Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Computación Científica

Métodos de Galerkin discontinuos primales aplicados a problemas de difusión-advección-absorción en una dimensión

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Computación Científica

AUTOR

Melissa Dessire AYLAS BARRANCA

ASESOR

Dra. Martha Hilda TIMOTEO SÁNCHEZ

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Aylas, M. (2024). *Métodos de Galerkin discontinuos primales aplicados a problemas de difusión-advección-absorción en una dimensión*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Computación Científica]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Melissa Dessire Aylas Barranca
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	70045021
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0008-9979-2103
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Martha Hilda Timoteo Sánchez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	25702279
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-7070-1094
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Rosa Luz Medina Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10048247
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Santiago Cesar Rojas Romero
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08683602
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Martha Hilda Timoteo Sánchez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	25702279
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	Grupo De Ecuaciones Diferenciales, Análisis Y Aplicaciones - GEDAAp
Agencia de financiamiento	No aplica.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Metropolitana Distrito: Cercado de Lima Av. Venezuela s/n cuadra 34. Lima 1-Perú Ciudad Universitaria. UNMSM. Latitud: -12.060186431587528 Longitud: -77.08213204783175
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2021 - 2024
URL de disciplinas OCDE	Ciencias de la computación https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.02.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Escuela Profesional de Computación Científica

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

En la ciudad universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:00 horas del martes 19 de marzo del 2024, se reunieron los docentes designados como miembros del Jurado:

Presidente : Dra. Rosa Luz Medina Aguilar
Miembro : Mg. Santiago Cesar Rojas Romero
Miembro asesor : Dra. Martha Hilda Timoteo Sánchez

para la sustentación de la tesis intitulada «MÉTODOS DE GALERKIN DISCONTINUOS PRIMALES APLICADOS A PROBLEMAS DE DIFUSIÓN-ADVECCIÓN-ABSORCIÓN EN UNA DIMENSIÓN», presentada por el bachiller Melissa Dessire Aylas Barranca, para obtener el Título Profesional de Licenciada en Computación Científica.

Luego de la exposición de la Tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas. Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del jurado, el expositor mereció la aprobación. con máximos honores con un calificativo promedio de ..... 19 diecinueve ..... (letras y números).

A continuación, los miembros del jurado, dan manifiesto que la participante bachiller Melissa Dessire Aylas Barranca, en virtud de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Siendo las ..11.... horas, se levantó la Sesión, firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias en archivo PDF.

Dra. Rosa Luz Medina Aguilar
Presidente

Mg. Santiago Cesar Rojas Romero
Miembro

Dra. Martha Hilda Timoteo Sánchez
Miembro Asesor

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, *MARTHA HILDA TIMOTEO SÁNCHEZ* en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N.º *000219-2022-D-FCM/UNMSM* de la tesis cuyo título es "*MÉTODOS DE GALERKIN DISCONTINUOS PRIMALES APLICADOS A PROBLEMAS DE DIFUSIÓN-ADVECCIÓN-ABSORCIÓN EN UNA DIMENSIÓN*", presentado por el bachiller *MELISSA DESSIRE AYLAS BARRANCA,* para optar el título profesional de licenciado en Computación Científica. CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 11% de similitud, nivel permitido para continuar con los tramites correspondientes y para su publicación en el repositorio institucional.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título correspondiente.

Firma del asesor

DNI: 25702279
Nombres y apellidos del asesor:
MARTHA HILDA TIMOTEO SÁNCHEZ

Huella digital

Dedicatoria

A mis padres y hermanos.

Agradecimentos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento a Dios por guiar mis pasos, darme la fortaleza y sabiduría cada día. Asimismo, mi más sincero agradecimiento a la Dra. Timoteo por darme la oportunidad de recurrir a sus conocimientos, por tenerme paciencia y darse tiempo para compartirme sus experiencias en todo este proceso. También le agradezco haberme orientado y motivado, en cada una de sus clases, a la maravillosa área de los Elementos finitos. Agradezco a mis padres por apoyarme en mis decisiones y por creer en mí. A mi padre por tener las palabras apropiadas en los momentos indicados y haberme cultivado el gusto por la matemática desde pequeña. A mi madre, por todo su amor, cariño y motivación para continuar con mi crecimiento profesional, por enseñarme el significado de resiliencia en mi vida. Agradezco a mis tías Gladys y Betty por la preocupación y el apoyo que nos han brindando a mí y mis hermanos.

Esta investigación fue financiada por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, por Resolución Rectoral N° 005753-2021-R/UNMSM con código de proyecto B21142201.

Resumen

Este trabajo presenta los fundamentos matemáticos y computacionales de tres tipos de métodos de Galerkin discontinuos (DG) aplicables a una amplia clase de ecuaciones diferenciales en una dimensión. Se aborda el tratamiento de los operadores de difusión-advección-absorción, mediante técnicas de elementos finitos en las que las funciones de forma son discontinuas a través de los límites entre elementos.

Las principales características del método que aquí se presentan son las siguientes:

- El método es robusto y presenta aproximaciones conservadoras por elementos (Oden et al., 1998).
- La forma bilineal asociada produce una matriz positiva definida y bien condicionada, lo que permite el uso de métodos iterativos estándar para p alta y para elementos distorsionados (Oden et al., 1998).
- Se derivan estimaciones de error a priori para establecer los parámetros que afectan la tasa de convergencia y las limitaciones del método (Oden et al., 1998).

La metodología inicial está basada en la teoría de (Rivière, 2008), la cual presenta conceptos para la aproximación de una ecuación diferencial difusiva. Más adelante, y con base en estos conceptos, extendemos el análisis para las ecuaciones de difusión-absorción, difusión-advección y difusión-advección-absorción. Se realizan experimentos numéricos de los Métodos de Galerkin discontinuos y se comparan el desempeño con los Métodos de Galerkin clásicos continuos. Además, el método discontinuo, influye claramente en el número de grados de libertad del problema, lo que afecta al tiempo de ejecución del programa. Por lo cual, en el programa utilizamos programación paralela para la optimización de recursos computacionales, a diferencia de (Rivière, 2008).

Adicionalmente, este estudio se realiza un análisis numérico en la norma de la energía para la ecuación difusión-absorción con el fin de evaluar la estabilidad, consistencia y convergencia de los Métodos de Galerkin Discontinuo útil para la interpretación y validación de los resultados computacionales. La norma de la energía mide la diferencia entre la solución exacta y aproximada, y la variabilidad de estos valores. Además, incluye un elemento de penalización para las discontinuidades en los puntos donde las piezas de la solución se unen.

Palabras-clave:Métodos de Galerkin Discontinuos, difusión-absorción, difusión-advección, programación paralela, estimativas del error.

Abstract

This work presents the mathematical and computational foundations of three types of discontinuous Galerkin (DG) methods applicable to a wide class of differential equations in one dimension. It addresses the treatment of diffusion-advection-absorption operators using finite element techniques where the shape functions are discontinuous across the boundaries between elements.

The main features of the method presented here are as follows:

- The method is robust and presents conservative approximations by elements (Oden et al., 1998).
- The associated bilinear form produces a positively defined and well-conditioned matrix, allowing the use of standard iterative methods for high p and for distorted elements (Oden et al., 1998).
- A priori error estimates are derived to establish the parameters affecting the rate of convergence and the limitations of the method (Oden et al., 1998).

The initial methodology is based on the theory of (Rivière, 2008), which presents concepts for the approximation of a diffusive differential equation. Later, based on these concepts, we extend the analysis to diffusion-absorption, diffusion-advection, and diffusion-advection-absorption equations. Numerical experiments of the Discontinuous Galerkin Methods are conducted and their performance is compared with that of the classic continuous Galerkin Methods. Additionally, the discontinuous method clearly influences the number of degrees of freedom of the problem, which affects the runtime of the program. Therefore, in the program, we use parallel programming for the optimization of computational resources, unlike (Rivière, 2008).

Additionally, this study performs a numerical analysis in the energy norm for the diffusion-absorption equation to evaluate the stability, consistency, and convergence of the Discontinuous Galerkin Methods useful for the interpretation and validation of computational results. The energy norm measures the difference between the exact and approximate solution, and the variability of these values. Furthermore, it includes a penalization element for the discontinuities at the points where the solution pieces join.

Keywords: Discontinuous Galerkin methods, diffusion-absorption, diffusion-advection, parallel programming, error estimates.

Índice de figuras

1. Gráfica de $\log(\|e_h\|)$ vs $\log(h)$. 24
2. Representación geométrica de las funciones bases lineales continuas por partes para $h = 1/4$ 33
3. Representación geométrica de las funciones bases cuadrática continuas por partes para $h = 1/4$ 34
4. Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método de Galerkin Continuo y la interpolación (Interp.) en mallas uniformes y $\boldsymbol{\alpha = 1}$ para $\mathbb{P}_1$ (izquierda) y $\mathbb{P}_2$ (derecha). 35
5. Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método de Galerkin Continuo y la interpolación (Interp.) en mallas uniformes y $\boldsymbol{\alpha = 10^{-5}}$ para $\mathbb{P}_1$ (izquierda) y $\mathbb{P}_2$ (derecha). 35
6. Representación de una malla uniforme sobre el dominio Ω, donde se ilustran dos elementos adyacentes I_n y I_{n+1} compartiendo el punto x_n. 36
7. Discretización uniforme unidimensional para $N = 4$ 53
8. Representación gráfica de la transformación isoparamétrica $T(x)$: Mapeo desde el espacio físico $\overline{\Omega}_e$ al espacio de referencia $\hat{\Omega}$. 55
9. Ejemplo de funciones base locales ϕ_l^n donde $l = 1, 2, 3, 4$ en $\Omega = (0, 1)$ para $N = 4$ en $\Omega = (0, 1)$ 57
10. Ejemplo de funciones base global Φ_l^n donde $l = 2$ en $\Omega = (0, 1)$ para $N = 2$ en $\Omega = (0, 1)$ 58
11. Gráfica de los grados de libertad para **CG** y **DG** con $l = 1$ (Figura 11a) y $l = 2$ (Figura 11b) 69
12. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **SIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 78
13. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **SIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 79
14. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **SIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos,$\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ 79
15. Representación gráfica de los tipos de partición para el estudio de mallas no uniformes 82
16. Flujo de calor unidimensional (*Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*, 2018, p. 466) 84

17. Distribución estacionaria de temperatura en una varilla unidimensional obtenida a partir de (4.1), siendo el azul el mínimo y el rojo el máximo valor de temperatura. 85
18. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con malla fija uniformes de $N = 32$ elementos, $\alpha = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ 86
19. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con malla fija uniformes de $N = 32$ elementos, $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ 86
20. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos NIPG (izquierda), SIPG (centro), IIPG (derecha), con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots, 128$ elementos, $\alpha = 1$ en la norma$\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 88
21. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos NIPG (izquierda), SIPG (centro), IIPG (derecha), con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots, 128$ elementos, $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 88
22. Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método **CG** **NIPG** **SIPG** **IIPG** e Interp., en mallas uniformes de $N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ con $\alpha = 1$ para $\mathbb{P}_2$. 89
23. Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método **CG** **NIPG** **SIPG** **IIPG** e Interp., en mallas uniformes de$N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ con $\alpha = 10^{-3}$ para $\mathbb{P}_2$. 90
24. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas no uniformes de $N = 2, \cdots, 32$ y $\alpha = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ . . . 94
25. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas no uniformes de $N = 2, \cdots, 32$ y $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 95
26. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_1$ por partes, para el método NIPG con **mallas no uniformes** con constantes $a = 1/3, b = 1/3$ y número de elementos $N = 2, \cdots, 32$ y $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ y $|\cdot|_{\mathcal{J}}$ 98
27. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, para el método NIPG con **mallas no uniformes** con constantes $a = 1/7, b = 1/5$ y número de elementos $N = 2, \cdots, 32$ y $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ y $|\cdot|_{\mathcal{J}}$ 98
28. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **SIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos,$\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ 99

29. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 100
30. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 10^{-3}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. . . . 100
31. Distribución espacial estacionaria de la temperatura en una varilla unidimensional modelado por la ecuación (4.11) Se utiliza una escala de colores que va del azul oscuro (temperatura mínima) al rojo (temperatura máxima), y se observa una distribución periódica de la temperatura en el medio. 101
32. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con malla fija uniformes de $N = 32$ elementos, $\alpha = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. 102
33. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con malla fija uniformes de $N = 32$ elementos, $\alpha = 10^{-5}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. 102
34. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 64$ elementos, $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 104
35. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de (p_h) de los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 64$ elementos, $\alpha = 10^{-5}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 105
36. Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método de Galerkin Continuo y la interpolación (Interp.) y los métodos discontinuos (**NIPG** , **SIPG** , **IIPG**) en mallas uniformes de $N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ con $\alpha = 1$ para $\mathbb{P}_2$. 106
37. Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método de Galerkin Continuo y la interpolación (Interp.) y los métodos discontinuos (**NIPG** , **SIPG** , **IIPG**) en mallas uniformes de $N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ con $\alpha = 10^{-5}$ para $\mathbb{P}_2$. 106
38. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas no uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 109
39. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas no uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\alpha = 10^{-5}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 110

40. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 10^{-3}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. . . . 113
41. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 10^{-5}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. . . . 114
42. Distribución espacial de la concentración del reactante $p(x)$ a lo largo de un poro de catalizador unidimensional modelado por Problema 4.3. Se utiliza una escala de colores que va del azul oscuro (concentración mínima) al rojo (concentración máxima) del catalizador. 116
43. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta^2 = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. 117
44. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta^2 = 1000$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. 117
45. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta^2 = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 119
46. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de (p_h) de los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta^2 = 1000$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 120
47. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta^2 = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. 121
48. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta^2 = 1000$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. 121
49. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta^2 = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 124
50. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta^2 = 1000$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 125
51. Representación gráfica de las aproximaciones (p_h) comparando los métodos NIPG SIPG IIPG para una **malla no uniforme** con $N = 8, 16$, $\mathbb{P}_2$ para $\eta^2 = 1000$ 128

52. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$ comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 129
53. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$ comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 1000$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, . . . 129
54. Representación gráfica de la concentración $p(x)$ que describe la presencia de una sustancia contaminante en el agua a lo largo de la coordenada unidimensional x, conforme a la solución proporcionada en la ecuación (4.19). La variación de la concentración a lo largo del dominio se visualiza mediante una paleta de colores que transita desde tonos azules oscuros (denotando concentraciones bajas) hasta tonos rojos (denotando concentraciones altas). 131
55. Convergencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG SIPG IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 133
56. Convergencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG SIPG IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta = 100$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 133
57. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG SIPG IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 135
58. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG SIPG IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta = 100$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 136
59. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 137
60. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 100$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 137
61. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 140
62. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 100$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 141

63. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 144
64. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 100$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, . . . 145
65. Distribución espacial de la concentración del contaminante en un medio unidimensional acuático subterráneo, representada por la solución (4.22). Se emplea una paleta de colores que transita desde el azul oscuro, indicando una concentración mínima, hasta el rojo, que representa una concentración máxima. Este gráfico ilustra cómo los contaminantes se dispersan, son advectados y absorbidos a lo largo del dominio $\Omega = (0, 1)$, conforme a la formulación presentada en el Problema 4.5. 148
66. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG SIPG IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos,$\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ 149
67. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG SIPG IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta = 10$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ 149
68. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG SIPG IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 151
69. Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG SIPG IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta = 10$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 152
70. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. 153
71. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 10$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. 153
72. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 156
73. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 10$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 157

74. Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$,comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 160
75. Estudio de convergencia$h$ de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 10$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, ... 161
76. Diagrama de Clases de los métodos DG: Representación formal de las relaciones y estructuras de clases que componen los métodos DG, utilizado para resolver problemas con características discontinuas. . . . 162
77. Proceso en Paralelo del cálculo de los parámetros de la solución DG . . 163

Índice de Tablas

1. Valores calculados de σ^0 para $\alpha = 1$ y distintos valores de l. 72
2. Valores calculados de σ^0 para $\alpha = 10^{-3}$ y distintos valores de l. 72
3. Tabla de valores para los tipos de partición para el estudio de mallas no uniformes 81
4. Valores Óptimos σ^0 para las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ cuando $\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$ 87
5. Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\alpha = 1$ 91
6. Tasa de convergencia para los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** con $\alpha = 10^{-3}$ 92
7. Tasa de convergencia para el método CG con $\alpha = 1$ 92
8. Tasa de convergencia para el método CG con $\alpha = 10^{-3}$ 93
9. Resumen de tasas de convergencia para $\alpha = 1$ hasta $N = 64$ 93
10. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ de mallas no uniformes hasta $N = 32$ y $\alpha = 1$ 96
11. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$ y $\alpha = 10^{-3}$ 97
12. Valores Óptimos σ^0 encontrados según las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ para $\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-5}$ 103
13. Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\alpha = 1$ 107
14. Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\alpha = 10^{-5}$ 107
15. Tasa de convergencia para el método CG con $\alpha = 1$ 108
16. Tasa de convergencia para el método CG con $\alpha = 10^{-5}$ 108
17. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$ y $\alpha = 1$ 111
18. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$ y $\alpha = 10^{-5}$ 112
19. Valores Óptimos σ^0 para $\eta^2 = 1$ y $\eta^2 = 1000$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 118
20. Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\eta^2 = 1$ 122
21. Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\eta^2 = 1000$ 122
22. Tasa de convergencia para el método CG con $\eta^2 = 1$ 123
23. Tasa de convergencia para el método CG con $\eta^2 = 1000$ 123
24. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta^2 = 1$ 126

25. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta^2 = 1000$ 127
26. Valores Óptimos σ^0 encontrados según las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ para $\eta = 1$ y $\eta = 100$ 134
27. Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\eta = 1$ 138
28. Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\eta = 100$ 138
29. Tasa de convergencia para el método CG con $\eta = 1$ 139
30. Tasa de convergencia para el método CG con$\eta = 100$ 139
31. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes,mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta = 1$ 142
32. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes,mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta = 100$ 143
33. Valores Óptimos σ^0 encontrados para $\eta = 1$, y $\eta = 10$ según las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 150
34. Tasa de convergencia para los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con $\eta = 1$ 154
35. Tasa de convergencia para los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con $\eta = 10$154
36. Tasa de convergencia para el método **CG** con $\eta = 1$ 155
37. Tasa de convergencia para el método **CG** con $\eta = 10$ 155
38. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta = 1$ 158
39. Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes,mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta = 10$ 159
40. Tiempo de ejecución de los métodos **CG** del tipo $\mathbb{P}_1$. $\mathbb{P}_2$. 165
41. Tiempo de ejecución de los métodos **NIPG** del tipo $\mathbb{P}_1$. $\mathbb{P}_2$. 165
42. Tiempo de ejecución de los métodos **SIPG** del tipo $\mathbb{P}_1$. $\mathbb{P}_2$. 166
43. Tiempo de ejecución de los métodos **IIPG** del tipo $\mathbb{P}_1$. $\mathbb{P}_2$. 166
44. Comparación de tiempos de ejecución medidos en programación tradicional y paralela con la función *time.monotonic()* de los métodos NIPG, SIPG,IIPG del tipo $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$. 167
45. Tasas de convergencia del método DG primales para mallas uniformes 169
46. Tasas de convergencia del método DG primales para mallas no uniformes169

Lista de Abreviaturas y Siglas

EDO	Ecuación diferencial ordinaria.
EDP	Ecuación diferencial parcial.
PVF	Problema con valores en la frontera.
MEF	Métodos de Elementos Finitos.
CG	Método de Galerkin Continuo.
MDG	Método de Galerkin discontinuo.
DG	Galerkin discontinuo.
IP	Método de Penalización Interior.
NIPG	Método de Galerkin de penalización interior no simétrica.
SIPG	Método de Galerkin de penalización interior simétrica.
IIPG	Método de Galerkin de penalización interior incompleta.

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Espacio Euclidiano unidimensional.
Ω	Dominio abierto acotado en en el espacio Euclidiano unidimensional $\mathbb{R}$.
I_n	Intervalo enésimo.
$\mathcal{E}_h$	Partición del intervalo I_n
l	Grado de polinomio.
$\mathbb{P}_l(I_n)$	Espacio de polinomios de grado l en el intervalo I_n.
$\mathcal{D}_l\left(\mathcal{E}_h\right)$	Espacio de polinomios discontinuos a trozos de grado menor o igual a l.
p	Solución exacta del problema.
$(-\alpha p')'$	Término responsable de la difusión.
$\beta(x)p'$	Término responsable de la advección.
γp	Término responsable de la absorción (o reacción).
P_h^{DG}	Solución aproximada del problema mediante el Método de Galerkin discontinuo.
ϵ	Parámetro de simetrización para la solución DG.
σ^0	Parámetro de penalización para la solución DG.

Índice general

1 Introducción . . . 18
1.1. Problema Modelo . . . 19
1.2. Conceptos Matemáticos Básicos . . . 20
1.3. Formulación Variacional . . . 24
1.4. Existencia y unicidad del problema difusión-advección . . . 25
1.5. Aproximación por elementos finitos discontinuos . . . 27
1.6. Objetivos . . . 29
1.6.1. Objetivo general . . . 29
1.6.2. Objetivos Específicos . . . 29
2 Método de Elementos Finitos Continuos (MEF CG) . . . 31
2.1. Problema aproximado Galerkin continuo . . . 31
2.2. Funciones Base . . . 32
3 Método de Galerkin Discontinuo (DG) . . . 36
3.1. Conceptos Matemáticos . . . 36
3.2. Formulación Variacional DG . . . 45
3.3. Elementos Finitos Discontinuos (MEF DG) . . . 53
3.4. Problema aproximado . . . 61
3.5. Estimativas del error numérico . . . 70
3.5.1. Estimativas del error en la norma de la energía . . . 70
4 Resultados Numéricos . . . 80
4.1. Problema de Difusión . . . 84
4.2. Problema de Difusión-Absorción . . . 115
4.3. Problema de Difusión-Advección . . . 130
4.4. Difusión-advección-absorción . . . 146
5 Aspectos computacionales . . . 162
5.1. Implementación computacional . . . 162
5.2. Costo Computacional . . . 164
5.3. Comparativa Temporal en Métodos DG: Paralelo vs. Secuencial . . . 167
6 Conclusiones . . . 168

Bibliografía . . . 172

1 Introducción

Las ecuaciones de difusión, absorción y advección son ecuaciones diferenciales parciales que describen el transporte de una sustancia en un medio. La difusión es el movimiento de una sustancia de una región de alta concentración a una región de baja concentración, debido a gradientes de concentración. La absorción es el movimiento de una sustancia desde un medio fluido a un sólido, debido a fuerzas intermoleculares. La advección es el movimiento de una sustancia junto con un flujo de fluido. Estos tres procesos se combinan para describir el transporte de una amplia gama de sustancias en una variedad de sistemas. En física, la ecuación de difusión describe el comportamiento macroscópico de micro-partículas en movimiento Browniano, lo que es esencial para entender procesos como la dispersión de contaminantes en sistemas hidrológicos y el flujo de calor en materiales (Taylor, 1954).

En el campo de la transferencia de calor, consideramos la teoría de flujo de calor unidimensional en una varilla delgada circular, un problema clásico adaptado de (*Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*, 2018). Este modelo utiliza la difusividad térmica como una constante crucial para describir la propagación del calor a lo largo de la varilla. En la química de materiales, específicamente en la catálisis, la difusión y la absorción dentro de un poro cilíndrico de un catalizador poroso isotérmico se describen a través de un enfoque matemático que involucra coeficientes de difusión y velocidades de reacción superficial (Charles G. Hill & Root, 1977).

Además, la difusión y la advección juegan un papel crucial en el análisis de la calidad del agua, especialmente en flujos superficiales con características de turbulencia homogénea y estacionaria (Taylor, 1954). En este contexto, se modela la dispersión longitudinal de contaminantes, proporcionando un marco para comprender la dinámica de contaminantes en ríos y acuíferos.

Por último, el estudio de la difusión, advección y absorción de contaminantes en medios unidimensionales, como flujos en acuíferos o ríos subterráneos, se aborda en investigaciones recientes (Pérez, 2016). Estos modelos incorporan términos de difusión, advección y absorción para simular la dispersión y transformación de contaminantes, lo que es esencial para la gestión y el tratamiento eficaz de recursos hídricos.

En conjunto, estos modelos demuestran la versatilidad y la importancia de las ecuaciones de difusión, absorción y advección en diversas aplicaciones prácticas. Desde el análisis de la calidad del agua hasta la transferencia de calor en materiales, estas ecuaciones proporcionan una base fundamental para el entendimiento y la solución de problemas complejos en ciencia e ingeniería.

1.1. Problema Modelo

Estudiaremos problemas que describen procesos de difusión, advección y absorción (o reacción) que son modelados por el siguiente PVF:

$$-\left(\alpha p'(x)\right)' + \left(\beta(x)p(x)\right)' + \gamma p(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$p(0) = \eta_0, \tag{1.2}$$

$$p(1) = \eta_1, \tag{1.3}$$

donde $\Omega = (0,1)$, $\alpha > 0$ es una constante, $\gamma \geq 0$ es una constante, β es una función que pertenece a $L^{\infty}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ dominio de Lipschitz acotado y abierto, y $f \in L^2(\Omega)$. En (1.1), el término $-(\alpha p')'$ es el responsable de la difusión, $(\beta(x)p)'$ por la advección y γp por la absorción (o reacción). Supongamos que la solución p de (1.1)-(1.3) pertenece a $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Casos de estudio

En esta tesis, nos enfocamos en estudiar distintos problemas de difusión y transporte en una región Ω. Comenzamos analizando los problemas de difusión, cuyo modelo matemático se puede describir por la ecuación:

$$-(\alpha p'(x))' = f(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

donde α es una función constante y positiva en Ω y f es una función dada en Ω.
Posteriormente, estudiamos el modelo de difusión-absorción, que se describe mediante la siguiente ecuación en Ω:

$$-(\alpha p'(x))' + \gamma p(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

donde γ es una función continua en Ω.
Además, consideramos el problema de difusión-advección, donde β es una constante:

$$-(\alpha p'(x))' + (\beta p(x))' = f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Finalmente, abordamos el problema difusión - absorción - advección, el cual se caracteriza por la ecuación:

$$-(\alpha p'(x))' + (\beta(x)\, p(x))' + \gamma p(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

donde $\beta(x) = x$.

1.2. Conceptos Matemáticos Básicos

En este apartado se exponen las definiciones matemáticas que se emplean a lo largo de la tesis. Se incluyen las definiciones de bases de funciones, espacios de Sobolev y funciones de prueba, esenciales para la formulación débil de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs).

Asimismo, se presentan las notaciones y definiciones necesarias para introducir los métodos propuestos para los problemas de difusión-absorción-advección. Esto incluye la terminología utilizada para describir los elementos finitos, las matrices de rigidez y las principales propiedades utilizadas para obtener los resultados numéricos desarrollados en la tesis.

Definición 1.1 (Norma en un espacio Vectorial) *Dado un espacio V,se llama norma a la función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ si para todo $p, q \in V$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos*

1. $\|p\| \geq 0$
2. $\|p\| = 0 \Leftrightarrow q = 0$
3. $\|tp\| = |t|\|p\|$
4. $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$

La función $\|\cdot\|$ se llama seminorma si solo se satisfacen las propiedades 1,3 y 4.

Definición 1.2 (Forma Bilineal) *Dado un espacio vectorial real V, la función $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ se llama forma bilineal si para todos $\lambda \in \mathbb{R}, p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in V$, tenemos*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p_1 + p_2, q) &= \mathcal{A}(p_1, q) + \mathcal{A}(p_2, q) \\ \mathcal{A}(\lambda p, q) &= \lambda \mathcal{A}(p, q) \\ \mathcal{A}(p, q_1 + q_2) &= \mathcal{A}(p, q_1) + \mathcal{A}(p, q_2) \\ \mathcal{A}(p, \lambda q) &= \lambda \mathcal{A}(p, q) \end{aligned}$$

Definición 1.3 *Una forma bilineal $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ con norma $\|\cdot\|_V$ se dice*

1. *Simétrica si*
$$\mathcal{A}(p, q) = \mathcal{A}(q, p), \quad \forall p, q \in V$$
2. *Continúa:* $|\mathcal{A}(p, q)| \leq C_1 \|p\|_V \|q\|_V \quad \forall p, q \in V$,
3. *Coerciva:* $C_2 \|p\|_V^2 \leq \mathcal{A}(p, p) \quad \forall p \in V$

donde C_1, C_2. son constantes positivas.

Definición 1.4 *Una funcional $\mathcal{F} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal, es continua si existe una constante $C_3 > 0$ tal que*

$$|\mathcal{F}(q)| \leq C_3 \|q\|_V, \quad \forall p \in V$$

Definición 1.5 ($L^2(\Omega)$ es un espacio de Banach) *Sea $\Omega = (a, b)$ un intervalo abierto, el espacio de funciones cuadrado integrables en el sentido de Lebesgue se define por,*

$$L^2(\Omega) = \left\{ q : \Omega \to \mathbb{R}, q \text{ es una función medible y } \int_\Omega |q(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

con el siguiente producto interno

$$(p, q)_{L^2} = \int_\Omega p(x)\, q(x) dx$$

y la norma

$$\|q\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |q(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Definición 1.6 ($L^2(\Omega)$ es un espacio de Banach) *Sea $\Omega = (a, b)$ un intervalo abierto, el espacio $H^1(\Omega)$ se define por,*

$$H^1(\Omega) = \left\{ q,\ q \in L^2(\Omega) \text{ y } q' \in L^2(\Omega) \right\}$$

con el siguiente producto interno

$$(p, q)_{H^1} = (p, q)_{L^2} + (p', q')_{L^2}$$

y la norma

$$\|q\|^2_{H^1} = \|q\|^2_{L^2} + \|q'\|^2_{L^2}$$

El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Banach y de Hilbert.

Definición 1.7 *El espacio $H^1_0(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ definido por,*

$$H^1_0(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega) : q(0) = 0, q(1) = 0 \text{ sobre } \Omega \right\} \tag{1.4}$$

Esencialmente, $H^1_0(\Omega)$ es el subespacio de $H^1(\Omega)$ de las funciones que se anulan en el borde de $\Omega, \partial\Omega$.

Teorema 1.8 (Lax-Milgram) *Sea H un espacio de Hilbert real. Si $\mathcal{A} : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal continua y coerciva y $\mathcal{L} : H \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo entonces existe un único $p \in H$ que satisface*

$$\forall q \in H, \quad \mathcal{A}(p, q) = \mathcal{L}(q)$$

Demostración: Ver (Brezis, 2010, p. 140) ■

Teorema 1.9 (Propiedad) *Sea $I =]a, b[$ y $x \in I$ entonces*

$$|p(x)| \leq (b-a)^{-1/2}\|p\|_{L^2(I)} + (b-a)^{1/2}\|p'\|_{L^2(I)} \tag{1.5}$$

Demostración: Sean $x, y \in I$ y por el teorema del cálculo

$$p(x) - p(y) = \int_x^y p'(s)ds \tag{1.6}$$

Integrando (1.6) en el intervalo I tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)dy - \int_a^b p(y)dy &= \int_a^b \int_x^y p'(s)dsdy \\
(b-a)p(x) - \int_a^b p(y)dy &= \int_a^b \int_x^y p'(s)dsdy \\
(b-a)p(x) &= \int_a^b p(y)dy + \int_a^b \int_x^y p'(s)dsdy
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Tomando el valor absoluto en (1.7) y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned}
(b-a)|p(x)| &\leq \int_a^b |p(y)|dy + \int_a^b \left|\int_x^y p'(s)ds\right| dy \\
(b-a)|p(x)| &\leq \left(\int_a^b |p(y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_a^b 1^2 dy\right)^{1/2} + (b-a)\int_a^b |p'(s)|\, ds \\
(b-a)|p(x)| &\leq (b-a)^{1/2}\|p\|_{L^2(I)} + (b-a)\left(\int_a^b |p'(s)|^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_a^b 1^2 dy\right)^{1/2} \\
(b-a)|p(x)| &\leq (b-a)^{1/2}\|p\|_{L^2(I)} + (b-a)^{3/2}\|p'\|_{L^2(I)} \\
|p(x)| &\leq (b-a)^{-1/2}\|p\|_{L^2(I)} + (b-a)^{1/2}\|p'\|_{L^2(I)}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

■

Teorema 1.10 (Teorema del trazo para polinomios) *Si q pertenece al espacio de polinomios $P_l(I) = \mathcal{L}\{x^i, i \leq l, x \in I\}$ de grado menor o igual a l, entonces la desigualdad del trazo ahora se convierte en*

$$|q(t)| \leq \frac{l+1}{\sqrt{|I|}}\|q\|_{L^2(I)}, \quad \forall t \in \partial I \quad y \quad \forall q \in \mathbb{P}_l(I), \tag{1.9}$$

Demostración: Ver (Warburton & Hesthaven, 2003, p. 2767) ■

Propiedades

Teorema 1.11 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz para sumas) *Si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y $b_1, b_2, \cdots, b_n$ son números reales cualesquiera, entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \tag{1.10}$$

Demostración: Ver (Charalambides, 2002, p. 46) ■

Teorema 1.12 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$\forall f, g \in L^2(\Omega), |(f,g)_\Omega| \leq \|g\|_\Omega \|f\|_\Omega \tag{1.11}$$

Demostración: Ver (Charalambides, 2002, p. 46) ■

Teorema 1.13 (Desigualdad de Young) *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $\theta > 0$ *entonces*

$$ab \leq \frac{\theta}{2}a^2 + \frac{1}{2\theta}b^2 \tag{1.12}$$

Demostración: Ver (Brezis, 2010, p. 92) ■

Definición del error y tasas de convergencia

Para analizar el comportamiento de las soluciones aproximadas definimos el error numérico obtenido en la malla $\mathcal{E}_h$ por

$$e_h(x) = p(x) - p_h(x), \tag{1.13}$$

donde p es la solución exacta y p_h es la solución aproximada.
Decimos que el error $e_h(x)$ en una determinada norma tiene una tasa de convergencia de $O(h^\delta)$ cuando satisface la siguiente desigualdad

$$\|e_h\| \leq Ch^\delta, \tag{1.14}$$

donde C es una constante independiente de h. Basados en (1.14) tenemos dos formas para calcular la potencia δ, la primera definir la función $E(h)$ como el valor a la derecha de la desigualdad (1.14) y evaluarla en h y $h/2$

$$E(h) = Ch^\delta \tag{1.15}$$

$$E(h/2) = C\left(\frac{h}{2}\right)^\delta \tag{1.16}$$

Dividiendo (1.15) en (1.16) y aplicando la función log obtenemos

$$\delta = \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{E(h)}{E(h/2)}\right),$$

Si se cumple la igualdad en (1.14) entonces hallamos δ de la siguiente forma

$$\delta = \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{\|e_h\|}{\|e_{h/2}\|}\right) \tag{1.17}$$

La otra forma para calcular δ es aplicar directamente la función log en (1.15)

$$\log\left(E(h)\right) = \delta \log h + \log C, \tag{1.18}$$

entonces la ecuación obtenida en (1.18) representa gráficamente una línea recta, como se muestra en la Figura 1, para h lo suficientemente pequeña, cuya pendiente es la potencia δ y que intersecta al eje de las ordenadas en $\log C$.

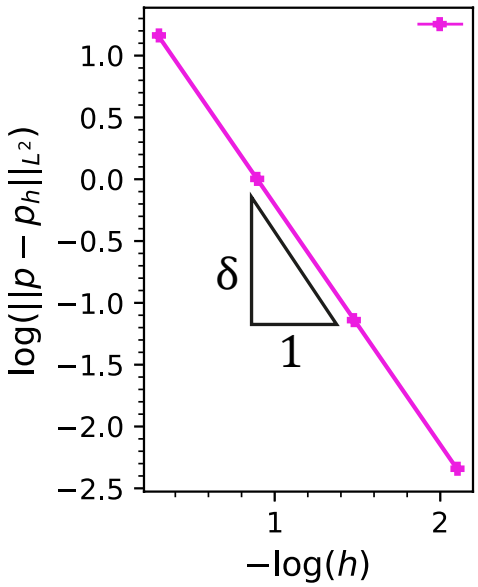


Figura 1 – Gráfica de $\log(\|e_h\|)$ vs $\log(h)$.

1.3. Formulación Variacional

En primera instancia, consideramos la ecuación definida en (1.1) - (1.3) bajo la condición de fronteras nulas.

Problema Variacional para fronteras nulas

Encontrar $p \in H^1(0,1)$ tal que

$$\mathcal{A}(p,q) = \mathcal{L}(q), \quad \forall q \in H_0^1(0,1) \tag{1.19}$$

donde,

$$\mathcal{A}(p,q) = \int_0^1 (\alpha p'q' + (\beta p)'q + \gamma pq)\, dx \tag{1.20}$$

$$\mathcal{L}(q) = \int_0^1 fv dx \tag{1.21}$$

No obstante, cuando dicha ecuación no posee fronteras nulas, se procede a realizar una extensión de la misma mediante una función lineal.

Problema Variacional general

Definamos la función lineal

$$p_1(x) = (\eta_1 - \eta_0)x + \eta_1 \text{ tal que } p_1(0) = \eta_0 \text{ y } p_1(1) = \eta_1$$

entonces si

$$p_0(x) = p(x) - p_1(x) \tag{1.22}$$

tenemos de (1.22),

$$p_0(0) = p(0) - p_1(0) = 0 \quad \text{y} \quad p_0(1) = p(1) - p_1(1) = 0$$

Luego reemplazando en (1.19) tenemos un nuevo problema variacional,
Encontrar $p_0 \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$\mathcal{A}(p_0, q) = \mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1, q), \quad \forall q \in H_0^1(0,1) \tag{1.23}$$

donde,

$$\mathcal{A}(p_0, q) = \int_0^1 \left(\alpha p_0' q' + (\beta(x)p_0)' q + \gamma p_0 q\right) dx \tag{1.24}$$

$$\mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1, q) = \int_0^1 fq dx - \left(\alpha p_1' q' + (\beta(x)p_1)' q + \gamma p_1 q\right) dx \tag{1.25}$$

1.4. Existencia y unicidad del problema difusión-advección

En esta sección, procederemos a examinar la existencia y unicidad del problema variacional definido en (1.23), asumiendo que $\beta(x) = 0$. Esta restricción se refiere al caso de un problema difusión-absorción, en el cual se da una simetría en la forma bilineal (1.24) que permite la aplicación del Teorema 1.8 (Lax-Milgram), como se demostrará más adelante.

$\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ es bilineal

Demostración: Considerando la definición de $\mathcal{A}$ en (1.24), se observa que es lineal en ambos argumentos. ■

$\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ es continua

Demostración: Usando la desigualdad de Schwartz, obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(p_0, q)| &\leq \alpha \int_0^1 |p_0' q'| dx + \gamma \int_0^1 |p_0 q| dx \\
&\leq \alpha \left(\int_0^1 |p_0'|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |q'|^2 dx\right)^{1/2} + \gamma \left(\int_0^1 |p_0|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |q|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \alpha \|p_0'\|_{L^2} \|q'\|_{L^2} + \gamma \|p_0\|_{L^2} \|q\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Sea $\delta_1 = \text{máx}\{\alpha;\gamma\} > 0$

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(p_0,q)| &\leq \delta_1 \left(\|p'\|_{L^2}^2 + \|p_0\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \left(\|q'\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \\ |\mathcal{A}(p_0,q)| &\leq \delta_1 \|p_0\|_{H^1} \|q\|_{H^1} \end{aligned}$$

Por tanto, la forma $\mathcal{A}(.,.)$ es continua en H_0^1. ■

$\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ es coerciva

Demostración:

$$\mathcal{A}(p_0,p_0) = \alpha \int_0^1 (p_0')^2\, dx + \gamma \int_0^1 (p_0)^2\, dx$$

Sea $\delta_2 = \text{mín}\{\alpha;\gamma\} > 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p_0,p_0) &\geq \delta_2 \left\{ \int_0^1 (p_0')^2\, dx + \int_0^1 (p_0)^2\, dx \right\} \\ &\geq \delta_2 \|p_0\|_{H^1}^2, \quad \forall p_0 \in H_0^1 \end{aligned}$$

Por tanto, la forma bilineal es coerciva en $H_0^1(0,1)$. ■

Adicionalmente, considerando el funcional $(f,q) = \mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1,q)$ definido en (1.25), se constata que este es lineal en el espacio $L^2(0,1)$.

Además, este funcional es acotado en $H_0^1(0,1)$, lo cual implica que existe una constante $C > 0$ tal que para toda $q \in H_0^1(0,1)$, se tiene:

$$|\mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1,q)|| \leq C\|q\|_{H_0^1}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1,q)|| &\leq \int_0^1 |fq - (\alpha p_1' q' + \gamma p_1 q)| dx \\ &\leq \left(\int_0^1 |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |q|^2 dx\right)^{1/2} + \alpha \left(\int_0^1 |p_1'|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |q'|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\quad + \gamma \left(\int_0^1 |p_1|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |q|^2 dx\right)^{1/2} \\ |\mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1,q)| &\leq \|f\|_{L^2}\|q\|_{L^2} + \alpha\|p_1'\|_{L^2}\|q'\|_{L^2} + \gamma\|p_1\|_{L^2}\|q\|_{L^2} \end{aligned}$$

Sea $\delta_3 = \text{mín}\{\alpha;\gamma\} > 0$ y $C_3 = \|f\|_{L^2}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1,q)| &\leq C_3\|q\|_{L^2} + \delta_3 \left(\|p_1'\|_{L^2}^2 + \|p_1\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \left(\|q'\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \\ |\mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1,q)| &\leq \left(C_3 + \delta_3\|p_1\|_{H_0^1}\right)\|q\|_{H_0^1} \\ &\therefore |\mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1,q)| \leq C\|q\|_{H_0^1} \quad \forall q \in H_0^1. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Donde $C = C_3 + \delta_3\|p_1\|_{H_0^1}$. ■

Finalmente, usando Teorema 1.8 (Lax-Milgram) obtenemos la existencia y unicidad de la solución $p = p(x) \in H_0^1(0,1)$.

1.5. Aproximación por elementos finitos discontinuos

El primer método de Galerkin discontinuo (DG) para ecuaciones hiperbólicas fue introducido por Reed y Hill en 1973. En particular, el método de Galerkin de penalización interior simétrica (SIPG , por sus siglas en inglés), un ejemplo de métodos de Galerkin discontinuos, utiliza penalizaciones para imponer débilmente tanto la continuidad de la solución como las condiciones de contorno. El método es simétrico, lo que implica que sea conservativo,no introduce errores numéricos en la conservación de la energía y la cantidad de movimiento. Para los problemas elípticos, la forma bilineal del método SIPG se introdujo por primera vez en (Epshteyn & Riviere, 2007) en un esquema de elementos finitos de colocación.
En (N. D. Arnold et al., 2002) se hace mención una de las características principales del método de Galerkin Discontinuo es mantenerse inmune a muchos de los problemas que afectan comúnmente a los métodos de diferencias finitas de alto orden y volumen finito de orden superior y, como tal, tiene el potencial de traer la solidez de los métodos de bajo orden y la eficiencia de los métodos de alto orden para afectar a una amplia clase de problemas de ingeniería. Esto se debe a que el método DG combina dos características distintivas del volumen finito y de los métodos de elementos finitos (Bassi & Rebay, 2000). Otra de las ventajas del método DG frente a los métodos convencionales son: *la estabilidad, la alta precisión para las mallas no estructuradas, la adaptabilidad para el refinamiento local-hp, la imposición de condiciones de contorno débil, la conservación local del método, la facilidad de paralelizar*. Los métodos de Galerkin Continuo Clásico no están presentes en los dos últimos apartados. No obstante, una desventaja del método DG reside en su dependencia del método de cuadratura numérica, la cual incrementa considerablemente el costo del mismo y ha restringido su aplicación a formas de elementos. Para solucionar este problema, y que la cuadratura esté fácilmente disponible, (Atkins, 2000) propuso una formulación sin cuadratura que permite implementar el método de Galerkin discontinuo para cualquier forma de elemento y para funciones de base polinómica de cualquier grado. Sin embargo, la mencionada dificultad no reviste mayor importancia, puesto que, en la práctica, son los métodos de orden inferior los que se emplean con mayor frecuencia. Las características propias de los problemas del mundo real suelen tornar ineficaces, cuando no totalmente inoperantes, a los métodos de orden elevado.

Ventajas del Método DG

Los métodos de DG tienen las siguientes ventajas principales sobre los métodos clásicos de volumen finito y diferencias finitas

En el artículo de Atkins y Reitmann (Atkins, 2000), se menciona que el método de Discontinuos Galerkin (DG) es adecuado para geometrías complejas y para mallas no

estructuradas, ya que su formulación compacta puede ser aplicada sin modificación en la vecindad de un límite, lo que mejora la robustez y precisión de la implementación de las condiciones de frontera. Además, el método DG ha demostrado ser insensible a la suavidad de la malla, lo que aumenta aún más su versatilidad. Según el mismo autor, los métodos de DG también son muy adecuados para lograr una precisión uniforme de alto orden en el tratamiento de las condiciones de contorno. Por otro lado, Bassi y Rebay (Bassi & Rebay, 2000) indican que el método DG es ideal para calcular soluciones precisas de alto orden de las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes en cuadrículas generales no estructuradas.
Riviere (Rivière, 2008) afirma que tanto los métodos DG como CG convergen a medida que se disminuye el tamaño de la malla o se aumenta el grado del polinomio. En cuanto a las estimaciones de error, estas son óptimas en la norma energética para ambos métodos. Sin embargo, para la norma L^2, las estimaciones son óptimas solamente en el método CG, mientras que en el método DG solo son óptimas en su versión simétrica (SIPG) si no se usa la superpenalización. En términos de precisión, no se puede afirmar que un método sea superior al otro, ya que para una malla fija, es posible encontrar problemas que produzcan una mejor solución en DG que en CG, y viceversa. Según Atkins (Atkins, 2000), es posible obtener métodos de DG con orden formal de precisión arbitrariamente alto al elegir adecuadamente el grado de los polinomios aproximados.

La conservación local en los métodos de Discontinuous Galerkin (DG) a menudo se considera una propiedad ventajosa en comparación con los métodos continuos. Según (Hughes et al., 2000), esta propiedad se debe a que la función de ponderación puede establecerse exactamente en el valor 1 en el subdominio o elemento de interés y cero en cualquier otro lugar debido a la naturaleza discontinua del espacio funcional de ponderación. Por otro lado, según (Rivière, 2008), el método DG satisface un balance de masa local, mientras que el método Continuous Galerkin (CG) solo satisface un balance de masa global en todo el dominio computacional. La propiedad de conservación local de la masa es crucial en problemas de flujo y transporte, como los que surgen en medios porosos. Sin embargo, la importancia de la conservación masiva local en otras aplicaciones es cuestionable.

En el artículo de Rivière (Rivière, 2008), se menciona que las condiciones de frontera de Dirichlet se imponen débilmente en el método DG y fuertemente en el método CG. Sin embargo, esto es una cuestión de preferencia y también es posible imponer condiciones de contorno con fuerza en el método DG.

(Atkins, 2000) afirma que los métodos de Discontinuous Galerkin (DG) son adecuados para manejar estrategias de adaptabilidad, ya que la refinación o no refinación de la cuadrícula se puede lograr sin considerar las restricciones de continuidad típicas de los métodos de elementos finitos conformes. Además, el grado del polinomio de aproximación puede ser cambiado fácilmente de un elemento a otro, siendo esto especialmente importante en problemas hiperbólicos debido a la complejidad de la estructura de las discontinuidades

(Atkins, 2000).

Por otro lado, (Rivière, 2008) menciona que los métodos DG son altamente paralelizables debido a que la matriz de masa es diagonal en bloques, y estos se pueden invertir de forma sencilla. Además, Riviere destaca que los métodos DG pueden manejar fácilmente estrategias de adaptabilidad, permitiendo que el grado del polinomio aproximado se cambie fácilmente de un elemento a otro (Rivière, 2008) .

1.6. Objetivos

1.6.1. Objetivo general

El objetivo central de esta tesis consiste en explorar una nueva metodología en el campo de los elementos finitos, empleando dicha técnica para la ampliación de su aplicación en escenarios que involucran problemas de difusión, absorción y advección. Este enfoque busca contribuir en el avance de los métodos numéricos, mediante un análisis detallado.

La investigación se enfoca en evaluar la convergencia de los métodos de Discontinuidades Galerkin (DG) en comparación con los Métodos de Galerkin Clásicos (CG). Además, se implementa la programación en paralelo, aprovechando la capacidad de múltiples procesadores para la ejecución eficiente de los cálculos, superando así los desafíos inherentes a la eficiencia computacional.

1.6.2. Objetivos Específicos

1. **Estudio de Tasas de Convergencia:** Comparar las tasas de convergencia de los Métodos DG y Métodos clásicos de los Elementos Finitos (CG) en diversos problemas de difusión - absorción - advección, examinando cómo las variaciones paramétricas afectan el comportamiento de las soluciones y por tanto las tasas.

2. **Exploración de Variantes en Métodos DG:** Caracterizar las distintas variantes de los Métodos de Galerkin Discontinuo, enfocándose en estrategias de estabilización y penalización paramétricas, para entender su influencia en la solución de problemas de difusión - absorción - advección.

3. **Optimización del Parámetro de Estabilización:** Desarrollar una metodología sistemática para identificar el parámetro de estabilización óptimo en los Métodos DG, buscando encontrar una aproximación más precisa y con un mejor rendimiento computacional.

4. **Evaluación de la Robustez del Método:** Evaluar la robustez y fiabilidad del método de Galerkin Discontinuo propuesto, identificando escenarios susceptibles y límites de aplicabilidad.

5. **Implementación de Técnicas de Procesamiento Paralelo:** Aplicar y adaptar técnicas avanzadas de procesamiento paralelo para mejorar significativamente la eficiencia en los tiempos de ejecución de los Métodos DG, facilitando el abordaje de problemas de mayor complejidad computacional.

6. **Uso de Herramientas Computacionales Python y Maple:** Emplear las herramientas de programación Python y Maple para la implementación precisa de los métodos y la obtención de evaluaciones de los errores numéricos.

7. **Estudio de Análisis Numérico** Llevar a las herramientas de programación Python y Maple para la implementación precisa de los métodos y la obtención de evaluaciones de los errores numéricos.

8. **Realizar el estudio de Análisis Numérico en la norma de la energía** Se concibe llevar a cabo un estudio de análisis numérico la norma de la energía, con el propósito de evaluar la estabilidad, consistencia y convergencia de los Métodos de Galerkin Discontinuo (DG) en diferentes escenarios para la interpretación y validación de los resultados empíricos.

2 Método de Elementos Finitos Continuos (MEF CG)

El objetivo es aproximar el espacio de soluciones utilizando un subconjunto de dimensión finita. Mediante el Método de Galerkin, representamos este espacio con un subconjunto finito. Introducimos el subespacio V_m generado por m elementos de la base $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$ de $H_0^1(0,1)$, para buscar una solución aproximada $p^h(x)$ al problema (1.23) en V_m.

2.1. Problema aproximado Galerkin continuo

Aproximamos el problema (1.23) con la siguiente formulación:

$$\mathcal{A}(p_0^h, q) = \mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1, q), \quad \forall q \in V_m \tag{2.1}$$

donde,

$$p_0^h(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j \varphi_j(x) \quad \varphi_j \in V_m \tag{2.2}$$

Es una solución aproximada de $p_0 = p_0(x)$.

Para obtener la solución aproximada $p_h \in V_m$ es necesario determinar los coeficientes C_j. Reemplazando (2.2) en (2.1)

$$\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m} C_j \varphi_j, q\right) = \mathcal{L}(q) - \mathcal{A}(p_1, q) \quad \varphi_j \in V_m \tag{2.3}$$

Como $q \in V_m$, entonces podemos, en particular, tomar $q = \varphi_i(x)$.

$$\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m} C_j \varphi_j, \varphi_i\right) = (f, \varphi_i) - \mathcal{A}(p_1, \varphi_i) \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathcal{A}\left(\varphi_i, \varphi_j\right) C_j = (\varphi_i, f) - \mathcal{A}(\varphi_i, p_1), \quad \text{para } i = 1 \cdots m$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{m} K_{ij} C_j = F_i, \quad \text{para } i = 1 \cdots m$$

Denotando por

- $K = [Kij]$: Matriz de rigidez global de orden $m \times m$
- $F = [Fi]$: Vector de Fuerza global de orden $m \times 1$

- $C = (C_1, \cdots, C_m)$ el vector incógnita

Obtenemos el sistema lineal

$$K \cdot C = F$$

donde

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \mathcal{A}(\varphi_i, \varphi_j) \\ F_i &= (f, \varphi_i) - \mathcal{A}(p_1, \varphi_i), \quad 1 \leq i, j \leq m \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2. Funciones Base

El objetivo al elegir las funciones base $\varphi_i(x)$ es obtener una matriz dispersa para el sistema lineal resultante. En nuestro estudio, se escogen funciones de interpolación lineal por partes.

Función base lineal y sus primeras derivadas

Consideramos el subespacio $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$, donde

$$V_m = \left\{ q_h \in V;\, q_h|_{I_i} = q_h^i \in P_1(I_i) \right\}$$

donde $P_1(I_i)$ un polinomio de grado 1 en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Las funciones φ_i de interpolación lineal satisfacen $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y los nodos $x_j \in [0, 1]$ están distribuidos equidistantemente con paso $h_i = x_{i+1} - x_i$.

La función $\varphi_n(x)$ y su derivada, definidas por tramos en cada nodo i, son:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \forall x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1} - x_j}{h} & \forall x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \forall x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases} \qquad \varphi_n'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \forall x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{-1}{h} & \forall x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \forall x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$$

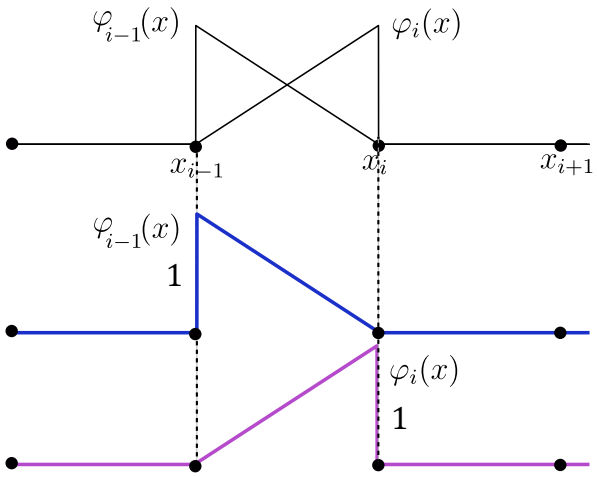


Figura 2 – Representación geométrica de las funciones bases lineales continuas por partes para $h = 1/4$

Función base cuadrática y sus primeras derivadas

Consideramos el subespacio V_m^2, definido por polinomios de grado 2 en cada elemento finito I_i, donde $I_i = \left[x_{2i}, x_{2(i+1)}\right]$ con un punto adicional $x_{2i+1} \in I_i$, generando subintervalos $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ y $\left[x_{2i+1}, x_{2(i+1)}\right]$.

El subespacio V_m^2 es generado por funciones de prueba $[\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{2m}]$, definidas como:

- Funciones de prueba pares φ_{2i}, con $\varphi_{2i}(x)$ no nulo solo en $[x_{2i-2}, x_{2i+2}]$.
- Funciones de prueba impares φ_{2i+1}, con $\varphi_{2i+1}(x)$ no nulo solo en $[x_{2i}, x_{2i+2}]$.

Las funciones se definen explícitamente por:

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h_i}(x - x_{2i-2}) + \frac{2}{h_i^2}(x - x_{2i-2})^2, & \forall x \in [x_{2i-2}, x_{2i}]\,, \\ 1 - \frac{3}{2h_i}(x - x_{2i}) + \frac{1}{2h_i^2}(x - x_{2i})^2, & \forall x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]\,, \\ 0, & \forall x \notin [x_{2i-2}, x_{2i+2}] \end{cases}$$

$$\varphi_{2i+1}(x) = \begin{cases} -\frac{4}{h_i^2}(x - x_{2i})(x - x_{2i+2}), & \forall x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]\,, \\ 0, & \forall x \notin [x_{2i}, x_{2i+2}] \end{cases}$$

En los extremos $x_0 = 0$ y $x_{2m} = 1$, las funciones φ_0 y φ_{2n} se definen de manera especial. La propiedad clave es que en el nodo x_{2i}, $(\varphi_{2i}, \varphi_{2i+j}) = 0$ para $|j| \geq 3$, resultando en una matriz global K pentagonal.

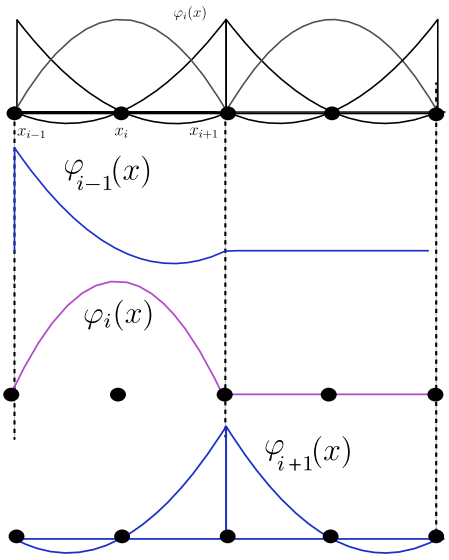


Figura 3 – Representación geométrica de las funciones bases cuadrática continuas por partes para $h = 1/4$

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar la aplicación de MEF CG. El ejemplo se enfoca en una ecuación diferencial con condiciones de contorno específicas y una función fuerza dada, permitiendo una comparación detallada de la convergencia de las soluciones aproximadas con la solución exacta conocida

Ejemplo 2.1

$$\begin{cases} -\left(\alpha p'(x)\right)' = f(x) & \forall x \in \Omega = (0,1) \\ p(0) = 0 \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Donde α constante positiva y

$$f(x) = 64 \cdot (\pi^2) \cdot \operatorname{sen}(8\pi x)$$

Con solución exacta

$$p(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \operatorname{sen}(8\pi x)$$

En la Figura 5 se muestra el estudios de convergencia h para la solución aproximada p_h del Ejemplo 2.1 donde se adoptan mallas uniformes de $N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ elementos del tipo $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ continua.

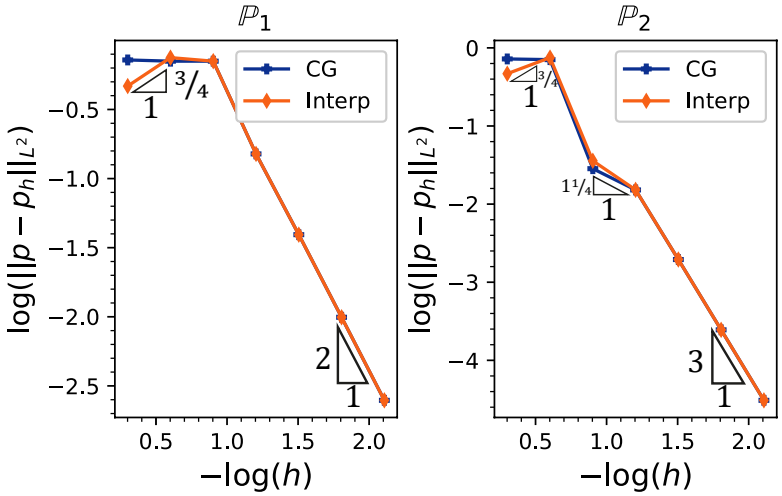


Figura 4 – Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método de Galerkin Continuo y la interpolación (Interp.) en mallas uniformes y $\boldsymbol{\alpha = 1}$ para $\mathbb{P}_1$ (izquierda) y $\mathbb{P}_2$ (derecha).

