidimensional generado por los vectores  $a$  y  $b$ , el vector  $c$  estaría entre los vectores  $a$  y  $b$  luego reemplazando  $\cos\gamma = 1$  en (4.21), se obtiene

$$\cos\alpha = \cos\theta \cos\beta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\beta.$$

Además, tenemos  $\alpha = -(\theta + \beta)$  esto pues, manteniendo el sentido en el que se han determinado los ángulos respectivamente y como la función coseno es par, así, se tiene la identidad trigonométrica conocida

$$\cos(\theta + \beta) = \cos\theta \cos\beta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\beta.$$

Por otro lado los bivectores:  $i_{ab}$ ,  $i_{bc}$ ,  $i_{ca}$  y  $i_\gamma$  son iguales ( $i_{ab} = i_{bc} = i_{ca} = i_\gamma$ ), es decir, geoméricamente hablando serían coplanares y  $\operatorname{sen}\gamma = 0$ , luego en (4.22) se tiene

$$\operatorname{sen}\alpha + \cos\theta \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta \cos\beta = 0.$$

Como la función seno es impar, se tendría la siguiente identidad trigonométrica conocida

$$\operatorname{sen}(\theta + \beta) = \cos\theta \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta \cos\beta.$$

Además, si  $\theta = \beta$  no implica que  $i_{ca} = i_{bc}$ .

El teorema de cosenos para un trivector es el siguiente corolario.

Sean  $\alpha, \beta, \theta$  las medidas de las caras de un ángulo triedro y  $\omega$  la medida del ángulo diedro opuesto a la cara de medida  $\alpha$ , entonces se cumple (4.26) (Vea la figura 4.9)

**Corolario 4.4.7.** Sean  $a, b, c \in S^2$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ . Si  $\alpha = \mu\angle(a, b)$ ,  $\beta = \mu\angle(b, c)$ ,  $\theta = \mu\angle(c, a)$  y  $\omega = \mu\angle(c \uparrow a; b \uparrow c)$ , entonces

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \theta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cos \omega. \quad (4.26)$$

*Demostración.* Sea  $\gamma = \mu\angle(b \times c, c \times a)$ , por Proposición 4.4.5, se tiene

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \theta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cos \gamma.$$

Luego por Corolario 4.4.1, se tiene

$$\omega + \gamma = \pi \text{ en consecuencia } \cos \gamma = -\cos \omega.$$

Por lo tanto

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \theta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cos \omega.$$

□

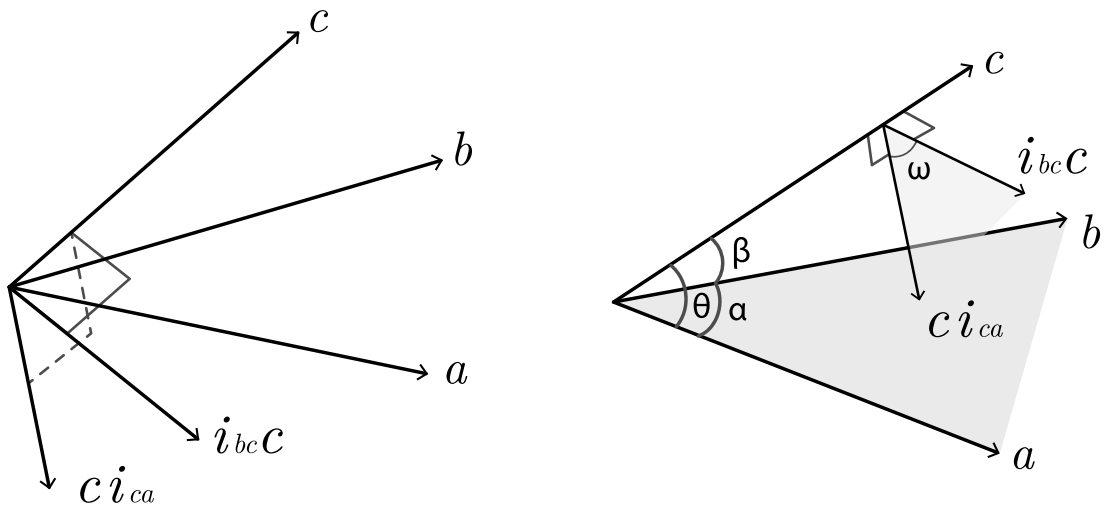


Figura 4.9: Teorema de cosenos.

## 4.5. Teoremas de trivectores

En todo tetraedro de aristas laterales de igual longitud se cumple que, el circuncentro de la base del tetraedro es el pie de la altura del tetraedro. (Vea la figura 4.10).

