Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Modelo matemático ecológico epidemiológico de la enfermedad infecciosa emergente que está llevando al declive a la población de las ranas en California

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Pilar Rocío SAYÁN MEJÍA

ASESOR

María Natividad ZEGARRA GARAY

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Sayán, P. (2021). *Modelo matemático ecológico epidemiológico de la enfermedad infecciosa emergente que está llevando al declive a la población de las ranas en California*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Pilar Rocío Sayán Mejía
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40879717
URL de ORCID	No Aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Dra. María Natividad Zegarra Garay
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09206994
URL de ORCID	https://orcid.org/**0000-0002-3418-9185**
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Mg. Gavino Aymituma Puma
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08025924
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	MG. Félix Gregorio Pariona Vilca
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07366081
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.4. Matemática Aplicada (Biomatemática, Economía, Optimización y Otros)

Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Carabayllo Manzana y lote: I-15 Calle: Jr. Felipe Mendizábal N° 338 11°53'47,778'' 77°2'23.453''
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Agosto - octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Aplicadas http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:20 horas del domingo 24 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Mg. Gavino Aymituma Puma (PRESIDENTE), Mg. Félix Gregorio Pariona Vilca (MIEMBRO) y la Dra. María Natividad Zegarra Garay (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**MODELO MATEMÁTICO ECOLÓGICO EPIDEMIOLOGICO DE LA ENFERMEDAD INFECCIOSA EMERGENTE QUE ESTA LLEVANDO AL DECLIVE A LA POBLACIÓN DE LAS RANAS EN CALIFORNIA**", presentado por la señorita **Bachiller Pilar Rocío Sayán Mejía**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de diecisiete **(17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller Pilar Rocío Sayán Mejía** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 11:50 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Gavino Aymituma Puma
PRESIDENTE

Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca
MIEMBRO

Dra. María Natividad Zegarra Garay
MIEMBRO ASESOR

Dedicatoria

Lo dedico a José Gregorio Saavedra Contreras y al profesor Ronald Gutierrez Morales y que en vida fueron quienes encaminaron a seguir la carrera de Matemática Pura, que Dios los tenga en su gloria.

A mis profesoras del colegio secundaria Presentación de María porque me enseñaron a seguir mis sueños y nunca rendirme.

Agradecimientos

Agradezco ante todo a Dios, a mi madre por su apoyo infinito.

Un agradecimiento profundo a los profesores PhD. Adnan Khan, Dr. Mariano Rivero Zapata y PhD Roxana López Cruz por su asesoramiento en el presente trabajo.

A mis amigos que nunca dejaron de creer en mí: Marco Antonio Untiveros Encarnación, Lizbeth Peña Daza y Pilar Carrasco Herrera.

Resumen

Modelo Matemático Ecológico Epidemiológico de la Enfermedad Infecciosa Emergente que esta llevando al declive a la población de las Ranas en California

Pilar Rocío Sayán Mejía

Octubre - 2021

Asesor : Dra. María Natividad Zegarra Garay

Título Obtenido : Licenciada en Matemática

En la presente investigación formulamos un modelo bidimensional para estudiar el comportamiento de la población estado larval y adulta, calculamos la condición umbral, la tasa de supervivencia y la tasa de reproducción $\mathcal{R}_0$ con sus respectivas interpretaciones ecológicas. Presentamos también el modelo tridimensional de la población de larvas de anfibios para investigar la extinción debido a la enfermedad infecciosa. En este sentido, la población de larvas del modelo se subdivide en dos estados, susceptible y no susceptible, según su vulnerabilidad a la enfermedad. Calculamos la condición umbral, la tasa de supervivencia a la metamorfosis y la tasa de reproducción $\mathcal{R}_0$ con sus respectivas interpretaciones ecológicas, y hemos demostrado que si $\mathcal{R}_0 < 1$, toda la población se extinguirá. En cambio para el caso de $\mathcal{R}_0 > 1$, estudiamos diferentes perspectivas bajo los cuales una población infectada puede permanecer o extinguirse utilizando análisis de estabilidad y persistencia.

Palabra clave:

Modelos Matemáticos

Quitridiomicosis

Población en Extinción

Población de anfibios

Abstract

Epidemiological Ecological Mathematical Model of the Emerging Infectious Disease That is Leading the Frog Population Decline in California

Pilar Rocío Sayán Mejía

Octubre - 2021

Advisor	:	Dra. María Natividad Zegarra Garay
Obtained Título	:	Degree in Mathematics

In the present investigation, we formulate a two-dimensional model to study the behavior of the larval and adult population, we calculate the threshold condition, the survival rate, and the reproduction rate $\mathcal{R}_0$ with their respective ecological interpretations. We also present the three-dimensional model of the amphibian larval population to investigate extinction due to infectious disease. In this sense, the larval population of the model is subdivided into two states, susceptible and non-susceptible, according to their vulnerability to the disease. We calculate the threshold condition, the survival rate to metamorphosis, and the reproduction rate $\mathcal{R}_0$ with their respective ecological interpretations, and we have shown that if $\mathcal{R}_0 < 1$, the entire population will go extinct. On the other hand, for the case of $\mathcal{R}_0 > 1$, we study different perspectives under which an infected population can remain or become extinct using stability and persistence analysis.

Keywords:

Mathematical Models

Chitridiomycosis

Population in Extinction

Amphibian population

Acta de sustentación

Modelo Matemático Ecológico Epidemiológico de la Enfermedad Infecciosa Emergente que esta llevando al declive a la población de las Ranas en California

PILAR ROCÍO SAYÁN MEJÍA

Trabajo de investigación presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciada en Matemática Pura.

Aprobada por:

Mg. Gavino Aymituma Puma

Presidente

Lic. Felix Gregorio Pariona Vilca

Jurado

Dra. María Natividad Zegarra Garay

Asesor

Lima - Perú

Octubre - 2021

Índice general

1. Introducción **1**

1.1. Planteamiento del problema de investigación 4

1.1.1. Determinación del problema 4

1.1.2. Formulación del problema 5

1.2. Objetivos de la investigación 6

1.2.1. Objetivo general 6

1.2.2. Objetivo específico 7

1.3. Importancia 7

1.4. Justificación 7

2. Marco Teórico **9**

2.1. Antecedentes del problema de investigación 9

2.2. Bases teóricas 10

2.3. Fundamentos Teóricos 10

2.4. Nociones sobre la teoría cualitativa de Ecuaciones diferenciales ordinarias 12

2.4.1. Introducción a la teoría cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 12

2.4.2. Conjuntos invariantes 15

2.5. Equivalencia entre campos de vectores 16

2.5.1. Clasificación topológica de los puntos de equilibrio hiperbólicos 17

2.6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 21

2.7. Conservación de la Positividad y la Delimitación 21

2.8. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Planas 23

2.8.1. Criterio de Dulac-Bendixson 25

2.9. Existencia de una Órbita Periódica Estable 26

2.10. Comportamiento en las proximidades de un equilibrio 28

2.11. Elementos de la Teoría de Persistencia 30

2.12. Estabilidad Global de un Conjunto Minimal Compacto 33

2.12.1. Estabilidad Global 33
2.13. Criterios de Routh-Hurwitz 34
2.13.1. Estabilidad Local en sistemas de primer orden 35
2.14. Conceptos ecológicos 37
2.14.1. Ecosistema 37
2.14.2. Formas de Crecimiento Poblacional 37
2.15. Enfermedad Infecciosa Emergente en el mundo 42
2.15.1. Quitridiomicosis 42
2.15.2. Enfermedad Infecciosa Emergente en los anfibios 43
2.15.3. Enfermedad Infecciosa Emergente en anfibios en California 44
2.16. Estructura del Modelo 44
2.17. Crecimiento de la población de anfibios bajo la estructura de la etapa básica . . 48
2.17.1. Modelo básico de dos dimensiones 49
2.17.2. El modelo con dos dimensiones 50
2.17.3. Modelo bien definido y Disipatividad 50
2.18. Equilibrio y Tasa de Reproducción 55
2.19. Tasa de Reproducción Básica y Condición Umbral para la extinción frente a persistencia 56
2.20. Tasas de transición de etapa débilmente dependientes de la densidad y estabilidad global de los equilibrios no triviales 58
2.21. Planteamiento del modelo de la enfermedad infecciosas 62
2.21.1. Existencia y unicidad de las soluciones 64
2.22. Existencia y Unicidad 65
2.22.1. Acotación de las Soluciones 68
2.23. Análisis de Estabilidad 69
2.23.1. Existencia de Estados Estables 70
2.24. El modelo de transmisión de la enfermedad para un caso especial 81
2.24.1. Caso especial sin enfermedad 90

3. Metodología de investigación **92**
3.1. Diseño de investigación 92
3.2. Tipo de investigación 93
3.3. Población de estudio 93
3.4. Técnica e instrumentos de recolección de datos 93
3.5. Plan de análisis estadísticos de datos 93

4. Conclusiones **94**

Bibliografía **101**

Índice de Cuadros **102**

Índice de figuras **103**

Capítulo 1

Introducción

El impacto humano sobre la vida en la tierra ha aumentado radicalmente desde la década de los años 70, impulsado por las demandas de una población en un crecimiento ingreso per cápita promedio en aumento. La naturaleza está siendo explotada más que nunca, pero esto ha ocurrido a costa de la disminución global sin precedentes en la extensión y la integridad de los ecosistemas, la distinción de las comunidades ecológicas locales, la abundancia del número de especies silvestres como también el número de variedades domesticadas locales. Tales variaciones disminuyen los beneficios vitales que las personas reciben de la naturaleza y amenazan la calidad de vida de las futuras generaciones [48] [29].

Una de las enfermedades infecciosas globalizadas causante del declive mundial de especies de anfibios es el hongo patógeno Quitridiomicosis (Batrachochytrium dendrobatidis). En el año 2019 realizaron estudios un grupo de científicos a nivel mundial, rastrearon el origen hasta el Asía, específicamente en la península de Corea, es de este lugar que se extendió al resto del mundo y que una cepa en particular la pandemia global es la que más está imperando en el mundo. Este estudio fue realizado por la revista Science en [36].

Los anfibios habitan prácticamente en todos los continentes. El salvaguardarlos es un trabajo de gran importancia para el equilibrio del ecosistema, por sus particularidades biológicas [3] y ecológicas [63], los anfibios cumple un rol importante como parte de la red trófica del ecosistema. Se alimentan de insectos, los cuales muchos de ellos son vectores de enfermedades como: dengue, dkujuyuya, Zika o malaria; o también encontramos insectos que son plaga de cultivos agrícolas. En referencia a ello, los anfibios nos ayudan a manejar poblaciones de insectos que esparcen enfermedades o que dañan la agricultura. La pérdida de biodiversidad de un hábitat trae consigo consecuencias irreversibles, es debido a esta preocupación que realizo la presente investi-

gación interdisciplinaria que une las matemáticas y la ecología. Este estudio pretende fomentar conciencia pública de la catástrofe más silenciosa de nuestro tiempo, nos enfrentamos al colapso de la vida misma, queda en cada uno de nosotros hacer cambios para no dañar el medio ambiente.

El estudio teórico del impacto de la enfermedad en la población de anfibios, se realiza mediante ecuaciones diferenciales, para modelar el efecto de la enfermedad en la población de anfibios en un medio acuático. Se asume que la dinámica de la población es modelada por un sistema de ecuaciones diferenciales; el contagio de la enfermedad se produce en un ambiente que comparten durante la metamorfosis, de etapa larval a rana adulta; y se da de un individuo a otro. La ecuación logística presenta una competencia intraespecífica, esto sucede cuando dos estados tienen diferentes recursos necesarios para sobrevivir, como la larva y la rana adulta para más detalles ver en [63]. Ahora teniendo en cuenta la concepción de la enfermedad del hongo patógeno Quitridiomicosis que enfrentan los anfibios en particular las Ranas Americanas en California [1] [35]; relacionemos el fenómeno epidemiológico de la Quitridiomicosis, en sistemas dinámicos. Hoy en día los modelos matemáticos están siendo utilizados para predecir el comportamiento de la enfermedad desde hoy y del pasado.

La metodología de la presente investigación esta desarrollada con un diseño no experimental y la investigación es teórica pues utiliza el pensamiento u operaciones mentales para crear modelos en este caso modelos matemáticos [39]. La corriente epistemológica del estudio es racionalista pues es propia de las ciencias formales como las matemáticas [50].

Este proyecto ha sido dividido en cuatro grandes partes. En el capítulo uno planteamos el problema de investigación, sus objetivos, la importancia y la justificación de la investigación. En el capítulo dos, presentamos los conceptos teóricos matemáticos y ecológicos que fundamentan la investigación, para luego introducirnos en el análisis de la investigación, presentando un modelo de población de crecimiento continuo, estructurado en dos estados, la etapa larva y la etapa adulta del modelo propuesto en [44], asimismo, mostramos la tasa de reproducción básica y la cantidad umbral para la extinción frente a la persistencia de la población con sus respectivas interpretaciones ecológicas. Seguidamente, analizamos la estabilidad global de los equilibrios no triviales de la extinción de la población mediante el estudio de órbitas periódicas. Luego mostramos el modelo matemático con la enfermedad infecciosa [28], formulamos en dos compartimientos: larvas susceptibles y larvas infectadas. Analizamos por medio de equivalencias topológicas y cambios de parámetros apropiados, para formar un campo de vectores extendido, topológicamente equivalente al modelo inicial, sobre el cual realizamos el análisis. Probaremos que la soluciones del modelo son acotadas, son positivas y el modelo está bien definido. Ex-

ponemos la tasa de supervivencia de la metamorfosis y la cantidad umbral con sus respectivas interpretaciones ecológicas. Seguidamente estudiamos el análisis de estabilidad del sistema utilizando criterio de Routh-Hurtwitz y el Teorema de Invarianza LaSalle, encontrando la tasa de reproducción básica bajo cierta combinaciones de parámetros. También realizamos el análisis de estabilidad del modelo adimensionalizado, mediante teoría de estabilidad, el estado endémico es localmente asintóticamente estable bajo ciertas condiciones. Así, tomamos un caso especial sin enfermedad y encontrando un punto de bifurcación.

1.1. Planteamiento del problema de investigación

Una de las enfermedades infecciosas globalizadas causante del declive mundial de especies de anfibios es el hongo patógeno Quitridiomicosis (Batrachochytrium dendrobatidis). En el año 2019 realizaron estudios un grupo de científicos a nivel mundial, rastreando el origen del hongo patógeno hasta el Asía, específicamente en la península de Corea, es de este lugar que se extendió al resto del mundo y que una cepa en particular la pandemica global es la que más está imperando. Este estudio fue realizado por la revista Science en [36].

La comunidad científica preocupada por la disminución de anfibios a nivel mundial, ha realizado diferentes estudios en estos últimos 30 años para conocer posibles causas que predispusieron la desaparición de anfibios, las cuales son: la destrucción de su hábitat natural [63] [30], el tráfico ilegal de especies para el consumo humano, el cambio climático [54], la deforestación, la radiación solar ultravioleta [33], entre otros factores [21], [27], [42] [7].

Según los registros de la Universidad de California, las Rana Americanas no está exenta de esta enfermedad y estas últimas decadas su población ha estado disminuyendo [1] [35], una de las formas para entender el comportamiento de la población es el punto de vista matemático, ya que por medio de modelación matemática se encuentra una ecuación asociada a este problema y nos brinda información sobre la evolución, tanto de la natalidad como la mortalidad de esta especie de anfibio. Realizamos un estudio de la dinámica del modelo con herramientas de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. El análisis se realiza por medio de equivalencias topológicas y cambios de parámetros apropiados, mediante un campo de vectores extendido topológicamente equivalente al modelo inicial, al cual realizaremos el análisis. Probaremos la existencia, unicidad y acotación. dinámica del modelo matemático de la enfermedad es estable bajo cierta combinación de parámetros. La investigación esta orientada a la dinámica de anfibios teniendo en cuenta las poblaciones en etapa libre de la enfermedad (Larva), etapa susceptible y la etapa infecciosa.

1.1.1. Determinación del problema

La Quitridiomicosis (Batrachochytrim dendrobatidis) es una de las enfermedades emergentes que hoy día está causando intranquilidad em la comunidad científica debido a la crisis de la biodiversidad moderna [18] y la revista Science lo ha comparado con un evento contemporáneo de extinción masiva en [36]. Entre las causas podemos encontrar a los factores dependientes de

la densidad tal como la competencia intraespecífica (competencia dentro de la población) como señala [19], la depredación como menciona Olivera (2005), los agentes patógenos como el quitridio (Batrachochytrim dendrobatidis) [16] [17] y la acumulación de desechos; como por ejemplo el fenol como menciona [7]. Mientras los factores independientes son las perturbaciones periódicas, incluyendo incendios, inundaciones, huracanes y sequías, a menudo dan como resultado una mortalidad catastrófica independiente citando a [34]. En consecuencia, las poblaciones pequeñas como la que presenta el anfibio pueden estar en riesgo de desaparecer por eventos esporádicos independientes de la densidad poblacional según nos menciona Courchamp (1999).

Las enfermedades infecciosas emergentes se reconocen cada vez más como amenaza tanto para biodiversidad como para la salud humana según nos manifiesta [6], [36] y [38]. Ante ello, es necesario tomar medidas de prevención y más aún tratar de bajar los casos. Por ende, la preocupación de tener estrategias de mantener y más aún disminuir los casos es la prioridad de muchas organizaciones. Desde las primeras investigaciones sobre los anfibios, nuestra capacidad para discernir las disminuciones y su base causal ha sido deficiente. Ahora tomamaremos en cuenta la epidemiología de la enfermedad que afronta la población de anfibios a nivel mundial [8] para de esa manera construir un modelo matemático. Hoy en día los modelos matemáticos están siendo utilizados para predecir el comportamiento de las enfermedades y así tomar medidas gubernamentales para el control de la enfermedad.

Tenemos en la literatura varios modelos matemáticos que describen la evolución de la población de anfibios y estas se encuentran estructuradas por edades, cabe agregar que actualmente son el centro de atención, tanto por el interés biológico como por el matemático, estos modelos son estudiados en tiempos discretos y continuos [52] [44][37][53]. De hecho, las tasa per cápita de fertilidad y mortalidad dependientes de la edad se encuentran entre los parámetros más básicos en la teoría de la dinámica de la población, la demografía y los problemas matemáticos.

1.1.2. Formulación del problema

En la presente investigación se expondrá los cimientos necesarios para el planteamiento de un modelo Eco-Epidemiológico adaptado a la dinámica poblacional de transmisión del hongo patógeno Quitridio, de acuerdo c5on el modelo diseñado en [28], se realizará en detalle el desarrollo y análisis del modelo teniendo en cuenta ciertas hipótesis matemáticas para el ajuste formal matemático, con las condiciones respectivas para implementar el modelo.

En el desarrollo del modelo se utilizará un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representará la dinámica del comportamiento de la transmisión del hongo patógeno, el cual se demostrará que el modelo está bien definido. Para luego seguir con el análisis de sistema que nos va a permitir tener respuestas a corto plazo, es decir, tomar decisiones acertadas y obtener un punto de vista de su evolución.
En consecuencia, estos resultados nos permitirán optimizar el uso de controles biológicos para determinar bajo que condiciones se puede encontrar equilibrio en el ecosistema.

Problema General

PG1 ¿Será posible representar mediante un modelo matemático la dinámica de la enfermedad de la población de anfibios Eco - epidemiológico para poder analizarlas a través del tiempo?

PG ¿Será posible determinar si hay declive en la población de las Ranas Americanas de California mediante un modelo matemático Eco - epidemiológico de la enfermedad infecciosa?

Problema específico

PE1 ¿El modelo matemático, Eco - epidemiológico de la enfermedad infecciosa está bien definido?

PE2 ¿Será viable analizar de forma detallada la estabilidad del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo Matemático Eco - Epidemiológico de la enfermedad infecciosa?

PE3 ¿Será viable analizar el modelo Matemático Eco - epidemiológico de la enfermedad infecciosa desde el punto de vista ecológico y epidemiológico?

1.2. Objetivos de la investigación

1.2.1. Objetivo general

OG1 Con el presente modelo se busca representar la dinámica de la enfermedad en poblaciones de anfibios mediante un modelo matemático Eco - epidemiológico para poder analizarlas a través del tiempo.

OG2 Determinar si hay declive de la población de las Ranas Americanas de California mediante un Modelo Matemático Eco - Epidemiológico de la enfermedad infecciosa.

1.2.2. Objetivo específico

OE1 Determinar si esta bien definido el modelo Matemático Eco - Epidemiológico de la enfermedad infecciosa.

OE2 Analizar la estabilidad del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo Matemático Eco - Epidemiológico de la enfermedad infecciosa

OE3 Analizar el modelo Matemático Eco - Epidemiológico de la enfermedad infecciosa desde el punto de vista ecológico y epidemiológico.

1.3. Importancia

Los anfibios habitan prácticamente en todos los continentes. El salvaguardarlos es un trabajo de gran importancia para el equilibrio del ecosistema, por sus particularidades biológicas [3] y ecológicas [63], los anfibios cumple un rol importante como parte de la red trófica del ecosistema. Se alimentan de insectos, los cuales muchos de ellos son vectores de enfermedades como: dengue, dkujuyuya, Zika o malaria; o también encontramos insectos que son plaga de cultivos agrícolas. En referencia a ello, los anfibios nos ayudan a manejar poblaciones de insectos que esparcen enfermedades o que dañan la agricultura. La pérdida de biodiversidad de un hábitat trae consigo consecuencias irreversibles, es debido a esta preocupación que realizo la presente investigación interdisciplinaria que une las matemáticas y la ecología.
Este estudio pretende fomentar conciencia pública de la catástrofe más silenciosa de nuestro tiempo, nos enfrentamos al colapso de la vida misma. Debido a ello es necesario que más investigaciones como la presente se aborden. Los modelos matemáticos en la presente investigación, es usada como herramienta para dar respuestas significativas al problema y poder aportar en las tomas de decisiones gubernamentales para reducir el impacto de esta enfermedad.

1.4. Justificación

El estudio teórico del impacto de la enfermedad en la población de anfibios, se realiza mediante ecuaciones diferenciales, para modelar el efecto de la enfermedad en la población de anfibios en un medio acuático. Se asume que la dinámica de la población es modelada por sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias; el contagio de la enfermedad se produce en un ambiente que comparten durante la metamorfosis, de etapa larval a rana adulta; y se da de un individuo a otro. La ecuación logística presenta una competencia intraespecífica, esto sucede cuando dos

estados tienen diferentes recursos necesarios para sobrevivir, como la larva y la rana adulta para más detalles ver en [63]. Ahora teniendo en cuenta la concepción de la enfermedad del hongo patógeno Quitridiomicosis que enfrentan los anfibios en particular las Ranas Americanas en California [1] [35]; contruiremos el fenómeno epidemiológico de la Quitridiomicosis en sistema de ecuaciones diferenciales. Hoy en día los modelos matemáticos están siendo utilizados para predecir el comportamiento de la enfermedad desde hoy y del pasado.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Antecedentes del problema de investigación

Los antecedentes mencionados con anterioridad infieren que hay un problema ecológico de grandes proporciones y de consecuencias catastróficas. Para analizar si la población de anfibios se extingue por la enfermedad proponemos un modelo matemático en ecuación diferencial ordinarias con incidencia de acción de masa para la dinámica general libre de enfermedad [5], luego introducimos la enfermedad para realizar su respectivo análisis para tratar de entender la dinámica de la población en la propagación de la enfermedad [28] relacionado con análisis de trabajos epidemiológicos y ecológico que permiten tener resultados interesantes.
Hoy en día el tema central son las enfermedades emergentes y se han enfocado en los Modelos matemáticos para poder encontrar respuestas para contrarrestar la enfermedad. Esta relación entre biología y matemática ha sido fructífera para ambos, pues permite describir matemáticamente fenómenos biológicos, así determinar resultados importantes del Modelo, teniendo en cuenta las hipótesis planteadas al realizar el Modelo. Dentro de los Modelos existentes escogemos a [28] para el análisis de la población con la enfermedad en tiempo continuo, mientras los demás son en tiempos discretos, pero es interesante revisar los resultados encontrados.

- Population Growth under basic stage structure (2003) [44].
- Species decline and extinction: Synergy of infectious disease and Allee effect? Population Dynamic of a declining amphibian (2009) [37].
- The dynamics of some epidemic models (1995) [5].
- Analysis of a Mathematical Model of Emerging Infectious Disease leading to Amphibian Decline (2014) [28].

2.2. Bases teóricas

Los fundamentos teóricos que se utilizará en el presente trabajo son las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, como un instrumento matemático para el modelamiento de la enfermedad.

Suponemos que la dinámica de la enfermedad es en tiempo continuo, las funciones que se encuentran en el modelo también lo son; demostrado que el modelo es válido, se realizará el análisis cualitativo y cuantitativo asegurando lo necesario para una adecuada formulación y aplicación del modelo matemático. Se representa la dinámica de la población de anfibios a través del tiempo en sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que se estimará representando la correspondencia directa con la situación real que tratamos de modelar matemáticamente, de tal manera que las funciones definidas en el sistema son representaciones de poblaciones positivas, de manera que el valor de cero es ausencia de población (extinta). La forma como se transmite la enfermedad cuando un anfibio infectado tiene contacto con un susceptible, el huésped patógeno ataca al anfibio cuando metamorfosea a adulto, en esta etapa baja su inmunidad y la hace susceptible, una vez contagiado su ciclo de vida es aproximadamente 28 días según [28].

En la presente investigación utilizaremos las bases teóricas de la persistencia de la población en el tiempo, revisar para más detalles [66], [70] y aplicaremos las técnicas de los autores [53] [44], para establecer que la enfermedad no puede conducir a la extinción de la población (persistencia del huésped) y la enfermedad puede volverse endémica en la población (persistencia de la enfermedad) en condiciones adecuadas. En la teoría ecológica la enfermedad en la población de anfibios es el producto de una compleja interacción de factores proximales y distales a él, en interdependencia con su contexto biológico, físico, ambiental, etc.

2.3. Fundamentos Teóricos

El objetivo de esta sección es proporcionar de manera sucinta los fundamentos básicos sobre los aspectos teóricos que utilizaremos en la presente investigación. Revisar [46] para más detalles de las demostraciones.

Funciones localmente Lipschitz

Definición 2.1. *Consideramos las siguientes definiciones.*

- *Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama* ***compacto*** *si es cerrado y acotado.*

- *Sea $f : E \to \mathbb{R}^n$. Se dice que f es* ***Lipschitz*** *si $\exists L > 0$ constante tal que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in E$$

- *Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : E \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es* ***localmente Lipschitz*** *si $\forall C \subseteq E$ compacto $\exists L_c > 0$ constante tal que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L_c|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in C$$

es decir, f es Lipschitz en C. Si $f = f(t, x)$, se dice que f es ***localmente Lipschitz*** *respecto a x si $\forall \subseteq E$ compacto $\exists L_c > 0$ constante tal que*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L_c|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in C$$

Teorema 2.2. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$.*

a. *Si C es compacto entonces todo recubrimiento abierto de C admite un subrecubrimiento finito.*

b. *Si C es compacto si y sólo si toda sucesión (x_n) en C posee una subsucesión convergente en C.*

c. *Si C es compacto y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua entonces $f(C)$ es compacto.*

Lema 2.3. *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Si $\forall x \in D$ existe un entorno abierto U de x contenido en D y $L > 0$ tal que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in U,$$

entonces f es continua en D.

Teorema 2.4 (Equivalencia)**.** *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$ es localmente Lipschitz si y solo si $\forall x \in D$ existe un entorno abierto U de x contenido en D y $L > 0$ tal que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2 \in U$$

Proposición 2.5 (Suma)**.** *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ y $g : D \to \mathbb{R}^m$ son localmente Lipschitz entonces $f \pm g$ es localmente Lipschitz.*

Proposición 2.6 (Multiplicación)**.** *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ y $g : D \to \mathbb{R}^m$. Si f y g y continuas y localmente Lipschitz entonces $\langle f, g\rangle(x) = \Sigma_{i=1}^m f_i(x)g_i(x)$ localmente Lipschitz.*

Proposición 2.7. *Sea una función de clase C^1, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces F es localmente Lipschitz.*

Proposición 2.8. *Para $K \geq 0$, sea $F : [-k, \infty^+\rangle \to \mathbb{R}^m$ función de clase C^1. Entonces F es localmente Lipschitz.*

Lema 2.9. *Sea $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ compacto, entonces $C_x = \{x \in \mathbb{R}^n | (t, x) \in C\}$ es compacto.*

Proposición 2.10. *Sea $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y localmente Lipschitz, entonces para todo la función $f : I \times E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(t, x) = F(x)$ es continua y localmente Lipschitz respecto a x.*

2.4. Nociones sobre la teoría cualitativa de Ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección presentaremos algunas nociones sobre la teoría cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O), definiciones, notaciones, observaciones, etc., que serán nuestras herramientas para analizar nuestro modelo.