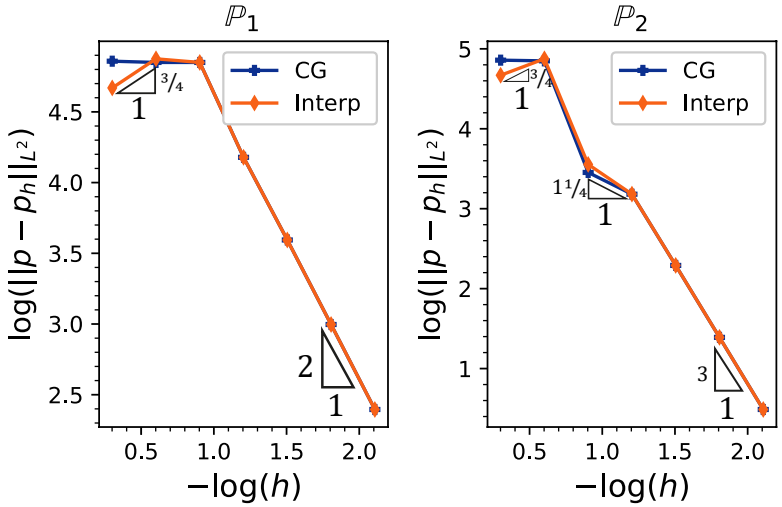


Figura 5 – Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método de Galerkin Continuo y la interpolación (Interp.) en mallas uniformes y $\boldsymbol{\alpha = 10^{-5}}$ para $\mathbb{P}_1$ (izquierda) y $\mathbb{P}_2$ (derecha).

3 Método de Galerkin Discontinuo (DG)

En este capítulo, se definen las notaciones y conceptos clave para los métodos discontinuos de elementos finitos, enfocándose en los métodos de penalización basados en flujos numéricos. Los operadores traza, fundamentales en estos métodos, permiten la transferencia de información entre elementos adyacentes y aseguran la continuidad de la solución aproximada. Esta tesis aplica estos métodos discontinuos y su estrategia de penalización para abordar el problema de investigación, presentando y analizando los resultados numéricos obtenidos en capítulos

3.1. Conceptos Matemáticos

Sea

$$
\begin{aligned}
I_n &= (x_n, x_{n+1}) \text{ intervalo } n\text{-esimo de } \Omega && (3.1)\\
I &= I_n \text{ para algún } n && (3.2)\\
\mathcal{E}_h &= \bigcup I_n \text{la unión de todos los intervalos } I && (3.3)\\
\partial\mathcal{E}_h &= \{\partial I : I \in \mathcal{E}_h\} && (3.4)
\end{aligned}
$$

En la Figura 6, mostramos dos elementos correspondientes a una malla uniforme sobre el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$ donde un par de intervalos vecinos, I_n y I_{n+1}, comparten el punto x_n

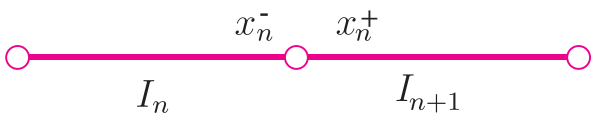


Figura 6 – Representación de una malla uniforme sobre el dominio Ω, donde se ilustran dos elementos adyacentes I_n y I_{n+1} compartiendo el punto x_n.

Definición de Espacios

Sea Ω un dominio abierto y $\mathcal{E}_h$ una partición de Ω en elementos finitos I_n con interiores disjuntos y puntos x en ∂I_n. Introducimos los espacios de Sobolev discontinuos $H^s(\mathcal{E}_h)$ para cualquier número real s:

$$
H^s(\mathcal{E}_h) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \forall I_n \in \mathcal{E}_h,\ q|_{I_n} \in H^s(I_n) \right\} \tag{3.5}
$$

Equipado con la norma del espacio de Sobolev discontinuo:

$$\|q\|_{H^s(\mathcal{E}_h)} = \left(\sum_{I_n \in \mathcal{E}_h} \|q\|^2_{H^s(I_n)} \right)^{1/2} \tag{3.6}$$

Y la seminorma de la derivada:

$$\|q'\|_{H^0(\mathcal{E}_h)} = \left(\sum_{I_n \in \mathcal{E}_h} \|q'\|^2_{L^2(I_n)} \right)^{1/2} \tag{3.7}$$

Definimos el subespacio de dimensión finita del espacio $H^s(\mathcal{E}_h)$. Sea l un número entero positivo. El subespacio de elementos finitos $D_l(\mathcal{E}_h)$ se llama espacio de polinomios discontinuos por partes de grado l:

$$D_l(\mathcal{E}_h) = \{q \in H^s(\mathcal{E}_h) : q|_{I_n} \in \mathbb{P}_l(I_n),\ \forall I_n \in \mathcal{E}_h\} \tag{3.8}$$

Donde $\mathbb{P}_l$ denota el espacio de polinomios de grado total menor o igual a l en el intervalo I_n.

Teorema 3.1 *Sea I un intervalo y $p \in H^s(I)$ para $s \geq 1$. Sea $l \geq 0$ un entero. Existe una constante C independiente de p y h, longitud del intervalo I, y una función $\widetilde{p} \in \mathbb{P}_l(I)$ tal que*

$$\|p - \widetilde{p}\|_{H^p(I)} \leq C h_I^{\min\{l+1,s\}-p} |p|_{H^s(I)}, \quad \forall 0 \leq q \leq s$$

donde $h_I = \sup_{x,y \in I} \|x - y\|$.

Demostración: Ver (Rivière, 2008, p. 24) ■

Formulación del Flujo

Los flujos numéricos funcionan principalmente para mantener la estabilidad del método al facilitar la transmisión de información entre elementos adyacentes. De esta manera se consigue la continuidad y el ensamblaje del método.

La clase de métodos DG se subdivide naturalmente en métodos completamente conservadores y métodos parcialmente conservadores, en uno y en métodos cuyos flujos son independientes de σ^0 y métodos que no lo son. Los métodos completamente conservadores dan lugar a problemas simétricos cuando los parámetros de sus flujos numéricos están adecuadamente definidos, y que los métodos parcialmente conservadores pueden dar lugar a métodos no simétricos (N. D. Arnold et al., 2002).Los métodos DG cuyos flujos numéricos son independientes de σ^0 producen matrices de rigidez con un número notablemente menor de entradas distintas de cero. (N. D. Arnold et al., 2002) afirma que tal marco unificado podría facilitar la comprensión de los diversos métodos y sus relaciones, así como un

posible análisis unificado de sus propiedades de convergencia.
Debido a la aproximación de funciones discontinuas, los términos de flujo no son únicamente definidos en las interfaces de los elementos. Debido a esto, es necesario distinguir el elemento al que pertenece y asegurar un acoplamiento entre elementos vecinos (I_n y I_{n+1}.). Es en esta etapa cuando la técnica tradicionalmente utilizada en esquemas de volumen finito se toma prestado por el método de elementos finitos discontinuos (Bassi & Rebay, 2000).

Operadores traza

Definición 3.2 (Operadores traza) *Dado $q \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h)$ y considerando dos elementos adyacentes I_n y I_{n+1} en la partición $\mathcal{E}_h$ sobre el dominio Ω. Denotamos:*

$$q\left(x_n^+\right) = \lim_{\substack{\zeta \to 0 \\ \zeta > 0}} q\left(x_n + \zeta\right) \tag{3.9}$$

$$q\left(x_n^-\right) = \lim_{\substack{\zeta \to 0 \\ \zeta > 0}} q\left(x_n - \zeta\right) \tag{3.10}$$

Entonces definimos el salto y el promedio de q en los extremos de I_n

- *Operador Promedio*

$$\{\!\{q\left(x_n\right)\}\!\} = \frac{1}{2} \cdot \left(q\left(x_n^-\right) + q\left(x_n^+\right)\right) \tag{3.11}$$

- *Operador Salto*

$$[\![q\left(x_n\right)]\!] = q\left(x_n^-\right) - q\left(x_n^+\right) \tag{3.12}$$

La utilización de estos operadores, media y salto, en los métodos de elementos finitos discontinuos permiten capturar y manipular la información necesaria con el objetivo de garantizar la continuidad y la precisión de la solución aproximada en la interfaz entre los elementos adyacentes. La media proporciona una estimación promediada de la función q en la interfaz entre los elementos, permitiendo garantizar la continuidad de la solución aproximada en la interfaz entre los elementos adyacentes. Por otro lado, el salto se utiliza para cuantificar la discontinuidad o el cambio abrupto en la solución aproximada en la interfaz entre los elementos.

Con las definiciones de los operadores traza, realizaremos cálculos que serán usados más adelante, específicamente en la formulación variacional del problema modelo. Extendemos los operadores salto y promedio de v en los puntos finales de I_0, I_N.

$$\begin{aligned}
[\![q\left(x_0\right)]\!] &= -q\left(x_0^+\right) \\
\{\!\{q\left(x_0\right)\}\!\} &= q\left(x_0^+\right) \\
[\![q\left(x_N\right)]\!] &= q\left(x_N^-\right) \\
\{\!\{q\left(x_N\right)\}\!\} &= q\left(x_N^-\right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Definición 3.3 (Términos de salto de la solución) *Se define una forma bilineal $\mathcal{J}_0$ que representa el término de salto de la solución.*

$$\mathcal{J}_0(p,q) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}} [\![p(x_n)]\!][\![q(x_n)]\!]$$

Donde σ^0 es un número real no negativo.

Observación 1: El término de penalización tiene como objetivo imponer la continuidad del flujo y estabilizar.

Principales estimativas

Ļema 3.4 *Sea $\Omega = (0,1)$ un dominio abierto y acotado en $\mathbb{R}$, $p \in C^2([0,1])$ y $\alpha > 0$ constante, $q \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h)$ $x_n \in I_n$ para $1 \leq n \leq N-1$ se tiene*

$$[\![\alpha p'(x_n)\, q(x_n)]\!] = \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] + \{\!\{q(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] \tag{3.14}$$

Demostración: Expresando los términos de la derecha con las definiciones del promedio (3.11) y salto (3.12) se tiene

$$\{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] = \frac{1}{2}\left(\alpha p'(x_n^-) + \alpha p'(x_n^+)\right)\left(q(x_n^-) - q(x_n^+)\right) \tag{3.15}$$

$$\{\!\{q(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] = \frac{1}{2}\left(q(x_n^-) + q(x_n^+)\right)\left(\alpha p'(x_n^-) - \alpha p'(x_n^+)\right) \tag{3.16}$$

Sumando (3.15) y (3.16)

$$\begin{aligned}\{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] + \{\!\{q(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] = & \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^-)q(x_n^-) - \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^-)q(x_n^+) \\ & + \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^+)q(x_n^-) - \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^+)q(x_n^+) \\ & + \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^-)q(x_n^+) - \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^+)q(x_n^-) \\ & + \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^-)q(x_n^+) - \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^+)q(x_n^+)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] + \{\!\{q(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] = & \\ \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^-)q(x_n^-) - \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^-)q(x_n^+) + \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^+)q(x_n^-) - \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^+)q(x_n^+) + & \\ \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^-)q(x_n^+) - \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^+)q(x_n^-) + \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^-)q(x_n^+) - \frac{1}{2}\alpha p'(x_n^+)q(x_n^+) &\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] + \{\!\{q(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] = \alpha p'(x_n^-)q(x_n^-) - \alpha p'(x_n^+)q(x_n^+)$$

$$\therefore \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] + \{\!\{q(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] = [\![\alpha p'(x_n)\, q(x_n)\,(x_n)]\!]$$

■

Ļema 3.5 *Sea $p \in C^2(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ constante satisfacen*

$$[\![\alpha p(x_n)]\!] = 0 \quad y \quad [\![\alpha p'(x_n)]\!] = 0 \text{ para todo } 1 \leq n \leq N-1,$$

Demostración: Desde que $p \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, luego el salto

$$[\![p(x_n)]\!] = p\left(x_n^-\right) - p\left(x_n^+\right) = 0 \tag{3.17}$$

$$[\![p'(x_n)]\!] = p'\left(x_n^-\right) - p'\left(x_n^+\right) = 0 \tag{3.18}$$

$$\therefore [\![\alpha p(x_n)]\!] = 0 \quad y \quad [\![\alpha p'(x_n)]\!] = 0$$

■

Teorema 3.6 *Sea una partición $\mathcal{E}_h$ de $(0,1)$, y ϵ cualquier número real, $\alpha, \beta > 0$ Además sea $p \in \mathcal{C}^2([0,1])$. Entonces*

$$\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] = -\epsilon\alpha q'(x_0)p(x_0) + \epsilon\alpha q'(x_N)p(x_N) \tag{3.19}$$

Demostración: Consideramos una partición $\mathcal{E}_h$ de $(0,1)$, desde que p es continua en $[0,1]$, luego $[\![p(x_n)]\!] = 0 \quad \forall x_n \in [0,1]$. Luego,

$$\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] = 0 \qquad \forall x_n \in (0,1)$$

Por tanto, se reduce la ecuación

$$\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] = \epsilon\left(\{\!\{\alpha q'(x_0)\}\!\}[\![p(x_0)]\!] + \{\!\{\alpha q'(x_N)\}\!\}[\![p(x_N)]\!]\right) \tag{3.20}$$

De (3.13) en (3.20)

$$\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] = -\epsilon\alpha p\left(x_0^+\right) q'\left(x_0^+\right) + \epsilon\alpha p\left(x_N^-\right) q'\left(x_N^-\right) \tag{3.21}$$

Luego

$$\therefore \epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] = -\epsilon\alpha q'(x_0)p(x_0) + \epsilon\alpha q'(x_N)p(x_N)$$

■

Teorema 3.7 (Propiedad de la Penalización) *Sea una partición $\mathcal{E}_h$ y $p \in \mathcal{C}^2([0,1])$. Entonces se verifica la equivalencia*

$$\mathcal{J}_0(q,p) = \frac{\sigma^0}{h_{0,1}} q(x_0)\, p(x_0) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}} q(x_N)\, p(x_N)$$

Demostración: Desde que $p \in \mathcal{C}^2([0,1])$, es continua. Así, de Ļema 3.5

$$[\![p(x_n)]\!] = 0 \text{ para todo } 1 \leq n \leq N-1,$$

Entonces el término $\mathcal{J}_0(q,p)$ se reduce

$$\mathcal{J}_0(q,p) = \frac{\sigma^0}{h_{0,1}}[\![q(x_0)]\!][\![p(x_0)]\!] + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}}[\![q(x_N)]\!][\![p(x_N)]\!]$$

De (3.13) se tiene

$$\begin{aligned} [\![p(x_0)]\!] &= -p\left(x_0^+\right) \\ [\![p(x_N)]\!] &= p\left(x_N^-\right) \\ [\![q(x_0)]\!] &= -q\left(x_0^+\right) \\ [\![q(x_N)]\!] &= q\left(x_N^-\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por tanto

$$\mathcal{J}_0(q,p) = \frac{\sigma^0}{h_{0,1}} q\left(x_0{}^+\right) p(x_0) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}} q\left(x_N{}^-\right) p(x_N)$$

Finalmente

$$\therefore \mathcal{J}_0(q,p) = \frac{\sigma^0}{h_{0,1}} q(x_0)\, p(x_0) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}} q(x_N)\, p(x_N)$$

■

Problema Modelo Local

Para derivar los métodos Galerkin discontinuos, primeramente definimos el problema modelo (1.1) en cada elemento finito $I_n = (x_n, x_{n+1})$, donde $n = 0, \ldots, N-1$ de una malla uniforme de elementos $\mathcal{E}_h$, originando el siguiente problema local,

$$-(\alpha p'(x))' + (\beta(x)p(x))' + \gamma p(x) = f(x) \quad \forall x \in I_n \tag{3.23}$$

con las condiciones de interfaces definidas en los nodos interiores,

$$[\![p(x_n)]\!] = 0, \ \forall n = 1, \cdots, N-1. \tag{3.24}$$

$$[\![p'(x_n)]\!] = 0, \ \forall n = 1, \cdots, N-1. \tag{3.25}$$

Multiplicamos $q \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h)$ a la ecuación(3.23) e integramos en el intervalo I_n. Debido a que q no está definido en los extremos del intervalo I_n usaremos el intervalo $[x_n + \zeta, x_{n+1} - \zeta]$, entonces tenemos

$$\int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} -(\alpha p'(x))'q(x) + (\beta(x)p(x))'q(x) + \gamma p(x)q(x)dx = \int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} f(x)q(x)dx \tag{3.26}$$

Integrando por partes en I_n.

$$\begin{aligned} -\alpha p'(x)q(x)\big|_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} &+ \int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))'q(x) + \gamma p(x)q(x)dx \\ &= \int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} f(x)q(x)dx \end{aligned} \tag{3.27}$$

Tomando límite en (3.27) obtenemos, $\forall n = 0, \ldots, N-1$.

$$\begin{aligned} \alpha\int_{x_n}^{x_{n+1}} p'(x)q'(x)dx + \gamma\int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x)q(x)dx &+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\beta(x)p(x))'q(x)dx \\ -\lim_{\zeta\to 0} p'(x_{n+1}-\zeta)q(x_{n+1}-\zeta) &+ \lim_{\zeta\to 0} p'(x_n+\zeta)q(x_n+\zeta) \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)q(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\int_{x_n}^{x_{n+1}} p'(x)q'(x)dx + \gamma\int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x)q(x)dx &+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\beta(x)p(x))'q(x)dx \\ -p'(x_{n+1}^-)q(x_{n+1}^-) &+ p'(x_n^+)q(x_n^+) \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)q(x)dx, \end{aligned}$$

Si sumamos las N ecuaciones obtenemos la definición de saltos en q, y es posible realizar la suma extendiendo el problema local(3.23) al problema modelo (1.1)-(1.3).

Del problema Local al problema Global

Sea $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$, una partición $\mathcal{E}_h$ de Ω. Luego, al sumar todas las ecuaciones de N anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x)dx + \sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (\beta(x)p(x)dx)' q(x)dx \\ + \sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \gamma p(x)q(x)dx - \sum_{n=0}^{N-1} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] \\ -\alpha p'(x_N)q(x_N^-) + \alpha p'(x_0)q(x_0^+) &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \end{aligned} \tag{3.28}$$

De (3.25), generalizamos la sumatoria de (3.28) como sigue

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x)dx + \sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (\beta(x)p(x))' q(x)dx + \\ \sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \gamma p(x)q(x)dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha(x_n)p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \end{aligned} \tag{3.29}$$

y de Ļema 3.4 para $1 \le n \le N-1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} & \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x)dx + (\beta(x)p(x))' q(x)dx + \gamma p(x)q(x)dx \\ & - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{q(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] \\ & = \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \end{aligned}$$

y como la solución exacta p satisface $[\![\alpha p'(x_n)]\!] = 0$ del Ļema 3.5, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) &+ (\beta(x)p(x))' q(x)dx + \gamma p(x)q(x)dx \\ &- \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] \\ &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \end{aligned} \tag{3.30}$$

Si p es una solución de (1.1)-(1.3) entonces usando Teorema 3.6 y añadiendo el término ϵ de simetrización

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))' q(x) \\ + \gamma p(x)q(x)dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] \\ + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!]^1 \\ + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta(x_n)q(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!]^2 &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\epsilon\alpha q'(x_0)\,p(x_0) + \epsilon\alpha q'(x_N)\,p(x_N)\,[1]\\
&-\epsilon\beta(x_0)\,q(x_0)\,p(x_0) + \epsilon\beta(x_N)\,q(x_n)\,p(x_N)\,[2]
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Desde que la solución exacta p es continua, entonces, $[\![p(x_n)]\!] = 0$, y de Teorema 3.7 introducimos los términos de penalización.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))'\,q(x)\\
&+\gamma p(x)q(x)dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!]\\
&+\epsilon\sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!]\,[1]\\
&+\epsilon\sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta(x_n)\,q(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!]\,[2]\\
&+\sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}}[\![q(x_n)]\!][\![p(x_n)]\!]\,[3] \;=\; \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx\\
&\qquad -\epsilon\alpha q'(x_0)\,p(x_0) + \epsilon\alpha q'(x_N)\,p(x_N)\,[1]\\
&\qquad -\epsilon\beta(x_0)\,q(x_0)\,p(x_0) + \epsilon\beta(x_N)\,q(x_n)\,p(x_N)\,[2]\\
&\qquad +\frac{\sigma^0}{h_{0,1}}q(x_0)\,p(x_0) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}}q(x_N)\,p(x_N)\,[3]
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Observación 2: El término de simetrización para la advección es una imposición de equivalencia adicional para la simetrización. Veremos más adelante que considerar este término mejora la aproximación de los métodos **DG** .

[1] Término de simetrización.
[2] Término de simetrización para la advección.
[3] Término de penalización.

3.2. Formulación Variacional DG

Una clase de métodos Galerkin para resolver el problema (1.1)-(1.3) es la siguiente: Encontrar $P_h \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h)$ tal que

$$\mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, q_h\right) = \mathcal{L}(q_h) \qquad \forall q_h \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h) \tag{3.33}$$

donde la forma bilineal $\mathcal{A}_\epsilon : \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h) \times \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h) \to \mathbb{R}$ y la forma lineal $\mathcal{L} : \mathcal{D}_l\left(\mathcal{E}_h\right) \to \mathbb{R}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, q_h\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha {P_h}'(x) {q_h}'(x) + \left(\beta(x) P_h(x)\right)' q_h(x) + \gamma P_h(x) q_h(x) dx \\
&\quad - \sum_{n=0}^{N} \left\{\!\!\left\{\alpha {P_h}'\left(x_n\right)\right\}\!\!\right\} \left[\!\left[q_h\left(x_n\right)\right]\!\right] \\
&\quad + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \left\{\!\!\left\{\alpha q_h'\left(x_n\right)\right\}\!\!\right\} \left[\!\left[P_h\left(x_n\right)\right]\!\right] + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \left\{\!\!\left\{\beta\left(x_n\right) q_h\left(x_n\right)\right\}\!\!\right\} \left[\!\left[P_h\left(x_n\right)\right]\!\right] \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}} \left[\!\left[P_h\left(x_n\right)\right]\!\right] \left[\!\left[q_h\left(x_n\right)\right]\!\right]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(q_h) &= \int_{x_0}^{x_N} f(x) q_h(x) dx \\
&\quad - \epsilon\alpha q_h'\left(x_0\right) P_h\left(x_0\right) + \epsilon\alpha q_h'\left(x_N\right) P_h\left(x_N\right) \\
&\quad - \epsilon\beta\left(x_0\right) q_h\left(x_0\right) P_h\left(x_0\right) + \epsilon\beta\left(x_N\right) q_h\left(x_N\right) P_h\left(x_N\right) \\
&\quad + \frac{\sigma^0}{h_{0,1}} q_h\left(x_0\right) P_h\left(x_0\right) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}} q_h\left(x_N\right) P_h\left(x_N\right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

con $\alpha > 0, \gamma \geq 0, \beta(x) \geq 0$

Observación 3: Se subraya la flexibilidad en la selección del parámetro ϵ, el cual puede variar libremente entre los números reales. Esto se debe a que el tercer término de la ecuación correspondiente se anula automáticamente. Esta característica proporciona una ventaja significativa al aplicar estos métodos, ya que permite ajustar el valor de ϵ para optimizar el enfoque en diversas circunstancias (Rivière, 2008, p. 5).

Formulaciones Variacionales DG para diferentes tipos de problemas

En esta sección, nos adentraremos en las formulaciones variacionales de Galerkin discontinuo, centrándonos en su aplicación de los cuatro problemas fundamentales: difusión, difusión-absorción, difusión-advección y convección. Estas formulaciones, que se derivan a partir de (3.33), constituyen la base teórica sobre la cual construiremos nuestros métodos de elementos finitos.

El problema de difusión

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, q_h\right) &= \sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha {P_h}'(x){q_h}'(x)dx \\
&\quad -\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\alpha {P_h}'\left(x_n\right)\}\!\}[\![q_h\left(x_n\right)]\!] \\
&\quad +\epsilon\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\alpha q_h'\left(x_n\right)\}\!\}[\![P_h\left(x_n\right)]\!] + \sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}}[\![P_h\left(x_n\right)]\!][\![q_h\left(x_n\right)]\!] \qquad (3.36)\\
\mathcal{L}(q_h) &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q_h(x)dx \\
&\quad -\epsilon\alpha q_h'\left(x_0\right)P_h\left(x_0\right) + \epsilon\alpha q_h'\left(x_N\right)P_h\left(x_N\right) \\
&\quad +\frac{\sigma^0}{h_{0,1}}q_h\left(x_0\right)P_h\left(x_0\right) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}}q_h\left(x_N\right)P_h\left(x_N\right) \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Donde $\alpha > 0$.

El problema de difusión-absorción

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, q_h\right) &= \sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha {P_h}'(x){q_h}'(x) + \gamma P_h(x)q_h(x)dx \\
&\quad -\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\alpha {P_h}'\left(x_n\right)\}\!\}[\![q_h\left(x_n\right)]\!] \\
&\quad +\epsilon\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\alpha q_h'\left(x_n\right)\}\!\}[\![P_h\left(x_n\right)]\!] + \sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}}[\![P_h\left(x_n\right)]\!][\![q_h\left(x_n\right)]\!]) \qquad (3.38)\\
\mathcal{L}(q_h) &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q_h(x)dx \\
&\quad -\epsilon\alpha q_h'\left(x_0\right)P_h\left(x_0\right) + \epsilon\alpha q_h'\left(x_N\right)P_h\left(x_N\right) \\
&\quad +\frac{\sigma^0}{h_{0,1}}q_h\left(x_0\right)P_h\left(x_0\right) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}}q_h\left(x_N\right)P_h\left(x_N\right) \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

donde $\alpha > 0, \gamma > 0$.

El problema de difusión-advección

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, q_h\right) &= \sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha {P_h}'(x){q_h}'(x) + \left(\beta P_h(x)\right)' q_h(x) \\
&\quad -\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\alpha {P_h}'\left(x_n\right)\}\!\}[\![q_h\left(x_n\right)]\!] \\
&\quad +\epsilon\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\alpha q_h'\left(x_n\right)\}\!\}[\![P_h\left(x_n\right)]\!] + \epsilon\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\beta q_h\left(x_n\right)\}\!\}[\![P_h\left(x_n\right)]\!] \\
&\quad +\sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}}[\![P_h\left(x_n\right)]\!][\![q_h\left(x_n\right)]\!] \qquad (3.40)\\
\mathcal{L}(q_h) &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q_h(x)dx \\
&\quad -\epsilon\alpha q_h'\left(x_0\right)P_h\left(x_0\right) + \epsilon\alpha q_h'\left(x_N\right)P_h\left(x_N\right) \\
&\quad -\epsilon\beta q_h\left(x_0\right)P_h\left(x_0\right) + \epsilon\beta q_h\left(x_N\right)P_h\left(x_N\right) \\
&\quad +\frac{\sigma^0}{h_{0,1}}q_h\left(x_0\right)P_h\left(x_0\right) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}}q_h\left(x_N\right)P_h\left(x_N\right) \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

donde $\alpha > 0, \gamma > 0, \beta > 0$.
Finalmente, abordamos el problema de difusión - absorción - advección, el cual se caracteriza por la ecuación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, q_h\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha {P_h}'(x) {q_h}'(x) + \left(\beta(x) P_h(x)\right)' q_h(x) + \gamma P_h(x) q_h(x) dx \\
&\quad - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha {P_h}'\left(x_n\right)\}\!\} [\![q_h\left(x_n\right)]\!] \\
&\quad + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q_h'\left(x_n\right)\}\!\} [\![P_h\left(x_n\right)]\!] + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta\left(x_n\right) q_h\left(x_n\right)\}\!\} [\![P_h\left(x_n\right)]\!] \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}} [\![P_h\left(x_n\right)]\!] [\![q_h\left(x_n\right)]\!] \qquad (3.42) \\
\mathcal{L}(q_h) &= \int_{x_0}^{x_N} f(x) q_h(x) dx \\
&\quad - \epsilon\alpha q_h'\left(x_0\right) P_h\left(x_0\right) + \epsilon\alpha q_h'\left(x_N\right) P_h\left(x_N\right) \\
&\quad - \epsilon\beta\left(x_0\right) q_h\left(x_0\right) P_h\left(x_0\right) + \epsilon\beta\left(x_N\right) q_h\left(x_N\right) P_h\left(x_N\right) \\
&\quad + \frac{\sigma^0}{h_{0,1}} q_h\left(x_0\right) P_h\left(x_0\right) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}} q_h\left(x_N\right) P_h\left(x_N\right) \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

donde $\alpha > 0, \gamma > 0, \beta\left(x\right) = x$.

La incorporación del término adicional $\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta\left(x_n\right) q_h\left(x_n\right)\}\!\} [\![P_h\left(x_n\right)]\!]$ y sus equivalentes en sus respectivas formas lineales de los problemas de difusión-advección y convectivo (difusión-absorción-advección) plantea un estudio adicional que se abordará en el análisis numérico. Este término introduce dos formulaciones variacionales distintas para cada uno de los problemas y conduce a resultados diferentes. Cabe destacar que, dado que este término se impone según la Observación 3, su inclusión es válida y justificada.

Variación de los Métodos DG

Dentro de los métodos DG, se pueden distinguir distintas variantes en función del valor del parámetro ϵ en la formulación del término de penalización en la formulación del método.

- Cuando $\epsilon = -1$, el método se denomina *Penalización Interior Simétrica de Galerkin* **SIPG** , que se introdujo en (D. Arnold & Douglas, 1982; Wheeler, 1978). Un valor apropiadamente elegido del parámetro de penalización σ^0 garantiza la convergencia del método.
- Si $\epsilon = +1$, el método se denomina *Penalización Interior no Simétrica de Galerkin* **NIPG** , que se presentó en (Rivière et al., 1999).
- Cuando $\epsilon = 0$, el método se denomina *Penalización Interior Incompleta de Galerkin* **IIPG** , que se propuso en (Dawson et al., 2004). La convergencia de este método

depende del valor del parámetro de penalización σ^0, que debe ser suficientemente grande.

Además, existen otros métodos particulares dentro de la familia DG que se definen en función del valor de ϵ y σ^0:

- Si $\epsilon = -1$ y $\sigma^0 = 0$, el método resultante se conoce como método de elementos globales, que se introdujo en (Delves & Hall, 1979). Sin embargo, en este caso, la matriz asociada a la forma bilineal es indefinida, ya que las partes reales de los valores propios no son todas positivas, lo que hace que el método no sea estable (Rivière, 2008).
- Si $\epsilon = +1$ y $\sigma^0 = 0$, se denomina al método resultante como $NIPG^0$. Este método es una variante específica en la cual σ^0 se establece en 0. Fue presentado por primera vez en el trabajo de (Oden et al., 1998).

Además, los métodos de Galerkin Discontinuo con Penalización Interior han sido mejorados y extendidos mediante la inclusión de términos de estabilización en las formulaciones de las ecuaciones de balance. Estos términos se denominan estabilizadores y se utilizan para controlar la propagación de errores y reducir la sensibilidad de la solución a la malla.

Observación 4: ¿Qué pasa si $\sigma^0 < 0$? En situaciones donde σ^0 es menor que cero, el método no exhibe convergencia ni estabilidad. La unicidad y existencia de la solución discreta tampoco pueden ser demostradas en este caso. Por lo tanto, se sugiere optar por un valor de σ^0 mayor que cero. (Rivière, 2008, p. 6)

Equivalencia del problema de Difusión-Absorción-Advección

La siguiente proposición establece la equivalencia entre el problema modelo y la formulación variacional (3.33). Entonces tenemos problema,

$$\begin{aligned} -\alpha p''(x) + \beta(x)p'(x) + \gamma p(x) &= f(x), \quad 0 < x < 1 && (3.44)\\ p(0) &= p_0 && (3.45)\\ p(1) &= p_N && (3.46) \end{aligned}$$

Proposición 3.8 *Sea $s > 1/2$. Suponga que $p \in H^s(\mathcal{E}_h)$ es la solución débil del problema (3.44)-(3.46) ; entonces p satisface el problema variacional (3.33). Por el contrario, si $p \in H^1(\Omega) \cap H^s(\mathcal{E}_h)$ satisface (3.33), entonces p es la solución del problema (3.44)-(3.46).*

Demostración: Primero, demostramos que si la solución p de (3.44)-(3.46) pertenece a $H^s(\Omega)$, entonces también resuelve(3.33). Definimos el problema modelo (3.44) en cada elemento finito $I_n = (x_n, x_{n+1})$ de una malla uniforme de elementos $\mathcal{E}_h$, originando el siguiente problema local,

$$-\alpha p''(x) + \beta(x)p'(x) + \gamma p(x) = f(x), \quad \text{en } I_n \tag{3.47}$$

con las condiciones de interfaces definidas en los nodos interiores,

$$\begin{aligned} [\![p(x_n)]\!] &= 0, \ \forall n = 1, \ldots, N-1. && (3.48)\\ [\![p'(x_n)]\!] &= 0, \ \forall n = 1, \ldots, N-1. && (3.49) \end{aligned}$$

y las condiciones de Dirichlet definidas en (3.45)-(3.46).

Multiplicamos $q \in D_l(\mathcal{E}_h)$ a la ecuación (3.47) e integramos en el intervalo I_n. Debido a que q no está definido en los extremos del intervalo I_n usaremos el intervalo $[x_n + \zeta, x_{n+1} - \zeta]$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} -\int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} \alpha p''(x)q(x)dx \ &+ \\ \int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} \left(\beta(x)p(x)\right)' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx \ &= \int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} f(x)q(x)dx \\ \alpha \int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} p'(x)q'(x)dx \ &+ \\ \int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} \left(\beta(x)p(x)\right)' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx & \\ -p'(x_{n+1}-\zeta)q(x_{n+1}-\zeta) + p'(x_n+\zeta)q(x_n+\zeta) \ &= \int_{x_n+\zeta}^{x_{n+1}-\zeta} f(x)q(x)dx \end{aligned} \tag{3.50}$$

Tomando limite en (3.50) obtenemos $\forall n = 0, \ldots, N-1$.

$$\begin{aligned}\alpha \int_{x_n}^{x_{n+1}} p'(x)q'(x)dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\beta(x)p(x))' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx \\ - \lim_{\zeta\to 0} p'(x_{n+1}-\zeta)q(x_{n+1}-\zeta) + \lim_{\zeta\to 0} p'(x_n+\zeta)q(x_n+\zeta) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)q(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \int_{x_n}^{x_{n+1}} p'(x)q'(x)dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\beta(x)p(x))' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx \\ -p'(x_{n+1}^-)q(x_{n+1}^-) + p'(x_n^+)q(x_n^+) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)q(x)dx\end{aligned}$$

Luego, sumando sobre todos los intervalos I_n, tenemos claramente la presencia de la definición de saltos en q,

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx \\ - \sum_{n=1}^{N-1} \alpha[\![p'(x_n)\, q(x_n)]\!] - \alpha p'(x_N)q({x_N}^-) + \alpha p'(x_0)q({x_0}^+) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)q(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx \\ - \sum_{n=0}^{N} \alpha[\![p'(x_n)\, q(x_n)]\!] &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)q(x)dx \quad (3.51)\end{aligned}$$

De Ļema 3.4 en (3.51) para $1 \le n \le N-1$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx \\ - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{v(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \quad (3.52)\end{aligned}$$

como la solución exacta $p \in C^2(0,1)$ luego $[\![\alpha p'(x_n)]\!] = 0, \quad 1 \le n \le N-1$ entonces del Ļema 3.5, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx \\ - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{v(x_n)\}\!\}[\![\alpha p'(x_n)]\!] &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \quad (3.53)\end{aligned}$$

Agregamos $\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!]$ y $\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta(x_n)\, q(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!]$ términos de simetrización a ambos lados y usamos la equivalencia (3.19) del Teorema 3.6 junto a las condiciones de frontera de Dirichlet (1.3).

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))' q(x) \\
&+\gamma p(x)q(x)dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] \\
&\qquad +\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] \\
&\qquad +\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta(x_n)\, q(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] \;=\; \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \\
&\qquad\qquad -\epsilon\alpha q'(x_0)\, p(x_0) + \epsilon\alpha q'(x_N)\, p(x_N) \\
&\qquad\qquad -\epsilon\beta(x_0)\, v(x_0)\, p(x_0) + \epsilon\beta(x_N)\, q(x_n)\, p(x_N)
\end{aligned}
$$

Para completar el sistema anterior, agregamos el término de penalización salto $\mathcal{J}_0$ junto al Teorema 3.6, definido sobre $\mathcal{E}_h$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))' q(x) \\
&+\gamma p(x)q(x)dx - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\}[\![q(x_n)]\!] \\
&\qquad +\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha q'(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] \\
&\qquad +\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta(x_n)\, q(x_n)\}\!\}[\![p(x_n)]\!] \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}}[\![q(x_n)]\!][\![p(x_n)]\!] \;=\; \int_{x_0}^{x_N} f(x)q(x)dx \\
&\qquad\qquad -\epsilon\alpha q'(x_0)\, p(x_0) + \epsilon\alpha q'(x_N)\, p(x_N) \\
&\qquad\qquad -\epsilon\beta(x_0)\, q(x_0)\, p(x_0) + \epsilon\beta(x_N)\, q(x_n)\, p(x_N) \\
&\qquad\qquad +\frac{\sigma^0}{h_{0,1}} q(x_0)\, p(x_0) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}} q(x_N)\, p(x_N)
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

Por tanto, obtenemos la ecuación (3.54).

Ahora demostraremos lo contrario, sea $q \in \mathcal{D}(I_n)$ entonces (3.33) se reduce a:

$$
\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x)q'(x) + (\beta(x)p(x))' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)q(x)dx \tag{3.55}
$$

Aplicamos integración por partes y agrupando obtenemos

$$
\begin{aligned}
-\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p''(x)q(x)dx + (\beta(x)p(x))' q(x) + \gamma p(x)q(x)dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)q(x)dx \\
\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[-\alpha p''(x) + (\beta(x)p(x))' + \gamma p(x) - f(x)\right] q(x)dx &= 0
\end{aligned}
$$

lo cual nos da la igualdad en el sentido de distribuciones, para todo $I_n \in \mathcal{E}_h$,

$$-\alpha p''(x) + (\beta(x)p(x))' + \gamma p(x) = f(x), \quad \text{en } I_n \tag{3.56}$$

Sean $M = I_{N-1} \cup I_n \cup \{\!\{x_n\}\!\}$ y tomamos $q \in H_0^2(M)$ extendiéndolo a cero para el resto del dominio.
Por un lado, si multiplicamos (3.56) por q y usamos la integración por partes, tenemos

$$-\int_M \alpha p''(x)dx + \int_M (\beta(x)p(x))' + \gamma p(x)q(x)dx = \int_M f(x)q(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_M \alpha p'(x)q'(x) + \alpha q(x_n)p'(x_n^+) + \int_M \alpha p'(x)q'(x)dx \\ -\alpha q(x_n)p'(x_n^-) + \int_M (\beta(x)p(x))' + \gamma p(x)q(x)dx &= \int_M f(x)q(x)dx\end{aligned}$$

Luego obtenemos,

$$\int_M \alpha p'(x)q'(x) + \int_M (\beta(x)p(x))' + \gamma p(x)q(x)dx - \alpha[\![p'(x_n)]\!]q(x_n) = \int_M f(x)q(x)dx \tag{3.57}$$

Por otro lado, desde que $[\![q(x_n)]\!] = 0$, (3.33) se reduce a

$$\int_M \alpha p'(x)q'(x) + \int_M (\beta(x)p(x))' + \gamma p(x)q(x)dx = \int_M f(x)q(x)dx \tag{3.58}$$

Por lo tanto, comparando (3.58) con (3.57) tenemos

$$\forall v \in H_0^2(M), \quad [\![p'(x_n)]\!]q(x_n) = 0$$

Entonces

$$[\![p'(x_n)]\!] = 0$$

Dado que esto es válido para todo x_n, implica que $(\alpha p'(x))'\, y\, (\beta(x)p(x))' \in L^2(\Omega)$, y, por lo tanto, tenemos globalmente

$$-(\alpha p'(x))' + (\beta(x)p(x))' + \gamma p(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \tag{3.59}$$

Para recuperar las condiciones de contorno de Dirichlet, multiplicamos (3.59) por una función q en $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, aplicando la integración por partes, y comparando con (3.33)

$$-\int_{\partial\Omega} (\alpha q' \cdot)\,(p - g_{\mathrm{D}}) = 0.$$

Siendo esto cierto para todo $q \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, tenemos $p = g_{\mathrm{D}}$ en Γ_{D}. ■

3.3. Elementos Finitos Discontinuos (MEF DG)

Discretización del dominio

En esta sección, nos centraremos en la formulación de la discretización del dominio de los elementos finitos discontinuos por intervalos (elementos finitos) que forman dos tipos de discretizaciones posibles: uniforme y no uniforme. En la discretización uniforme, el dominio se divide en intervalos del mismo tamaño y los nodos se distribuyen de manera equidistante. Por otro lado, en la discretización no uniforme se permite la variación en la magnitud de los intervalos, y la disposición de los nodos puede no ser equidistante. A continuación, presentamos las ecuaciones y conceptos clave necesarios para llevar a cabo este proceso.

Discretización uniforme

Sea N un entero positivo, y sea $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ una partición $\mathcal{E}_h$ de $(0, 1)$,

$$h = \frac{1}{N}$$

Definimos los nodos de una malla uniforme

$$x_n = x_0 + n \cdot h \text{ para } n = 0 \cdots N \tag{3.60}$$

El punto medio del intervalo $I_n = (x_n, x_{n+1})$ resulta

$$x_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}) = x_n + \frac{h}{2} \text{ para } n = 0 \cdots N$$

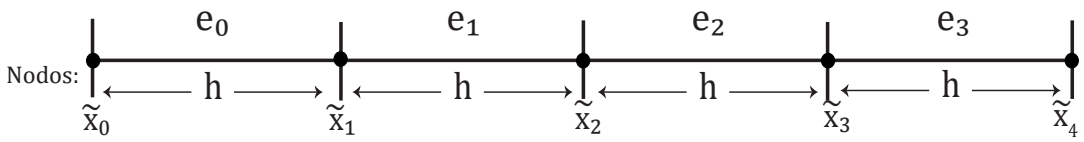


Figura 7 – Discretización uniforme unidimensional para $N = 4$

Discretización no uniforme

En el contexto de elementos finitos discontinuos, es posible realizar una partición no uniforme, donde la distancia entre nodos varía. Estas mallas, detalladas más adelante en esta tesis, se seleccionaron por su eficacia en capturar detalles cruciales del problema, buscando soluciones precisas y eficientes

La discretización no uniforme que se está empleando se obtiene a partir de la subdivisión de cada subintervalo de una malla uniforme en tres subintervalos. Sea a, b, c contantes positivas, tal que $a + b + c = 1$.(Rivière, 2008)

$$\hat{h}_0 = ah \tag{3.61}$$
$$\hat{h}_1 = bh \tag{3.62}$$
$$\hat{h}_2 = (1 - a - b)h \tag{3.63}$$

Luego,

$$\hat{x}_{3n} = x_n, \text{ para } n = 0 \cdots N \tag{3.64}$$
$$\hat{x}_{3n+(k+1)} = \hat{x}_{3n+k} + \hat{h}_k \text{ para } n = 0 \cdots N \quad k = 0, 1 \tag{3.65}$$

Por ejemplo, si $a = b = 1/3$, la malla resultante sigue siendo uniforme. Sin embargo, si por ejemplo elegimos $a = 1/7$ y $b = 1/5$, entonces se observarán la subdivisión no uniforme.

El punto medio del intervalo $I_{3n+k} = \left(\hat{x}_{3n+k}, \hat{x}_{3n+(k+1)}\right)$ resulta

$$\hat{x}_{3n+k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\hat{x}_{3n+k} + \hat{x}_{3n+(k+1)}) = \left(\hat{x}_{3n+k} + \frac{\hat{h}_k}{2}\right) \text{ para } n = 0 \cdots N \quad k = 0, 1, 2$$

De aquí en adelante usaremos la notación x_n para los nodos de la malla, independientemente del tipo de partición elegida. Además, para el caso uniforme, consideramos $h = h_n$

Sea $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ una partición $\mathcal{E}_h$ de $(0, 1)$, y $I_n = (x_n, x_{n+1})$. Si N es un entero positivo, definimos

$$h_n = x_{n+1} - x_n \tag{3.66}$$
$$h_{n-1,n} = \text{máx}\,(h_{n-1}, h_n) \tag{3.67}$$
$$h = \max_{0 \le n \le N-1} h_n. \tag{3.68}$$

El punto medio del intervalo $I_n = (x_n, x_{n+1})$ resulta

$$x_{n+\frac{1}{2}} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}) = \left(x_n + \frac{h_n}{2}\right) \text{ para } n = 0 \cdots N$$

Observación 5: La justificación para considerar h_{n-1} en la expresión $h_{n-1,n} = \text{máx}(h_{n-1}, h_n)$, incluso cuando $n = 0$, radica en la necesidad de establecer una notación

consistente y uniforme para el cálculo de la longitud de elementos. Además, desde un punto de vista conceptual, considerar h_{n-1} como el elemento anterior a h_n cuando $n = 0$ se alinea con la idea de que $h_{n-1,n}$ representa la longitud máxima entre dos elementos adyacentes. En este caso particular, se estaría considerando el primer elemento y su elemento anterior imaginario con longitud cero.

Transformación isoparamétrica

Introducimos la transformación isoparamétrica $T(x)$ para facilitar la integración numérica. Esta transformación convierte las coordenadas físicas x en el intervalo $\overline{\Omega}_e = [x_n, x_{n+1}]$ a las coordenadas locales ξ en el espacio de referencia $\hat{\Omega} = [-1, 1]$. En este espacio de referencia, ξ varía en el intervalo $[-1, 1]$, mientras que en el espacio físico, x varía en el mismo intervalo.

Sea entonces la transformación lineal $T : \overline{\Omega}_e \to \hat{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(x) &= \xi = \frac{2x - (x_n + x_{n+1})}{x_{n+1} - x_n} \\ T(x) &= \frac{2(x - x_{n+\frac{1}{2}})}{x_{n+1} - x_n} \end{aligned}$$

Donde $x_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ es el punto medio de $\overline{\Omega}_e$

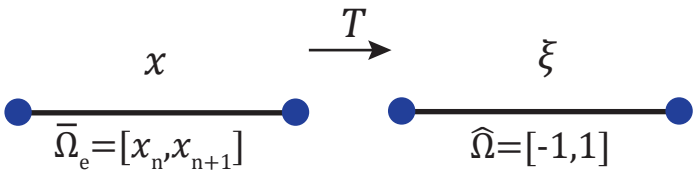


Figura 8 – Representación gráfica de la transformación isoparamétrica $T(x)$: Mapeo desde el espacio físico $\overline{\Omega}_e$ al espacio de referencia $\hat{\Omega}$.

Transformación al espacio de referencia

En el intervalo $[-1, 1]$ se tiene definidos los elementos de la base monomial $\left\{\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3, \hat{\phi}_4\right\}$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_0^n(\xi) &= 1 \\ \hat{\phi}_1^n(\xi) &= x \\ \hat{\phi}_2^n(\xi) &= x^2 \\ \hat{\phi}_3^n(\xi) &= x^3 \\ \hat{\phi}_4^n(\xi) &= x^4 \end{aligned}$$

Y estas bases se transforman en bases de polinomios discontinuos que forman parte de la base local.

$$\begin{aligned}
\phi_i^n(x) &= \hat{\phi}_i^n \circ T(x) \\
&= \hat{\phi}_i^n(T(x)) \\
&= \hat{\phi}_i^n \left(2\frac{x - x_{n+\frac{1}{2}}}{x_{n+1} - x_n} \right) \\
\phi_i^n(x) &= \left(2\frac{x - x_{n+\frac{1}{2}}}{x_{n+1} - x_n} \right)^i \qquad \forall i = 0 \cdots 4
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Se eligen bases monómiales, específicamente con $l = 4$, para el método de Galerkin discontinuo debido a sus ventajas sobre las bases de Lagrange. Las bases monómiales son computacionalmente más eficientes para construir y más adecuadas para la integración numérica en elementos finitos por su simplicidad y fácil integración. Además, su propiedad de ortogonalidad facilita cálculos y mejora la estabilidad del método. Aunque las bases de Lagrange son útiles para el método de Galerkin continuo por su continuidad, en el contexto de Galerkin discontinuo, las bases monómiales resultan ser más eficientes y efectivas.

Funciones Base local y Global

Debido a la falta de restricciones de continuidad entre los elementos de la malla para las funciones de prueba, las funciones base de $\mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h)$ tienen un soporte contenido en un elemento. Escribimos

$$\mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h) = \mathcal{L}\{\phi_i^n : 0 \leq i \leq N, I_n \in \mathcal{E}_h\}$$

Para nuestro estudio se utilizan polinomios por partes de grado menor o igual a l donde $l = 4$. las funciones de base local de $\mathbb{P}_l(I_n)$ son las funciones de bases monomiales escogidas, provenientes del intervalo $(-1, 1)$ definidas en (3.69)

$$\mathbb{P}_4(I_n) = \mathcal{L}\{\phi_0^n, \phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n, \phi_4^n\}$$

A continuación definimos las funciones de base y sus respectivas derivadas

$$\begin{aligned}
\phi_0^n(x) &= 1 & \phi_0^{n\prime}(x) &= 0 \\
\phi_1^n(x) &= \frac{2}{h_n}\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right) & \phi_1^{n\prime}(x) &= \frac{2}{h_n} \\
\phi_2^n(x) &= \frac{4}{h_n^2}\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)^2 & \phi_2^{n\prime}(x) &= \frac{8}{h_n^2}\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right) \\
\phi_3^n(x) &= \frac{8}{h_n^3}\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)^3 & \phi_3^{n\prime}(x) &= \frac{24}{h_n^3}\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)^2 \\
\phi_4^n(x) &= \frac{16}{h_n^4}\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)^4 & \phi_4^{n\prime}(x) &= \frac{64}{h_n^4}\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)^3
\end{aligned}$$

En una formulación más general, resulta factible reformular las funciones base y sus respectivas derivadas de la siguiente manera:

$$\phi_i^n(x) = \left(\frac{2}{h_n}\right)^i \left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)^i \tag{3.70}$$

$$\phi_i^{n\prime}(x) = \left(\frac{2}{h_n}\right)^i \cdot i \cdot \left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)^{i-1} \tag{3.71}$$

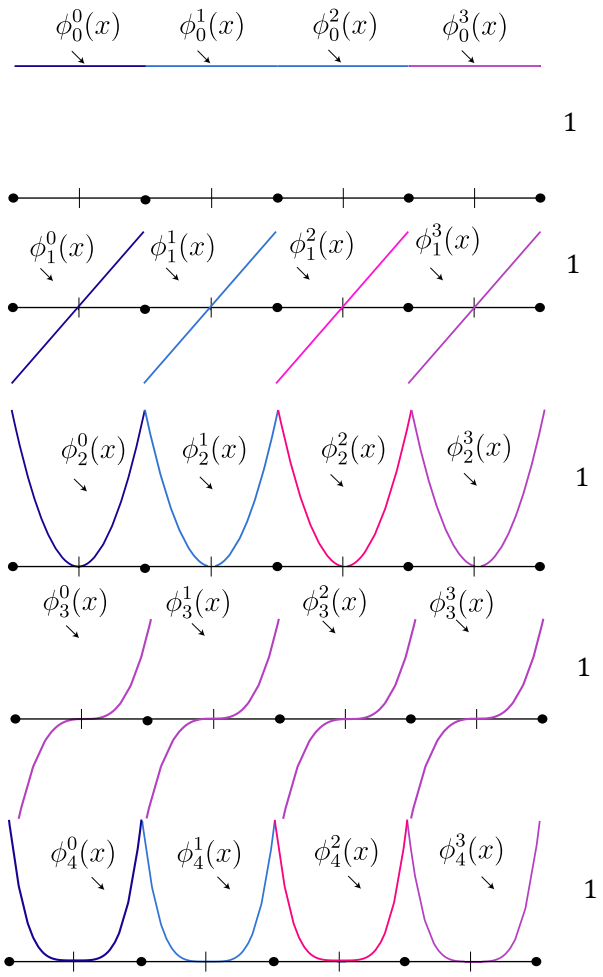


Figura 9 – Ejemplo de funciones base locales ϕ_l^n donde $l = 1, 2, 3, 4$ en $\Omega = (0, 1)$ para $N = 4$ en $\Omega = (0, 1)$

Las funciones de base global $\{\Phi_i^n\}$ para el espacio $\mathcal{D}_4(\mathcal{E}_h)$ se obtienen de las funciones base locales extendiéndolas por cero:

$$\Phi_i^n(x) = \begin{cases} \phi_i^n(x) = \hat{\phi}_i^n \circ T & x \in I_n \\ 0, & x \notin I_n \end{cases} \tag{3.72}$$

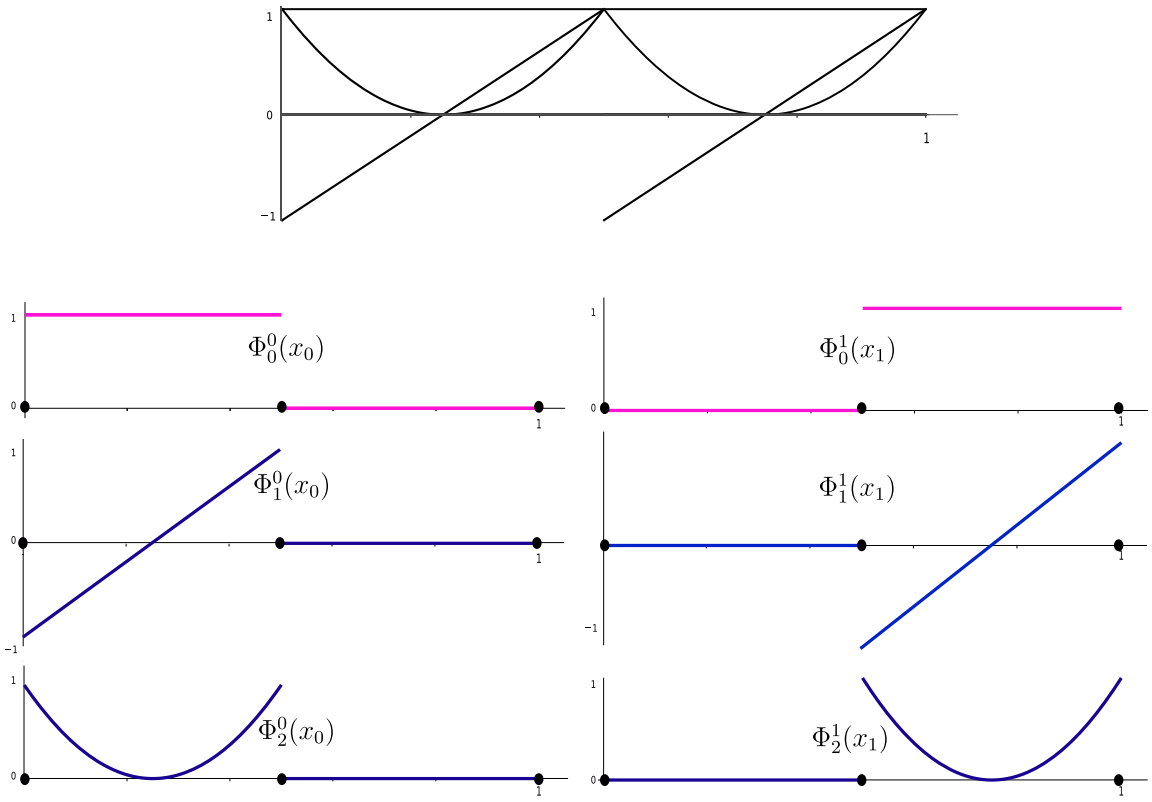


Figura 10 – Ejemplo de funciones base global Φ_l^n donde $l = 2$ en $\Omega = (0, 1)$ para $N = 2$ en $\Omega = (0, 1)$

Operaciones entre Funciones Base

Para la formulación de las matrices locales es necesario calcular los valores de los funciones base y sus derivadas en los nodos extremos de cada elemento. En particular, necesitamos calcular los valores de $\phi_i^n(x_0), \phi_i^{n\prime}(x_0), \phi_i^n(x_N), \phi_i^{n\prime}(x_N)$ en cada elemento n. De (3.70) y (3.71), se tiene

$$\phi_i^n(x_0) = (-1)^i \tag{3.73}$$

$$\phi_i^{n\prime}(x_0) = (-1)^{i-1}\frac{2}{h_n}\cdot i \tag{3.74}$$

$$\phi_i^n(x_N) = (-1)^i \tag{3.75}$$

$$\phi_i^{n\prime}(x_N) = (-1)^{i-1}\frac{2}{h_n}\cdot i \tag{3.76}$$

Iniciemos, realizamos la siguiente estimación

$$x_n - \zeta - \left(x_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot h_{n-1}\right) = \frac{h_{n-1}}{2} - \zeta \tag{3.77}$$

$$x_n + \zeta - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right) = -\frac{h_n}{2} + \zeta \tag{3.78}$$

Reemplazando (3.77) en (3.70)

$$\begin{aligned}\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) &= \lim_{\zeta\to 0}\phi_i^{n-1}(x_n-\zeta)\\ &= \lim_{\zeta\to 0}\left(\frac{2}{h_{n-1}}\right)^i\left(\frac{h_{n-1}}{2}-\zeta\right)^i = 1^i\end{aligned}$$

Reemplazando (3.78) en (3.70)

$$\begin{aligned}\phi_i^{n}\left(x_n^+\right) &= \lim_{\zeta\to 0}\phi_i^{n}(x_n+\zeta)\\ &= \lim_{\zeta\to 0}\left(\frac{2}{h_n}\right)^i\left(-\frac{h_n}{2}+\zeta\right)^i = (-1)^i\end{aligned}$$

Reemplazando (3.77) en (3.71)

$$\begin{aligned}\phi_i^{n-1\prime}\left(x_n^-\right) &= \lim_{\zeta\to 0}\phi_i^{n-1}(x_n-\zeta)\\ &= \lim_{\zeta\to 0}\left(\frac{2}{h_{n-1}}\right)^i\cdot i\cdot\left(\frac{h_{n-1}}{2}-\zeta\right)^{i-1} = (1)^{i-1}\frac{2\cdot i}{h_{n-1}}\end{aligned}$$

Reemplazando (3.78) en (3.71)

$$\begin{aligned}\phi_i^{n\prime}\left(x_n^+\right) &= \lim_{\zeta\to 0}\phi_i^{n}(x_n+\zeta)\\ &= \lim_{\zeta\to 0}\left(\frac{2}{h_n}\right)^i\cdot i\cdot\left(-\frac{h_n}{2}+\zeta\right)^{i-1} = (-1)^{i-1}\frac{2\cdot i}{h_n}\end{aligned}$$

Finalmente, para $i = 0, \cdots, 4$:

$$\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) = 1 \tag{3.79}$$

$$\phi_i^{n}\left(x_n^+\right) = (-1)^i \tag{3.80}$$

$$\phi_i^{n-1\prime}\left(x_n^-\right) = (1)^{i-1}\frac{2\cdot i}{h_{n-1}} \tag{3.81}$$

$$\phi_i^{n\prime}\left(x_n^+\right) = (-1)^{i-1}\frac{2\cdot i}{h_n} \tag{3.82}$$

3.4. Problema aproximado

Consideraremos polinomios discontinuos por partes menor igual al grado $l = 4$. Consideramos α, γ constantes y $\beta(x) = \{\beta, x\}$, donde β constante positiva. Podemos expandir la solución DG como

$$\forall x \in (0,1), \quad P^{\mathrm{DG}}(x) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{4} \omega_j^m \Phi_j^m(x) \tag{3.83}$$

A partir de la ecuación (3.33) sabemos que, la solución P^{DG} satisface

$$\forall q_h \in \mathcal{D}_l\left(\mathcal{E}_h\right), \quad \mathcal{A}_\epsilon\left(P^{\mathrm{DG}}, q_h\right) = \mathcal{L}(q_h)$$

donde $\mathcal{A}_\epsilon$ es la forma bilineal DG y los coeficientes ω_j^m son números reales desconocidos. Por tanto, usando la expansión de la solución de (3.83) y eligiendo $v = \Phi_i^n \quad \forall 0 \leq i \leq 4$. Entonces

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \quad \forall 0 \leq i \leq 4, \quad \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{4} \omega_j^m \mathcal{A}_\epsilon\left(\Phi_j^m, \Phi_i^n\right) = L\left(\Phi_i^n\right)$$

Obtenemos un sistema lineal de la forma

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{b}$$

y los términos son llamados

- $\boldsymbol{\omega}$: Vector de componentes e incógnitas ω_j^m
- $\boldsymbol{A}$: Matriz con entradas $\mathcal{A}_\epsilon\left(\Phi_j^m, \Phi_i^n\right)$
- $\boldsymbol{b}$: Vector de componentes $\mathcal{L}\left(\Phi_i^n\right)$

Donde las incógnitas $\boldsymbol{\omega}$ se enumeran en el siguiente orden

$$\left(\omega_0^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, \omega_4^0, \omega_0^1, \omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1, \omega_4^1, \omega_0^2, \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \omega_4^2, \ldots, \omega_0^{N-1}, \omega_1^{N-1}, \omega_2^{N-1}, \omega_3^{N-1}, \omega_4^{N-1}\right) \tag{3.84}$$

Cálculo de la Matriz A

En el presente apartado, abordaremos el cálculo de la matriz global A, centrándonos específicamente en el análisis de las formas bilineales. Para ello, haremos uso de las definiciones previamente mencionadas.