**Proposición 4.5.1.** Sean  $w, u, v \in \langle AG(3) \rangle_1$  y  $\pi[w, u], v \notin \pi[w, u]$  tal que  $|w - v| = |u - v| = |v|$ , entonces

$$|w - v_{\perp}| = |u - v_{\perp}| = |v_{\perp}|.$$

*Demostración.* El siguiente resultado se cumple

$$(w - v)^2 = v_{\parallel}^2 + (w - v_{\perp})^2.$$

En efecto

$$\begin{aligned} (w - v)^2 &= (w - v)(w - v) = w^2 - 2w.v + v^2 \\ &= w^2 - 2w.(v_{\parallel} + v_{\perp}) + v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 \\ &= w^2 - 2w.v_{\parallel} - 2w.v_{\perp} + v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$v_{\parallel}$  es ortogonal a  $\pi[w, u]$  en consecuencia  $w.v_{\parallel} = 0$ , este último resultado en (4.27), así se tiene

$$(w - v)^2 = w^2 - 2w.v_{\perp} + v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = (w - v_{\perp})^2 + v_{\parallel}^2,$$

luego por hipótesis  $|w - v| = |v|$ , sigue que  $v^2 = (w - v)^2$ , así en la igualdad anterior, obtenemos  $v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = v^2 = (w - v_{\perp})^2 + v_{\parallel}^2$ , se sigue que

$$|v_{\perp}| = |w - v_{\perp}|. \quad (4.28)$$

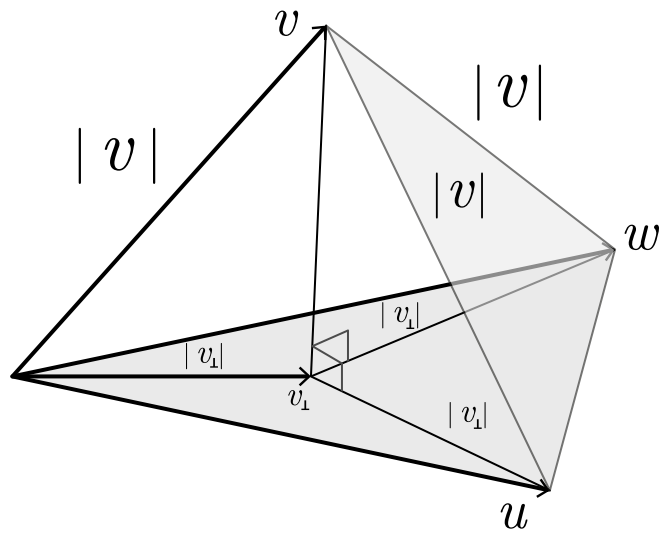


Figura 4.10: Circuncentro de un Trivector en particular.

Análogamente para  $(u - v)$ , pues  $(u - v)^2 = v_{\parallel}^2 + (u - v_{\perp})^2$ .

Entonces

$$|u - v_{\perp}| = |v_{\perp}|, \quad (4.29)$$

luego de (4.28) y (4.29). Por lo tanto

$$|w - v_{\perp}| = |u - v_{\perp}| = |v_{\perp}|.$$

□

**Observación 4.5.2.** *Esto es equivalente a decir que las coordenadas del vector  $v_{\perp}$  sobre  $\pi[w, u]$  es el circuncentro del triángulo determinado por los vectores  $u$  y  $w$ .*

En todo triedro isósceles, cuyas caras congruentes tienen medidas menores a  $\frac{\pi}{2}$ , entonces la proyección ortogonal de la arista común de dichas caras sobre la cara desigual es bisectriz de esta última.

Este enunciado en el álgebra geométrica es el siguiente teorema. (Vea la figura 4.11)

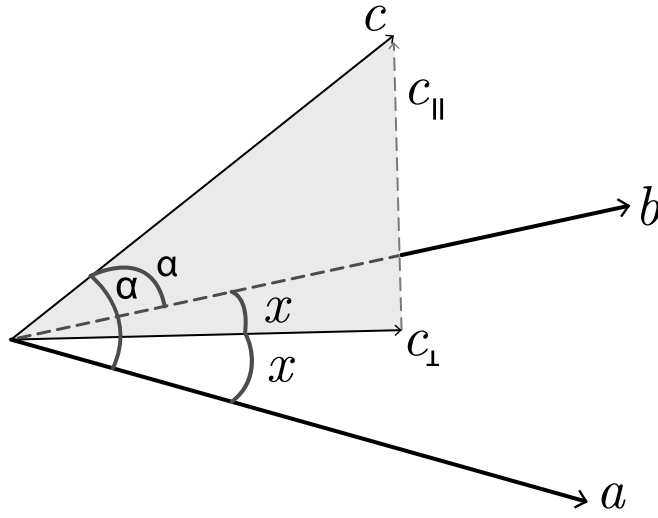


Figura 4.11: Vector bisectriz.

**Teorema 4.5.3.** Sean  $a, b$  y  $c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ . Si  $\alpha = \mu\angle(a, c) = \mu\angle(b, c)$ , entonces

$c_{\perp}$  es bisectriz del  $\angle(a, b)$ ,

donde  $c_{\perp}$  es el vector proyección ortogonal de  $c$  sobre  $\pi[a, b]$ .