2.4.1. Introducción a la teoría cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ecuaciones diferenciales y campos de vectores. Consideremos la evolución temporal de una cantidad vectorial $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ en términos de las velocidades $x_i^{'} = \dfrac{dx_i}{dt}$ en forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$x_i' = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

o en la forma vectorial equivalente

$$x' = F(x) \tag{2.2}$$

donde se asume que la función vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lo suficientemente diferenciable (suave). La función en el lado derecho de (2.2) se denomina como un campo de vectores, ya que asigna un vector

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \\ \vdots \\ \\ F_n(x) \end{pmatrix}$$

a cada punto $x \in \mathbb{R}^n$. Aquí cada $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función componente del vector $F(x)$, las cuales representan la variación espacial de $F(x)$ en la dirección del vector unitario $e_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 2.11. *(**Existencia, unicidad, y la dependencia suave**). Considere un sistema de EDO*

$$x' = F(x), x \in \mathbb{R}^n$$

donde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una región abierta es suave $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces hay una única función $x = x(t, x_0)$, $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que es suave en (t, x), y satisface, para cada $x_0 \in U$, las condiciones siguientes:

- $x(0, x_0) = x_0$;
- hay un intervalo $J = (-\delta_1, \delta_2;)$ donde $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(x_0 > 0)$, tal que, para todo $t \in J$

$$y(t) = x(t, x_0) \in U,$$

y

$$y'(t) = F(y(t)).$$

El grado de suavidad de $x(t, x_0)$ con respecto a x_0 en el teorema es el mismo que el de F como una función de x. La función $x = x(t, x_0)$ en función del tiempo t, es la solución que parte de x_0. De manera que se define para cada $x_0 \in U$, dos objetos: una curva solución

$$C_r(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

y una órbita, la cual es proyección de $C_r(x_0)$ en el espacio de estado,

$$O(x_0) = \{x : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R}^n$$

Las dos curvas orientadas por la dirección de avance del tiempo y parametrizadas por el tiempo t y orientadas por la dirección de avance del tiempo. El vector $F(x_0) \neq 0$ es tangente a la

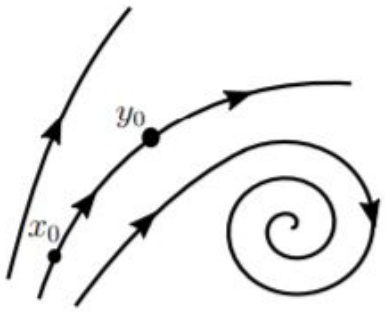


Figura 2.1: Órbitas de campo de vectores. Tomado de [57]

óbita $O(x_0)$. El teorema de existencia y unicidad dice que hay una única órbita que pasa a través de un punto $x_0 \in U$. Las órbitas también se denominan trayectorias. Notar que si $y_0 = \varphi^{t_0}(x_0)$ para algún t_0, los conjuntos $O(x_0)$ y $O(y_0)$ coinciden 2.4.1, debido a la unicidad de soluciones. Ahora podemos definir la evolución $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, el cual está dado por la fórmula

- $\varphi^0(x_0) = x_0$ (es decir, si el tiempo no avanza, no hay evaluación de la cantidad x).
- $\varphi^t(\phi^s(x_0)) = \varphi^{t+s}(x_0)$.

A partir de esto el operador φ^t define un sistema dinámico, revisar para más detalle en [4] [68].

El flujo de campos de vectores es descrito por el operador de evolución en la forma de una familia $\{\varphi_{x_0}\}_{x_0 \in \mathbb{R}^n}$, se puede denotar $\varphi_{x_0}(t) = \varphi^t(x_0)$ para demarcar la dependencia de como función del tiempo t desde una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces el flujo satisface la ecuación diferencial, así

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)), \forall t \in T \tag{2.3}$$

Definición 2.12. *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama punto de equilibrio de 2.2 si $f(x_0) = 0$.*
Esta definición nos dice $x'|_{x_0} = 0$, o sea que la tasa de crecimiento es nula en el punto x_0. Por lo tanto, los equilibrios representan el modo más simple de comportamiento del sistema. En particular, si x_0 es un equilibrio, entonces $\varphi^t = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Otro tipo relativamente simple de órbita es un ciclo u órbita periódica.

Definición 2.13. *Un ciclo u órbita periódica es una órbita L_0, tal que cada punto $X_0 \in L_0$. La satisface $\varphi^{t+T_0}(x_0) = \varphi^t(x_0)$ para algún $T_0 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

El T_0 mínimo con esta propiedad se llama el período del ciclo L_0. Si un sistema comienza su evolución en un punto x_0 en el ciclo L_0, volverá exactamente a este punto después de cada T_0

unidades de tiempo. En este caso decimos que el sistema presenta oscilaciones periódicas (ver figura 2.2).

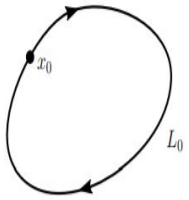


Figura 2.2: Órbita Periódica de un campo de vectores. Tomado de [57].

Definición 2.14. *Un ciclo límite L_0 de un campo de vectores es una órbita periódica aislada, es decir, existe una vecindad de L_0 en donde la única órbita periódica en esa vecindad es L_0.*

No se puede graficas todas das las órbitas de un sistema dinámico. En cambio, en lo práctico, sólo una familia de órbitas claves son necesarias para representar la dinámica. Uno de los conceptos claves para lograr esto es el retrato de fase.

Definición 2.15. *El retrato de fase de un sistema dinámico es una partición del espacio de estados en órbitas.*

El retrato de fase incluye una gran cantidad de referencias sobre el comportamiento de un sistema dinámico. Al observar el retrato de fase, podemos determinar el número y tipos de estados asintóticos al cual el sistema tiende a medida que $t \to +\infty$ (y a medida que $t \to -\infty$ si el sistema es invertible).

2.4.2. Conjuntos invariantes

Para clasificar los elementos de un retrato de fase en particular, los posibles estados asintóticos del sistema la siguiente definición en útil.

Definición 2.16. *Un conjunto invariante de un flujo y asociado a (2.2) es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, tal que $x_0 \in S$ implica $\varphi^t(x_0) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

La definición anterior significa que $\varphi^t(S) \subset S$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un conjunto invariante S consiste en órbitas del sistema dinámico. Cualquier órbita es individual $O(x_0)$ un conjunto invariante. Siempre podemos restringir el operador de evolución φ^t del sistema a su conjunto invariante S y considerar un flujo $\psi^t : S \to S$, que sea el operador inducido por en φ^t en S, esto es, $\psi^t = \psi^t|_S$. Con el afán de simplificar la notación, vamos a utilizar el símbolo φ^t para la restricción, en lugar

de ψ^t toda vez que no se preste a confusión.

Para representar un estado asintótico observable de un sistema dinámico, un conjunto invariante S_0 debe ser estable; en otras palabras, debe atraer órbitas cercanas. Supongamos que tenemos un flujo φ^t asociado a (2.2) en $\mathbb{R}^n$. Sea S_0 un conjunto cerrado invariante.

Definición 2.17. *Un conjunto invariante S_0 se dice asintóticamente estable o atractor si existe una vecindad $U_0 \supset S_0$ tal que*

$$\varphi^t \to S_0, \forall x \in U_0 \text{ a medida que } t \to +\infty$$

Con el fin de conocer de donde provienen las órbitas que tienden a un punto de equilibrio atractor damos la siguiente definición:

Definición 2.18. *Dado un punto de equilibrio atractor x_0, definimos su cuenca de atracción como el conjunto de condiciones iniciales x^0 tal que $x^0(t) \to x_0$ a medida que $t \to \infty$.*

Observación 2.19. *Un punto de equilibrio x_0 es estable para $t \to -\infty$ es llamado repulsor.*

2.5. Equivalencia entre campos de vectores

En esta sección tomamos como referencia la Tesis de Martínez-Jeraldo (2016) para estudiar el análisis cualitativo general del comportamiento de los campos vectoriales, específicamente se muestra la clasificación y las comparaciones de los comportamientos de los diferentes campos de vectores. La comparación de los sistemas se basa en una relación de equivalencia. Para el estudio vamos a definir las clases de objetos equivalentes y estudiar las transformación entre estas clases. En consecuencia, analizamos los conceptos adecuados para definir dos campos de vectores cualitativamente similares o que sean equivalentes con el mismo tipo de estabilidad. Estos conceptos prueban algunas especificaciones intuitivas generales.

Dos campos vectoriales son equivalentes si los planos de fases son cualitativamente similares, es decir, si un plano de fase se consigue de otro por medio de una transformación continua ver la figura 2.3. Para más detalle revisar en [68] .

Definición 2.20. *Un campo de vectores $x' = F(x)$ se llama topológicamente equivalente a un campo de vectores $y' = g(y)$ si hay un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que envía órbitas del campo f en órbitas del campo g, preservando la dirección del tiempo, es decir, la orientación de las órbitas.*

Observación 2.21. *Si el homeomorfismo h de la definición (2.20) sólo satisface las propiedades anteriores en una vecindad U de un equilibrio x_0 decimos que F y g son localmente topológicamente equivalentes en U.*

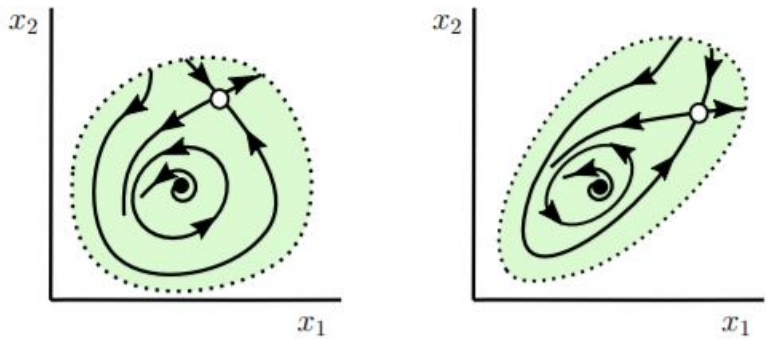


Figura 2.3: Equivalencia topológica. Tomado de [57]

Si h es difeomorfismo, los sistemas se llaman suavemente equivalentes (o difeomorfos). Si el grado de suavidad de h es de interés, se escribe: C^k- equivalente o C^k- difeomorfo. De esto inferimos que dos sistemas difeomorfos son similares y se pueden observar como un1 mismo sistema aplicando diferentes coordenadas.

Tomemos un ejemplo para $\mu = \mu(x) > 0$ es una función escalar positiva suave y que los lados derechos de $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y' = g(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ se relacionan por $F(x) = \mu(x)g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces los sistema son topológicamente equivalentes, debido a que sus órbitas son idénticas y es la rapidez del movimiento que las hace distintas (la relación de las velocidades en un punto x es exactamente $\mu(x)$), En consecuencia, el homeomorfismo h en la definición 2.20 es el operador identidad $h(x) = x$. Es decir, los sistemas se diferencian solamente por la parametrización del tiempo a lo largo de las órbitas.

2.5.1. Clasificación topológica de los puntos de equilibrio hiperbólicos

Equilibrios hiperbólicos en campos de vectores.

Definición 2.22. ***(Punto Hiperbólico).*** *Un equilibrio es hiperbólico si todos los autovalores de la matriz jacobiana de f tienen partes reales distintas de cero. Los equilibrios hiperbólicos son robustos (es decir, el sistema es estructuramente estable): pequeñas perturbaciones de orden no cambian cualitativamente el retrato de fase cerca de los equilibrios. Además, el retrato de fase local de un equilibrio hiperbólico de un sistema no lineal es equivalente al de su linealización. esto debido al teorema de Hartman y Grobman.*

Definición 2.23. ***(Punto no Hiperbólico).*** *Si al menos un autovalor de la matriz jacobiana f es cero o tiene una parte real cero, entonces se dice que el equilibrio no es hiperbólico. Los*

equilibrios no hiperbólicos no son robustos (es decir, el sistema no es estructuralmente estable). Pequeñas perturbaciones pueden dar lugar a una ***bifurcación local****(son puntos de demarcación por cambios abruptos en un comportamiento cualitativo de la ecuación o del sistema del modelo) de un equilibrio no hiperbólico, es decir, puede cambiar la estabilidad, desaparece o se divide en muchos equilibrios.*

Para esta parte tomaremos de referencia la tesis de [57]. Sea $x_0 = 0$ un equilibrio de

$$w' = F(w) \tag{2.4}$$

$DF(x_0)$ es la matriz jacobiana evaluada en x_0, es decir

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial z}(x_0) \end{pmatrix}$$

Sean n_-, n_0, y n_+ los números de valores propios de $DF(x_0)$(contando multiplicidades) con parte real negativa, cero y positiva, respectivamente.

Definición 2.24. *Un equilibrio se llama hiperbólico si $n_0 = 0$, es decir, si no hay valores propios en el eje imaginario. Un equilibrio hiperbólico se llama*

- *repulsor si $n_+ = n$ y $n_- = 0$;*
- *atractor si $n_+ = 0$ y $n_- = n$;*
- *silla hiperbólica si $n_- \cdot n_+ \neq 0$;*

Las propiedades de estabilidad de un equilibrio hiperbólico x_0 de un sistema dinámico no-lineal están determinadas por la linealización del campo vectorial f alrededor de x_0, según el siguiente teorema:

Teorema 2.25. ***Hartman-Grobman****.Si el campo de vectores (2.4) tiene un equilibrio hiperbólico x_0, entonces existe una vecindad U de x_0 tal que (2.4) en U es localmente topológicamente equivalente al sistema linealizado*

$$x' = DF(x_0)x \tag{2.5}$$

en una vecindad V del origen. Para mayor detalle ver [72]

En otras palabras, el teorema de Hartman-Grobman nos dice que la dinámica de cualquier campo de vectores no-lineal es equivalente a la dinámica de su linealización localmente cerca de

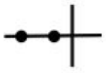
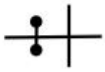
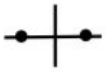
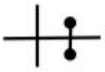
(n_+, n_-)	Valores Propios	Retrato de Fase		Estabilidad
$(0,2)$			Nodo	Estable
			Foco	
$(1,1)$			Silla	Inestable
$(2,0)$			Nodo	Inestable
			Foco	

Figura 2.4: Clasificación topólogica de puntos de equilibrios hiperbólicos en el plano. Tomado de [57]

un equilibrio hiperbólico.

Sean $n_- = s$, $n_0 = c$ y $n_+ = u$ nombrados anteriormente. Entonces $\mathbb{R}^n$ se puede representar como la suma directa de los subespacios de la siguiente manera

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

donde E^s, E^u y E^c son los espacios propios que corresponden a los valores propios con partes reales negativas, positivas y cero, y son referidos como subespacios estable, inestable, y central, respectivamente. La soluciones de 2.5 son condiciones iniciales contenidas en E^s, E^u y E^c deben permanecer en aquel subespacio particular para todo tiempo t. Es decir, E^s, E^u y E^c son subespacios invariantes.

Equilibrios hipérbolicos de sistemas planares. Considere un sistema bidimensional

$$x' = F(x),\ x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \tag{2.6}$$

con f suave. Suponemos que $x = 0$ es un equilibrio, $f(0) = 0$ y sea

$$A = \frac{\partial F(x)}{\partial x}|_{x=0}$$

su matriz Jacobiana. La matriz A tiene dos valores propios λ_1, λ_2, los cuales son las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \triangle = 0$$

donde $\sigma = traza A$, $\triangle = det A$. En la figura 2.4 se observan resultados conocidos, se puede revisar en [68] para más detalle de lo descrito. Del análisis de los valores propios de A, hay tres clases topólogicas de equilibrios hiperbólicos en el plano (focos) estables, sillas, y nodos (focos) inestables. Para un equilibrio hiperbólico introduciremos los siguientes invariantes.

Definición 2.26. *Sea x_0 un punto de equilibrio hiperbólico del campo de vectores 2.2. Se definen las variables estable(s) e inestable(u) locales de x_0 como:*

$$W^s_{loc}(x_0) = \{x \in U : \varphi^t(x) \to x_0, \textit{cuando } t \to +\infty \textit{ y } \varphi^t(x_0) \in U, \forall t \geq 0\}$$

$$W^u_{loc}(x_0) = \{x \in U : \varphi^t(x) \to x_0, \textit{cuando } t \to -\infty \textit{ y } \varphi^t(x_0) \in U, \forall t \leq 0\}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad de x_0

donde φ^t es el flujo asociado con (2.6); recuerde que $W^s_{loc}(x_0)$ se denomina conjunto estable de x^0, mientras que $W^u_{loc}(x^0)$ se denomina conjunto inestable de x^0. Si ambos conjuntos no están vacíos, podrían cruzarse; en otras palabras, pueden existir órbitas homoclínicas que se acercan a x^0 en ambas direcciones temporales. Dado que la presencia de un equilibrio no hiperbólico ya es una degeneración, la co-dimensión de dicha singularidad es mayor o igual a uno. Como podemos ver fácilmente, si el equilibrio tiene un par de autovalores complejos conjugados en el eje imaginario, necesitamos más de un parámetro para sintonizar con el fin de obtener una órbita homoclínica a este equilibrio. Consideremos, por ejemplo, un sistema que depende de varios parámetros en $\mathbb{R}^3$, que tiene un equilibrio x^0 con un valor propio positivo $\lambda_3 > 0$ y un par de autovalores complejos conjugados que pueden cruzar el eje imaginario.
Las variedades invariantes locales poseen análogos globales obtenidos al permitir que los puntos en $W^s_{loc}(x_0)$ fluyan hacian atrás en el tiempo y aquellos en $W^u_{loc}(x_0)$ fluyan hacia adelante:

$$\begin{aligned} W^s(x_0) &= U_{t\leq 0}\varphi^t(W^s_{loc}(x_0)) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi^t(x) \to x_0, \textit{ cuando } t \to +\infty\} \\ W^u(x_0) &= U_{t\geq 0}\varphi^t(W^u_{loc}(x_0)) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi^t(x) \to x_0, \textit{ cuando } t \to -\infty\} \end{aligned}$$

Observación 2.27.

- *El Teorema 2.11 de la existencia y unicidad de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias implica que dos variables estables (respectivamente inestables) de dos puntos de equilibrio distintos no se puede intersectar. Por lo expuesto, una variedad estable (respectivamente inestable) no se puede intersectar a sí misma.*

- *En el caso particular de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, puntos atractores hiperbólicos tienen variables estables de dos dimensiones y sus variedades inestables son de dimensión cero. Para los equilibrios hiperbólicos repulsores la situación se invierte. Los puntos sillas hiperbólicos tienen variedades estables e inestables de una sola dimensión, a veces llamadas separatrices.*

- *La intersección de variedades estables son inestables sí puede ocurrir a lo largo de órbitas homoclínicas y heteroclínicas.*

2.6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El objetivo de la presente sección, es dar una vista rápida y sencilla los cimientos básicos sobre el Análisis Matemático, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y la Estabilidad de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; debido a que vamos a utilizar estos instrumentos matemáticos en las pruebas y las aplicaciones. En tal sentido no vamos a enunciarlos sino mencionaremos de donde realizamos la referencia, empezaremos con el Problema de Valor inicial de la Tesis de Pérez J. (2014) (paginas 9 a 14). Para el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales y no Lineales tomaremos la Tesis de Pérez J. (2014) (páginas 12 a 14).

2.7. Conservación de la Positividad y la Delimitación

En esta sección se ha tratado de organizar las herramientas de la teoría de las ecuaciones diferenciales que utilizaremos para analizar los modelos en el texto principal. Los siguientes libros sobre biología matemática tienen apéndices técnicos útiles que también se pueden consultar: Smith (2010), Smith y Waltman (1995), López (2006) y Thieme (2003). Nuevamente consideremos el caso no autónomo.

Proposición 2.28. *Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^n$,*

$$x' = F(t, x)$$

$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $F(t, x) = (F_1(t, x), \ldots, F_n(t, x))$, *donde $F(t, x)$ está definido para todo $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Suponemos que F tiene la propiedad de que las soluciones de los problemas de valor inicial $x(t_0) = x_0$ son únicas para $x^0 \in [0, \infty)^n$, con $t_0 \geqslant 0$. Además, suponemos que para $j = 1, \ldots, n$, $t \geqslant 0$, se tiene*

$$F_j(t, x) \geqslant 0 \quad \textit{siempre} \quad \textit{que} \quad x \in [0, \infty)^n, \quad x_j = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Entonces $x(t) \in [0,\infty)^n$, *para todo* $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, *por lo que esta definido, siempre que* $x(t_0) \in [0,\infty)^n$.

Sin embargo, hay una condición mucho más elemental que funciona sin unicidad y es la siguiente.

Lema 2.29. *Consideremos el sistema*

$$x' = F(t,x)$$

con un campo de vectores continuo F *de un subconjunto abierto* D *de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *a* $\mathbb{R}^n$. *Suponemos que la* $j-esima$ *componente de* F *tiene la forma*

$$F_j(t,x) = x_j G_j(t,x)$$

una función continua con valores escalares G_j. *Si* x *es una solución con* $x_j(t_0) > 0$ *o* $x_{j(t_0)} \geq 0$, *entonces estas propiedades respectivas se mantiene para todo* $t > t_0$ *por lo cual* x *existe.*

Proposición 2.30. *Consideremos el sistema*

$$x' = F(t,x)$$

con un campo de vectores continuo F *de un subconjunto abierto* D *de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *a* $\mathbb{R}^n$. *Asuma que la* $j-esima$ *componente de* F *tiene la siguiente propiedad:* $F_j(t,x) = 0$ *siempre que* $x_j = 0$, *y que para todo* $r > 0$ *existe algún* $c > 0$ *tal que*

$$\frac{1}{x_j}|F_j(t,x)| \leqslant c \quad |x| \leqslant r, \quad (t,x) \in D, \quad x_j > 0$$

Si x *es una solución con* $x_j(t_0)$ *mayor que cero, entonces* $x(t)$ *mayor que cero, para todo* $t > t_0$ *por lo cual* x *existe.*

Teorema 2.31. *Sea* $F : \mathbb{R}^n_+ \to [0,\infty)^n$ *localmente Lipschitz en el cono no negativo de vectores en* $\mathbb{R}^n_+$ $j = 1,2,\ldots,n$

$$F(t,x) = F_j(t,x), \qquad x = x_j \tag{2.7}$$

y satisface

$$F_j(t,x) \geqslant 0 \quad \textit{siempre que} \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad x_j = 0.$$

Entonces, para todo $x^0 \in \mathbb{R}^n_+$, *existe una única solución de* $x' = F(t,x)$, $x(0) = x^0$ *con valores en* $\mathbb{R}^n_+$, *que están definidos en algún intervalo* $[0,b)$ *con* $b \in (0,\infty]$.
Si $b < \infty$ *entonces*

$$\sup_{t \nearrow b} \lim \sum_{j=1}^{n} x_j(t) = \infty$$

Corolario 2.32. *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \to [0,\infty)^n$ localmente Lipschitz en el cono no negativo de vectores en $\mathbb{R}^n$ y de 2.7 satisface*

$$F_j(t,x) \geqslant 0 \quad \textit{siempre que} \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad x_j = 0.$$

Sea B es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que todas las soluciones x de $x' = F(t,x)$ (con valores en $\mathbb{R}^n_+$)que comienzan en B permanecen en B mientras estén definidos. Además, sea $B \cap \mathbb{R}^n$ acotado.
Entonces, para todo $x^0 \in B \cap \mathbb{R}^n_+$, existe una única solución de $x' = F(t,x)$, $x(0) = x^0$ con valores en $B \cap \mathbb{R}^n_+$, que están definidos en todo intervalo de $[0,\infty)$.

Lema 2.33. *Sea $x : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en (a,b). Sea $t \in (a,b)$ y $\bar{x} = \max_{[a,t]} x$. Entonces $\bar{x} = x(a)$ o existe $s \in (a,t]$ tal que $\bar{x} = x(s)$ y $x'(s) \geq 0$.*

2.8. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Planas

El comportamiento a largo plazo de las soluciones de sistemas autónomos planos de las EDO está delimitado por la Teoría de Poincaré-Bendixson. La convergencia hacia los equilibrios puede establecerse por el criterio de Dulac o por cooperatividad o competitividad del sistema. En configuraciones especiales también se puede establecer esto mostrando que todas las posibles órbitas periódicas son orbitalmente estables (para las demostraciones revisar la sección de apéndice de [44]).
Sea X es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $F : X \to \mathbb{R}^2$ continua,

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x)), \quad x = (x_1, x_2) \in X$$

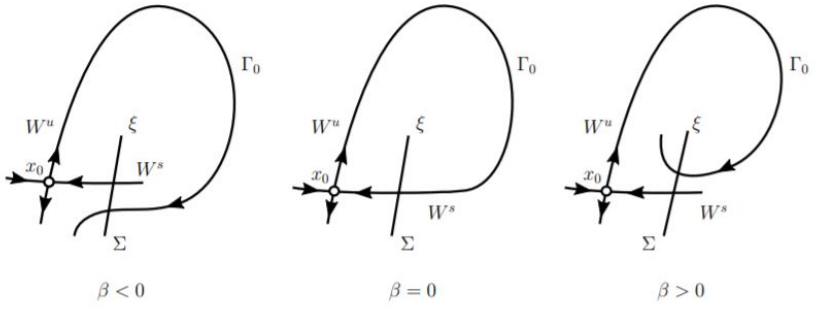


Figura 2.5: Función de división en el caso planar (n=2). Tomado de [57]

Además, suponemos que alguna solución de

$$x' = F(x), \quad x(0) = x^0 \tag{2.8}$$

en un intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ está determinada únicamente por x^0. Un punto $z \in X$ con $F(z) = 0$ se denomina punto crítico o equilibrio; el punto $z \in X$ con $f(z) \neq 0$ se denomina punto regular.
Sea x una solución de (2.8) en X que está definida y acotada en $[0, \infty)$. Luego su conjunto ω-límites $\omega(x^0)$ se puede definir como

$$\omega(x^0) = \bigcap_{r \geq 0} \overline{\{x\,(t)\,; t \geq r\}}$$

De manera equivalente, podemos decir que un elemento $y \in \mathbb{R}^2$ está contenido en $\omega(x^0)$ si y solo si existe una sucesión (t_j) de números positivos tal que $t_j \to \infty$ y $x(t_j) \to y$ y cuando $j \to \infty$.
De manera similar, si x es una solución de (2.8) en X que está definida y acotada en $(-\infty, 0]$, entonces su conjunto α - límite, a $\alpha(x^0)$, se puede definir como

$$\alpha(x^0) = \bigcap_{r \geq 0} \overline{\{x\,(t)\,; t \leqslant -r\}}$$

Teorema de Poincaré-Bendixson. Obviamente, $\omega(x^0)$ es un subconjunto de $\bar{X}$. Aquí se centra la atención en el caso donde $\omega(x^0)$ es subconjunto de X. Para más detalle revisar en la Sección 16.2 [9].

Teorema 2.34. ***(Teoría de Poincaré-Bendixson).*** *Sea x una solución de (2.8) en X que esta definida y acotada en $[0, \infty)$ con $\omega(x^0) \subseteq X$. Entonces $\omega(x^0)$ contiene un equilibrio o es una órbita periódica.*
Una declaración análoga es válida para $\alpha(x^0)$.

Proposición 2.35. *Sea x una solución de (2.8) en X que esta definida y acotada en $[0, \infty)$ con $\omega(x^0) \subseteq X$. Si $\omega(x^0)$ contiene un equilibrio y punto regular y^0, entonces existe una solución y de $y' = F(y)$ en $\omega(x^0)$ que esta definida en $\mathbb{R}$ y satisface $y(0) = y^0$ tal que ambos $\omega(y^0)$ y $\alpha(y^0)$ consisten en equilibrios.*
Esta proposición sigue de la prueba del Teorema (3.1) [9]. Esto tiene una consecuencia inmediata siguiente.

Corolario 2.36. *Sea x una solución de (2.8) en X que esta definida y acotada en $[0, \infty)$ con $\omega(x^0) \subseteq X$. Si $\omega(x^0)$ contiene exactamente un equilibrio x^* y un punto regular y^0, entonces existe una solución y de $y' = F(y)$ en $\omega(x^0)$ que esta definida en $\mathbb{R}$ y satisface $y(0) = y^0$ tal que $y(t) \to x^*$ cuando $t \to \infty$ y $t \to -\infty$.*
*En otras palabras, tenemos una **órbita homoclínica** a través de y^0 que conecta el equilibrio x^**

consigo mismo. Si X solo contiene a un número finito de puntos críticos, es posible una más completa descripción del conjunto ω límite.

Teorema 2.37. ***(Tricotomía de Poincaré-Bendixson)*** *Supongamos que X consta sólo de un número finito de equilibrios. Sea x una solución de (2.8) en X que esta definida y acotada en $[0,\infty)$ con $\omega(x^0) \subseteq X$. Entonces*

a. $\omega(x^0)$ consta de un equilibrio, o

b. $\omega(x^0)$ es una órbita periódica, o

c. $\omega(x^0)$ consta de un número finito de equilibrios y órbitas que se conectan entre ellos.

Una declaración análoga es válida para $\alpha(x^0)$.

Observación 2.38. *Si se cumple la parte (c) de la tricotomía del teorema (2.37), $\omega(x^0)$ contiene una cadena cíclica de equilibrios, es decir, hay equilibrios $x^1,\ldots,x^m$, $m \geq 1$, en $\omega(X^0)$ y las soluciones y^k, $k=1,\ldots,m$, de $y' = F(y)$ en $\omega(x^0)$ que se definen en $\mathbb{R}$ tales que*

$$y^k(t) \to x^k, \quad t \to -\infty, \quad k = 1,\ldots,m,$$

$$y^k(t) \to x^{k+1}, \quad t \to \infty, \quad k = 1,\ldots,m-1,$$

$$y^m(t) \to x^1, \quad t \to \infty.$$

Si $m = 1$ entonces tenemos una órbita homoclínica que conecta el equilibrio consigo mismo. Una prueba de esta observación se puede encontrar por ejemplo en [43]. Una forma conveniente de descartar órbitas periódicas y cadenas cíclicas de equilibrios es la siguiente (véase, por ejemplo, Hahn (1967)).