Dividiremos la ecuación de la forma bilineal $\mathcal{A}$ en tres grupos distintos, cada uno correspondiente a diferentes contribuciones: Términos que involucran integrales sobre I_n, términos que involucran a los nodos interiores x_n y términos que involucran a los nodos en la frontera x_0, x_N

Términos que involucran integrales sobre I_n

Este grupo de términos está asociado a las contribuciones de los elementos internos I_n en el cálculo de la matriz global A. Se utilizan las definiciones de media y salto para formular las contribuciones locales de cada elemento. Resolveremos el primer sumando

$$\sum_{n=0}^{N-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha\Phi_j^{n\prime}(x)\Phi_i^{n\prime}(x) + \left(\beta(x)\Phi_j^n(x)\right)'(x)\Phi_i^n + \gamma\Phi_j^n(x)\Phi_i^n(x)dx$$

Donde las matrices resultantes serán denotados por $\boldsymbol{A_n^\alpha}, \boldsymbol{A_n^\beta}, \boldsymbol{A_n^\gamma}$ respecto a cada sumando de la integral.

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{A_n^\alpha}\right)_{ij} &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha\cdot\phi_i^{n\prime}(x)\phi_j^{n\prime}(x)dx \\ \left(\boldsymbol{A_n^\alpha}\right)_{ij} &= \frac{\alpha\cdot i\cdot j}{i+j-1}\left(\frac{2}{h_n}\right)\cdot\left(1-(-1)^{i+j-1}\right) \qquad (3.85)\end{aligned}$$

$$\left(\boldsymbol{A_n^\beta}\right)_{ij} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\beta(x)\phi_j^n(x)\right)'\phi_i^n(x)dx \qquad (3.86)$$

- Si $\beta(x)=\beta\in\mathbb{R}^+$:

$$\left(\boldsymbol{A_n^\beta}\right)_{ij} = \frac{\beta\cdot j}{i+j}\left(1-(-1)^{i+j}\right)$$

- Si $\beta(x)=x$:

$$\left(\boldsymbol{A_n^\beta}\right)_{ij} = -\left(\frac{2}{h_n}\right)^{i+j} i\left[\left(\frac{h_n}{2}\right)^{i+j+1}\frac{(1-(-1)^{i+j+1})}{i+j+1} + \frac{c}{i+j}\left(\frac{h_n}{2}\right)^{i+j}\left(1-(-1)^{i+j}\right)\right]$$

donde $c=\left(x_n+\frac{1}{2}h_n\right)$ y $n=0,1,\cdots N$

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{A_n^\gamma}\right)_{ij} &= \gamma\int_{x_n}^{x_{n+1}}\phi_j^n(x_n)\,\phi_i^n(x_n)\,dx \\ \left(\boldsymbol{A_n^\gamma}\right)_{ij} &= \left(\frac{h_n}{2}\right)\frac{\gamma}{i+j+1}\left(1-(-1)^{i+j+1}\right) \qquad (3.87)\end{aligned}$$

Términos que involucran a los nodos

Este grupo de términos corresponde a las contribuciones de los nodos interiores x_n en el cálculo de la matriz global A. Se utilizan las definiciones de media y salto para expresar estas contribuciones. Ahora consideramos los términos que involucran a los nodos interiores x_n pertenecientes al segundo y tercer sumando de la forma bilineal, es decir resultados provenientes de los siguientes sumandos

$$-\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\alpha\Phi_j^{n\prime}(x_n)\}\!\}[\![\Phi_i^n(x_n)]\!]+\epsilon\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\alpha\Phi_i^{n\prime}(x_n)\}\!\}[\![\Phi_j^n(x_n)]\!]+\epsilon\sum_{n=0}^{N}\{\!\{\beta(x_n)\Phi_i^n(x_n)\}\!\}[\![\Phi_j^n(x_n)]\!] + \sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h_{n-1,n}}[\![\Phi_i^n(x_n)]\!][\![\Phi_j^n(x_n)]\!] \qquad (3.88)$$

Y Al expandir los términos promedio definido en (3.11) y salto definido en (3.12)

$$\{\!\{\phi_i^n(x_n)\}\!\} = \frac{1}{2}\cdot\left(\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right)+\phi_i^n\left(x_n^+\right)\right) \qquad [\![\phi_i^n(x_n)]\!] = \phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right)-\phi_i^n\left(x_n^+\right)$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
-\{\!\{\alpha\phi_j^{n\prime}(x_n)\}\!\}[\![\phi_i^n(x_n)]\!] &+ \epsilon\{\!\{\alpha\phi_i^{n\prime}(x_n)\}\!\}[\![\phi_j^n(x_n)]\!] \\
+\epsilon\{\!\{\beta(x_n)\phi_i^{n\prime}(x_n)\}\!\}[\![\phi_j^n(x_n)]\!] &+ \frac{\sigma^0}{h}[\![\phi_j^n(x_n)]\!][\![\phi_i^n(x_n)]\!] \\
&= \frac{\alpha}{2}\phi_j^{n\prime}\left(x_n^+\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right)-\frac{\alpha}{2}\phi_j^{n-1\prime}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) \\
&\quad -\frac{\alpha}{2}\phi_j^{n\prime}\left(x_n^+\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right)+\frac{\alpha}{2}\phi_j^{n-1\prime}\left(x_n^-\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right) \\
&\quad -\frac{\epsilon\alpha}{2}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^{n\prime}\left(x_n^+\right)+\frac{\epsilon\alpha}{2}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n-1\prime}\left(x_n^-\right) \\
&\quad -\frac{\epsilon\alpha}{2}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^{n-1\prime}\left(x_n^-\right)+\frac{\epsilon\alpha}{2}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n\prime}\left(x_n^+\right) \\
&\quad -\frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right)+\frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) \\
&\quad -\frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right)+\frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right) \\
&\quad +\frac{\sigma^0}{h}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right)+\frac{\sigma^0}{h}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) \\
&\quad -\frac{\sigma^0}{h}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right)-\frac{\sigma^0}{h}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right)
\end{aligned}$$

Reordenando los términos, esto resulta las siguientes definiciones matriciales

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{B_n})_{ij} &= \frac{\alpha}{2}\phi_j^{n\prime}\left(x_n^+\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right)-\frac{\epsilon\alpha}{2}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^{n\prime}\left(x_n^+\right)-\frac{\epsilon\beta\left(x_n\right)}{2}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right) \\
&\quad +\frac{\sigma^0}{h}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right) \\
(\boldsymbol{C_n})_{ij} &= -\frac{\alpha}{2}\phi_j^{n-1\prime}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right)+\frac{\epsilon\alpha}{2}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n-1\prime}\left(x_n^-\right)+\frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) \\
&\quad +\frac{\sigma^0}{h}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) \\
(\boldsymbol{D_n})_{ij} &= -\frac{\alpha}{2}\phi_j^{n\prime}\left(x_n^+\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right)-\frac{\epsilon\alpha}{2}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^{n-1\prime}\left(x_n^-\right)-\frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) \\
&\quad -\frac{\sigma^0}{h}\phi_j^n\left(x_n^+\right)\phi_i^{n-1}\left(x_n^-\right) \\
(\boldsymbol{E_n})_{ij} &= \frac{\alpha}{2}\phi_j^{n-1\prime}\left(x_n^-\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right)+\frac{\epsilon\alpha}{2}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^{n\prime}\left(x_n^+\right)+\frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right) \\
&\quad -\frac{\sigma^0}{h}\phi_j^{n-1}\left(x_n^-\right)\phi_i^n\left(x_n^+\right)
\end{aligned}$$

Las interacciones de las funciones de base local en el intervalo I_n y I_{n-1} se representan por las matrices $\boldsymbol{B_n}$ y $\boldsymbol{C_n}$, respectivamente. Estas matrices describen las influencias de cada función de base en sí misma dentro de su propio intervalo. Por otro lado, las matrices $\boldsymbol{D_n}$ y $\boldsymbol{E_n}$ acoplan los intervalos I_n e I_{n-1}, respectivamente. Estas matrices capturan

las conexiones entre las funciones de base en los intervalos adyacentes, permitiendo el intercambio de información y la continuidad en la solución.
Usamos los cálculos en su forma general, expresados con anterioridad en (3.79) y (3.82), para hacer los cálculos de las matrices $\boldsymbol{B_n}, \boldsymbol{C_n}, \boldsymbol{D_n}, \boldsymbol{E_n}$ respectivamente. Luego se tiene $\forall i, j = 0 \cdots 4$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{B_n})_{ij} &= \frac{\alpha j}{h_n}(-1)^{i+j-1} - \frac{\epsilon\alpha i}{h_n}(-1)^{i+j-1} - \frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}(-1)^{i+j} + \frac{\sigma^0}{h_{l-1}}(-1)^{i+j} \\
(\boldsymbol{C_n})_{ij} &= -\frac{\alpha j}{h_{n-1}}(1)^{i+j-1} + \frac{\epsilon\alpha i}{h_{n-1}}(1)^{i+j-1} + \frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}(1)^{i+j} + \frac{\sigma^0}{h_{l-1}}(1)^{i+j} \\
(\boldsymbol{D_n})_{ij} &= -\frac{\alpha j}{h_n}(-1)^{j-1} - \frac{\epsilon\alpha i}{h_{n-1}}(-1)^{j} - \frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}(-1)^{j} - \frac{\sigma^0}{h_{l-1}}(-1)^{j} \\
(\boldsymbol{E_n})_{ij} &= \frac{\alpha j}{h_{n-1}}(-1)^{i} + \frac{\epsilon\alpha i}{h_n}(-1)^{i-1} + \frac{\epsilon\beta(x_n)}{2}(-1)^{i} - \frac{\sigma^0}{h_{l-1}}(-1)^{i}
\end{aligned}
$$

Términos que involucran a los nodos en la frontera

Este grupo de términos está asociado a las contribuciones de los nodos en la frontera x_0 y x_N en el cálculo de la matriz global A. Dependiendo de las condiciones de contorno, se pueden aplicar diferentes enfoques para incluir las condiciones de contorno de Dirichlet. Resultado de (3.88) evaluado en x_0 y x_N Usamos las definiciones de promedio y salto en la frontera definido en (3.13) con términos de las funciones locales, como se muestra a continuación

$$
\begin{aligned}
[\![\phi_i^n(x_0)]\!] &= -\phi_i^n\left(x_0^+\right) \\
\{\!\{\phi_i^n(x_0)\}\!\} &= \phi_i^n\left(x_0^+\right) \\
[\![\phi_i^n(x_N)]\!] &= \phi_i^{n-1}\left(x_N^-\right) \\
\{\!\{\phi_i^n(x_N)\}\!\} &= \phi_i^{n-1}\left(x_N^-\right)
\end{aligned}
$$

Nuevamente, reemplazando (3.79) y (3.82) para $n = 0, N$

$$
\begin{aligned}
-\alpha\{\!\{\phi_j^{n\prime}(x_n)\}\!\}[\![\phi_i^n(x_n)]\!] + \epsilon\{\!\{\beta(x_n)\phi_i^n(x_n)\}\!\}[\![\phi_j^n(x_n)]\!] \\
+ \epsilon\{\!\{\alpha\phi_i^{n\prime}(x_n)\}\!\}[\![\phi_j^n(x_n)]\!] + \frac{\sigma^0}{h}[\![\phi_j^n(x_n)]\!][\![\phi_i^n(x_n)]\!]
\end{aligned}
$$

Se tiene f_0 y f_N

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \alpha\phi_i^n\left(x_0^+\right)\phi_j^{n\prime}\left(x_0^+\right) - \epsilon\alpha\phi_i^{n\prime}\left(x_0^+\right)\phi_j^n\left(x_0^+\right) - \epsilon\beta(x_0)\phi_i^n\left(x_0^+\right)\phi_j^n\left(x_0^+\right) \\
&\quad + \frac{\sigma^0}{h}\phi_i^n\left(x_0^+\right)\phi_j^n\left(x_0^+\right) \\
f_N &= -\alpha\phi_i^{n-1}\left(x_N^-\right)\phi_j^{n-1\prime}\left(x_N^-\right) + \epsilon\alpha\phi_i^{n-1\prime}\left(x_N^-\right)\phi_j^{n-1}\left(x_N^-\right) + \epsilon\beta(x_N)\phi_i^{n-1}\left(x_N^-\right)\phi_j^{n-1}\left(x_N^-\right) \\
&\quad + \frac{\sigma^0}{h}\phi_i^{n-1}\left(x_N^-\right)\phi_j^{n-1}\left(x_N^-\right)
\end{aligned}
$$

Usando las formas generales de las funciones locales, mencionado en (3.79)-(3.82)

$$(\boldsymbol{F_0})_{ij} = \frac{2j\alpha}{h_0}(-1)^{i+j-1} - \frac{2\epsilon i\alpha}{h_0}(-1)^{i+j-1} - \epsilon\beta\,(x_0)\,(-1)^{i+j} + \frac{\sigma^0}{h_0}(-1)^{i+j} \quad (3.89)$$

$$(\boldsymbol{F_N})_{ij} = -\frac{2j\alpha}{h_N}(1)^{i+j-1} + \frac{2\epsilon i\alpha}{h_N}(1)^{i+j-1} + \epsilon\beta\,(x_N)\,(1)^{i+j} + \frac{\sigma^0}{h_N}(1)^{i+j} \quad (3.90)$$

El ensamblaje depende del orden de las incógnitas $\boldsymbol{\omega}_i^n$ en (3.84).

$$\left(b_0^0, b_1^0, b_2^0, b_3^0, b_4^0, b_0^1, b_1^1, b_2^1, b_3^1, b_4^1, b_0^2, b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2 \ldots, b_0^{N-1}, b_1^{N-1}, b_2^{N-1}, b_3^{N-1}, b_4^{N-1}\right)$$

Obtenemos una matriz global que es un bloque tridiagonal:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_0 & \boldsymbol{D}_1 & & & & \\ \boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{D}_2 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{E}_{N-2} & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{D}_{N-1} \\ & & & & \boldsymbol{E}_{N-1} & \boldsymbol{M}_N \end{pmatrix}$$

Donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_0 &= \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{B}_n + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{C}_{n+1} \\ \boldsymbol{M}_N &= \boldsymbol{B}_{N-1} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{N-1}}^{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{N-1}}^{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{N-1}}^{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{F}_N \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9

$$\boldsymbol{A}_n^{\alpha} = \frac{\alpha}{h}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{1} & 0 & \frac{4}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{32}{5} \\ 0 & \frac{4}{1} & 0 & \frac{36}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{5} & 0 & \frac{64}{7} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_n^{\beta} = \beta\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_n^{\gamma} = \frac{\gamma h}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_n = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \sigma^0 & \alpha-\sigma^0 & -2\alpha+\sigma^0 & 3\alpha-\sigma^0 & -4\alpha+\sigma^0 \\ -\epsilon\alpha-\sigma^0 & -\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-\epsilon\alpha-\sigma^0 & -3\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-\epsilon\alpha-\sigma^0 \\ 2\epsilon\alpha+\sigma^0 & \alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 & -2\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & 3\alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 & -4\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ -3\epsilon\alpha-\sigma^0 & -\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-3\epsilon\alpha-\sigma^0 & -3\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-3\epsilon\alpha-\sigma^0 \\ 4\epsilon\alpha+\sigma^0 & \alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 & -2\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & 3\alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 & -4\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_n = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \sigma^0 & -\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+\sigma^0 & -3\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+\sigma^0 \\ \epsilon\alpha+\sigma^0 & -\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & -3\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ 2\epsilon\alpha+\sigma^0 & -\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & -3\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ 3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -3\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ 4\epsilon\alpha+\sigma^0 & -\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & -3\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_n = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -\sigma^0 & -\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-\sigma^0 & -3\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-\sigma^0 \\ -\epsilon\alpha-\sigma^0 & -\alpha-\epsilon\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-\epsilon\alpha-\sigma^0 & -3\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-\epsilon\alpha-\sigma^0 \\ -2\epsilon\alpha-\sigma^0 & -\alpha-2\epsilon\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 & -3\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 \\ -3\epsilon\alpha-\sigma^0 & -\alpha-3\epsilon\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-3\epsilon\alpha-\sigma^0 & -3\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-3\epsilon\alpha-\sigma^0 \\ -4\epsilon\alpha-\sigma^0 & -\alpha-4\epsilon\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 & -3\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_n = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -\sigma^0 & \alpha-\sigma^0 & 2\alpha-\sigma^0 & 3\alpha-\sigma^0 & 4\alpha-\sigma^0 \\ \epsilon\alpha+\sigma^0 & -\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & -3\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ -2\epsilon\alpha-\sigma^0 & \alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 & 2\alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 & 3\alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 & 4\alpha+2\epsilon\alpha-\sigma^0 \\ 3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -3\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ -4\epsilon\alpha-\sigma^0 & \alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 & 2\alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 & 3\alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 & 4\alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F_0}_n = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \sigma^0 & 2\alpha-\sigma^0 & -4\alpha+\sigma^0 & 6\alpha-\sigma^0 & -8\alpha+\sigma^0 \\ -2\epsilon\alpha-\sigma^0 & -2\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 & -6\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & 8\alpha-2\epsilon\alpha-\sigma^0 \\ 4\epsilon\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 & -4\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & 6\alpha-4\epsilon\alpha-\sigma^0 & -8\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ -6\epsilon\alpha-\sigma^0 & -2\alpha+6\epsilon\alpha+\sigma^0 & 4\alpha-6\epsilon\alpha-\sigma^0 & -6\alpha+6\epsilon\alpha+\sigma^0 & 8\alpha-6\epsilon\alpha-\sigma^0 \\ 8\epsilon\alpha+\sigma^0 & 2\alpha-8\epsilon\alpha-\sigma^0 & -4\alpha+8\epsilon\alpha+\sigma^0 & 6\alpha-8\epsilon\alpha-\sigma^0 & -8\alpha+8\epsilon\alpha+\sigma^0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F_N}_n = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \sigma^0 & -2\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+\sigma^0 & -6\alpha+\sigma^0 & -8\alpha+\sigma^0 \\ 2\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+\epsilon\alpha+\sigma^0 & -6\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & -8\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ 4\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+2\epsilon\alpha+\sigma^0 & -6\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & -8\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ 6\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+6\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+3\epsilon\alpha+\sigma^0 & -6\alpha+6\epsilon\alpha+\sigma^0 & -8\alpha+6\epsilon\alpha+\sigma^0 \\ 8\epsilon\alpha+\sigma^0 & -2\alpha+8\epsilon\alpha+\sigma^0 & -4\alpha+4\epsilon\alpha+\sigma^0 & -6\alpha+8\epsilon\alpha+\sigma^0 & -8\alpha+8\epsilon\alpha+\sigma^0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la Matriz B

La forma lineal

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Phi_i^n) &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)\Phi_i^n(x)dx - \epsilon\alpha\Phi_i^{n\prime}(x_0)\,p(x_0) + \epsilon\alpha\Phi_i^{n\prime}(x_N)\,p(x_N)\\ &\quad -\epsilon\beta(x_0)\,\Phi_i^n(x_0)\,p(x_0) + \epsilon\beta(x_N)\,\Phi_i^n(x_N)\,p(x_N)\\ &\quad +\frac{\sigma^0}{h_{0,1}}\Phi_i^n(x_0)\,p(x_0) + \frac{\sigma^0}{h_{N-1,N}}\Phi_i^n(x_N)\,p(x_N)\end{aligned}$$

Por el soporte local,si $1 \leq n \leq N-2$ el primer término es reducido a

$$\int_0^1 f(x)\Phi_i^n(x)dx = \int_{x_n}^{x_n+h_n} f(x)\phi_i^n(x)dx \tag{3.91}$$

Realizamos un cambio de variable, sea

$$t = \left(\frac{2}{h_n}\right)\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right) \tag{3.92}$$

Entonces

$$\begin{aligned}t^i &= \left(\frac{2}{h_n}\right)^i\left(x - \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)^i\\ &= \Phi_i^n(x)\end{aligned}$$

Despejando x de (3.92)

$$x = \left(\frac{h_n}{2}\right)t + \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right) \tag{3.93}$$

Derivando la ecuación anterior

$$dx = \left(\frac{h_n}{2}\right)dt \tag{3.94}$$

Ahora, reemplazando (3.92) y (3.94) en (3.95)

$$\int_{x_n}^{x_n+h_n} f(x)\phi_i^n(x)dx = \frac{h_n}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\left(\frac{h_n}{2}\right)t + \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)t^i dt \tag{3.95}$$

Debido a que la integral no se puede calcular exactamente para la mayoría de las funciones f, preferimos calcular una aproximación usando una regla de cuadratura de Gauss definida por un conjunto de pesos $(w_j)_{1\leq j\leq Q_{\mathrm{G}}}$ y un conjunto de nodos $(s_j)_{1\leq j\leq Q_{\mathrm{G}}}$:

$$\int_{-1}^{1} v(t)dt \approx \sum_{j=1}^{Q_{\mathrm{G}}} w_j v(s_j)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\int_0^1 f(x)\Phi_i^n(x)dx \approx \frac{h_n}{2}\sum_{j=1}^{Q_G} w_j f\left(\left(\frac{h_n}{2}\right)s_j + \left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)s_j^i \tag{3.96}$$

Luego

$$\begin{aligned} L(\Phi_i^n) &= \frac{h_n}{2}\cdot\sum_{j=1}^{Q_G} w_j f\left(\left(\frac{h_n}{2}\right)s_j+\left(x_n+\frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)s_j^i \\ &\quad -\epsilon\alpha\Phi_i^{n\prime}(x_0)\,p(x_0)+\epsilon\alpha\Phi_i^{n\prime}(x_N)\,p(x_N) \\ &\quad -\epsilon\beta(x_0)\,\Phi_i^n(x_0)\,p(x_0)+\epsilon\beta(x_N)\,\Phi_i^n(x_N)\,p(x_N) \\ &\quad +\frac{\sigma^0}{h_0}\Phi_i^n(x_0)\,p(x_0)+\frac{\sigma^0}{h_N}\Phi_i^n(x_N)\,p(x_N) \end{aligned} \tag{3.97}$$

Donde el vector resultante será denotado por $\boldsymbol{b_i^n}$.
Reemplazando (3.73) - (3.76) en (3.97)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b_i^n} &= \sum_{j=1}^{Q_G} w_j f\left(\left(\frac{h_n}{2}\right)s_j+\left(x_n+\frac{1}{2}\cdot h_n\right)\right)s_j^i \\ &\quad -\epsilon\cdot\alpha\cdot(-1)^{i-1}\cdot\frac{2}{h_n}i\cdot p(x_0)-\epsilon\beta(x_0)\cdot(-1)^i\cdot p(x_0)+\frac{\sigma^0}{h_0}(-1)^i\cdot p(x_0) \\ &\quad +\epsilon\cdot\alpha\cdot(-1)^{i-1}\cdot\frac{2}{h_n}i\cdot p(x_N)+\epsilon\beta(x_N)\cdot(-1)^i\cdot p(x_N)+\frac{\sigma^0}{h_N}\cdot(-1)^i\cdot p(x_N) \end{aligned}$$

Escribimos los componentes del vector b en orden consistente con el orden de las incógnitas b_i^n

$$\left(b_0^0,b_1^0,b_2^0,b_3^0,b_4^0,b_0^1,b_1^1,b_2^1,b_3^1,b_4^1,b_0^2,b_1^2,b_2^2,b_3^2,b_4^2\ldots,b_0^{N-1},b_1^{N-1},b_2^{N-1},b_3^{N-1},b_4^{N-1}\right)$$

Grados de Libertad (*dof*)

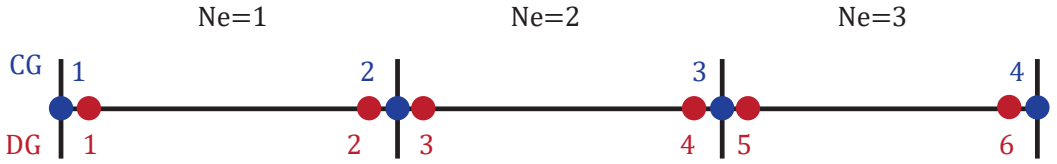
En (X. Giraldo, 2020) refiere que una de las principales desventajas del método DG, en comparación con el método CG, es que requiere más grados de libertad para resolver un problema para el mismo número de elementos y grado de polinomio por elemento. Los grados de libertad totales para el método DG son

$$dof_{DG} = [N \cdot (l+1)]^d$$

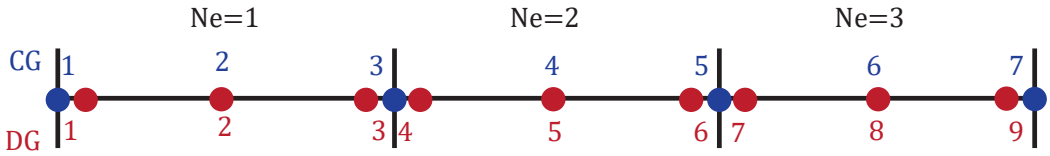
donde N es el número de elementos, l es el grado del polinomio dentro de cada elemento y d es el número de dimensiones espaciales. Por el contrario, los grados de libertad totales para el método CG son

$$dof_{CG} = (N \cdot l + 1)^d$$

La relación de los grados de libertad *dof* entre CG y DG es mayor en orden bajo y disminuye al aumentar N. En Figura 11 mostramos la ubicación de los puntos tanto para CG (en azul) como para DG (en rojo) para $N = 3$ para dos configuraciones: $l = 1$ y $l = 2$ para el caso unidimensional.



(a) $l = 1$



(b) $l = 2$

Figura 11 – Gráfica de los grados de libertad para **CG** y **DG** con $l = 1$ (Figura 11a) y $l = 2$ (Figura 11b)

3.5. Estimativas del error numérico

En esta sección presentamos las estimativas del error numérico en la norma de la energía y derivamos la dependencia explícita de las constantes de coercitividad con respecto a los grado de los polinomio.

3.5.1. Estimativas del error en la norma de la energía

Encontrar P_h tal que

$$\mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, q_h\right) = L\left(q_h\right)$$

donde la forma bilineal fue definida (3.38) y α es una constante positiva. En (1.13) definimos el error numérico en la malla $\mathcal{T}_h$ como

$$e_h = p - P_h,$$

donde e_h representa la diferencia entre la solución exacta p y la solución aproximada P_h. La norma de energía del error se define por

$$\|e_h\|_{\mathcal{E}}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha \left(e_h'(x)\right)^2 dx + \gamma \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(e_h(x)\right)^2 dx + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h} \left[e_h\left(x_n\right)\right]^2, \tag{3.98}$$

y la norma L^2 del error se define por

$$\|e_h\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \left(e_h(x)\right)^2 dx. \tag{3.99}$$

Coercividad

Demostraremos la coercividad de la forma bilineal (3.38) tomando $q_h = P_h$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, P_h\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha \left(P_h'\right)^2 dx + \gamma \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(P_h(x)\right)^2 dx \\ &\quad + (\epsilon - 1) \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha P_h'\left(x_n\right)\}\!\} [\![P_h\left(x_n\right)]\!] + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h} [\![P_h\left(x_n\right)]\!]^2 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Si $\epsilon = 1$ (método **NIPG**) en (3.100) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, P_h\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha \left(P_h(x)'\right)^2 dx + \gamma \int_0^1 \left(P_h(x)\right)^2 dx + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h} [\![P_h\left(x_n\right)]\!]^2 \\ &= \|P_h\|_{\varepsilon}^2 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Para otros valores de ϵ necesitamos acotar algunos términos de la forma bilineal. Entonces sea $n \geq 1$ y usando el Teorema 1.10:

$$\begin{aligned} \left|\{\!\{P_h'\left(x_n\right)\}\!\}\right|^2 &\leq \frac{1}{2}\left(\left|P_h'\left(x_n^-\right)\right|^2 + \left|P_h'\left(x_n^+\right)\right|^2\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{h}\|P_h'\|_{L^2(I_{n-1})}^2 + \frac{l^2}{h}\|P_h'\|_{L^2(I_n)}^2\right) \\ &= \frac{l^2}{2h}\left(\|P_h'\|_{L^2(I_{n-1})}^2 + \|P_h'\|_{L^2(I_n)}^2\right) \end{aligned} \tag{3.102}$$

En el caso $n = 0$ y $n = N$ tenemos

$$\left|\{\!\{P_h'(x_0)\}\!\}\right|^2 \leq \frac{l^2}{h}\left\|P_h'\right\|^2_{L^2(I_0)} \tag{3.103}$$

$$\left|\{\!\{P_h'(x_N)\}\!\}\right|^2 \leq \frac{l^2}{h}\left\|P_h'\right\|^2_{L^2(I_N)} \tag{3.104}$$

De (3.102),(3.103) Y (3.104) tenemos

$$\sum_{n=0}^{N}\left|\{\!\{P_h'(x_n)\}\!\}\right|^2 \leq \frac{3l^2}{2h}\sum_{n=0}^{N}\left\|P_h'\right\|^2_{L^2(I_n)} \tag{3.105}$$

Si $h \leq 1$ entonces

$$\alpha\sum_{n=0}^{N}\left|\{\!\{P_h'(x_n)\}\!\}[\![P_h(x_n)]\!]\right| \leq \frac{\sqrt{3}l\alpha}{\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{N}\left\|P_h'\right\|^2_{L^2(I_n)}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{h}[\![P_h(x_n)]\!]^2\right)^{1/2} \tag{3.106}$$

Del Teorema 1.13 usando la desigualdad de Young, tenemos para $\delta > 0$

$$\alpha\sum_{n=0}^{N}\left|\{\!\{P_h'(x_n)\}\!\}[\![P_h(x_n)]\!]\right| \leq \frac{3\alpha\delta}{2}\sum_{n=0}^{N}\left\|P_h'\right\|^2_{L^2(I_n)} + \frac{\alpha l^2}{4\delta}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{h}[\![P_h(x_n)]\!]^2 \tag{3.107}$$

Multiplicando por $(1-\epsilon) > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}(1-\epsilon)\alpha\sum_{n=0}^{N}\left|\{\!\{P_h'(x_n)\}\!\}[\![P_h(x_n)]\!]\right| &\leq (1-\epsilon)\frac{3\alpha\delta}{2}\sum_{n=0}^{N}\left\|P_h'\right\|^2_{L^2(I_n)} \\ &\quad +(1-\epsilon)\frac{\alpha l^2}{4\delta}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{h}[\![P_h(x_n)]\!]^2.\end{aligned} \tag{3.108}$$

Ahora, obtendremos una cota inferior para $\mathcal{A}_\epsilon$. De (3.100),

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\epsilon(P_h,P_h) &= \sum_{n=0}^{N}\alpha\left\|P_h'\right\|^2_{L^2(I_n)} + \gamma\int_0^1 (P_h(x))^2\,dx \\ &\quad -(1-\epsilon)\alpha\sum_{n=0}^{N}\{\!\{P_h'(x_n)\}\!\}[\![P_h(x_n)]\!] + \sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h}[\![P_h(x_n)]\!]^2 \\ \mathcal{A}_\epsilon(P_h,P_h) &\geq \left(1-(1-\epsilon)\frac{3\delta}{2}\right)\sum_{n=0}^{N}\alpha\left\|P_h'\right\|^2_{L^2(I_n)} + \gamma\int_0^1 (P_h(x))^2\,dx \\ &\quad +\sigma^0\left(1-(1-\epsilon)\frac{\alpha l^2}{4\delta\sigma^0}\right)\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{h}[\![P_h(x_n)]\!]^2\end{aligned} \tag{3.109}$$

Eligiendo, por ejemplo, $\delta = \frac{1}{2}$ si $\epsilon = 0$ tenemos,

$$1-(1-\epsilon)\frac{3\delta}{2} = \frac{1}{4} \tag{3.110}$$

$$1-(1-\epsilon)\frac{\alpha l^2}{4\delta\sigma^0} = 1-\frac{\alpha l^2}{2\sigma^0}, \tag{3.111}$$

y eligiendo además σ^0 lo suficiente grande, como por ejemplo de (3.111) debe cumplirse que:

$$\sigma^0 \geq \frac{\alpha l^2}{2} \tag{3.112}$$

Para el caso $\epsilon = -1$ elegimos, por ejemplo $\delta = \frac{1}{4}$ entonces tenemos

$$1 - (1-\epsilon)\frac{3\delta}{2} = \frac{1}{4} \tag{3.113}$$

$$1 - (1-\epsilon)\frac{\alpha l^2}{4\delta\sigma^0} = 1 - \frac{2\alpha l^2}{\sigma^0} \tag{3.114}$$

Igualmente necesitamos que σ^0 sea lo suficientemente grande entonces de (3.114) obtenemos

$$\sigma^0 \geq 2\alpha l^2, \tag{3.115}$$

Entonces de (3.109) con las suposiciones sobre σ^0 satisfaciendo (3.110) y (3.112) (3.113) y (3.115) cuando $\epsilon = 0$ (método **IIPG**) o $\epsilon = -1$ (método **SIPG**) respectivamente entonces tenemos:

$$\mathcal{A}_\epsilon\left(P_h, P_h\right) \geq \frac{1}{4}\left\|P_h\right\|_{\mathcal{E}}^2 \tag{3.116}$$

Es interesante observar que mientras para la desigualdad que representa al método **SIPG** (3.115) es una cota más estricta, ya que la constante positiva es el doble del producto de l y α. Mientras que la desigualdad que representa al método **IIPG** (3.112) es más flexible ya que la constante positiva en la segunda desigualdad es igual a la mitad del mismo producto. Respecto al método **NIPG** (3.101) no considera restricción alguna además de ser $\sigma^0 > 0$.
Al elegir la constante de difusión α y el grado del polinomio l, es importante encontrar un equilibrio entre el costo computacional y la precisión de la solución numérica del método.

Los valores calculados de σ^0 para $\alpha = 1$ y distintos valores de l se pueden observar en la Tabla 1, mientras que para $\alpha = 10^{-3}$ se presentan en la Tabla 2.

Método	α	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
NIPG ($\epsilon = 1$)	1	$\sigma^0 > 0$	$\sigma^0 >$0	$\sigma^0 >$0	$\sigma^0 >$0
SIPG ($\epsilon = -1$)	1	$\sigma^0 \geq$2	$\sigma^0 \geq$8	$\sigma^0 \geq$18	$\sigma^0 \geq$32
IIPG ($\epsilon = 0$)	1	$\sigma^0 \geq$0.5	$\sigma^0 \geq$2.0	$\sigma^0 \geq$4.5	$\sigma^0 \geq$8.0

Tabla 1 – Valores calculados de σ^0 para $\alpha = 1$ y distintos valores de l.

Método	α	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
NIPG ($\epsilon = 1$)	1	$\sigma^0 > 0$	$\sigma^0 >$0	$\sigma^0 >$0	$\sigma^0 >$0
SIPG ($\epsilon = -1$)	10^{-3}	$\sigma^0 \geq$0.002	$\sigma^0 \geq$0.008	$\sigma^0 \geq$0.018	$\sigma^0 \geq$0.032
IIPG ($\epsilon = 0$)	10^{-3}	$\sigma^0 \geq$0.0005	$\sigma^0 \geq$0.002	$\sigma^0 \geq$0.0045	$\sigma^0 \geq$0.008

Tabla 2 – Valores calculados de σ^0 para $\alpha = 10^{-3}$ y distintos valores de l.

Continuidad

Supongamos que $\sigma_0 > 0$, entonces podemos probar que la forma bilineal $\mathcal{A}_\epsilon$ es continua en $D_l\left(\mathcal{E}_h\right)$ con la norma de la Energía $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. Usando la desigualdad de Cauchy-

Schwarz Teorema 1.12 tenemos,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_\epsilon(P_h,q_h)| \leq\ & \alpha\sum_{n=0}^{N-1}\left(\int_{x_n}^{x_{n+1}}|P_h'(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{x_n}^{x_{n+1}}|q_h'(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\\
&+\gamma\left(\int_0^1 P_h^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 q_h^2(x)dx\right)^{1/2}\\
&+\left(\sum_{n=0}^{N}\alpha\{\!\{P_h'(x_n)\}\!\}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{N}\alpha[\![q_h(x_n)]\!]^2\right)^{1/2}\\
&+\left(\sum_{n=0}^{N}|\epsilon|\alpha\{\!\{q_h'(x_n)\}\!\}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{N}|\epsilon|\alpha[\![P_h(x_n)]\!]^2\right)^{1/2}\\
&+\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h}[\![P_h(x_n)]\!]^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h}[\![q_h(x_n)]\!]^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_\epsilon(P_h,q_h)| \leq\ & \left(\sum_{n=0}^{N}\alpha\|P_h'\|^2_{L^2(I_n)}+\sum_{n=0}^{N}\alpha\{\!\{P_h'(x_n)\}\!\}^2+\gamma\int_0^1 P_h^2(x)dx\right.\\
&\left.+\sum_{n=0}^{N}\alpha|\epsilon|[\![P_h(x_n)]\!]^2+\sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h}[\![P_h(x_n)]\!]^2\right)^{1/2}\times\\
&\left(\sum_{n=0}^{N}\alpha\|q_h'\|^2_{L^2(I_n)}+\sum_{n=0}^{N}\alpha\{\!\{q_h'(x_n)\}\!\}^2+\gamma\int_0^1 q_h^2(x)dx\right.\\
&\left.+\sum_{n=0}^{N}\alpha|\epsilon|[\![q_h(x_n)]\!]^2+\sum_{n=0}^{N}\frac{\sigma^0}{h}[\![q_h(x_n)]\!]^2\right)^{1/2} \qquad (3.117)
\end{aligned}$$

De (3.105) en (3.117) obtenemos,

$$|\mathcal{A}_\epsilon(P_h,q_h)| \leq M\|P_h\|^2_\varepsilon\|q_h\|^2_\varepsilon \qquad (3.118)$$

donde $M=\max\left\{1+\frac{3l^2\alpha}{2h},1,\frac{\alpha|\epsilon|h}{\sigma^0}+1\right\}$.

Estimativa del error en la norma de la energía para SIPG

Teorema 3.10 *Supongamos que la solución exacta del problema pertenece a $H^s(\mathcal{E}_h)$ definido en (3.6) para $s>3/2$. Además supongamos que el parámetro σ^0 es lo bastante grande. Entonces para el método SIPG existe una constante C independiente de h tal que se tiene la siguiente estimativa del error en la norma de la energía:*

$$\|p-P_h\|_{\mathcal{E}_h}\leq Ch^{\min\{l+1,s\}-1}|||p|||_{H^s(\mathcal{E}_h)} \qquad (3.119)$$

Demostración: Sea p la solución exacta del problema y P_h la solución aproximada que satisface (3.5.1). Por la desigualdad triangular tenemos que

$$\|p-P_h\|_{\mathcal{E}_h}\leq\|p-\widetilde{p}\|_{\mathcal{E}_h}+\|P_h-\widetilde{p}\|_{\mathcal{E}_h} \qquad (3.120)$$

para algún $\widetilde{p} \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h)$ que aproxima a la solución p, entonces es suficiente acotar en (3.120) a $\|P_h - \widetilde{p}\|_{\mathcal{E}_h}$. Primeramente probaremos que la solución exacta p satisface (3.5.1) entonces sustituimos P_h por p y tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon(p, q_h) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha p'(x) q_h'(x) dx + \gamma \int_0^1 p(x) q_h(x) dx \\
&\quad - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha p'(x_n)\}\!\} [\![q_h(x_n)]\!] - \epsilon \alpha q_h'(x_0) p(x_0) + \frac{\sigma^0}{h} p(x_0) q_h(x_0) \\
&= \int_0^1 f(x) dx - \epsilon \alpha q_h'(x_0) p(x_0) + \frac{\sigma^0}{h} p(x_0) q_h(x_0) \\
\mathcal{A}_\epsilon(p, q_h) &= L(q_h)
\end{aligned} \tag{3.121}$$

De (3.121) y (3.5.1) tenemos la ortogonalidad:

$$\mathcal{A}_\epsilon(P_h - p, q_h) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h) \tag{3.122}$$

Agregando y sustraendo $\widetilde{p} \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h)$ en cada término de (3.122),

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon(P_h - p + \widetilde{p} - \widetilde{p}, q_h) &= 0 \\
\mathcal{A}_\epsilon(P_h - \widetilde{p}, q_h) &= \mathcal{A}_\epsilon(p - \widetilde{p}, q_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{D}_l(\mathcal{E}_h)
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Elegimos $q_h = P_h - \widetilde{p}$ en (3.123) y usamos la coercividad (3.116) entonces obtenemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon(P_h - \widetilde{p}, P_h - \widetilde{p}) &= \mathcal{A}_\epsilon(p - \widetilde{p}, P_h - \widetilde{p}) \\
\frac{1}{4} \|P_h - \widetilde{p}\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq \mathcal{A}_\epsilon(p - \widetilde{p}, P_h - \widetilde{p})
\end{aligned}$$

Escribiendo $\mathcal{X} = P_h - \widetilde{p}$ tenemos,

$$\frac{1}{4} \|\mathcal{X}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \mathcal{A}_\epsilon(p - \widetilde{p}, \mathcal{X}) \tag{3.124}$$

Ahora debemos estimar una cota para:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\epsilon(p - \widetilde{p}, \mathcal{X}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha (p - \widetilde{p})' \mathcal{X}' dx + \gamma \int_0^1 (p - \widetilde{p}) \mathcal{X} dx \\
&\quad - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha (p - \widetilde{p})'(x_n)\}\!\} [\![\mathcal{X}(x_n)]\!] + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha \mathcal{X}'(x_n)\}\!\} [\![(p - \widetilde{p})(x_n)]\!] \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h} [\![(p - \widetilde{p})(x_n)]\!] [\![\mathcal{X}(x_n)]\!]
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Tenemos que acotar los siguientes términos:

$$T_1 = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha (p - \widetilde{p})' \mathcal{X}' dx + \gamma \int_0^1 (p - \widetilde{p}) \mathcal{X} dx \tag{3.126}$$

$$T_2 = - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha (p - \widetilde{p})'(x_n)\}\!\} [\![\mathcal{X}(x_n)]\!] \tag{3.127}$$

$$T_3 = \epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\alpha \mathcal{X}'(x_n)\}\!\} [\![(p - \widetilde{p})(x_n)]\!] \tag{3.128}$$

$$T_4 = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma^0}{h} [\![(p - \widetilde{p})(x_n)]\!] [\![\mathcal{X}(x_n)]\!] \tag{3.129}$$

Por la desigualdad de Cauchy Schwarz tenemos,

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha \left((p-\widetilde{p})' \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha \left(\mathcal{X}' \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \gamma (p-\widetilde{p})^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \gamma \mathcal{X}^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq (\alpha+\gamma)^{1/2} |||p-\widetilde{p}|||_{H^1(\mathcal{E}_h)} \|\mathcal{X}\|_{\mathcal{E}} \end{aligned} \tag{3.130}$$

Usando la desigualdad de Young del Teorema 1.13, tenemos para $\alpha > 0$

$$|T_1| \leq Ch^{2\min\{l+1,s\}-2} |||p|||^2_{H^s(\mathcal{E}_h)} + \frac{1}{24} \|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{E}} \tag{3.131}$$

Para acotar T_2, primeramente acotamos los términos que lo forman:

$$|\{\!\{(p-\widetilde{p})'(x_n)\}\!\}| \leq \frac{1}{2} \left| (p-\widetilde{p})' \left(x_n^- \right) \right| + \frac{1}{2} \left| (p-\widetilde{p})' \left(x_n^+ \right) \right| \tag{3.132}$$

Usando el Teorema 1.9

$$\left| (p-\widetilde{p})' \left(x_n^- \right) \right| \leq h^{-1/2} \left(\|(p-\widetilde{p})'\|_{L^2(I_{n-1})} + h \|(p-\widetilde{p})''\|_{L^2(I_{n-1})} \right) \tag{3.133}$$

$$\left| (p-\widetilde{p})' \left(x_n^+ \right) \right| \leq h^{-1/2} \left(\|(p-\widetilde{p})'\|_{L^2(I_n)} + h \|(p-\widetilde{p})''\|_{L^2(I_n)} \right) \tag{3.134}$$

$$\left| (p-\widetilde{p})' \left(x_0^+ \right) \right| \leq h^{-1/2} \left(\|(p-\widetilde{p})'\|_{L^2(I_0)} + h \|(p-\widetilde{p})''\|_{L^2(I_0)} \right) \tag{3.135}$$

$$\left| (p-\widetilde{p})' \left(x_N^- \right) \right| \leq h^{-1/2} \left(\|(p-\widetilde{p})'\|_{L^2(I_N)} + h \|(p-\widetilde{p})''\|_{L^2(I_N)} \right) \tag{3.136}$$

Luego, (3.133) y (3.134) en (3.132) tenemos

$$\begin{aligned} |\{\!\{(p-\widetilde{p})'(x_n)\}\!\}| &\leq \frac{h^{-1/2}}{2} |p-\widetilde{p}|_{H^1(I_{n-1})} + \frac{h^{1/2}}{2} |p-\widetilde{p}|_{H^2(I_{n-1})} \\ &\quad + \frac{h^{-1/2}}{2} |p-\widetilde{p}|_{H^1(I_n)} + \frac{h^{1/2}}{2} |p-\widetilde{p}|_{H^2(I_n)} \end{aligned} \tag{3.137}$$

De (3.137) y usando la aproximación del Teorema 3.1 tenemos

$$|\{\!\{(p-\widetilde{p})'(x_n)\}\!\}| \leq h^{\min\{l+1,s\}-3/2} \left(|p|_{H^s(I_{n-1})} + |p|_{H^s(I_n)} \right)$$

Finalmente tenemos,

$$|\{\!\{(p-\widetilde{p})'(x_n)\}\!\}|^2 \leq 2h^{2\min\{l+1,s\}-3} \left(|p|^2_{H^s(I_{n-1})} + |p|^2_{H^s(I_n)} \right) \tag{3.138}$$

Para los extremos obtenemos,

$$|\{\!\{(p-\widetilde{p})'(x_0)\}\!\}| \leq h^{-1/2} |p-\widetilde{p}|_{H^1(I_0)} + h^{1/2} |p-\widetilde{p}|_{H^2(I_0)} \tag{3.139}$$

$$|\{\!\{(p-\widetilde{p})'(x_N)\}\!\}| \leq h^{-1/2} |p-\widetilde{p}|_{H^1(I_N)} + h^{1/2} |p-\widetilde{p}|_{H^2(I_N)} \tag{3.140}$$

aplicando nuevamente el Teorema del trazo Teorema 1.10:

$$\begin{aligned} |\{\!\{(p-\widetilde{p})(x_0)\}\!\}| &\leq 2h^{\min\{l+1,s\}-3/2} |p|_{H^s(I_0)} \\ |\{\!\{(p-\widetilde{p})(x_N)\}\!\}| &\leq 2h^{\min\{l+1,s\}-3/2} |p|_{H^s(I_N)} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado,

$$|\{\!\{(p-\widetilde{p})(x_0)\}\!\}|^2 \leq 4h^{2\min\{l+1,s\}-3}|p|_{H^s(I_0)} \tag{3.141}$$
$$|\{\!\{(p-\widetilde{p})(x_N)\}\!\}|^2 \leq 4h^{2\min\{l+1,s\}-5}|p|^2_{H^s(I_N)} \tag{3.142}$$

Sumando (3.138), (3.141) y (3.142) tenemos

$$\sum_{n=0}^{N}|\{\!\{(p-\widetilde{p})'(x_n)\}\!\}|^2 \leq Ch^{2\min\{l+1,s\}-3}\sum_{n=0}^{N}|p|^2_{H^s(I_n)} \tag{3.143}$$

Dado que $\sigma^0 \neq 0$ y usando (3.143) acotamos T_2 por

$$\begin{aligned}
|T_2| &\leq \sum_{n=0}^{N}|[\![\mathcal{X}(x_n)]\!]|\,|\{\!\{\alpha(p-\widetilde{p})'(x_n)\}\!\}| && (3.144)\\
&\leq \frac{1}{24}J_0(\mathcal{X},\mathcal{X}) + Ch\sum_{n=0}^{N}|\{\!\{(p-\widetilde{p})'(x_n)\}\!\}|^2\\
&\leq \frac{1}{24}J_0(\mathcal{X},\mathcal{X}) + Ch^{2\min\{l+1,s\}-2}|||p|||^2_{H^s(\mathcal{E}_h)}\\
&\leq \frac{1}{24}\|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{E}} + Ch^{2\min\{l+1,s\}-2}|||p|||^2_{H^s(\mathcal{E}_h)} && (3.145)
\end{aligned}$$

Seguidamente acotaremos T_3. Dado que

$$|T_3| \leq |\epsilon|\sum_{n=0}^{N}|\{\!\{\alpha\mathcal{X}'(x_n)\}\!\}|\,|[\![(p-\widetilde{p})(x_n)]\!]| \tag{3.146}$$

entonces primeramente acotamos el término:

$$|[\![(p-\widetilde{p})(x_n)]\!]| \leq \left|(p-\widetilde{p})\left(x_n^-\right)\right| + \left|(p-\widetilde{p})\left(x_n^+\right)\right| \tag{3.147}$$

Del Teorema 1.9 tenemos,

$$\begin{aligned}
\left|(p-\widetilde{p})\left(x_n^-\right)\right| &\leq h^{-1/2}\|p-\widetilde{p}\|_{L^2(I_{n-1})} + h^{1/2}|p-\widetilde{p}|_{H^1(I_{n-1})} && (3.148)\\
\left|(p-\widetilde{p})\left(x_n^+\right)\right| &\leq h^{-1/2}\|p-\widetilde{p}\|_{L^2(I_n)} + h^{1/2}|p-\widetilde{p}|_{H^1(I_n)} && (3.149)
\end{aligned}$$

Combinando (3.148) y (3.149) con (3.147), y usando una vez más la aproximación del Teorema 3.1 tenemos,

$$|[\![(p-\widetilde{p})(x_n)]\!]| \leq 2h^{\min\{l+1,s\}-1/2}\left(|p|_{H^s(I_{n-1})} + |p|_{H^s(I_n)}\right) \tag{3.150}$$

Usando la desigualdad del trazo del Teorema 1.10 en espacios finitos dimensionales, obtenemos como en (3.102) :

$$|\{\!\{\alpha\mathcal{X}'(x_n)\}\!\}| \leq \frac{Cl}{\sqrt{h}}\left(\|\mathcal{X}'\|_{L^2(I_{n-1})} + \|\mathcal{X}'\|_{L^2(I_n)}\right) \tag{3.151}$$

Combinando (3.150) y (3.151) obtenemos,

$$\begin{aligned}|\{\!\{\alpha\mathcal{X}'(x_n)\}\!\}|\,|[\![(p-\widetilde{p})(x_n)]\!]| &\leq \frac{Cl}{\sqrt{h}}\left(\|\mathcal{X}'\|_{L^2(I_{n-1})}+\|\mathcal{X}'\|_{L^2(I_n)}\right)\\ &\quad+2h^{\min\{l+1,s\}-1/2}\left(|p|_{H^s(I_{n-1})}+|p|_{H^s(I_n)}\right)\\ &= Clh^{\min\{l+1,s\}-1}\left(\|\mathcal{X}'\|_{L^2(I_{n-1})}+\|\mathcal{X}'\|_{L^2(I_n)}\right)\\ &\quad\times\left(|p|_{H^s(I_{n-1})}+|p|_{H^s(I_n)}\right)\end{aligned}\tag{3.152}$$

Para los extremos tenemos que

$$|\{\!\{\alpha\mathcal{X}'(x_0)\}\!\}|\,|[\![(p-\widetilde{p})(x_0)]\!]| \leq Clh^{\min\{l+1,s\}-1}\|\mathcal{X}'\|_{L^2(I_0)}|p|_{H^s(I_0)}\tag{3.153}$$

$$|\{\!\{\mathcal{X}'(x_N)\}\!\}|\,|[\![(p-\widetilde{p})(x_N)]\!]| \leq Clh^{\min\{l+1,s\}-1}\|\mathcal{X}'\|_{L^2(I_{N-1})}|p|_{H^s(I_{N-1})}\tag{3.154}$$

Sumando (3.152),(3.153) y (3.154) obtenemos

$$\begin{aligned}|T_3| &\leq \sum_{n=0}^{N}|\alpha\{\!\{\mathcal{X}'(x_n)\}\!\}|\,|[\![(p-\widetilde{p})(x_n)]\!]|\\ &\leq Ch^{2\min\{l+1,s\}-2}|||p|||^2_{H^s(\mathcal{E}_h)}+\frac{1}{24}\|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{E}}\end{aligned}\tag{3.155}$$

Finalmente, acotaremos T_4 :

$$\begin{aligned}|T_4| &\leq \sum_{n=0}^{N}\sqrt{\frac{\sigma^0}{h}}\,|[\![(p-\widetilde{p})(x_n)]\!]|\sqrt{\frac{\sigma^0}{h}}\,|[\![\mathcal{X}(x_n)]\!]|\\ &\leq Ch^{2\min\{l+1,s\}-1}|||p|||^2_{H^s(\mathcal{E}_h)}+\frac{1}{24}\|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{E}}\end{aligned}\tag{3.156}$$

De (3.131), (3.145), (3.155) y (3.156) en (3.125) obtenemos,

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_\epsilon(p-\widetilde{p},\mathcal{X})| &\leq |T_1|+|T_2|+|T_3|+|T_4|\\ |\mathcal{A}_\epsilon(p-\widetilde{p},\mathcal{X})| &\leq Ch^{2\min\{l+1,s\}-1}|||p|||^2_{H^s(\mathcal{E}_h)}+\frac{1}{24}\|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{E}}\end{aligned}\tag{3.157}$$

Usando la estimativa (3.124) y (3.157) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{E}} &\leq Ch^{2\min\{l+1,s\}-2}|||p|||^2_{H^s(\mathcal{E}_h)}+\frac{1}{6}\|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{E}}\\ \|P_h-\widetilde{p}\|^2_{\mathcal{E}} &\leq Ch^{2\min\{l+1,s\}-2}|||p|||^2_{H^s(\mathcal{E}_h)}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|P_h-\widetilde{p}\|_{\mathcal{E}}\leq Ch^{\min\{l+1,s\}-1}|||p|||_{H^s(\mathcal{E}_h)}\tag{3.158}$$

De (3.120) y (3.158),

$$\|p-P_h\|_{\mathcal{E}} \leq Ch^{\min\{l+1,s\}-1}|||p|||_{H^s(\mathcal{E}_h)}+Ch^{\min\{l+1,s\}-1}|||p|||_{H^s(\mathcal{E}_h)}$$

Por lo tanto,

$$\|p-P_h\|_{\mathcal{E}}\leq Ch^{\min\{l+1,s\}-1}|||p|||_{H^s(\mathcal{E}_h)}$$

■

El teorema establece que, bajo condiciones adecuadas de suavidad de la solución exacta ($s > 3/2$) y un parámetro de penalización (σ^0) suficientemente grande, el error en la norma de energía para el método **SIPG** puede acotarse superiormente por $Ch^{\min\{l+1,s\}-1}$, donde C es una constante independiente de h, l es el grado de los polinomios utilizados en la aproximación, y s es el índice de suavidad de la solución exacta en el espacio de Sobolev. En términos generales, cuando aumenta el grado del polinomio (l), se esperan tasas de convergencia más altas bajo la condición de que la solución exacta posea la suavidad necesaria para soportar dicha tasa. Es decir, para soluciones suficientemente suaves, el error disminuya más rápidamente con la reducción del tamaño de paso h para grados de polinomio más altos. Por ejemplo, para grados de polinomio $l = 1, 2, 3, 4$, se esperan tasas de convergencia lineales, cuadráticas, cúbicas y de cuarto orden para $l = 1, 2, 3, 4$, respectivamente.

A continuación, se presentan las gráficas del problema Problema 4.1, correspondientes a la Ecuación de difusión, relacionadas con la convergencia de convergencia h para los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** con $\alpha = 1$ en la Figura 12 y para $\alpha = 10^{-3}$ en la Figura 13, respectivamente.

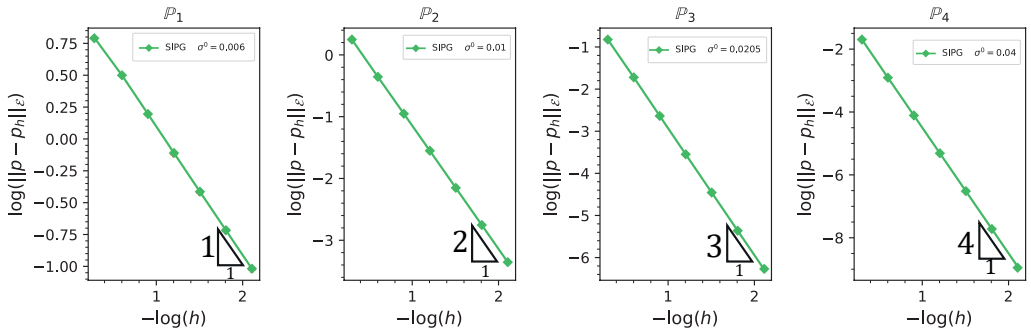


Figura 12 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **SIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

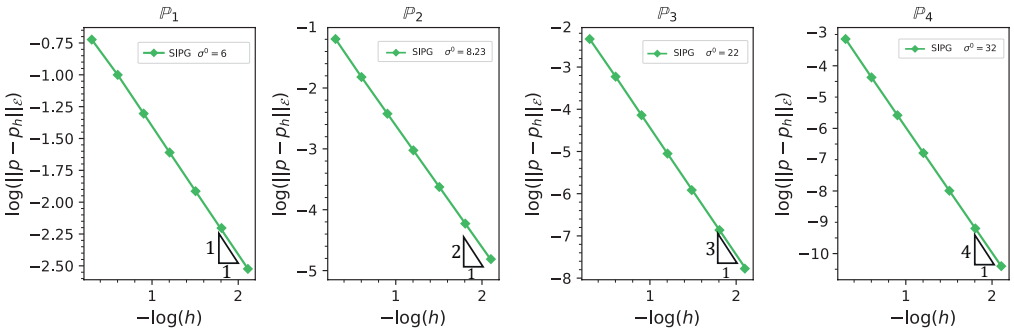


Figura 13 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **SIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

Adicionalmente, se presentan las gráficas, para **SIPG** con $\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$, en Figura 14, relacionadas con la convergencia de σ^0 cuando se encuentra acotado por un umbral crítico tal como se presentó en la Tabla 1 para $\alpha = 1$, y **??** para $\alpha = 10^{-3}$.