*Demostración.* Por Corolario 4.1.11, se tiene

$$c_{\perp} = \left( \frac{(c.a)b^2 - (c.b)(a.b)}{|a \uparrow b|^2} \right) a + \left( \frac{(c.b)a^2 - (c.a)(a.b)}{|a \uparrow b|^2} \right) b,$$

luego obtenemos

$$c_{\perp} \uparrow b = \left( \frac{(c.a)b^2 - (c.b)(a.b)}{|a \uparrow b|^2} \right) a \uparrow b,$$

luego tomando módulo, se tiene

$$|c_{\perp} \uparrow b| = \frac{|(c.a)b^2 - (c.b)(a.b)|}{|a \uparrow b|},$$

por hipótesis  $\frac{b.c}{|b|} = \frac{a.c}{|a|} = |c| \cos \alpha$ , entonces

$$\begin{aligned} |c_{\perp} \uparrow b| &= |b||c| \cos \alpha \frac{|a||b| - a.b}{|a \uparrow b|}, \\ \frac{|c_{\perp} \uparrow b|}{|b|} &= |c| \cos \alpha \frac{|a||b| - a.b}{|a \uparrow b|}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Análogamente, se tiene

$$\frac{|a \uparrow c_{\perp}|}{|a|} = |c| \cos \alpha \frac{|a||b| - a.b}{|a \uparrow b|}, \quad (4.31)$$

luego de (4.30) y (4.31), obtenemos

$$\frac{|c_{\perp} \uparrow b|}{|b|} = \frac{|a \uparrow c_{\perp}|}{|a|},$$

es decir

$$\text{sen } \mu\angle(c_{\perp}, b) = \text{sen } \mu\angle(a, c_{\perp}). \quad (4.32)$$

Por otro lado, por hipótesis, tenemos

$$c_{\perp}.a = c.a = |c||a| \cos \alpha \quad \text{y} \quad c_{\perp}.b = c.b = |c||b| \cos \alpha,$$

entonces

$$\frac{c_{\perp}.a}{|a|} = \frac{c_{\perp}.b}{|b|},$$

es decir

$$\cos \mu\angle(c_{\perp}, b) = \cos \mu\angle(a, c_{\perp}). \quad (4.33)$$

Finalmente de (4.32) y (4.33), obtenemos  $\mu\angle(c_{\perp}, b) = \mu\angle(a, c_{\perp})$ .  $\square$

Un triedro es isósceles si y sólo si a las caras congruentes se le oponen ángulos diedros de igual medida.

En el contexto del álgebra geométrica es (Vea la figura 4.12)

**Teorema 4.5.4.** Sean  $a, b$  y  $c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ . Sean  $x = \mu\angle(a \uparrow b; c \uparrow a)$ ,  $y = \mu\angle(b \uparrow c; a \uparrow b)$ ,  $\alpha = \mu\angle(c, a)$  y  $\beta = \mu\angle(b, c)$ , entonces

$$\alpha = \beta \text{ si y sólo si } x = y.$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Por Proposición 3.4.4 es equivalente a probar que

$$\cos x = \cos y \text{ y } \sin x = \sin y.$$

Se tiene que

$$(ai_{ab}) \cdot (i_{ca}a) = \frac{1}{|a \uparrow b| |c \uparrow a|} (a(a \uparrow b) \cdot (c \uparrow a)a).$$

Por Proposición 3.7.2, se obtiene

$$(ai_{ab}) \cdot (i_{ca}a) = \frac{1}{|a \uparrow b| |c \uparrow a|} (a^2[a^2(b \cdot c) - (a \cdot b)(c \cdot a)]),$$

luego por hipótesis  $\alpha = \beta$ , se tiene que  $\frac{b \cdot c}{|b|} = \frac{c \cdot a}{|a|}$ , obtenemos

$$\frac{(ai_{ab}) \cdot (i_{ca}a)}{|a|^2} = \frac{c \cdot a}{|a \uparrow b| |c \uparrow a|} (|a||b| - a \cdot b). \quad (4.34)$$

Análogamente, se obtiene

$$\frac{(bi_{bc}) \cdot (i_{abb})}{|b|^2} = \frac{b \cdot c}{|a \uparrow b| |b \uparrow c|} (|a||b| - a \cdot b), \quad (4.35)$$

luego por hipótesis  $\alpha = \beta$ , se tiene que  $\frac{b \cdot c}{|b \uparrow c|} = \frac{c \cdot a}{|c \uparrow a|}$ , luego en (4.34) y (4.35), se obtiene

$$\frac{(ai_{ab}) \cdot (i_{ca}a)}{|a|^2} = \frac{(bi_{bc}) \cdot (i_{abb})}{|b|^2},$$