2.8.1. Criterio de Dulac-Bendixson

Teorema 2.39. *Sea Z un subconjunto abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$, $Z \subseteq X$. Supongamos que F es continuamente diferenciable en Z y que existe una función ρ de real valorada continuamente diferenciable en Z tal que la divergencia de ρF,*

$$\bigtriangledown.(\rho F)(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho F_1)(x) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho F_2)(x)$$

es estrictamente positivo casi en todas partes en Z o estrictamente negativo en cualquier lugar de Z. Entonces Z no contiene órbitas periódicas ni cadenas cíclicas de $x' = F(x)$.

Una función ρ que hace que la divergencia de ρF tenga un signo se llama una *función de Dulac*. Si $\rho \equiv 1$, el teorema (2.39) se denomina *Criterio de Bendixson*.

Corolario 2.40. *Sean Y y Z subconjuntos de X abiertos y simplemente conexos en $\mathbb{R}$, con las siguientes propiedades:*

- *Toda solución de (2.8) en X que está definida y acotada en $[0,\infty)$ tiene su conjunto ω-límite establecido en Y, e Y contiene sólo un número finito de equilibrios.*
- *Todas las posibles órbitas periódicas de (2.8) en X y todas las cadenas cíclicas (es decir, los equilibrios y las órbitas de conexión) de (2.8) que se encuentran en Y están realmente contenidas en Z.*
- *Si F es continuamente diferenciable en Z, y existe una función diferenciable de real valorada ρ en Z tal que la divergencia de ρF*

$$\bigtriangledown.(\rho F)(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho F_1)(x) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho F_2)(x),$$

después de todo es estrictamente positivo en casi todas las partes Z, o es estrictamente negativa en casi todas partes de Z.

Entonces, toda solución de (2.8) en X definida y acotada en $[0,\infty)$ converge hacia un equilibrio en Y.

2.9. Existencia de una Órbita Periódica Estable

Una órbita periódica se denomina localmente (asintóticamente) estable si es localmente (asintóticamente) estable como conjunto. La solución asociada se denomina localmente (asintóticamente) orbitalmente estable.

Teorema 2.41. *Sea Ω un subconjunto abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$. Sea F un campo vectorial continuamente diferenciable de Ω a $\mathbb{R}^2$.*

Supongamos que toda solución de $x' = F(x)$ que empieza en Ω en $t = 0$ esta definida para todo los tiempos $t \geq 0$ y existe algún tiempo $r > 0$ (que puede depender de la solución) tal que $x(s) \in K$ para $s > r$, donde K es un subconjunto compacto de Ω que no depende de la solución x.

Sea Ω que contiene un único equilibrio x^* de F. Supongamos que x^* es no degenerado e inestable. Entonces existe una órbita periódica localmente estable. Si F es analítica real, entonces existe una órbita periódica localmente asitóticamente estable.

Recuerdemos que un punto de equilibrio se llama degenerado si la matriz jacobiana asociada es singular (es decir, tiene un valor propio cero).

El método de las fluctuaciones *En esta sección consideramos funciones diferenciables acotadas $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ y discutimos la relación entre el comportamiento asintótico de f y f'. Introducimos la siguiente notación:*

$$f^{\infty} = \limsup_{t\to\infty} f(t) \qquad f_{\infty} = \liminf_{t\to\infty} f(t)$$

Teorema 2.42. *Sea (t_n) una sucesión en (a, ∞), tal que $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Asumiremos que*

$$f'(t_n + h) - f'(t_n) \to 0, \text{ cuando } \quad n \to \infty, \quad \text{cuandoh} \to 0$$

Si $f(t_n) \to f^{\infty}$ o $f(t_n) \to f_{\infty}$ cuando $n \to \infty$, entonces $f'(t_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$

Corolario 2.43. *Cuando supongamos que $f(t)$ converge cuando $t \to \infty$. Entonces $f'(t) \to 0$ si y solo sí*

$$f'(t + h) - f'(t) \to 0, \quad \text{cuando } t \to \infty, \quad h \to 0.$$

Corolario 2.44. *Sea $x : [o, \infty) \to \mathbb{R}^n$ diferenciable y se supongamos que $x(t)$ converge cuando $t \to \infty$. Entonces $x'(t) \to 0$ si $x'(t)$ es uniformemente continua en $[0, \infty)$.*

Corolario 2.45. *Sea x una solución de $x' = F(x)$ que está definida para todos los tiempos en adelante y converge a x^* cuando $t \to \infty$, donde F es un campo vectorial continuo en $\mathbb{R}^n$. Entonces x^* es un equilibrio.*

Proposición 2.46. *Existen sucesiones $s_n, t_n \to \infty$ con las siguientes propiedades:*

$$f(s_n) \to f_{\infty}, \quad f'(s_n) \to 0,$$

$$f(t_n) \to f^{\infty}, \quad f'(t_n) \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

Teorema 2.47. *Sea D un intervalo acotado en $\mathbb{R}$ y $g : (t_0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ acotada y uniformemente continua. Además, sea $x : (t_0, \infty) \times D$ una solución de*

$$x' = g(t, x)$$

que está definida en un intervalo completo (t_0, ∞).Entonces existen sucesiones $(s_n), (t_n)$ tales. que

$$\lim_{n\to\infty} g(s_n, x_{\infty}) = 0 = \lim_{n\to\infty} g(t_n, x^{\infty}).$$

Corolario 2.48. *Si se satisface hipótesis del Teorema 2.47. Entonces*

- $\lim\limits_{t\to\infty} \text{ínf } g(t, x_{\infty}) \leqslant 0 \leqslant \lim\limits_{t\to\infty} \sup\ g(t, x_{\infty})$
- $\lim\limits_{t\to\infty} \text{ínf } g(t, x^{\infty}) \leqslant 0 \leqslant \lim\limits_{t\to\infty} \sup\ g(t, x^{\infty})$

2.10. Comportamiento en las proximidades de un equilibrio

Consideramos un sistema de EDO

$$x' = F(x) \tag{2.9}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable.
$x^* \in \mathbb{R}^n$ es denominado un equilibrio (punto crítico, punto de equilibrio, espacio estado, solución estacionaria) de 2.9, si

$$F(x^*) = 0$$

En esta sección seleccionamos algunos resultados que nos dicen como una solución de 2.9 se comporta en las proximidades de un equilibrio. Un importante concepto es la estabilidad local.

Definición 2.49. *a. Un equilibrio x^* de 2.9 es llamado **localmente estable** si y solo se cumple lo siguiente*

Para algún $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $||x(t) - x^*|| < \epsilon$ para $t > 0$ siempre cuando x es una solución de 2,9 y $||x(0) - x^*|| < \delta$

*b. Un equilibrio localmente estable x^* es llamado **localmente asintóticamente estable** si y sólo si existe algún $\delta > 0$ tal que $x(t) \to x^*$ cuando $t \to \infty$ siempre que x es una solución de 2.9 y $||x(0) - x^*|| < \delta$.*

*c. Un equilibrio es llamado **inestable** si y sólo si no es localmente estable, es decir, si y sólo si se cumple lo siguiente. Existe algún $\epsilon > 0$ y una sucesión x_n de una solución de 2.9 y una sucesión $t_n > 0$ que $||x_n(0) - x^*|| \to 0$, cuando $n \to \infty$, pero $||x(t_n) - x^*|| > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

En el estudio del comportamiento de las soluciones es preciso encontrar un criterio que garantice la estabilidad o inestabilidad del equilibrio. **El principio de linealización** es uno de los más importantes en la teoría de estabilidad revisar la sección (1.2.3) de Tesis J. donde desarrolla el proceso de linealización y denotaremos sistema linealizado como DF. El interés es de conocer el comportamiento de las soluciones en las proximidades del equilibrio, entonces consideremos una expansión de las soluciones de 2.9 alrededor del equilibrio:

$$x(t) = x^* + y(t)$$

Usando el hecho que F es continuamente diferenciable obtenemos que

$$\frac{d}{dt}y = DF(x^*)y + \Psi(y)y$$

siendo $\Psi(y)$ una matriz tal que $||\Psi(y)|| \to 0$ cuando $||y|| \to 0$. DF denota la derivada de F. La idea consiste en asumir (que realmente se puede demostrar) que la solución y se comporta esencialmente como la solución z del siguiente problema lineal

$$\frac{d}{dt}z = DF(x^*)z$$

Soluciones de problema lineal que estamos tratando de encontrar

$$z(t) = \exp(\lambda t)z^*$$

con $z^* \neq 0$. Esto conduce al problema

$$DF(x^*)z^* = \lambda z^*, z^* \neq 0$$

Si λ y z^* satisfacen esta relación, entonces λ es llamado un autovalor de la matriz $DF(x^*)$ y z^* es el autovector asociado. Aparentemente, algún autovalor es una solución de la ecuación característica

$$\det(\lambda I - DF(x^*)) = 0$$

con I es la matriz identidad. Desde que $z(t) = \exp(\lambda t)z^*$ converge a 0 ($t \to \infty$) si $\mathcal{R}\lambda < 0$, diverge a ∞ si $\mathcal{R}\lambda > 0$, esto sugiere que el autovalor de $DF(x^*)$ determina la estabilidad del equilibrio x^*. Por supuesto, el siguiente lema se cumple.

Lema 2.50. *a. El equilibrio x^* es localmente asintóticamente estable si todos los autovalores de $DF(x^*)$ tiene una parte real estrictamente negativa.*

b. x^* es inestable si al menos un autovalor propio de $DF(x^*)$ tiene una parte real estrictamente positiva. Este resultado puede ser encontrado en Hirch M., Smale S. and Devaney R. (2004).

Recordemos algunos aspectos del álgebra lineal como:

- La suma de los autovalores (contando la multiplicidad) es igual a la traza de la matriz (suma de elementos en la diagonal principal).
- El producto de los autovalores (contando las multiplicidades) igual a la determinante de la matriz.

- Si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Tiene forma de bloques de matrices cuadradas B y D, entonces el autovalor de A es encontrado por la determinación los autovalores de B y D.

2.11. Elementos de la Teoría de Persistencia

La persistencia aborda la cuestión de qué componentes de un sistema ecológico no se extinguirán y o cuáles permanecerán limitados. Los sistemas dinámicos o semiflujos son inducidos por ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales funcionales y ciertas ecuaciones diferenciales parciales, y ofrecen un análisis unificado del comportamiento cualitativo de sus soluciones. Sea X un espacio métrico con métrica d.

Semiflujo. Un mapeo $\phi : [0, \infty) \times X \to X$ se llama **semiflujo** (o sistema semidinámico) en X si

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \quad t, s \geq 0 \tag{2.10}$$

donde $\phi(t)$ representa el mapeo $\phi(t, .) : X \to X$.
El semiflujo se llama continuo si ϕ es un mapeo continuo. Generalmente, también se requiere $\phi(0, x) = x$, pero esto no es necesario para la teoría de la persistencia. Describamos los dos tipos de semiflujos inducidos por ecuaciones diferenciales ordinarias que suelen aparecer en nuestros modelos biológicos.

Proposición 2.51. *Sea X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F : X \to \mathbb{R}^n$ continuo. Además, supongamos que las soluciones de la ecuación diferencial*

$$x^{'} = F(x), \qquad x(0) = x_0.$$

son únicas para $x_0 \in X$ y existen y permanecen en X para todo $t \geq 0$. Entonces, las soluciones x de esta ecuación diferencial ordinaria inducen un semiflujo continuo en X a través de

$$\phi(t, x_0) = x(t), \quad x_0 \in X, \ t \geq 0.$$

Además, $\phi(0, x_0) = x_0$

Corolario 2.52. *Sea $\mathbb{R}^n_+ = [0, \infty)^n$ el cono de vectores no negativos en $\mathbb{R}^n$. Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ locamente lipschitz,*

$$F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x)), \quad x = (x_1, ..., x_n),$$

que satisface para algún j, $F_j(x) \geq 0$ siempre que $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x_j = 0$. Finalmente, asumimos que todas las soluciones de

$$x^{'} = F(x)$$

están definidas en un intervalo $[0, b)$, $0 < b < \infty$(con valores en $\mathbb{R}^n_+$), son acotadas en el intervalo $[0, b)$. Entonces las soluciones x de esta ecuación diferencial ordinaria induce un semiflujo continuo en $\mathbb{R}^n_+$ dado por

$$\phi(t, x_0) = x(t), \quad x_0 \in X, \quad t \geq 0.$$

Además, $\phi(0, x_0) = x_0$

Se introduce la siguiente notación:

$$\sigma^{\infty}(x) = \lim_{t\to\infty} \sup \sigma(t, x), \qquad \sigma_{\infty}(x) = \lim_{t\to\infty} \inf \sigma(t, x).$$

Definición 2.53. *Sea ρ de $x \in \mathbb{R}$ y ϕ es llamado débilmente ρ-persistente si*

$$\sigma^{\infty}(x) > 0 \quad \forall x \in X \text{ con } \quad \rho(x) > 0$$

- *ϕ es llamado fuertemente ρ-persistente $\sigma_{\infty}(x) > 0 \quad \forall x \in X, \quad \rho(x) > 0.$*
- *ϕ es llamado uniformente débilmente ρ-persistente si existe algún $\epsilon > 0$ tal que*

$$\sigma^{\infty}(x) > \epsilon \quad \forall x \in X, \quad \text{con } \rho(x) > 0.$$

- *ϕ es llamado uniformemente fuertemente ρ-persistente si existe algún $\epsilon > 0$ tal que*

$$\sigma_{\infty}(x) > \epsilon \quad \forall x \in X, \quad \rho(x) > 0.$$

Si no hay un lugar confusión acerca de la funcional ρ, usamos persistente en lugar de ρ-persistente.
Consideramos la siguiente condición de compacidad.

Condición de compacidad (C). Existe algún $\epsilon_0 > 0$ y un subconjunto cerrado B de X con las siguientes propiedades: Para $\phi(t, x) \to B$ cuando $t \to \infty$, lo que significa que para todo $\epsilon > 0$, existe algún $t > 0$ tal que para todo $s > t$ algún $b \in B$ puede ser encontrado con $d(\phi(s, x), b) < \epsilon$.

- Para todo $x \in \{\rho \leqslant \epsilon_0\}$ tenemos que $\phi_t(x) \to B$ cuando $t \to \infty()$.
- Si $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$ entonces la intersección de B con el anillo $\{\epsilon_1 \leqslant \rho \leqslant \epsilon_0\}$ es compacto.

Teorema 2.54. *Supongamos que se tiene la condición de compacidad (C) y que $\sigma(t, x) := \rho(\phi(t, x)) > 0$ para todo $t \geq 0$ siempre que $\rho(x) > 0$. Entonces uniformemente débil persistente implica uniformemente fuerte persistente.*

Teorema 2.55. *Supongamos que se tiene la condición de compacidad (C) y que* $\sigma(t,x) := \rho(\phi(t,x)) > 0$ *para todo* $t \geq 0$ *siempre que* $\rho(x) > 0$. *Entonces uniformemente débil persistente implica uniformemente fuerte persistente.*

Corolario 2.56. *Sea* X *un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}^n$ *y* ϕ *un semiflujo continuo en* X. *Supongamos que existe algún* $c > 0$ *tal que*

$$\liminf_{t\to\infty} ||\phi_t(x)|| < c \qquad \forall x \in X$$

Entonces existe algún de $c > 0$ *tal que*

$$\limsup_{t\to\infty} ||\phi_t(x)|| < c \qquad \forall x \in X$$

Fortalecimiento de la persistencia. Después de haber establecido una ρ-persistencia fuertemente y uniformemente, uno podría querer probar la persistencia con respecto a algún otro $\ddot{\rho}$ funcional, lo que da un tipo de persistencia más fuerte. Si bien ρ es estrictamente positivo, $\ddot{\rho}$ puede ser no negativo. Las demostraciones, pero no las formulaciones de los resultados, requieren el concepto de conjuntos ω-limite.

Sea X un espacio métrico y ϕ semiflujo continuo autónomo en X. Sea $\rho : X \to [0,\infty)$ uniformemente continuo. Hacemos la siguiente hipótesis.

Condición de compacidad$(C)'$. Existe un subconjunto cerrado B de X con las siguientes propiedades:

- Para $x \in X$, $\phi(t,x) \to B$ cuando $t \to \infty$.
- Para todo $\epsilon > 0$ la intersección $B \cap \{\rho \geq \epsilon\}$ compacto en X.

Teorema 2.57. *Sea* B *el conjunto atractivo para* $(C)'$. *Sea* ϕ *uniformemente débilmente* ρ*-persistente en* X *y* $\ddot{\rho}$ *sea una funcional continua no negativa en* X. *Supongamos que* $\rho(\phi(t,x)) > 0$ *para todo* $t \geq 0$ *siempre que* $\rho(x) > 0$ *y que toda órbita total acotada* $\omega : \mathbb{R} \to B$ *de* ϕ *satisface* $\ddot{\rho}(\omega(0)) > 0$ *siempre que* $\rho(\omega(t)) > 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Entonces existe algún* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$\liminf_{t\to\infty} \ddot{\rho}(\phi(t,x)) > \epsilon$$

para todo $x \in X$ *con* $\rho(x) > 0$

Mencionamos que es suficiente asumir que $\ddot{\rho}$ es un semi continuo por la izquierda. La prueba del teorema establece el siguiente resultado.

Lema 2.58. *Supongamos que la condición de compacidad* (C) *se mantiene y sea* ϕ *débil* ρ*-persistente. Entonces existe un subconjunto invariante compacto* K *de* B *tal que* ρ *es estrictamente positivo en* K *y* $\phi(t,x) \to K$ *cuando* $t \to \infty$ *para cada* $x \in X$ *con* $\rho(x) > 0$.

2.12. Estabilidad Global de un Conjunto Minimal Compacto

Sea X un espacio métrico con métrica d y ϕ es semiflujo continuo en X. Un subconjunto B de X se llama invariante hacia adelante (bajo ϕ) si $\phi_t(B) \subseteq B$ para todo $t \geq 0$. Un subconjunto de X es llamado conjunto minimal si es cerrado, invariante y no vacío y contiene un subconjunto adecuado que también tenga estas tres propiedades. Una modificación de Lema I.8.1 en [49] provee las siguientes consecuencias del lema de Zorn.

Lema 2.59. *Todo compacto invariante hacia delante contiene un conjunto compacto minimal.*

Teorema 2.60. *Supongamos que X es conexo y que cada órbita tiene un cerradura compacto en X y que cada conjunto mínimal compacto es localmente asintóticamente estable. Entonces existe un conjunto mínimal compacto (determinado de forma única) que es globalmente asintóticamente estable.*

2.12.1. Estabilidad Global

En esta sección proporcionamos resultados de estabilidad global que utilizamos para estudiar el comportamiento de las soluciones de los sistemas estudiados en este trabajo tomado de la Tesis Doctoral de Lopez R. (2006).

Principio de invariancia de Liapunov-LaSalle. La estabilidad asintótica de un sistema dinámico es a menudo una propiedad importante que debe determinarse. Los teoremas de estabilidad de Liapunov son a menudo difíciles de aplicar para establecer esta propiedad, ya que a menudo sucede que V (la derivada de la función candidata de Liapunov) sea semidefinida negativa. En este tipo de situación, todavía es posible sacar conclusiones sobre la *estabilidad asintótica*, con la ayuda de los teoremas de conjuntos invariantes que se atribuyen a La Salle. Nos ocuparemos del caso autónomo y comenzaremos por introducir algunas definiciones más. Sea

$$x' = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

es un sistema n-dimensional de ecuaciones diferenciales. Sea $f(x)$ definido en G^*, un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, un subconjunto de G^*, con $\bar{G} \subset G^*$.

Definición 2.61. ***(Función de Liapunov)*** *Una función $V(x) : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es una función de Liapunov para* (2.11) *en G si*

- *V es continuamente diferenciable en cada punto $x \in G$. y*
- *$V' = \bigtriangledown V \cdot f \leqslant 0$ en G.*

Definición 2.62. ***(Conjunto Invariante)*** *Revisar roxana Se dice que el conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es un*

- *Conjunto positivamente invariante con respecto a* (2.11) *si la trayectoria a través de $x_0 \in M$ en t_0 permanece en Ω para todos los $t \geq 0$*
- *Conjunto invariante negativamente con respecto a* (2.11) *si la trayectoria a través de $x_0 \in M$ en permanece en Ω para todo $t \leqslant 0$.*
- *Conjunto invariante si es positiva y negativamente invariante.*

  Ahora podemos enunciar el Principio Invariante de Liapunov-LaSalle.

Teorema 2.63. ***Principio de invariancia de Liapunov-LaSalle*** *Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de Liapunov para*

$$x' = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

en una región G. Sea $E = \{x : V'(x) = 0, x \in \bar{G}\}$ y sea M el mayor conjunto invariante en E. Entonces cada trayectoria acotada (para $t \geq 0$) de (2.12) *que permanece en G tiende al conjunto M cuando $t \to \infty$ (tiende al conjunto M).*
También se puede establecer una versión global del teorema anterior si extendemos G a todo el espacio $\mathbb{R}^n$.

2.13. Criterios de Routh-Hurwitz

Los criterios importantes que dan las condiciones necesarias y suficientes para que todas las raíces del polinomio característico (con coeficientes reales) se encuentren en la mitad izquierda del plano complejo se conocen como criterios de Routh-Hurwitz. El nombre se refiere a E. J. Routh y A. Hurwitz, quienes contribuyeron a la formulación de estos criterios. En 1875, Routh, un matemático británico, desarrolló un algoritmo para determinar el número de raíces que se encuentran en la mitad derecha del plano complejo (Gantmacher, 1964). En 1895, Hurwitz, un matemático alemán, verificó los criterios determinantes para que las raíces se encontraran en la mitad izquierda del plano complejo. En esta parte consideramos la Tesis de Pérez J. (2014) (páginas 15 a 18).

2.13.1. Estabilidad Local en sistemas de primer orden

Consideramos el sistema diferencial autónomo de primer orden con dos variables, x e y,

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \tag{2.13}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y).$$

Recordemos que el equilibrio (estados estables, puntos fijos, o puntos críticos) de este sistema son soluciones $(\bar{x},\bar{y})$ que cumpla $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ y $g(\bar{x},\bar{y}) = 0$.
La estabilidad local de un equilibrio se determina por los valores propios de la matriz Jacobiana. las funciones f y g se expanden utilizando las aproximaciones de Taylor sobre el equilibrio, $(\bar{x},\bar{y})$, donde $u = x - \bar{x}$ y $v = y - \bar{y}$. Supongamos que f y g tienen derivadas parciales continuas de segundo orden en un conjunto abierto que contiene un punto $(\bar{x},\bar{y})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})u + f_y(\bar{x},\bar{y})v \\
&+ f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\frac{u^2}{2} + f_{xy}(\bar{x},\bar{y})uv + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\frac{v^2}{2} + \cdots, \\
\frac{dv}{dt} &= g(\bar{x},\bar{y}) + g_x(\bar{x},\bar{y})u + g_y(\bar{x},\bar{y})v \\
&+ g_{xx}(\bar{x},\bar{y})\frac{u^2}{2} + g_{xy}(\bar{x},\bar{y})uv + g_{yy}(\bar{x},\bar{y})\frac{v^2}{2} + \cdots,
\end{aligned}$$

Donde, por ejemplo, $f_x(\bar{x},\bar{y})$ significa $\partial f(x,y)/\partial x|_{x-\bar{x},y-\bar{y}}$. Utilizamos el hecho de que $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ y $g(\bar{x},\bar{y}) = 0$. El sistema linealizado cerca del equilibrio $(\bar{x},\bar{y})$ es

$$\frac{dZ}{dt} = JZ,$$

Donde $Z = (u,v)^t$ y J es la matriz Jacobiana evaluado en el equilibrio,

$$J = \left(\begin{array}{cc} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{array} \right) \Bigg|_{x=\bar{x},y=\bar{y}}$$

El Capitulo 4 de Allen (2007), nos dice que las soluciones para el sistema lineal $dZ/dt = JZ$ se aproximan a cero si y solo si todos los valores propios tienen parte real negativa. Ademas, a partir del criterio de Routh-Hurwtz, los valores propios tienen parte real negativa si solo si los coeficientes del polinomio característico son ambos positivos. El polinomio característico de la matriz J es

$$\lambda^2 - Tr(J)\lambda + det(J),$$

A continuación, los valores propios tienen parte real negativa si y solo si $Tr(J) < 0$ y $det(J) > 0$. Los resultados de estabilidad se resumen en el siguiente teorema.La estabilidad solo requiere que las derivadas parciales de primer orden de f y g son continuas.

Supongamos que las derivadas parciales de primer orden de f y g son continuas en algún conjunto abierto conteniendo el equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$ del sistema 2.13. A continuación, el equilibrio es localmente asintóticamente estable si

$$Tr(J) < 0 \quad \text{y} \quad det(J) > 0$$

Donde J es la matriz Jacobiana evaluada en el equilibrio, ademas, el equilibrio es inestable si cualquier $Tr(J) > 0$ ó $det(J) < 0$.

Utilizamos el esquema de clasificación desarrollo en el capitulo 4 de Allen (2007) de sistemas lineales para identificar los tipos de equilibrio (nodo, silla, espiral) de sistemas no lineales.
Debido a que la linealización es solo una aproximación al sistema no lineal, el sistema no lineal puede comportarse de manera diferente para los sistemas lineales en tres casos.

a. $det(J) = 0$. hay por lo menos un valor propio cero. En el sistema lineal, Los puntos de equilibrios no están aislados. En el sistema no lineal, esto también puede ser el caso. Si hay un equilibrio aislado, puede ser un nodo, silla , o espiral.

b. $Tr(J) = 0$ y $det(J) > 0$, Los valores propios son imaginarios puros. El equilibrio es un centro en el sistema lineal y puede ser un centro o una espiral en el sistema no lineal.

c. $Tr(J)^2 = 4det(J)$. Esto representa la frontera entre valores propios complejos y reales. Por lo tanto, el equilibrio del sistema no lineal podria ser nodo o espiral.

Denotado $X = (x, y)$

Definición 2.64. *Sea $\bar{X}$ denotada un equilibrio del sistema $\dfrac{dX}{dt} = F(X)$ y J denotada por la matriz Jacobiana de $F(X)$ evaluado en $\bar{X}$. Entonces el equilibrio $\bar{X}$ es llamado Hiperbólico si los valores propios de la matriz Jacobiana J tienen la parte real no cero. En otro caso, es llamado no hiperbólico.*

En el caso equilibrio no hiperbólico, los criterios de estabilidad local son indeterminados. Cuando $Tr(J) = 0$ y la $det(J) > 0$ o cuando $det(J) = 0$, matriz J o bien tiene valores propios complejos conjugados con parte real cero o tiene un valor propio cero. En cualquier caso, el equilibrio es no hiperbólico.

2.14. Conceptos ecológicos

En esta sección presentaremos conceptos ecológicos importantes para la investigación.

2.14.1. Ecosistema

En el espacio del desenvolvimiento científico de las ciencias naturales, la idea de ecosistema ha evolucionado a través del tiempo según nos menciona Armenteras (2016) en ese sentido nos presenta una cronología de los conceptos según sus autores, donde Odum (1971) menciona que:

> Ecosistema es la unión de todos los organismos en un área específica que interaccionan con el ambiente físico, y en conclusión la abundancia de energía determina de modo preciso la cadena trófica, la biodiversidad y los ciclos de materiales dentro del sistema o el ecosistema. El ecosistema es la unidad básica fundamental en la ecología. (p.6)

Años después el concepto de Ecosistema es: "La comunidad y el ambiente abiótico funcionan conjuntamente como un sistema ecológico o ecosistema". (Odum, 1993, p.46). Desde el punto de vista científico, según Armenteras D. et al. (2016) el ecosistema como modelos tiene inferencias notables que trasciende pues concede abstraer objetos y funciones del mundo complejo de la naturaleza y abordarlo a formas simplificadas y manejables. Mientras del punto de vista de Gignoux et al. (2011) por Armenteras D. et al. (2016) sistema integrado por una comunidad de $\{0, \ldots, n\}$ sistemas bióticos dentro de un único sistema físico conocido como la arena.

2.14.2. Formas de Crecimiento Poblacional

Una población, según Odum (1993) "es un grupo de organismos de la misma especie que se encuentran ocupando un espacio dado. Las poblaciones tienen una serie de atributos que a menudo nos interesa medir cuando deseamos comparar diferentes poblaciones, o la misma población en diferentes momentos"(p. 170)
Odum (1975) menciona conceptos necesarios para entender la dinámica poblacional son los siguientes:

> **Densidad**: tamaño de la población en relación con una unidad de espacio. Natalidad o tasa de natalidad: la tasa a la que se agregan nuevos individuos por reproducción.

Mortalidad o tasa de muerte: la tasa a la que las personas se pierden por muerte. Dispersión: La tasa a la que los individuos inmigran a la población o emigran fuera de la población.

Dispersión: la forma en que los individuos se distribuyen en el espacio, generalmente en uno o más de los siguientes tres patrones generales:
(1) distribución aleatoria, en la que la probabilidad de que un individuo ocurra en cualquier lugar es la misma que la probabilidad de ocurre en cualquier otro lugar;
(2) distribución uniforme, en la que los individuos ocurren con más regularidad que al azar, como el maíz en un campo de maíz plantado;
(3) distribución agrupada (la más común en la naturaleza), en la que los individuos ocurren de manera más irregular que al azar, como, por ejemplo, un grupo de plantas que surge de reproducción vegetativa, una bandada de pájaros o personas en una ciudad. Distribución de edad: la proporción de individuos de diferentes edades en la población.

Competencia intraespecífica: es un factor importante en aquellas poblaciones que tienden a autoregularse de la manera des tipo de interacción donde individuos de la misma especie pretenden un recurso en un común limitado. Esta competencia ocurre por una amplia variedad de recursos, como el espacio disponible, alimentos, parejas, etc.