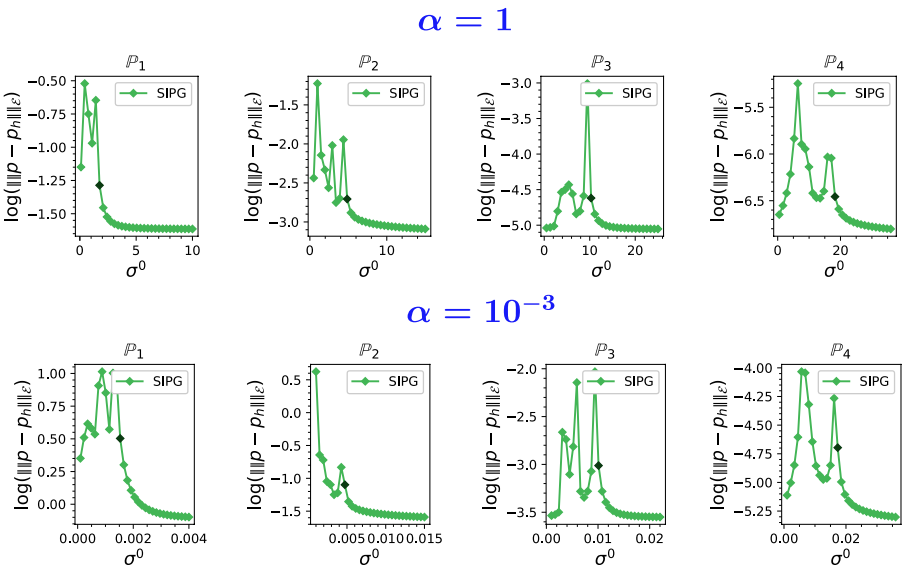


Figura 14 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **SIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos,$\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$

4 Resultados Numéricos

Mediante la contextualización y adaptación basados en los principios fundamentales ampliamente reconocidos en la comunidad científica y con la finalidad de mejorar la interpretabilidad del análisis, se exponen las aplicaciones prácticas basadas en problemas de ecuaciones en la frontera, en campos como física, química y otros. Se considera el método de elementos finitos discontinuos estudiados y mostraremos el comportamiento de las soluciones para diferentes tipos: **NIPG** ($\epsilon = 1$), **SIPG** ($\epsilon = -1$), **IIPG** ($\epsilon = 0$). Es relevante señalar que al mencionar **NIPG** , **IIPG** , **SIPG** y **CG** , se refiere a variantes de métodos de elementos finitos. Aunque usamos estas siglas para mantener coherencia terminológica, es esencial reconocer que aludimos a métodos de elementos finitos en un sentido más amplio y apropiado.

Procedimiento de análisis

Consideramos para este estudio problemas de difusión, difusión-absorción, difusión-advección y convección con condiciones en la frontera del tipo Dirichlet en el dominio $\Omega = (0, 1)$. La solución aproximada por los métodos **NIPG** , **IIPG** , **SIPG** se obtiene utilizando polinomios discontinuos por partes $\mathbb{P}_l$ de grado menor o igual a $l \leq 4$.

Por otro lado, el error e_h, definido en (1.13), medido en la norma de L^2 se define por,

$$\|e_h\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 (e_h(x))^2 \right)^{1/2}, \tag{4.1}$$

en la norma de la energía por

$$\begin{aligned} \|e_h\|_{\mathcal{E}}^2 \;=\; & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \alpha \left(e_h'(x)\right)^2 dx + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[\frac{\beta'(x)}{2} + \gamma \right] (e_h(x))^2 \, dx \\ & + J_0 \left(e_h, e_h\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

y en la seminorma, que mide los saltos, se define por

$$|e_h|_{\mathcal{J}} = \left(\sum_{n=1}^{N-1} \bar{I}_n [\![e_h]\!]_n^2 \right)^{1/2} \tag{4.3}$$

donde $\bar{I}_n = \frac{|x_n - x_{n-1}| + |x_{n+1} - x_n|}{2}$.

La tasa de convergencia correspondiente a los diferentes métodos, en la norma de L^2, norma de la energía y la seminorma del salto se denotan por $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$, $\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$ y $\delta_{|\cdot|_{\mathcal{J}}}$,

respectivamente, y según (1.17) se definen por:

$$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}} = \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{\|e_h\|_{L^2(0,1)}}{\left\|e_{\frac{h}{2}}\right\|_{L^2(0,1)}}\right) \tag{4.4}$$

$$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}} = \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{\|e_h\|_{\mathcal{E}}}{\left\|e_{\frac{h}{2}}\right\|_{\mathcal{E}}}\right) \tag{4.5}$$

$$\delta_{|\cdot|_{\mathcal{J}}} = \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{|e_h|_{\mathcal{J}}}{\left|e_{\frac{h}{2}}\right|_{\mathcal{J}}}\right) \tag{4.6}$$

Para todos los estudios, se consigue mostrar las siguientes subsecciones de análisis y sus respectivos objetivos

- *Convergencia* σ^0: Determinar los valores óptimos de σ^0 y estudiar su influencia en la estabilidad y precisión de las aproximaciones de la solución exacta.
- *Influencia del parámetro* σ^0 busca analizar su posible influencia en la convergencia del método cuando este varía.
- *Convergencia h mallas uniformes y no uniformes* Estudiar la influencia en la estabilidad y precisión de las aproximaciones de la solución exacta.

La convergencia h presenta dos enfoques importantes en el estudio. Para el caso uniforme, comparamos las soluciones aproximadas del método **CG** utilizando polinomios continuos de grado $\mathbb{P}_l$, donde $l \leq 2$, con los métodos **DG** . Para el caso no uniforme, se opta por mantener constantes los valores de penalización σ^0 de la experimentación con mallas uniformes con el fin de evaluar la robustez del método en diferentes condiciones de mallas.

El uso de mallas no uniformes se utiliza cinco tipos diferentes de particiones expuestos en Tabla 3 y la representación gráfica en Figura 15.

Tipo de Malla	a	b	c
Malla Tipo 1	1/3	1/3	1/3
Malla Tipo 2	1/7	1/5	23/35
Malla Tipo 3	1/7	1/2	5/14
Malla Tipo 4	1/7	1/7	5/7
Malla Tipo 5	1/4	1/2	1/4

Tabla 3 – Tabla de valores para los tipos de partición para el estudio de mallas no uniformes

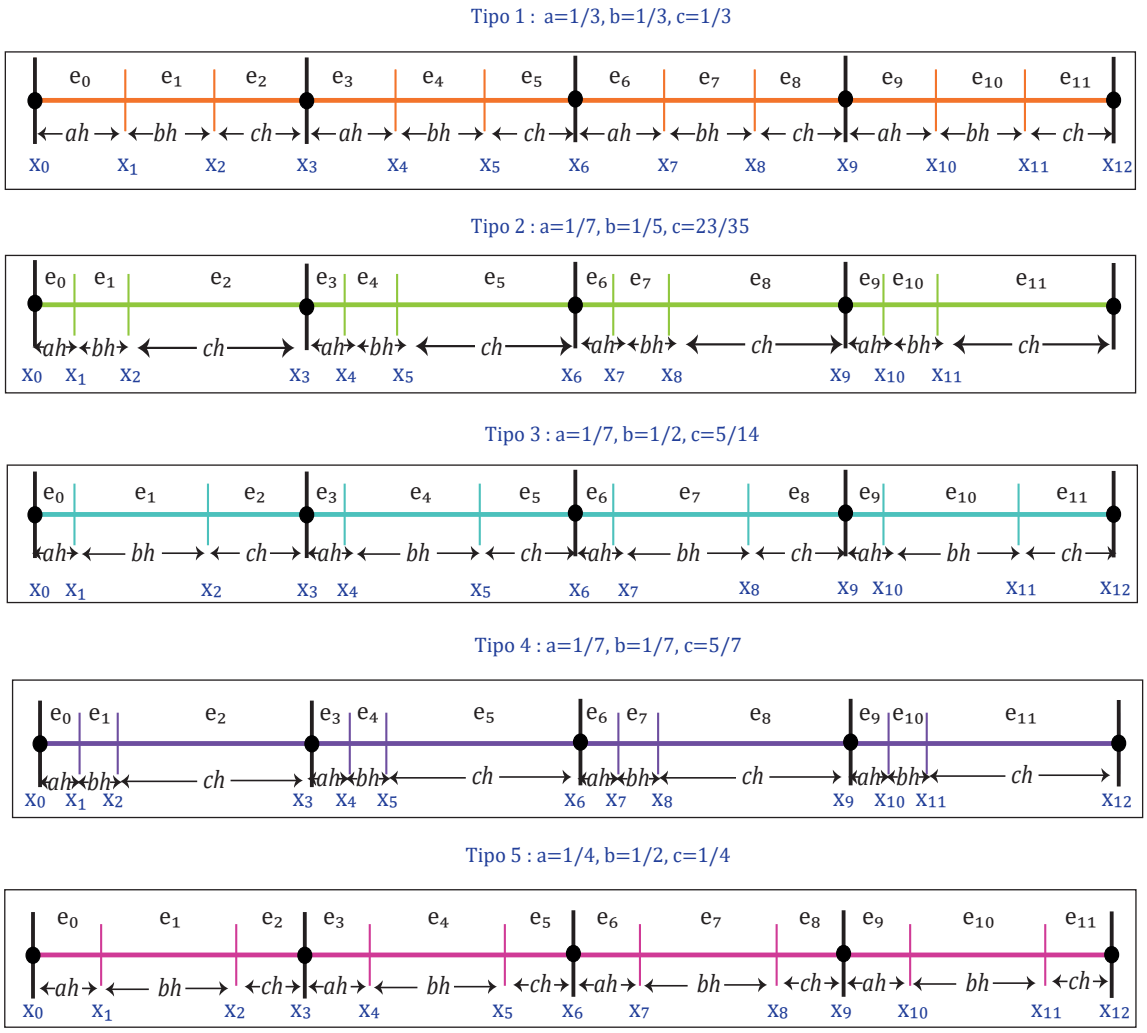


Figura 15 – Representación gráfica de los tipos de partición para el estudio de mallas no uniformes

Observación 6: Es importante mencionar que la malla denominada Tipo 1 (a=1/3, b=1/3, c=1/3) muestra una distribución equidistante entre sus puntos, lo que la caracteriza como una malla uniforme. Sin embargo, para realizar un análisis y comparación entre diversas mallas en el contexto de este estudio, hemos optado por considerar a la malla Tipo 1 como parte del conjunto de mallas no uniformes en su distribución.

Comparación y Estudio de Casos Particulares

Como casos particulares, en Problema 4.1, se pretende comparar los resultados obtenidos en (Rivière, 2008) y evaluar cualquier diferencia o mejora significativa que pueda surgir.

Por otro lado, se presentan casos particulares en los problemas de Difusión - Advección Problema 4.4 y Convección Problema 4.5 introducen un término adicional en sus respectivas formulaciones variacionales de los métodos DG ($\beta(x) \cdot p(x)$). Este término genera dos formas variacionales diferentes, las cuales fueron previamente mencionadas y justificadas en la sección Sección 3.2 (especificamente en (3.40) Para el caso Difusión - Advección y (3.42) para el caso Convección). Por esta razón, el estudio de la convergencia σ^0 se llevó a cabo bajo esta estructura y así determinar cuál de los dos enfoques presenta una mejor convergencia.

4.1. Problema de Difusión

Difusión de la temperatura en una varilla unidimensional

La teoría del flujo de calor unidimensional se aborda en el contexto de una varilla delgada circular de longitud L, cuya sección transversal A se encuentra alineada con el eje x en el intervalo $[0, L]$. Se supone que la varilla es homogénea, lo que significa que su densidad de masa ρ es constante. Además, las propiedades de calor específico γ y conductividad térmica K del material de la varilla se mantienen constantes. Se introduce el concepto de difusividad térmica $k = K/\gamma\rho$, que es una constante positiva.

La función $u(x, t)$ representa la temperatura en un punto x a lo largo de la varilla en algún tiempo t. Problema adaptado de (*Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*, 2018)

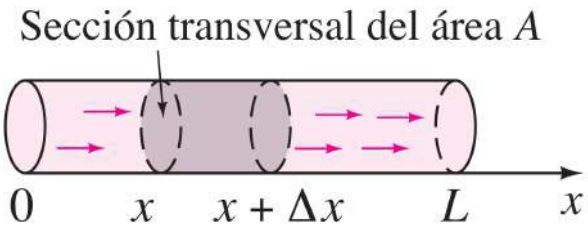


Figura 16 – Flujo de calor unidimensional (*Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*, 2018, p. 466)

La forma general de la ecuación de calor unidimensional se da por la ecuación (4.7):

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G\left(x, t, u, u_x\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.7}$$

Consideramos las influencias internas o externas que actúan sobre el sistema físico, lo que nos lleva a la ecuación (4.8):

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G\left(x, t\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 \tag{4.8}$$

Suponemos que la barra alcanza un estado estacionario después de un tiempo, lo que implica que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, eliminando la dependencia temporal. La ecuación se reduce a:

$$-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = G\left(x\right)$$

Si los extremos de la barra se mantienen a una temperatura constante, es posible prescribir las condiciones de frontera y ser expresadas como en el problema (4.9):

$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = G\,(x) \\ u(0) = T_0 \\ u(L) = T_1 \end{cases} \tag{4.9}$$

Tomando como referencia la ecuación (4.9), el coeficiente de difusión k es representado por α en el problema (4.1) y G el término fuente que equivale a $f(x)$. Finalmente, la solución exacta $p(x)$ representa la temperatura en un punto x a lo largo de la varilla en el problema (4.1).

Problema 4.1 [1]

$$\begin{cases} -\left(\alpha p'(x)\right)' = f(x) \quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ p(0) = 1 \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Donde la constante $\alpha > 0$, *y* $f(x) = -\left(2\cdot x - 2\cdot(1-2\cdot x) + 4\cdot x\cdot(x-x^2)\right)\cdot e^{-x^2}$. *Con solución exacta*

$$p(x) = \frac{1}{\alpha}\left(e^{-x^2} - 1 + \alpha\right)(1-x) \tag{4.10}$$

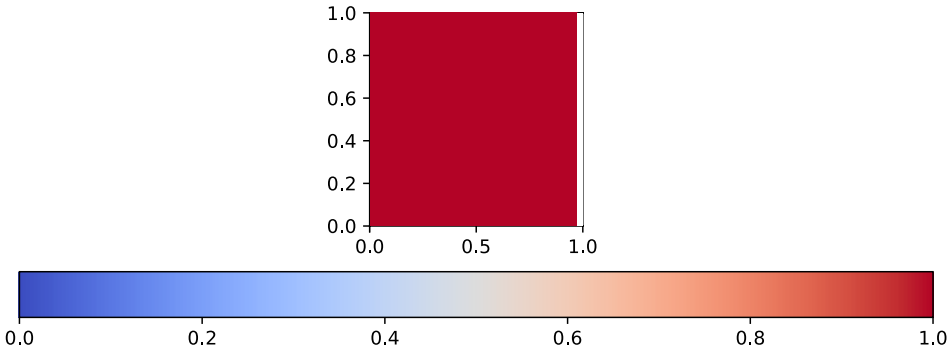


Figura 17 – Distribución estacionaria de temperatura en una varilla unidimensional obtenida a partir de (4.1), siendo el azul el mínimo y el rojo el máximo valor de temperatura.

Observación 7: ¿Qué sucede cuando $\alpha = 1$, $\alpha \to 0$ en Problema 4.1?

Cuando $\alpha = 1$, la difusividad térmica es unitaria, lo que indica una proporción equilibrada entre la conducción y almacenamiento de calor en la varilla. Esto resulta en una distribución de temperatura que está influenciada directamente por la función fuente $f(x)$ y las condiciones de contorno. Por otro lado, $\alpha \to 0$, la difusividad térmica se reduce, por ende la capacidad de la varilla para conducir calor disminuye. En este límite,

[1] Ejemplo propuesto en: (Rivière, 2008)

la temperatura disminuye linealmente desde $T_0 = 1$ en $x = 0$ hasta $T_1 = 0$ en $x = 1$, sin ser afectada por la función fuente $f(x)$, reflejando una conductividad térmica extremadamente limitada.

Convergencia σ^0

A continuación presentamos estudios de convergencia realizados para la identificación de los valores óptimos de σ^0, el objetivo es encontrar el valor óptimo de σ^0 que permita obtener una solución numérica estable. Se emplean polinomios discontinuos por partes $\mathbb{P}_2$ y mallas uniformes de $N = 32$ En la Figura 18 con $\alpha = 1$ y Figura 19 con $\alpha = 10^{-3}$, respectivamente.

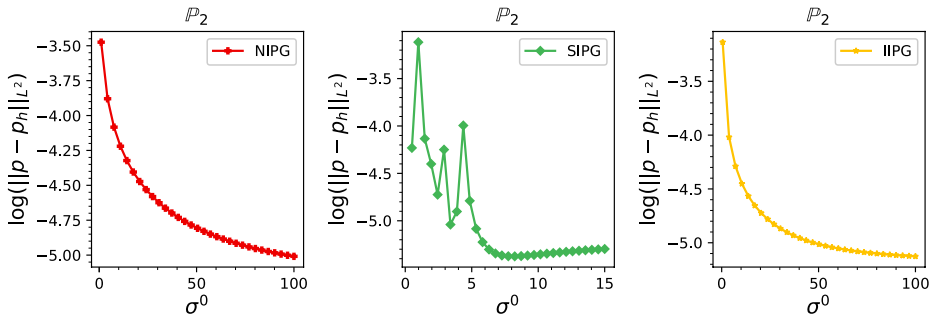


Figura 18 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con malla fija uniformes de $N = 32$ elementos, $\alpha = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$

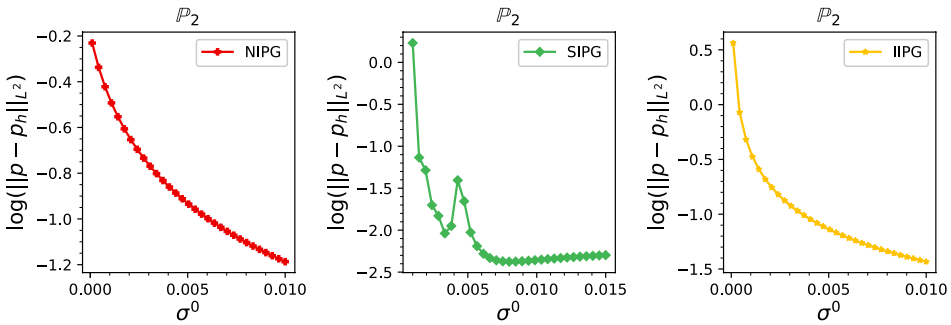


Figura 19 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con malla fija uniformes de $N = 32$ elementos, $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$

En las gráficas Figura 18 y Figura 19, **NIPG** e **IIPG** muestran estabilidad al aumentar σ^0, mientras que **SIPG** se estabiliza solo después de un valor crítico de σ^0. Para valores altos de σ^0, los tres métodos se vuelven independientes del parámetro.

Basados en estos resultados experimentales construimos la Tabla 4 con los valores óptimos para σ^0 que son utilizados en las simulaciones.

		σ^0							
		$\|\cdot\|_{L^2}$				$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$			
α	Método	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$
1	**SIPG**	4.72	8.233	20.1	25.35	10	0.004	25	36
	NIPG	8.1	100	200	300	10	0.01	200	300
	IIPG	5.103	100	200	300	8	0.01	200	300
10^{-3}	**NIPG**	0.0081	0.01	0.05	0.05	0.01	0.01	0.05	0.05
	SIPG	0.004	0.008	0.0205	0.0255	0.004	0.015	0.022	0.036
	IIPG	0.00524	0.01	0.05	0.05	0.01	0.01	0.05	0.05

Tabla 4 – Valores Óptimos σ^0 para las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ cuando $\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$

Influencia del parámetro σ^0

Para evaluar la sensibilidad de cada método al parámetro σ^0, variamos su valor en torno a los óptimos previamente determinados (ver Tabla 4). En el caso de **SIPG** , la variación fue más restrictiva, ajustándose a 1 unidad en torno a $\sigma^0 = 8{,}23$ cuando $\alpha = 1$ y 0.01 unidades cuando $\alpha = 10^{-3}$. Esta elección se basa en que **SIPG** mostró una tendencia a divergir cuando σ^0 se aleja hacia abajo del valor óptimo, y a converger cuando se aleja hacia arriba. Por otro lado, en los métodos **NIPG** e **IIPG** , la variación fue más amplia debido a su comportamiento generalmente convergente respecto a σ^0. Todos los métodos se evaluaron utilizando polinomios cuadrados por partes $\mathbb{P}_2$.

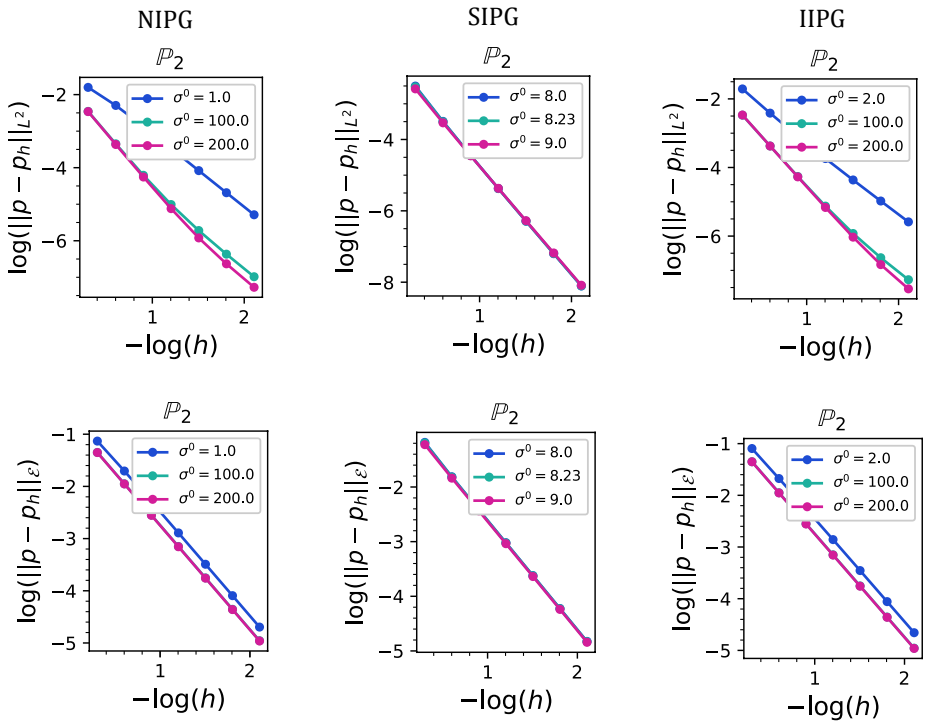


Figura 20 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos NIPG (izquierda), SIPG (centro), IIPG (derecha), con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots, 128$ elementos, $\alpha = 1$ en la norma$\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

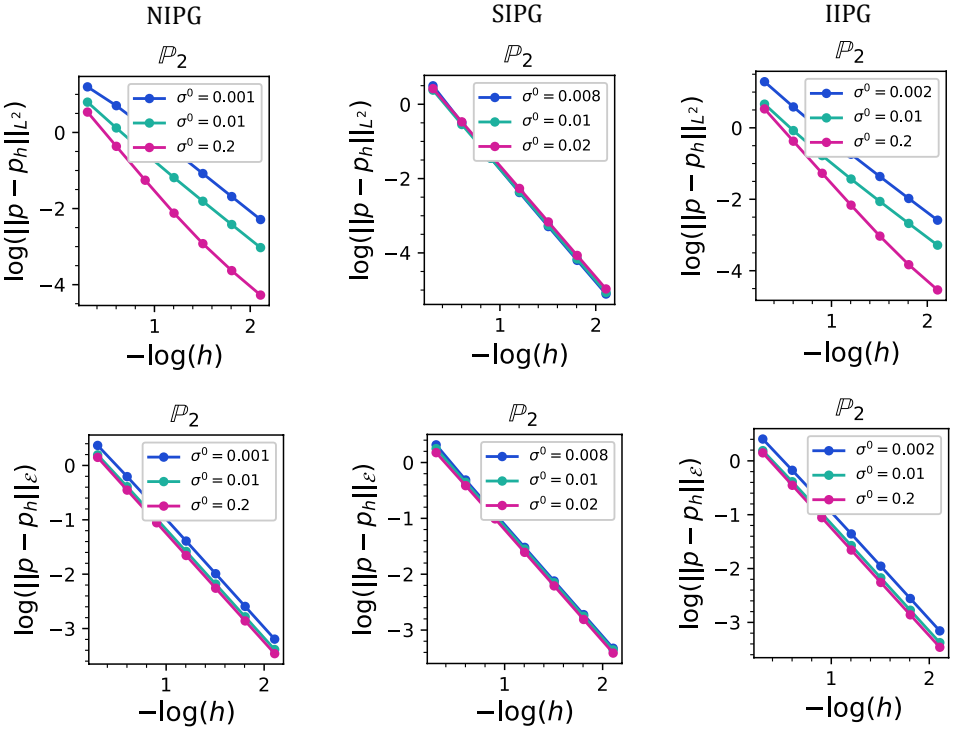


Figura 21 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos NIPG (izquierda), SIPG (centro), IIPG (derecha), con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots, 128$ elementos, $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

Según las gráficas en Figura 20 y Figura 21, el comportamiento de los métodos **NIPG** e **IIPG** varía según el valor de α. Para $\alpha = 1$, se requieren grandes valores de σ^0 para obtener una buena convergencia. Sin embargo, para $\alpha = 10^{-3}$, tanto **NIPG** como **IIPG** muestran una mejora notable en la convergencia cuando σ^0 se encuentra en el rango de 0 a 0.1. Además, estos métodos se mantienen estables a medida que la malla se refina.

Convergencia h - mallas uniformes

A continuación, presentamos el análisis de la convergencia h, el cual implica la comparación de los resultados obtenidos a través de diferentes tamaños de mallas y grados de polinomios en los métodos DG y CG. Los resultados del estudio de convergencia se presentan en las Figura 22 y Figura 23, correspondientes a los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$, respectivamente.

El primero presenta estabilización con parámetro σ^0 óptimo (elegido de Sección 4.1). Las tasas de convergencia h de las aproximaciones obtenidas con los polinomios discontinuos por partes $\mathbb{P}_l$ con $l = 1, 2$ para el DG del grado l, para CG polinomios continuos por partes de grado $l = 1, 2$ en L^2.

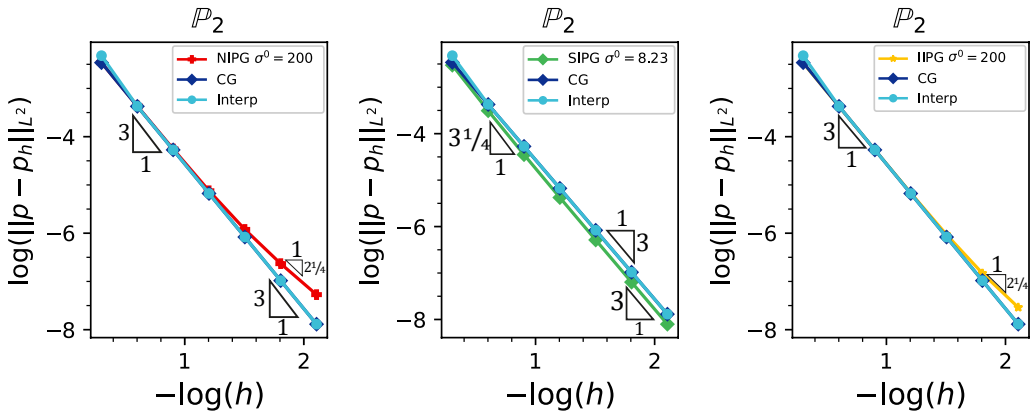


Figura 22 – Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método **CG** **NIPG** **SIPG** **IIPG** e Interp., en mallas uniformes de $N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ con $\alpha = 1$ para $\mathbb{P}_2$.

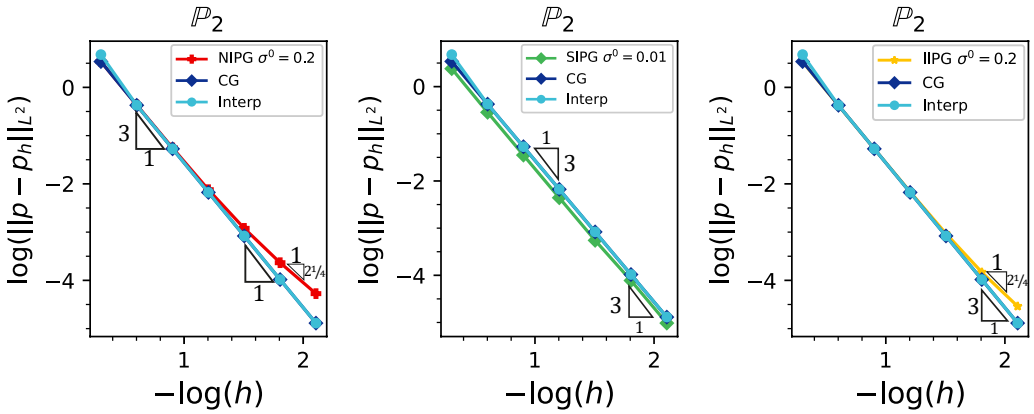


Figura 23 – Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método **CG** **NIPG** **SIPG** **IIPG** e Interp., en mallas uniformes de$N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ con $\alpha = 10^{-3}$ para $\mathbb{P}_2$.

En Figura 22 y Figura 23 el método SIPG muestra una convergencia más rápida y precisa en comparación con el método CG. lo que sugiere una mayor capacidad para capturar los detalles finos de la solución en problemas de difusión. Por otro lado, los métodos **NIPG** e **IIPG** pierden estabilidad a medida que es más fina la malla.

A continuación, presentamos la Tabla 5 y Tabla 6 que resumen de las tasas de convergencia cuando $\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$, respectivamente, para los polinomios $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$ para diferentes tamaños de malla $(N = 2, 4, \cdots, 128)$, considerando los valores óptimos seleccionados en la Tabla 4.

Método	$1/2^i$ / i	$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_3$			$\mathbb{P}_4$		
		$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
		$\sigma^0 = 8{,}1$			$\sigma^0 = 200$			$\sigma^0 = 400$			$\sigma^0 = 600$		
NIPG	2	1.92	0.94	2.67	2.99	2.00	2.46	3.89	2.88	3.74	5.03	4.04	3.76
	3	1.93	1.00	2.88	2.96	2.00	2.83	3.98	2.98	4.77	4.95	4.00	4.71
	4	1.95	1.00	2.93	2.87	2.00	2.94	4.00	3.00	4.92	4.84	4.00	4.90
	5	1.97	1.00	2.91	2.66	2.00	2.97	4.00	3.00	4.96	4.56	4.00	4.96
	6	1.99	1.00	2.87	2.36	2.00	2.99	4.00	3.00	4.98	2.89	4.00	4.98
	7	1.99	1.00	2.80	2.13	2.00	2.99	3.99	3.00	5.00	- 0.93	3.46	4.87
		$\sigma^0 = 6$			$\sigma^0 = 8{,}23$			$\sigma^0 = 22$			$\sigma^0 = 32$		
SIPG	2	1.52	0.92	2.04	3.26	2.08	2.15	3.67	2.96	3.21	5.08	4.07	3.62
	3	1.77	1.01	2.65	3.14	2.00	2.75	3.92	3.03	4.73	4.97	4.02	4.64
	4	1.89	1.02	2.77	3.07	2.00	2.91	3.97	3.02	4.88	4.98	4.01	4.88
	5	1.95	1.01	2.76	3.03	2.00	2.96	3.99	3.01	4.89	4.99	4.00	4.95
	6	1.98	1.01	2.71	3.02	2.00	2.98	3.99	3.01	4.86	4.98	4.00	4.98
	7	1.99	1.00	2.64	3.01	2.00	2.99	4.00	3.00	4.80	2.02	4.00	4.99
		$\sigma^0 = 5{,}103$			$\sigma^0 = 200$			$\sigma^0 = 400$			$\sigma^0 = 600$		
IIPG	2	1.74	0.97	2.51	3.00	2.00	2.46	3.88	2.88	3.73	5.05	4.04	3.76
	3	1.88	1.01	2.85	2.99	2.00	2.83	3.98	2.98	4.76	4.99	4.00	4.71
	4	1.94	1.00	2.94	2.96	2.00	2.94	4.00	3.00	4.92	4.95	4.00	4.90
	5	1.97	1.00	2.98	2.88	2.00	2.97	4.00	3.00	4.96	4.83	4.00	4.96
	6	1.99	1.00	2.99	2.66	2.00	2.99	4.00	3.00	4.98	4.41	4.00	4.98
	7	1.99	1.00	2.99	2.35	2.00	2.99	3.97	3.00	5.00	0.33	3.94	4.88

Tabla 5 – Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\alpha = 1$

De Tabla 5 se destacan diferencias en las tasas de convergencia entre los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** en función de la paridad del grado polinómico l. Las tasas de convergencia son más altas cuando l es impar y disminuyen cuando l es par, alcanzando $O(h^{l+1})$ en la norma $L^2([0,1])$ con elecciones adecuadas de σ^0. Además, para **NIPG** e **IIPG** , en la seminorma del salto, las tasas son $O(h^{l+2})$ cuando l es impar y $O(h^{l+1})$ cuando l es par.

Método	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_3$			$\mathbb{P}_4$		
	i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
		$\sigma^0 = 0{,}0081$			$\sigma^0 = 0{,}2$			$\sigma^0 = 0{,}4$			$\sigma^0 = 0{,}6$		
NIPG	2	1.92	0.94	2.67	2.99	2.00	2.46	3.89	2.88	3.74	5.03	4.04	3.76
	3	1.93	1.00	2.88	2.96	2.00	2.83	3.98	2.98	4.77	4.95	4.00	4.71
	4	1.95	1.00	2.93	2.87	2.00	2.94	4.00	3.00	4.92	4.84	4.00	4.90
	5	1.97	1.00	2.91	2.66	2.00	2.97	4.00	3.00	4.96	4.60	4.00	4.96
	6	2.18	4.43	-5.94	2.36	2.00	2.99	4.00	3.00	4.98	4.12	4.00	4.98
	7	1.43	- 2.42	11.72	2.13	2.00	2.99	4.00	3.00	4.99	0.74	3.99	4.98
		$\sigma^0 = 0{,}006$			$\sigma^0 = 0{,}01$			$\sigma^0 = 0{,}0205$			$\sigma^0 = 0{,}04$		
SIPG	2	1.52	0.92	2.04	3.07	2.01	2.28	3.67	2.98	3.13	5.06	4.03	3.67
	3	1.77	1.01	2.65	3.01	1.98	2.78	3.92	3.04	4.73	4.97	3.99	4.67
	4	1.89	1.02	2.77	3.00	1.99	2.92	3.97	3.03	4.87	4.98	4.00	4.89
	5	1.95	1.01	2.76	3.00	2.00	2.97	3.99	3.01	4.88	4.99	4.00	4.95
	6	2.53	1.01	2.93	2.83	2.00	2.98	3.89	3.01	4.94	4.84	4.00	4.98
	7	1.98	1.00	2.67	3.00	2.00	2.99	4.10	3.00	4.67	3.24	4.00	4.99
		$\sigma^0 = 0{,}00524$			$\sigma^0 = 0{,}2$			$\sigma^0 = 0{,}4$			$\sigma^0 = 0{,}6$		
IIPG	2	1.74	0.97	2.51	3.00	2.00	2.46	3.88	2.88	3.73	5.05	4.04	3.76
	3	1.88	1.01	2.85	2.99	2.00	2.83	3.98	2.98	4.76	4.99	4.00	4.71
	4	1.94	1.00	2.94	2.96	2.00	2.94	4.00	3.00	4.92	4.95	4.00	4.90
	5	1.97	1.00	2.98	2.88	2.00	2.97	4.00	3.00	4.96	4.84	4.00	4.96
	6	1.99	1.00	2.99	2.66	2.00	2.99	4.00	3.00	4.98	4.92	4.00	4.98
	7	1.99	1.00	2.99	2.35	2.00	2.99	3.99	3.00	4.99	1.46	4.00	4.99

Tabla 6 – Tasa de convergencia para los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** con $\alpha = 10^{-3}$

En general, de la tabla Tabla 6, se observa una convergencia creciente cuando el grado del polinomio es impar y decrece cuando el grado es par, en términos de la norma L^2. Sin embargo, se observa una excepción en **NIPG** con polinomio de grado $\mathbb{P}_1$. pues, las tasas de convergencia se ven afectadas negativamente en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ a medida que se refina la malla.

Método	α	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	1	2	1.88	1.75	3.01	3.49
		3	1.97	1.97	3.00	3.00
		4	1.99	1.99	3.00	3.00
		5	2.00	2.00	3.00	3.00
		6	2.00	2.00	3.00	3.00
		7	2.00	2.00	3.00	3.00

Tabla 7 – Tasa de convergencia para el método CG con $\alpha = 1$

Método	α	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	10^{-3}	2	1.88	1.75	3.01	3.49
		3	1.97	1.97	3.00	3.00
		4	1.99	1.99	3.00	3.00
		5	2.00	2.00	3.00	3.00
		6	2.00	2.00	3.00	3.00
		7	2.00	2.00	3.00	3.00

Tabla 8 – Tasa de convergencia para el método CG con $\alpha = 10^{-3}$

Las tablas Tabla 7 y Tabla 8 proporcionan resultados que revelan una rápida convergencia en los métodos CG a medida que se refina la malla. Esto indica una eficiente aproximación de la solución y demuestra la estabilidad de estos métodos. Este comportamiento indica que el método CG es altamente eficiente en términos de convergencia numérica, lo cual es una característica deseable en la resolución de problemas de difusión.

Caso particular: Comparativa con Riviere

La elección de los parámetros σ^0 propuestos por Riviere (Rivière, 2008) fueron ($\sigma^0 = 0, 1, 2$) compararemos nuestros valores de penalización con los de la autora, a fin de corroborar un comportamiento similar de sus resultados presentados. El resumen de estos experimentos permitieron la construcción de la Tabla 9 de tasas de convergencia para $l = 1, 2, 3$ y 4 respectivamente, Observamos que para $l = 1$, la elección $\sigma^0 = 0$ produce matrices indefinidas y, por lo tanto, el sistema no se puede resolver.

Método	σ^0	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$				$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$				$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$			
		$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$
NIPG	0	-	1.99	4.02	4.00	-	2.00	3.01	4.00	-	2.99	4.73	4.98
NIPG	1	2.00	2.01	4.02	3.78	1.03	1.99	3.01	3.93	2.55	2.99	4.77	4.76
SIPG	1	-	1.18	4.04	5.00	-	0.17	3.02	4.00	-	1.17	4.68	4.98
SIPG	2	2.16	3.01	4.05	4.99	1.17	2.00	3.03	3.99	2.48	3.00	4.61	4.98
IIPG	1	1.99	2.04	4.01	4.04	1.01	2.00	3.01	3.99	2.99	2.99	4.98	4.98

Tabla 9 – Resumen de tasas de convergencia para $\alpha = 1$ hasta $N = 64$

Convergencia h - mallas no uniformes

En esta sección, se estudiará la convergencia en mallas no uniformes de los métodos DG en el contexto de problemas de difusión. Para ello, se utilizarán particiones no uniformes del dominio, como se muestra en la Figura 15, con el objetivo de analizar el comportamiento de los métodos DG en estas condiciones.

Ahora, buscaremos investigar si el método DG son capaces de mantener un rendimiento adecuado y consistente, independientemente de la estructura de la malla utilizada, por ello son empleados los mismos valores de penalización obtenidos durante la experimentación con mallas uniformes.

Los resultados experimentales obtenidos se presentarán en la Tabla 10 para el caso $\alpha = 1$ y Tabla 11 para el caso $\alpha = 10^{-3}$. Estas tablas permitirán analizar y comparar la convergencia de los métodos DG en las mallas no uniformes, brindando información valiosa sobre la influencia de la no uniformidad de la malla en la precisión de las aproximaciones.

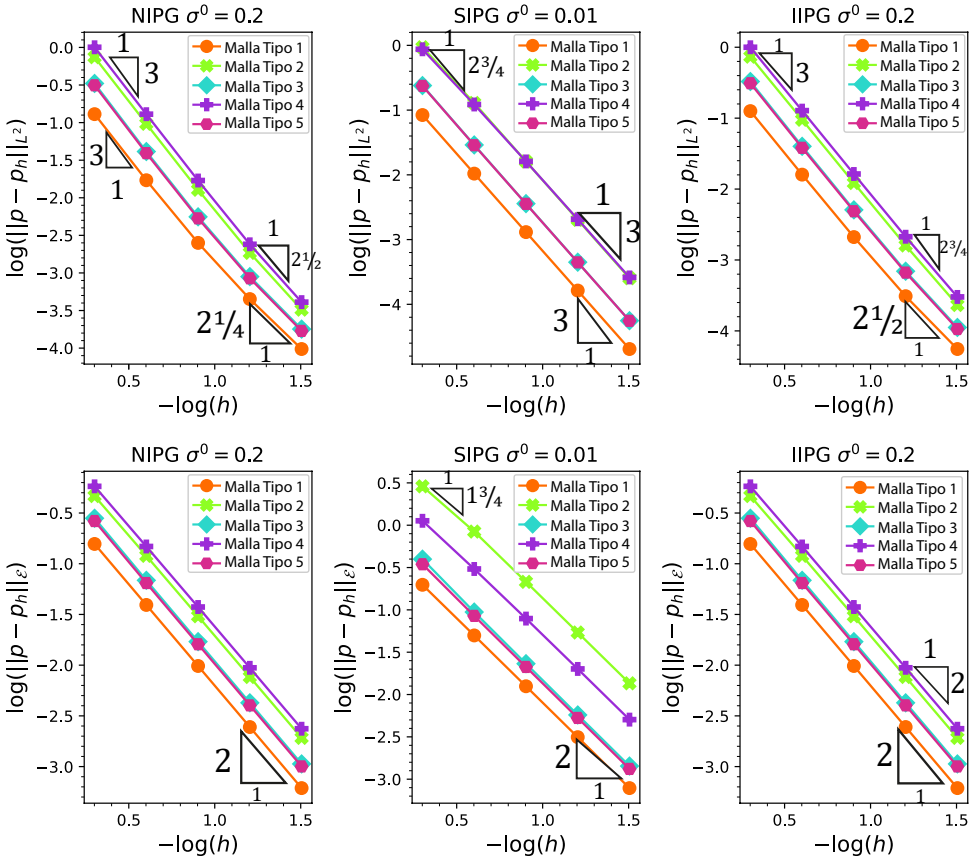


Figura 24 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas no uniformes de $N = 2, \cdots, 32$ y $\alpha = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

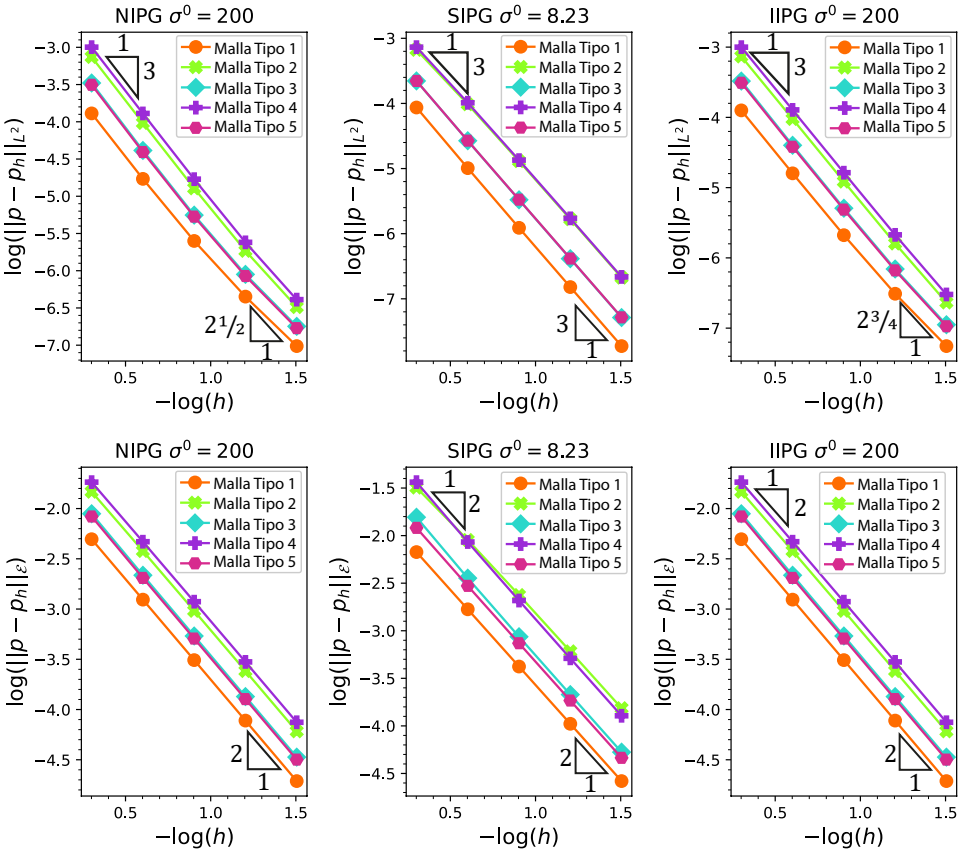


Figura 25 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas no uniformes de $N = 2, \cdots, 32$ y $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

La Malla Tipo 1 mostró la mejor convergencia en normas $|\cdot|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, sugiriendo que la uniformidad en la malla mejora la precisión. Aunque las Mallas Tipo 5 y 3 también fueron aceptables, el Tipo 2 y 4 fueron menos óptimas, indicando que la no uniformidad puede afectar la precisión.

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 8{,}1$			$\sigma^0 = 200$		
NIPG	1/3	1/3	1.99	1.00	2.83	2.21	2.00	2.99
	1/7	1/5	1.99	1.00	1.98	2.51	1.99	2.99
	1/7	1/2	1.99	1.00	1.99	2.32	2.00	3.00
	1/7	1/7	1.99	1.00	1.99	2.56	2.00	2.99
	1/4	1/2	2.00	1.00	1.99	2.33	2.00	3.00
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 6$			$\sigma^0 = 8{,}23$		
SIPG	1/3	1/3	1.98	1.00	2.67	3.01	2.00	2.99
	1/7	1/5	1.98	1.00	1.98	2.98	1.98	2.98
	1/7	1/2	1.99	1.00	2.02	3.00	2.01	3.01
	1/7	1/7	1.98	1.00	1.99	2.99	2.01	3.01
	1/4	1/2	2.00	1.00	2.02	3.00	2.00	3.00
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 5{,}103$			$\sigma^0 = 200$		
IIPG	1/3	1/3	1.99	1.00	2.99	2.48	2.00	2.99
	1/7	1/5	1.99	0.99	1.98	2.79	1.99	2.99
	1/7	1/2	2.00	1.00	2.00	2.63	2.00	3.00
	1/7	1/7	1.99	0.99	1.98	2.82	2.00	2.99
	1/4	1/2	2.00	1.00	2.00	2.64	2.00	3.00

Tabla 10 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ de mallas no uniformes hasta $N = 32$ y $\alpha = 1$

De la Tabla 10, observamos para **NIPG** que el orden de convergencia para $l = 2$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}} = 2$ si es del Malla Tipo 1 ($a = 1/3, b = 1/3$), Malla Tipo 3 ($a = 1/7, b = 1/2$), y Malla Tipo 5 ($a = 1/4, b = 1/2$) Por otro lado, el orden de convergencia para $l = 2$ es $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}} = 2{,}5$ si Malla Tipo 2 ($a = 1/7, b = 1/5$) y Malla Tipo 4 ($a = 1/7, b = 1/7$). Por lo tanto, esta malla produce aproximaciones subóptimas. Para **SIPG** , para $l = 2$ converge con el mejor orden posible, $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}} = 3$ y $\delta_{|\cdot|_{\mathcal{J}}} = 2$.

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 0{,}0081$			$\sigma^0 = 0{,}2$		
NIPG	1/3	1/3	1.99	1.00	2.83	2.92	2.00	2.91
	1/7	1/5	1.99	1.00	1.98	2.51	1.99	2.99
	1/7	1/2	1.99	1.00	1.99	2.32	2.00	3.00
	1/7	1/7	1.99	1.00	1.99	2.56	2.00	2.99
	1/4	1/2	2.00	1.00	1.99	2.33	2.00	3.00
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 0{,}006$			$\sigma^0 = 0{,}01$		
SIPG	1/3	1/3	1.98	1.00	2.67	3.01	1.99	2.88
	1/7	1/5	1.98	1.00	1.98	3.00	1.99	2.99
	1/7	1/2	1.99	1.00	2.02	3.00	2.01	3.01
	1/7	1/7	1.98	1.00	1.99	2.99	1.99	2.99
	1/4	1/2	2.00	1.00	2.02	3.00	2.00	3.00
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 0{,}00524$			$\sigma^0 = 0{,}2$		
IIPG	1/3	1/3	1.99	1.00	2.99	2.98	2.00	2.91
	1/7	1/5	1.99	0.99	1.98	2.79	1.99	2.99
	1/7	1/2	2.00	1.00	2.00	2.63	2.00	3.00
	1/7	1/7	1.99	0.99	1.98	2.82	2.00	2.99
	1/4	1/2	2.00	1.00	2.00	2.64	2.00	3.00

Tabla 11 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$ y $\alpha = 10^{-3}$

De la tabla Tabla 11, observamos para **NIPG** la tasa de convergencia para $l = 2$ es en la norma $\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\in}} = 2$ si es del Malla Tipo 1 ($a = 1/3, b = 1/3$). y converge con el mejor orden posible. De las convergencias en la norma de la energía para $l = 1$ se obtuvo $\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}} = 1$ y $l = 2$ se obtuvo $\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}} = 2$ para cualquier partición de **NIPG SIPG IIPG** en el mejor del caso, lo que evidencia la convergencia subóptima.

Análisis comparativo de los parámetros σ^0 en el método NIPG para mallas no uniformes

A fin de contrastar el rendimiento obtenido con los parámetros preestablecidos en el estudio de (Guzmán & Rivière, 2009), frente al parámetro óptimo determinado, optamos por utilizar la aproximación por partes $\mathbb{P}_1$ en el marco del método NIPG. En concreto, se han considerado las mallas Tipo 1 ($a = 1/3$ y $b = 1/3$) y el Malla Tipo 2 ($a = 1/7$ y $b = 1/5$), siendo la segunda la malla más irregular de las cinco que son de estudio. La cantidad de elementos en estas mallas ha variado desde $N = 2$ hasta $N = 512$. Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 26 y Figura 27 para el Malla Tipo 1 y el Malla Tipo 2, respectivamente.

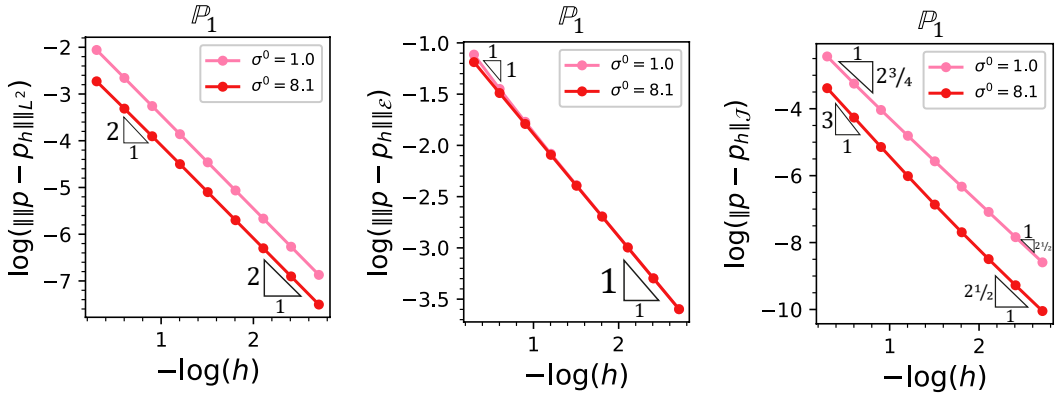


Figura 26 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_1$ por partes, para el método NIPG con **mallas no uniformes** con constantes $a = 1/3, b = 1/3$ y número de elementos $N = 2, \cdots, 32$ y $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ y $|\cdot|_{\mathcal{J}}$

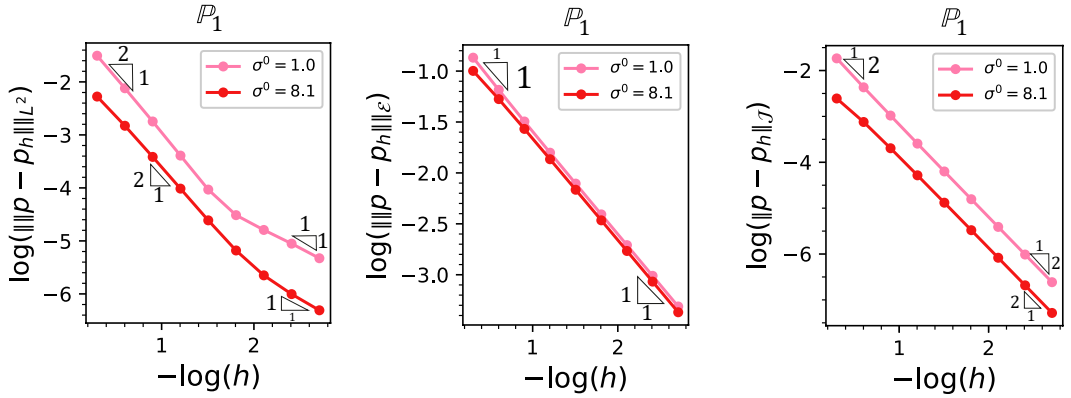


Figura 27 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, para el método NIPG con **mallas no uniformes** con constantes $a = 1/7, b = 1/5$ y número de elementos $N = 2, \cdots, 32$ y $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ y $|\cdot|_{\mathcal{J}}$

En la partición representada en la figura Figura 26, se ha observado la robustez del método NIPG, en contraste con la figura Figura 27. Esta diferencia en los resultados puede atribuirse a la estructura característica de la malla utilizada en cada caso.

Al evaluar cada una de las particiones consideradas, se determinaron tasas óptimas de convergencia, específicamente $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}} = 2$ para el Malla Tipo 1 y $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}} = 1$ para el Malla Tipo 2. Para ambos casos, se observó $\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}} = 1$ y $\delta_{|\cdot|_{\mathcal{J}}} = 2$. Sin embargo, se observa un rendimiento superior del método cuando se utiliza un valor $\sigma^0 = 8{,}1$.

Conclusiones

En el estudio de los métodos **NIPG** , **IIPG** y **SIPG** aplicados a problemas modelados con elementos finitos discontinuos, hemos realizado observaciones fundamentales. **SIPG** es más estable que **CG** cuando se elige un σ^0 mayor a un valor crítico demostrando así que **SIPG** es sensible al parámetro de estabilización σ^0 (ver Figura 28). Esto se debe a que el término de penalización de **SIPG** ayuda a regularizar el sistema lineal, lo que lo hace más estable. Por otro lado, NIPG e IIPG se muestran estables a medida que σ^0 aumenta, lo que los vuelve independientes de este término. Sin embargo, se observa que **SIPG** sigue siendo más preciso que **NIPG** e **IIPG** , incluso para valores grandes de σ^0.

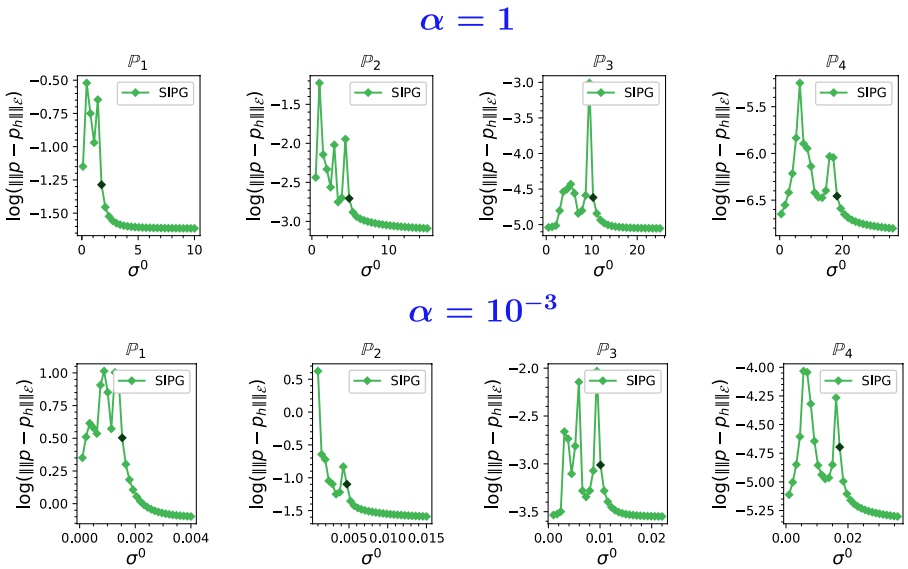


Figura 28 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **SIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos,$\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-3}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$

Además, **SIPG** demuestra superioridad, ofreciendo mayor precisión que **CG** especialmente en mallas finas y manteniendo tasas de convergencia óptimas independientemente del grado del polinomio l, así como la mejora de la convergencia en **SIPG** con polinomios de alto orden y grados impares, subrayan la versatilidad de estos métodos ante fenómenos complejos y discontinuidades. (ver Figura 29 y Figura 30).

En términos de robustez y adaptabilidad de la malla, todos los métodos han demostrado ser inherentemente robustos, manteniendo estabilidad bajo variaciones de discretización y tipos de malla. En particular, las mallas Tipo1, Tipo3 y Tipo5 mostraron un buen comportamiento en términos de estabilidad y precisión. Finalmente, de las tasas de convergencia, se encontraron tasas óptimas para $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$, y tasas subóptimas para $\delta_{\|\cdot\|_\varepsilon}$. Esto se debe a que el término de penalización introduce un error adicional en la norma de $\delta_{\|\cdot\|_\varepsilon}$.