es decir

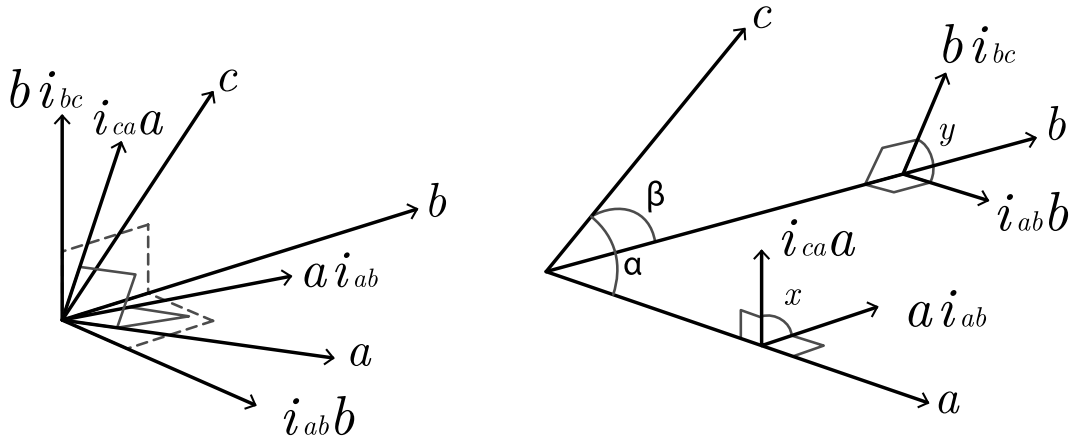


Figura 4.12: Relación entre diedros y ángulos.

$$\cos x = \cos y. \quad (4.36)$$

Ahora veamos que  $\sin x = \sin y$ . En efecto, por Definición 3.3.2, tenemos

$$|(ai_{ab}) \uparrow (i_{ca}a)|^2 = |ai_{ab}|^2|i_{ca}a|^2 - ((ai_{ab}) \cdot (i_{ca}a))^2,$$

por proposiciones 3.7.1 y 3.7.2, se tiene

$$|(ai_{ab}) \uparrow (i_{ca}a)|^2 = |a|^2|i_{ab}|^2|i_{ca}|^2|a|^2 - \frac{a^4}{|a \uparrow b|^2|c \uparrow a|^2} [a^2(b \cdot c) - (a \cdot b)(c \cdot a)]^2,$$

se sigue que

$$\left( \frac{|(ai_{ab}) \uparrow (i_{ca}a)|}{|a|^2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{|a \uparrow b|^2|c \uparrow a|^2} [a^2(b \cdot c) - (a \cdot b)(c \cdot a)]^2,$$

por hipótesis  $\alpha = \beta$ , sigue que:  $\frac{b \cdot c}{|b|} = \frac{c \cdot a}{|a|}$ , así en la última igualdad, obtenemos

$$\left( \frac{|(ai_{ab}) \uparrow (i_{ca}a)|}{|a|^2} \right)^2 = 1 - \left( \frac{c \cdot a}{|a \uparrow b||c \uparrow a|} \right)^2 [|a||b| - a \cdot b]^2. \quad (4.37)$$

Análogamente, se obtiene que

$$\left( \frac{|(bi_{bc}) \uparrow (i_{ab}b)|}{|b|^2} \right)^2 = 1 - \left( \frac{b.c}{|a \uparrow b| |b \uparrow c|} \right)^2 [|a||b| - a.b]^2, \quad (4.38)$$

luego por hipótesis  $\alpha = \beta$ , se obtiene:  $\frac{b.c}{|b \uparrow c|} = \frac{c.a}{|c \uparrow a|}$ , este resultado en (4.37) y (4.38), obtenemos

$$\frac{|(ai_{ab}) \uparrow (i_{ca}a)|}{|a|^2} = \frac{|(bi_{bc}) \uparrow (i_{ab}b)|}{|b|^2},$$

es decir  $\sin x = \sin y$ .

Finalmente de (4.36) y la última relación, por lo tanto  $x = y$ . □

**Lema 4.5.5.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ ,  $c \perp (b - c)$ ,  $c \perp (a - c)$  y  $(b - c) \perp (a - c)$ . Entonces

$$a_{\perp} = c \text{ y } b_{\perp} = c,$$

donde

$a_{\perp}$  : vector proyección ortogonal de  $a$  sobre  $\pi[b, c]$ .

$b_{\perp}$  : vector proyección ortogonal de  $b$  sobre  $\pi[c, a]$ .

*Demostración.* (Vea la figura 4.13) Por Corolario 4.1.11, se tiene

$$a_{\perp} = \left( \frac{(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)}{|b \uparrow c|^2} \right) b + \left( \frac{(a.c)b^2 - (a.b)(b.c)}{|b \uparrow c|^2} \right) c,$$

luego tenemos que

$$a_{\perp} \uparrow c = \left( \frac{(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)}{|b \uparrow c|^2} \right) (b \uparrow c) \quad (4.39)$$

por hipótesis,  $c \perp (b - c) = 0$ , así se tiene

$$c^2 = c.b. \quad (4.40)$$

Por otro lado la expresión;  $(a.b)c^2 - (a.c)(b.c)$  gracias a (4.40), es igual a

$$(a.b)c^2 - (a.c)(b.c) = (a.b)(b.c) - (a.c)(b.c) = (b.c) a.(b - c). \quad (4.41)$$