Competencia interespecífica : es un tipo de interacción donde individuos de distintas especies pretenden un recurso en un común limitado.

Aptitud genética o persistencia: la probabilidad de que los individuos dejen descendientes durante largos períodos de tiempo.

La tasa de crecimiento de la población, la consecuencia resultante de nacimiento, muertes y dispersiones de una población donde se muestran contrastes que las poblaciones crecen cuando tienen la oportunidad se presenta como, por ejemplo, al comienzo de una temporada de crecimiento, para cuando algunos individuos ingresan (o se introducen en) un área desocupada, o cuando los recursos no utilizados están disponibles puede tomar varias formas [13], a continuación mencionamos los modelos de crecimiento por su densidad.

Es instructivo presentar el modelo en formatos para diferentes tipos de historias de vida.
crecimiento exponencial La tendencia del crecimiento a sobrepasar la capacidad de carga, en la que el impulso resulta rebasar los límites, creando un patrón de "auge y caída", como se refleja en las figura 2.7, donde se muestran contrastantes. Por conveniencia, podemos etiquetarlos como

la forma de crecimiento exponencial en forma de J.

La segunda forma es la **sigmoidea** en la que el crecimiento se nivela a medida que se acercan los límites (K) como se observa en la figura 2.6. En el patrón de crecimiento en forma de S, los factores limitantes resultantes de la aglomeración proporcionan una retroalimentación negativa que reduce la tasa de crecimiento cada vez más a medida que aumenta la densidad. Teóricamente, si la limitación es linealmente proporcional a la densidad, la forma de crecimiento será una curva

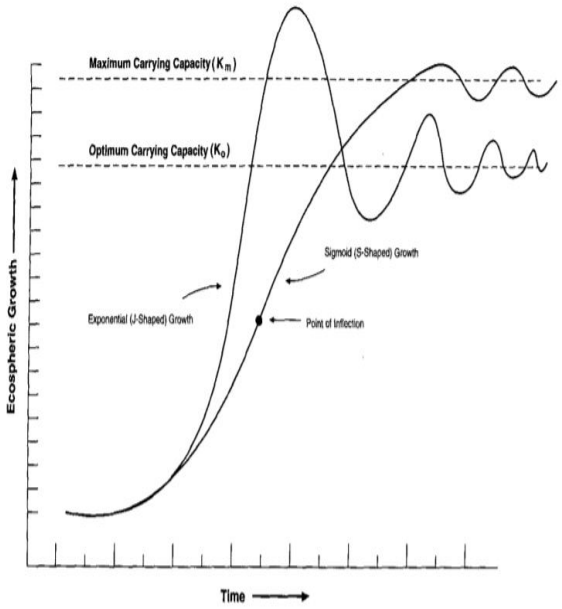


Figura 2.6: Crecimiento Sigmoide (S- curve). Tomado de Odum (2000)

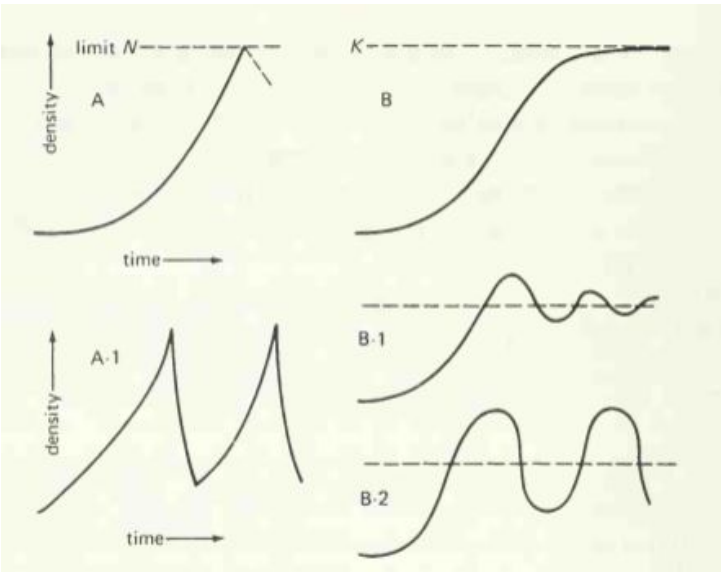


Figura 2.7: Crecimiento Exponencial (A), Forma Sigmoidea (B) y algunas variantes. Tomado de [11]

sigmoidea simétrica con densidad nivelada para acercarse a un nivel de asíntota superior, K, comúnmente llamado **capacidad de carga** porque representa la densidad máxima sostenible teórica.

Representación de la gráfica 2.8 tenemos lo siguiente:

(1) La tasa de crecimiento decrece a medida que se incrementa la densidad (tipo auto limitante o dependiente de la densidad inversa).

(2) La tasa de crecimiento permanece alta hasta que la densidad se vuelve alta y los factores externos a la población se vuelven limitantes (tipo independiente de la densidad).

(3) La tasa de crecimiento es más alta en densidades intermedias (tipo Allee).

La Figura 2.8 muestra tres patrones de crecimiento de la población en relación con la densidad de población. Se puede decir que las poblaciones que tienden a autolimitarse porque la tasa de crecimiento decrece a medida que crece la densidad son **inversamente dependientes de la densidad**. Se puede decir que otras poblaciones que tienden a crecer más o menos sin restricciones hasta que son controladas por fuerzas externas a la población son **independientes de la densidad**. Cuando están mal limitadas por factores externos (por ejemplo, depredadores, factores físicos del suministro de alimentos), estas especies están sujetas a oscilaciones severas en la densidad y pueden convertirse en plagas serias para los humanos. Podemos quizás definir un parásito huésped como un oportunista capaz de un crecimiento exponencial cuando el control dentro del ecosistema está ausente o se quiebra.

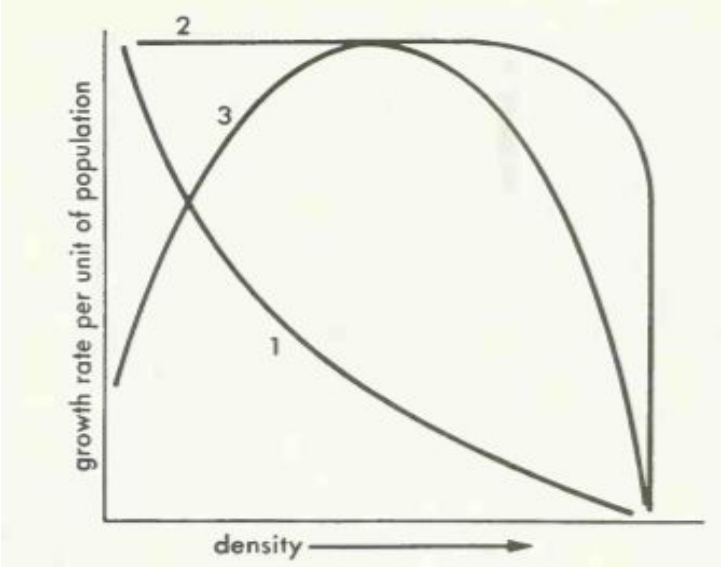


Figura 2.8: Tres patrones de tasa de crecimiento de la población en relación con la densidad de población. Tomado de [11]

Crecimiento de la población independiente de la densidad. Los modelos de crecimiento independientes de la densidad ofrecen una perspectiva extremadamente simple sobre los cambios en el tamaño de la población al eliminar muchas complicaciones potenciales. Por ejemplo, dos conjuntos de procesos que se contrarrestan afectan el tamaño de la población; el nacimiento y la inmigración aumentan las poblaciones, mientras que la muerte y la emigración las disminuyen. En resumen, las cuatro suposiciones se cumplen.

- La inmigración y la emigración se equilibran, dejando sólo el nacimiento y la muerte como los determinantes de la densidad de población.
- Todos los individuos son idénticos (especialmente con respecto a sus probabilidades de morir o producir descendencia).
- La población consiste enteramente en hembras partenogenéticas, por lo que podemos ignorar las complicaciones asociadas con el apareamiento.
- Los recursos ambientales son infinitos, por lo que los únicos factores que afectan el tamaño de la población son las tasas intrínsecas de nacimiento y muerte de los organismos.

  Estos supuestos permiten un modelo simplista de crecimiento de la población.

2.15. Enfermedad Infecciosa Emergente en el mundo

La proliferación de epidemias de enfermedades emergentes desde los años 80 se han acrecentado en el mundo. Estas enfermedades han ido creciendo a nivel mundial y han sido causante de la preocupación por el impacto en la economía y la salud en países desarrollados como en países no desarrollados, pues nadie estaba preparado para combatir tal epidemia. Aún es difícil de parar los nuevos patógenos que van apareciendo, debido a la interrelación que existe entre los seres humanos, los animales y el medio ambiente. No obstante, es posible afrontar una nueva epidemia o disminuir el impacto con políticas de control de salud y que se puede implementar, como un mejor sistema de reconocimiento de los infectados y dar un diagnostico oportuno. Es imperativo que los gobiernos sigan las recomendaciones de los especialistas de salud, para que de esa maner tener mejores respuestas ante cualquier brote.

Las enfermedades infecciosas emergentes (EID) son enfermedades recientemente identificadas o previamente desconocidas que causan una amenaza para la salud pública, ya sea local o internacional (World Health Organization ,1997). En cambio, las enfermedades infecciosas remergentes son enfermedades conocidas que reaparecen y aumentan la incidencia pero que en situaciones pasadas descendieron a niveles tan bajos que dejaron de ser un problema de salud pública [59].

Actualmente se esta combatiendo a la nueva pandemia conocida como COVID-19 con tratamientos efectivos y vacunas, la voluntad política global para responder a cualquier amenaza y multidisciplinario en colaboración a todos sectores que involucre el buen mantenimiento de la salud [32]. En este sentido, hago llamado de atención para que los gobiernos tomen medidas necesarias a estas enfermedades que también involucran a especies que interactúan con el ser humano y que están llevando a la extinción masiva.

2.15.1. Quitridiomicosis

Quitridio Batrachochytrium dendrobatidis (Bd) es un hongo acuático que ataca a muchas especies de anfibios y es responsable de la quitridiomicosis, causante principal de la muerte de especies y disminución de poblaciones a nivel mundial. El patógeno del hongo quítrido fue descrito por primera vez en el norte de África en 2011. La infección de los anfibios empieza cuando las zoosporas conectan con un animal vulnerable y se introduce en la piel [25]. Los cambios producidos por esta enfermedad obstaculiza con la piel de los anfibios lo que afecta al

corazón y causa un paro cardiaco, debido a que la respiración lo realiza a través de la piel. La quitridiomicosis se le ha catalogado como la más letal enfermedad infecciosa entre las especies de vertebrados que se ha observado hasta este momento y que esta impactando a la especie hasta su extinción [36].
En el año 2019 la comunidad científica logro rastrear el origen del hongo patógeno hasta el Asía, específicamente en la península de Corea, a partir de aquí se extendió al resto del mundo y que una cepa en particular la pandemica global es la que más esta imperando [36].

2.15.2. Enfermedad Infecciosa Emergente en los anfibios

Según Daszak et al. (1999.a) cada vez más las enfermedades infecciosas emergentes son causantes de muerte en animales salvajes que viven en su hábitat. Los avances en la ecología de parásitos hospedadores teóricos y experimentales han demostrado un papel importante para agentes infecciosos en la biología poblacional de animales salvajes. Se ha encontrado datos sobre dos enfermedades infecciosas emergentes de anfibios y, por referencia al parásito huésped el primero es el hongo quitridio (Chytridio) y el segundo el ranavirus [24].

Las disminuciones globales en la población de anfibios son quizás uno de los más apremiantes y enigmáticos problemas ambientales de finales del siglo XX. Si bien algunas disminuciones se deben claramente a destrucción del hábitat [31], otros no están asociados con factores ambientales obvios [23]. Las causas que predisponen a la disminución de la población de anfibios según la literatura incluyen la introducción de depredadores o competidores [65], aumento de irradiación ultravioleta (UV-B) [33], lluvia ácida [2], clima de diferentes patrones adversos [16], contaminación ambiental, cambio climático [54], deforestación [30], enfermedad infecciosa [21], o una combinación de estos [7]. Asimismo, estas causas predispusieron a que la enfermedad infecciosa Quitridiomicosis afecte drásticamente a la población del anfibios.

Es importante agregar que el ciclo de vida del anfibio es particularmente especial. En la etapa larvaria la mayoria de ellos se encuentra bajo una superficie acuática después de un cierto tiempo suben a la superficie, este aspecto es importante en la biología de anfibios, debido que lo hace vulnerable en alguna etapa de su metamorfosis.

2.15.3. Enfermedad Infecciosa Emergente en anfibios en California

En varias especies de anfibios que están disminuyendo se ha encontrado el hongo quítridio. La enfermedad quitridiomicosis deja señales como deformaciones bucales en los renacuajos de la rana patas rojas de California. Con frecuencia los individuos infectados como renacuajos mueren cuando se metamorfosean. En cambio, en el Parque Nacional de las Montañas Rocosas, Colorado, los sapos boreales infectados (Bufo boreas boreas) con la enfermedad mostraron debilidad o aturdidos, también se mostraron un desprendimiento excesivo de la piel (U.S. Fish and Wildlife Service, 2002).

Los quitridios están muy extendidos en el medio ambiente donde actúan como descomponedores de queratina, quitina, celulosa y otros materiales vegetales. Los quitridios también son parásitos conocidos de hongos, algas, plantas superiores, protozoos e invertebrados, pero desde hace unas décadas se han encontrado vertebrados infectados. Los hongos quítridos se reproducen asexualmente por medio de esporas diminutas, frágiles y móviles, y probablemente se propagan directamente de anfibio a anfibio en el agua. Los quitridios probablemente se mueven de uno fuente de agua a otra en anfibios migratorios, o en aves acuáticas o insectos voladores.Los descensos de la población de anfibios incluyen la desaparición y presunta extinción del recién descubierto sapo dorado (Bufo periglenes)[64] de Costa Rica y hasta siete anfibios australianos especies, incluidas dos especies de cría gástrica La rana de patas rojas (Rana draytonii) ha sufrido severos declives a lo largo de su distribución en el oeste de Norteamérica, particularmente en el sur de California [41].

2.16. Estructura del Modelo

Construcción del modelo matemático

En un ambiente natural, una especie depende de otra por ello es difícil separar la dinámica de una especie de otra. Se sabe que dos especies pueden actuar entre si, como la competencia por el uso de recursos o hábitat o como una especie impacta a otra a través de un abordaje directo. En el desarrollo y la supervivencia de la población, estos actos recíprocos desarrollan términos negativos y positivos o cero a la ecuación básica de crecimiento de la población.
Al formar un modelo matemático y darle sentido para describir sistemas ecológicos complejos utilizamos los símbolos matemáticos, y ecuaciones para formalizar enunciados que nos propor-

cionen los elementos del ecosistema a tomar acciones entre si. El procedimiento esta determinado de manera que traduce los conceptos físicos y biológicos en algún conjunto de relaciones matemáticas y en el manejo de los sistemas matemáticos elaborados, a esto se le llama análisis de sistemas. Según Odum (1971): un sistema matemático se atribuye y constituye una función abstracta e imperfecta de la realidad que se desea modelar.

La modelización matemática se concentra primero en una población y expresa el cambio de su tamaño en términos de conceptos como tasas de natalidad, tasas de mortalidad y tasas de emigración e inmigración que toman la forma de tasas de población o tasas per cápita.

La ecuación de equilibrio fundamental de las dinámicas de población

Como primer objetivo, los modelos matemáticos intentan describir el tamaño de una población en función del tiempo. Un segundo objetivo puede ser describir la distribución de la población en el espacio o de acuerdo con características individuales importantes como la edad, el tamaño corporal, el contenido de proteínas, etc., pero ignoramos la estructura de la población en este punto. Por lo tanto, denote $N(t)$ el tamaño de la población de una sola especie en la que nos estamos enfocando en el tiempo t. Dependiendo de la especie, el tamaño de la población puede ser el número de individuos o la biomasa colectiva de la población. También puede ser la densidad espacial media de la población o, para las poblaciones acuáticas, la concentración media por unidad de agua.

La tasa de cambio del tamaño de la población viene dada por la derivada del tiempo $N^{'}(t) = \frac{dN(t)}{dt}$. Si consideramos una especie de mamífero, es posible que deseemos que el tamaño de la población se indique en número de individuos. Entonces, el tamaño puede cambiar mediante cuatro etapas: nacimientos, muertes, emigración e inmigración. Si no hay emigración ni inmigración, hablamos de población cerrada, si no de población abierta. La ecuación de equilibrio fundamental de la dinámica de la población tiene en cuenta estos cuatro etapas,

$$N^{'}(t) = I(t) + B(t) - (D(t) + E(t)) \tag{2.14}$$

donde, en el momento t, $B(t)$ denota la tasa de natalidad de la población, $D(r)$ la tasa de mortalidad de la población, $I(t)$ la tasa de inmigración y $E(t)$ la tasa de emigración. Más precisamente, $B(t)$ es el número de nacimientos por unidad de tiempo, en el momento t, $D(t)$ es el número de muertes por unidad de tiempo, etc. Esta ecuación de equilibrio se puede escribir de forma equivalente

$$N(t) - N(r) = \int_r^t I(s)ds + \int_r^t B(s)ds - (\int_r^t D(s)d + \int_r^t E(s)ds,) \qquad siempre\ que \quad t > r$$

Cuando los individuos de una especie son muy pequeños, es preferible describirlo el tamaño de la población en términos de biomasa. Entonces B sería la tasa de adquisición de biomasa a través de la absorción de alimentos y D la tasa de pérdida de biomasa debido no solo a la muerte sino también a la desnutrición no mortal.

En cuanto a nacimientos, defunciones y emigración, también tiene sentido hablar de tasas per cápita. La tasa de natalidad per cápita, $B(t)$, es el número promedio de descendientes nacidos de un individuo típico por unidad de tiempo, en el momento t. En este punto, sin embargo, la tasa de natalidad per cápita es solo una construcción teórica. En poblaciones de reproducción sexual, por ejemplo, solo las hembras dan a luz, y esto solo en una cierta edad, y solo después del apareamiento. Entonces, para determinar la tasa de natalidad per cápita, se necesitaría conocer la proporción de sexos, la distribución por edad de la población femenina y la probabilidad de apareamiento para determinar la tasa de natalidad per cápita como se definió anteriormente. Para hacer las cosas más difíciles, todos estos ingredientes pueden cambiar con el tiempo.

En cuanto a la tasa de muerte o mortalidad per cápita, $\mu(t)$, incluso la definición requiere un esfuerzo sustancial. Sea $\pi(t, r)$, $t \geq r$, la probabilidad de sobrevivir del tiempo r al tiempo t, $\pi(r, r) = 1, 0 < \pi(t, r) \leq 1$. La probabilidad de morir de vez en cuando t es $1 - \pi(t, r)$. La *tasa de mortalidad per cápita* $\mu(t)$ se define como

$$\mu(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \pi(t + h, t)}{h}$$

suponiendo que estos límites existen. El número de individuos mueren de un tiempo t a un tiempo $t + h$ es

$$D(t) = \lim_{h \to 0} \frac{N(t)(1 - \pi(t + h, t))}{h} = \mu(t)N(t)$$

π puede ser recuperado de μ si la probabilidad de supervivencia de r a t es independiente del pasado hasta el tiempo r, en particular si la mortalidad no depende en la edad. Entonces la siguiente regla multiplicativa:

$$\pi(t, r) = \pi(t, s)\pi(s, r), \qquad t \geq s \geq r, \qquad \pi(r, r) = 1$$

Esto implica

$$\frac{\pi(t + h, r) - \pi(t, r)}{h} = \frac{1 - \pi(t + h, t))}{h}\pi(t, r)$$

y la siguiente ecuación diferencial se mantiene para π

$$\frac{d}{dt}\pi(t,r) = -\mu(t)\pi(t,r), \qquad \pi(r,r) = 1$$

Fijamos r y un conjunto $p(t) = \pi(t,r)$. En términos de p, la ecuación diferencial puede ser resuelto por separación de variables

$$-\mu(t) = \frac{p^{'}}{p(t)} = \frac{d}{dt}\ln p(t), \qquad p(r) = 1$$

Integramos ambos lados y usamos el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$-\int_r^t \mu(s)ds = \ln p(t) - \ln p(r) = \ln p(t) - \ln(1)$$

Tomamos exponencial a ambos lados

$$\pi(t,r) = p(t) = \exp(-\int_r^t \mu(s))ds$$

2.17. Crecimiento de la población de anfibios bajo la estructura de la etapa básica

Introducción

Los modelos de población mayormente se consideran de dos formas, donde la densidad de población afecta al crecimiento poblacional: afectando la tasa de natalidad per cápita o la tasa de mortalidad per cápita. Una tercera forma de retroalimentación permite que una alta densidad de población reduzca la tasa de desarrollo individual, retrasando el inicio de la reproducción. Hay muchas formas de modelar este fenómeno; el más simple consiste en dividir la población en dos partes, juveniles y adultos, entendiéndose que sólo los adultos pueden reproducirse, y que la tasa de transición per cápita del estado adulto al juvenil dependa de la densidad.

En esta sección estudiamos las consecuencias de la dinámica de dividir la población en dos etapas. Una población de una sola especie con una sola etapa, que no interactúa con el medio ambiente, tiende hacia un equilibrio. Aquí encontraremos que el equilibrio no cambia mientras la tasa de transición per cápita no dependa del número de juveniles. Si por el cambio depende de los juveniles, se produce un equilibrio no hiperbólico 2.23, el sistema no es estructuralmente estable, lo que hace que pequeñas pertubaciones producen órbitas periódicas 2.13. Es decir, la población puede permanece en oscilaciones o también es posible que exista múltiples estados estacionarios en un cierto rango estrecho de parámetros ocurren una gran cantidad de dinámicas.

Antes de introducirnos a realizar el análisis de la estructura del modelo en tres dimensiones, realizaremos el análisis básico de dos estados. Para estudiar el análisis supondremos el hecho que cumple las equivalencias topológicas, es decir, mediante cambios de parámetros apropiados, se forma un campo de vectores polinomial extendido, el cual es topológicamente equivalente al modelo inicial 2.25.

Estudiaremos el modelo básico de la dinámica de la población de ranas presentado en Thieme (2003) para luego implementar el modelo de tres dimensiones con epidemia.

2.17.1. Modelo básico de dos dimensiones

Para realizar este modelo se considera una especie de ranas en California. Subdividiremos a la población en dos compartimentos juveniles y adultos, con el entendimiento que los juveniles no se reproducen,

$$N = L + A$$

donde:

- L es denotada como la medida de población juvenil (es el estado larvario).
- A es denotada como la medida de la población de adultos.
- N es la medida total de la población es constante, la suma de $L + A$.

Estas medidas son densidades. Asumimos que la transición de juvenil a estado adulto requiere un cierto tamaño mínimo. Tal supuesto es valido, pues por ejemplo la pulga de agua Daphina magna, donde los individuos típicamente tienen una longitud 0,8 mm al nacer y una medida de 2,5 mm al comienzo de la reproducción según nos menciona Kooijman & Metz (1984). Si bien es cierto el tamaño corporal en el momento de la metamorfosis (transformación del anfibio que pasa de juvenil a adulto) es bastante flexible en los anfibios, todavía parecer ser necesario un tamaño mínimo según nos menciona Collins (1979) y Wilbur (1973).

La etapa juvenil (larvaria) se realiza bajo el agua, en donde se compite por comida y se supone que la escacez de alimentos prolongará la duración del periodo de los juveniles y que eso afecta el crecimiento de la mortalidad instantánea de juveniles. Entonces, si hay juveniles se tendrá menos comida, la cual sugiere que le tomará mas tiempo a un solo juvenil tardará más transformarse a adulto. Sea

$$f(L, A)$$

es la tasa de transición per cápita de la etapa juvenil a la etapa adulto. Las poblaciones juveniles y adultas constantes son L y A, respectivamente, entonces el estado juvenil tiene una medida promedio $\frac{1}{f(L,A)}$.

Tenemos que comentar antes que la medida del estado juvenil es una función de crecimiento del número de juveniles y el número de adultos, además se asume que $f(L, A)$ es una función no creciente no negativa de $L, A \geq 0$,

$$f(L, A) \geq f(\bar{A}, \bar{L}) \geq 0 \qquad \textit{siempre} \quad \textit{que} \quad \bar{L} \geq L \geq 0, \quad \bar{A} \geq A \geq 0$$

2.17.2. El modelo con dos dimensiones

Presentamos el siguiente modelo, con un entendimiento matemático pero no ecológico, ya que tomamos y modelamos de un acercamiento a la realidad mas no es exacto, debido a ello realizaremos un análisis antes, para un entendimiento matemático y luego ecológico. Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} L' = \beta(L,A)A - \mu(L,A)L - f(L,A)L \\ A' = f(L,A)L - \alpha(L,A)A \end{cases} \tag{2.15}$$

Aquí $\beta(A,L)$ es la tasa de reproducción de un promedio de un individuo adulto si L y A son medidas de población de juveniles y adultos, respectivamente $\mu(L,A)$ es la tasa de mortalidad de un individuo juvenil y $\alpha(A,L)$ es la tasa de muerte de un individuo adulto.

Suposición 2.65. *$f, \alpha, \beta, \mu : [0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ Son funciones continuas con las siguientes adicionales propiedades:*

- *f, β son estrictamente positivas, decreciente y continuamente diferenciable en ambas variables en $(0,\infty)^2$ con derivadas acotadas.*
- *α, μ son estrictamente positivas, creciente y continuamente diferenciable en ambas variables en $(0,\infty)^2$ y las derivadas parciales son acotadas en todo subconjunto acotado de $(0,\infty)^2$.*

La suposición 2.65 expresa que hay una competencia dentro de la población. Si la tasa f y μ solo depende en L y la tasa β y α solo depende en A, tenemos competencia pura dentro de la etapa, es decir, no hay competencia entre jóvenes y adultos. Esto puede suceder cuando las dos etapas tienen diferentes recursos como renacuajo y ranas adultas. Teóricamente, también podemos considerar una **competencia intraespecífica pura** como se mencionó en 2.14.2 , entre etapas, donde los adultos compiten con los jóvenes y viceversa pero los adultos y los jóvenes no compiten, eso es apenas un escenario realista, revisar en el libro de Begón (2006) para más detalle.

2.17.3. Modelo bien definido y Disipatividad

Es una creencia común en la ecología que ninguna población determinada puede crecer más allá de un cierto límite. Matemáticamente, esto se refleja en el concepto de disipatividad. Un sistema $x' = F(x)$ de ecuaciones diferenciales ordinarias se llamado disipativo y sus soluciones son **eventualmente acotadas uniformemente**, si todas las soluciones existen para todos los

Parámetros	Interpretación
$\frac{1}{f(L,A)}$	Duración media de la tasa juvenil, sino hubiera muerte de los juveniles
$\frac{1}{\alpha(0,A)}$	La expectativa de vida adulta (tiempo promedio que un individuo seguirá viviendo una vez que sea adulto)
$\frac{\beta(0,A)}{\alpha(0,A)}$	La cantidad promedio de recién nacidos por un individuo adulto durante su vida adulta
$\frac{f(L,0)}{\mu(L,0)}$	Tasa per cápita de recuperación de la enfermedad

Cuadro 2.1: Descripción de parámetros en el modelo 2.15

tiempo hacia adelante y si existe algún $K > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \sup \ ||x(t)|| < K \qquad \forall\, x \in X, \tag{2.16}$$

para todas las soluciones x. Entonces, todas las soluciones están limitadas con el límite de tiempo grande $K > 0$ siendo independiente de los datos iniciales. Sin embargo, el tiempo que toma hasta que la norma de las soluciones está por debajo del límite K puede depender de los datos iniciales. El sistema $x' = F(x)$ se llama **débilmente disipativo** si existen todas las soluciones para todos los tiempos de avance y si existe algo $K > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \text{ínf} \ ||x(t)|| < K \qquad \forall\, x \in X \tag{2.17}$$

para todas las soluciones x. Todo sistema finito de ecuaciones diferenciales ordinarias es débilmente Disipativo también es **fuertemente disipativo**, revisar el corolario (2.56)

Teorema 2.66. *Lo supuesto en (2.15), satisface $L^0, A^0 \geqslant 0$ entonces existe una única solución de (2.15) en $[0,\infty)$ con valores iniciales L^0, A^0 . Las soluciones son negativas. Las soluciones son* ***eventualmente acotada uniformente*** *(es decir, el sistema es disipativo) si cumple uno de los siguientes supuestos:*

a. $\lim\limits_{A\to\infty} \sup \dfrac{\beta(0,A)}{\alpha(0,A)} < 1$

b. $\dfrac{f(L,0)}{\mu(L,0)} \to 0, \quad$ cuando $L \to \infty$

c. $\alpha(L,0) \to \infty$ cuando $L \to \infty$ y $\lim\limits_{L\to\infty} \sup \sup\limits_{A\geqslant 0} \dfrac{\mu(L,A)}{\alpha(L,A)} < 1$

Suposición 2.67. *Antes de demostrar el teorema (2.66) realizaremos los siguientes supuestos para (a)-(c)*

a. *Interpretación: En poblaciones adultas grandes, el número promedio de descendientes producidos por un adulto durante toda su vida adulta cae por debajo de uno. LLamamos* $\dfrac{1}{\alpha(0,A)}$ *es el tiempo de duración de la esperanza de vida de un adulto cuando no hay juveniles y el tamaño de la población es constantemente* A*. Esta relación es el reclutamiento de los huevos que se convierten en larva. Es más preciso decir, es la supervivencia de la larva en una población muy baja. En otras palabras es la expectativa de vida del adulto.*

b. *Interpretación: Expresa que la tasa de supervivencia de las larvas va hacia cero, cuando el tamaño de la población juvenil va al infinito.*

c. *Interpretación: Expresa que existe una competencia entre etapas en grandes tamaños de población juvenil con el efecto de que la tasa per cápita de mortalidad de adultos supera la tasa de mortalidad de juveniles.*

Antes de realizar la prueba del teorema vamos a verificar la unicidad y positividad de las soluciones.