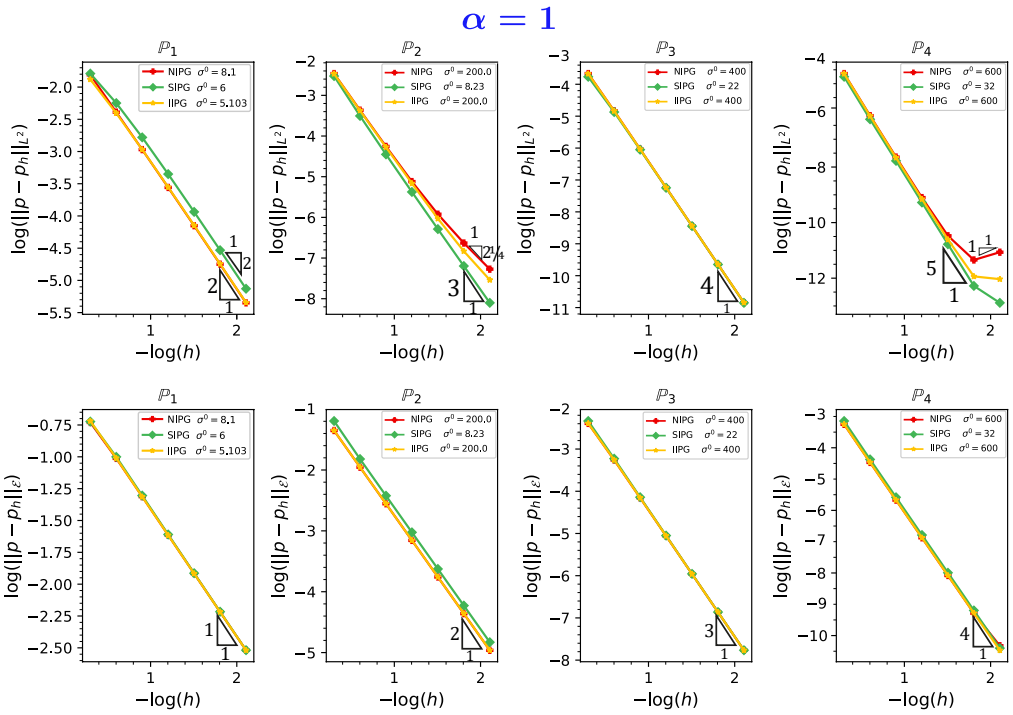


Figura 29 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

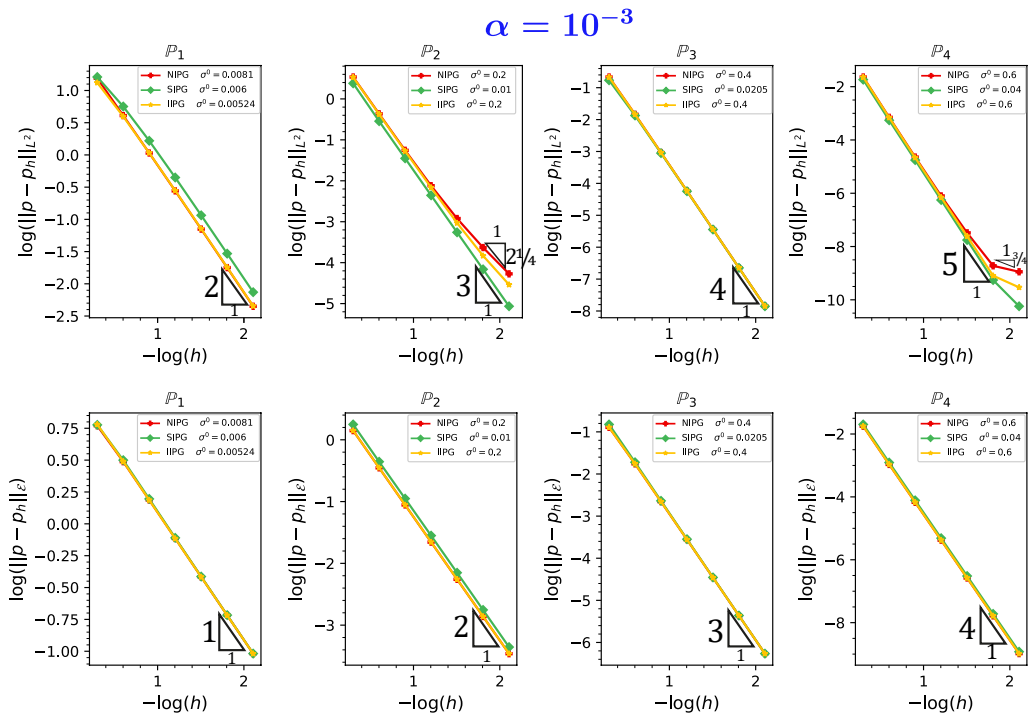


Figura 30 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 10^{-3}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

Nuevamente, tomando como referencia la ecuación (4.9), (problema adaptado de (*Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*, 2018)), el coeficiente de difusión k es representado por α en el problema Problema 4.2 y G el término fuente que equivale a $f(x)$. Finalmente, la solución exacta $p(x)$ representa la temperatura en un punto x a lo largo de la varilla en el problema Problema 4.2. Sin embargo, la función fuente oscilatoria $f(x)$ representa un escenario en el que la varilla está siendo sometida a fluctuaciones periódicas de temperatura o a fuentes de calor que varían sinusoidalmente en intensidad a lo largo de su longitud. La solución exacta $p(x)$ refleja estas oscilaciones en la distribución de la temperatura, mostrando cómo la temperatura en la varilla varía en respuesta a la fuente de calor oscilatoria, y cómo la difusividad térmica α modula la amplitud de estas oscilaciones de temperatura.

Problema 4.2

$$\begin{cases} -\left(\alpha p'(x)\right)' = f(x) & \forall x \in \Omega = (0,1) \\ p(0) = 0 \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Donde $\alpha > 0$ *constante positiva y* $f(x) = 64 \cdot (\pi^2) \cdot \operatorname{sen}(8\pi x)$. *Con solución exacta*

$$p(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \operatorname{sen}(8\pi x) \tag{4.11}$$

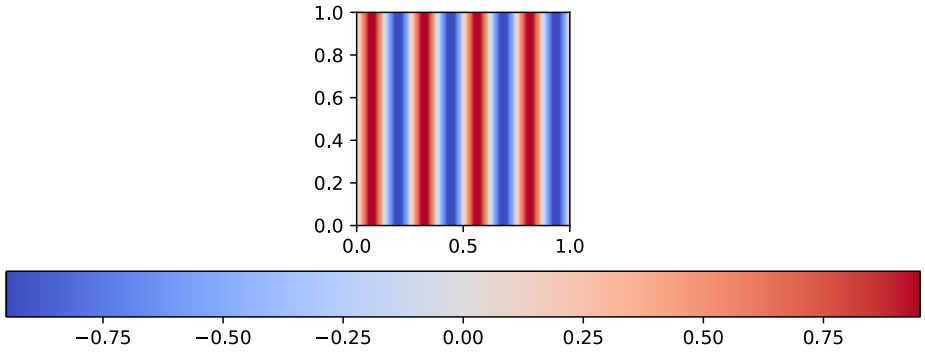


Figura 31 – Distribución espacial estacionaria de la temperatura en una varilla unidimensional modelado por la ecuación (4.11) Se utiliza una escala de colores que va del azul oscuro (temperatura mínima) al rojo (temperatura máxima), y se observa una distribución periódica de la temperatura en el medio.

Observación 8: ¿Qué sucede cuando $\alpha = 1$, $\alpha \to 0$, $\alpha = 0$, en Problema 4.2?

Cuando $\alpha = 1$, La difusividad térmica permite una transmisión eficiente del calor a lo largo de la varilla. La distribución de temperatura refleja directamente la naturaleza oscilatoria de la fuente de calor. Cuando $\alpha \to 0$, la capacidad del material para conducir calor disminuye drásticamente. En teoría, la amplitud de las oscilaciones de temperatura se

dispararía hacia el infinito según la solución exacta, pero en la realidad, la baja difusividad térmica impediría la transmisión de estas oscilaciones de calor a lo largo de la varilla, manteniendo la temperatura casi constante en cada punto.Finalmente cuando $\alpha = 0$, el material actúa como un aislante perfecto, impidiendo completamente la transmisión del calor. Independientemente de la naturaleza oscilatoria de la fuente de calor, la temperatura en cada punto de la varilla permanecería constante, ya que el calor no podría propagarse a través del material.

Convergencia σ^0

Iniciamos con la búsqueda de los valores óptimos para el parámetro σ^0 para $\mathbb{P}_2$ Los resultados de estos experimentos se muestran para $\alpha = 1$ en la Figura 32 y $\alpha = 10^{-5}$ en Figura 33. Estos resultados nos permitieron construir la Tabla 19 con los valores óptimos de σ^0 para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$.

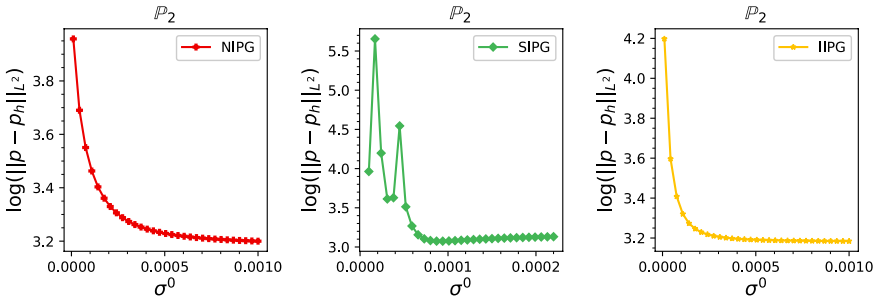


Figura 32 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con malla fija uniformes de $N = 32$ elementos, $\alpha = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

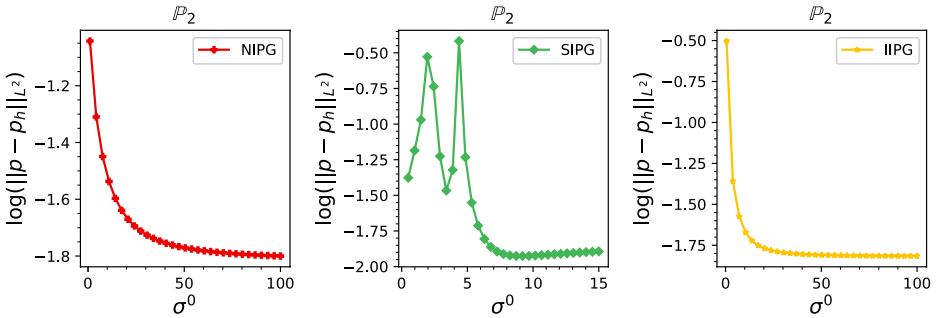


Figura 33 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con malla fija uniformes de $N = 32$ elementos, $\alpha = 10^{-5}$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

De Figura 32 y Figura 33, para **SIPG** existe un valor crítico de σ^0 en el cual el error comienza a converger. Para **NIPG** e **IIPG** , el error de convergencia disminuye con

la refinación de parámetros, y estos métodos muestran una rápida convergencia incluso cuando la función fuente $f(x)$ es oscilatoria.

A partir de los resultados obtenidos, se ha generado la tabla Tabla 12 que recopila los valores óptimos de σ^0 utilizados en las simulaciones.

		σ^0							
		$\|\cdot\|_{L^2}$				$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$			
α	Método	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$
1	**NIPG**	3.66	100	200	300	10	100	200	300
	SIPG	2.74	9.2	16.26	26.53	10	15	22	36
	IIPG	2.99	100	200	300	8	100	200	300
10^{-5}	**NIPG**	3.66 E-05	1.00 E-03	1.00 E-03	1.00 E-03	1.00 E-04	1.00 E-03	1.00 E-03	1.00 E-03
	SIPG	2.70 E-05	9.40 E-05	1.00 E-04	2.67 E-04	4.00 E-05	2.20 E-04	2.20 E-04	3.60 E-04
	IIPG	3.0 E-05	1.00 E-03	1.00 E-03	1.00 E-03	1.00 E-04	1.00 E-03	1.00 E-03	1.00 E-03

Tabla 12 – Valores Óptimos σ^0 encontrados según las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ para $\alpha = 1$ y $\alpha = 10^{-5}$

Influencia del parámetro σ^0

Analizaremos la influencia de la variación del valor de σ^0 alrededor de los valores óptimos previamente determinados (consultar Tabla 12). Al igual que el problema anterior, en el caso del método **SIPG** , se realizaron variaciones de 1 unidad en el radio del parámetro σ^0, mientras que para los métodos **NIPG** e **IIPG** se utilizaron parámetros con radios significativamente mayores, debido a las diferencias en su comportamiento con respecto al parámetro σ^0. Los resultados se muestran en las Figura 34 y Figura 35.

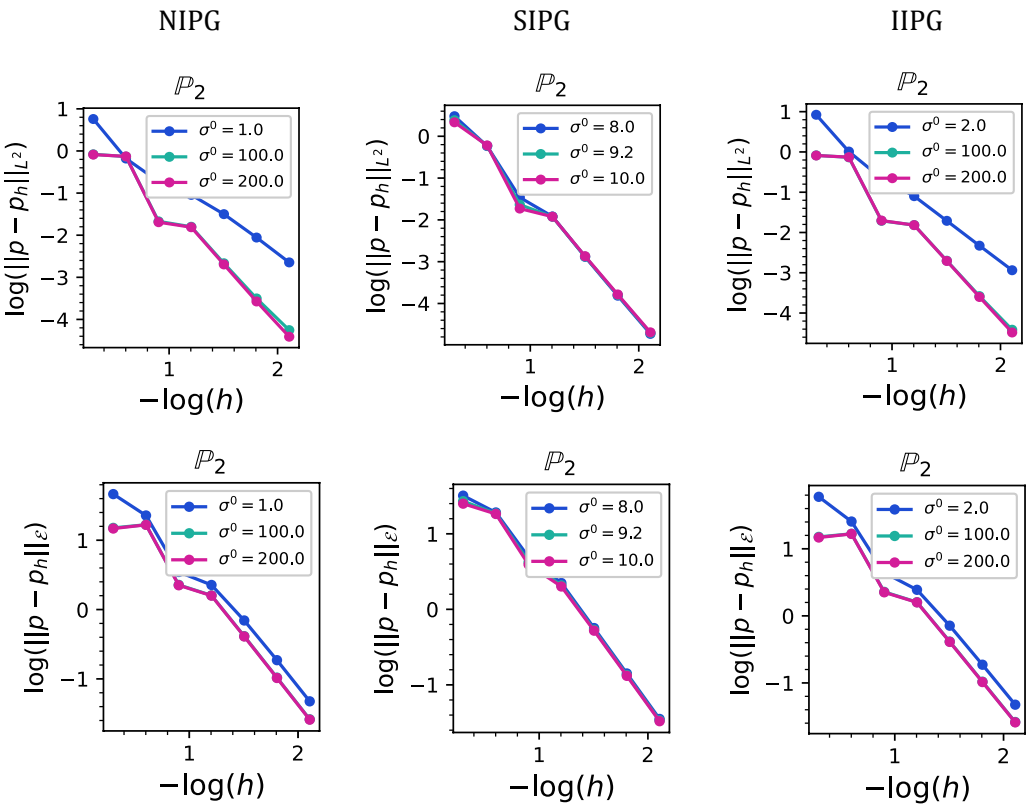


Figura 34 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 64$ elementos, $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

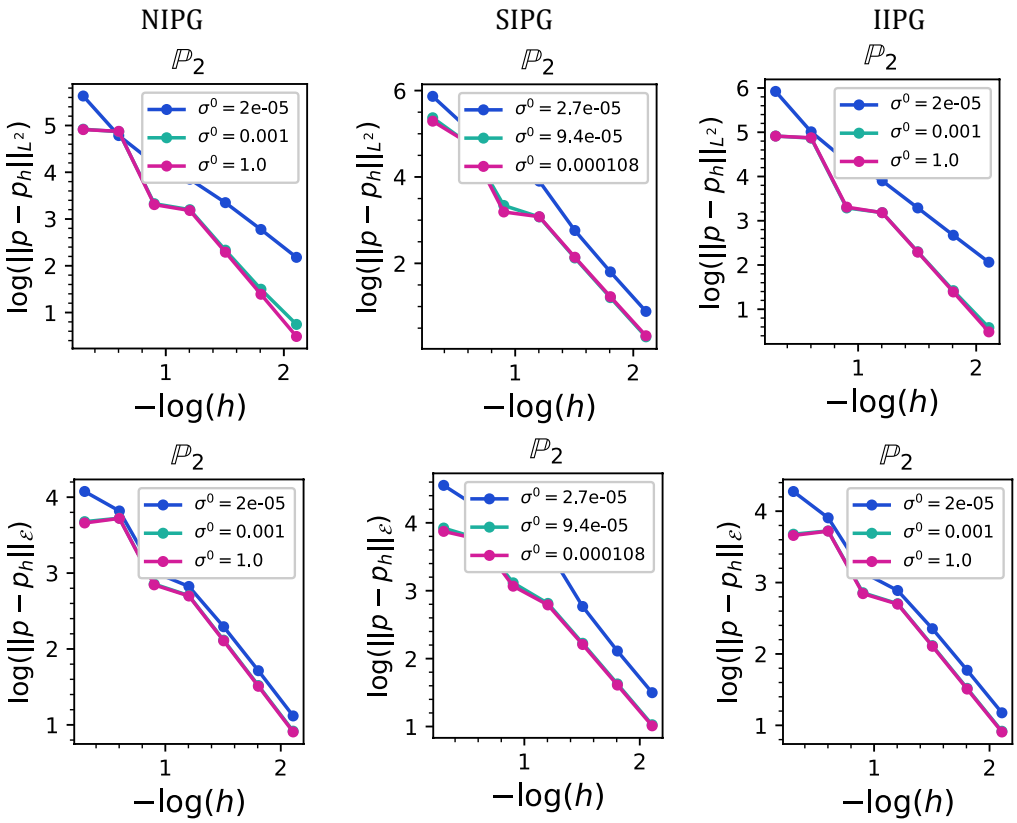


Figura 35 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de (p_h) de los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 64$ elementos, $\alpha = 10^{-5}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

De Figura 34, para $\alpha = 1$, se destaca que **NIPG** e **IIPG** alcanzan convergencias más rápidas con $\sigma^0 = 100$ o $\sigma^0 = 200$. No obstante, con $\sigma^0 = 1$, la convergencia persiste pero disminuye su velocidad con un refinamiento exhaustivo de la malla. Por otro lado, el método **SIPG** logra una convergencia ágil, especialmente con σ^0 en torno a 8 y 9.2 para $N = 128$.

En cuanto a la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, se nota una similitud en la variación de parámetros en los tres métodos, independientemente de σ^0. La convergencia se hace más notable con un refinamiento más fino de la malla. En la figura Figura 35, esta sensibilidad es más evidente para $\alpha = 10^{-5}$. Cabe resaltar que, aunque las diferencias son mínimas en términos absolutos, se mejora la convergencia del método **SIPG** con un refinamiento más preciso de la malla.

Convergencia h - mallas uniformes

En esta subsección, se presentan estudios de convergencia h para p_h, utilizando mallas uniformes con diferentes números de elementos, específicamente $N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$, y se consideran los grados de polinomios $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$.

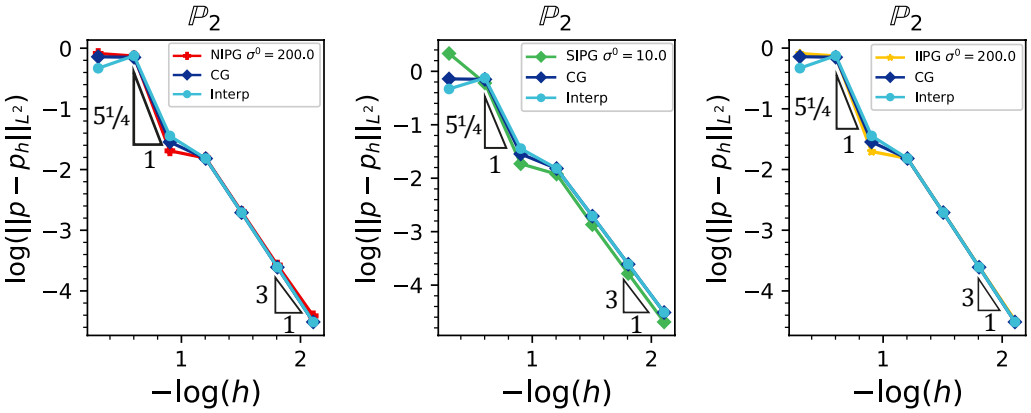


Figura 36 – Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método de Galerkin Continuo y la interpolación (Interp.) y los métodos discontinuos (**NIPG** , **SIPG** , **IIPG**) en mallas uniformes de $N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ con $\alpha = 1$ para $\mathbb{P}_2$.

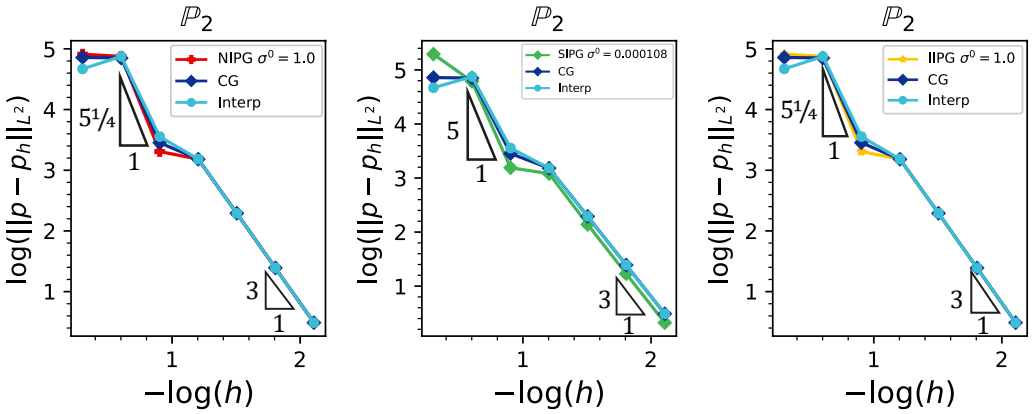


Figura 37 – Convergencia h de la aproximación (p_h) comparando el método de Galerkin Continuo y la interpolación (Interp.) y los métodos discontinuos (**NIPG** , **SIPG** , **IIPG**) en mallas uniformes de $N = 2, 8, 16, 32, 64, 128$ con $\alpha = 10^{-5}$ para $\mathbb{P}_2$.

De Figura 36 y Figura 37, se desprende que los métodos de elementos finitos discontinuos considerados no exhiben estabilidad numérica para mallas gruesas. Sin embargo, se observa que el método **SIPG** proporciona una mejor aproximación en comparación con el método **CG** cuando se utilizan mallas más finas.

Método	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_3$			$\mathbb{P}_4$		
	i	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
		$\sigma^0 = 3{,}667$			$\sigma^0 = 200$			$\sigma^0 = 400$			$\sigma^0 = 600$		
NIPG	2	0.83	0.05	0.55	0.14	-0.18	2.32	4.78	2.52	2.40	3.49	1.47	-1.46
	3	0.80	0.43	1.34	5.19	2.89	2.85	1.04	1.34	2.35	7.94	6.10	6.70
	4	2.48	1.36	3.14	0.40	0.50	2.01	4.38	3.35	4.98	2.02	1.76	3.27
	5	2.23	1.03	2.93	2.94	1.96	2.66	3.98	2.97	4.83	4.96	3.97	4.62
	6	2.08	1.01	2.97	2.92	1.99	2.91	3.99	2.99	4.95	4.94	3.99	4.90
	7	2.02	1.00	2.99	2.78	2.00	2.97	4.00	3.00	4.98	4.83	4.00	4.97
		$\sigma^0 = 4$			$\sigma^0 = 10$			$\sigma^0 = 18$			$\sigma^0 = 32$		
SIPG	2	1.43	0.21	0.82	1.84	0.45	2.05	4.86	2.40	2.59	3.79	1.19	-1.66
	3	1.74	0.96	2.30	5.02	2.23	2.33	1.84	1.81	2.84	8.67	5.82	6.33
	4	1.80	1.28	2.70	0.64	0.96	2.26	4.13	3.46	4.78	1.18	2.05	3.44
	5	1.67	1.04	2.63	3.14	1.94	2.80	3.84	3.11	4.69	5.07	3.93	4.72
	6	1.91	1.04	2.90	3.04	1.99	2.94	3.95	3.05	4.91	5.02	3.99	4.92
	7	1.98	1.01	2.96	3.01	2.00	2.98	3.99	3.02	4.98	5.00	4.00	4.97
		$\sigma^0 = 2{,}996$			$\sigma^0 = 200$			$\sigma^0 = 400$			$\sigma^0 = 600$		
IIPG	2	1.14	0.16	0.65	0.13	-0.18	2.31	4.82	2.53	2.40	3.50	1.47	-1.46
	3	1.61	0.71	1.75	5.23	2.89	2.84	1.04	1.35	2.36	7.97	6.10	6.69
	4	2.32	1.38	2.93	0.38	0.50	2.02	4.37	3.35	4.98	1.99	1.76	3.28
	5	2.10	1.04	2.80	2.96	1.96	2.67	3.97	2.97	4.82	4.97	3.97	4.62
	6	2.03	1.02	2.94	2.97	1.99	2.91	3.99	2.99	4.95	4.98	3.99	4.90
	7	2.00	1.01	2.98	2.93	2.00	2.97	4.00	3.00	4.98	4.95	4.00	4.97

Tabla 13 – Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\alpha = 1$

Método	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_3$			$\mathbb{P}_4$		
	i	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
		$\sigma^0 = 0{,}0000366$			$\sigma^0 = 1$			$\sigma^0 = 1$			$\sigma^0 = 1$		
NIPG	2	0.83	0.05	0.55	0.12	- 0.20	2.32	4.80	2.53	2.40	3.50	1.47	- 1.45
	3	0.80	0.43	1.34	5.21	2.91	2.85	1.08	1.35	2.37	7.97	6.10	6.70
	4	2.48	1.36	3.14	0.42	0.49	2.05	4.37	3.34	5.00	1.99	1.76	3.30
	5	2.23	1.03	2.93	2.96	1.96	2.72	3.97	2.97	4.87	4.97	3.97	4.67
	6	2.08	1.01	2.97	2.99	1.99	3.01	3.99	2.99	5.05	4.99	3.99	5.00
	7	2.02	1.00	2.99	3.00	2.00	3.20	4.00	3.00	5.21	4.92	4.00	5.20
		$\sigma^0 = 0{,}000049$			$\sigma^0 = 1{,}00E-0408$			$\sigma^0 = 1{,}00E-048$			$\sigma^0 = 0{,}00032$		
SIPG	2	1.47	0.15	0.78	1.67	0.38	2.10	4.86	2.40	2.59	3.79	1.19	- 1.66
	3	1.04	0.79	2.18	5.31	2.30	2.38	1.84	1.81	2.84	8.67	5.82	6.33
	4	1.87	1.28	2.75	0.36	0.92	2.24	4.13	3.46	4.78	1.18	2.05	3.44
	5	1.71	1.02	2.67	3.12	1.94	2.79	3.84	3.11	4.69	5.07	3.93	4.72
	6	1.92	1.02	2.90	3.03	1.98	2.94	3.95	3.05	4.91	5.02	3.99	4.92
	7	1.98	1.01	2.97	3.01	1.99	2.98	3.99	3.02	4.98	5.00	4.00	4.97
		$\sigma^0 = 0{,}00003033$			$\sigma^0 = 1$			$\sigma^0 = 1$			$\sigma^0 = 1$		
IIPG	2	1.14	0.16	0.65	0.12	- 0.20	2.32	4.80	2.53	2.40	3.50	1.47	- 1.45
	3	1.59	0.71	1.75	5.21	2.91	2.85	1.08	1.35	2.37	7.97	6.10	6.70
	4	2.31	1.37	2.93	0.42	0.49	2.05	4.37	3.34	5.00	1.99	1.76	3.30
	5	2.10	1.04	2.80	2.96	1.96	2.72	3.97	2.97	4.87	4.97	3.97	4.67
	6	2.02	1.02	2.94	2.99	1.99	3.01	3.99	2.99	5.05	4.99	3.99	5.00
	7	2.00	1.01	2.98	3.00	2.00	3.20	4.00	3.00	5.21	4.62	4.00	5.20

Tabla 14 – Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\alpha = 10^{-5}$

Método	α	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	1	2	0.03	-0.68	0.03	-0.68
		3	0.00	0.09	4.64	4.39
		4	2.23	2.23	0.90	1.24
		5	1.94	1.94	2.96	2.96
		6	1.99	1.99	2.99	2.99
		7	2.00	2.00	3.00	3.00

Tabla 15 – Tasa de convergencia para el método CG con $\alpha = 1$

Método	α	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	1	2	0.03	-0.68	0.03	-0.68
		3	0.00	0.09	4.64	4.39
		4	2.23	2.23	0.90	1.24
		5	1.94	1.94	2.96	2.96
		6	1.99	1.99	2.99	2.99
		7	2.00	2.00	3.00	3.00

Tabla 16 – Tasa de convergencia para el método CG con $\alpha = 10^{-5}$

Convergencia h - mallas no uniformes

Con el propósito de evaluar el comportamiento de dichos métodos, se emplearán particiones no uniformes del dominio. (consultar Tabla 3). Se utilizan los mismos valores σ^0 obtenidos durante la experimentación con mallas uniformes. Los resultados experimentales obtenidos se muestran en la Tabla 17 para $\alpha = 1$, y en la Tabla 18 para $\alpha = 10^{-5}$.

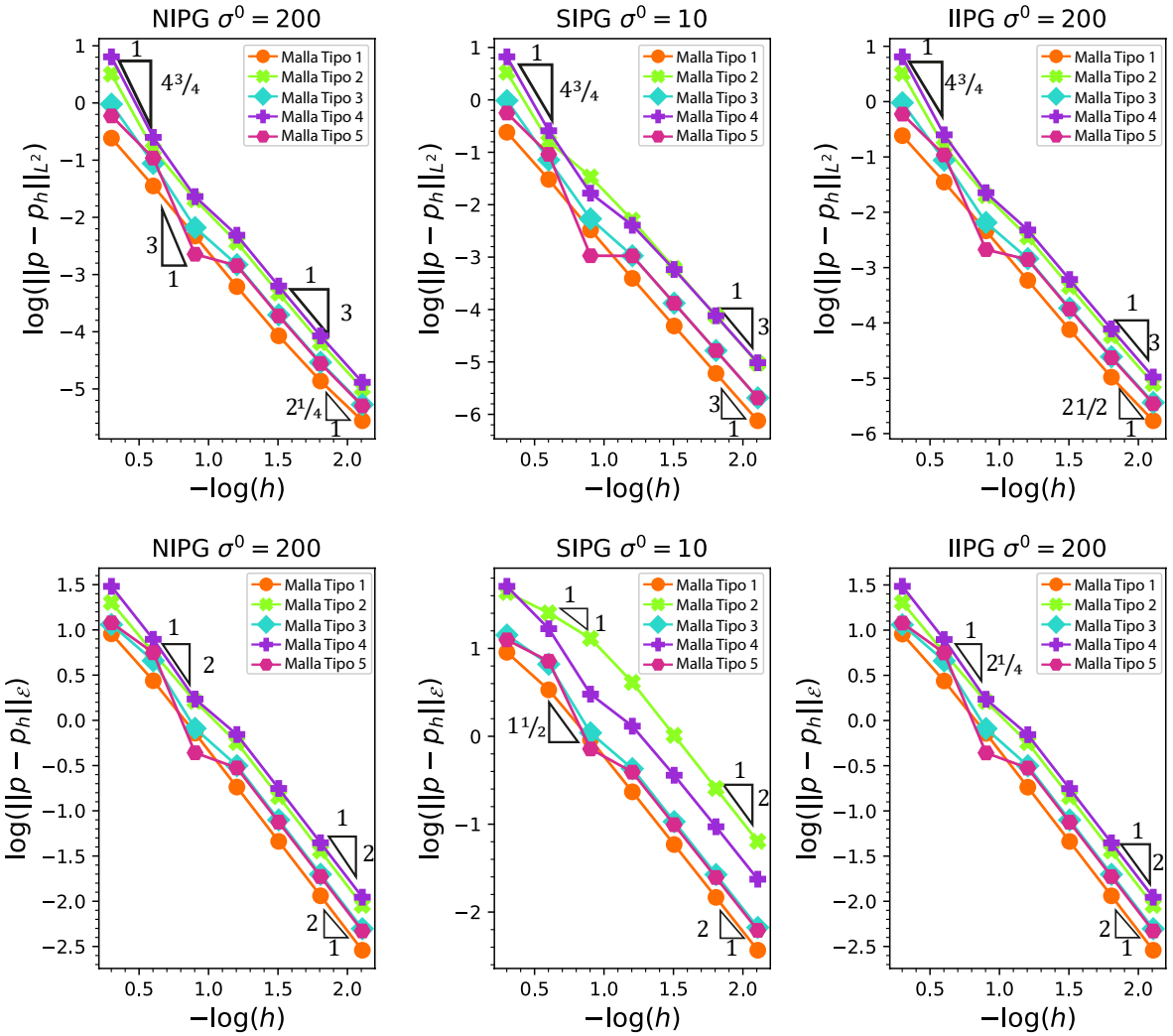


Figura 38 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas no uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\alpha = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

La gráfica Figura 38 revela que el método **SIPG** alcanza convergencia óptima, manteniendo estabilidad con el refinamiento de malla. En contraste, los métodos **NIPG** e **IIPG** muestran convergencia subóptima aunque mantienen estabilidad. Las mallas Tipo 3 y Tipo 5, así como Tipo 2 y Tipo 4, exhiben comportamientos numéricos similares en los tres métodos.

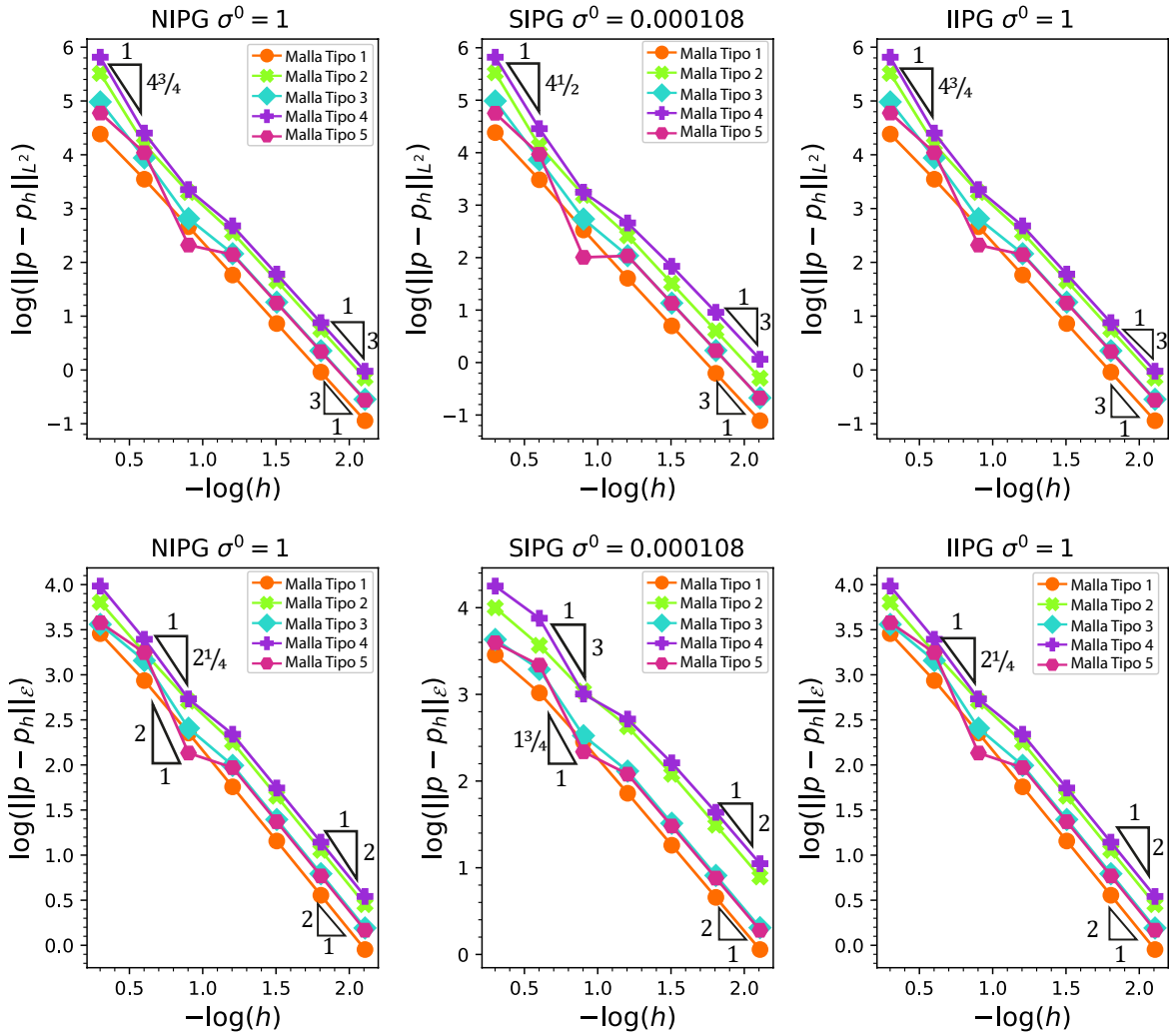


Figura 39 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas no uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\alpha = 10^{-5}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

De la gráfica Figura 39 con $\alpha = 10^{-5}$, se concluye que los métodos NIPG, SIPG e IIPG exhiben convergencias óptimas en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y convergencias subóptimas en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. Además, se observa una preservación de la estabilidad al realizar refinamientos en las mallas. Se destaca la similitud de comportamiento entre las mallas Tipo 3 y Tipo 5, así como entre las mallas Tipo 2 y Tipo 4, tal como se había evidenciado en la Figura 38.

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 3{,}667$			$\sigma^0 = 200$		
NIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	2.31	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.57	1.00	2.00	2.65	2.00	2.99
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.63	1.00	2.01	2.45	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.01	1.00	2.00	2.75	2.00	3.00
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.01	2.46	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 4$			$\sigma^0 = 10$		
SIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	3.00	2.00	2.99
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.99	1.03	2.05	3.00	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.03	3.00	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.25	1.69	2.76	2.98	1.98	2.98
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.02	3.00	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 2{,}996$			$\sigma^0 = 200$		
IIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	2.61	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.00	2.00	2.87	2.00	2.99
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.01	2.75	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	2.00	2.89	2.00	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.01	2.76	2.00	3.00

Tabla 17 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$ y $\alpha = 1$

De Tabla 17, se destaca una convergencia rápida en la tasa $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$ para las mallas Tipo 2 y Tipo 4 en el método NIPG. Asimismo, se observa una convergencia similarmente favorable en el método SIPG para las mallas Tipo 3 y Tipo 5, y en el método IIPG para las mallas Tipo 2 y Tipo 4, cuando se utiliza una aproximación polinómica de grado $\mathbb{P}_2$.

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}0000366$			$\sigma^0 = 1$		
NIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	3.00	2.00	4.40
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.57	1.00	2.00	3.00	2.00	3.39
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.63	1.00	2.01	3.00	2.00	3.61
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.01	1.00	2.00	3.00	2.00	3.35
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.01	3.00	2.00	3.61
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}000049$			$\sigma^0 = 1{,}00E-0408$		
SIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	3.00	2.00	2.99
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.01	2.02	3.00	1.98	2.98
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.02	3.00	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	1.99	1.02	2.05	2.97	1.97	2.96
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.02	3.00	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}00003033$			$\sigma^0 = 1$		
IIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	3.00	2.00	4.40
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.39
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.01	3.00	2.00	3.61
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.35
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.01	3.00	2.00	3.61

Tabla 18 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$ y $\alpha = 10^{-5}$

La Tabla 18 revela que el método SIPG tuvo una convergencia ligeramente más lenta en la norma $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$ cuando se utilizó la malla Tipo 4. Esta diferencia en la velocidad de convergencia puede atribuirse a la distribución particular de la malla Tipo 4, que exhibe una característica peculiar en la que uno de sus lados es más fino mientras que el último tramo es más grueso.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que los métodos de Galerkin discontinuos son sensibles a la estabilidad para problemas de difusión con fuente oscilatoria.

Para mallas gruesas, tanto los **CG** como los **NIPG** , **IIPG** y **SIPG** pierden estabilidad. Esto se debe a que la fuente oscilatoria introduce altos gradientes en la solución, los cuales pueden amplificarse por el término de penalización. Para mallas finas, los métodos discontinuos se vuelven estables. A medida que se refinan las mallas, los métodos discontinuos se vuelven más robustos. En particular, las mallas Tipo 1, Tipo 2 y Tipo 3 muestran un buen comportamiento en términos de estabilidad y precisión.

El método **SIPG** es más preciso que **CG** especialmente en mallas finas y manteniendo tasas de convergencia óptimas independientemente del grado del polinomio l, así como la mejora de la convergencia en **SIPG** con polinomios de alto orden y grados impares, subrayan la flexibilidad de estos métodos ante geometrías complejas. (ver Figura 40 y Figura 41).

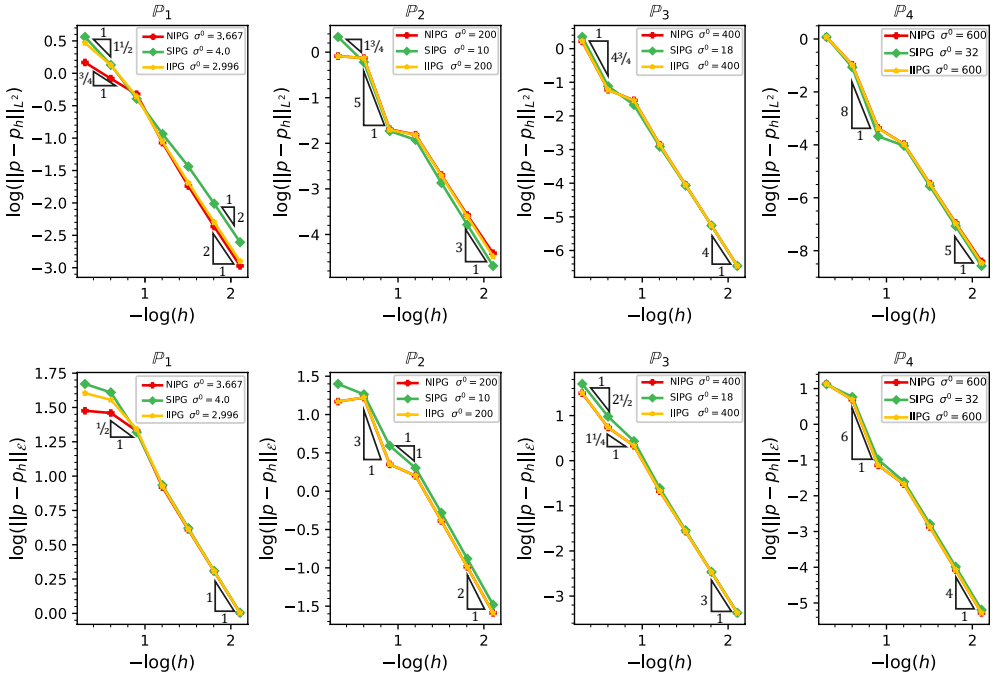


Figura 40 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 10^{-3}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

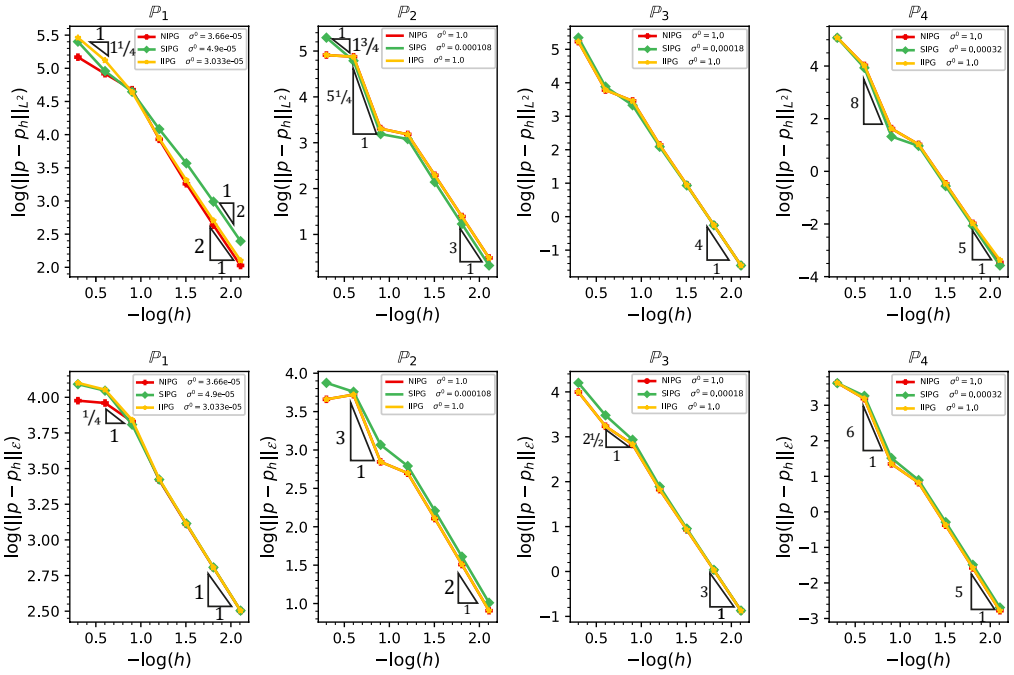


Figura 41 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\alpha = 10^{-5}$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

4.2. Problema de Difusión-Absorción

A continuación, consideramos la difusión y la absorción dentro de un poro cilíndrico de un catalizador poroso isotérmico.Problema adaptado de: (Charles G. Hill & Root, 1977, p. 64)

Consideremos un pequeño elemento diferencial de longitud dx a una distancia x desde la entrada del poro. El balance de materia para el reactante dentro de este elemento diferencial se describe como:

$$-\frac{d(D_c C)}{dx}\bigg|_x + \frac{d(D_c C)}{dx}\bigg|_{x+dx} + k'' C dx = 0$$

Donde D_c es el coeficiente de difusión efectivo, que caracteriza cuán rápidamente se difunde el reactante dentro del poro del catalizador, C es la concentración del reactante a una distancia x dentro del poro. Y k'' es la constante de velocidad superficial, que indica la rapidez con la que el reactante se absorbe (absorbe) en la superficie del poro.

Reorganizando y tomando el límite cuando dx tiende a cero, obtenemos la ecuación diferencial:

$$D_c \frac{d^2C}{dx^2} - k'' C = 0 \tag{4.12}$$

La solución de la ecuación diferencial proporcionará la variación de la concentración del reactante con la posición x dentro del poro. Esta es la base para analizar el comportamiento de un catalizador poroso isotérmico.

Incorporando una fuente adicional de reactante que aumenta linealmente con la posición x a lo largo del poro.La ecuación diferencial se modificaría a:

$$D_c \frac{d^2C}{dx^2} - k'' C + x = 0 \tag{4.13}$$

Si se conocen las concentraciones en la entrada y/o salida del poro, lo cual es común en análisis de catalizadores porosos. Las condiciones de frontera de Dirichlet podrían ser de la forma

$$\begin{cases} D_c \dfrac{d^2C}{dx^2} - k'' C + x = 0 \\ C(0) = C_0, \\ C(L) = C_L, \end{cases} \tag{4.14}$$

donde C_0 y C_L son las concentraciones especificadas del reactante en la entrada y salida del poro, respectivamente, y L es la longitud del poro.

Modelo Unidimensional de Difusión y Absorción en un poro de Catalizador

Tomando como referencia la ecuación (4.14), el Problema 4.3 modela la difusión y absorción en un catalizador poroso isotérmico en el dominio espacial $\Omega = (0, 1)$. El coeficiente α es análogo al coeficiente de difusión efectivo D_c y γ se relaciona con la constante de velocidad superficial k''. La función $f(x) = x$ actúa como una fuente o sumidero en el sistema, pudiendo representar una variación espacial en la tasa de introducción o eliminación de reactante en el sistema.

La solución exacta $p(x)$ descrita en (4.15) representa la concentración del reactante a una distancia x a lo largo del poro del catalizador.

Problema 4.3 [2]

$$\begin{cases} -\left(\alpha p'(x)\right)' + \gamma p(x) = f(x) & \forall x \in \Omega = (0, 1) \\ p(0) = 1 \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Donde $\alpha > 0, \gamma > 0$ *son constantes positivas y* $f(x) = x$. *Con solución exacta*

$$p(x) = \frac{x}{\gamma} + \frac{1}{e^{\eta} - e^{-\eta}} \left\{ \left(-e^{-\eta} - \frac{1}{\gamma} \right) e^{\eta x} + \left(e^{\eta} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\eta x} \right\} \tag{4.15}$$

donde $\eta^2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

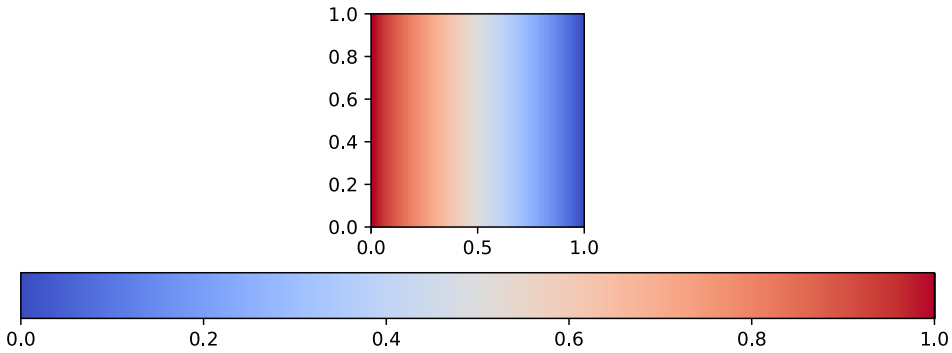


Figura 42 – Distribución espacial de la concentración del reactante $p(x)$ a lo largo de un poro de catalizador unidimensional modelado por Problema 4.3. Se utiliza una escala de colores que va del azul oscuro (concentración mínima) al rojo (concentración máxima) del catalizador.

Observación 9: ¿Qué sucede cuando $\eta^2 \to 0$, y $\eta^2 \to \infty$ en (4.3) ?

[2] Ejemplo propuesto en: (Rincon & Liu, 2020, p. 64)

El parámetro $\eta^2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ determina la relación entre la tasa de absorción (γ) y la difusividad efectiva (α) del reactante en el catalizador. Cuando $\eta^2 \to 0$, la tasa de absorción es mucho menor que la difusividad. En este escenario, se espera que el reactante se distribuya más uniformemente a lo largo del catalizador sin ser significativamente absorbido o reaccionado. Por otro lado, cuando $\eta^2 \to \infty$, la tasa de absorción es mucho más alta que la difusividad. Se espera que el reactante se absorba o reaccione tan pronto como entre al catalizador, sin tener tiempo para difundir significativamente.

Convergencia σ^0

En las figuras Figura 43 , asociadas a los valores $\eta^2 = 1$ y Figura 44 a los valores $\eta^2 = 1000$ se presentan los resultados de los estudios de convergencia realizados. Se emplearon funciones polinómicas por partes de grado $\mathbb{P}_2$ y mallas uniformes con un total de $N = 32$ elementos.

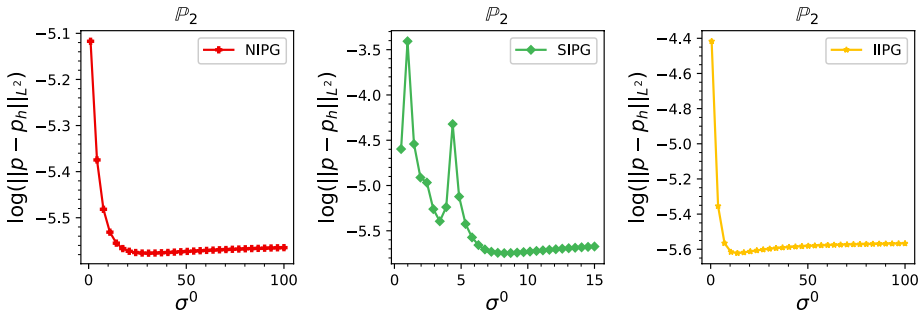


Figura 43 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta^2 = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

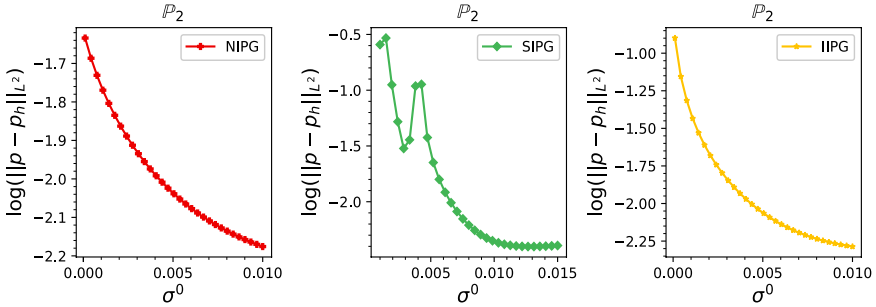


Figura 44 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta^2 = 1000$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

Los resultados obtenidos en Figura 43 y Figura 44 revelan que, independientemente del valor de α, los métodos **NIPG** e **IIPG** convergen rápidamente.

		σ^0							
		$\|\cdot\|_{L^2}$				$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$			
η^2	Método	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$
1	**NIPG**	0.5	30.7	200	300	14	100	200	300
	SIPG	5.05	8.233	20.916	24.166	10	15	25	36
	IIPG	5.893	13.76	200	300	8	100	200	300
1000	**NIPG**	0.00715	0.01	0.05	0.05	0.00937	0.01	0.05	0.05
	SIPG	0.00012	0.0127	0.022	0.0325	0.0001	0.015	0.022	0.036
	IIPG	0.00652	0.01	0.05	0.05	0.00873	0.01	0.05	0.05

Tabla 19 – Valores Óptimos σ^0 para $\eta^2 = 1$ y $\eta^2 = 1000$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

Influencia del parámetro σ^0

A continuación se presentan las figuras que ilustran los valores de σ^0 obtenidos al considerar los parámetros $\eta^2 = 1$ en el método NIPG (con valores de 30.7, 40 y 50) y en el método IIPG (con valores de 13.766, 20 y 40), de acuerdo con las características inherentes de estos métodos. En el caso del método SIPG, se observa que el rango de variación es de aproximadamente 2 unidades, y se alcanza el valor óptimo de $\sigma^0 = 11$. Por otro lado, al considerar $\eta^2 = 1000$ se determinaron los valores de σ^0 para el método NIPG (con valores de 0.001, 0.02 y 0.01) y para el método IIPG (con valores de 0.002, 0.02 y 0.2). En el caso del método SIPG, el rango de variación corresponde a aproximadamente 0.0004 unidades, y se centra en el valor óptimo de σ^0 =0.01266.

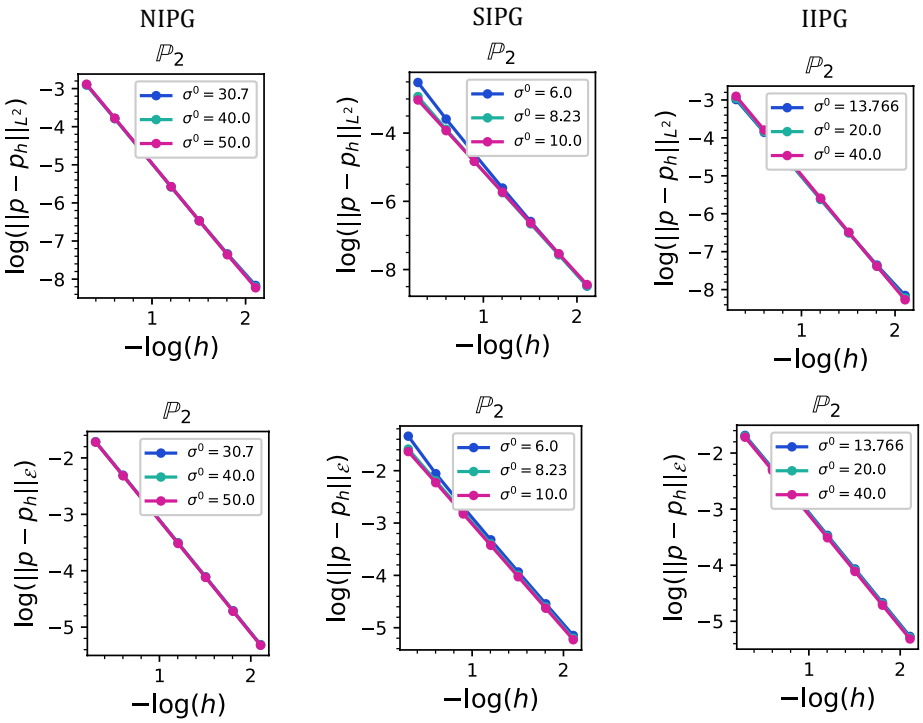


Figura 45 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta^2 = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

La observación realizada a partir de la figura Figura 45 revela estabilidad en la convergencia a medida que las mallas se refinan. Sin embargo, es interesante destacar que en el método SIPG, el uso de un valor de $\sigma^0 = 6$ muestra un rendimiento inferior en comparación con los otros dos casos para mallas más gruesas.

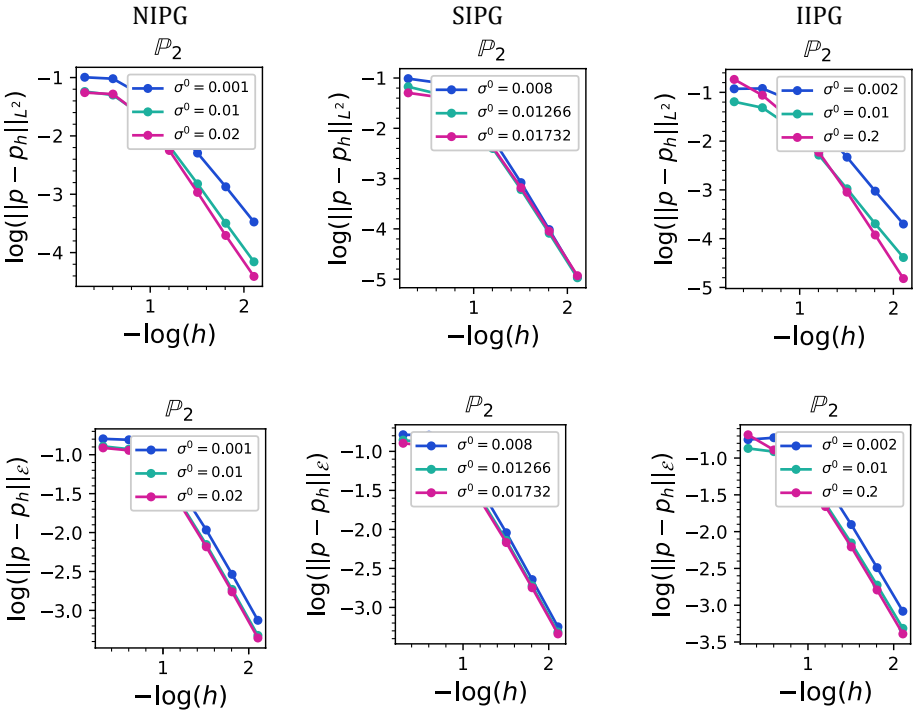


Figura 46 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de (p_h) de los métodos NIPG SIPG IIPG con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta^2 = 1000$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

En la figura Figura 46, se observa la diferencia en la convergencia entre los métodos **NIPG** e **IIPG** al variar el parámetro σ^0. Es interesante observar que estos métodos muestran mejoras a medida que σ^0 se incrementa.

En contraste, el método **SIPG** exhibe un comportamiento similar al ilustrado en la figura anterior (ver Figura 45). Se aprecia una divergencia en la convergencia a medida que se modifican los valores de σ^0 en mallas gruesas. Sin embargo, conforme se refina la malla, los métodos SIPG tienden a converger de manera semejante, sin importar el valor específico de σ^0 utilizado.

Convergencia h - mallas uniformes

En esta sección, se estudia las tasas de convergencia h de las aproximaciones obtenidas con $\mathbb{P}_l$ con $l = 1, 2$ para el DG y CG. Los resultados del análisis de convergencia h se presentan en las Figura 47 para $\eta^2 = 1$ y Figura 48, para $\eta^2 = 1000$

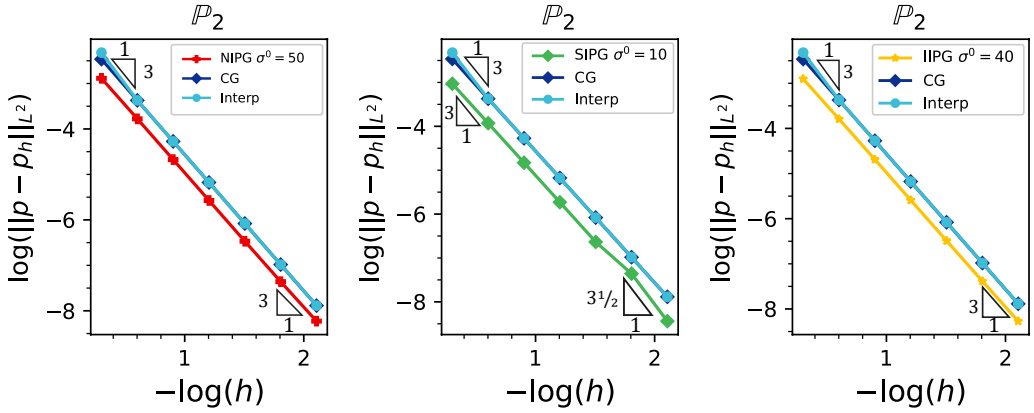


Figura 47 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta^2 = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

En Figura 47, se puede observar que para $\eta^2 = 1$, los métodos **NIPG SIPG IIPG** presentan mejores resultados en comparación con el método **CG** . Esto indica que los métodos de elementos finitos discontinuos logran una mejor precisión en la aproximación de la solución.