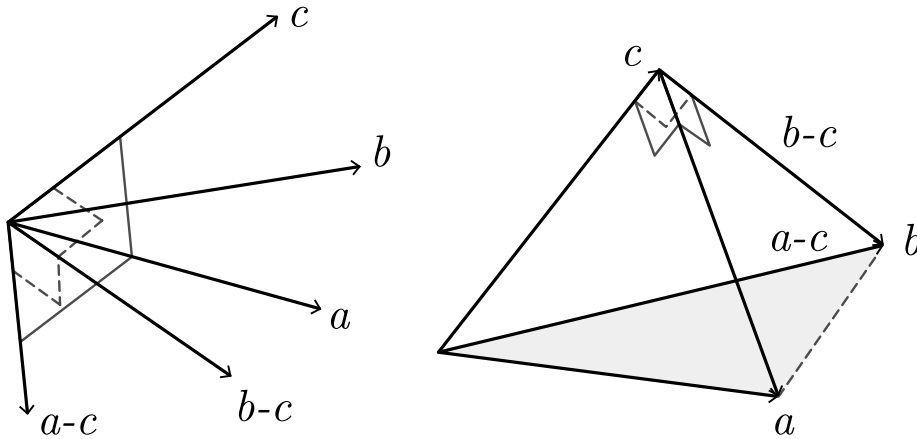


Figura 4.13: Trivector trirectángulo.

Se observa que  $a \perp (b - c)$ , en efecto

$$a = c + (a - c),$$

luego tenemos que

$$a.(b - c) = c.(b - c) + (a - c).(b - c), \quad (4.42)$$

por hipótesis en (4.42), se tiene  $a.(b - c) = 0$ .

Reemplazando esta última relación en (4.41), se obtiene

$(a.b)c^2 - (a.c)(b.c) = 0$ , esta última relación reemplazamos en (4.39), tenemos que  $a_{\perp} \uparrow c = 0$ , sigue que  $a_{\perp} \parallel c$  luego existe  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ , tal que

$$c = \lambda a_{\perp}. \quad (4.43)$$

**Afirmación 4.5.6.**  $\lambda = 1$ .

En efecto, por hipótesis  $c \perp (c - a)$ , en consecuencia se tiene que  $c^2 = c \cdot a$ .

Ahora reemplazando (4.43) en esta última relación, se tiene

$$\begin{aligned}\lambda^2 a_{\perp}^2 &= \lambda(a_{\perp} \cdot a) = \lambda a_{\perp} \cdot (a_{\parallel} + a_{\perp}) \\ &= \lambda a_{\perp}^2.\end{aligned}$$

Si  $a_{\perp} \neq 0$  y  $\lambda \neq 0$  entonces  $a_{\perp} = c$ .

Análogamente para  $b_{\perp}$ . □

Un plano secante a las aristas de un ángulo triedro trirectángulo determina en dicho ángulo tres regiones triangulares, tal que la razón entre el área de la proyección ortogonal de una de las tres regiones triangulares sobre la sección plana determinada y el área de dicha sección plana, es igual al cuadrado del coseno de la medida del ángulo diedro que forma el plano secante con la región triangular proyectada.

En el contexto del álgebra geométrica el enunciado de esta afirmación, es el siguiente. (Vea la figura 4.14)

**Teorema 4.5.7.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ . Si

$c \perp (b - c)$ ,  $c \perp (a - c)$ ,  $(b - c) \perp (a - c)$  y  $\theta = \mu \angle (b \uparrow c; a \uparrow b)$ , entonces

$$\frac{|c_{\perp} \uparrow b|}{|a \uparrow b|} = \cos^2 \theta$$

donde  $c_{\perp}$  es el vector proyección ortogonal de  $c$  sobre  $\pi[a, b]$ .

*Demostración.* Por Teorema 4.3.1, se tiene  $c_{\perp} \uparrow b = |b \uparrow c| \cos \theta i_{ab}$ ,

luego se tiene que

$$|c_{\perp} \uparrow b| = |b \uparrow c| |\cos \theta|. \quad (4.44)$$

De forma análoga, se tiene que

$$\begin{aligned}a_{\perp} \uparrow b &= |a \uparrow b| \cos \theta i_{bc} \\ |a_{\perp} \uparrow b| &= |a \uparrow b| |\cos \theta|.\end{aligned} \quad (4.45)$$

De acuerdo a las hipótesis y haciendo uso del Lema 4.5.5, tenemos que  $a_{\perp} = c$ , reemplazando esta última igualdad en (4.44) y luego de (4.45).

Por lo tanto  $|c_{\perp} \uparrow b| = |a \uparrow b| \cos^2 \theta$ . □

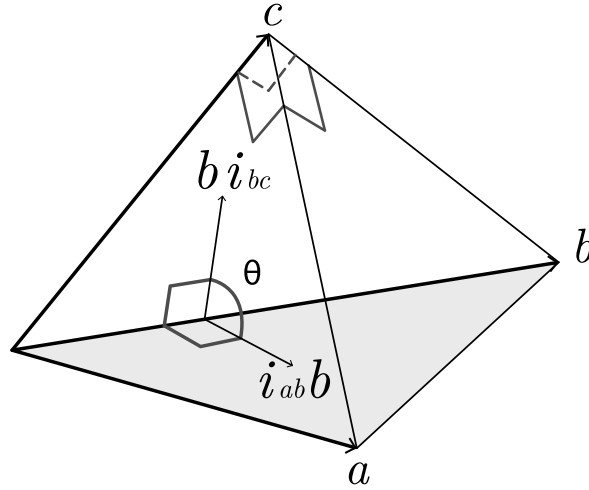


Figura 4.14: Cálculo del coseno del ángulo diedro.