Demostración de unicidad y positividad de las soluciones. Utilizaremos el teorema de 2.31 y del teorema (2.66), para $x_0 = (L^0, A^0) \in \mathbb{R}^2_+$ existe única solución de $x' = F(x)$, $x(0) = x_0$ con valores en $\mathbb{R}^2_+$ la cual esta definida en algún intervalo $(0, b)$ con $b \in (0, \infty)$. Si $b < \infty$, entonces

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant b} \sum_{j=1}^{n} (L(t) + A(t)) = \infty \tag{2.18}$$

Demostración. Suponemos que $b < \infty$ para el modelo $N(t) = L(t) + A(t)$, entonces suponemos que $b < \infty$ entonces

$$\begin{aligned} L' &\leqslant \beta A \\ S' &\leqslant F(L)L - \alpha(L, A)A \leqslant F(0)L - \alpha(L, A)A \end{aligned}$$

$n = \text{máx}\{F(0), \beta\}$ entonces

$$\begin{aligned} L' + A' &\leqslant n(L + A) \\ \frac{(L + A)'}{L + A} &\leqslant n \end{aligned}$$

Integra en ambos lados $0 \leqslant \tau \leqslant t$

$$\ln(L(t) + A(t)) - \ln(L(0) + A(0)) \leqslant nt \leqslant C \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

Tomando la exponencial en ambos lados de la desigualdad:

$$e^{\ln(L(t)+A(t))-\ln(L(0)+A(0))} \leqslant e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

Realizando propiedades de exponentes:

$$\frac{e^{\ln(L(t)+A(t))}}{e^{\ln(L(0)+A(0))}} \leqslant e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

$$\frac{L(t)+A(t)}{L(0)+A(0)} \leqslant e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

entonces

$$L(t)+A(t) \leqslant (L(0)+A(0))e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

como $N(t) = L(t) + A(t)$, podemos reemplazar

$$N(t) \leqslant N(0)e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

así como N(t) es acotado, hay una contradicción con el Teorema 2.31. Por consiguiente $b = \infty$ Entonces la solución del sistema es positivo y definido en $[0, b\rangle$. □

Demostración. **Teorema (2.2)**

a. Para $\epsilon \in \langle 0, 1\rangle$ entonces $1 - \epsilon \in \langle 0, 1\rangle$y $N^{\#} > 0$

$$\frac{\beta(L, A)}{\alpha(L, A)} \leqslant 1 - \epsilon \qquad \text{siempre que } A \geqslant N^{\#}.$$

$N' = L' + A'$ de la ecuación (2.4) entonces $N' = \beta(L, A)A - \alpha(L, A)A - \mu(L, A)L$

Realizamos operaciones matemáticas

$$N' = \beta(L, A)A - \alpha(L, A)A + \epsilon\alpha(L, A)A - \mu(L, A)A - \epsilon\alpha(L, A)A$$

Así: $\beta(L, A)A - \alpha(L, A)A + \epsilon\alpha(L, A)A \leqslant K, \quad \forall A \geqslant 0$, con la constante $K > 0$.

Retornamos a la ecuación diferencial

$N' \leqslant K - \mu(L, A)L - \epsilon\alpha(L, A)A$ sabiendo que $L + A = N$ siempre que $A \geqslant N^{\#}$.

$N' \leqslant K - \mu(L, A)L - \epsilon\alpha(L, A)N(t)$

$N' \leqslant K - \mu(0, 0)L - \epsilon\alpha(0, 0)N(0) \leqslant K - \delta N$ con algún $\delta > 0$

esto implica que $N(t) \leqslant$ máx $\left\{ N(0), \frac{K}{\delta} \right\}$ y también que $\lim\sup_{t\to\infty} N(t) \leqslant \frac{K}{\delta}$.

Así K y δ son independientes de la información inicial.

Para los otros supuestos, usaremos el hecho que el sistema finito de ecuaciones diferenciales es **disipativo** cuando es **Débil Disipativo**.

b. Defino $V = L + \varepsilon A$

Donde ϵ puede ser cambiado después, entonces

$$V' = (\beta(L, A) - \varepsilon\alpha(L, A)A) - \mu(L, A)L + f(L, A)(\epsilon - 1)L$$

$$V' \leqslant (\beta(0,0) - \varepsilon\alpha(0,0)A) + [f(L,A)(\varepsilon - 1) - \mu(L,A)]L$$

Cambiando $\varepsilon = \dfrac{\beta(0,0)}{\alpha(0,0)} + 1$ despejando $\beta(0,0) - \varepsilon\alpha(0,0) \leqslant \alpha(0,0)$

Entonces

$$V' \leqslant (\beta(0,0) - \varepsilon\alpha(0,0))A + (f(L,A)(\varepsilon - 1) - \mu(L,A))L$$

$$V' \leqslant -\alpha(0,0)A + \mu(L,A)\left[\frac{f(L,A)}{\mu(L,A)}(\varepsilon - 1) - 1\right]L \tag{2.19}$$

Notamos que:

$$A \leqslant \varepsilon A \leqslant \epsilon L + \varepsilon A$$

$$L + A \leqslant L + \epsilon A \leqslant \varepsilon(L + A)$$

$$N \leqslant V \leqslant \varepsilon N$$

Por la suposición, existe algún $L^{\#} > \dfrac{2}{\mu(0,0)}$ tal que

$$(\varepsilon - 1)\frac{f(L,A)}{\mu(L,A)} \leqslant \frac{1}{2} \quad siempre \quad que \quad L \leqslant L^{\#}$$

Así

$$V^{'} \leqslant -\alpha(0,0)A - \frac{1}{2}L\mu(0,0) \leqslant -\frac{1}{2}\mu(0,0)L^{\#} \quad si \quad L \geq L^{\#}$$

$$V^{'} \leqslant -\frac{1}{2}\mu(0,0)L^{\#} \leqslant -1 \quad si \quad L \geq L^{\#}.$$

Sea $V > L^{\#}$, pero $L \leqslant L^{\#}$. Entonces $A \geq \dfrac{1}{\epsilon}(V - L^{\#})$ y de la ecuación (2.19)

$$V^{'} \leqslant \frac{\alpha(0,0)L}{\varepsilon} + f(0,0)(\varepsilon - 1)L - \frac{\alpha(0,0)V}{\varepsilon}$$

$$V^{'} \leqslant \left[\frac{\alpha(0,0)}{\varepsilon} + f(0,0)(\varepsilon - 1)\right]L - \frac{\alpha(0,0)V}{\varepsilon}.$$

Entonces encontramos algún $V^{\#} > L^{\#}$ tal que $V^{'} \leqslant -1$ siempre que $V \geq V^{\#}$, $L \leqslant L^{\#}$.

Combinando ambos casos, obtenemos:

$V^{'} \leqslant -1$ siempre que $V \geq V^{\#}$. Esto implica que $\lim\limits_{t\to\infty} \inf V(t) \leqslant V^{\#}$; otro caso $V(t)$ se convertiría en negativo en tiempo finito, una contradicción. Ya que $\varepsilon \geq 1$, $N(t) \leqslant V(t)$, y hemos demostrado que el sistema es **Débil Disipativo**.

c. Vamos a probar cuando $\alpha(L,0) \to \infty$ cuando $L \to \infty$ y $\lim\limits_{L\to\infty} \sup \sup\limits_{A\geqslant 0} \dfrac{\mu(L,A)}{\alpha(L,A)} < 1$

A_0 : fijo $\alpha(L,A) \neq 0\ \forall A, L \geqslant 0$ entonces $\sup\limits_{A\geqslant 0} \dfrac{\mu(L,A)}{\alpha(L,A)} = \dfrac{\mu(L,A_0)}{\alpha(L,A_0)}$

Si $N^{'} = L^{'} + A^{'}$ entonces $N^{'} = \beta(L,A)A - \alpha(L,A)A - \mu(L,A)L$

$$\frac{\mu(L,A)L}{\alpha(L,A)} \leqslant 1 - \varepsilon$$

$$N' \leqslant (\beta(L,A) - \alpha(L,A))A - (\alpha(L,A) - \varepsilon\alpha(L,A))L$$

$$N' \leqslant (\beta(L,A) - \alpha(L,A))A - \alpha(L,A)(1-\varepsilon)L$$

$(\beta(L,A) - \alpha(L,A))A \leqslant K$, para todo $A \geqslant 0$ con $K > 0$

$$N' \leqslant K - \alpha(L,A)(1-\varepsilon)L \leqslant K - \alpha(L,A_0)N(0)\frac{\mu(L,A_0)}{\alpha(L,A_0)}$$

$$N' \leqslant K - \delta N \quad entonces \quad \frac{K}{\delta} \leqslant N$$

$\frac{\mu(L,A_0)}{\alpha(L,A_0)} \leqslant \text{máx}\left\{N(0), \frac{K}{\delta}\right\}$ y también que $\lim_{L\to\infty} \sup \frac{\mu(L,A_0)}{\alpha(L,A_0)} \leqslant \frac{K}{\delta}$

$\lim_{L\to\infty} \sup \sup_{A\geqslant 0} \frac{\mu(L,A)}{\alpha(L,A)} < 1$ siendo K y δ independientes de la información inicial.

□

Proposición 2.68. *Si los valores iniciales L^o, A^o no son no negativos y al menos de ellos es estrictamente positivo, entonces L, A son estrictamente positivos en $(0,\infty)$.*

2.18. Equilibrio y Tasa de Reproducción

Recordemos $L(t) \equiv \mathcal{L}$, $A(t) \equiv \mathcal{A}$ del sistema (2.15). El origen $(0,0)$ es siempre un equilibrio de (2.15), llamado el equilibrio trivial o de extinción. Cualquier no trivial satisface $\mathcal{L} > 0$ y $\mathcal{A} > 0$, y la matriz determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} -(\mu(\mathcal{L},\mathcal{A}) + f(\mathcal{L},\mathcal{A})) & \beta(\mathcal{L},\mathcal{A}) \\ f(\mathcal{L},\mathcal{A}) & \alpha(\mathcal{L},\mathcal{A}) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

es cero.

$$\alpha(\mathcal{L},\mathcal{A})(\mu(\mathcal{L},\mathcal{A}) + f(\mathcal{L},\mathcal{A})) = \alpha(\mathcal{L},\mathcal{A})\beta(\mathcal{L},\mathcal{A}) \tag{2.21}$$

Hay varias formas perspicaces de reescribir esta ecuación. Lo siguiente es matemáticamente útil,

$$\frac{\beta(\mathcal{L},\mathcal{A})}{\alpha(\mathcal{L},\mathcal{A})} = 1 + \frac{\mu(\mathcal{L},\mathcal{A})}{f(\mathcal{L},\mathcal{A})} \tag{2.22}$$

mientras

$$1 = \frac{\beta(\mathcal{L},\mathcal{A})}{\alpha(\mathcal{L},\mathcal{A})}\frac{f(\mathcal{L},\mathcal{A})}{\mu(\mathcal{L},\mathcal{A}) + f(\mathcal{L},\mathcal{A})} =: \mathcal{R}(\mathcal{L},\mathcal{A}) \tag{2.23}$$

Interpretación biológica. La tasa de reproducción básica es 1 en equilibrio. La Tasa de reproducción es el número promedio de descendientes producidos por un individuo típico durante su vida.

Observamos que el primer factor en la última fórmula es el número de descendientes producidos por un individuo durante la edad adulta, mientras que el segundo factor es la probabilidad de sobrevivir a la etapa juvenil.

$\mathcal{R}$ es una función decreciente de ambas variables, el número de juveniles y el número de adultos.

Una segunda relación de equilibrio, se obtiene de una segunda ecuación en

$$\alpha(\mathcal{L}, \mathcal{A})\mathcal{A} = \mathcal{L}f(\mathcal{L}, \mathcal{A})$$

2.19. Tasa de Reproducción Básica y Condición Umbral para la extinción frente a persistencia

Sea $\mathcal{R} = \mathcal{R}(0,0)$, con $\mathcal{R}$ de (2.23) es llamada *tasa de reproducción básica* y el número promedio de descendientes producidos por un individuo típico durante su vida sino hay competencia.

Teorema 2.69. *Para $\mathcal{R}$:*

a. *Si $\mathcal{R}(L, A) < 1$ siempre que $L, A > 0$ (en particular $\mathcal{R}_0$), la población se extingue.*

b. *Si $\mathcal{R}(L, A) > 1$ la medida total de la población es persistente uniformemente , es decir, existe algún Si $\epsilon > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \text{ínf}\,[L(t) + A(t)] \geq \epsilon$$

para todas las soluciones de (2.15) con $L(0) + A(0) > 0$

Demostración. a. Sea $V = L + \xi A$ del supuesto de (2.17.3) con $\dfrac{\beta(0,0)}{\alpha(0,0)}$ donde V es una función Liapunov, $\dot{V}= 0$ si y sólo si $\mathcal{R}(L, A) = 1$. Dado que V no es creciente, se deduce que toda órbita cerrada es acotada en un tiempo en adelante. Por el Teorema de Liapunov-La salle (2.12.1), todo ω - conjunto límite es un conjunto invariante en $\{L = 0\} \cup \{A = 0\}$. Como el flujo de las soluciones, de todo conjunto ω - conjunto límite esta siempre contenido en $\{L = 0\} \cap \{A = 0\}$ y así entonces es el único que contiene al origen.

b. Nos guiaremos de la teoría de persistencia en (2.11), sea $\rho(L, A) = L + A$.

Primero probaremos que es uniformemente débil ρ-persistente.

$\mathcal{R}_0 > 1$, encontramos un $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{R}(\epsilon, \epsilon) > 1$. Supongamos que $L(t) + A(t) \leqslant \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Sea $V = L + \xi A$ con $\xi > 1$ que después será determinado. Entonces

$$\dot{V} \geq [\beta(\epsilon, \epsilon) - \xi\alpha(\epsilon, \epsilon)]\, A + [f(\epsilon, \epsilon)(\xi - 1) - \mu(\epsilon, \epsilon)]\, L$$

Siendo $\mathcal{R}(\epsilon,\epsilon) > 1$, tenemos $f(\epsilon,\epsilon)(\xi_0 - 1) - \mu(\epsilon,\epsilon) > 0$ para $\xi_0 = \dfrac{\beta(\epsilon,\epsilon)}{\alpha(\epsilon,\epsilon)}$ de (2.22) tenemos que $A \geq \xi V - L$, entonces en la inecuación

$$\dot{V} \geq [\beta(\epsilon,\epsilon) - \xi_0\alpha(\epsilon,\epsilon)]\,\xi_0 V - \alpha(\epsilon,\epsilon)L + [f(\epsilon,\epsilon)(\xi_0 - 1) - \mu(\epsilon,\epsilon)]\,L$$

$$\dot{V} \geq \alpha(\epsilon,\epsilon)\xi_0 V - \alpha(\epsilon,\epsilon)L + [f(\epsilon,\epsilon)(\xi_0 - 1) - \mu(\epsilon,\epsilon)]\,L$$

Así, podemos cambiar $\xi \in (1,\xi_0)$ tal que, en la última inecuación para $\dot{V}$, ambas expresiones en corchetes son positivos. Por lo tanto existe algún $\delta > 0$ tal que

$$\dot{V} \geq \delta V$$

$$e^{-\delta t}\frac{dV}{dt} - e^{-\delta t}\delta V \geq 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\delta t}V\right] \geq 0$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{-\delta t}V\right] \geq 0$$

$$V(e^{-\delta t} - 1) \geq 0$$

$V \leq e^{-\delta t}$ entonces tomando $\lim_{t\to\infty} V \leq 0$ y V decrece exponencialmente, lo que resulta una contradicción.

Segundo Para realizar este paso tomaremos el teorema (2.54) de la teoría de persistencia, el sistema (2.15) es uniformemente fuertemente ρ-persistente, es decir, la afirmación se mantiene.

□

Corolario 2.70. *Sea $\mathcal{R}_0 > 1$ y sea válido uno de los supuestos $(i) - (iii)$ del Teorema (2.66). Entonces la población es permanente, es decir, existen constantes $c > 0$ tal que*

$$\epsilon \leqslant \lim_{t\to\infty} \text{ínf}\, L(t) \leqslant \lim_{t\to\infty} \sup L(t) \leqslant c$$

$$\epsilon \leqslant \lim_{t\to\infty} \text{ínf}\, AL(t) \leqslant \lim_{t\to\infty} \sup A(t) \leqslant c$$

para todas las soluciones no triviales L, Ade (2.15). Además, no existe un equilibrio interior.

Demostración. Por el teorema (2.66) y el teorema (2.69) suponemos que

$$\epsilon_0 \leqslant N(t) \leqslant c_0 \quad \forall t \geq 0$$

Desde que

$$A^{'} \geq (N - A)f(N,N) - \alpha(N,N)A \geq (\epsilon_0 - A)\epsilon_1 - C_1 A$$

para una constante apropiada $\epsilon_1 > 0$ y $c_1 > 0$ por el Método de fluctuaciones (2.46).

$$A_\infty = \frac{\epsilon_0\epsilon_1}{c_1 + \epsilon_1}$$

Se desarrolla de manera análoga para L_∞ para obtenerlo fácilmente. La Existencia del equilibrio no trivial que sigue del Teorema de Poincaré-Bendixson 2.34. □

2.20. Tasas de transición de etapa débilmente dependientes de la densidad y estabilidad global de los equilibrios no triviales

Mostraremos en esta sección que la dinámica de nuestro sistema simple de estructura de etapas converge a un equilibrio no trivial de manera única, si sólo hay una débil respuesta negativa del número de juveniles a tasa de transición de la etapa, es decir, si $Lf(L,A)$ es una función no decreciente de L.

La estabilidad de un equilibrio de una ecuación diferencial ordinaria está relacionada con la matriz jacobiana del campo vectorial asociado. La matriz jacobiana del campo vectorial asociado con el sistema 2.15 tiene la forma

$$\begin{pmatrix} -(\mu+\mu_L L+f+f_L L)+\beta_L A & \beta+\beta_A A-\mu_A L-f_A L \\ f+f_L L-\alpha_L A & f_A L-(\alpha+\alpha_A A) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

donde f_L, f_A, etc., denotan las derivadas parciales con respecto a L y A y se han omitido los argumentos de β, μ, f, α. La estabilidad de un equilibrio está relacionada con los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz jacobiana evaluada en el equilibrio, y los autovalores a su vez satisfacen las relaciones a su vez satisfacer las relaciones

$$\lambda_1+\lambda_2 = TrazaJ(L^*,A^*) \qquad \lambda_1\lambda_2 = DetJ(L^*,A^*).$$

Recuerde que la traza de la matriz es la suma de las entradas en la diagonal principal. Para nuestro modelo,

$$TrazaJ(L,A) = -(\mu+\mu_L L+f+f_L L)+\beta_L A+f_A L-(\alpha+\alpha_A A). \tag{2.25}$$

$$DetJ(L,A) = (\mu+\mu_L L+f+f_L L-\beta_L A)(\alpha+\alpha_A A-f_A L)-(\beta+\beta_A A-\mu_A L-f_A L)(f+f_L L-\alpha_L A). \tag{2.26}$$

Y el origen (la extinción en equilibrio)

$$trazaJ(0,0) = -(\mu+f+\alpha)(0,0) < 0,$$

$$\det J(0,0) = [(\mu+f)\alpha - f\beta](0,0).$$

Se observa que $detJ(0,0)$ tiene igual signo como $1-\mathcal{R}_0$. Multiplicando los términos en la determinante,

$$detJ(L,A) = (\mu+f+f_L L)\alpha_A A+(\mu+f)\alpha-\beta f$$

$$(\mu_L L-\beta_L A)\alpha-(\mu+\mu_L L-\beta_L A)f_A L$$

$$+f_L L(\alpha-\beta)+(\mu_A L-\beta_A A)(f+f_L L)+\beta_{\alpha_L} A$$

$$+(\mu_L\alpha_A-\mu_A\alpha_L)LA+(\beta_A\alpha_L-\beta_L\alpha_A)A^2-f_A\alpha_L AL. \tag{2.27}$$

Teorema 2.71. *Sea* $\mu(L,A)+\alpha(L,A)+f(L,A)+Lf_L(A,L)>0$ *para todo* $L,A>0$ *y sea* $\alpha_A+\alpha_L+\mu_A+\mu_L-(\beta_A+\beta_L+f_A+f_L)$ *es estrictamente positivo en* $(0,\infty)^2$.

a. *Entonces no existen órbitas periódicas ni cadenas cíclicas de equilibrio.*

b. *Si, además,*

$$\beta_L\alpha_A\leqslant\beta_A\alpha_L,\quad \mu_A\alpha_L\leqslant\mu_L\alpha_A$$

entonces todos los equilibrios interiores son localmente asintóticamente estable.

c. *Sea, para todo* A, $\dfrac{Lf(L,A)}{\alpha(L,A)}$ *es estrictamente creciente en* $L>0$.

d. *Si finalmente agregamos a la suposición en* $(b.)$ *o la suposición en* $(c.)$ *una de los supuestos* $(a.)-(b.)$ *del teorema* (2.66), *todas las órbitas en adelante limitadas no triviales convergen hacia un equilibrio interior determinado de forma única (el equilibrio de persistencia). La extinción ocurre si*

$$\mathcal{R}_0=\frac{\beta(0,0)}{\alpha(0,0)}\frac{f(0,0)}{\mu(0,0)+f(0,0)}\leqslant 1$$

y la persistencia ocurre si $\mathcal{R}_0>1$

Observación 2.72. *Observamos que* $\alpha_A+\alpha_L+\mu_A+\mu_L-(\beta_A+\beta_L+f_A+f_L)$ *siempre es no negativo según el supuesto de* $(2.17.3)$. *El segundo supuesto del inciso* (b) *se satisface si* α *no depende de* L, *es decir, la mortalidad per cápita de adultos no se ve afectada por la densidad de juveniles. El resultado de este teorema muestra que en nuestro modelo la tasa de transición de la etapa per cápita es el único factor cuya dependencia de la densidad puede hacerse tan fuerte que posiblemente conduciría a oscilaciones no amortiguadas. Este mensaje depende de nuestra elección de modelo. En otros modelos (por ejemplo, modelos con una duración fija en lugar de distribuida exponencialmente del período juvenil Teorema (16.4) del capítulo 6 de Thieme (2003) o modelos con fuerte estacionalidad Capítulo 9 de Thieme (2003), la tasa de natalidad dependientes de la densidad pueden causar oscilaciones amortiguadas. Pero uno puede concluir con cautela que la dependencia de la densidad en la tasa de transición de la etapa parece tener un mayor potencial de conducir a oscilaciones no amortiguadas que la dependencia de la densidad en la tasa de natalidad o en las tasas de mortalidad. A partir de la traza de la matriz jacobiana, ecuación (2.25) se puede hacer la observación de que la competencia entre etapas parece tener un efecto amortiguador porque hace que la traza sea más negativa.*

También observamos que si solo hay competencia dentro de la etapa (2.14.2) y solo una dependencia de la densidad débil en la tasa de transición de la etapa, entonces no hay biestabilidad, es decir, no hay equilibrios múltiples; de hecho, todas las dinámicas conducen a un equilibrio interior globalmente estable (2.60).

Demostración. **Prueba del teorema** (2.71)

a. No existe órbitas periódicas y cadenas cíclicas de equilibrio que sigue del criterio de Bendixson (Teorema (2.39)). Observamos que la divergencia del campo vectorial (la traza de su matriz jacobiana) es estrictamente negativa en $(0,\infty)^2$.

b. En un equilibrio no trivial, $(\mu + f)\alpha - \beta f$ y $\beta > \alpha$, por lo que nuestras suposiciones adicionales implican que todos los equilibrios no triviales son localmente asintóticamente estables porque la traza de la matriz jacobiana es negativa y el determinante positivo.

c. Bajo este supuesto, existe una función continua estrictamente creciente $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $A^* = \phi(L^*)$ satisface Teorema (2.69), es decir,

$$\alpha(L,\phi(L))\phi(L) = f(L,\phi(L))L \quad \forall L \geq 0.$$

Sustituyendo esto en (2.66) vemos que el L-componente de cada interior del equilibrio satisface

$$\frac{\mu(L,\phi(L))}{f(L,\phi(L))} + 1 - \frac{\beta(L,\phi(L))}{\alpha(L,\phi(L))} = 0$$

Dado que el lado izquierdo de esta ecuación es estrictamente decreciente, hay como máximo una solución.

d. Supongamos que el supuesto en (b) y uno de los supuestos $(i) - (iii)$ en el teorema (2.66) se cumple tal que todas las soluciones están limitadas en un tiempo hacia adelante. Según el teorema de Poincaré-Bendixson 2.34, todo conjunto de límites ω contiene un equilibrio o es una órbita periódica. Dado que todos los equilibrios no triviales son localmente asintóticamente estables y no existen órbitas periódicas, cada órbita converge hacia un equilibrio interior o su conjunto ω-límite contiene el origen. En el segundo caso, el conjunto de ω-limite en realidad consiste en el origen; de lo contrario, una órbita homoclínica conecta el origen consigo mismo, lo que nuevamente queda descartado por el criterio de Bendixson. Si $\mathcal{R}_0 \leqslant 1$, nuestras suposiciones adicionales implican que $\mathcal{R}(L,A) < 1$ siempre que $L, A > 0$ y la extinción se sigue del teorema (2.69 a.) Si $\mathcal{R}_0 > 1$, tenemos permanencia en el sentido del Corolario 2.70, es decir, existe un conjunto compacto en $X = (0,\infty)^2$ que atrae todas las órbitas que comienzan en X (véanse los Teorema (2.66) y (2.69). Para

mostrar la unicidad de los equilibrios no triviales, aplicamos el Teorema 2.60. Los conjuntos mínimos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias planas son equilibrios y órbitas periódicas: equilibrios en nuestro caso. Dado que todos los equilibrios interiores son localmente asintóticamente estables, también lo son todos los conjuntos mínimos en X. Según el Teorema 2.60, existe un conjunto mínimo globalmente asintóticamente estable para X. Dado que toda órbita no trivial entra en X, hay un equilibrio localmente asintóticamente estable que atrae todas las órbitas no trivial.

La demostración es similar, en realidad más fácil, si el supuesto en (c) y uno de los supuestos $(i) - (iii)$ en el Teorema 2.66 se cumplan.

□

2.21. Planteamiento del modelo de la enfermedad infecciosas

En esta sección analizamos el sistema presentado por Adnan Khan et al. (2011). Como se mencionó anteriormente, las larvas son los actores claves en el caso de la incidencia de la enfermedad dependiente de la densidad que eventualmente lleva a la extinción del anfibio, notar que la población de ranas que trabajamos es la de California, por lo tanto, es importante mantener este componente intacto mientras se estudia la disminución de anfibios basada en la enfermedad. Dado que el enfoque principal del modelo es la extinción de larvas basada en la enfermedad, por lo tanto, para ver el escenario completo, sabemos que en la etapa temprana de sus vidas, las larvas están rodeadas de un caparazón cerrado o en algunos agujeros protegidos en un ambiente seguro y libre de enfermedades, denotaremos esta clase por L. Luego en la siguiente etapa, las larvas salen de su caparazón en un ambiente libre (puede ser un charco o riachuelo), luego se vuelve vulnerable a la enfermedad volviendose susceptible (indicadas por S). Estos susceptibles pueden infectarse con la enfermedad y entrar en la clase infecciosa, indicada por I. Agregamos que se contrae la enfermedad de un individuo a otro. Además, estas larvas infectadas también pueden recuperarse de la enfermedad y volver a la clase susceptible. El modelo está formulado de manera que el número de nuevas larvas infectadas depende del número actual de larvas susceptibles e infecciosas en el sentido de que cuantas más larvas (susceptibles o infecciosas) tengamos, más posibilidades de propagar las infecciones entre los sanos o serán larvas susceptibles, es decir, la enfermedad se puede transferir de una a otra.

Organizamos este documento de la siguiente manera. Primero describimos el modelo matemático junto con sus supuestos subyacentes. Luego, se halla la cantidades umbral, las tasas de reproducción y la densidad crítica del hongo como huésped patógeno, para los establecimientos de la enfermedad. También derivamos el número de equilibrios endémicos y discutimos sus estabilidades. Finalmente, damos la conclusión y discutimos el potencial. limitaciones e impacto de nuestros resultados. Formularemos el modelo matemático en dos compartimientos: larvas susceptibles y larvas infectadas, aunque esta enfermedad es transferible de una a otra, la recuperación también, es posible, de la cual una larva infectada volverá a ser susceptible. Asumiremos en el modelo que una larva susceptible contribuye a la reproducción. Así una vez que la enfermedad se propaga la población se extinguirá no solo por la enfermedad sino por la falta de reproducción. Asumimos que la transición de la etapa larvarea L a la etapa S requiere un cierto mínimo de tamaño. La larva típicamente tiene una longitud de 0.8 mm en el nacimiento y una longitud de 2.5mm una vez que entran en clase expuesta. Además en algunos anfibios, el tamaño corporal

en la metamorfosis es necesario. Por lo tanto un cierto tamaño mínimo aún parece ser necesaria en estos casos (Collins, 1979).