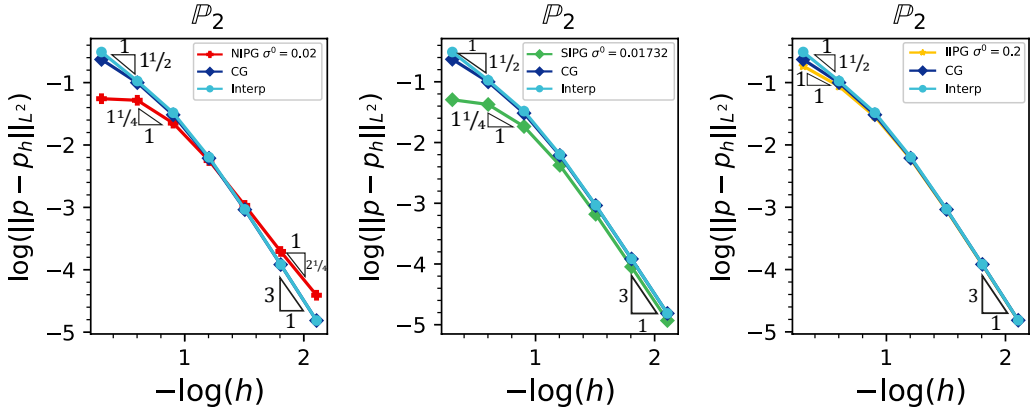


Figura 48 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta^2 = 1000$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

En Figura 48, se observa que los métodos **NIPG SIPG IIPG** comienzan a perder estabilidad cuando se utilizan mallas gruesas. Por ende la precisión de los métodos disminuyen. Por otro lado, en ambos escenarios, el método **SIPG** muestra mayor precisión en comparación con el método **CG** .

Método	$1/2^i$ i	$\mathbb{P}_1$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{E}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{J}}$	$\mathbb{P}_2$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{E}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{J}}$	$\mathbb{P}_3$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{E}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{J}}$	$\mathbb{P}_4$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{E}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{J}}$
		$\sigma^0 = 9{,}5$			$\sigma^0 = 50$			$\sigma^0 = 200$			$\sigma^0 = 300$		
NIPG	2	2.11	0.91	2.79	2.96	1.98	2.73	3.84	2.84	4.70	5.00	3.99	4.71
	3	2.09	0.99	2.87	2.98	1.99	2.89	3.97	2.97	4.88	5.00	4.00	4.88
	4	2.05	1.00	2.91	2.99	2.00	2.95	4.00	2.99	4.94	5.00	4.00	4.95
	5	2.02	1.00	2.89	2.98	2.00	2.97	4.00	3.00	4.97	4.93	4.00	4.97
	6	1.64	1.00	3.06	2.96	2.00	2.98	4.00	3.00	4.98	1.28	3.95	4.98
	7	2.00	1.00	2.84	2.88	2.00	3.00	3.54	3.00	4.84	-3.66	0.30	2.86
		$\sigma^0 = 5{,}05$			$\sigma^0 = 10$			$\sigma^0 = 24$			$\sigma^0 = 24{,}166$		
SIPG	2	1.64	0.90	2.26	2.98	1.97	2.44	3.64	2.89	4.55	5.12	4.15	4.17
	3	1.64	1.02	2.49	2.99	1.98	2.82	3.81	3.03	4.74	5.06	4.08	4.77
	4	1.81	1.03	2.56	2.99	1.99	2.92	3.90	3.04	4.76	5.03	4.05	4.90
	5	1.90	1.02	2.55	3.00	2.00	2.96	3.95	3.03	4.72	5.02	4.03	4.95
	6	1.87	1.02	2.86	2.40	2.00	2.98	3.97	3.02	4.65	4.03	4.01	4.98
	7	1.98	1.00	2.59	3.59	2.00	3.00	3.94	3.01	4.59	-2.72	3.80	4.94
		$\sigma^0 = 5{,}893$			$\sigma^0 = 40$			$\sigma^0 = 300$			$\sigma^0 = 600$		
IIPG	2	1.95	0.96	2.70	2.96	1.98	2.71	3.83	2.84	4.69	4.99	3.99	4.71
	3	2.00	1.00	2.88	2.98	1.99	2.88	3.96	2.97	4.88	5.00	4.00	4.88
	4	2.00	1.00	2.94	2.99	1.99	2.94	3.99	2.99	4.94	5.00	4.00	4.94
	5	2.00	1.00	2.97	2.99	2.00	2.97	4.00	3.00	4.97	4.98	4.00	4.97
	6	2.00	1.00	2.99	2.98	2.00	2.99	3.99	3.00	4.99	1.24	3.94	4.93
	7	2.00	1.00	2.99	2.94	2.00	2.99	3.47	3.00	4.76	-1.97	0.16	2.06

Tabla 20 – Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\eta^2 = 1$

Método	$1/2^i$ i	$\mathbb{P}_1$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{E}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{J}}$	$\mathbb{P}_2$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{E}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{J}}$	$\mathbb{P}_3$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{E}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{J}}$	$\mathbb{P}_4$ $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{E}}$	$\delta_{\|\cdot\|_\mathcal{J}}$
		$\sigma^0 = 0{,}00715$			$\sigma^0 = 0{,}02$			$\sigma^0 = 0{,}4$			$\sigma^0 = 0{,}6$		
NIPG	2	-0.58	-0.66	0.03	0.08	0.11	1.55	1.65	1.10	2.77	2.21	1.61	3.06
	3	0.41	0.12	0.71	1.22	0.87	1.80	2.39	1.73	2.66	3.23	2.53	3.31
	4	1.15	0.61	1.72	1.99	1.45	2.13	3.20	2.38	3.47	4.18	3.31	3.99
	5	1.65	0.88	2.32	2.39	1.79	2.45	3.71	2.78	4.20	4.72	3.76	4.41
	6	1.83	0.98	2.62	2.45	1.92	2.69	3.92	2.94	4.61	4.92	3.93	4.68
	7	1.90	1.00	2.77	2.33	1.97	2.84	3.98	2.98	4.81	4.96	3.98	4.83
		$\sigma^0 = 0{,}00388$			$\sigma^0 = 0{,}01732$			$\sigma^0 = 0{,}03$			$\sigma^0 = 0{,}6$		
SIPG	2	-0.63	-0.70	-0.50	0.26	0.12	1.10	0.86	0.79	1.91	1.65	1.49	2.46
	3	0.39	0.12	-0.13	1.21	0.87	1.43	2.13	1.68	2.35	3.09	2.53	3.06
	4	1.25	0.65	1.05	2.12	1.45	1.91	3.12	2.38	3.39	4.15	3.32	3.86
	5	1.81	0.92	1.61	2.68	1.79	2.32	3.63	2.80	4.20	4.70	3.76	4.33
	6	1.95	1.02	1.80	2.88	1.92	2.62	3.83	2.97	4.60	4.89	3.93	4.63
	7	1.92	1.04	2.07	2.94	1.97	2.80	3.91	3.01	4.73	4.95	3.98	4.80
		$\sigma^0 = 0{,}0065166$			$\sigma^0 = 0{,}2$			$\sigma^0 = 0{,}05$			$\sigma^0 = 0{,}6$		
IIPG	2	-0.53	-0.66	-0.10	1.08	0.68	2.62	1.15	0.84	2.38	2.21	1.61	3.05
	3	0.54	0.16	0.53	1.61	1.04	2.16	2.19	1.69	2.56	3.23	2.53	3.30
	4	1.28	0.63	1.63	2.27	1.51	2.19	3.09	2.38	3.45	4.18	3.31	3.99
	5	1.74	0.88	2.31	2.72	1.82	2.44	3.65	2.79	4.20	4.72	3.76	4.41
	6	1.92	0.97	2.65	2.91	1.95	2.68	3.89	2.94	4.62	4.92	3.93	4.68
	7	1.97	1.00	2.82	2.97	1.98	2.83	3.96	2.99	4.81	4.97	3.98	4.83

Tabla 21 – Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\eta^2 = 1000$

Método	α,γ	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	1,1	2	0.03	-0.68	0.03	-0.68
		3	1.97	1.96	3.00	3.00
		4	2.00	1.99	3.00	3.00
		5	2.05	2.00	3.00	3.00
		6	2.19	2.00	3.00	3.00
		7	2.13	2.00	3.00	3.00

Tabla 22 – Tasa de convergencia para el método CG con $\eta^2 = 1$

Método	α,γ	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	10^{-3},1	2	0.90	0.91	1.24	1.55
		3	1.09	1.02	1.71	1.69
		4	1.50	1.47	2.31	2.37
		5	1.72	1.80	2.74	2.77
		6	1.12	1.94	2.92	2.94
		7	0.19	1.99	2.98	2.98

Tabla 23 – Tasa de convergencia para el método CG con $\eta^2 = 1000$

Convergencia h - mallas no uniformes

A continuación, se emplean particiones no uniformes del dominio, cuya representación visual se muestra en la Figura 15. Para asegurar una comparación directa, se ha decidido utilizar los mismos valores de penalización σ^0 obtenidos durante la experimentación con mallas uniformes. Los resultados experimentales se presentarán en forma de tablas, específicamente en la Tabla 24 para $\eta^2 = 1$ y en Tabla 25 para $\eta^2 = 1000$. Estas tablas facilitarán un análisis comparativo de la convergencia de los métodos DG en mallas no uniformes.

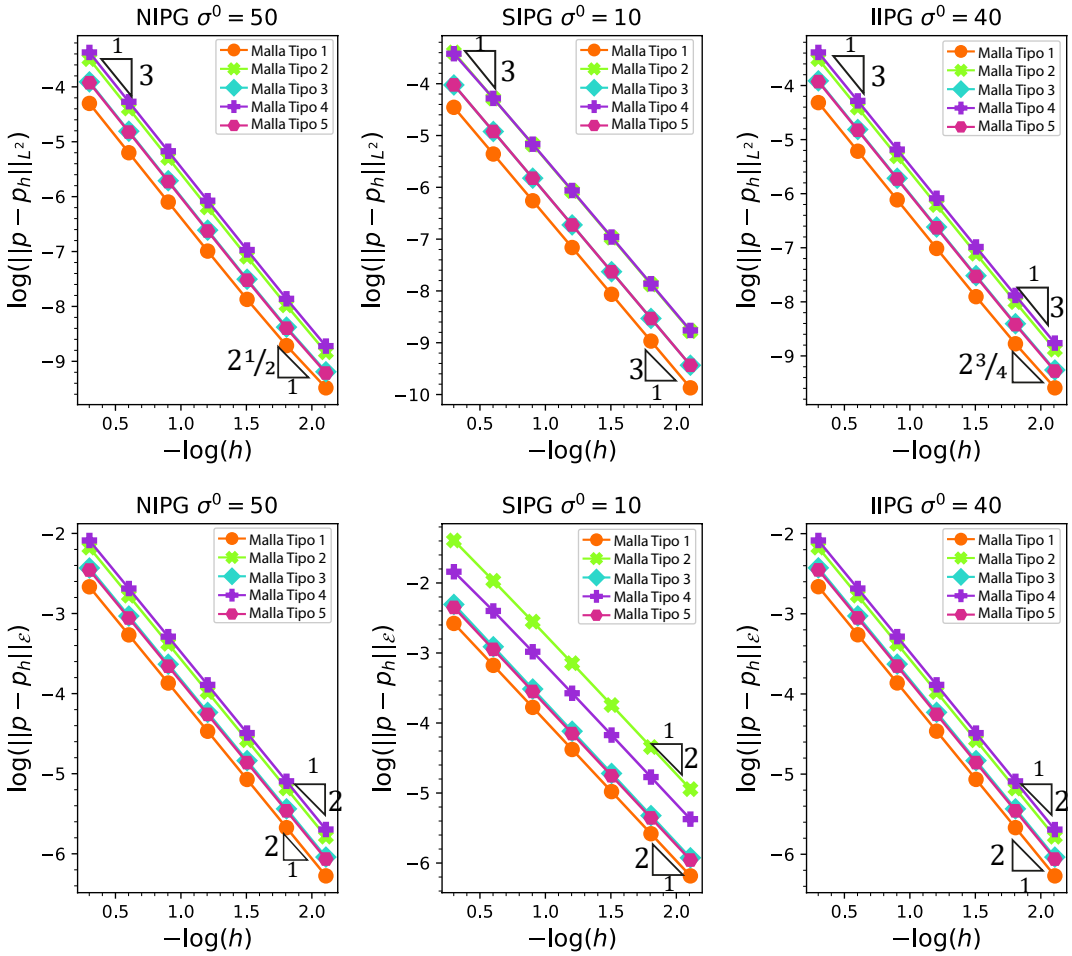


Figura 49 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta^2 = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$,$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

En la Figura 49, se puede observar que todos los métodos exhiben estabilidad en sus convergencias.

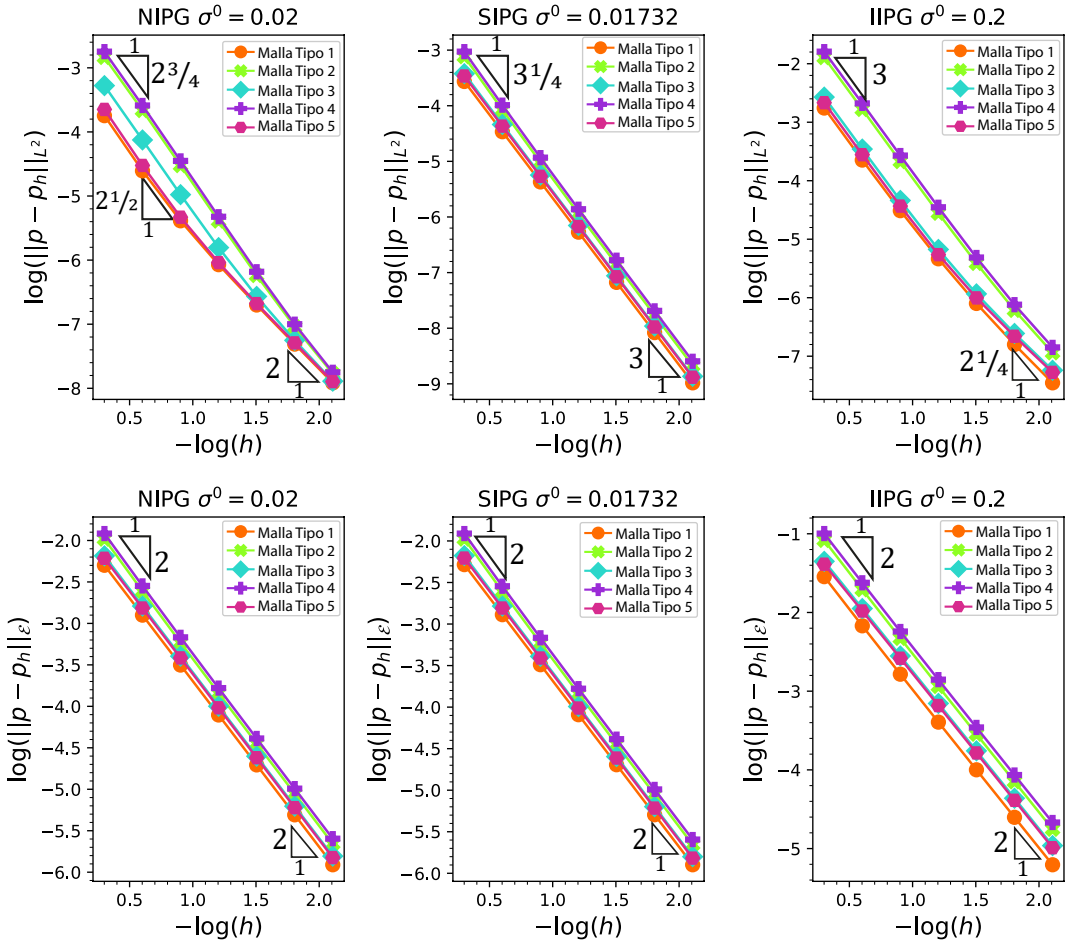


Figura 50 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta^2 = 1000$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

La Figura 50, se destaca que la malla Tipo 5 muestra una convergencia estable en todos los casos considerados. Además, se observa que esta malla tiene un comportamiento similar a la malla Tipo 1, que se ha identificado como una de las mejores opciones para las aproximaciones. Por otro lado, las mallas Tipo 4 y Tipo 2 muestran un comportamiento similar y se ubican entre las opciones menos favorables en términos de convergencia.

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}33$			$\sigma^0 = 3$		
NIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	2.65	2.56	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.07	1.00	1.99	2.85	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.72	1.00	1.99	2.70	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	1.99	2.86	2.00	3.00
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.00	2.71	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}3$			$\sigma^0 = 0{,}96$		
SIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	1.99	1.00	2.51	3.00	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.99	1.00	1.99	3.00	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.01	3.00	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	1.99	3.00	2.00	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.01	3.00	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}3$			$\sigma^0 = 3$		
IIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.99	1.00	1.99	2.92	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.01	2.84	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	1.99	2.93	2.00	3.00
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.01	2.85	2.00	3.00

Tabla 24 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta^2 = 1$

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}00715$			$\sigma^0 = 0{,}02$		
NIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.39	1.14	2.50	2.01	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.34	1.13	2.49	2.43	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.96	1.00	1.99	2.12	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.33	1.15	2.49	2.49	2.00	3.00
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.00	2.01	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}00388$			$\sigma^0 = 0{,}01732$		
SIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.68	1.65	2.67	3.00	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.31	1.32	2.31	3.01	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.06	1.00	2.06	3.00	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	1.38	0.47	1.38	3.01	2.00	3.00
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.03	1.00	2.08	3.00	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}0065166$			$\sigma^0 = 0{,}2$		
IIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.85	3.00	2.18	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.99	1.07	1.98	2.41	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.02	1.99	2.09	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	1.99	1.07	1.98	2.43	2.00	3.00
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.02	2.00	2.05	2.00	3.00

Tabla 25 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta^2 = 1000$

Al analizar las tablas Tabla 24 y Tabla 25, se observan tasas óptimas para $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$ y tasas subóptimas para $\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$. En particular, en la Tabla 24, se destaca que las tasas para $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$ son mayores en los casos de mallado de Tipo 2 y Tipo 4 en el método **NIPG** en comparación con el mallado de Tipo 1. Sin embargo, se observa un comportamiento similar en el método **IIPG** , donde estas dos mallas muestran una convergencia óptima, pero ya no superan al mallado de Tipo 1.

Conclusiones

Este estudio revela ventajas significativas en la utilización de los métodos discontinuos para la ecuación de Difusión-Absorción Se ha encontrado que todos los métodos mencionados mantienen estabilidad para $\eta = 1$, independientemente del tipo de malla utilizada.

Sin embargo, al aumentar η a 1000, se observa una inestabilidad en los métodos para mallas gruesas, atribuible a la excesiva fortaleza del término de penalización que puede amplificar los errores de discretización.(ver Figura 51)

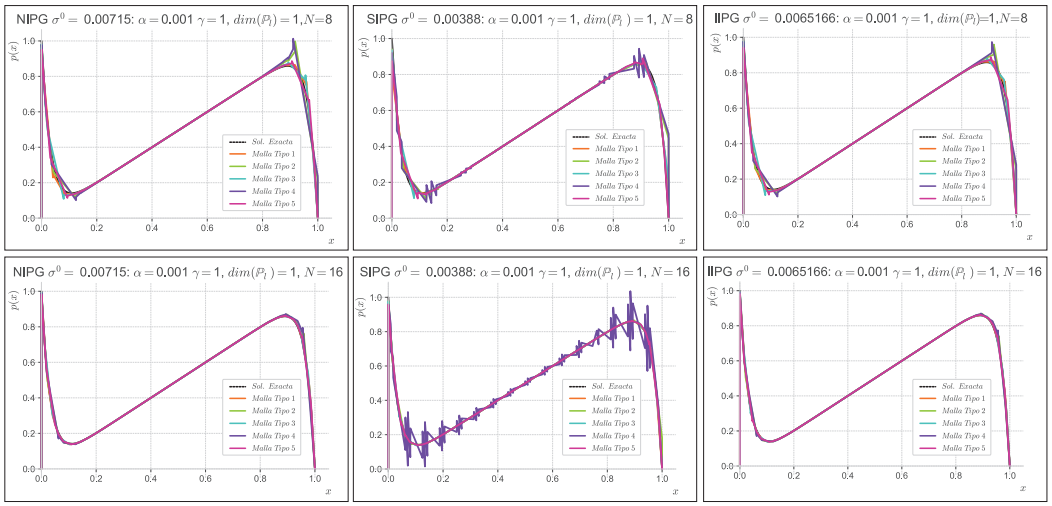


Figura 51 – Representación gráfica de las aproximaciones (p_h) comparando los métodos NIPG SIPG IIPG para una **malla no uniforme** con $N = 8, 16$, $\mathbb{P}_2$ para $\eta^2 = 1000$

Los métodos **NIPG** **SIPG** e **IIPG** , mostraron una precisión superior a la del método **CG** para $\eta = 1$, lo que implica que el término de penalización no solo contribuye a la estabilidad sino también a la reducción del error de discretización.

Además, estos métodos se muestran robustos en todos los escenarios estudiados, lo que indica que su precisión y estabilidad no se ven significativamente afectadas por el tipo de malla ni por el valor de η.

Las tasas de convergencia y la precisión subrayan la superioridad de SIPG, especialmente en mallas gruesas. Estos hallazgos respaldan la eficacia de los métodos de elementos finitos discontinuos para obtener soluciones numéricas precisas en diversas condiciones. (ver Figura 52 y Figura 53)

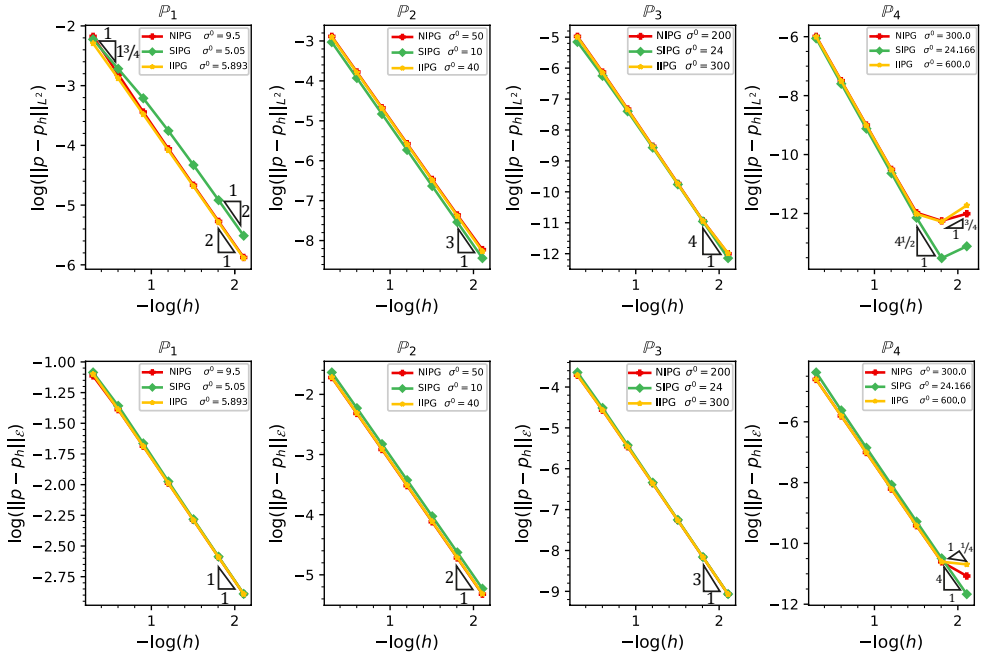


Figura 52 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$ comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

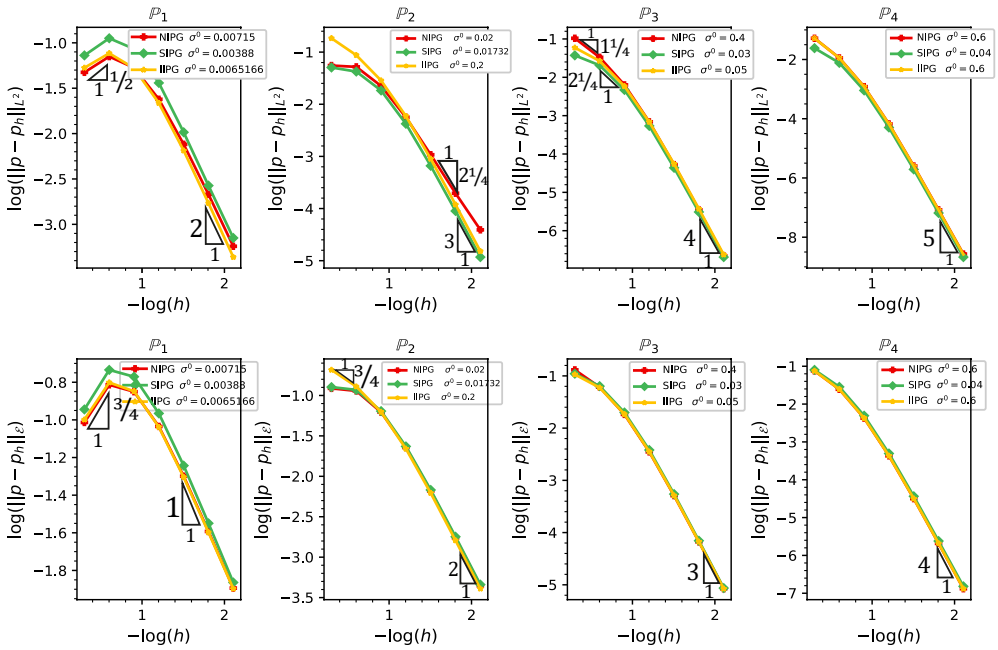


Figura 53 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$ comparando los métodos **NIPG SIPG IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 1000$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$,

4.3. Problema de Difusión-Advección

A continuación, se presenta una formulación matemática que considera los mecanismos de transporte en la dirección longitudinal para el análisis de la calidad del agua, en el contexto de un enfoque unidimensional.

En flujos superficiales con características de turbulencia homogénea y estacionaria, la ecuación diferencial que describe la dispersión longitudinal se da por (Taylor, 1954):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = K\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

En esta ecuación, C denota la concentración, u es la velocidad promedio del flujo, K es el coeficiente de dispersión a lo largo del eje x, y t representa el tiempo. Reorganizando la ecuación anterior, obtenemos:

$$-K\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \tag{4.16}$$

Suponiendo un estado estacionario, lo que implica que $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ (interpretado como que el sistema ha alcanzado un equilibrio temporal), e incluyendo un término de fuente $f(x)$, resulta en la siguiente ecuación diferencial:

$$-K\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u\frac{\partial C}{\partial x} = f(x) \tag{4.17}$$

Las condiciones de frontera de Dirichlet son útiles para representar las concentraciones conocidas de contaminantes en ciertos puntos del dominio, como en la entrada o salida de un río o canal. Estas condiciones pueden reflejar, por ejemplo, las políticas de control de contaminación en la fuente o las condiciones naturales en los extremos del dominio espacial. Matemáticamente, estas condiciones se pueden expresar como:

$$\begin{cases} -K\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u\dfrac{\partial C}{\partial x} = f(x), \\ C(0) = C_0, \\ C(L) = C_L, \end{cases} \tag{4.18}$$

donde C_0 y C_L son las concentraciones especificadas en los extremos del dominio espacial, y L es la longitud del dominio.

Modelado de Transporte de Contaminantes en Flujos Unidimensionales

Basado en la ecuación (4.18), el caso de estudio se reformula en el Problema 4.4. La solución exacta $p(x)$, proporcionada por (4.19), representa la concentración de una sustancia contaminante en el agua en función de la posición x a lo largo de un sistema unidimensional. Además, α es el coeficiente de difusión, y β denota el coeficiente de advección. En el Problema 4.4, corresponden respectivamente a los parámetros K y u del modelo previamente discutido, encapsulando los procesos de propagación y dispersión. $f(x) = 1$ representa un término fuente en Ω, similar a una tasa constante de introducción de contaminantes en sistemas hidrológicos. Finalmente, $\eta = \frac{\beta}{\alpha}$ es una métrica adimensional que cuantifica la relación entre advección y difusión en el sistema.

Problema 4.4

$$\begin{cases} -\left(\alpha p'(x)\right)' + \beta p'(x) = f(x) & \forall x \in \Omega = (0,1) \\ p(0) = 0 \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Donde $\alpha > 0, \beta > 0$, $\eta = \frac{\beta}{\alpha}$ *y* $f(x) = 1$. *Con solución exacta*

$$p(x) = -\frac{e^{\frac{\beta x}{\alpha}}}{\beta\left(e^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1\right)} + \frac{x}{\beta} + \frac{1}{\beta\left(e^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1\right)} \tag{4.19}$$

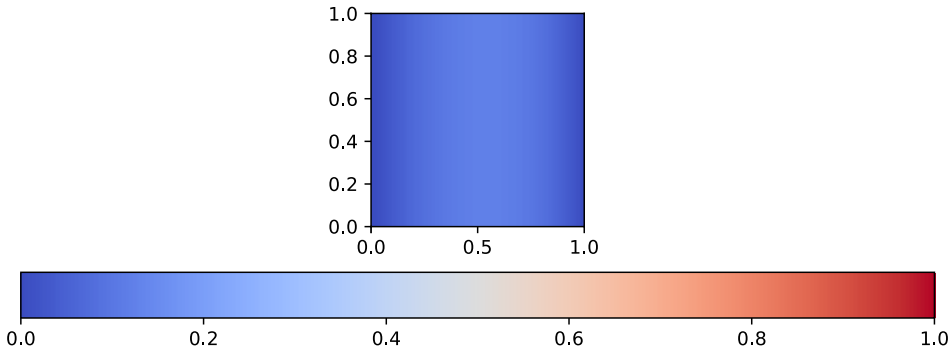


Figura 54 – Representación gráfica de la concentración $p(x)$ que describe la presencia de una sustancia contaminante en el agua a lo largo de la coordenada unidimensional x, conforme a la solución proporcionada en la ecuación (4.19). La variación de la concentración a lo largo del dominio se visualiza mediante una paleta de colores que transita desde tonos azules oscuros (denotando concentraciones bajas) hasta tonos rojos (denotando concentraciones altas).

Observación 10: ¿Qué sucede si $\eta \to 0$ y $\eta \to \infty$ en (4.4)?

En el caso de $\eta \to 0$ en (4.4), se observa una dominancia de la difusión sobre la advección. Esto indica que el transporte de contaminantes está siendo guiado principalmente por el proceso de difusión, donde los contaminantes se esparcen de áreas de alta concentración a áreas de baja concentración, y la velocidad del flujo (β) tiene un impacto menor en el transporte de contaminantes.

Por otro lado, cuando $\eta \to \infty$ en (4.4), la advección predomina sobre la difusión. En este escenario, el transporte de contaminantes está siendo guiado principalmente por la velocidad del flujo, y los contaminantes son transportados aguas abajo a lo largo del flujo con una dispersión lateral menor debido a la difusión. Este caso refleja una situación donde la rapidez del flujo es considerablemente mayor que la tasa de difusión, transportando los contaminantes rápidamente a través del sistema.

Convergencia σ^0

Es importante destacar que en este caso particular, a diferencia de los problemas previamente abordados, para resolver este problema con término de advección tenemos que acrecentar la integral $\beta \int_0^1 p_h'(x) q_h(x) dx$, este término adicional da lugar a dos formulaciones variacionales distintas, las cuales fueron previamente discutidas y justificadas en la Sección 3.2 (específicamente en la ecuación (3.40)). Por lo tanto, el objetivo es estudiar la convergencia del parámetro σ^0 bajo esta estructura, con el propósito de determinar cuál de los dos enfoques exhibe una mejor convergencia.

Los resultados de los experimentos se presentan en dos gráficos: en la Figura 55 se muestran los resultados para el caso en el que los valores de los coeficientes son $\eta = 1$, mientras que en la Figura 56 se presentan los resultados para $\eta = 100$.

Para mantener la consistencia visual con los gráficos anteriores, se utilizará la misma paleta de colores. Sin embargo, en esta ocasión se dará prioridad al enfoque que incluye el término de simetría adicional $\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta q_h(x_n)\}\!\} [\![P_h(x_n)]\!]$ en la formulación variacional y, en consecuencia, en el sistema lineal. Por lo tanto, los tonos más oscuros se asignarán al caso en el que este término no está presente.

Esta selección de colores nos permitirá visualizar de manera clara y distintiva la influencia del término de simetría adicional en la convergencia del parámetro σ^0, proporcionando información valiosa sobre la importancia de considerar dicho término en la resolución de problemas que involucran fenómenos convectivos.

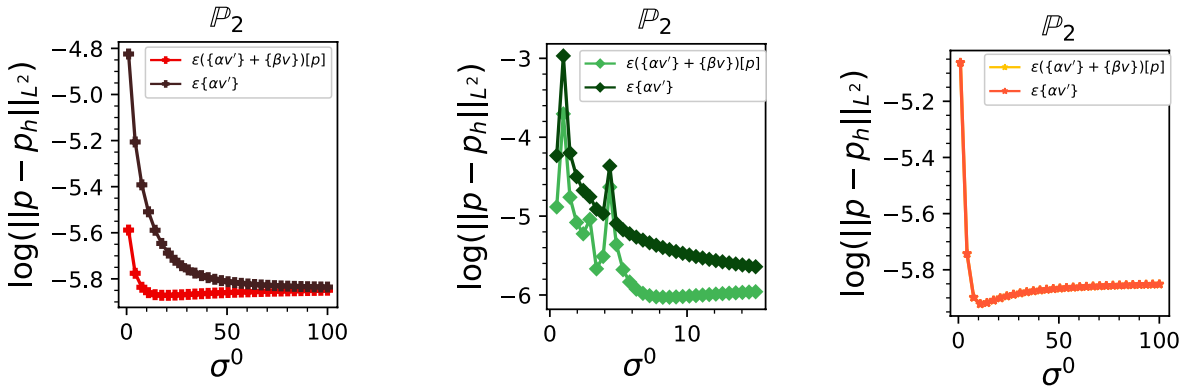


Figura 55 – Convergencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

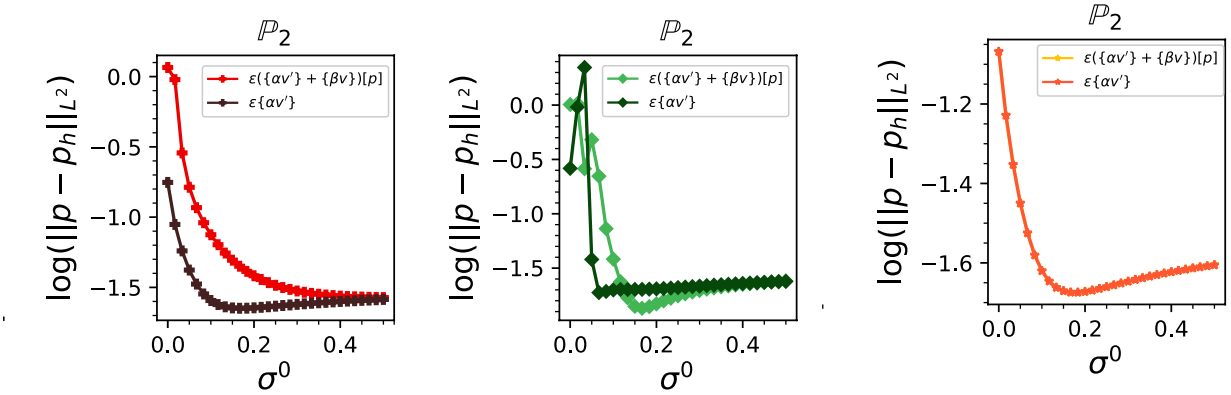


Figura 56 – Convergencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta = 100$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

En la Figura 55, se evidencia una convergencia más rápida al variar el parámetro σ^0 en **SIPG** , al considerar el término de simetrización adicional. En el caso de **NIPG** también se aprecia una ligera mejora en la velocidad de convergencia, aunque esta disminuye a medida que σ^0 aumenta, siendo apenas perceptible. En el método **IIPG** , esta variación no tiene un impacto significativo debido a que $\epsilon = 0$.

Por otro lado, al examinar la Figura 56, se nota que la convergencia del parámetro σ^0 es más rápida en el caso de **NIPG** , cuando no se considera el término de simetrización adicional.

La inclusión de este término adicional en la formulación variacional de **SIPG** conlleva mejoras significativas en la aproximación y convergencia del método. En el caso de **NIPG** , se seguirá utilizando el enfoque clásico sin considerar dicho término adicional. Por ello, a partir de este punto en adelante, se empleará el sistema que tiene en cuenta

el término adicional de simetría en todos los análisis y cálculos tanto para **SIPG** como para **NIPG** , tal como se mencionó previamente. La Tabla 26 resume la búsqueda de los valores optimos cuando $\eta = 1$ y $\eta = 100$

		σ^0							
		$\|\cdot\|_{L^2}$				$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$			
α, β	Método	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$
1,1	**NIPG** sin $\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\beta v\}\,[p]$	11.3	20.8	200	300	14	100	200	300
	SIPG	5.38	8.23	20.9166	25.35	10	15	25	36
	IIPG	6.42	10.9	200	300	8	100	200	300
$10^{-2}, 1$	**NIPG** sin $\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\beta v\}\,[p]$	0.18334	0.166673	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	SIPG	0.1	0.166673	0.25005	0.35003	0.116674	0.26	0.5	0.5
	IIPG	0.116674	0.18334	0.5	0.5	0.00001	0.5	0.5	0.5

Tabla 26 – Valores Óptimos σ^0 encontrados según las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ para $\eta = 1$ y $\eta = 100$

Influencia del parámetro σ^0

A continuación se presentan las figuras que muestran los valores σ^0 tomados cuando se consideran $\eta = 1$, en **NIPG** (20.8, 50 y 100) e **IIPG** (10.9,20,40), acorde a la naturaleza de estos métodos. Para **SIPG** , el radio de variación es de aproximadamente 20 unidades centrando al valor óptimo $\sigma^0 = 8{,}23$ cuando se consideran $\eta = 1$. Por otro lado, cuando se considera , Se determinó en la sección **NIPG** (σ^0 =0.0166673,0.5,1) Y para **IIPG** (σ^0 = 0.018334,0.5,1) **IIPG** , en el caso de **SIPG** , el rango de variación corresponde a aproximadamente 0.05 unidades centrando al valor óptimo $\sigma^0 = 0{,}166673$

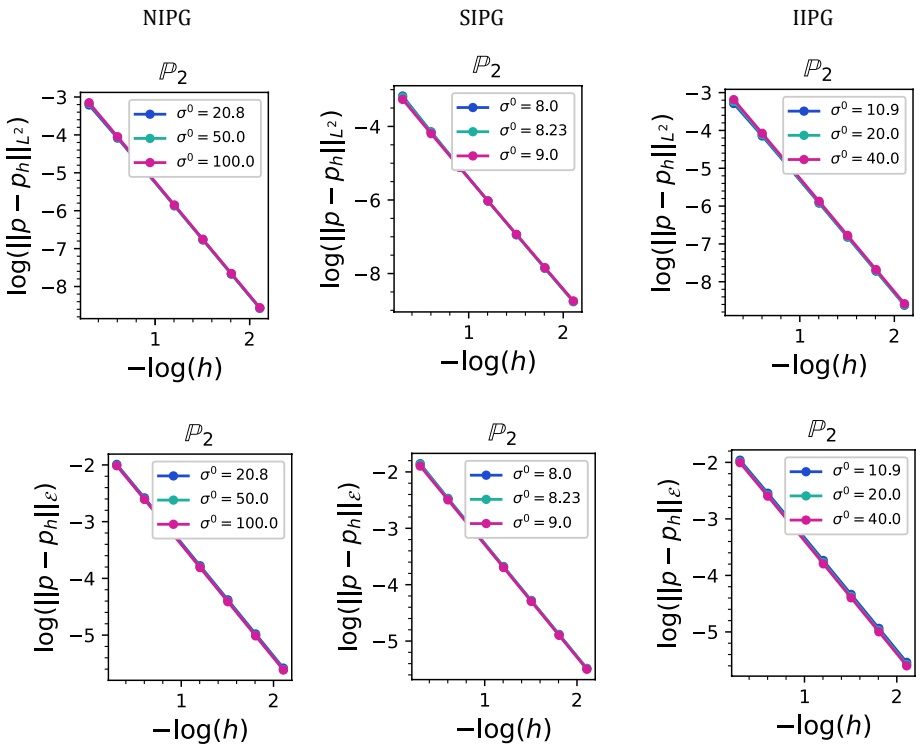


Figura 57 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

La Figura 57 muestra estabilidad en los tres métodos, con una convergencia similar incluso al variar el valor de σ^0.

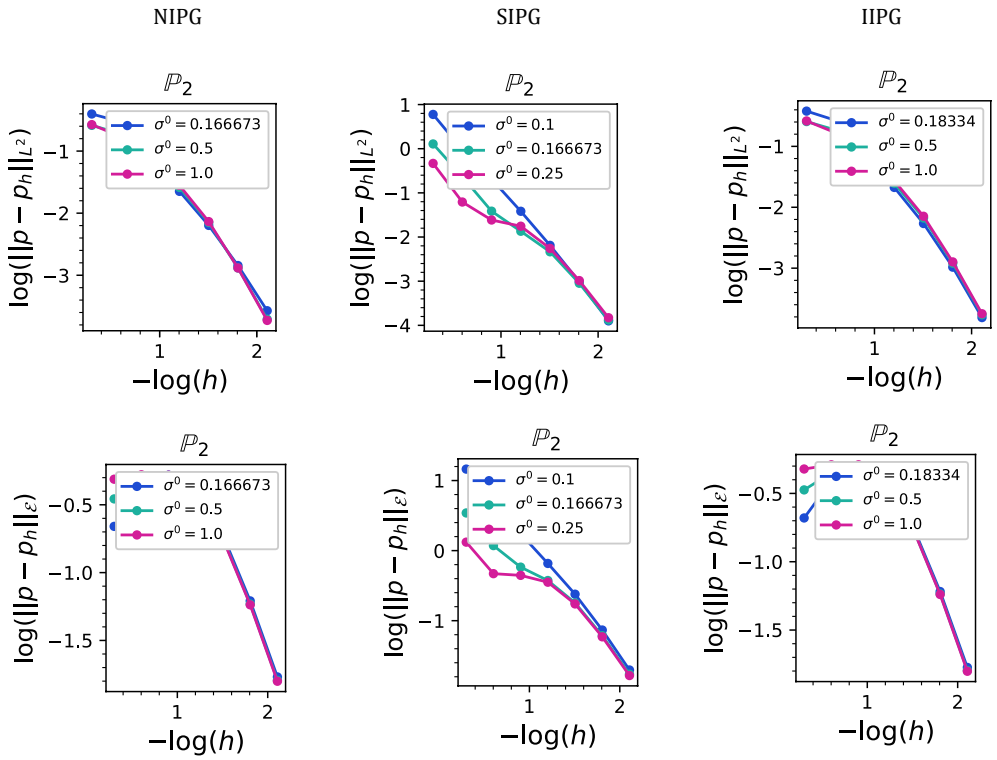


Figura 58 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta = 100$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

En la Figura 58, se destaca una diferencia notable en **SIPG** cuando se utilizan mallas gruesas. No obstante, se logra la convergencia a medida que se refinan las mallas.

Convergencia h - mallas uniformes

Se examinan las tasas de convergencia h de las aproximaciones obtenidas con $\mathbb{P}_l$ con $l = 1, 2$ para el DG y CG, Los resultados del análisis de convergencia h se presentan en las Figura 59 correspondientes a $\eta = 1$ y Figura 60, correspondientes a $\eta = 100$.

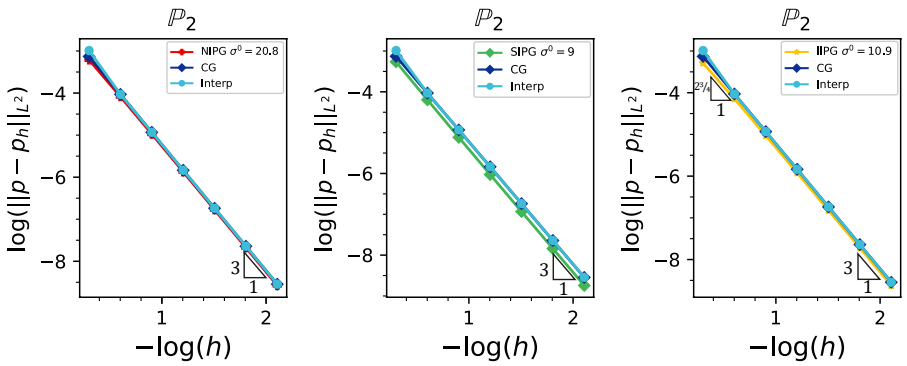


Figura 59 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

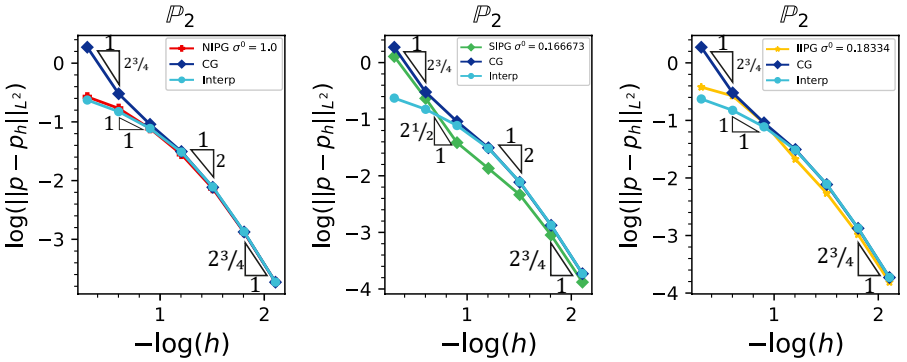


Figura 60 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 100$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

En la Figura 59, se encontró que el método **SIPG** proporciona aproximaciones más precisas, incluso con un número reducido de elementos finitos. Por otro lado, en la Figura 60, se evidenció que se necesita un mayor número de elementos finitos para obtener una convergencia adecuada en casos donde α es más pequeño. A continuación, se muestra el resumen de las tasas $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$, $\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$ y $\delta_{|\cdot|_{\mathcal{J}}}$ para los polinomios discontinuos por partes $\mathbb{P}_l$ donde $l = 1, 2, 3, 4$ en Tabla 27 cuando $\eta = 1$ en Tabla 28 cuando $\eta = 100$.

Método	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_3$			$\mathbb{P}_4$		
	i	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
		$\sigma^0 = 11{,}3$			$\sigma^0 = 20{,}8$			$\sigma^0 = 400$			$\sigma^0 = 600$		
NIPG	2	2.09	1.00	2.69	2.90	1.96	2.73	3.99	2.98	4.67	4.98	3.98	4.69
	3	2.07	1.00	2.85	2.96	1.98	2.88	4.00	3.00	4.86	5.00	3.99	4.87
	4	2.04	1.00	2.88	2.98	1.99	2.94	4.00	3.00	4.94	5.00	4.00	4.94
	5	2.02	1.00	2.85	2.99	2.00	2.97	4.00	3.00	4.97	4.98	4.00	4.97
	6	2.01	1.00	2.79	3.00	2.00	2.99	3.98	3.00	4.98	0.24	3.98	4.91
	7	2.01	1.00	2.71	3.00	2.00	2.99	3.95	3.00	4.59	-0.14	1.61	1.62
		$\sigma^0 = 7$			$\sigma^0 = 9$			$\sigma^0 = 22$			$\sigma^0 = 25{,}35$		
SIPG	2	1.67	1.01	2.18	3.09	1.99	2.32	3.80	3.07	4.13	5.04	4.1023	4.256
	3	1.87	1.01	2.64	3.05	1.99	2.79	3.91	3.06	4.56	5.02	4.0611	4.77
	4	1.94	1.01	2.63	3.03	1.99	2.91	3.96	3.04	4.53	5.01	4.0366	4.8992
	5	1.97	1.00	2.59	3.01	2.00	2.95	3.98	3.02	4.52	5.01	4.0201	4.9521
	6	1.99	1.00	2.56	3.01	2.00	2.98	3.99	3.01	4.51	4.68	4.0105	4.9764
	7	1.99	1.00	2.53	3.00	2.00	2.99	3.99	3.01	4.50	-0.86	3.9609	4.9028
		$\sigma^0 = 6{,}42$			$\sigma^0 = 10{,}9$			$\sigma^0 = 400$			$\sigma^0 = 500$		
IIPG	2	1.99	0.99	2.69	2.85	1.94	2.69	3.98	2.98	4.67	4.98	3.9786	4.6868
	3	2.00	1.00	2.87	2.93	1.97	2.87	4.00	3.00	4.86	5.00	3.9936	4.8695
	4	2.00	1.00	2.94	2.97	1.99	2.94	4.00	3.00	4.94	5.00	3.9979	4.94
	5	2.00	1.00	2.97	2.98	1.99	2.97	4.00	3.00	4.97	4.98	3.9992	4.97
	6	2.00	1.00	2.99	2.99	2.00	2.99	4.00	3.00	4.98	0.08	3.9857	4.93
	7	2.00	1.00	2.99	3.00	2.00	2.99	3.82	3.00	4.67	-0.40	2.2625	2.06

Tabla 27 – Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\eta = 1$

Método	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_3$			$\mathbb{P}_4$		
	i	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{L^2}}$	$\delta_{\\|\cdot\\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
		$\sigma^0 = 0{,}18334$			$\sigma^0 = 1$			$\sigma^0 = 2$			$\sigma^0 = 3$		
NIPG	2	0.21	-0.87	0.19	0.65	-0.11	1.35	2.21	0.71	2.33	1.67	0.51	2.31
	3	1.07	0.26	1.51	1.15	0.01	1.94	1.59	0.53	2.47	1.86	0.88	2.66
	4	1.33	0.40	2.05	1.46	0.46	2.25	2.05	1.14	2.72	2.71	1.83	3.21
	5	1.45	0.50	2.22	1.94	1.10	2.45	2.81	1.93	3.20	3.71	2.80	3.86
	6	1.77	0.79	2.44	2.48	1.61	2.53	3.48	2.54	3.87	4.45	3.49	4.32
	7	1.97	0.95	2.63	2.81	1.87	2.64	3.83	2.85	4.41	4.82	3.84	4.58
		$\sigma^0 = 0{,}1$			$\sigma^0 = 0{,}166673$			$\sigma^0 = 0{,}3$			$\sigma^0 = 0{,}4$		
SIPG	2	2.56	1.68	2.76	2.46	1.55	2.93	2.81	1.33	3.86	3.02	1.306	4.5579
	3	2.31	1.28	3.13	2.60	1.02	4.52	2.03	0.73	2.58	1.99	1.1795	2.03
	4	2.06	0.28	3.09	1.51	0.63	1.04	1.23	1.11	1.53	2.14	1.8627	2.3115
	5	0.62	0.27	0.47	1.54	1.06	1.60	2.55	1.89	2.87	3.52	2.7833	3.5729
	6	1.33	0.68	1.99	2.37	1.56	2.22	3.36	2.53	3.78	4.40	3.4726	4.1731
	7	1.67	0.90	2.46	2.77	1.83	2.51	3.72	2.86	4.38	4.79	3.8222	4.4925
		$\sigma^0 = 0{,}116674$			$\sigma^0 = 0{,}18334$			$\sigma^0 = 2$			$\sigma^0 = 3$		
IIPG	2	0.39	-1.00	0.04	0.51	-0.90	0.70	2.24	0.71	2.33	1.69	0.494	2.307
	3	0.98	0.01	1.23	1.56	-0.37	1.19	1.59	0.51	2.46	1.86	0.8589	2.6491
	4	1.36	0.35	1.92	2.09	0.39	1.78	2.05	1.13	2.71	2.70	1.8259	3.19
	5	1.46	0.50	2.16	1.97	1.08	2.25	2.81	1.93	3.19	3.70	2.7955	3.85
	6	1.74	0.79	2.40	2.38	1.58	2.46	3.48	2.54	3.86	4.46	3.4893	4.31
	7	1.92	0.94	2.61	2.75	1.85	2.62	3.83	2.85	4.41	4.83	3.834	4.58

Tabla 28 – Tasa de convergencia para los métodos NIPG, SIPG e IIPG con $\eta = 100$

Método	η	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	1	2	2.00	1.86	2.99	3.46
		3	2.01	2.00	3.00	3.00
		4	2.01	2.00	3.00	3.00
		5	1.74	2.00	3.00	3.00
		6	0.53	2.00	3.00	3.00
		7	0.01	2.00	3.00	3.00

Tabla 29 – Tasa de convergencia para el método CG con $\eta = 1$

Método	η	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	100	2	2.24	0.62	2.63	0.66
		3	2.38	0.66	1.73	0.95
		4	1.37	0.82	1.54	1.34
		5	1.44	1.18	2.02	1.97
		6	1.55	1.60	2.53	2.54
		7	0.87	1.87	2.84	2.85

Tabla 30 – Tasa de convergencia para el método CG con$\eta = 100$

Convergencia h - mallas no uniformes

En esta sección, se llevará a cabo el análisis de la convergencia de los métodos DG en mallas no uniformes, utilizando una metodología similar a la empleada en estudios anteriores. Para evaluar la robustez del método se utilizan los mismos valores σ^0.

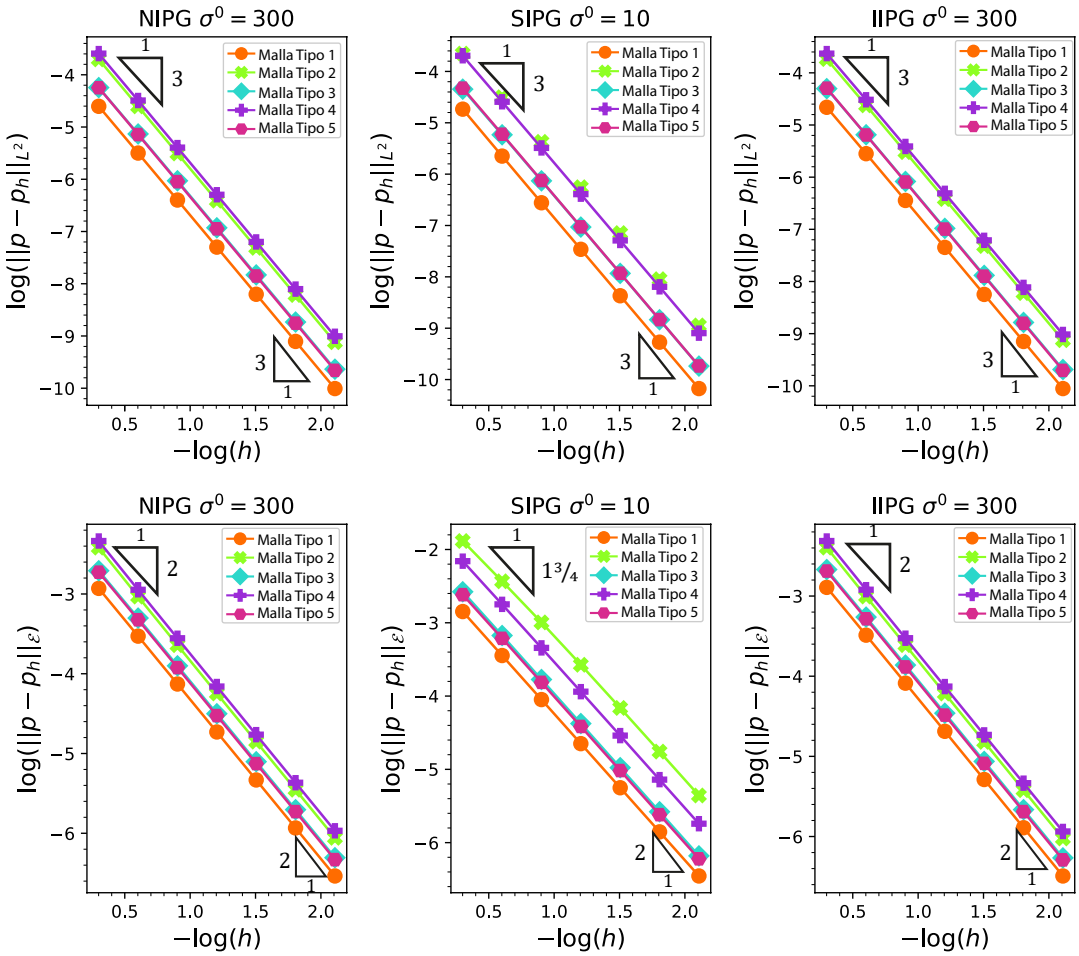


Figura 61 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

En Figura 61 se observan que los tres métodos mantienen convergencias estables para todos los tipos las mallas, además evidencian tasas óptimas en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y tasas suoptimas en $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

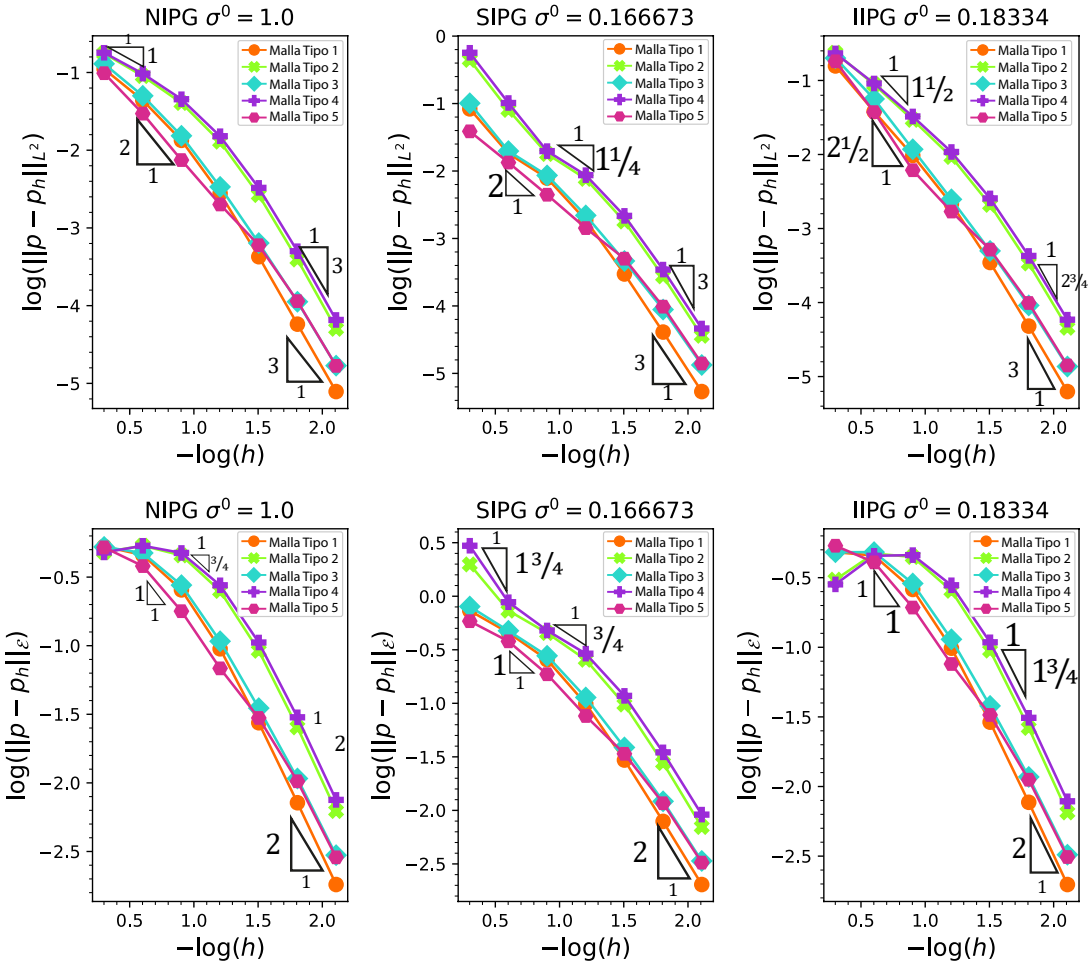


Figura 62 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 100$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

En la Figura 62, se observa que al refinar mallas gruesas, la estabilidad en la convergencia del error mejora. Específicamente, las mallas Tipo 1, Tipo 3 y Tipo 5 logran estabilizarse y convergen de manera óptima en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$, pero con tasas subóptimas en $|\cdot|_{\mathcal{E}}$.

En la tabla Tabla 31 , Tabla 32 se muestra la convergencia en mallas no uniformes para $\eta = 1$ y $\eta = 100$, respectivamente.