En todo triedro trirectángulo se tiene que la suma de los cuadrados de las áreas de las **caras catetos** es igual a la cuadrado del área de la **cara hipotenusa**. (Vea la figura 4.15)

**Teorema 4.5.8.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $\{a, b, c\}$  un conjunto ortogonal.

Entonces

$$|(a - c) \uparrow (b - c)|^2 = |a \uparrow b|^2 + |b \uparrow c|^2 + |a \uparrow c|^2.$$

*Demostración.* Un cálculo sencillo conduce a

$$\begin{aligned} |(a - c) \uparrow (b - c)|^2 &= [(a - c) \uparrow (b - c)][(b - c) \uparrow (a - c)] \\ &= (a \uparrow b - a \uparrow c - c \uparrow b + c \uparrow c)(b \uparrow a - b \uparrow c - c \uparrow a + c \uparrow c) \\ &= (a \uparrow b - a \uparrow c - c \uparrow b)(b \uparrow a - b \uparrow c - c \uparrow a). \end{aligned}$$

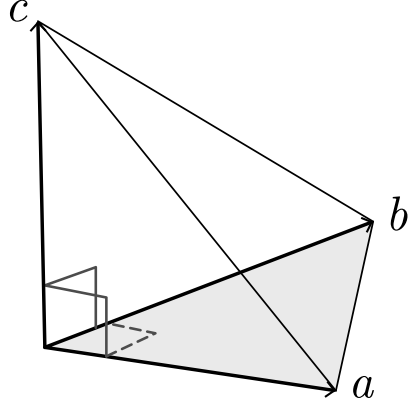


Figura 4.15: Relación de Pitágoras en el espacio.

Luego por distributividad de  $AG(3)$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 |(a - c) \uparrow (b - c)|^2 &= (a \uparrow b)(b \uparrow a) - (a \uparrow b)(b \uparrow c) - (a \uparrow b)(c \uparrow a) \\
 &\quad - (a \uparrow c)(b \uparrow a) + (a \uparrow c)(b \uparrow c) + (a \uparrow c)(c \uparrow a) \\
 &\quad - (c \uparrow b)(b \uparrow a) + (b \uparrow c)(b \uparrow c) + (c \uparrow b)(c \uparrow a). \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

Por hipótesis  $a$ ,  $b$  y  $c$  son ortogonales, esto implica que

$$ac = a \uparrow c = -ca, \quad ab = a \uparrow b = -ba \quad \text{y} \quad bc = b \uparrow c = -cb.$$

Por Definición 3.3.2 y las relaciones anteriores en (4.46), tenemos

$$\begin{aligned}
 |(a - c) \uparrow (b - c)|^2 &= |a \uparrow b|^2 + |b \uparrow c|^2 + |a \uparrow c|^2 \\
 &\quad - abbc - abca - acba + acbc - cbba + cbca \\
 &= |a \uparrow b|^2 + |b \uparrow c|^2 + |a \uparrow c|^2 \\
 &\quad - b^2ac - a^2bc - a^2cb - c^2ab - b^2ca - c^2ba,
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|(a - c) \uparrow (b - c)|^2 = |a \uparrow b|^2 + |b \uparrow c|^2 + |a \uparrow c|^2.$$

□

En todo triedro trirectángulo se cumple que la proyección ortogonal del vértice sobre un plano secante a sus aristas es el **ortocentro** del triángulo determinado por la intersección del triedro y dicho plano. (Vea la figura 4.16).

**Teorema 4.5.9.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $a \uparrow b \uparrow c \neq 0$ . Si

$c \perp (b - c)$ ;  $c \perp (a - c)$  y  $(b - c) \perp (a - c)$ , entonces

$$c_{\perp} \perp a - b, (c - b)_{\perp} \perp a \text{ y } (c - a)_{\perp} \perp b,$$

donde  $c_{\perp}$ ,  $(c - b)_{\perp}$  y  $(c - a)_{\perp}$  son las proyecciones ortogonales de  $c$ ,  $c - b$  y  $c - a$ , respectivamente, sobre  $\pi[a, b]$ .

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que

$$(c_{\parallel} + c_{\perp}).(a - b) = c.(a - b) = c.(a - c) - c.(b - c) = 0,$$

así, se tiene  $c_{\perp}.(a - b) = 0$ .