En base a estas evidencias, es razonable suponer que a la escasez de recursos en la etapa larvarea le costara mucho tiempo para una sola larva en etapa L a completar la transición a la fase S. Por ello en el modelo se supone que $\pi(L)L$ es no decreciente de $L \geq 0$, con el fin de representar una fuerte retroalimentación negativa para la cantidad de población de larvas. Sea $\pi(L)$ la tasa per cápita de transición de la larva en entrar a la etapa adulta.

L es el tamaño de la población de la larva Inmune. En el modelo L representa la clase no expuesta de la población de larvas que aun no se introduce a la clase susceptible. S es el tamaño de la población de susceptible e I es el tamaño de la población Infectada.

$$\begin{cases} L' = \beta S - (\mu L + \pi(L)L) \\ S' = \pi(L)L + \rho I - (\nu S + \sigma SI) \\ I' = \sigma SI - (\nu I + \alpha I + \rho I) \end{cases} \tag{2.28}$$

Tasas	Interpretación	UNIDS
β	Tasa per cápita de nacimiento de susceptibles.	1/t
ν	Tasa per cápita de mortalidad de la larva susceptible y larva infectada.	1/t
α	Tasa per cápita de mortalidad de las larvas infectadas debido a la enfermedad.	1/t
ρ	Tasa per cápita de recuperación de la enfermedad.	1/t
$\pi(L)$	Es la tasa de transición de la larva a ser susceptible.	1/t
σ	Tasa per cápita de contacto entre larvas susceptibles e infectados.	1/(t)

Cuadro 2.2: Descripción de parámetros en el modelo 2.28

Para el análisis del sistema realizaremos las equivalencias topológicas y cambios de parámetros respectivos, para formar un campo de vectores extendidos, topológicamente equivalente al modelo planteado, para luego realizar el análisis. Para ello enunciaremos las siguientes hipótesis necesarias mencionadas en el modelo de dos estados realizado en (2.17.3).

Hipótesis 2.73. *Todos los parámetros son positivos excepto α, que puede ser cero. $\pi(L)$ es una función estrictamente decreciente no negativa de L tal que*

$$\pi(L) \to 0 \qquad cuando \qquad L \to \infty.$$

Observación: *Para una densidad de la población* $\widehat{L}$ *,se puede expresar*

$$\pi(L) \geq \pi(\widehat{L}) \geq 0 \quad siempre \quad que \quad \widehat{L} \geq L \geq 0$$

En este capitulo estudiaremos algunas características cualitativas de las soluciones del sistema 2.28. A continuación probaremos lemas y teoremas importantes para el análisis de las soluciones. Del sistema 2.28 consideremos las siguientes funciones

$$F_1(L,S,I) = \quad \beta S - \pi(L)L - \mu L \tag{2.29a}$$

$$F_2(L,S,I) = \quad \pi(L)L - \nu S + \rho I - \sigma SI \tag{2.29b}$$

$$F_3(L,S,I) = \quad \sigma SI - \nu I - \alpha I - \rho I \tag{2.29c}$$

Notamos que las funciones F_i para $i = 1,2,3$ están definidas para $L > 0, S > 0, I > 0$. Es decir para $i = 1,2,3$ tenemos

$$F_i : \Omega^0 \to \mathbb{R}$$

$$(L,S,I) \longrightarrow F_i(L,S,I)$$

donde

$$\Omega^0 = \{(L,S,I) \in \mathbb{R}^3 : L > 0, S > 0, I > 0\}$$

i.e. Ω^0 es el dominio de las F_i para cada $i = 1,2,3$.

2.21.1. Existencia y unicidad de las soluciones

Para la demostración de existencia y unicidad de (2.28), desarrollaremos con las funciones F_i para $i = 1,2,3$ definidas del sistema 2.29 las cuales están definidas en

$$\Omega^0 = \{(L,S,I) \in \mathbb{R}^3 : L > 0, S > 0, I > 0\}$$

Consideramos para $U = \Omega^0$, y la función

$$F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(L,S,I) \longrightarrow F(L,S,I)$$

donde

$$F(L,S,I) = (F_1(L(t),S(t),I(t)), F_2(L(t),S(t),I(t)), F_3(L(t),S(t),I(t)))$$

y $\omega(t) = (L(t), S(t), I(t))$ así tenemos el siguiente PVI asociado a ω y F.

$$\begin{cases} \omega' = F(t, \omega) \\ \omega(0) = (L(0), S(0), T(0)) \end{cases} \tag{2.30}$$

con $L(0) > 0$, $S(0) > 0$, $I(0) > 0$.

Notamos que el PVI 2.30 es equivalente a nuestro modelo definido en el sistema 2.28. Por el teorema de 2.3.

2.22. Existencia y Unicidad

Para demostrar la existencia y unicidad del sistema de EDO para el PVI 2.30 utilizaremos la proposición 2.10 y el Teorema 2.31.

Lema 2.74. *Sea una* $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

son continuas y tienen derivadas parciales $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_k}$ *que existen y son continuas en* $\mathbb{R}^n_+$ *para todo* $j, k = 1, 2, \ldots, n$. *Entonces* F *es localmente Lipschitz continua en* $\mathbb{R}^n_+$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3$ y sean las funciones continuas positivas $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)), x = (x_1, x_2, x_3)$. Además

$$\begin{cases} F_1 = & \beta S - (\pi(L)L + \mu L) \\ F_2 = & \pi(L)L + \rho I - (\sigma SI + \nu S) \\ F_3 = & \sigma SI - (\nu I + \alpha I + \rho I) \end{cases} \tag{2.31a}$$

Ahora se procederemos analizar las derivadas parciales de cada función.

- Sea $F_1 = \beta S - (\pi(L)L + \mu L)$
  $\dfrac{\partial}{\partial L}F_1 = -\pi'(L)L - \pi(L) - \mu, \dfrac{\partial}{\partial S}F_1 = \beta, \dfrac{\partial}{\partial I}F_1 = 0$
  donde: $\dfrac{\partial F_1}{\partial L}, \dfrac{\partial F_1}{\partial S}, \dfrac{\partial F_1}{\partial I}$ son continuas.
- Sea $F_2 = \pi(L)L + \rho I - (\nu S + \sigma SI)$
  $\dfrac{\partial}{\partial L}F_2(L, S, I) = \pi'(L)L + \pi(L), \dfrac{\partial}{\partial S}F_2(L, S, I) = -\nu - \sigma I, \dfrac{\partial}{\partial I}F_2(L, S, I) = \rho - \sigma S$
  donde: $\dfrac{\partial F_2}{\partial L}, \dfrac{\partial F_2}{\partial S}, \dfrac{\partial F_2}{\partial I}$ son continuas.

- Sea $F_3 = \sigma SI - \nu I - \alpha I - \rho I$
  $\frac{\partial}{\partial L} F_3(L,S,I) = 0$
  $\frac{\partial}{\partial S} F_3(L,S,I) = \sigma I$
  $\frac{\partial}{\partial I} F_3(L,S,I) = \sigma S - (\nu + \alpha + \rho)$
  Donde: $\frac{\partial F_3}{\partial L}$, $\frac{\partial F_3}{\partial S}$, $\frac{\partial F_3}{\partial I}$ son continuas.

Por lo tanto F es localmente lipschitz continua en $\mathbb{R}^3_+$ Concluimos que existen derivadas parciales continuas cumple 2.10.

□

Demostraremos el teorema (2.31)

Teorema 2.75. *Sea una función localmente lipschitz continua $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3$ para cada $j = 1, 2, 3$ y satisface $F_j(x) \geqslant 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^3_+,\ x_j = 0$. Entonces para cada $x_0 \in \mathbb{R}^3_+$ existe una única solución de $X' = F(X)$ con $X(0) = X_0$ en $\mathbb{R}^3_+$ donde esta definida en algún intervalo $\langle 0, b]$ con $b \in \langle 0, \infty]$. Ademas todas las soluciones del sistema son eventualmente acotadas uniformemente.*

Demostración. El primer lugar, mostraremos que la condición del teorema se satisface.

- Sea $F_1 = \beta S - \pi(L)L - \mu L$
  Sea $S > 0$ y $I > 0$
  Para $F_1(0, L, I)$ tenemos $F_1 = \beta S \geqslant 0$
- Sea $F_2 = \pi(L)L - \nu S + \rho I - \sigma SI$
  Sea $L > 0$ y $I > 0$
  Para $F_2(L, 0, I)$ tenemos $F_2 = \pi(L)L + \rho I \geqslant 0$
- Sea $F_3 = \sigma SI - \nu I - \alpha I - \rho I$
  Sea $L > 0$ y $S > 0$
  Para $F_3(L, S, 0)$ tenemos $F_3 \geqslant 0$

$\therefore F_j(L, S, 0) > 0$ y $j = 1, 2, 3$ □

$$\text{Si} \qquad b < \infty \qquad \text{entonces} \qquad , \lim \sup_{0 \leqslant t \leqslant b} \sum_{j=1}^{n} x_j(t) = \infty$$

Con el siguiente teorema probaremos que lo satisface. Sea $I = \langle 0, b]$ con $b \in \langle 0, \infty]$
Si suponemos que $b < \infty$ entonces

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant b} (L(t) + S(t) + I(t)) = \infty \tag{2.32}$$

Demostración. Suponemos que $b < \infty$ entonces para el modelo 2.28 tenemos.

$$L' \leqslant \beta S$$
$$S' \leqslant \pi(L)L + \rho I - \sigma SI \leqslant \pi(0)L + \rho I - \sigma SI$$
$$I' \leqslant \sigma SI$$

$n = \text{máx}\{\rho, \pi(0), \beta\}$ entonces

$$L' + S' + I' \leqslant n(L + S + I)$$
$$\frac{(L + S + I)'}{L + S + I} \leqslant n$$

Integrando en ambos lados $0 \leqslant \tau \leqslant t$

$$\ln(L(t) + S(t) + I(t)) - \ln(L(0) + S(0) + I(0)) \leqslant nt \leqslant C \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

Tomando la exponencial en ambos lados de la desigualdad

$$e^{\ln(L(t)+S(t)+I(t))-\ln(L(0)+S(0)+I(0))} \leqslant e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

$$\frac{e^{\ln(L(t)+S(t)+I(t))}}{e^{\ln(L(0)+S(0)+I(0))}} \leqslant e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

$$\frac{L(t) + S(t) + I(t)}{L(0) + S(0) + I(0)} \leqslant e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

entonces

$$L(t) + S(t) + I(t) \leqslant (L(0) + S(0) + I(0))e^{nt} \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant b} (L(t) + I(t) + S(t)) \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant b} (L(0) + I(0) + S(0))e^{nt}$$

Luego para algún $C > 0$

$$\lim \sup_{0\leqslant t\leqslant b} (L(t) + S(t) + I(t)) \leqslant C \qquad \forall t \in [0, b\rangle$$

de aquí,

$$\lim \sup_{0\leqslant t\leqslant b} (L(t) + S(t) + I(t)) < +\infty \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

$\therefore b = \infty$

Lo cual se contradice 2.32 por el teorema enunciado, por lo tanto tiene única solución, y ademas estan definidas en $[0, \infty\rangle$

□

2.22.1. Acotación de las Soluciones

En esta parte vamos a demostrar que el sistema es débilmente disipativo presentado en 2.17.

Demostración. Vamos a definir $V = L + \xi(S + I)$, donde ξ sera determinado después. Luego, usando el sistema 2.28 tenemos:

$$V' = \beta S - (\pi(L)L + \mu L) + \xi(\pi(L)L + \rho I - \delta SI - \nu S\delta SI + \nu I - (\alpha I + \rho I))$$

$$V' = \beta S - (\pi(L)L + \mu L) + \xi(\pi(L)L - (\nu S + \nu I + \alpha I))$$

$$\Rightarrow V' = (\beta - \xi\nu)S + [-\xi(\nu + \alpha)I + ((\xi - 1)\pi(L) - \mu)]$$

Por elección $\xi = \dfrac{\beta}{\nu} + 1$, tenemos

$$\begin{aligned} V' = &\quad S(\beta - (\frac{\beta}{\nu} + 1)\nu) + [\pi(L)(\frac{\beta}{\nu} + 1 - 1) - \mu]L - \xi(\nu + \alpha)I \\ V' = &\quad S(\beta - (\beta + 1)\nu) + [\pi(L)(\frac{\beta}{\nu}) - \mu]L - \xi(\nu + \alpha)I \\ V' = &\quad (\frac{\beta}{\nu}\pi(L) - \nu)L - \xi(\nu + \alpha)I - \nu S \end{aligned}$$

Como sabemos que $\pi(L) \to 0$ como $L \to \infty$, tenemos que para cada $\epsilon > 0$ existe algún $L^\sharp > 0$ tal que para todo $L \geqslant L^\sharp$, $\pi(L) < \epsilon$. Entonces tenemos que dividir la prueba en dos casos.

Caso 1 $L \geqslant L^\sharp$

Por la ecuación (2.22.1) tenemos

$$V' \leqslant -\nu S + (\frac{\beta}{\nu}\epsilon - \mu)L$$

Si $\mu - \dfrac{\beta}{\nu}\epsilon > \dfrac{\mu}{2}$

$$-(\mu - \frac{\beta}{\nu}\epsilon) < -\frac{\mu}{2}$$

$$(\frac{\beta}{\nu}\epsilon - \mu)L - \nu S < -\nu S - \frac{\mu}{2}L$$

Si $L \geqslant L^\# \to -L \leqslant -L^\#$ entonces

$$V' \leqslant -\nu S - \frac{\mu}{2}L < -\frac{\mu}{2}L^\#$$

y si tomamos $L^\# > \dfrac{2}{\mu}$ entonces $-L \leqslant -L^\# < -\dfrac{2}{\mu}$

$$V' \leqslant -\nu S - \frac{\mu}{2}L < -\frac{\mu}{2}(\frac{2}{\mu}) = 1$$

Así que si tomamos $L^\sharp > \dfrac{2}{\mu}$, entonces tenemos $V' < -1$

Caso 2 $L < L^\sharp$

Usando $\xi = \dfrac{\beta}{\nu} + 1$, de nuevo por la ecuación (2.22.1) tenemos

$$\begin{aligned} V' &\leqslant \frac{\beta}{\nu}\pi(L)L - \xi(\nu+\alpha)I - (\nu S + \mu L) \\ &\leqslant \frac{\beta}{\nu}\pi(0)L^\sharp - \nu S - \xi(\nu+\alpha)I \end{aligned}$$

Desde que $V = L + \xi(S + I)$

$$\frac{1}{\xi}(V - L) - I = S$$

$$\begin{aligned} V' &\leqslant \frac{\beta}{\nu}\pi(0)L^\sharp - \xi(\nu+\alpha)I - \nu\left(\frac{1}{\xi}(V-L) - I\right) \\ V' &\leqslant \nu\frac{L}{\xi} + \nu I + \frac{\beta}{\nu}\pi(0)L^\sharp - (\frac{\beta}{\nu}+1)(\nu+\alpha)I - \nu\frac{V}{\xi} \\ &\leqslant -\frac{\nu}{\xi}V + \frac{\nu}{\xi}L + \nu I + \frac{\beta}{\nu}\pi(0)L^\sharp - \left(\frac{\beta}{\nu}+1\right)(\nu+\alpha)I \end{aligned}$$

Simplificando y dejando de lado los términos negativos (que implica I), obtenemos

$$\Rightarrow V' \leqslant \frac{-\nu}{\xi}V + \left(\frac{\nu}{\xi} + \frac{\beta}{\nu}\pi(0)\right)L^\sharp$$

Luego encontramos algún $V^\sharp$ tal que $V' < -1$ siempre que $V \geqslant V^\sharp$. Por lo tanto en el otro caso $V' < -1$. Esto implica que $\lim_{t\to\infty} InfV(t) \leqslant V^\sharp$. De lo contrario desde $V' < -1$ para todo tiempo suficientemente grande y V se convertirá en negativo en un tiempo finito, esto nos lleva una contradicción. aún más desde, $V \geqslant L + S + I$, y han demostrado que nuestro sistema es débilmente disipativo 2.17.

□

2.23. Análisis de Estabilidad

En el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático presentado en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que representa la dinámica del comportamiento de la transmisión del hongo patógeno, encontramos que bajo ciertos condiciones el modelo es estable. En el intento de representar ciertas situaciones realistas de la naturaleza y la biología el cambio estos parámetros varían y cambian la dinámica del sistema, ante ello surgen preguntas de interés ¿Se mantendrá los equilibrios bajo estas variaciones? ¿se mantendrán los equilibrios y las órbitas periódicas de los sistemas dinámicos con respecto a los parámetros? ¿Cómo predecir los cambios cualitativos en el comportamiento del sistema (bifurcaciones) que ocurren en estos puntos de equilibrio? ¿Cómo calcular los límites de estabilidad de equilibrios y los ciclos límite en el espacio de parámetros?

2.23.1. Existencia de Estados Estable

En esta sección probaremos los puntos libres de enfermedad y su interpretación ecológica. De nuestro modelo principal (2.28), analizaremos los estados estables libre de enfermedad.

Teorema 2.76. *Sea el sistema (2.33) y también sean sus puntos críticos expresados en (2.36)(2.38)*

a. El estado estable trivial $(0,0,0)$ *existe en todo el tiempo.*

b. El estado de libre enfermedad $(\widehat{L},\widehat{S},0)$ *existe si y solo si* $R_0>1$ *siempre que* $\dfrac{\beta}{\nu}>1$.

c. El estado infeccioso (L^*,S^*,I^*) *existe si y solo si* $R_0>1$ *y* $\pi(L^*)L^*>\nu S^*$.

d. Sea $R^{par}(\widehat{L})>1$, *entonces hay al menos un estado estacionario con las larvas infectadas.*

e. Sea $R^{par}(\widehat{L})<1$, *entonces no hay dos estados estables con larvas infectadas.*

Demostración.

a. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\beta S-(\pi(L)L+\mu L) = 0 \tag{2.33a}$$

$$\pi(L)L+\rho I-(\nu S+\sigma SI) = 0 \tag{2.33b}$$

$$\sigma SI-(\nu I+\alpha I+\rho I) = 0 \tag{2.33c}$$

En la ecuación (2.33c) tenemos

$$(\sigma S-\nu-\alpha-\rho)I=0$$

Para esta ecuación tenemos

$$I=0 \qquad \text{ó} \qquad S=\frac{\nu+\alpha+\rho}{\sigma} \tag{2.34}$$

caso 1

Aquí se discute el caso libre de enfermedad,es decir $\langle\widehat{L},\widehat{S},0\rangle$ i.e. $\widehat{I}=0$ en la ecuación (2.33b) y (2.33c)

$$-\mu\widehat{L}+\beta\widehat{S}-\pi(\widehat{L})\widehat{L}=0$$

$$-\nu\widehat{S}+\pi(\widehat{L})\widehat{L}=0$$

resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\widehat{S}=\left(\frac{\mu}{\beta-\nu}\right)\widehat{L} \qquad \text{siempre que se cumpla} \qquad \beta-\nu>0 \tag{2.35}$$

La existencia del modelo matemático propuesto se garantiza si los puntos críticos son necesariamente no negativos. Luego de 2.35 la desigualdad $\tilde{R}=\dfrac{\beta}{\mu}>1$ se interpreta como la tasa de

supervivencia de la larva inmune.

Para hallar el valor de $\widehat{L}$, se sustituye el valor de $\widehat{S}$ en la ecuación (2.33a).

$$\beta\left(\frac{\mu}{\beta-\nu}\right)\widehat{L}-(\pi(\widehat{L})\widehat{L}+\mu\widehat{L})=0$$

$$\widehat{L}\left[\frac{\beta\mu}{\beta-\nu}-\pi(\widehat{L})-\mu\right]=0$$

□

Entonces

$$\widehat{L}=0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\beta\mu}{\beta-\nu}-\mu=\pi(\widehat{L})$$

b. Para este subcaso $\widehat{S}=0$, en la ecuación (2.33a)

$$\beta\widehat{S}=0, \qquad \beta\neq 0 \qquad \Rightarrow \widehat{S}=0$$

entonces obtenemos el estado trivial

$$(\widehat{L},\widehat{S},\widehat{I})=(0,0,0) \tag{2.36}$$

Sub caso 2

Con el fin de obtener el estado no trivial, se considera $\widehat{L}\neq 0$ y

$$\widehat{S}=\left(\frac{\mu}{\beta-\nu}\right)\widehat{L}, \qquad \beta-\nu>0 \tag{2.37}$$

Entonces obtenemos,

$$\left(\widehat{L},\ \left(\frac{\mu}{\beta-\nu}\right)\widehat{L},\ 0\right) \qquad \text{siempre que} \qquad \frac{\beta}{\nu}>1 \tag{2.38}$$

Condición Umbral

Como $\widehat{L}>0$ entonces $\pi(\widehat{L})<\pi(0)$, π es decreciente.

$$\pi(\widehat{L})=\frac{\mu\nu}{\beta-\nu} \tag{2.39a}$$

$$\frac{\mu\nu}{\beta-\nu}<\pi(0), \qquad \beta-\nu>0$$

$$\mu\nu<(\beta-\nu)\pi(0)$$

$$\mu\nu<\beta\pi(0)-\nu\pi(0)$$

$$\frac{\beta}{\nu}\frac{\pi(0)}{(\mu-\pi(0))}>1$$

$$\mathcal{R}_0=\frac{\beta}{\nu}\left(\frac{\pi(0)}{\mu-\pi(0)}\right) \qquad es \quad la \quad cantidad \quad umbral. \tag{2.40}$$

Resultados

De lo anterior obtenemos la cantidad mínima de cambio llamada cantidad umbral y tiene dos factores:

Como $\pi(0)$ es la tasa de cambio del estado cuando la población es baja.
Entonces $\dfrac{\pi(0)}{\mu - \pi(0)}$ es la tasa del anfibio que logra sobrevivir después de la metamorfosis.

Tasas	Interpretación
$\dfrac{\beta}{\nu}$	Tasa de supervivencia de la larva susceptible
$\dfrac{\pi(0)}{\mu - \pi(0)}$	Tasa que logra sobrevivir a la metamorfosis

Cuadro 2.3: Interpretación de tasa de supervivencia y metamorfosis

.

c. Analizamos ahora el equilibrio (L^*, S^*, I^*) con $L^*, S^*, I^* \neq 0$, sumamos 2.33a y 2.33b

$$\pi(L)L + \rho I^* - (\sigma S^* I^* + \nu S^*) = 0$$

$$(\beta - \nu)S^* - \mu L^* + (\rho - \sigma S^*)I^* = 0$$

Ahora usamos el valor de $S^* = \dfrac{\nu + \alpha + \rho}{\sigma}$ siempre que $\sigma \neq 0$ de (2.34)
Obtenemos:

$$(\beta - \nu)\left(\frac{\nu + \alpha + \rho}{\sigma}\right) + \left(\rho - \sigma\left(\frac{\nu + \alpha + \rho}{\sigma}\right)\right) I^* - \mu L^* = 0$$

Multiplicamos a todo por σ

$$(\beta - \nu)(\nu + \alpha + \rho) + \sigma(\rho - \nu - \alpha - \rho)I^* - \sigma\mu L^* = 0$$

Despejando I^*

$$I^* = \frac{\sigma\mu L^* - (\beta - \nu)(\nu + \alpha + \rho)}{\sigma(-\nu - \alpha)}$$

Ahora nosotros necesitamos encontrar el valor de L^*. Sustituyendo el valor de S^* y I^* en la primera ecuación del modelo 2.33a se tendrá.

$$-(\mu + \pi(L^*))L^* + \beta\left(\frac{\rho + \nu + \alpha}{\sigma}\right) = 0$$

$$\frac{\beta}{\sigma}(\rho + \alpha + \nu) = \beta S^* = (\mu + \pi(L^*))L^* \tag{2.41}$$

De 2.34

$$(\pi(L^*)+\mu)L^* = \beta S^* \Rightarrow \frac{\sigma(\mu+\pi(L^*))L^*}{\beta(\alpha+\rho+\nu)} = 1 \tag{2.42}$$

Ahora se resuelve la ecuación (2.41) numéricamente (dependiendo en la estructura de la función $\pi(L)$) para encontrar el valor de L^*. Por lo tanto en este caso, el equilibrio esta dado por

$$\left(L^*, \frac{\nu+\alpha+\rho}{\sigma}, \frac{\sigma\mu L^* - (\beta-\nu)(\nu+\alpha+\rho)}{\sigma(-\nu-\alpha)}\right)$$

L^* y S^* diferentes de cero.

De la ecuación (2.33b) se tiene

$$\pi(L^*)L^* - \nu S^* + I^*(\rho - \sigma S^*) = 0$$

Despejo I^*

$$I^* = \frac{\nu S^* - \pi(L^*)L^*}{\rho - \sigma S^*} \tag{2.43}$$

De (2.41) tenemos $\sigma S^* = \nu + \alpha + \rho$ para luego reemplazar en I^*

$$I^* = \frac{\nu S^* - \pi(L^*)L^*}{\rho - \nu - \alpha - \rho} \tag{2.44}$$

Cancelando ρ y factorizando el signo negativo obtenemos:

$$I^* = \frac{\pi(L^*)L^* - \nu S^*}{\nu + \alpha} \tag{2.45}$$

Esto implica que para $I^* > 0$ siempre que $\pi(L^*)L^* > \nu S^*$

Para que exista un estado estable infectado debe cumplir la siguiente condición

$$\frac{\sigma S^*}{\nu+\alpha+\rho} = 1 \tag{2.46}$$

Tasas	Interpretación
$\frac{1}{\nu+\alpha+\rho}$	Es el tiempo promedio (unidades de tiempo) que pasa la larva al estado infecciosa.
σS^*	Es la tasa promedio en que las larvas infectadas infectan a las larvas susceptibles.

Cuadro 2.4: Cuadro de interpretación de las tasas.

Los términos negativos en la ecuación nos dice que cada larva infecciosa pasa en promedio $\frac{1}{\nu+\alpha+\rho}$ unidades de tiempo, en esta clase el periodo infeccioso se reduce de manera efectiva

debido a que mueren mientras son infectadas, por la enfermedad o por otros factores.
Por lo tanto, si asumimos que toda la población es susceptible S=1, a continuación , el número promedio de nuevas infecciones por una larva infecciosa se determina por la tasa de transmisión multiplicando por el periodo infeccioso.

$$X = \sigma\left(\frac{1}{\nu+\alpha+\rho}\right)$$

Este valor es similar o mas pequeño que el R_0, para la población cerrada.

R^{par} es la tasa de reemplazo de la enfermedad infecciosa de la larva infectada a la larva susceptible S^*. Si X_0 es la tasa de reemplazo para el número inicial de larvas susceptibles S_0^* , llamaremos tasa de sustitución inicial de la larva infectada a la larva susceptible cuando tienen densidad S^*. Si

$$R^{par}(S^*) = \frac{\sigma\widehat{S}}{\nu+\alpha+\rho} = 1 \tag{2.47}$$

de un larva infecciosa puede reemplazar en sí misma, siempre que el número de larvas susceptibles, sea con densidad S^* en todo el tiempo . Por lo tanto, $\sigma\left(\frac{1}{\nu+\alpha+\rho}\right)$ se puede interpretar como el número de larvas susceptibles necesaria con el fin de que el promedio de larva infecciosas puede sustituirse a sí mismo. Las unidades de la expresión $\frac{1}{\nu+\alpha+\rho}$ es $\frac{1}{t}$ y σ es también $\frac{1}{t}$. El producto nos da 1.

La tasa de sustitución en la densidad de larvas susceptibles esta dado por

$$R^{par}(\widehat{S}) = \frac{\sigma\widehat{S}}{\nu+\alpha+\rho} \tag{2.48}$$

d. De (2.42) y el hecho que $\pi(\widehat{L})\widehat{L}+\mu\widehat{L} > \beta\widehat{S}$. La condición $\mathcal{R}^{par}(\widehat{L}) > 1$ puede escribirse como

$$\frac{\sigma(\pi(\widehat{L})+\mu)\widehat{L}}{\beta(\nu+\alpha+\rho)} > 1$$

$$(\pi(\widehat{L})\widehat{L}+\mu\widehat{L}) > \beta\left(\frac{\nu+\alpha+\rho}{\sigma}\right)$$

e. La condición $\mathcal{R}^{par}(\widehat{L}) < 1$, se puede escribirse como

$$\frac{\sigma(\pi(\widehat{L})+\mu)\widehat{L}}{\beta(\nu+\alpha+\rho)} < 1$$

$$(\pi(\widehat{L}+\mu\widehat{L})\widehat{L}) < \beta\left(\frac{\rho+\nu+\alpha}{\sigma}\right)$$

Si $\mu\widehat{L}+\pi(\widehat{L})\widehat{L}$ es una función estrictamente creciente para $L \geqslant 0$, entonces no hay un estado estacionario en $[0, \widehat{L}]$.

Ahora asumimos que esa función es no creciente y que existe al menos una solución $\overline{L} > 0$ de la ecuación 2.41. Podemos cambiar $\breve{\mathrm{L}}_1 \in \langle 0, L_1]$. Si $\breve{\mathrm{L}}_1 = L_1$ entonces tenemos dos soluciones que contienen multiplicidades. Ellos son estados estacionarios con la infección si $\breve{\mathrm{L}}_1 > \widehat{L}$, otra manera que el estado estacionario no exista con infecciones.