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 10{,}85$			$\sigma^0 = 300$		
NIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	2.60	3.00	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 9{,}67$			$\sigma^0 = 10$		
SIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	2.51	3.00	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.00	1.99	2.99	1.99	2.99
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	1.99	3.00	2.00	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 6{,}156$			$\sigma^0 = 300$		
IIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.00	3.00	2.00	3.00

Tabla 31 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes,mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta = 1$

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}18334$			$\sigma^0 = 1$		
NIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.05	1.00	2.84	2.88	1.98	2.84
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.03	1.06	2.16	2.96	2.03	2.91
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.80	0.94	1.94	2.73	1.86	2.85
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.01	1.04	2.11	2.94	2.00	2.90
	Tipo 5	1/4, 1/2	1.79	0.91	1.93	2.77	1.84	2.85
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 0{,}1$			$\sigma^0 = 0{,}166673$		
SIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	1.86	0.99	2.76	2.93	1.96	2.80
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.89	1.02	2.00	2.93	1.99	2.76
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.76	0.93	1.87	2.73	1.85	2.81
	Tipo 4	1/7, 1/7	1.86	0.99	1.96	2.90	1.93	2.75
	Tipo 5	1/4, 1/2	1.80	0.90	1.94	2.80	1.84	2.85
$N = 32$	a	b	$\sigma^0 = 0{,}1166746$			$\sigma^0 = 0{,}18334$		
IIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	1.86	1.00	2.84	2.94	1.96	2.83
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.01	1.05	2.12	2.89	2.02	2.90
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.79	0.94	1.91	2.74	1.86	2.84
	Tipo 4	1/7, 1/7	1.99	1.03	2.06	2.86	1.99	2.88
	Tipo 5	1/4, 1/2	1.80	0.91	1.94	2.80	1.84	2.85

Tabla 32 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes,mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta = 100$

Conclusiones

El metodo es estable y robusto al refinar la malla y se emplean coeficientes $\eta = 1$. Sin embargo, en el método **SIPG** , si se utilizan $\eta = 100$ en mallas gruesas, la estabilidad se ve comprometida, evidenciando la necesidad de ajustes adicionales para restablecerla.

Estos métodos muestran sensibilidad ante la simetrización. El método **SIPG** inicialmente diverge pero se estabiliza con simetrización adicional. Por otro lado, **NIPG** e **IIPG** convergen rápidamente, aunque la simetrización puede afectar la convergencia de **NIPG** en ciertos casos. Esto subraya la importancia de adaptar la simetrización según las particularidades del problema. En términos de tasas de convergencia, se observa que los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** son estables con $\eta = 1$, pero en el caso de $\eta = 100$, el método **SIPG** pierde estabilidad en mallas gruesas, recuperándola con refinamiento. La adaptabilidad de la malla también influye, con convergencia estable en los tres métodos con $\eta = 1$, tasas óptimas y subóptimas. En cuanto a la precisión, el método **SIPG** destaca con $\eta = 1$ al ser más preciso con menos elementos, mientras que con $\eta = 100$ requiere más elementos. En general, estos hallazgos respaldan la eficiencia y precisión de los métodos de elementos finitos discontinuos en difusión-advección. (ver Figura 63 y Figura 64)

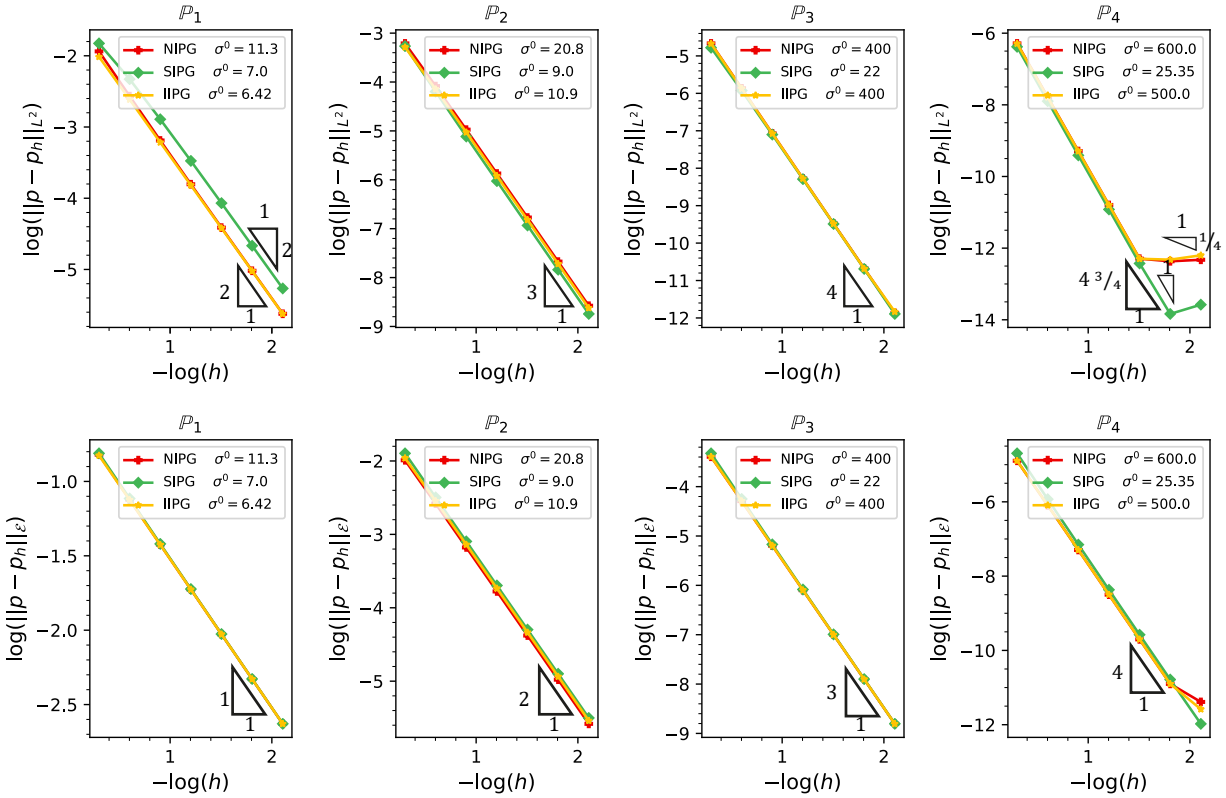


Figura 63 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

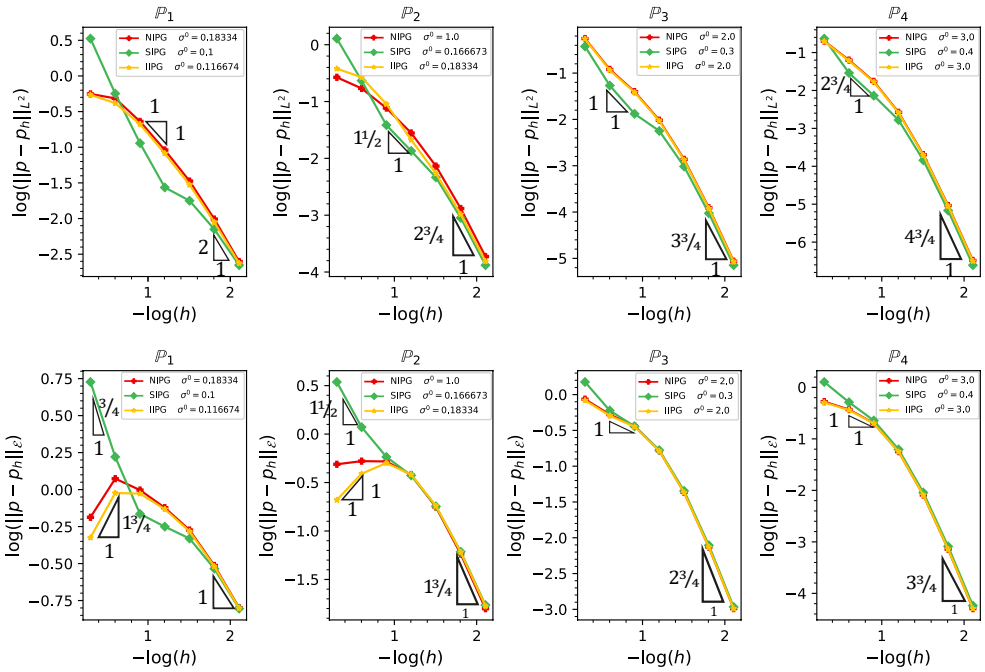


Figura 64 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 100$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$,

4.4. Difusión-advección-absorción

El siguiente problema modela la difusión, advección y absorción de un contaminante en un medio unidimensional, tal como podría ser el flujo en un acuífero o en un río subterráneo, basándose en investigaciones previas sobre transporte y transformación de contaminantes (Pérez, 2016).

Donde $C(x,t)$ es la concentración del contaminante en la posición x en el tiempo t. D es el coeficiente de difusión que caracteriza la dispersión del contaminante debido a gradientes de concentración. v es la velocidad de advección que describe la velocidad a la que el agua subterránea se mueve. r_c es un término de absorción que representa la tasa a la que el contaminante se elimina del sistema, posiblemente debido a procesos como la biodegradación.

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - v\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} - r_c$$

Reordenando los términos, se tiene

$$-D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} + v\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} + r_c = \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} \tag{4.20}$$

Incorporamos una fuente $f(x)$ que representa la variabilidad espacial en la introducción de contaminantes en el sistema, modificando la ecuación del modelo a:

$$-D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} + v\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} + r_c = \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + f(x).$$

En un estado estacionario, la derivada parcial de $C(x,t)$ con respecto al tiempo es cero, $\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = 0$, lo que reduce la ecuación diferencial a:

$$-D\frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} + v\frac{\partial C(x)}{\partial x} + r_c = f(x).$$

Adicionalmente, prescribimos condiciones de frontera de Dirichlet para representar las concentraciones conocidas de contaminantes en ciertos puntos del dominio, matemáticamente expresadas como:

$$\begin{cases} -D\dfrac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} + v\dfrac{\partial C(x)}{\partial x} + r_c = f(x), \\ C(0) = C_0, \\ C(L) = C_L, \end{cases} \tag{4.21}$$

donde C_0 y C_L son las concentraciones especificadas en los extremos del dominio espacial, y L es la longitud del dominio.

Modelo Unidimensional de Difusión, Advección y Absorción de Contaminantes en Medios Acuáticos Subterráneos

La ecuación (4.21) se reformula en el problema Problema 4.5, considerando un dominio unidimensional $\Omega = (0, 1)$, que puede representar un segmento de un río subterráneo. En este nuevo enfoque, interpretamos la absorción del contaminante, descrita por el término r_c, como un proceso de absorción, dado que ambas dinámicas conducen a una disminución de la concentración del contaminante en el medio. El término α es análogo al coeficiente de difusión D, mientras que $\beta(x)$ equivale a la velocidad de advección v. El coeficiente γ está vinculado con el término de absorción r_c, modelando los procesos que reducen la cantidad de contaminante en el sistema.

Problema 4.5

$$\begin{cases} -\left(\alpha p'(x)\right)' + \left(\beta(x) \cdot p(x)\right)' + \gamma \cdot p(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ p(0) = 1 \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Donde $\alpha, \gamma > 0$,$\eta = \frac{\gamma}{\alpha}$ *y* $\beta(x) = x$

$$f(x) = \frac{\gamma^2\pi^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma\pi x}{\alpha}\right)}{\alpha} + \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma\pi x}{\alpha}\right) + x + x\left(\frac{\gamma\pi \cos\left(\frac{\gamma\pi x}{\alpha}\right)}{\alpha} + 1\right) + \gamma\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma\pi x}{\alpha}\right) + x\right)$$

Con solución exacta

$$p(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma\pi x}{\alpha}\right) + x \tag{4.22}$$

La solución exacta $p(x)$, definida en (4.22), describe la distribución espacial de la concentración del contaminante a lo largo del dominio Ω.

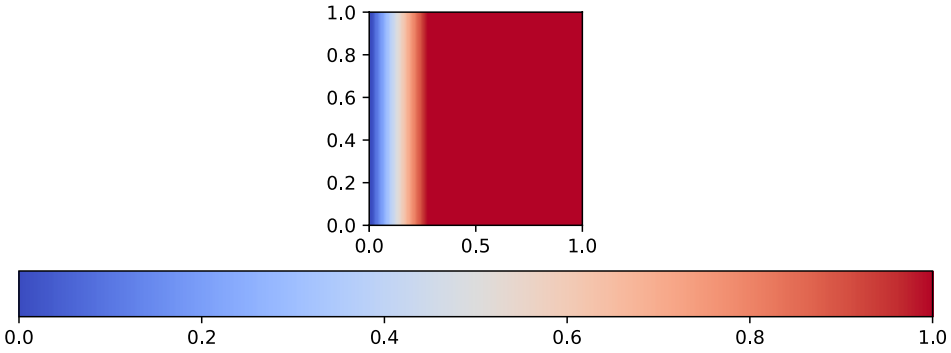


Figura 65 – Distribución espacial de la concentración del contaminante en un medio unidimensional acuático subterráneo, representada por la solución (4.22). Se emplea una paleta de colores que transita desde el azul oscuro, indicando una concentración mínima, hasta el rojo, que representa una concentración máxima. Este gráfico ilustra cómo los contaminantes se dispersan, son advectados y absorbidos a lo largo del dominio $\Omega = (0, 1)$, conforme a la formulación presentada en el Problema 4.5.

Observación 11: ¿Qué sucede cuando, $\eta \to 0$ y $\eta \to \infty$ Problema 4.5?

Cuando $\eta \to 0$, implica que el coeficiente de absorción es mucho menor que el coeficiente de difusión. Físicamente, esto sugiere que la difusión domina sobre la absorción, permitiendo que el contaminante se disperse ampliamente a lo largo del dominio.

Por otro lado, cuando $\eta \to \infty$, indica que el coeficiente de absorción es mucho mayor que el coeficiente de difusión. En esta situación, la absorción domina sobre la difusión, lo que implica que el contaminante es absorbido rápidamente por el medio, limitando su dispersión a lo largo del dominio. Esto puede resultar en una concentración de contaminante significativamente menor en todo el dominio.

Convergencia σ^0

Se amplió integral $\int_0^1 (xp_h(x))' q_h(x)dx$, generando dos formulaciones variacionales. Justificadas en Sección 3.2 (3.42). Análisis convergencia σ^0 basado en estructura para determinar mejor enfoque. Resultados en Figura 67 ($\eta = 1$) y Figura 66 ($\eta = 10$). Paleta de colores coherente, destacando visualmente término de simetría adicional $\epsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{\beta(x)q_h(x_n)\}\!\} [\![P_h(x_n)]\!]$ en formulación variacional y sistema lineal. Tonos oscuros para caso sin término, claridad en influencia del término en convergencia σ^0. Relevancia del término en problemas convectivos.

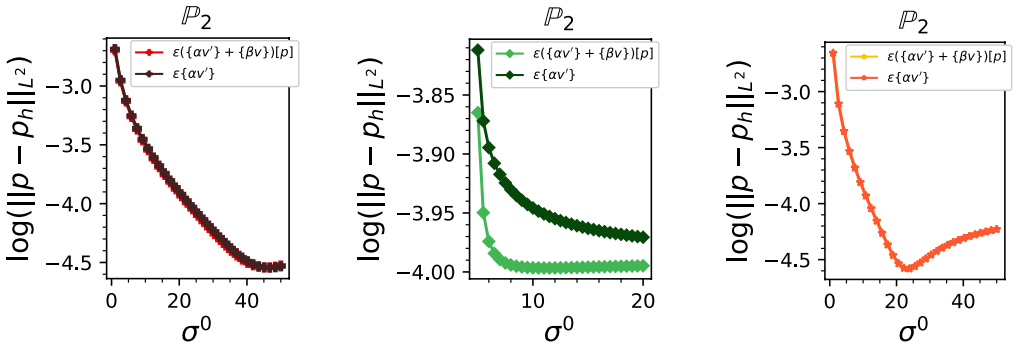


Figura 66 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos,$\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$

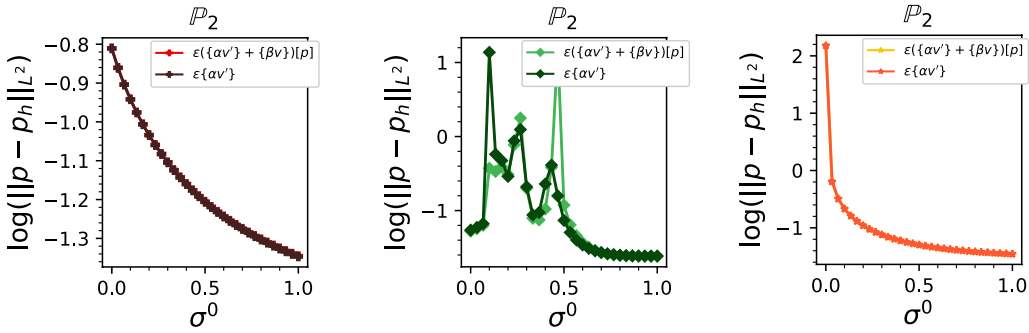


Figura 67 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) del método **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 16$ elementos, $\eta = 10$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$

En las comparaciones en las Figura 66 y Figura 67, se exploraron los efectos de diferentes formulaciones en **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** . **NIPG** mostró poca sensibilidad, **IIPG** fue indiferente a término adicional ($\epsilon = 0$). Sin embargo, **SIPG** tuvo respuestas diferentes: en Figura 66, la convergencia mejoró al eliminar término de simetría, mientras que en Figura 67, hubo convergencia fluctuante en **SIPG** , luego estabilidad en todas las formulaciones.

Dado el beneficio del término adicional simétrico en la formulación variacional, se empleará en análisis futuros, mejorando la aproximación y convergencia en métodos de elementos finitos discontinuos al abordar efectos de simetría. Para obtener resultados precisos y consistentes en el contexto de elementos finitos discontinuos, esta formulación se usará en análisis y cálculos posteriores.

La Tabla 33 recopila los valores óptimos de σ^0 utilizados en las simulaciones. Esta tabla presenta los valores que han demostrado garantizar una convergencia adecuada de los métodos DG.

		σ^0							
		$\|\cdot\|_{L^2}$				$\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$			
η	Método	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$
1	**NIPG**	3.35	45.1	0.25	100	10	50	50	10
	SIPG	3.203	11	9.59	6.06	5	20	10.083	6.06
	IIPG	2.223	23.86	0.25	100	5	50	50	10
10	**NIPG**	0.33	1	2	3	1	1	2	3
	SIPG	0.3	0.96	1.6	3	1	1	2	0.001
	IIPG	0.3	1	2	3	1	1	2	3

Tabla 33 – Valores Óptimos σ^0 encontrados para $\eta = 1$, y $\eta = 10$ según las normas $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

Influencia del parámetro σ^0

A continuación, se presentan en la Figura 68 los valores de σ^0 obtenidos en el método **NIPG** (45.1, 100 y 200) y **IIPG** (23.83, 100 y 200) al considerar los parámetros $\eta = 1$. Mientras tanto, en el método **SIPG** , el rango de variación abarca cerca de 3 unidades, con un valor óptimo de $\sigma^0 = 11$.

En paralelo, en la Figura 69 con $\eta = 10$, se identificaron los valores de σ^0 en el método **NIPG** (1, 2 y 3) y en el método **IIPG** (1, 2 y 3). En el método **SIPG** , el rango de variación abarca cerca de 0.5 unidades, con un enfoque en el valor óptimo de $\sigma^0 = 0{,}96$.

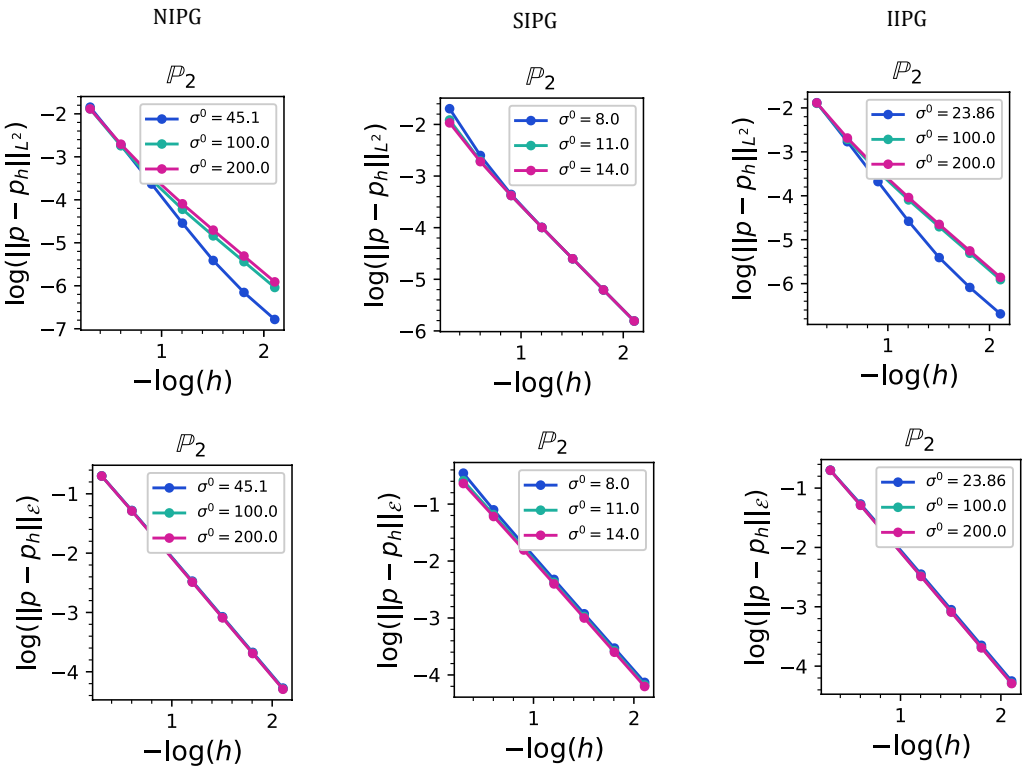


Figura 68 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

La Figura 68 mostró una mejor convergencia para NIPG cuando $\sigma^0 = 45{,}1$ y e IIPG cuando $\sigma^0 = 23{,}86$, esto sugiere que para el caso convectivo el comportamiento de estos dos metodos difiere a los casos anteriores, donde se esperaba una mejor convergencia y estabilidad cuando σ^0 sea lo suficientemente grande.

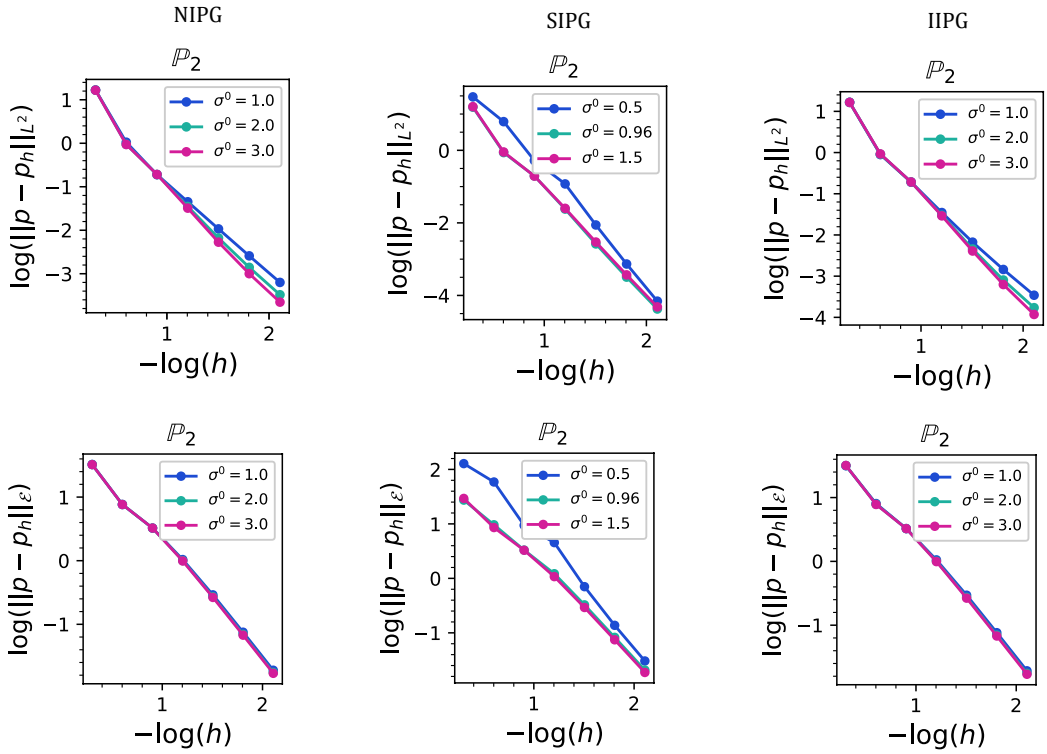


Figura 69 – Influencia del parámetro σ^0 en la precisión de aproximación (p_h) de los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con mallas uniformes de $N = 2, 4, \cdots 128$ elementos, $\eta = 10$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

En la Figura 69, se nota que el método SIPG pierde estabilidad con $\sigma^0 = 0{,}5$, pero muestra un mejor rendimiento en $\sigma^0 = 1{,}5$ y $\sigma^0 = 0{,}96$. Por otro lado, tanto NIPG como IIPG mejoran su convergencia a medida que la malla se refina, especialmente cuando σ^0 es grande. Estos resultados sugieren que en el caso específico donde $\eta = 10$, la elección del parámetro σ^0 es relevante y puede impactar en el desempeño del método.

Convergencia h - mallas uniformes

Se examinan las tasas de convergencia h de las aproximaciones obtenidas con $\mathbb{P}_l$ con $l = 1, 2$ para el DG y CG, Los resultados del análisis de convergencia h se presentan en las Figura 70 y Figura 71, correspondientes a los casos $\eta = 1$ y $\eta = 10$, respectivamente.

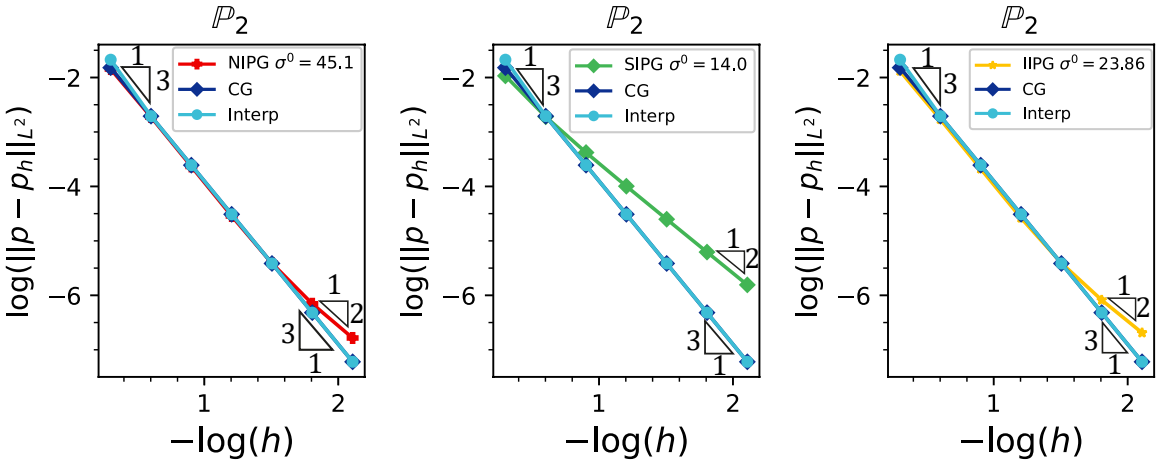


Figura 70 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 1$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

En la Figura 70, con $\eta = 1$, **NIPG** e **IIPG** muestran errores iniciales menores que aumentan con mallas más finas. En SIPG, $\sigma^0 = 14$ tiene una pequeña ventaja inicial, pero al refinar las mallas, los tres valores de σ^0 muestran comportamientos similares.

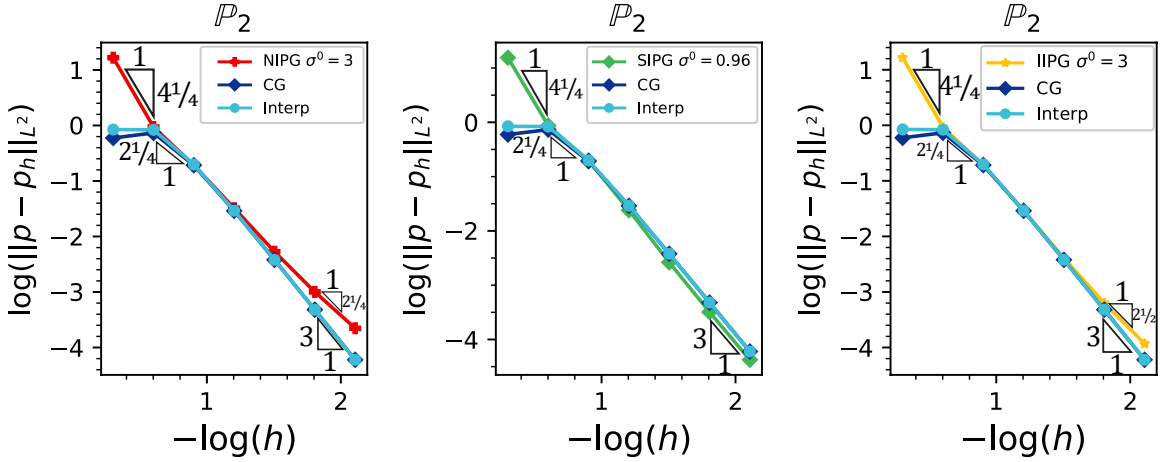


Figura 71 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 **óptimos**, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 10$ en la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

En el caso de $\eta = 10$, como se muestra en la Figura 71, el error de todos los métodos excepto del método **CG** presentaron errores grande para la primera malla usada. Los errores de las aproximaciones de los métodos **NIPG** y **IIPG** crecen a medida que la malla es refinada.

Método	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_3$			$\mathbb{P}_4$		
	i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
		$\sigma^0 = 3{,}2$			$\sigma^0 = 45{,}1$			$\sigma^0 = 200$			$\sigma^0 = 300$		
NIPG	2	2.17	0.96	-0.13	2.93	1.94	-0.84	2.15	2.33	0.65	2.12	2.09	-0.37
	3	2.09	1.00	2.64	3.02	1.97	2.65	2.02	2.12	4.67	2.02	2.02	4.64
	4	2.02	1.00	2.86	3.02	1.99	2.88	2.00	2.03	4.88	2.00	2.01	4.90
	5	2.00	1.00	2.94	2.89	1.99	2.95	2.00	2.01	4.93	2.00	2.00	5.14
	6	1.99	1.00	2.97	2.47	2.00	2.98	2.00	2.00	4.81	2.00	2.00	4.66
	7	2.00	1.00	2.99	2.09	2.00	2.99	2.00	2.00	4.01	2.00	2.00	1.49
		$\sigma^0 = 4$			$\sigma^0 = 14$			$\sigma^0 = 15$			$\sigma^0 = 10$		
SIPG	2	1.57	0.96	-1.92	2.49	1.92	-1.20	2.12	2.52	-4.38	2.11	2.02	-0.159
	3	1.90	1.03	2.73	2.18	1.96	2.59	2.03	2.09	4.80	2.02	2.04	5.09
	4	1.98	1.01	2.92	2.06	1.98	2.85	2.01	2.02	4.95	2.00	2.01	5.0422
	5	2.00	1.00	2.97	2.01	1.99	2.94	2.00	2.00	4.99	2.00	2.00	5.0195
	6	2.00	1.00	2.99	2.00	2.00	2.97	2.00	2.00	4.99	2.00	2.00	5.0198
	7	2.00	1.00	2.99	2.00	2.00	2.99	2.00	2.00	4.94	2.00	2.00	5.1276
		$\sigma^0 = 2{,}206$			$\sigma^0 = 23{,}86$			$\sigma^0 = 200$			$\sigma^0 = 300$		
IIPG	2	2.44	0.91	-0.63	2.95	1.89	-0.88	2.16	2.32	0.61	2.12	2.09	-0.37
	3	2.23	1.00	2.67	3.02	1.95	2.65	2.03	2.11	4.67	2.02	2.02	4.64
	4	2.05	1.00	2.88	3.00	1.98	2.87	2.01	2.03	4.88	2.00	2.01	4.89
	5	2.00	1.00	2.95	2.75	1.99	2.95	2.00	2.01	4.93	2.00	2.00	5.13
	6	1.99	1.00	2.97	2.26	2.00	2.98	2.00	2.00	4.82	2.00	2.00	4.70
	7	1.99	1.00	2.99	2.00	2.00	2.99	2.00	2.00	4.03	2.00	2.00	1.49

Tabla 34 – Tasa de convergencia para los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con $\eta = 1$

Método	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_3$			$\mathbb{P}_4$		
	i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
		$\sigma^0 = 0{,}33$			$\sigma^0 = 3$			$\sigma^0 = 4$			$\sigma^0 = 5$		
NIPG	2	0.35	0.11	1.04	4.15	2.08	0.45	4.49	2.13	4.69	4.34	2.27	2.29
	3	3.25	0.72	1.68	2.29	1.23	4.56	2.78	2.13	0.05	3.64	3.27	6.49
	4	2.17	0.88	2.23	2.57	1.72	-0.15	4.09	2.83	4.08	3.75	3.52	2.67
	5	2.22	1.06	2.94	2.60	1.90	2.45	3.74	2.97	4.80	2.18	2.69	4.36
	6	2.09	1.02	2.98	2.41	1.97	2.86	2.19	2.94	4.94	2.05	2.10	4.84
	7	2.03	1.01	2.99	2.17	1.99	2.96	1.93	2.79	4.98	2.01	2.01	4.96
		$\sigma^0 = 0{,}3$			$\sigma^0 = 0{,}96$			$\sigma^0 = 1{,}6$			$\sigma^0 = 3$		
SIPG	2	-0.45	-1.85	-1.02	4.16	1.50	1.41	4.49	2.13	4.69	4.53	2.13	2.72
	3	3.73	1.73	2.88	2.14	1.54	4.25	2.78	2.13	0.05	3.45	3.68	6.28
	4	1.75	0.89	1.88	3.04	1.44	0.03	4.09	2.83	4.08	3.81	3.33	2.78
	5	1.52	1.03	2.41	3.19	1.90	2.70	3.74	2.97	4.80	2.13	2.79	4.55
	6	1.83	1.08	2.82	3.04	1.98	2.92	2.19	2.94	4.94	2.00	2.16	4.89
	7	1.95	1.03	2.95	2.92	1.99	2.97	1.93	2.79	4.98	2.00	2.02	4.97
		$\sigma^0 = 0{,}3$			$\sigma^0 = 3$			$\sigma^0 = 4$			$\sigma^0 = 5$		
IIPG	2	0.18	-0.25	0.53	4.15	2.03	0.11	4.51	2.18	4.56	4.53	2.13	2.72
	3	3.32	0.71	1.93	2.26	1.26	4.51	3.07	2.14	0.12	3.45	3.68	6.28
	4	1.96	0.87	2.11	2.73	1.72	-0.12	3.96	2.82	4.06	3.81	3.33	2.78
	5	2.04	1.05	2.74	2.83	1.90	2.49	3.49	2.97	4.76	2.13	2.79	4.55
	6	2.02	1.03	2.92	2.70	1.97	2.87	2.23	2.94	4.93	2.00	2.16	4.89
	7	2.00	1.01	2.98	2.41	1.99	2.96	1.98	2.79	4.98	2.00	2.02	4.97

Tabla 35 – Tasa de convergencia para los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con $\eta = 10$

Las tablas Tabla 34 y Tabla 35 demuestran que las tasas $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}} = 2$, indica que se

ha alcanzado la convergencia de orden máximo posible para los método NIPG,SIPG IIPG segun las condiciones empleadas para la resolución del problema.

Método	η	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	1	2	2.00	1.81	2.96	3.44
		3	2.12	1.99	2.99	2.99
		4	2.54	2.00	3.00	3.00
		5	0.88	2.00	3.00	3.00
		6	-0.49	2.00	3.00	3.00
		7	-0.12	2.00	3.00	3.00

Tabla 36 – Tasa de convergencia para el método **CG** con $\eta = 1$

Método	η	$1/2^i$	$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$	
		i	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{Interp}}$
CG	10	2	-0.51	-2.34	-0.30	0.02
		3	0.23	0.35	1.93	2.08
		4	1.65	1.62	2.73	2.76
		5	1.92	1.91	2.93	2.94
		6	1.98	1.98	2.98	2.99
		7	1.89	1.99	3.00	3.00

Tabla 37 – Tasa de convergencia para el método **CG** con $\eta = 10$

Las tablas Tabla 36 y Tabla 37 presentan resultados que respaldan la obtención de convergencia óptima con un valor de $\delta_{||\cdot||_{L^2}} = 2$ en el caso de aplicación del método **CG** . Este logro destaca por ser la primera vez que se supera la convergencia obtenida por los métodos DG en este contexto.

Convergencia h - mallas no uniformes

En esta sección, se emplearán particiones no uniformes del dominio, como se muestra en la Figura 15, para evaluar el comportamiento de los métodos bajo estas condiciones y los mismos valores de penalización σ^0 obtenidos en la Tabla 33.

Los resultados experimentales se presentarán en tablas, en la Tabla 39 para $\eta = 1$ y en la Tabla 39 para $\eta = 10$. Estas tablas permitirán comparar la convergencia de los métodos DG en mallas no uniformes y analizar la influencia de la falta de uniformidad en la precisión de las aproximaciones.

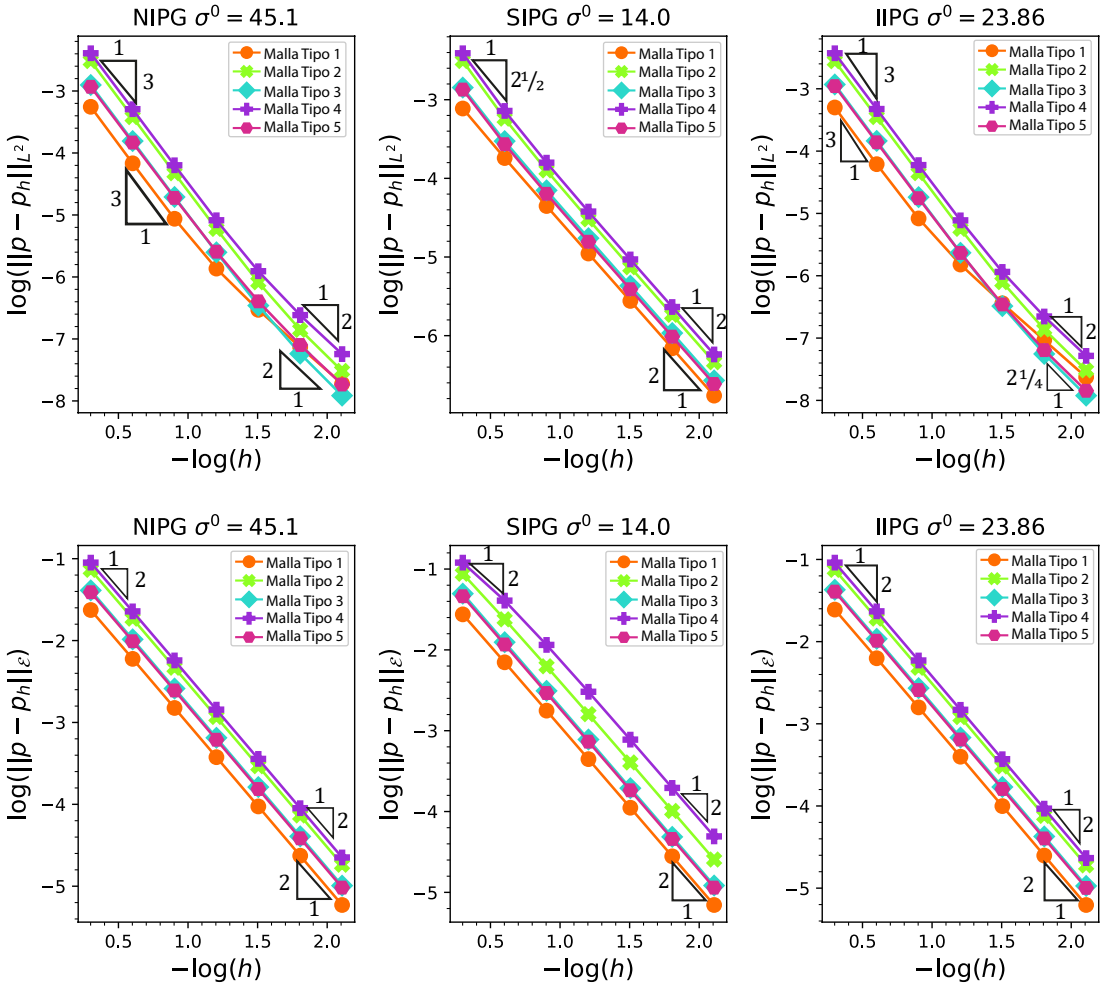


Figura 72 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{\varepsilon}$

De la Figura 72 donde $\eta = 1$ se observa tasas suboptimas en $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$ y $\delta_{\|\cdot\|_{\varepsilon}}$ para NIPG,SIPG e IIPG; se observa una mejora en las mallas de Tipo 3 (a=1/7 , b=1/2, c = 5/14) a medida que se refinan las mallas para NIPG e IIPG, incluso superando a las mallas del Tipo 1 (a=1/3, b = 1/3). Se observa que para SIPG, exhibe estabilidad en la convergencia.

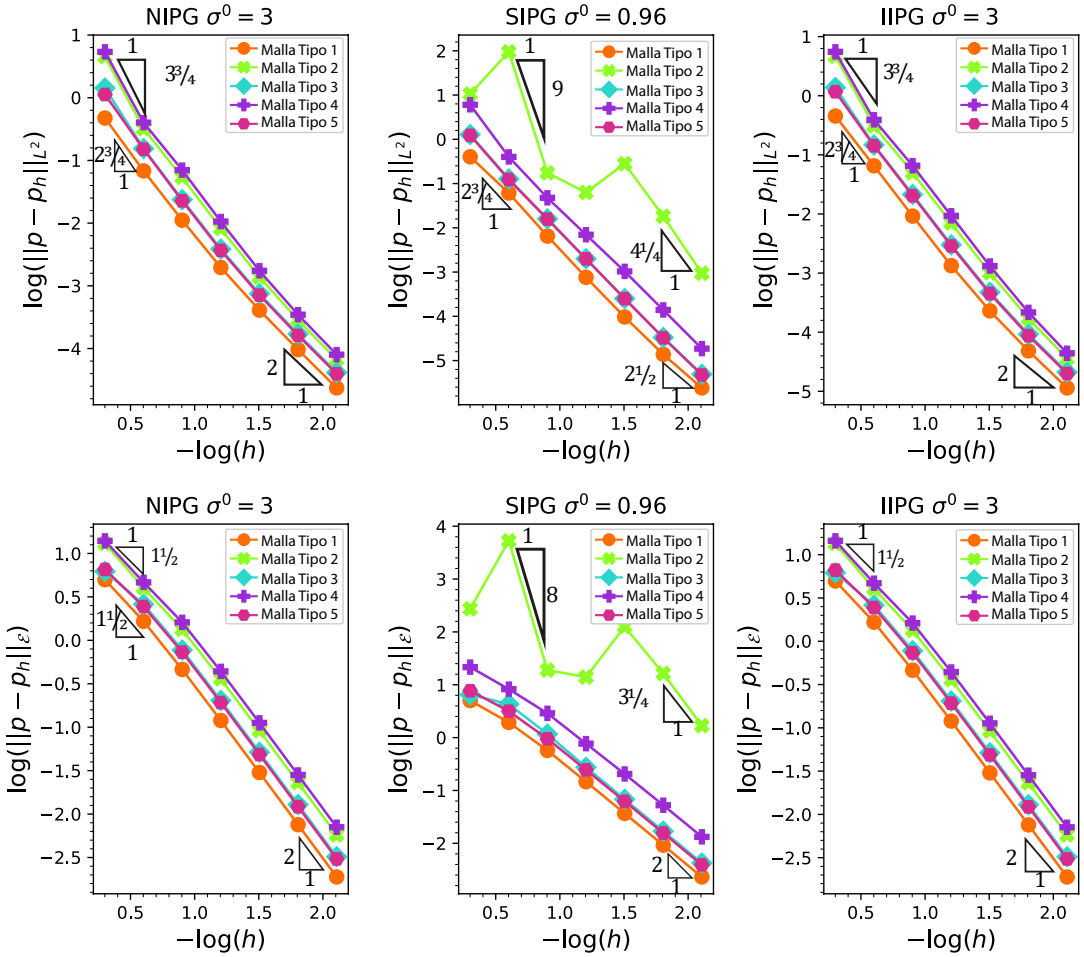


Figura 73 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para la aproximación $\mathbb{P}_2$ por partes, comparando los métodos NIPG SIPG IIPG con **mallas no uniformes** de $N = 2, \cdots, 128$ y $\eta = 10$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{\varepsilon}$

Por otro lado, de Figura 73 donde $\eta = 10$ hay una notable pérdida de la convergencia para la malla Tipo 2 (a = 1/7, b =1/5, c =23/25) del método SIPG. En general se observan tasas subóptimas para $\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$ y $\delta_{\|\cdot\|_{\varepsilon}}$.

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 3{,}35$			$\sigma^0 = 45{,}1$		
NIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	1.96	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.43	1.00	2.00	2.20	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.48	1.00	2.00	2.25	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	1.99	1.00	2.00	2.09	2.00	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.00	2.12	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 6$			$\sigma^0 = 14$		
SIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	2.00	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.00	2.00	2.00	2.00	2.99
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.00	2.00	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	2.00	2.00	1.99	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.00	2.00	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 2{,}223$			$\sigma^0 = 23{,}86$		
IIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	1.97	2.00	3.00
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.00	2.00	2.18	2.00	2.99
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.00	2.22	2.00	3.00
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	2.00	2.10	2.00	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.00	2.17	2.00	3.00

Tabla 38 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes, mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta = 1$

Método			$\mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_2$		
			$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}03$			$\sigma^0 = 3$		
NIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	3.00	2.03	2.00	2.99
	Tipo 2	1/7, 1/5	1.83	1.00	2.01	2.04	2.00	2.99
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.77	1.00	2.01	2.12	2.00	2.99
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	2.01	2.12	2.00	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	2.00	1.00	2.01	2.04	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}3$			$\sigma^0 = 0{,}96$		
SIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	1.99	1.00	2.99	2.52	2.00	2.99
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.23	1.32	2.37	2.76	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	1.99	1.03	2.10	2.91	1.99	2.99
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.05	1.02	2.02	2.91	1.99	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	1.99	1.01	2.06	2.79	2.00	3.00
$N = 32$	Mallado	a,b	$\sigma^0 = 0{,}3$			$\sigma^0 = 3$		
IIPG	Tipo 1	1/3, 1/3	2.00	1.00	2.99	2.08	2.00	2.99
	Tipo 2	1/7, 1/5	2.00	1.00	2.00	2.13	2.00	3.00
	Tipo 3	1/7, 1/2	2.00	1.00	2.01	2.30	2.00	2.99
	Tipo 4	1/7, 1/7	2.00	1.00	2.00	2.30	2.00	2.99
	Tipo 5	1/4, 1/2	1.99	1.01	2.06	2.13	2.00	3.00

Tabla 39 – Resumen de tasas de convergencia para la aproximación $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ por partes,mallas no uniformes hasta $N = 32$, $\eta = 10$

Conclusiones

En términos de robustez, el uso de $\eta = 1$ generó inestabilidad al refinar la malla, disminuyendo la precisión y confiabilidad debido a la interacción difusivo-absorción. Al emplear $\eta = 10$, se mantuvo la estabilidad en **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** , sugiriendo mejor equilibrio y menor sensibilidad a errores.

La sensibilidad de los métodos DG a σ^0 desencadena desviaciones al alcanzar un valor óptimo, afectando a **NIPG** e **IIPG** , que carecen de oscilaciones pero no cumplen expectativas en ecuaciones de difusión-absorción-advección. **SIPG** sobresale en mallas gruesas pero es menos estable en finas, mientras **NIPG** e **IIPG** mejoran con la refinación.

Los métodos mantiene tasas de convergencia en 2, lo que implica relación cuadrática entre error y tamaño de malla. La precisión depende de η eficiente con α pequeño, mientras que CG es adecuado y preciso con $\eta = 1$. Además, **SIPG** muestra rápida convergencia en orden dos, siendo eficiente en mallas gruesas; **NIPG** e **IIPG** también convergen rápido con $\eta = 10$, beneficiando recursos limitados. En cuanto a adaptabilidad de la malla, **SIPG** sufre inestabilidad con η pequeño y malla tipo 2, mientras que otros casos adaptan bien a la geometría, destacando mallas tipo 1, 3 y 5 por su estabilidad y precisión. En todos los casos los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** se muestran flexibles, (ver Figura 74 y Figura 75)

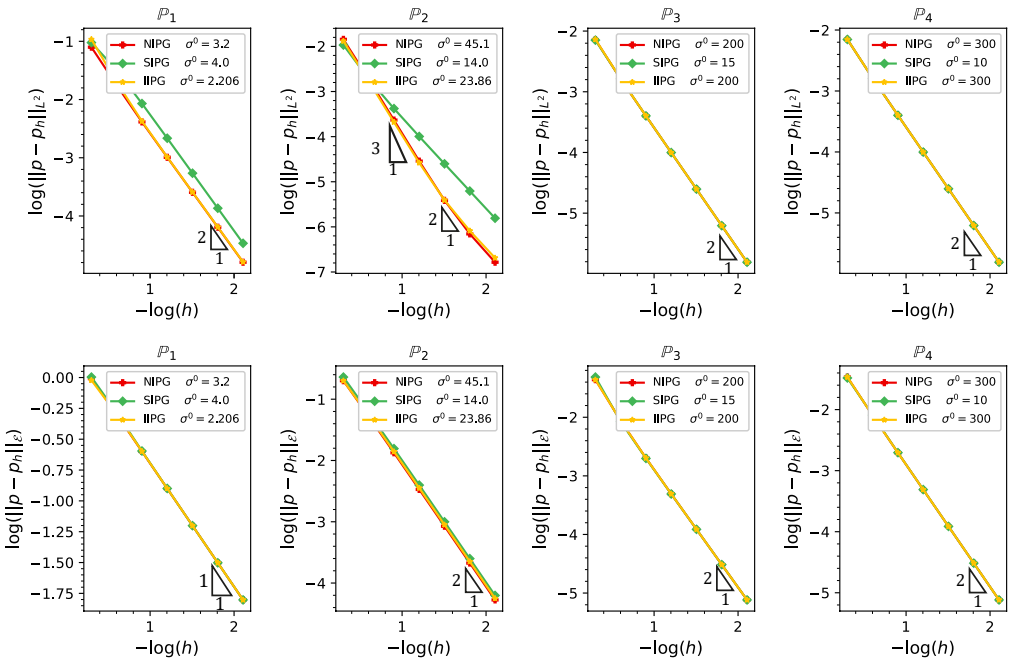


Figura 74 – Estudio de convergencia h de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$,comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 1$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

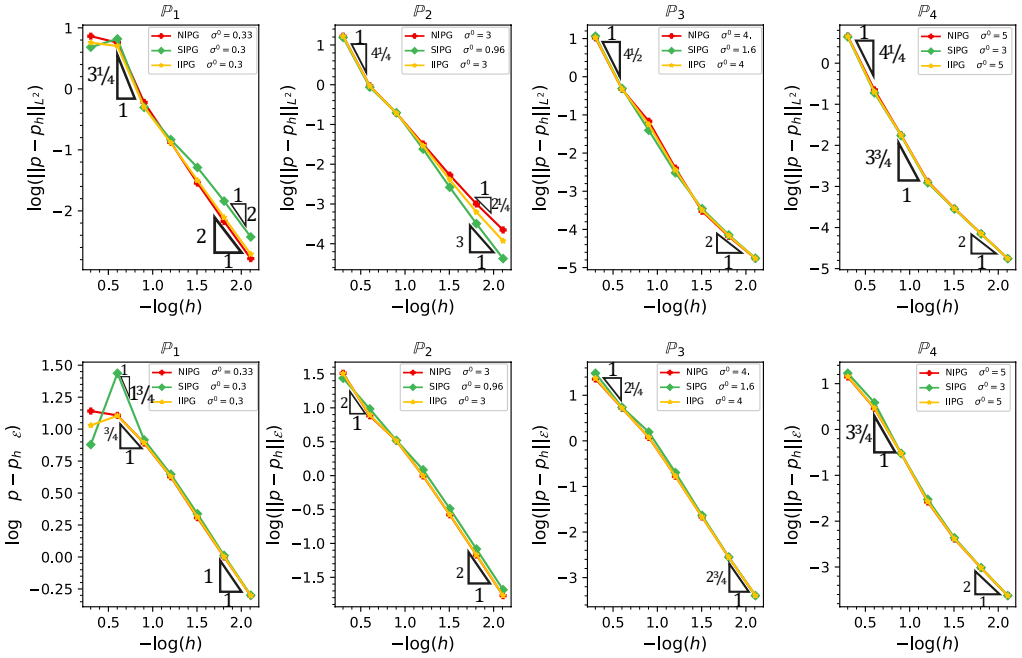


Figura 75 – Estudio de convergencia$h$ de la aproximación (p_h) para $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, comparando los métodos **NIPG** **SIPG** **IIPG** con σ^0 óptimos, mallas uniformes de $N = 2, \cdots, 64$ y $\eta^2 = 10$ en las normas $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$,

5 Aspectos computacionales

5.1. Implementación computacional

En el presente estudio, se aborda la implementación de los métodos de Galerkin Discontinuo (DG) mediante algoritmos que explotan la estructura de matrices locales para tratar eficazmente las discontinuidades inherentes a estos métodos.Se ha usado un enfoque computacional basado en la Programación Orientada a Objetos (POO) y la programación en paralelo.

El enfoque POO proporciona una organización eficiente y funcional del código, que se adapta perfectamente a las exigencias del método DG. La estructura de clases y objetos se ilustra en la Figura Figura 76, donde se representan las interconexiones y relaciones entre las distintas clases, reflejando la arquitectura subyacente de nuestro enfoque computacional.

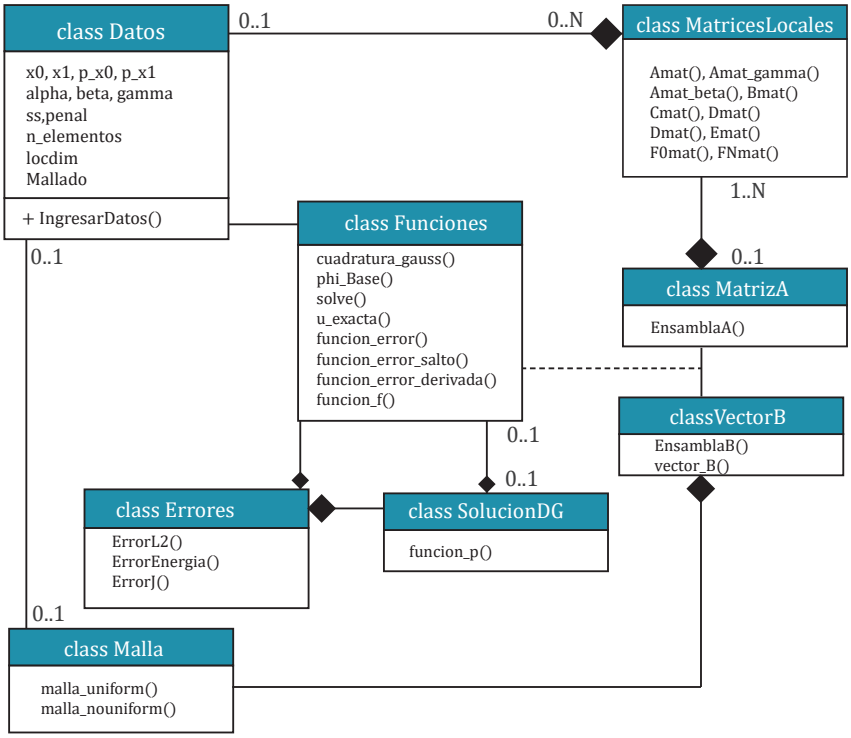


Figura 76 – Diagrama de Clases de los métodos DG: Representación formal de las relaciones y estructuras de clases que componen los métodos DG, utilizado para resolver problemas con características discontinuas.

La programación en paralelo permite la ejecución simultánea de procesos, es decir

distribuir el trabajo de cálculo en múltiples procesadores o núcleos de un sistema, lo que se traduce en una mejora significativa del rendimiento en comparación con los enfoques de programación secuencial tradicionales. En particular, el enfoque paralelo adoptado en este estudio se basa en la descomposición de la malla en subdominios, cada uno de los cuales se resuelve de forma independiente. Esta descomposición se realiza de forma automática por el código, lo que facilita su implementación y mantenimiento, se ilustra en Figura 77, Los resultados de las simulaciones realizadas muestran que el enfoque paralelo propuesto ofrece mejoras notables en la eficiencia y el rendimiento, especialmente en contextos donde la carga de cálculo es significativa.

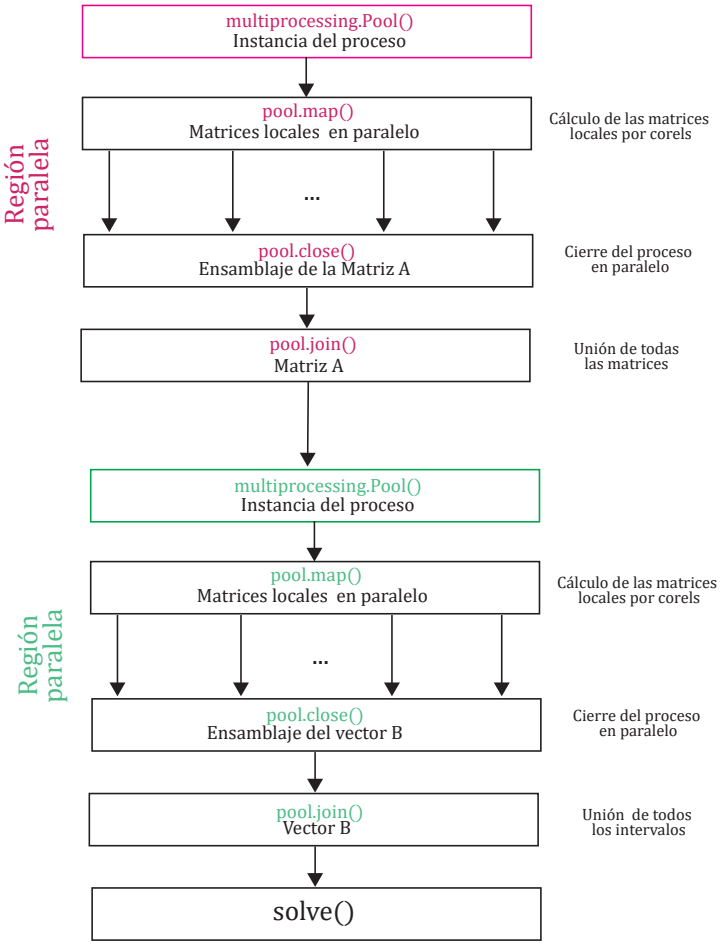


Figura 77 – Proceso en Paralelo del cálculo de los parámetros de la solución DG

Especificaciones del Sistema y Medición de Rendimiento

Los códigos ejecutados se realizaron en una máquina con especificaciones de un procesador *Core i9* de 2.80 GHz, sistema operativo de 64 bits y 32 GB de RAM. Los resultados se obtuvieron a través del promedio aritmético de cinco ejecuciones sucesivas para cada método.

Estas mediciones fueron dadas por el comando de tiempo *time(), time.monotonic(), time.perf_counter()* y *process_time()* del módulo *time* de Python. La comparación de tiempo está asociada a los siguientes parámetros:

- *dof* : simboliza el número de grados de libertad globales.
- *process_time()* devuelve la suma del tiempo de arranque de sistema y el tiempo de CPU del usuario del programa.
- *perf_counter()* devuelve el tiempo total del sistema, incluyendo el tiempo de inactividad, puede verse afectada por otros programas en ejecución en segundo plano.
- *time()* devuelve el tiempo real entre la llamada y el final del comando.
- *monotonic()* devuelve tiempos basados en un reloj no retrógrado, esencial para medir duraciones precisas en procesos extensos.