Ahora veamos que  $(c - b)_{\perp} \perp a$ . Por Corolario 4.1.11

$$(c - b)_{\perp} = \left( \frac{((c - b).a)b^2 - ((c - b).b)(a.b)}{|a \uparrow b|^2} \right) a + \left( \frac{((c - b).b)a^2 - ((c - b).a)(a.b)}{|a \uparrow b|^2} \right) b,$$

luego obtenemos

$$\begin{aligned} (c - b)_{\perp}.a &= \frac{1}{|a \uparrow b|^2} (((c - b).a)a^2b^2 - ((c - b).a)(a.b)^2), \\ &= \frac{(c - b).a}{|a \uparrow b|^2} (a^2b^2 - (a.b)^2) = (c - b).a. \end{aligned} \quad (4.47)$$

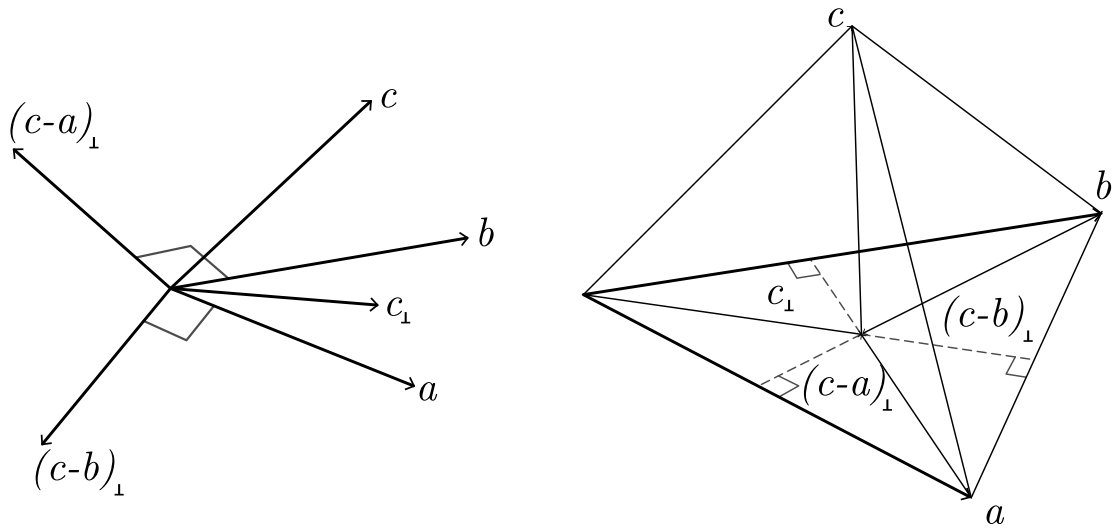


Figura 4.16: Ortocentro del trivector trirectángulo.

Por hipótesis

$$0 = (b - c).(a - c) = (b - c).a - (b - c) = (b - c).a.$$

Reemplazando esta última relación en (4.47), se tiene  $(c - b)_\perp.a = 0$ .

Finalmente veamos que  $(c - a)_\perp \perp b$ . Por Corolario 4.1.11 y realizando el producto escalar con  $b$ , obtenemos

$$\begin{aligned} (c - a)_\perp.b &= \frac{1}{|a \uparrow b|^2} ( -((c - a).b)(a.b)^2 + ((c - a).b)a^2b^2 ), \\ &= \frac{(c - a).b}{|a \uparrow b|^2} (a^2b^2 - (a.b)^2), \\ &= (c - a).b. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Por hipótesis

$$0 = (b - c).(a - c) = b.(a - c) - c.(a - c) = b.(a - c).$$

Esta última relación en (4.48), se tiene  $(c - a)_\perp.b = 0$ . □

En todo triedro trirectángulo se cumple que la inversa del cuadrado de la distancia de su vértice a un plano secante a sus aristas es igual a la suma de las inversas al cuadrado de las distancias del vértice, a los puntos de intersección del plano con las aristas. (Vea la figura 4.17).

**Teorema 4.5.10.** Sean  $a, b, c \in \langle AG(3) \rangle_1$  tal que  $\{a, b, c\}$  es un conjunto ortogonal. Entonces

$$\frac{1}{c_{\parallel}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

donde  $c_{\parallel}$  es la proyección ortogonal de  $c$  sobre  $\pi[a - c, a - b]$ .

*Demostración.* Por hipótesis, se tiene

$$a^2 = (a - c) \cdot (a - b), \quad (4.49)$$

luego hacemos  $r = |a - c \uparrow a - b|^2$ . Por Definición 3.3.2

$$r = (a - c)^2(a - b)^2 - ((a - c) \cdot (a - b))^2,$$

por hipótesis, obtenemos

$$r = (a^2 + c^2)(a^2 + b^2) - a^4 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2. \quad (4.50)$$

Ahora por Corolario 4.1.11, tenemos

$$c_{\perp} = \left( \frac{(c \cdot (a - c))(a - b)^2 - ((a - b) \cdot c)((a - c) \cdot (a - b))}{|a - c \uparrow a - b|^2} \right) (a - c) \\ + \left( \frac{(c \cdot (a - b))(a - c)^2 - ((a - c) \cdot c)((a - c) \cdot (a - b))}{|a - c \uparrow a - b|^2} \right) (a - b),$$

por hipótesis, (4.49) y (4.50), se tiene

$$c_{\perp} = \left( \frac{-c^2(a^2 + b^2)}{r} \right) (a - c) + \left( \frac{c^2a^2}{r} \right) (a - b), \\ = \frac{c^2}{r} ((a^2 + b^2)(c - a) + a^2(a - b)),$$