Si $\breve{\mathrm{L}}_1 < L_1$, entonces podemos cambiar algún $\overline{L} \in (\breve{\mathrm{L}}_1, L_1)$esto implica

$$\mu\bar{L}_1 + \pi(\bar{L}_1)\bar{L}_1 > \pi(\breve{L}_1)\breve{L}_1 + \mu\breve{L}_1 = \beta\left(\frac{\alpha+\rho+\nu}{\sigma}\right)$$

$$\mu\bar{L}_1 + \pi(\bar{L}_1)\bar{L}_1 > \beta\left(\frac{\alpha+\rho+\nu}{\sigma}\right)$$

Por lo tanto, por el teorema de valor intermedio existe una solución $\widehat{L}_2 \in (\widehat{L}_1, \overline{L}_1)$ de (2.48). Por el teorema anterior, $\widehat{L}_1$ y $\widehat{L}_2$ son componentes del equilibrio población infecciosa positiva.

Teorema 2.77. *Sea $L^* > 0$ es una solución de la ecuación 2.41 entonces L^* satisface la ecuación 2.46 si y solo si $L^* < \hat{L}$ con $\hat{L} = \pi^{-1}\left(\frac{\nu\mu}{\beta-\nu}\right)$.*

Demostración. Sea $L^* < \hat{L}$. Dado que $\pi(L)$ es una función estrictamente decreciente, Esto es equivalente a

$$\pi(L^*) > \pi(\hat{L})$$

Dado que $\pi(\hat{L}) = \dfrac{\nu\mu}{\beta-\nu}$, tenemos también la expresión equivalente

$$\pi(L^*) > \frac{\nu\mu}{\beta-\nu}$$

Multiplicando ambos lados con L^* y re-organizando los términos implicados

$$(\beta-\nu)\pi(L^*)L^* > \nu\mu L^*$$

En el estado estacionario infectado (L^*, S^*, I^*) la ecuación $L^{'}$ del modelo (1) se puede escribir como

$$-\pi(L^*)L^* + \beta S^* = \mu L^*$$

Asi obtenemos

$$\pi(L^*)L^*(\beta-\nu) > \nu(-\pi(L^*) + \beta S^*)L^*)$$

$$L^*\pi(L^*) > \nu S^*$$

Del mismo modo, si $L^* \geqslant \hat{L}$ entonces la ecuación 2.47 no será satisfecha. □

También está claro que la ecuación 2.41 tiene una o tres soluciones dependiendo de la elección del parámetro $\nu, \alpha, \rho, \sigma$ y β.

Ahora vamos a hablar de la estabilidad del estado trivial $(0, 0, 0)$ y la persistencia de la población. La persistencia 2.11 de una población se define como sigue.

Definición 2.78. *La población $(L(t), S(t), I(t))$ se llama persistente uniformemente fuerte si existe $\epsilon > 0$, independiente de los datos iniciales, de tal manera que para todas las soluciones del modelo 2.28 que satisface $L(0) > 0$, $S(0) > 0$, $I(0) > 0$ tenemos $L(t), S(t), I(t) > \epsilon$ para todo t suficientemente grande t. Esto es persistencia uniformemente robusta, si el modelo 2.28 depende de forma continua de un parámetro $\eta \in \mathcal{R}$. Si η_0 es un parámetro, y una persistencia uniforme sostiene con $\phi(t, S, L, I)$ reemplazado por $\phi(t, S, L, I, \eta)$ donde $\phi(t, x)$ es semi flujo, para todo η en la vecindad de η_0. Entonces decimos que el sistema 2.28 es persistente uniformemente robusta.*

Teorema 2.79. *a. El estado trivial es localmente asintóticamente estable si y solo si $\mathcal{R}_0 < 1$.*

b. Asumimos que $\mathcal{R}_0 > 1$ y $\mathcal{A} = \mu + \pi(\hat{L}) + \pi^{'}(\hat{L})\hat{L} > 0$. Entonces el estado estable $(\hat{L}, \hat{S}, 0)$ es localmente asintóticamente estable si y solo si $\hat{S} < \dfrac{\nu + \alpha + \rho}{\sigma}$ or $\hat{S} < S^*$.

c. Asumimos que $\mathcal{R}_0 > 1$ y $\mathcal{A} = \pi(L^*) + \pi^{'}(L^*)L^* + \mu > 0$. Entonces el equilibrio endémico es localmente asintóticamente estable.

$$\liminf_{t\to\infty} \text{mín}(S^\eta(t), I^\eta(t)) > \epsilon, \quad \eta \in \mathcal{N}$$

para todas la soluciones $(L^\eta(t), S^\eta(t), I^\eta(t))$ del modelo 2.28 correspondiente a η con $(S^\eta(0) + I^\eta(0)) > 0$.

Demostración. La matriz Jacobiana asociada con nuestro modelo 2.28 es dado por

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} -(\pi'(L)L + \pi(L) + \mu) & \beta & 0 \\ \pi(L) + \pi'(L)L & -(\nu + \sigma I) & -\sigma S + \rho \\ 0 & \sigma I & \sigma S - (\nu + \alpha + \rho) \end{bmatrix}$$

a) Esta matriz Jacobiana en el estado estable $(0; 0; 0)$ es

$$\mathcal{J}_1 = \begin{bmatrix} -(\mu + \pi(0)) & \beta & 0 \\ \pi(0) & -\nu & \rho \\ 0 & 0 & -(\alpha + \rho + \nu) \end{bmatrix}$$

Los tres valores propios son $\lambda_1 = -(\nu+\alpha+\rho)$, y los otros dos son de la matriz,utilizando bloques de Gauss Jordan

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\pi(0) - \mu & \beta \\ \pi(0) & -\nu \end{bmatrix}$$

Par analizar la estabilidad hallamos la determinante y la traza

$$traza(A_1) = -\nu - \mu - \pi(0)) < 0$$

$$det(A_1) = \nu\mu - \beta\pi(0) + \nu\pi(0) + = -(\beta - \nu)\pi + \nu\mu(0) > 0 \; siempre \; que \; (\beta - \nu)\pi(0) < \nu\mu$$

Así que los estado estables $(0, 0, 0)$ es localmente asintóticamente estable si y sólo si $(\beta - \nu)\pi(0) < \nu\mu$

b) $\mathcal{R}_0 > 1$ analizamos para un $(\hat{L}, \hat{S}, 0)$ es

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} -(\pi'(\hat{L})\hat{L} + \pi(\hat{L}) + \mu) & \beta & 0 \\ \pi'(+\pi(\hat{L}) + \hat{L})\hat{L} & -\nu & \rho - \sigma\hat{S} \\ 0 & 0 & \sigma\hat{S} - (\nu + \alpha + \rho) \end{bmatrix}$$

Uno de los vectores propios es $\lambda_1 = \sigma\hat{S} - (\nu + \alpha + \rho)$, es negativo si $\hat{S} < \dfrac{\nu + \alpha + \rho}{\sigma}$. Los otros dos auto valores son de la forma.

$$\mathcal{J}_1 = \begin{bmatrix} -(\pi'(\hat{L})\hat{L} + \pi(\hat{L}) + \mu) & \beta \\ \pi(\hat{L}) + \pi'(\hat{L})\hat{L} & -\nu \end{bmatrix}$$

Analizando por bloques de Gauss Jordan reducimos a una matriz de dos por dos.
$Traza(J_1) = -\pi'(\hat{L})\hat{L} - \pi(\hat{L}) - \mu - \nu < 0$ siempre que $-\mu + \pi'(\hat{L})\hat{L} + \pi(\hat{L}) > 0$
$Det(\mathcal{J}_{1)} = (\pi'(\hat{L})\hat{L} + \pi(\hat{L}) + \mu\nu - \beta(\pi'(\hat{L})\hat{L} + \pi(\hat{L}))$
$Det(\mathcal{J}_1) = \hat{L}\pi'(\hat{L})(\nu - \beta) > 0$ siempre que $\pi'(\hat{L})\beta - \nu = \nu\mu$

c) El equilibrio endémico esta dado por $\left(L^*, \dfrac{\nu + \alpha + \rho}{\sigma}, \dfrac{\sigma\mu L^* - (\beta - \nu)(\rho + \alpha + \nu)}{\sigma(-\nu - \alpha)}\right)$ dondeL^* es la solución al sistema $(\mu + \pi(L))L = \frac{\beta}{\sigma}(\rho + \alpha + \nu)$
La matriz Jacobiana en este estado estable esta dado por

$$\mathcal{J}^* = \begin{bmatrix} -(\pi'(L^*)L^* + \pi(L^*) + \mu) & \beta & 0 \\ \pi(L^*) + \pi'(L^*)L^* & -(\nu + \sigma I^*) & \rho - \sigma S^* \\ 0 & \sigma I^* & \sigma S^* - (\nu + \alpha + \rho) \end{bmatrix}$$

Desde que $\sigma S^* - \nu - \alpha - \rho = 0$ y $\rho - \sigma S^* = -(\nu + \alpha)$,por lo que obtenemos

$$\mathcal{J}^* = \begin{bmatrix} -\mathcal{A} & \beta & 0 \\ \mathcal{A} - \mu & -(\nu + \sigma I^*) & -(\nu + \alpha) \\ 0 & \sigma I^* & 0 \end{bmatrix}$$

Donde $\mathcal{A} = \pi'(L^*)L^* + \pi(L^*) + \mu$

El polinomio característico $\mathcal{P}(\lambda) = |\mathcal{J}^* - \lambda I_{3X3}, |$

$$|\mathcal{J}^* - \lambda\mathcal{I}| = \begin{bmatrix} -(\mathcal{A}+\lambda) & \beta & 0 \\ \mathcal{A}-\mu & -(\nu+\sigma I^*+\lambda) & -(\nu+\alpha) \\ 0 & \sigma I^* & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\nu+\sigma I^*+\mathcal{A}) + \lambda(\sigma I^*\mathcal{A} + \mathcal{A}\nu + \sigma\nu I^* + I^*\nu + \sigma\alpha I^* + \beta(\mathcal{A}-\mu)) - \sigma\mathcal{A}I^*(\nu+\alpha)$$

Por el criterio de Routh-Hurwitz tomado de la sección (1.3.1) de la Tesis de Pérez J. (2014).

Sea la ecuación característica de la forma

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ...a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Considera las siguientes expresiones por ecuaciones características con $n \leqslant 3$.

$a_0 = 1 > 0$

$a_1 = \nu + \sigma I^* + \mathcal{A} > 0$ siempre que $\mathcal{A} = +\pi(L^*) + \mu + \pi^{'}(L^*)L^* > 0$

$a_2 = \sigma I^*\mathcal{A} + \mathcal{A}\nu + \sigma\nu I^* + I^*\nu + \sigma\alpha I^* + \beta(\mathcal{A}-\mu) > 0$ siempre que $\mathcal{A} > 0$

$a_3 = \sigma\mathcal{A}I^*(\nu+\alpha) > 0$ siempre que $\mathcal{A} > 0$

$a_4 = 0$

$$\Delta_1 = a_1 = \nu + \sigma I^* + \mathcal{A} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nu+\sigma I^*+\mathcal{A} & \sigma\mathcal{A}I^*(\nu+\alpha) \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = (\nu+\sigma I^*+\mathcal{A})a_2 - \sigma\mathcal{A}I^*(\nu+\alpha)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nu+\sigma I^*+\mathcal{A} & \sigma AI^*(\nu+\alpha) & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & \nu+\sigma I^*+\mathcal{A} & \sigma\mathcal{A}I^*(\nu+\alpha) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = (\nu+\sigma I^*+\mathcal{A})[a_2\sigma\mathcal{A}I^*(\nu+\alpha)] - \sigma\mathcal{A}I^*(\sigma\mathcal{A}I^*(\nu+\alpha))$$

$$\Delta_3 = \sigma A\mathcal{A}I^*[(\nu+\alpha+\sigma I^*)a_2(\nu+\alpha) - \sigma\mathcal{A}I^*(\nu+\alpha)]$$

$$\Delta_3 = \sigma\mathcal{A}I^*[(\nu+\alpha)[\underbrace{(\nu+\mathcal{A}+\sigma I^*)a_2 - \sigma\mathcal{A}I^*}_{\eta}]]$$

$\eta = (\nu + A + \sigma I^*)a_2 - \sigma\mathcal{A}I^* = \nu a_2 + \mathcal{A}a_2 + \sigma I^* a_2 - \sigma\mathcal{A}I^*$

$\eta = a_2(\nu + \mathcal{A}) + \sigma I^*(a_2 - \mathcal{A})$ dado que siempre que $\mathcal{A} > 0$ ya que $a_2 > \mathcal{A}$ $\rightarrow \eta > 0$

Por lo tanto $\Delta_3 > 0$

Para el análisis de estabilidad citaremos a [20] utilizaremos el Criterio Hurwitz donde las matrices menores Δ_1, Δ_2, Δ_3 son positivas asumiendo de la estructura de $\pi(L)L)$ la expresión $\mathcal{A} = (\pi(L)L)'_{L=L^*} + \mu > 0$.Por lo tanto para el caso de tres puntos de equilibrio, $\mu - \mathcal{A} = -(\pi(L)L)'_{L=L^*} > 0$. De este modo el equilibrio endémico es estable.

□

Teorema 2.80. *$L(t), S(t)$ y $I(t)$ converge a cero cuando $t \to \infty$ si y solo si $\mathcal{R}_0 < 1$.*

Demostración. Utilizaremos el Principio de Invarianza "La Salle"dado en 2.63 para probar el teorema planteado.

CASO 1. $(\beta - \nu) > 0$

Consideramos la función de Liapunov $V = L + S + I$. Desde $L, S, I \geqslant 0$, así que $V \geqslant 0$ es a función continuamente diferenciable con $V(0) = 0$. Ahora consideramos

$$\begin{aligned} V^* &= \dot{L} + \dot{S} + \dot{I} \\ &= \beta S - (\pi(L)L + \mu L) + \pi(L)L - \nu S + \rho I - \sigma IS + \sigma IS - (\nu I + \alpha I + \rho I) \\ &= (\beta - \nu)S - \mu L - (\nu + \alpha)I \leqslant 0 \end{aligned}$$

Definimos

$$E = \{(L, S, I) | (\beta - \mu)S - (\nu + \alpha)I - \mu L = 0\}$$

$$\begin{aligned} (\beta - \mu)S - (\nu + \alpha)I - \mu L &= 0 \\ \Rightarrow S &= \frac{(\nu + \alpha)I + \mu L}{\beta - \mu} \end{aligned}$$

Además L e I son no negativos y también $(\beta - \mu) < 0$, así se tiene que $S \leqslant 0$. Pero desde que la condición Spodrá ser no negativo y conseguimos un $S = 0$. Así como μ y $\nu + \alpha$ son positivos, Por lo tanto, debemos tener $L = I = 0$.

De esta manera $(0, 0, 0)$ en el único subconjunto E que es también uno de los estado de equilibrio y por lo que es el mayor subconjunto invariante E. Puesto que hemos mostrado anteriormente que todas las soluciones del sistema se limita, por lo tanto por el resultado anterior, todas las soluciones a el sistema dado a convergen $(0, 0, 0)$.

CASO 2. $(\beta - \nu) = 0$

Una vez más en cuenta $V = L + S + I$. En este caso tenemos

$$V^* = -\mu L - \nu I - \alpha I \leqslant 0$$

Defino

$$E = \{(L, S, I)| - \mu L - \nu I - \alpha I \leqslant 0\}$$

ya que

$$\begin{aligned} -(\nu + \alpha)I + \mu L = 0 \quad &\Rightarrow \quad L = \frac{-(\alpha + \nu)I}{\mu} \\ &\Rightarrow \quad L \leqslant 0 \end{aligned}$$

Así, desde la no negatividad de L, nosotros concluimos que $L = 0$ y así obtenemos $I = 0$ e $E = \{(0, S, 0) \geqslant 0\}$ Ya que $(0, S, 0)$, que obtenemos de la primera ecuación de nuestro modelo principal 2.28 $S = 0$.

En consecuencia $(0, 0, 0)$ es el único subconjunto invariante de E, por lo tanto, todas las soluciones acotadas del sistema dado convergerán a $(0, 0, 0)$.

CASO 3. $(\beta - \nu) > 0$

Consideramos la función de Liapunov $V = \beta(S + I) + \nu L$. Entonces

$$\begin{aligned} V^* &= \beta(\dot{S} + \dot{I}) + \nu\dot{L} \\ &= \nu(-\pi(L)L - \mu(L) + \beta S) + \beta(-\sigma SI - \nu S + \rho I + \pi(L)L) + \beta(-(\nu + \alpha + \rho)I + \sigma SI) \\ &= -\beta(\nu + \alpha)I - \nu\mu L + (\beta - \nu)\pi(L)L \leqslant (\beta - \nu)\pi(L)L - \nu\mu L \leqslant (-\nu\mu + (\beta - \nu)\pi(0))L \leqslant 0 \\ &= (-\beta(\nu + \alpha)I + (\beta - \nu)\pi(L)L - \nu\mu L \leqslant 0 \end{aligned}$$

Defino

$$E = \{(L, S, I)|(-\nu\mu L - \beta(\nu + \alpha)I + (\beta - \nu)\pi(L)L = 0\}$$

ya que

$$\begin{aligned} (-\nu\mu L - \beta(\nu + \alpha)I + (\beta - \nu)\pi(L)L &= 0 \\ -\nu\mu L + (\beta - \nu)\pi(L)L \leqslant -\nu\mu + (\beta - \nu)\pi(0) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Así que tenemos $I \leqslant 0$. Por lo tanto, de la no negatividad de I, concluimos que $I = 0$. Así que vamos a tener, ya sea $L = 0$ or $(\beta - \nu)\pi(L) - \nu\mu = 0$.

Note que si $L \neq 0$, entonces $L > 0$,o de la propiedad estrictamente decreciente de $\pi, \pi(L) < \pi(0)$, y por lo tanto

$$-\nu\mu + (-\nu + \beta)\pi(L) < -\nu\mu(\beta - \nu)\pi(0) \leqslant 0$$

En consecuencia $-\nu\mu(\beta - \nu)\pi(0) \leqslant< 0$ y la única posibilidad es $L = 0$ y entonces $(0, S, 0)$ es el único subconjunto de E. Una vez má desde la primera ecuación de nuestro modelo 2.28, $L' = \beta S$, lo que implica $L' = 0$ si y solo si if $S = 0$. Ya que $(0, 0, 0)$ es el único subconjunto invariante de E, por lo tanto, todas las soluciones acotada del sistema dado converger a $(0, 0, 0)$ por el Principio de Invarianza de Liapunov LaSalle (2.63).

□

2.24. El modelo de transmisión de la enfermedad para un caso especial

En esta sección analizaremos en un caso especial del modelo. Adimensionalizaremos el modelo. Asumimos que $\xi(1-\psi L)=\pi(L)$ con ξ ,$\tau>0$. También asumimos $\pi(L)=(1-L)$ para $L\leqslant 1$, $\pi(L)$ es estrictamente decreciente siempre y cuando sea estrictamente positivo. Definamos por simplicidad, adimensionalizaremos el sistema (2.28) mediante las siguientes transformaciones

$$\xi t=\tau \longrightarrow \xi dt=d\tau$$

$$L_\bullet=\psi L \longrightarrow dL_\bullet=\psi dL$$

$$S_\bullet=\psi S \longrightarrow \ dS_\bullet=\psi dS$$

$$I_\bullet=\psi I \longrightarrow \ dI_\bullet=\psi dI$$

$$L=\frac{L_\bullet}{\psi} \quad , \qquad S=\frac{S_\bullet}{\psi} \quad y \qquad I=\frac{I_\bullet}{\psi}$$

Entonces en la primera ecuación

$$L'=\beta S-\xi(1-\psi L)-\mu L$$

Realizamos mediante el uso de estas sustituciones,

$$\frac{1}{\psi}\frac{dL_\bullet}{dt}=\beta\frac{S_\bullet}{\psi}-\xi(1-L_\bullet)\frac{L_\bullet}{\psi}-\frac{\mu}{\psi}L_\bullet$$

Dividimos ahora por ξ

$$\frac{1}{\xi}\frac{dL_\bullet}{dt}=\frac{\beta}{\xi}S_\bullet-\frac{\xi}{\xi}(1-L_\bullet)L_\bullet-\frac{\mu}{\xi}L_\bullet$$

Y realizamos los siguientes cambios en los parámetros:

$$\tilde{\beta}=\frac{\beta}{\xi} \qquad \tilde{\mu}=\frac{\mu}{\xi}$$

$$L'_\bullet=\tilde{\beta}S_\bullet-(1-L_\bullet)L_\bullet-\tilde{\mu}L_\bullet$$

En la segunda ecuación

$$S'=\xi(1-L_\bullet)-\nu S+\rho I-\sigma SI$$

Realizamos mediante el uso de estas sustituciones

$$\frac{1}{\psi}\frac{dS_\bullet}{dt}=\xi(1-L\bullet)\frac{L_\bullet}{\psi}-\nu\frac{S_\bullet}{\psi}+\rho\frac{I_\bullet}{\psi}-\frac{\sigma}{\psi}\frac{1}{\psi}S_\bullet I_\bullet$$

Dividimos ahora por ξ

$$\frac{1}{\xi}\frac{dS_\bullet}{dt}=\frac{\xi}{\xi}(1-L\bullet)L_\bullet-\frac{\nu}{\xi}S_\bullet+\frac{\rho}{\xi}I_\bullet-\frac{\sigma}{\xi}\frac{1}{\psi}S_\bullet I_\bullet$$

Y realizamos los siguientes cambios en los parámetros:

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{\xi} \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\xi} \qquad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\xi}$$

$$\frac{dS_\bullet}{d\tau} = (1 - L\bullet)L_\bullet - \tilde{\nu}S_\bullet + \tilde{\rho}I_\bullet - \frac{\tilde{\sigma}}{\psi}S_\bullet I_\bullet$$

$$S'_\bullet = (1 - L\bullet)L_\bullet - \tilde{\nu}S_\bullet + \tilde{\rho}I_\bullet - \frac{\tilde{\sigma}}{\psi}S_\bullet I_\bullet$$

En la tercera ecuación

$$I' = \sigma SI - (\nu + \alpha + \rho)I$$

Realizamos mediante el uso de estas sustituciones,

$$\frac{1}{\psi}\frac{dS_\bullet}{dt} = \sigma\frac{S_\bullet}{\psi^2} - (\nu + \alpha + \rho)\frac{I_\bullet}{\psi}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{dS_\bullet}{dt} = \frac{\sigma}{\xi}\frac{1}{\psi}S_\bullet I_\bullet - (\frac{\nu}{\xi} + \frac{\rho}{\xi} + \frac{\alpha}{\xi})I_\bullet$$

Y realizamos los siguientes cambios en los parámetros:

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{\xi} \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\xi} \qquad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\xi} \qquad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\xi}$$

$$\frac{dS_\bullet}{d\tau} = \frac{\tilde{\sigma}}{\psi}S_\bullet I_\bullet - (\tilde{\nu} + \tilde{\alpha} + \tilde{\rho})I_\bullet$$

$$I'_\bullet = \frac{\tilde{\sigma}}{\psi}S_\bullet I_\bullet - (\tilde{\nu} + \tilde{\alpha} + \tilde{\rho})I_\bullet$$

Primero, haremos este sistema sin dimensiones. Suponemos que β, ξ, μ, ν, ρ y α son medidas en $\frac{1}{tiempo}$. L, S e I se miden en las unidades de tamaño de población, lo llamamos p , así ψ es medido en $\frac{1}{p}$. También σ es medido en $\frac{1}{(p)(tiempo)}$. Lo dividimos entre ξ , luego re-nombramos los parámetros,teniendo lo siguiente

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\xi} \qquad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\xi} \qquad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{\xi} \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\xi} \qquad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\xi} \qquad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\xi}$$

Entonces de las ecuaciones anteriores tenemos nuestro modelo adimensional

$$\begin{cases} L'_\bullet = -(1 - L_\bullet)L_\bullet - \tilde{\mu}L_\bullet + \tilde{\beta}S_\bullet \\ S'_\bullet = -\tilde{\nu}S_\bullet + \tilde{\rho}I_\bullet - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\psi}}S_\bullet I_\bullet + (1 - L_\bullet)L_\bullet \\ I'_\bullet = -(\tilde{\nu} + \tilde{\alpha} + \tilde{\rho})I_\bullet + \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\psi}}S_\bullet I_\bullet \end{cases}$$

Aquí medimos el tiempo en ξ^{-1} y re-nombraremos los parámetros

$$\tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\beta}, \tilde{\mu}, \tilde{\alpha} \qquad \text{como} \qquad \nu, \rho, \beta, \mu, \alpha$$

$$\frac{\tilde{\rho}}{\psi} \qquad \text{como} \qquad \sigma$$

$$L_\bullet, S_\bullet, I_\bullet \quad \text{son} \quad L, S, I$$

Reescribiendo, nosotros obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} L' = (1-L)L - \beta S - \mu L \\ S' = -\nu S + \rho I - \sigma SI + (1-L)L \\ I' = -(\nu + \alpha + \rho)I + \sigma SI \end{cases} \tag{2.49}$$

El sistema 2.64 es adimensional. Note que $\mathcal{R}_0 = \dfrac{\beta}{\nu}\dfrac{1}{\mu+1}$

Teorema 2.81.

a. *El estado inicial estable* $(0,0,0)$ *siempre existe*

b. *La estado estable libre de enfermedad de la forma* $(L,S,0)$ *existe y es único si y solo si* $\mathcal{R}_0 > 1$.

c. *La enfermedad es latente* (L^*, S^*, I^*) *existe* $\mathcal{R}_0 > 1$ *y* $(1-L^*)L^* > \nu S^*$.

d. *Si* $\mu < 1$,*entonces para el sistema 2.64 existe una o más de un estado de equilibrio interior. Si* $\mu < 1$ *entonces para el sistema (2.64) existen sólo un estado de equilibrio interior con* L *componente dado por* L_1.

Demostración.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones (2.50)

$$(1-L)L - \beta S - \mu L = 0 \tag{2.50a}$$

$$-\nu S + \rho I - \sigma SI + (1-L)L = 0 \tag{2.50b}$$

$$-(\alpha + \rho + \nu)I + \sigma SI = 0 \tag{2.50c}$$

a. El estado inicial estable $(L,S,I) = (0,0,0)$ lo reemplazando en la ecuación 2.50 y es obvio que siempre existe la enfermedad.

b. El estado Larva antes mencionado es un estado libre de la enfermedad infecciosa por ello de 2.39 igualamos a $1 - L = \pi(L)$, resultando lo siguiente:

$$1 - \hat{L} = \frac{\mu\nu}{\beta - \nu}$$

$$\hat{L} = 1 - \frac{\mu\nu}{\beta - \nu} \tag{2.51}$$

$$\beta - \nu - \nu\mu > 0 \rightarrow \nu(1+\mu) < \beta$$

$$\frac{\beta}{\nu}\left(\frac{1}{\mu+1}\right) > 1, \text{ siempre que } \beta - \nu > 0.$$

$$\mathcal{R}_o > 1 \text{ siempre que } \frac{\beta}{\nu} > 1$$

Analizaremos el estado estable libre de enfermedad de la forma $(\hat{L}, \hat{S}, 0)$, $L \neq 0$, $\quad \hat{L} = 1 - \dfrac{\mu\nu}{\beta - \nu}$

Reemplazando en (2.50c) y de (2.37)

$$\hat{S} = \left(\frac{\mu}{\beta - \nu}\right)\hat{L}$$

De (2.51) el estado libre de enfermedad es:

$$(\hat{L}, \hat{S}, 0) = \left(\hat{L}, \left(\frac{\mu}{\beta - \nu}\right), 0\right) \qquad \beta - \nu > 0$$

Este estado existe si y solo si,

$$\beta - \nu - \mu\nu > 0 \quad \rightarrow \quad \beta - \nu(\mu + 1) > 0$$

$$\mathcal{R}_o = \frac{\beta}{\nu}\left(\frac{1}{\mu+1}\right) > 1 \qquad \text{, siempre que } \frac{\beta}{\nu} > 1$$

Para $\hat{S} > 0$

$$1 - \frac{\mu\nu}{\beta - \nu} > 0 \qquad \rightarrow \mathcal{R}_0 = \frac{\nu\mu}{\beta - \nu} > 1 \qquad \text{siempre que } \beta - \nu > 0.$$

Tenemos dos estados libre de enfermedad, el estado trivial $(L, S, I) = (0, 0, 0)$ y $\left(\hat{L},\ \left(\dfrac{\mu}{\beta - \nu}\right)\hat{L},\ 0\right)$ con $\beta - \nu > 0$.

c. Esta parte fue probado en la parte c del Teorema (2.76).

d. Para el estado infectado (L^*, S^*, I^*) analizaremos lo siguiente:

$$(1 - L^*)L^* - \nu S^* - vI^* - \alpha I^* = 0$$

$$(1 - L^*)L^* - \nu S^* = I^*(\nu + \alpha)$$

$$I^* = \frac{(1 - L^*)L^* - \nu S^*}{\nu + \alpha} = \frac{(\beta - \nu)S^* - \mu L^*}{\nu + \alpha} \qquad \text{siempre que } \beta + \alpha > 0$$

Con la condición $\pi(L^*)L^* > \nu S^*$, donde $L^* < \hat{L}$ probado en el Teorema (2.76), esto equivale

$$(1 - L^*)L^* > \nu S^*$$

Si $L^* < 1 \to 1 - L^* > 0 \qquad \to \nu S^* > 0$

Si $L^* \geqslant 1 \to 1 - L^* < 0 \qquad \to \nu S^* < 0$ (no es cierto).

Por lo tanto $L^* < 1$ en este caso

$$L^{*2} - L^* + \nu S^* < 0 \tag{2.52}$$

Podemos escribir la parte izquierda de la ecuación (2.52) como

$$(L^* - K_1)(L^* - K_2) < 0 \tag{2.53}$$

Donde

$$\begin{aligned} K_1 =& \frac{1 - \sqrt{1 - 4\nu S^2}}{2} \\ K_2 =& \frac{1 + \sqrt{1 - 4\nu S^2}}{2} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Observamos que $K_1 < K_2$ y dos de ellos existirá solo si $S^* \leqslant \frac{1}{4\nu}$. Más lejos de (2.53) esto es claro que $L^* - K_1$ y $L^* - K_2$ tienen los signos opuestos. Entonces tenemos los dos casos siguientes.

Caso 1: $L^* - K_1 > 0$ y $L^* - K_2 < 0$

Esto significa que $L^* > K_1$ y $L^* < K_2$ o equivalentemente $K_1 < L^* < K_2$

Caso 2: $L^* - K_1 < 0$ y $L^* - K_2 > 0$

Esto significa que $L^* < K_1$ y $L^* > K_2$ Dado que $K_1 < K_2$, por lo que este caso no es posible. Así que podemos tener solo una opción para L^*, es decir, $K_1 < L^* < K_2$ (con K_1 y K_2 citado en (2.54)) para la existencia de $I^* > 0$. El componente "L" del estado estable endémico es la solución de la ecuación

$$\pi(L^*)L^* + \mu L^* = \beta S^*$$

Al usar el valor de $\pi(L)$, tenemos

$$(1 - L)L + \mu L = \beta S^*$$

Esto implica que para $L < 1$

$$L^2 - L(\mu + 1) + \beta S^* = 0$$

que es una ecuación cuadrática en L a las raíces de esta ecuación están dadas por

$$l_1 = \frac{(1+\mu) - \sqrt{-4\beta S^* + (1+\mu)^2}}{2} \tag{2.55}$$

$$l_2 = \frac{(1+\mu) + \sqrt{-4\beta S^* + (1+\mu)^2}}{2} \tag{2.56}$$

Esto es claro que $0 < l_1 < l_2$. también l_1 existir solo si $l_1 < \hat{L} = 1 - \frac{\mu\nu}{\beta - \nu} < 1$, es decir, tenemos

$$(1+\mu) + \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*} < 2$$

Simplificar y reorganización de los términos rendimientos

$$(1+\mu) < \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*} \tag{2.57}$$

Tenemos los dos casos siguientes.

Caso 1: $\mu < 1$

Para este caso la desigualdad (2.57) se cumple automáticamente

Caso 2: $\mu \geqslant 1$

Esto es equivalente a $\mu - 1 \geqslant 0$. Luego, elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad (2.57), tenemos

$$1 + \mu^2 - 2\mu < 1 + \mu^2 + 2\mu - 4\beta S^*$$

Esto implica que

$$\beta S^* < \mu \tag{2.58}$$

Consideremos ahora l_2, esto también va a existir sólo si $l_2 < 1$, de (2.57), tenemos

$$(1+\mu) + \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*} < 2$$

que puede reescribirse como

$$(\mu - 1) < -\sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*} \tag{2.59}$$

A partir de la notación anterior ecuación que l_2 existirá sólo si $\mu < 1$. Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación tenemos

$$1 + \mu^2 - 2\mu > 1 + \mu^2 + 2\mu - 4\beta S^*$$

lo que implica que $\mu < \beta S^*$.

□

Teorema 2.82. *a. El estado libre de enfermedad* $(\hat{L}, \hat{S}, 0)$ *es localmente asintóticamente estable si y sólo si* $\mathcal{R}_\prime > 1$ *y* $\mu > 2\hat{L} - 1$.

b. El estado endémico l_1 *es localmente asintóticamente estable y* l_2 *es inestable siempre que ellos existan.*

Demostración. a. La matriz Jacobiana evaluada en $(\hat{L}, \hat{S}, 0)$ esta dada por

$$\mathcal{J}^* = \begin{bmatrix} -\mu - (1 - 2\hat{L}) & \beta & 0 \\ (-2\hat{L} + 1) & -\sigma\hat{I} - \nu & \rho - \sigma\hat{S} \\ 0 & \sigma\hat{I} & \sigma\hat{S} - (\nu + \rho + \alpha) \end{bmatrix}$$

El estado estable $(\hat{L}, \hat{S}, \hat{I})$ desde que $\rho - \sigma S = -(\nu + \alpha)$

$$\mathcal{J}^* = \begin{bmatrix} -\mu - (1 - 2\hat{L}) & \beta & 0 \\ (-2\hat{L} + 1) & -\nu - \sigma\hat{I} & -(\alpha + \nu) \\ 0 & \sigma\hat{I} & 0 \end{bmatrix}$$

Analizaremos la determinante y la traza de la matriz 2×2 por la eliminación de bloques por Gauss-Jordan. Por las desigualdades anteriores $\beta > \nu$ y $L < 1$

$$\mathcal{J}_1^* = \begin{bmatrix} -(1 - 2L) - \mu & \beta \\ (1 - 2L) & -\nu \end{bmatrix}$$

$$Traza(\mathcal{J}_1^*) = -\mu - \nu - (1 - 2L) = -(\mu + \nu + 1 - 2L) < 0$$

$$det(\mathcal{J}_1^*) = -\beta(1 - 2L) + (1 - 2L)\nu + \mu\nu$$

$$det(\mathcal{J}_1^*) = \mu\nu + (1 - 2L)(\nu - \beta) > 0 \qquad \text{siempre que } \mu > 2\hat{L} - 1$$

Entonces el sistema es localmente asintóticamente estable si $\mu > 2\hat{L} - 1$. □

Demostración. b. La matriz jacobiana esta dada por

$$\mathcal{J}^* = \begin{bmatrix} -\mu - (1 - 2\hat{L}) & \beta & 0 \\ (-2\hat{L} + 1) & -(\nu + \sigma\hat{I}) & -\sigma\hat{S} + \rho \\ 0 & \sigma\hat{I} & \sigma\hat{S} - (\nu + \rho + \alpha) \end{bmatrix}$$

El estado estable (L^*, S^*, I^*), si $\rho - \sigma S = -(\nu + \alpha)$ tenemos que

$$\mathcal{J}^* = \begin{bmatrix} -\mu - (1 - 2\hat{L} & \beta & 0 \\ (-2\hat{L} + 1) & -(\nu + \sigma\hat{I}) & -\nu - \alpha \\ 0 & \sigma I^* & 0 \end{bmatrix}$$

El estado estable $\phi(L^*) = (1 - 2L^*) + \mu$, obtenemos lo siguiente

$$\mathcal{J}^* = \begin{bmatrix} -\phi(L^*) & \beta & 0 \\ -\mu + \phi(L^*) & -(\nu + \sigma\hat{I}) & -\nu - \alpha \\ 0 & \sigma I^* & 0 \end{bmatrix}$$

La traza y la determinantes esta dada por

$$Traza(\mathcal{J}_1) = -(\phi(L^*) + \nu + \sigma I^*) \tag{2.60}$$

$$Det(\mathcal{J}_1) = -\phi(L^*)(\nu + \alpha)\sigma I^* \tag{2.61}$$

Como $\phi(L^*) = (1 - 2L^*) + \mu$, para l_1, tenemos

$$\phi(l_1) = (1 - 2l_1) + \mu = 1 - 2[\frac{(1+\mu) - \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*}}{2}] + \mu$$

$$\phi(l_1) = 1 - [(1+\mu) - \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*}] + \mu$$

Lo que implica

$$\phi(l_1) = \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*} > 0 \tag{2.62}$$

Ahora para $\phi(l_2)$ análogamente procederemos

$$\phi(l_2) = (1 - 2l_1) + \mu = 1 - 2[\frac{(1+\mu) + \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*}}{2}] + \mu$$

$$\phi(l_2) = 1 - [(1+\mu) + \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*}] + \mu$$

Lo que implica

$$\phi(l_2) = -\sqrt{(1+\mu)^2 - 4\beta S^*} < 0 \tag{2.63}$$

Evaluaremos l_1 y l_2 en $\phi(L^*)$ para la Traza. Primero tomaremos $L^* = l_1$ con $\phi(l_1) > 0$

$$Traza(\mathcal{J}_1) = -(\phi(l_1^*) + \nu + \sigma I^*) < 0$$

Luego para la Determinante

$$Det(\mathcal{J}_1) = -\phi(l_1^*)(\nu + \alpha)\sigma I^* < 0$$

por lo que al menos uno de los valores propios es positivo y, por lo tanto, este equilibrio es inestable.

Siendo $\phi(l_1) > 0$ y el valor de $\mathcal{A} = (1-2l_1)+\mu$. El polinomio característico $\mathcal{P}(\lambda) = |\mathcal{J}^* - \lambda I_{3X3}, |$.

$$|\mathcal{J}^* - \lambda\mathcal{I}| = \begin{bmatrix} -\mathcal{A} - \lambda & \beta & 0 \\ \mathcal{A} - \mu & -\nu - \sigma I^* - \lambda & -(\nu + \alpha) \\ 0 & \sigma I^* & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\nu + \sigma I^* + \mathcal{A}) + \lambda(\sigma I^* \mathcal{A} + \mathcal{A}\nu + \sigma\nu I^* + I^*\nu + \sigma\alpha I^* + \beta(\mathcal{A} - \mu)) - \sigma\mathcal{A}I^*(\nu + \alpha)$$

Por el criterio de Routh-Hurwitz tomado de la sección (1.3.1) de la Tesis de Pérez J. (2014) y análogamente como se realizó en el Teorema (2.79.c) el estado endemico es localmente asitóticamente estable. No analizamos en l_2 pues es inestable. □

2.24.1. Caso especial sin enfermedad

En esta sección analizaremos el caso especial cuando no hay enfermedad, es decir, cuando $I = 0$. Supongamos también que $\pi(L) = (1 - L)$ para $L \leqslant 1$. Con estas suposiciones estudiaremos en el sistema dado por (2.64) el cual es reducido a un sistema bidimensional y viene dado por

$$\begin{cases} L' = \beta S - (1 - L)L - \mu L \\ S' = (1 - L)L - \nu S \end{cases} \tag{2.64}$$

Observamos que $(0, 0)$ es un estado estable para este sistema. Podemos escribir el estado estable de este sistema en forma de matriz como

$$\begin{bmatrix} -(1 - L) - \mu & \beta \\ \\ (1 - L) & -\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \\ S \end{bmatrix} = 0, \tag{2.65}$$

para algún estado no trivial L^* y S^* la determinante de esta matriz puede ser cero, es decir la determinante es

$$\nu(1 - L) + \mu\nu - \beta(1 - L) = 0$$

Ordenando los términos, tenemos

$$(\nu - \beta)(1 - L) + \mu\nu = 0 \tag{2.66}$$

Lo que nos da

$$\mu\nu = (\beta - \nu)(1 - L)$$

$$\frac{\mu}{(1 - L)} = \frac{\beta}{\nu} - 1$$

El estado estable (L^*, S^*) existirá siempre que $\beta > \nu$. Ahora la matriz jacobiana en (L^*, S^*) esta dada por

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} -(1 - 2L^*) - \mu & \beta \\ \\ (1 - 2L^*) & -\nu \end{bmatrix}. \tag{2.67}$$

La traza del Jacobiano es

$$Traza(\mathcal{J}) = -(1 - 2L^*) - \mu - \nu = -[(1 - 2L^*) + \mu + \nu]$$

La determinante del Jacobiano es

$$Det(\mathcal{J}) = (1 - 2L^*)\nu - \nu\mu - \beta(1 - 2L^*)$$

$$Det(\mathcal{J}) = (1 - 2L^*)(\beta - \nu) + \nu\mu$$

$$Det(\mathcal{J}) = -[(1 - L^*) - L^*](\beta - \nu) + \nu\mu$$

$$Det(\mathcal{J}) = -(\beta - \nu)(1 - L^*) + \nu\mu + L^*(\beta - \nu)$$

Observamos que 2.66, $(\nu - \beta)(1 - L) + \mu\nu = 0$, Entonces tenemos que

$$Det(\mathcal{J}) = (\beta - \nu)L > 0$$

Entonces concluimos que el estado localmente asitóticamente estable si $(1-2L^*)+\mu+\nu > 0$, es decir, cuando $L^* < \frac{1}{2}(1+\mu+\nu)$ y es inestable si $(1-2L^*)+\mu+\nu < 0$, es decir, $L^* > \frac{1}{2}(1+\mu+\nu)$ por lo tanto tenemos que $L = \frac{1}{2}(1 + \mu + \nu)$ es un punto de bifurcación.

Capítulo 3

Metodología de investigación

3.1. Diseño de investigación

De acuerdo al problema planteado referido al Modelo Matemático de la enfermedad infecciosa que esta llevando a la extinción a la población de las Ranas Americanas en California, y en función de sus objetivos, según [55]:

> Se define el diseño de investigación como un plan o la estrategia global en el contexto del estudio propuesto, donde se establece la metodología a seguir para desarrollo de la investigación, de manera que facilita, orienta y guía todo el proceso de investigación, desde el principio hasta el final, en función de los objetivos específicos delineados en la presente investigación (p.134).

Con respecto a la investigación bibliográfica [56] propone:

> La investigación se encuentra dentro de la tipología de métodos del diseño de investigación bibliográfico, porque recurrimos a la utilización de datos secundarios, es decir, aquellos que han sido obtenidos por otros autores y lo obtenemos ya elaborados y procesados de acuerdo con los fines de quienes inicialmente los elaboran y manejan"(p.109-110).

Arías F. (2019) recoge la versión de varios autores acerca de la investigación teórica:

> Es aquella investigación que utiliza la inferencia deductiva, intuitiva, abstrayendo los conceptos para la creación de modelos, exposiciones o teorías abstractas de fenómenos no evidentes. Esta investigación es propia de las ciencias formales cuyos objetos de estudio son ideales o intangibles: lógica, matemática, lingüística y física teórica, para mas detalles revisar Hessen (1989). .

El propósito de este estudio concurrente es construir Modelo Matemático, Ecológico y Epidemiológico de la enfermedad infecciosa emergente que esta llevando al declive a la población de las Ranas Americanas en California. Para la rama cualitativa se pretende mostrar que el modelo matemático de la enfermedad infecciosa emergente esta llevando al declive a la población de las Ranas Americanas en California, a través del análisis matemático utilizando la teoría de persistencia de dinámica de poblaciones. Para la rama cuantitativa se pretende buscar cuales son los parámetros que determinan el número básico de reproducción $\mathcal{R}_0$ del modelo de la población de anfibios con la enfermedad infecciosa emergente esta en declive, a través del análisis de estabilidad del sistema, mediante técnicas de teoría de estabilidad de una población de anfibios divida en tres etapas: estado larva, susceptible y el estado infeccioso, el ciclo de vida del anfibio esta delimitado en 28 días.

3.2. Tipo de investigación

Hernández (1998) lo define como: ″El plan que se desarrolla para obtener la información que se requiere en una investigación‟(p.183). En cuanto al diseño de investigación el presente trabajo se enmarca en un diseño no experimental.

3.3. Población de estudio

Especie de las Ranas Americanas con un tiempo de vida de 28 días.

3.4. Técnica e instrumentos de recolección de datos

Nuestra principal técnica de recolección de datos fue la observación.

3.5. Plan de análisis estadísticos de datos

La presente investigación no requiere plan de análisis estadísticos de datos.

Capítulo 4

Conclusiones

Después de analizar los modelos matemáticos epidemiológicos y ecológicos según su vulnerabilidad, se puede inferir diferentes conclusiones a cerca del modelo matemático presentado, donde bajos ciertas condiciones que tratan de asemejar la realidad de la enfermedad en la población de anfibio, tiene como esencia la tasa de reproducción, la tasa de mortalidad para el juvenil y el adulto, la tasa de contagio por individuos infectados y la tasa de mortalidad por la enfermedad. Estas tasas brindan las condiciones necesarias para determinar la estabilidad y el que este bien definido, y la interrelación que tienen entre sí.

El objetivo del trabajo de investigación fue analizar un modelo matemático epidemiológico y ecológico mediante dos estudios el modelo con dos dimensiones sin la enfermedad y el modelo incluyendo la enfermedad. Para el capítulo 2 se entregaron herramientas matemáticas necesarias como conceptos, definiciones y teoremas importantes sobre la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Luego para el estudio del modelo con dos dimensiones (2.16) en el capítulo 2 realizamos las nociones básicas de la teoría de dinámica de poblaciones. Se definieron los principales conceptos que nos permitieron abordar nuestro modelo, en el estudio del modelo, asumimos el modelo básico de estado larva y adulto, lo realizamos en dos compartimentos. El análisis fue realizado en el campo de vectores, topológicamente equivalente al modelo inicial extendido a todo el primer cuadrante, el cual fue obtenido mediante una reparametrización y un cambio de tiempo, por lo que todos los resultados obtenidos en función de este campo son aplicables al sistema original.

Las poderosas herramientas matemáticas disponibles para sistemas planos de ecuaciones diferenciales ordinarias (el teorema de Poincaré-Bendixson, el criterio de Bendixson-Dulac, iso-

clinas, plano de fase) permiten una discusión bastante completa del modelo elemental de una especie de dos etapas a partir del cual se puede aprender lo siguiente. La dependencia de la densidad tiene un mayor potencial de conducir a una oscilación no amortiguada cuando ocurre en la tasa de transición de la etapa per cápita que cuando ocurre en la tasa de natalidad o mortalidad per cápita. De hecho, en este modelo, las oscilaciones no amortiguadas solo son posibles si la tasa de transición de la etapa per cápita es dependiente de la densidad. Las tasas de transición per cápita dependientes de la densidad por sí solas no pueden conducir a la biestabilidad, pero pueden hacerlo en cooperación con la competencia dentro de la etapa si son lo suficientemente fuertes. Si ambos son débiles, no hay biestabilidad. La competencia pura dentro de la etapa no puede conducir a la biestabilidad mientras la tasa de transición de etapa per cápita sea constante.

En esta investigación hemos presentado y analizado un modelo de disminución de anfibios basado en enfermedades. Encontramos el número de reproducción básico $\mathcal{R}_0$, que garantiza la extinción de la población enferma en presencia de la enfermedad. Demostramos que solo el estado estable libre de enfermedad $(0, 0, 0)$ es estable y la estabilidad de los otros dos estados estacionarios está condicionado por otros factores ambientales siempre que $\mathcal{R}_0 > 1$. Así como también hemos demostrado que $\mathcal{R}_0$ no solo es la condición suficiente para la supervivencia de la población infectada, sino también para el caso, cuando $\mathcal{R}_0 > 1$, la enfermedad puede persistir o no dependiendo de ciertas limitaciones. En nuestro modelo también hemos considerado un tamaño de población pequeño de L. El caso de población grande será relativamente fácil de manejar en términos de la función $\pi(L)$. En este caso, dado que $\pi(L)$, está disminuyendo, por lo tanto, para un gran tamaño de población $\pi(L^*) \approx 0$ en la ecuación (2.41)y esto tomará la forma

$$L^* = \frac{\beta}{\delta\mu}(\nu + \alpha + \rho) = \frac{\beta}{\mu}S^*$$

Este es el caso cuando tenemos un gran número de susceptibles. Además, en nuestro modelo, solo consideramos el caso simple en el que solo las larvas en la etapa L están sujetas a competencia dentro de la etapa. Una dirección futura para este modelo es considerar un caso bastante más complicado en el que tanto las larvas L seguras como las larvas S expuestas competirán por los recursos. En este caso, el término $\pi(L)L$ sera reemplazado por $\pi(L, S)L$ que puede causar algunos efectos oscilatorios debido a la tasa de desarrollo dependiente de la densidad tanto para L como para S.

Bibliografía

[1] Chytridiomycosis-induced mortality in a threatened anuran.

[2] Benjamin A. The efects of acid precipitation on amphibians. pages 65–77, 1993.

[3] Charrier A. *Anfibios de Chile, un desafío para la conservación.* Ministerio del Medio Ambiente, 2013.

[4] Arrowsmith A. anda Place C. *An Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge Universoty Press, 1990.

[5] Sumpler B. *The dinamics of some epidemic modelsy.* Texas Tech University, 1995.

[6] Azat C. Not just a pathogen: The importance of recognizing genetic variability to mitigate a wildlife pandemic. *Mol Ecol Resour*, 21(5):1410–1412, 2021.

[7] Parreño C. Efectos de la concentración de fenol en la mortalidad, comportamiento y características morfológicas de renacuajos de rhinella humboldti, 2021.

[8] Greenberg D. Population dynamics of a declining amphibian, 2013.

[9] Coddington E. and Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill, 1955.

[10] Odum E. *Ecología.* Nueva Editorial Interamericana, 1971.

[11] Odum E. *Ecology: The Link Between the natural and Social Sciences.* Modern biology series, 1971.

[12] Odum E. *Ecology and our endangered life-support systems.* Sinauer Associated, Inc. Publishers, 1993.

[13] Odum E. and Barrett G. *The Twenty-First Century: The World at Carrying Capacity*, volume 50. Sinauer Associated, Inc. Publishers, 1993.

[14] Armenteras et al. Revisión del concepto de ecosistema como unidad de la naturaleza 80 años después de su formulación. 2016.

[15] Begon et al. *Ecology From Individuals to Ecosystems.* Blackwell Publishing Ltd, 2006.

[16] Berger et al. Chrytriomycosis causes amphibian mortality associated with population declines forest of australian and central america. *Proc. Natl. Acad, Sci*, pages 9031–9036, 1998.

[17] Berger et al. Life cycle stages of the amphibian chytrid batrachochytrium. dendrobatidis. *Diseases of Aquatic Organisms*, 2005.

[18] Brooks et al. Global biodiversity conservation priorities. *Science*, 313(5783):58–61, 2006.

[19] Courchamp F. et al. Inverse density dependence and the allee effect. *Trends in Ecology and Evolution*, 14(10):405–410, 1999.

[20] Dambacher et al. *Qualitative Stability and Ambiguity in Model Ecosystems.* The American Naturalist, 2003.

[21] Daszak P. et al. Emerging infectious diseases and amphibian population declines. (6):735–748, 1999.

[22] Daszak P. et al. Emerging infectious diseases of wildlife?threats to human health and biodiversity. 1999.

[23] Daszak P. et al. Emerging infectious diseases of wildlife?threats to human health and biodiversity. 1999.

[24] Drury S. et al. Isolation of an iridovirus-like agent from common frogs (rana temporaria). (3):72–73, 1995.

[25] Ghirardi R. et al. Batrachochytrium dendrobatidis infecting anurans in a protected area from santa fe province, argentina, 2014.

[26] Hirsch M. et al. Differential equations, dynamical systems and an introduction to caos. 2004.

[27] Hopkins et al. *Influencia del período larval en las respuestas del Rana verde superior (rana clamitans) larva expuesto a sedimentos contaminados.* Environmental Toxicology and Chemistry, 2006.

[28] Khan A. et al. Analysis of a mathematical model of emerging infectious disease leading to amphibian decline. 2014.

[29] Leclére D. et al. Bending the curve of terrestrial biodiversity needs an integrated strategy. *Nature*, (585):551–556, 2020.

[30] Lehtinen et al. Consequences of habitat loss and fragmentation for wetland amphibian assemblages. *The Society of Wetland Scientists*, 19(1):1–12, 1999.

[31] Lips et al. Emerging infectious disease and the loss of biodiversity in a neotropical amphibian community. *Proceedings of the National Academy of Sciences of The United States of America*, 103(9):3165–3170, 2006.

[32] Nundu et al. Implications of human activities for (re)emerging infectious diseases, including covid-19. *Journal of Physiological Anthropology*, pages 39–29, 2020.

[33] Peterson et al. Assessment of the risk of solar ultraviolet radiation to amphibians prediction of impacts in selected norther midwestern wetlands. *Environmental Science Technology*, 36:2866 2874, 2002.

[34] Pianka E. et al. Comparative ecology, resource utilization and niche segregation among gekkonid lizards in the southern kalahar. (4):691–701, 1978.

[35] Russell RE et al. Effect of amphibian chytrid fungus (batrachochytrium dendrobatidis) on apparent survival of frogs and toads in the western usa. *Biol Conserv*, 236:296–304, 2019.

[36] Scheele B. et al. Amphibian fungal panzootic causes catastrophic and ongoing loss of biodiversity. *American Association for the Advancement of Science*, 363(6434):1459–1463, 2019.

[37] Thieme H. et al. Species decline and extinction: Synergy of infectious disease and allee effect? *Journal of Biological Dynamics*, 3(2-3):305–323, 2009.

[38] Wells C. et al. Impact of international travel and border control measures on the global spread of the novel 2019 coronavirus outbreaker. 117(13):7504–7509, 2020.

[39] Arías F. Investigación teórica, investigación empírica e investigación generativa para la construcción de teoría: Precisiones conceptuales. 2019.

[40] Gantmacher F. *Applications of the theory of matrices*. Interscience Publishers, 1959.

[41] U.S. Fish and Wildlife Service. *Recovery Plan for the California Red-legged Frog (Rana aurora draytonii).* U.S. Fish and Wildlife Service, 2002.

[42] Lawrence G. The effects of ultraviolet radiation on the biology of amphibians. *American Zoologist*, 37(12):137 145, Agosto-2015.

[43] Thieme H. Asymptotically autonomous differential equations in the plane. *Rocky Mountain Journal Math*, 24:351–380, 1994a.

[44] Thieme H. *Mathematics in Population Biology.* Princeton University Press, 2003.

[45] Wilbur H. and Collins J. Ecological aspects of amphibian metamorphosis. 182:1305–1314, 1973.

[46] Avalos J. Análisis matemático de la intereacción depredador presa en un medio acuático contaminado, 2016.

[47] Collins J. Intrapopulation variation in the body size at metamorphosis and timing of metamorphosis in the bullfrog. rana castebiana. *Ecology*, 60:738–749, 1979.

[48] Díaz J. *?Cómo realizar una Tesis?* Noriega Editores, 2006.

[49] Hale J. *Ordinary Differential Equations.* Robert E. Krieger Publishing Company, 1969.

[50] Hessen J. *Teoría del conocimiento.* México: Ediciones Quinto Sol, 1989.

[51] Pérez J. Dinámica del control biológico basado en un modelo de cadena alimenticia tres niveles tróficos, 2014.

[52] Emmert K. Deterministic and stochastic discrete-time epidemic models with applications to amphibians, 2004.

[53] Allen L. *An Introduction to Mathematical Biology.* Person Education Inc, 2007.

[54] Rollin-Smith L. Amphibian immunity? stress, disease, and climate change. *Developmental and Comparative Immunology*, 66:111–119, 2017.

[55] Balestrini M. *Como se elabora un Proyecto de Investigación.* Consultores Asociados BL, 2006.

[56] Tamayo M. *Aprende a investigar.* Instituto Colombiano para el fomento de la Educación Superior, 1999.

[57] Martínez-Jerald. Tesis: Dinámica de un modelos de depredación del tipo leslie-gower con doble efecto allee en las presas.

[58] Pino N. Tesis: Modelo matemático de la dinámica de transmisión sexual del vih sida en una población heterosexual.

[59] World Health Organization. Division of emerging other communicable diseases surveillance control emerging infectious diseases. 1997.

[60] Monzon P. *Notas sobre estabilida de sistemas dinámicos*. Curso de actualización, 2003.

[61] Hernández R. *Metodología de la investigación*. McGRAW HILL Interamericana editores, S.A. México, 1998.

[62] López R. Estructured si epidemic models with applications to hiv epidemic, May 2006.

[63] Cushman S. Effects of habitat loss and fragmentation on amphibians: A review and prospectus. 2006.

[64] Jaconson S. Reproductive ecology of the endangered golden toad (bufo periglenes). 1991.

[65] Kupferberg S. *Bullfrog (Rana Catesbeiana) Invasion of a California River: The Role of Larval Competition*. Ecology, September 1997.

[66] Salceanu S. Robust uniform persistence in discrete and continous dynamical systems using lyapunov exponents. *Math. Biosc. Eng*, 8(3):807–825, 2011.

[67] Hahn W. *Stability of motion*. Springer, 1967.

[68] Kuznetsov Y. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 8. Springer, 2000.

[69] Kooijman S. y Metz J. On the dynamic of chemically stressed population: The deduction of population consequences from effects on individuals. *Ecotoxicology and Environmental Safety*, 8:254–274, 1984.

[70] Hutson V. y Schmitt K. Permanence and the dynamics of biological systems. *Math. Biosci.*, 111(1):1–71, 1992.

[71] Smith H. y Thieme H. *Dynamical Systems and Population Persistence*. American Mathematical Society, 2010.

[72] Palis J. y W. de Melo. *Geometry theory of dynamical systems: an introduction*. Springer-Verlag, 1982.

[73] Smith H. y Waltman P. *Theory of the chemostat*. Cambridge University Press, 1995.

Índice de cuadros

2.1. Descripción de parámetros en el modelo 2.15 51
2.2. Descripción de parámetros en el modelo 2.28 63
2.3. Interpretación de tasa de supervivencia y metamorfosis 72
2.4. Cuadro de interpretación de las tasas. 73

Índice de figuras

2.1. Órbitas de campo de vectores. Tomado de [57] 14
2.2. Órbita Periódica de un campo de vectores. Tomado de [57]. 15
2.3. Equivalencia topológica. Tomado de [57] 17
2.4. Clasificación topólogica de puntos de equilibrios hiperbólicos en el plano. Tomado de [57] 19
2.5. Función de división en el caso planar (n=2). Tomado de [57] 23
2.6. Crecimiento Sigmoide (S- curve). Tomado de Odum (2000) 39
2.7. Crecimiento Exponencial (A), Forma Sigmoidea (B) y algunas variantes. Tomado de [11] 39
2.8. Tres patrones de tasa de crecimiento de la población en relación con la densidad de población. Tomado de [11] 40