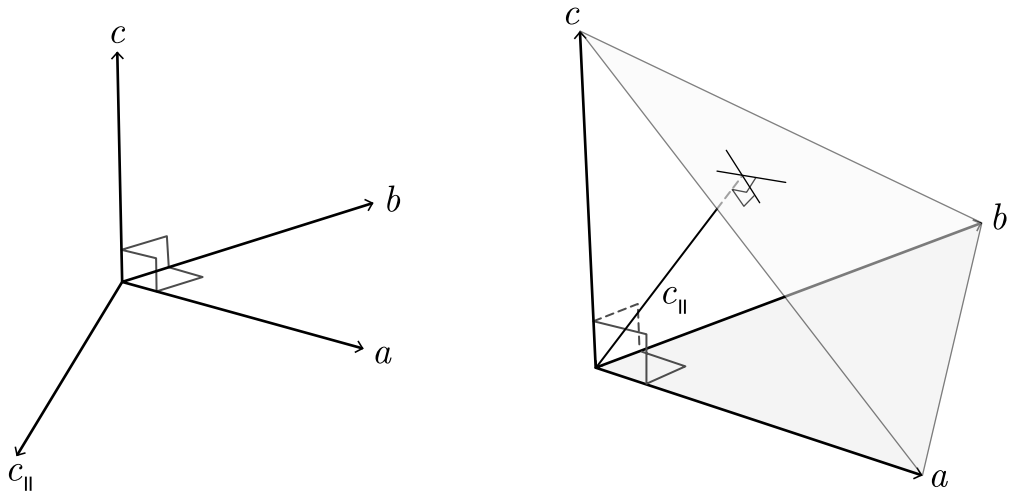


Figura 4.17: Relación entre módulos de vectores que determinan un trivector.

luego se tiene

$$c_{\perp}^2 = \frac{c^4}{r^2} \left( (a^2 + b^2)^2 (c - a)^2 + 2(a^2 + b^2)a^2[(c - a) \cdot (a - b)] + a^4(a - b)^2 \right),$$

por hipótesis y (4.49), obtenemos

$$\begin{aligned} c_{\perp}^2 &= \frac{c^4}{r^2} \left( (a^2 + b^2)^2 (a^2 + c^2) - 2(a^2 + b^2)a^4 + a^4(a^2 + b^2) \right), \\ &= \frac{c^4}{r^2} (a^2 + b^2) \left( (a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - a^4 \right), \\ &= \frac{c^4}{r^2} (a^2 + b^2) (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2), \end{aligned}$$

luego por (4.50), se tiene

$$c_{\perp}^2 = \frac{c^4}{r} (a^2 + b^2),$$

luego por Definición 4.1.2 y por (4.50), se obtiene

$$\begin{aligned} c^2 - c_{\parallel}^2 &= \frac{c^4(a^2 + b^2)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \\ c_{\parallel}^2 &= c^2 - \frac{c^4(a^2 + b^2)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \end{aligned}$$

luego se tiene

$$c_{\parallel}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{c_{\parallel}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

□

**Observación 4.5.11.** *Este resultado generaliza los resultados de las métricas en un triángulo rectángulo de la geometría euclídeana plana.*

# Bibliografía

- [1] A.V. Pogorélov *Geometría Elemental*; Editorial MIR moscú, impreso em URSS 1974.
- [2] Ablamawics-Sobczyk *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications*; Birkhauser, 2004.
- [3] Artin E. *Algebra Geométrica*; Limusa, Méjico 1992.
- [4] Barker- Howe *Continuous Symmetry (From Euclid to Klein)*; American Mathematical Society, 2007.
- [5] Bekken, O. *Una Historia Breve del Algebra*; Sociedad Matematica Peruana, 1983.
- [6] Berger M. *Geometry I*; Springer, Heildelberg, 1987.
- [7] Carlos Álcantara Michuy *Introducción a las álgebras geométricas euclidianas*; Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Mayor de San Marcos; F.C.M. Lima - Perú 2018.
- [8] Doran-Lasenby *Physical Applications of Geometric Algebra*; Lecture Course, Cambridge University.
- [9] Edgar Vera Saravia *Álgebra geométrica euclideana tridimensional*; ed- verasar@unmsm.edu.pe. 1ra ed. 2013 Departamento de Matemática de la UNMSM, Lima-Perú.
- [10] Edgar Vera Saravia *Álgebra geométrica bidimensional*; Una introducción Heurística. everas@unmsm.edu.pe Departamento de Matemática de la UNMSM, Lima-Perú.
- [11] Elon Lages Lima *Medida y Forma en Geometría*; IMCA-Instituto de Matemática y Ciencias Afines

- [12] Hestenes *New Foundations for Classical Mechanics*; Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [13] Leo Dorst *Geometric (Clifford) algebra: a practical tool for efficient geometrical representation*; Intelligent Autonomous Systems, Dept. of computer Science, University of Amsterdam, The Netherlands May 24, 1999.
- [14] Lounesto, P. *Clifford Algebras and Spinors*; Cambridge University Press, 2001.
- [15] Paulo Cezar Pinto Carvalho *Introducción a la Geometría Espacial*; IMCA-Instituto de Matemática y Ciencias Afines
- [16] Vaz Jr., J. *A álgebra geométrica do espaço euclidiano e a teoria de Pauli*; Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 19 numero 2, 1997.