5.2. Costo Computacional

En esta sección, se realiza una comparativa entre el tiempo requerido para obtener soluciones aproximadas utilizando métodos DG y el método CG, considerando particiones de $N = 2, 16, 256$ elementos, utilizando polinomios de grado $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$. Se ha observado que los resultados muestran una clara influencia del número de multiplicadores y de si el método es continuo o discontinuo en el número de grados de libertad del problema. Esto, a su vez, afecta la forma en que se ensambla el sistema global y el ancho de banda de la matriz de rigidez, lo cual tiene un impacto directo en el tiempo de ejecución del programa.

Ecuación	grado l	$N = 2^i$ i	*dof*	CG process_time()	CG perf_counter()	CG time()	CG monotonic()
Difusión	$\mathbb{P}_1$	2	5	0 min 01.65 s	0 min 01.73 s	0 min 01.73 s	0 min 01.73 s
		4	17	0 min 07.04 s	0 min 07.15 s	0 min 07.15 s	0 min 07.15 s
		8	257	1 min 57.36 s	1 min 56.08 s	1 min 56.07 s	1 min 56.08 s
	$\mathbb{P}_2$	2	9	0 min 09.47 s	0 min 09.57 s	0 min 09.57 s	0 min 09.57 s
		4	33	0 min 50.80 s	0 min 50.93 s	0 min 50.93 s	0 min 50.92 s
		8	513	7 min 16.77 s	7 min 18.47 s	7 min 18.47 s	7 min 18.48 s
Difusión-Absorción	$\mathbb{P}_1$	2	5	0 min 01.69 s	0 min 01.75 s	0 min 01.75 s	0 min 01.76 s
		4	17	0 min 06.92 s	0 min 06.93 s	0 min 06.93 s	0 min 06.93 s
		8	257	1 min 58.81 s	1 min 57.52 s	1 min 57.52 s	1 min 57.52 s
	$\mathbb{P}_2$	2	9	0 min 25.11 s	0 min 25.19 s	0 min 25.19 s	0 min 25.20 s
		4	33	2 min 17.03 s	2 min 17.47 s	2 min 17.48 s	2 min 17.47 s
		8	513	9 min 36.00 s	9 min 48.45 s	9 min 48.44 s	9 min 48.44 s
Difusión-Advección	$\mathbb{P}_1$	2	5	0 min 01.65 s	0 min 01.73 s	0 min 01.73 s	0 min 01.73 s
		4	17	0 min 07.04 s	0 min 07.15 s	0 min 07.15 s	0 min 07.15 s
		8	257	1 min 57.36 s	1 min 56.08 s	1 min 56.07 s	1 min 56.08 s
	$\mathbb{P}_2$	2	9	0 min 09.47 s	0 min 09.57 s	0 min 09.57 s	0 min 09.57 s
		4	33	0 min 50.80 s	0 min 50.93 s	0 min 50.93 s	0 min 50.92 s
		8	513	7 min 16.77 s	7 min 18.47 s	7 min 18.47 s	7 min 18.48 s
Difusión-Absorción-Advección	$\mathbb{P}_1$	2	5	0 min 01.76 s	0 min 01.78 s	0 min 01.79 s	0 min 01.79 s
		4	17	0 min 07.80 s	0 min 07.88 s	0 min 07.88 s	0 min 07.88 s
		8	257	2 min 20.53 s	2 min 19.16 s	2 min 19.15 s	2 min 19.14 s
	$\mathbb{P}_2$	2	9	1 min 32.07 s	1 min 32.28 s	1 min 32.28 s	1 min 32.28 s
		4	33	8 min 28.65 s	8 min 31.97 s	8 min 31.98 s	8 min 31.98 s
		8	513	8 min 07.34 s	8 min 40.79 s	8 min 40.79 s	8 min 40.80 s

Tabla 40 – Tiempo de ejecución de los métodos **CG** del tipo $\mathbb{P}_1$. $\mathbb{P}_2$.

Ecuación	grado l	$N = 2^i$ i	*dof*	NIPG process_time()	NIPG perf_counter()	NIPG time()	NIPG monotonic()
Difusión	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.95 s	0 min 01.17 s	0 min 01.17 s	0 min 01.17 s
		4	32	0 min 04.13 s	0 min 04.45 s	0 min 04.45 s	0 min 04.45 s
		8	512	1 min 11.98 s	1 min 13.75 s	1 min 13.75 s	1 min 13.75 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.59 s	0 min 02.19 s	0 min 02.19 s	0 min 02.20 s
		4	48	0 min 06.64 s	0 min 07.52 s	0 min 07.52 s	0 min 07.52 s
		8	768	1 min 45.81 s	1 min 47.89 s	1 min 47.88 s	1 min 47.89 s
Difusión-Absorción	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.84 s	0 min 01.03 s	0 min 01.03 s	0 min 01.03 s
		4	32	0 min 05.80 s	0 min 06.04 s	0 min 06.04 s	0 min 06.03 s
		8	512	1 min 11.28 s	1 min 12.40 s	1 min 12.40 s	1 min 12.41 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.44 s	0 min 01.76 s	0 min 01.76 s	0 min 01.75 s
		4	48	0 min 06.39 s	0 min 07.21 s	0 min 07.21 s	0 min 07.20 s
		8	768	1 min 47.95 s	1 min 52.06 s	1 min 52.06 s	1 min 52.06 s
Difusión-Advección	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.95 s	0 min 01.17 s	0 min 01.17 s	0 min 01.17 s
		4	32	0 min 04.13 s	0 min 04.45 s	0 min 04.45 s	0 min 04.45 s
		8	512	1 min 11.98 s	1 min 13.75 s	1 min 13.75 s	1 min 13.75 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.59 s	0 min 02.19 s	0 min 02.19 s	0 min 02.20 s
		4	48	0 min 06.64 s	0 min 07.52 s	0 min 07.52 s	0 min 07.52 s
		8	768	1 min 45.81 s	1 min 47.89 s	1 min 47.88 s	1 min 47.89 s
Difusión-Absorción-Advección	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.78 s	0 min 00.91 s	0 min 00.92 s	0 min 00.92 s
		4	32	0 min 03.97 s	0 min 04.03 s	0 min 04.03 s	0 min 04.03 s
		8	512	1 min 10.36 s	1 min 09.08 s	1 min 09.08 s	1 min 09.08 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.97 s	0 min 02.09 s	0 min 02.09 s	0 min 02.09 s
		4	48	0 min 05.97 s	0 min 06.07 s	0 min 06.07 s	0 min 06.06 s
		8	768	1 min 49.67 s	1 min 53.79 s	1 min 53.79 s	1 min 53.80 s

Tabla 41 – Tiempo de ejecución de los métodos **NIPG** del tipo $\mathbb{P}_1$. $\mathbb{P}_2$.

Ecuación	grado l	$N=2^i$ i	dof	SIPG process_time()	SIPG perf_counter()	SIPG time()	SIPG monotonic()
Difusión	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.86 s	0 min 00.99 s	0 min 00.99 s	0 min 00.99 s
		4	32	0 min 04.09 s	0 min 04.39 s	0 min 04.39 s	0 min 04.39 s
		8	512	1 min 08.02 s	1 min 09.30 s	1 min 09.30 s	1 min 09.30 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.33 s	0 min 01.48 s	0 min 01.48 s	0 min 01.47 s
		4	48	0 min 05.98 s	0 min 06.31 s	0 min 06.31 s	0 min 06.31 s
		8	768	1 min 42.70 s	1 min 43.12 s	1 min 43.12 s	1 min 43.13 s
Difusión-Absorción	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.94 s	0 min 01.05 s	0 min 01.05 s	0 min 01.05 s
		4	32	0 min 03.97 s	0 min 04.21 s	0 min 04.21 s	0 min 04.22 s
		8	512	1 min 05.78 s	1 min 07.77 s	1 min 07.78 s	1 min 07.77 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.39 s	0 min 01.61 s	0 min 01.61 s	0 min 01.61 s
		4	48	0 min 06.30 s	0 min 06.64 s	0 min 06.64 s	0 min 06.64 s
		8	768	1 min 41.70 s	1 min 46.71 s	1 min 46.71 s	1 min 46.72 s
Difusión-Advección	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.86 s	0 min 00.99 s	0 min 00.99 s	0 min 00.99 s
		4	32	0 min 04.09 s	0 min 04.39 s	0 min 04.39 s	0 min 04.39 s
		8	512	1 min 08.02 s	1 min 09.30 s	1 min 09.30 s	1 min 09.30 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.33 s	0 min 01.48 s	0 min 01.48 s	0 min 01.47 s
		4	48	0 min 05.98 s	0 min 06.31 s	0 min 06.31 s	0 min 06.31 s
		8	768	1 min 42.70 s	1 min 43.12 s	1 min 43.12 s	1 min 43.13 s
Difusión-Absorción-Advección	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.83 s	0 min 00.90 s	0 min 00.90 s	0 min 00.91 s
		4	32	0 min 03.81 s	0 min 04.00 s	0 min 04.00 s	0 min 03.98 s
		8	512	1 min 07.73 s	1 min 07.90 s	1 min 07.91 s	1 min 07.91 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.28 s	0 min 01.39 s	0 min 01.39 s	0 min 01.39 s
		4	48	0 min 06.13 s	0 min 06.21 s	0 min 06.21 s	0 min 06.22 s
		8	768	1 min 45.33 s	1 min 49.02 s	1 min 49.02 s	1 min 49.02 s

Tabla 42 – Tiempo de ejecución de los métodos **SIPG** del tipo $\mathbb{P}_1$. $\mathbb{P}_2$.

Ecuación	grado l	$N=2^i$ i	dof	IIPG process_time()	IIPG perf_counter()	IIPG time()	IIPG monotonic()
Difusión	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.89 s	0 min 00.98 s	0 min 00.98 s	0 min 00.98 s
		4	32	0 min 04.14 s	0 min 04.38 s	0 min 04.38 s	0 min 04.38 s
		8	512	1 min 09.17 s	1 min 10.15 s	1 min 10.15 s	1 min 10.16 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.39 s	0 min 01.51 s	0 min 01.51 s	0 min 01.52 s
		4	48	0 min 06.25 s	0 min 06.54 s	0 min 06.54 s	0 min 06.53 s
		8	768	1 min 43.58 s	1 min 47.26 s	1 min 47.25 s	1 min 46.65 s
Difusión-Absorción	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.80 s	0 min 00.97 s	0 min 00.97 s	0 min 00.97 s
		4	32	0 min 04.09 s	0 min 04.25 s	0 min 04.25 s	0 min 04.25 s
		8	512	1 min 07.95 s	1 min 09.11 s	1 min 09.11 s	1 min 09.11 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.39 s	0 min 01.51 s	0 min 01.51 s	0 min 01.52 s
		4	48	0 min 06.38 s	0 min 06.97 s	0 min 06.97 s	0 min 06.97 s
		8	768	1 min 44.52 s	1 min 47.67 s	1 min 47.67 s	1 min 47.66 s
Difusión-Advección	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.89 s	0 min 00.98 s	0 min 00.98 s	0 min 00.98 s
		4	32	0 min 04.14 s	0 min 04.38 s	0 min 04.38 s	0 min 04.38 s
		8	512	1 min 09.17 s	1 min 10.15 s	1 min 10.15 s	1 min 10.16 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.39 s	0 min 01.51 s	0 min 01.51 s	0 min 01.52 s
		4	48	0 min 06.25 s	0 min 06.54 s	0 min 06.54 s	0 min 06.53 s
		8	768	1 min 43.58 s	1 min 47.26 s	1 min 47.25 s	1 min 46.65 s
Difusión-Absorción-Advección	$\mathbb{P}_1$	2	8	0 min 00.77 s	0 min 00.99 s	0 min 00.99 s	0 min 00.98 s
		4	32	0 min 03.94 s	0 min 03.98 s	0 min 03.98 s	0 min 03.98 s
		8	512	1 min 08.55 s	1 min 08.02 s	1 min 08.01 s	1 min 08.02 s
	$\mathbb{P}_2$	2	12	0 min 01.20 s	0 min 01.40 s	0 min 01.40 s	0 min 01.39 s
		4	48	0 min 05.81 s	0 min 05.92 s	0 min 05.92 s	0 min 05.92 s
		8	768	1 min 43.08 s	1 min 42.19 s	1 min 42.19 s	1 min 42.19 s

Tabla 43 – Tiempo de ejecución de los métodos **IIPG** del tipo $\mathbb{P}_1$. $\mathbb{P}_2$.

De Tabla 40-Tabla 42 se observa que el método de menor costo computacional es el **SIPG** , seguido por el **NIPG** y finalmente el **IIPG** . Esta diferencia se debe a que el método **IIPG** tiene una mayor cantidad de ceros en las matrices locales cuando el parámetro de estabilización ϵ se establece en cero. Por otro lado, en el método **SIPG** , se anulan algunos términos debido a la simetría de la formulación.

Además, se observa que los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** son aproximadamente 8 veces más rápidos que el método **CG** cuando se utiliza el grado de polinomio $\mathbb{P}_2$.

5.3. Comparativa Temporal en Métodos DG: Paralelo vs. Secuencial

Además, se lleva a cabo un estudio de medición temporal en métodos DG con código paralelo y secuencial, considerando particiones de $N = 2, 16, 256$ elementos, utilizando polinomios de grado $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$.

Ecuación	grado l	$N = 2^i$ i	dof	NIPG *Secuencial*	NIPG *Paralelo*	SIPG *Secuencial*	SIPG *Paralelo*	IIPG *Secuencial*	IIPG *Paralelo*
Difusión	$\mathbb{P}_1$	7	256	0.278 s	7.797 s	0.266 s	7.597 s	0.313 s	7.322 s
		8	512	2.069 s	7.891 s	2.019 s	7.715 s	1.987 s	8.1 s
		9	1024	19.659 s	7.859 s	19.985 s	8.109 s	18.947 s	8.094 s
	$\mathbb{P}_2$	7	384	0.278 s	7.797 s	0.266 s	7.597 s	0.313 s	7.322 s
		8	768	5.137 s	7.525 s	4.778 s	8.956 s	4.975 s	8.85 s
		9	1536	43.741 s	7.781 s	43.082 s	8.847 s	44.006 s	8.782 s
Difusión-Absorción	$\mathbb{P}_1$	7	256	0.278 s	7.184 s	0.244 s	7.231 s	0.266 s	7.116 s
		8	512	2.122 s	7.325 s	1.969 s	7.562 s	1.913 s	7.21 s
		9	1024	19.457 s	7.71 s	19.172 s	7.716 s	19.163 s	8.153 s
	$\mathbb{P}_2$	7	384	0.616 s	7.641 s	0.641 s	8.8 s	0.678 s	8.581 s
		8	768	5.794 s	7.434 s	5.175 s	8.656 s	5.116 s	8.644 s
		9	1536	43.606 s	7.841 s	42.959 s	9.069 s	43.1 s	8.431 s
Difusión-Advección	$\mathbb{P}_1$	7	256	0.244 s	7.875 s	0.262 s	8.213 s	0.269 s	7.632 s
		8	512	2.35 s	7.45 s	1.984 s	7.678 s	2.013 s	7.175 s
		9	1024	21.822 s	7.594 s	20.738 s	7.394 s	20.238 s	7.387 s
	$\mathbb{P}_2$	7	384	0.54 s	7.719 s	0.613 s	8.95 s	0.687 s	9.025 s
		8	768	5.49 s	8.963 s	5.671 s	8.828 s	4.962 s	8.684 s
		9	1536	47.841 s	9.269 s	47.944 s	9.013 s	46.697 s	9.113 s
Difusión-Absorción-Advección	$\mathbb{P}_1$	7	256	0.294 s	7.509 s	0.234 s	7.369 s	0.287 s	7.431 s
		8	512	2.688 s	7.434 s	3.197 s	7.378 s	2.453 s	7.397 s
		9	1024	18.422 s	7.616 s	17.472 s	7.469 s	16.975 s	7.472 s
	$\mathbb{P}_2$	7	384	0.772 s	9.047 s	0.638 s	9.038 s	0.647 s	8.631 s
		8	768	4.916 s	8.894 s	4.709 s	9.2 s	4.625 s	8.719 s
		9	1536	39.584 s	8.925 s	38.409 s	9.147 s	38.419 s	8.894 s

Tabla 44 – Comparación de tiempos de ejecución medidos en programación tradicional y paralela con la función *time.monotonic()* de los métodos NIPG, SIPG,IIPG del tipo $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$.

Al analizar los resultados presentados en la Tabla 44, se puede observar que en los problemas de Difusión, Difusión-Absorción y Difusión-Advección, la implementación de programación en paralelo mantiene un tiempo de ejecución constante, aproximadamente entre 7.7 y 7.8 segundos, independientemente del tamaño de la malla utilizada, en el rango de $N = 128$ a $N = 512$. En contraste, para la programación secuencial, se observa un aumento significativo en el tiempo de ejecución, con una diferencia de aproximadamente 20 segundos.

Para mallas de tamaño $N = 2^7$ o menor, la programación paralela tarda más que la secuencial debido al tiempo de activación de procesadores y al manejo de memoria, haciendo preferible la programación secuencial en mallas gruesas.

6 Conclusiones

El enfoque presentado en esta tesis consiste en el estudio de los aspectos teóricos y computacionales de los métodos Galerkin discontinuos y el desarrollo de los métodos **CG** discontinuos. Adoptamos las condiciones de Dirichlet y orientamos este estudio. Los cuales toman un rol fundamental en la aproximación de los problemas de difusión-absorción-advección.

Además de lo presentado aquí, hemos también estudiado el comportamiento de las soluciones con monomios $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_3$ y $\mathbb{P}_4$. También hemos estudiado el comportamiento de las soluciones aproximadas para diferentes mallas no uniformes.

Se contrastan los resultados obtenidos con estudios previos, como el realizado por Rivière (Rivière, 2008), como se observa en la tabla Tabla 45 para resaltar la importancia de la búsqueda del valor óptimo de σ^0 como una mejora en la precisión de los resultados. Además se destaca que los métodos NIPG e IIPG, por su rápida convergencia incluso con valores de penalización pequeños, es decir, los hacen más flexibles. En Sección 4.1 se ha logrado observar que, a diferencia de los hallazgos presentados por (Guzmán & Rivière, 2009), los métodos discontinuos de Galerkin aplicados en mallas no uniformes pueden alcanzar órdenes de convergencia $O(h^{l+1})$ en la norma L^2. En contraste, se ha demostrado en este estudio una convergencia de orden $O(h^{l+1})$ en la norma L^2 posterior a la búsqueda del valor óptimo de σ^0. Cabe mencionar que existe la posibilidad que estos convergan a un orden $O(h^l)$ pero las condiciones para que esto suceda deberán ser mallas muy refinadas.

En la comparativa de tasas de convergencia entre los métodos DG y los métodos **CG** en contextos de difusión, absorción y advección, se ha evidenciado que el método de Galerkin discontinuo de orden l alcanza una tasa de convergencia superior, de orden $l+1$ en la norma L^2, para problemas de difusión unidimensional con coeficientes constantes y condiciones de frontera homogéneas. Esta superioridad en la tasa de convergencia se mantiene en problemas más complejos de difusión-advección, donde los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** muestran estabilidad con $\eta = 1$, pero el método **SIPG** experimenta una pérdida de estabilidad con $\eta = 100$ en mallas gruesas, recuperándola al refinar la malla. Este comportamiento contrasta con la menor sensibilidad a variaciones paramétricas observada en los Métodos **CG** , destacando la eficacia y adaptabilidad de los métodos DG en una variedad más amplia de escenarios numéricos. Estos hallazgos resaltan la importancia de seleccionar cuidadosamente el método y los parámetros en función de las características específicas del problema a resolver. A continuación se presentan la Tabla 45, Tabla 46 que ilustran las tasas de convergencia del método DG primales, comparando los resultados obtenidos para mallas uniformes y no uniformes respectivamente.

Método	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
NIPG	l si l par $l+1$ si l impar	l	$l+1$ si l par $l+2$ si l impar
SIPG	$l+1$	l	$l+1$ si l par $l+2$ si l impar
IIPG	l si l par $l+1$ si l impar	l	$l+1$ si l par $l+2$ si l impar

Tabla 45 – Tasas de convergencia del método DG primales para mallas uniformes

Método	$\delta_{\|\cdot\|_{L^2}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}}$	$\delta_{\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}$
NIPG	l	l	$l+1$
SIPG	$l+1$	l	$l+1$
IIPG	l	l	$l+1$

Tabla 46 – Tasas de convergencia del método DG primales para mallas no uniformes

El método **SIPG** se ha destacado en problemas de difusión-absorción-advección por su robustez y eficiencia, especialmente en geometrías complejas. Por su parte, **NIPG** e **IIPG** muestran alta precisión y estabilidad, con **NIPG** siendo fácil de implementar debido a las matrices locales simplificadas. Los métodos DG, en comparación con los métodos **CG** , ofrecen mayor precisión, estabilidad y flexibilidad, haciéndolos valiosos para manejar condiciones de contorno complejas y discontinuidades en el dominio del problema. Del análisis numérico realizado demostró la estabilidad y convergencia de los métodos. Se ha observado que soluciones inestables se obtienen cuando los valores de penalización caen por debajo de un umbral crítico o cota mínima, como se ha estudiado en la sección de análisis de coercividad. Además mostramos que la elección del parámetro σ^0 está dependiendo de la coercividad de la forma bilineal $\mathcal{A}_\epsilon$. Y se verificó computacionalmente las ventajas en términos de precisión y estabilidad en comparación con los métodos **CG** , sobre todo en funciones de estructura complejas como concavidades. Respecto al desarrollo de una metodología para identificar el parámetro de estabilización óptimo en los métodos DG, se ha observado que la elección adecuada del parámetro de penalización es necesaria para evitar inestabilidades, especialmente en problemas de difusión con mallas finas. El análisis detallado ha revelado que los valores bajos de penalización pueden conducir a soluciones inestables, mientras que el uso de valores moderados, como $\eta = 10$, tiende a mejorar la estabilidad y la precisión en los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** . Además, se ha detectado una sensibilidad significativa a las variaciones de σ^0 en las ecuaciones de difusión-absorción-advección, afectando particularmente a **NIPG** e **IIPG** en términos de oscilaciones y cumplimiento de expectativas. Estos hallazgos resaltan la importancia de una selección cuidadosa y ajustada de parámetros para optimizar el rendimiento y la precisión en la aplicación de los métodos DG.

Respecto a la evaluación de la robustez y fiabilidad de los métodos DG, se ha encontrado que los métodos son inherentemente robustos en escenarios de difusión, demostrando estabilidad bajo variaciones de discretización y tipos de malla. Esta robustez se extiende a la ecuación de Difusión-Absorción, donde se mantiene la estabilidad para valores pequeños de η, independientemente del tipo de malla utilizada. En contraste, para la ecuación de Difusión-Advección, se observa que la estabilidad se compromete al utilizar valores altos de η en mallas gruesas, mientras que en el caso de la ecuación de Difusión-Absorción-Advección, la inestabilidad surge al refinar la malla con $\eta = 1$. La sensibilidad de los métodos a la simetrización también ha sido una consideración importante, especialmente en el método **NIPG** , lo que subraya la importancia de adaptar la simetrización a las particularidades del problema. Además, se ha notado que la elección del flujo numérico en el caso que involucra un término de advección, juega un papel significativo, ya qye estos influyeron en los resultados y mejorar la solución aproximada.

La implementación de los métodos DG con Python ha resultado ser beneficiosa debido a su versatilidad y capacidades técnicas avanzadas. La disponibilidad de bibliotecas matemáticas simbólicas en Python, sumada a su capacidad para la Programación Orientada a Objetos (POO), ha facilitado una implementación flexible y eficiente. Estas ventajas han permitido alcanzar una precisión y confiabilidad superiores en la implementación y evaluación de los métodos, sobrepasando las capacidades de Maple. La adaptabilidad de Python para integrar librerías especializadas ha sido esencial para mejorar la precisión y fiabilidad de los resultados obtenidos.

Los resultados en el ámbito computacional señalan que la programación en paralelo mantiene tiempos de ejecución constantes y eficientes en problemas de Difusión, Difusión-Absorción y Difusión-Advección, en contraste con la programación secuencial. Los métodos **NIPG** , **SIPG** e **IIPG** son rápidos en el cálculo, siendo aproximadamente ocho veces más rápidos que el método **CG** con polinomios de grado $\mathbb{P}_2$. La ventaja de la implementación paralela se intensifica con el refinamiento de las mallas, logrando reducciones significativas en el tiempo de ejecución. No obstante, para mallas más gruesas, la programación secuencial puede mostrar ocasionalmente mayor eficiencia, debido a la activación de procesadores y la gestión de memoria en implementaciones paralelas. En cuanto al aspecto computacional, el método **SIPG** se ha destacado como el más eficiente en términos de costos, seguido por **NIPG** e **IIPG** , debido a las características particulares de sus matrices locales. La matriz del método **IIPG** presenta una alta proporción de ceros cuando el parámetro de estabilización ϵ es cero, mientras que el **SIPG** optimiza algunos términos gracias a su formulación simétrica. Esta eficiencia en el uso de recursos, que abarca tanto el tiempo como la memoria, se logra sin sacrificar la calidad de la solución. Las ventajas de la programación en paralelo, unidas a las propiedades únicas de las matrices locales de cada método DG, han permitido implementaciones hasta ocho veces más rápidas que el método **CG** , demostrando así la eficacia y adaptabilidad de estos métodos en la resolución de

problemas de Galerkin Discontinuo.

El análisis numérico de la norma de la energía realizado demostró la estabilidad y convergencia de los métodos. Se ha observado que soluciones inestables se obtienen cuando los valores de penalización caen por debajo de un umbral crítico o cota mínima, como se ha estudiado en la sección de análisis de coercividad. Además mostramos que la elección del parámetro σ^0 está dependiendo de la coercividad de la forma bilineal $\mathcal{A}_\epsilon$. Y se verificó computacionalmente las ventajas en términos de precisión y estabilidad en comparación con los métodos **CG** , sobre todo en funciones de estructura complejas como concavidades.

Bibliografía

Arnold, D., Brezzi, F., Cockburn, B., & Marini, D. (2000, enero). Discontinuous Galerkin Methods. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_5

Arnold, D., & Douglas, N. (1982). An Interior Penalty Finite Element Method with Discontinuous Elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *19*. https://doi.org/10.1137/0719052

Arnold, N. D., Brezzi, F., Cockburn, B., & Marini, L. D. (2002). Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems [Publisher: Society for Industrial and Applied Mathematics]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *39*(5), 1749-1779. https://doi.org/10.1137/S0036142901384162

Atkins, H. L. (2000). Steps Toward a Robust High-Order Simulation Tool for Aerospace Applications. En B. Cockburn, G. E. Karniadakis & C.-W. Shu (Eds.), *Discontinuous Galerkin Methods* (pp. 53-61). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_2

Axler, S. (2020). *Measure, Integration & Real Analysis* (Vol. 282). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33143-6

Bassi, F., & Rebay, S. (2000). A High Order Discontinuous Galerkin Method for Compressible Turbulent Flows. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, *11*. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_4

Brezis, H. (2010, noviembre). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* [Google-Books-ID: GAA2XqOIIGoC]. Springer Science & Business Media.

Charalambides, C. A. (2002, mayo). *Enumerative Combinatorics*. CRC Press.

Charles G. Hill, J., & Root, T. W. (1977). *Introduction to Chemical Engineering Kinetics and Reactor Design*. John Wiley Sons, Inc.

Dawson, C., Sun, S., & Wheeler, M. F. (2004). Compatible algorithms for coupled flow and transport. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *193*(23), 2565-2580. https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.059

Delves, L., & Hall, C. (1979). An Implicit Matching Principle for Global Element Calculations. https://doi.org/10.1093/IMAMAT/23.2.223

Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera (Novena edición). (2018). Cengage Learning Editores S.A.

Epshteyn, Y., & Riviere, B. (2007). Estimation of penalty parameters for symmetric interior penalty Galerkin methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *206*, 843-872. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.08.029

Epshteyn, Y., Khan, T., & Rivière, B. (2009). Numerical solution of a one-dimensional inverse problem by the discontinuous Galerkin method. *Mathematics and Computers in Simulation*, *79*, 1989-2000. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2008.08.002

Epshteyn, Y., & Rivière, B. (2007). Estimation of penalty parameters for symmetric interior penalty Galerkin methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *206*(2), 843-872. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.08.029

Espinosa, J. M. B. (2005). *Temas Selectos de Matematicas : la Amena Forma de Aprender Mas* [Google-Books-ID: j5X77dL5Ll8C]. UNAM.

Guzmán, J., & Rivière, B. (2009). Sub-optimal Convergence of Non-symmetric Discontinuous Galerkin Methods for Odd Polynomial Approximations. *J. Sci. Comput.*, *40*, 273-280. https://doi.org/10.1007/s10915-008-9255-z

Hughes, T. J. R., Engel, G., Mazzei, L., & Larson, M. G. (2000). A Comparison of Discontinuous and Continuous Galerkin Methods Based on Error Estimates, Conservation, Robustness and Efficiency (B. Cockburn, G. E. Karniadakis & C.-W. Shu, Eds.). https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_9

Incropera, F. P., & DeWitt, D. P. (2001). *Introduction to Heat Transfer* (4.ª ed.). John Wiley Sons, Inc.

Kirkaldy, J. S., & Young, D. (1987). *Diffusion in the Condensed State*. Institute of Metals.

Oden, J., Babuska, I., & Baumann, C. (1998). A Discontinuous hp Finite Element Method for Diffusion Problems:1D Analysis. https://doi.org/10.1006/JCPH.1998.6032

Pérez, E. G. (2016). *Transporte y transformación de contaminantes en el ambiente y contaminación de las aguas*. https://hdl.handle.net/20.500.12543/3941

Quarteroni, A. (2014). *Numerical Models for Differential Problems*. Springer Milan. https://doi.org/10.1007/978-88-470-5522-3

Rincon, M., & Liu, I.-S. (2020, junio). *Livro2020 Rincon & Liu Introdução ao método de elementos finitos - Computação e análise em equações diferenciais parciais*.

Rivière, B. (2008, enero). *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations*. Society for Industrial; Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898717440

Rivière, B., Wheeler, M. F., & Girault, V. (1999). Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. Part I. *Computational Geosciences*, *3*(3), 337-360. https://doi.org/10.1023/A:1011591328604

Sedrakyan, H., & Sedrakyan, N. (2018, julio). *Algebraic Inequalities* [Google-Books-ID: 8DNjDwAAQBAJ]. Springer.

Taylor, G. I. (1954). The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, *223*(1155), 446-468. https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0130

Warburton, T., & Hesthaven, J. (2003). On the constants hp-finite element trace inverse inequalities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *192*, 2765-2773. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00294-9

Wheeler, M. F. (1978). An Elliptic Collocation-Finite Element Method with Interior Penalties [Publisher: Society for Industrial and Applied Mathematics]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *15*(1), 152-161. https://doi.org/10.1137/0715010

White, F. M. (2019). *Fluid Mechanics* (7.ª ed.). McGraw-Hill Education.

X. Giraldo, F. (2020). *1D Hybridizable Discontinuous Galerkin Method — springerprofessional.de*. Consultado el 16 de abril de 2022, desde https://www.springerprofessional.de/en/1d-hybridizable-discontinuous-galerkin-method/18539828

Códigos en Python

Clase Datos

```
class Datos(object):
    pass
    def __init__(self,x_0,x_1,p_x0,p_x1,
                 alpha,beta,gamma,
                 ss,penal,n_elementos,locdim,
                 Mallado,tipo_ec,extension):
      self.x_0=x_0
      self.x_1=x_1
      self.p_x0=p_x0
      self.p_x1=p_x1
      self.alpha=alpha
      self.beta=beta
      self.gamma=gamma
      self.tipo_ec=tipo_ec
      self.ss=ss
      self.penal=penal
      self.n_elementos=n_elementos
      self.locdim=locdim
      self.mallado=Mallado
      self.extension=extension

      if (self.extension == "SI"):
          self.SIM = self.ss
      if (self.extension == "NO"):
          self.SIM = 0
```

Listing 1 – Clase Datos

Discretización de la malla

```
class Malla(object):
    def __init__(self):
      pass
    @classmethod
    def malla_uniform(cls,x_start, x_end,Nel):
      dim_unif=Nel+1
      punt_med = np.zeros(dim_unif)
      x = np.linspace(x_start, x_end,dim_unif)
      for i in range(0,dim_unif-1):
            punt_med[i]=(x[i+1]+x[i])/2
```

```
      return x,punt_med

    @classmethod
    def malla_no_uniform(cls,x_start, x_end,Nel,a,b,c):
        dim_no_unif=(3*Nel)+1
        punt_med = np.zeros(dim_no_unif-1)
        h_loc=np.array([a,b,c])*(1/Nel)
        h=np.tile(h_loc,Nel)
        x = np.zeros(dim_no_unif)
        for i in range(0,dim_no_unif-1):
            x[i+1]=h[i]+x[i]
        for i in range(0,dim_no_unif-1):
            punt_med[i]=(x[i+1]+x[i])/2
        return x,punt_med
```

Listing 2 – Discretización de la malla

Clase de Funciones Principales

```
class Funciones(object):
  def __init__(self):
    pass

  @classmethod
  def cuadratura_gauss(cls,num_quad_points):
    si_q=np.polynomial.legendre.leggauss(num_quad_points)[0]
    w_q=np.polynomial.legendre.leggauss(num_quad_points)[1]
    return w_q,si_q

  @classmethod
  def phi_Base(cls,locdim,mesh,punt_med):
      import sympy as sp
      x=sp.symbols('x')
      dimension_phi=len(mesh)-1
      pl=sp.zeros(dimension_phi,locdim)

      for i in range(0,dimension_phi):
        for j in range(0,locdim):
         pl[i,j]=sp.Piecewise(((2*(x-punt_med[i])/(mesh[i+1]-mesh[i]))**
    j,\
                              (x > mesh[i])&(x < mesh[i+1])),(0,(x < 1)
    ),\
                             (0, (x > mesh[i+1])), (0, True))

      return pl
  @classmethod
  def solve(cls,Aglob,Bglob):
```

```
    import numpy as np
    u = np.zeros(len(Bglob))
    u = np.linalg.solve(Aglob,Bglob)
    return u
```

Listing 3 – Clase de Funciones Principales

```
  @classmethod
  def u_exacta(cls,alpha,beta,gamma,tipo_ec):
    import sympy as sp
    x=sp.symbols('x')
    if (tipo_ec == 0):
      # 'Difusi n Ejemplo I'
      ex=(1/alpha)*(1-x)*(sp.exp(-sp.Pow(x,2))-1+alpha )
    if (tipo_ec == 1):
      # 'Difusi n Ejemplo II'
      ex=sp.sin(8*sp.pi*x)*(1/alpha)
    if (tipo_ec == 2):
      # 'Difusi n-Absorci n Ejemplo I'
      eta=sp.sqrt(gamma/alpha)
      ex=(1/gamma)*x+(1/(sp.exp(eta)-sp.exp(-eta)))*\
          ((-sp.exp(-eta)-(1/gamma))*sp.exp(eta*x)+\
           (sp.exp(eta)+(1/gamma))*sp.exp(-eta*x))
    if (tipo_ec == 3):
      # 'Difusi n-Adveci n(constante) Ejemplo I'
      Beta=beta[0]
      eta=Beta/alpha
      ex=-(sp.exp(eta*x)/(Beta*(sp.exp(eta) - 1))) +\
          (x/Beta) + (1/(beta*(sp.exp(eta) - 1)))
    if (tipo_ec == 4):
      # 'Difusi n-Adveci n(variable) Ejemplo I'
      eta=gamma/alpha
      ex=(sp.sin(eta*sp.pi*x)+1-x)
    return ex
```

Listing 4 – Clase de Funciones Principales

Clase de Matriz A, matrices locales y ensamblaje

```
class MatricesLocales(object):
    pass
    def __init__(self,datos,mesh):
        self.alpha=datos.alpha
        self.gamma=datos.gamma
        self.beta=datos.beta
        self.ss=datos.ss
        self.penal=datos.penal
```

```
9         self.n_elementos=datos.n_elementos
10        self.locdim=datos.locdim
11        self.mesh=mesh
12        self.mallado=datos.mallado
13        self.tipo_ec=datos.tipo_ec
14        self.SIM=datos.SIM
15        if (self.mallado == 'uniforme'):
16          self.h_penal=(self.mesh[1]-self.mesh[0])
17        if (self.mallado == 'no uniforme'):
18            self.h_penal=max(self.mesh[1]-self.mesh[0],
19                             self.mesh[2]-self.mesh[1],
20                             self.mesh[3]-self.mesh[2])
21
22
23
24    def Aloc(self,h_act):
25        self.Amat=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
26        for i in range(1,self.locdim):
27            for j in range(1,self.locdim):
28                self.Amat[i,j] =(self.alpha)*\
29                    (1/h_act)*2*(i*j/(i+j-1))*\
30                        (1-pow(-1,i+j-1))
31        return self.Amat
32
33    def Aloc_gamma(self,h_act):
34        self.A_gamma=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
35        for i in range(0,self.locdim):
36            for j in range(0,self.locdim):
37                self.A_gamma[i,j]=(1/2)*(h_act)*\
38                    (self.gamma/(i+j+1))*(1-pow(-1,i+j+1))
39        return self.A_gamma
40
41    def Aloc_Betaloc(self,h_act,x_act):
42        self.Beta_loc=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
43        if (self.tipo_ec != 4):
44            for i in range(0,self.locdim):
45                for j in range(1,self.locdim):
46                    self.Beta_loc[i,j]=self.beta[0]*(j/(i+j))*(1-pow(-1,
    i+j))
47
48        if (self.tipo_ec == 4):
49            c=(x_act)+(h_act/2)
50            self.Beta_loc=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
51            for i in range(0,self.locdim):
52                for j in range(0,self.locdim):
53                    self.Beta_loc[i,j]=(h_act/2)*((1-pow(-1,i+j+1))/(i+j
    +1))
```

```
54                 for j in range(1,self.locdim):
55                     self.Beta_loc[i,j]=pow((2/h_act),i+j)*j*\
56                         (((1-pow(-1,i+j+1))/(i+j+1))*\
57                          pow((h_act/2),i+j+1)+\
58                              c*((1-pow(-1,i+j))/(i+j))*pow((h_act/2),i+j
   ))
59         return self.Beta_loc
60
61     def Bloc(self,h_act,beta_act):
62         self.Bmat=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
63         for i in range(0,self.locdim):
64             for j in range(0,self.locdim):
65                 self.Bmat[i,j]=\
66                     self.alpha*((1/h_act)*j*pow(-1,i+j-1))\
67                         -self.alpha*i*(self.ss*(1/h_act)*pow(-1,i+j-1))\
68                             -((beta_act/2)*(self.SIM)*pow(-1,i+j))\
69                                 +(self.penal*(1/self.h_penal)*pow(-1,i+j
   ))
70
71         return self.Bmat
72
73     def Cloc(self,h_old,h_new,beta_act):
74         self.Cmat=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
75         for i in range(0,self.locdim):
76             for j in range(0,self.locdim):
77                 self.Cmat[i,j]=\
78                     -(self.alpha*(1/h_old)*j*pow(1,i+j-1))\
79                         +(self.alpha*i*self.ss*(1/h_old)*pow(1,i+j-1))\
80                             +((beta_act/2)*(self.SIM)*pow(1,i+j))\
81                                 +(self.penal*(1/self.h_penal)*pow(1,i+j)
   )
82         return self.Cmat
83
84     def Dloc(self,h_old,h_new,beta_act):
85         self.Dmat=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
86         for i in range(0,self.locdim):
87             for j in range(0,self.locdim):
88                 self.Dmat[i,j]=\
89                     -(self.alpha*(1/h_new)*j*pow(-1,j-1))\
90                         -self.alpha*(self.ss*(1/h_old)*i*pow(-1,j))\
91                             -(beta_act/2)*(self.SIM)*pow(-1,j)\
92                                 -(self.penal*(1/self.h_penal)*pow(-1,j))
93         return self.Dmat
94
95     def Eloc(self,h_old,h_new,beta_act):
96        self.Emat=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
97        for i in range(0,self.locdim):
```

```
98          for j in range(0,self.locdim):
99            self.Emat[i,j]=\
100           (self.alpha*(1/h_old)*j*pow(-1,i))\
101           +(self.ss*(1/h_new)*self.alpha*i*pow(-1,i-1))\
102           +(beta_act/2)*(self.SIM)*pow(-1,i)\
103               -(self.penal*(1/self.h_penal)*pow(-1,i))
104
105       return self.Emat ##mod
106
107   def F0loc(self,h_0,beta_act):
108       self.F0mat=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
109       for i in range(0,self.locdim):
110           for j in range(0,self.locdim):
111               self.F0mat[i,j]=\
112                   (2/h_0)*self.alpha*j*pow(-1,(i+j-1))\
113                       -self.ss*(2/h_0)*i*self.alpha*pow(-1,i+j-1)\
114                           -self.SIM*(beta_act*pow(-1,i+j))\
115                               +self.penal*(1/h_0)*pow(-1,i+j)
116       return self.F0mat
117
118   def FNloc(self,h_N,beta_act):
119       self.FNmat=np.zeros((self.locdim,self.locdim))
120       for i in range(0,self.locdim):
121           for j in range(0,self.locdim):
122               self.FNmat[i,j]=\
123                   -((1/h_N)*2*self.alpha*j*pow(1,i+j-1))\
124                       +(self.ss*(1/h_N)*2*self.alpha*i*pow(1,i+j-1))\
125                           +(self.SIM)*(beta_act*pow(1,i+j))\
126                               +(self.penal*(1/h_N)*pow(1,i+j))
127
128       return self.FNmat
```

Listing 5 – Clase de Matriz A

```
1  class Matriz_A(object):
2      def __init__(self,datos,mesh):
3          self.datos = datos
4          self.alpha = datos.alpha
5          self.gamma = datos.gamma
6          self.beta = datos.beta
7          self.n_elementos = datos.n_elementos
8          self.locdim = datos.locdim
9          self.x = mesh
10         self.A = None
11
12     def MatrizA(self):
13         self.A = None
14         e = MatricesLocales(self.datos,self.x)  #instanciamos el metodo
```

```
15          Z_loc = np.zeros((self.locdim,self.locdim))
16          # -- Primer Matriz_A --
17          H0 = np.concatenate(
18              (e.Aloc(self.x[1]-self.x[0])+
19               e.Aloc_gamma(self.x[1]-self.x[0])+
20               e.Aloc_Betaloc(h_act=self.x[1]-self.x[0],
21                              x_act=self.x[0])+
22               e.F0loc(self.x[1]-self.x[0],self.beta[0])+
23               e.Cloc(self.x[1]-self.x[0],
24                      self.x[2]-self.x[1],
25                      self.beta[1]),
26               e.Dloc(self.x[1]-self.x[0],
27                      self.x[2]-self.x[1],
28                      self.beta[1]),
29               np.repeat(Z_loc,len(self.x)-1-2,axis=1)),
30              axis=1)
31
32          self.A=H0
33
34          #Matriz_As intermedios
35          for i in range(1,len(self.x)-2):
36              h = np.concatenate(
37                  (np.repeat(Z_loc,i-1,axis=1),
38                   e.Eloc(self.x[i]-self.x[i-1],
39                          self.x[i+1]-self.x[i],self.beta[i]),
40                   e.Aloc(self.x[i+1]-self.x[i])+
41                   e.Aloc_Betaloc(h_act=self.x[i+1]-self.x[i],
42                                  x_act=self.x[i])+
43                   e.Aloc_gamma(self.x[i+1]-self.x[i])+
44                   e.Bloc(self.x[i+1]-self.x[i],
45                          self.beta[i])+e.Cloc(self.x[i+1]-self.x[i],
46                                               self.x[i+2]-self.x[i+1],
47                                               self.beta[i+1]),
48                                               e.Dloc(self.x[i+1]-self.x[i
    ],
49                                                      self.x[i+2]-self.x[i
    +1],
50                                                      self.beta[i+1]),
51                                               np.repeat(Z_loc,
52                                                         len(self.x)-1-3-i
    +1,
53                                                         axis=1)),
54                                               axis=1)
55              self.A=np.concatenate((self.A,h), axis=0)
56          # Ultimo Matriz_A
57          HN = np.concatenate(
58              (np.repeat(Z_loc,len(self.x)-1-2,axis=1),
```

```
            e.Eloc(self.x[-2]-self.x[-3],self.x[-1]-self.x[-2],
                   self.beta[-2]),
            e.Aloc(self.x[-1]-self.x[-2])+
            e.Aloc_gamma(self.x[-1]-self.x[-2])+
            e.Aloc_Betaloc(h_act=self.x[-1]-self.x[-2],
                           x_act=self.x[-2])+
            e.Bloc(self.x[-1]-self.x[-2],
                   self.beta[-2])+
            e.FNloc(self.x[-1]-self.x[-2],
                    self.beta[-1])),
          axis=1)

        self.A=np.concatenate((self.A,HN), axis=0)
        return self.A
```

Clase de Vector B

```
#import sys
import numpy as np
import math
#from functools import partial

class Vector_B(object):
    def __init__(self,f,datos,mesh):
        self.f = f
        self.x_0=datos.x_0
        self.tipo_ec=datos.tipo_ec
        self.x_1=datos.x_1
        self.p_x0=datos.p_x0
        self.p_x1=datos.p_x1
        self.alpha=datos.alpha
        self.gamma=datos.gamma
        self.beta=datos.beta
        self.ss=datos.ss
        self.penal=datos.penal
        self.n_elementos=datos.n_elementos
        self.locdim=datos.locdim
        self.num_quad_points=self.locdim #-1
        self.mallado=datos.mallado
        self.x=mesh
        self.SIM=datos.SIM
        self.h_penal=max(self.x[1]-self.x[0],
                         self.x[2]-self.x[1],
                         self.x[3]-self.x[2])
        self.b = None
        self.Brhs=None
```

```
30
31
32
33      def vector_B(self):
34          w_q,xi_q = Funciones.cuadratura_gauss(self.num_quad_points)
35          self.Brhs = np.zeros(len(self.x)*self.locdim)
36          def vect_local_B(x_i,h_n):
37              vectB_loc = np.zeros(self.locdim)
38              for i in range (0,self.locdim):
39                  for ig in range (self.num_quad_points):
40                      xval = 0.5*xi_q[ig]*(h_n)+(x_i+0.5*(h_n))
41                      vectB_loc[i] = vectB_loc[i]+\
42                          ((h_n)/2)*w_q[ig]*((xi_q[ig])**i)*\
43                              f(xval,self.alpha,
44                                self.gamma,
45                                self.beta,
46                                self.tipo_ec)
47              return  vectB_loc
48
49          self.Brhs=vect_local_B(self.x[0],self.x[1]-self.x[0])
50
51          for i in range(1,len(self.x)-1):
52              self.Brhs=np.concatenate((self.Brhs,
53                                        vect_local_B(self.x[i],
54                                                     self.x[i+1]-self.x[i
    ])),
55                                       axis=0)
56
57          penaliza=np.zeros(len(self.Brhs))
58
59          for i in range(0,self.locdim):
60              penaliza[i]=-self.alpha*(self.ss)*pow(-1,i-1)*\
61                  (2/(self.x[1]-self.x[0]))*i*self.p_x0\
62                  -self.SIM*self.beta[0]*pow(-1,i)*self.p_x0\
63                      +(self.penal/(self.x[1]-self.x[0]))*pow(-1,i)*self.
    p_x0
64
65              penaliza[-(i+1)]=self.ss*self.alpha*pow(-1,i-1)*\
66                  (2/(self.x[-1]-self.x[-2]))*i*self.p_x1+\
67                      +self.SIM*self.beta[-1]*pow(-1,i)*self.p_x1+\
68                          +(self.penal/(self.x[-1]-self.x[-2]))*pow(-1,i)*
    self.p_x1
69
70          return self.Brhs+penaliza
```

Listing 6 – Clase de Vector B

Clase Solución DG

```
1
2
3  def p(x_0,x_1,px0,px1,Alpha,Beta,Gamma,
4        ss,penal,n_elementos,gradobase,mallado,
5        tipo_ec,extension,a,b,c):
6
7    locdim=gradobase+1
8    data_p=Datos(x_0,x_1,px0,px1,
9                 Alpha,Beta,Gamma,
10                ss,penal,n_elementos,
11                locdim,mallado,
12                tipo_ec,extension)
13
14   num_quad_points=locdim
15
16   if (mallado == 'uniforme'):
17     mesh,punt_med = Malla.malla_uniform(x_0,x_1,n_elementos)
18   if (mallado == 'no uniforme'):
19     mesh,punt_med = Malla.malla_no_uniform(x_0,x_1,n_elementos,a,b,c)
20
21   A=Matriz_A(data_p,mesh).MatrizA()
22
23   #print("\n Matriz A \n")
24   #print(A.shape)
25   #print(A)
26
27   B=Vector_B(f,data_p,mesh).vector_B()
28
29   #print("\n Vector Fuerza B \n")
30   #print(B.shape)
31   #print(B)
32   soluc=Funciones.solve(A,B)
33   #print("\n Vector Solucion \n")
34   phi=Funciones.phi_Base(locdim,mesh,punt_med)
35   up=SolucionDG(data_p,soluc,mesh,phi,tipo_ec).p_dg()
36   #--------
37
38   errorL2=Errores(data_p,mesh,up).ErrorL2()
39   errorE=Errores(data_p,mesh,up).ErrorEnergia()[0]
40   errorJ=Errores(data_p,mesh,up).ErrorEnergia()[1]
41
42   return up #,errorInter #usar para uno solo
43   #return errorL2,errorE,errorJ
```

Listing 7 – Clase Solución aproximada DG

Clase de Errores L2, Energia, seminorma J

```
class Errores(object):
  def __init__(self,datos,mesh,uap):
    self.alpha=datos.alpha
    self.beta=datos.beta
    self.gamma=datos.gamma
    self.tipo_ec=datos.tipo_ec
    self.x_0=datos.x_0
    self.x_1=datos.x_1
    self.n_elementos=datos.n_elementos
    self.mesh=mesh
    self.ss=datos.ss
    self.penal=datos.penal
    self.locdim=datos.locdim
    self.num_quad_points=self.locdim+1 ## es 1?
    self.mallado=datos.mallado
    self.mesh= mesh #sirve para L2
    self.meshJ=Malla.malla_uniform(self.x_0,
                                   self.x_1,
                                   self.n_elementos)
    self.mallado=datos.mallado
    if (self.mallado == 'uniforme'):
      self.h_penal=(self.mesh[1]-self.mesh[0])
    if (self.mallado == 'no uniforme'):
        self.h_penal=max(self.mesh[1]-self.mesh[0],
                         self.mesh[2]-self.mesh[1],
                         self.mesh[3]-self.mesh[2])
    self.uap=uap

    if (self.tipo_ec != 4):
        self.D_B = 0
    if (self.tipo_ec == 4):
        self.D_B = 1
```

Listing 8 – Clase de Errores L2

```
def ErrorL2(self):
    import sympy as sp
    #import concurrent.futures
    x = sp.Symbol("x")
    w_q,xi_q=Funciones.cuadratura_gauss(self.num_quad_points)
    exac=sp.lambdify(x,Funciones.u_exacta(self.alpha,
                                          self.beta,
                                          self.gamma,
                                          self.tipo_ec))
    u=sp.lambdify(x,self.uap)

```

```
    def integracion(a,b):
      import math
      integral=0
      for ig in range(self.num_quad_points):  #ng = 2
          xval = ((b-a)*xi_q[ig]+(a+b))/2
          integral = integral+((b-a)/2)*\
              (w_q[ig]*((exac(xval)-u(xval))**2))
      return integral

    sum1=np.zeros(len(self.mesh)-1)
    for k in range(0,len(self.mesh)-1): #actual
      sum1[k]=integracion(self.mesh[k],
                          self.mesh[k+1])
    return math.sqrt(np.sum(sum1))
```

Listing 9 – Clase de Errores L2

```
def ErrorEnergia(self):
    import sympy as sp
    x=sp.symbols('x')
    w_q,xi_q=Funciones.cuadratura_gauss(self.num_quad_points)

    E=sp.lambdify(x,Funciones.u_exacta(self.alpha,
                                       self.beta,
                                       self.gamma,
                                       self.tipo_ec))
    E_D=sp.lambdify(x,sp.diff((Funciones.u_exacta(self.alpha,
                                                  self.beta,
                                                  self.gamma,
                                                  self.tipo_ec)),x))
    U_D=sp.lambdify(x,sp.diff(self.uap,x))
    U=sp.lambdify(x,self.uap)


    def lim_der(punto):
      eps=10**(-8)
      return E(punto+eps)-U(punto+eps)

    def lim_izq(punto):
      eps=10**(-8)
      return E(punto-eps)-U(punto-eps)


    errorJ=np.empty(len(self.mesh))
    J=np.empty(len(self.mesh))

    J[0],J[-1],errorJ[0],errorJ[-1]  = 0,0,0,0

```

```
    for i in range(1,len(self.mesh)-1):
      J[i]=np.power((lim_izq(self.mesh[i])-\
                     lim_der(self.mesh[i])),2)*\
                     (1/self.h_penal)

    for i in range(1,len(self.mesh)-1):   ##no mover!
      errorJ[i]=np.power((lim_izq(self.mesh[i])-\
                     lim_der(self.mesh[i])),2)*\
                     (self.h_penal)

    J0=np.sum(self.penal*J)


    def int_alpha(a,b):
      import sympy as sp
      x=sp.symbols('x')
      import math
      integral=0
      for ig in range(self.num_quad_points):
          xval = ((b-a)*xi_q[ig]+(a+b))/(2.0)
          integral = integral+((b-a)/(2))*\
              (w_q[ig]*((E_D(xval)-U_D(xval))**2))
      return integral

    def int_gamma_beta(a,b):
      import sympy as sp
      x=sp.symbols('x')
      import math
      integral=0
      for ig in range(self.num_quad_points):
          xval = ((b-a)*xi_q[ig]+(a+b))/(2.0)
          integral = integral+((b-a)/(2))*\
              (w_q[ig]*((E(xval)-U(xval))**2))
      return integral

    sum1=np.zeros(len(self.mesh))
    sum2=np.zeros(len(self.mesh))

    for k in range(0,len(self.mesh)-1):
      sum1[k]=int_alpha(self.mesh[k],self.mesh[k+1])
      sum2[k]=int_gamma_beta(self.mesh[k],self.mesh[k+1])

    error_energia=math.sqrt(self.alpha*np.sum(sum1)+\
                            (self.D_B*0.5+self.gamma)*np.sum(sum2)+J0)

    return error_energia,np.sqrt(np.sum(errorJ))
```

Listing 10 – Clase de Errores L2

Clase Continuos: Base y Errores

```
class FuncionesContinuas(object):
  def __init__(self):
    pass

  @classmethod
  def cuadratura_gauss(cls,num_quad_points):
    import math
    si_q=np.polynomial.legendre.leggauss(num_quad_points)[0]
    w_q=np.polynomial.legendre.leggauss(num_quad_points)[1]
    return w_q,si_q

  @classmethod
  def base_p1_continua(cls,numero_elementos):
    x_a,x_b=0,1
    import sympy as sp
    x=sp.Symbol('x')
    h=1/numero_elementos
    x0,x1,x2=0,h,2*h

    pl= sp.zeros(numero_elementos+1,1, Variable = True)

    dpl= sp.zeros(numero_elementos+1,1)
    pl[0]=sp.Piecewise((0,(x<x0)),((x1-x)/(h),\
                                   ((x > x0) & (x < x1))),\
                      (0,(x1<x)),(0,False))

    dpl[0]=sp.Piecewise((0,(x<x0)),(-1/(h),\
                                    ((x > x0) & (x < x1))),\
                        (0,(x1<x)),(0,False))

    pl[-1]=sp.Piecewise((0,x < (x_b-h)),\
                        (((x - (x_b - h))/h),
                        ((x_b-h) < x) & (x < x_b)),\
                        (0, (x_b<x)),(0,False))

    dpl[-1]=sp.Piecewise((0,x < (x_b-h)),\
                        (1/h,((x_b-h) < x) & (x < x_b)),\
                        (0, (x_b<x)),(0,False))

    for i in range(1,numero_elementos):
        pl[i]=sp.Piecewise((0,(x<x0)),\
                           ((x - x0)/(h),((x > x0) & (x < x1))),\
                               ((x2 - x)/(h),((x > x1) & (x < x2))),\
                                   (0, (x2 < x)),(0,False))

        dpl[i]=sp.Piecewise((0,(x<x0)),(1/(h),((x > x0) & (x < x1))),\
```

```
                                    (-1/(h),((x > x1) & (x < x2))),\
                                    (0, (x2 < x)),(0,False))
        x0=x0+h
        x1=x1+h
        x2=x2+h

    return pl, dpl
```

Listing 11 – Clase Continuos: Base y Errores

```
def pcont(x_0,x_1,px0,px1,Alpha,Beta,Gamma,
          n_elementos,gradobase,tipo_ec):

  data_pc=Datos(x_0=x_0,x_1=x_1,
                p_x0=px0,p_x1=px1,
                alpha=Alpha,beta=Beta,gamma=Gamma,
                ss=0,penal=0,n_elementos=n_elementos,
                locdim=gradobase-1,
                Mallado="uniforme",
                tipo_ec=tipo_ec,extension="NO")

  mesh,punt_med = Malla.malla_uniform(x_0,x_1,n_elementos)

  ##definimos las constantes
  A_const = np.array([[x_0,1], [x_1,1]])
  B_const = np.array([px0, px1])
  const = np.linalg.inv(A_const).dot(B_const)
  print("ayb; ",const[0],const[1])

  if(gradobase==1):
      pl=FuncionesContinuas.base_p1_continua(n_elementos)[0]
      dpl=FuncionesContinuas.base_p1_continua(n_elementos)[1]
      upcont=continuo_gradobasep1(Alpha,Gamma,Beta,
                                  n_elementos,pl,dpl,const,tipo_ec)
      errorL2Cont=Errores(data_pc,mesh,upcont).ErrorL2cont()
      errorInterCont=FuncionesContinuas.ErrorInter_p1(mesh,upcont,
                                                      pl,dpl,
                                                      Alpha,Beta,Gamma,
   tipo_ec)
      ####error_Interpolante=ErrorInter(mesh,upcont,pl,dpl,alpha,beta,
   gamma)

  if(gradobase==2):
      pl=FuncionesContinuas.base_p2_continua(n_elementos)[0]
      dpl=FuncionesContinuas.base_p2_continua(n_elementos)[1]
      upcont=continuo_gradobasep2(Alpha,Gamma,Beta,
                                  n_elementos,pl,dpl,const,tipo_ec)
      errorL2Cont=Errores(data_pc,mesh,upcont).ErrorL2cont()
```

```
37        errorInterCont=FuncionesContinuas.ErrorInter_p2(mesh,upcont,
38                                                        pl,dpl,
39                                                        Alpha,Beta,Gamma,
    tipo_ec)
40
41    return upcont
42    #return upcont,errorL2Cont,errorInterCont
```

Listing 12 – Solución aproximada continua

Función f(x)

```
1  def f(x,alpha,gamma,beta,tipo_ec):
2      import numpy as np
3      x = np.asarray(x)
4      if (tipo_ec == 0):
5          #'Difusi n Ejemplo I'
6          f= np.asarray(-(2*x-2*(1-2*x)+4*x*(x-x**2))*np.exp(-x*x))
7      if (tipo_ec == 1):
8          #'Difusi n Ejemplo II'
9          f=64*(np.pi**2)*np.sin(8*np.pi*x)
10     if (tipo_ec == 2):
11         #'Difusi n-Absorci n Ejemplo I'
12         f=x
13     if (tipo_ec == 3):
14         #'Difusi n-Advecci n(constante) Ejemplo I'
15         unos=np.asarray(1)
16         f=unos
17     if (tipo_ec == 4):
18         #'Difusi n-Adveci n(variable) Ejemplo I'
19         eta=gamma/alpha
20         unos=np.asarray(1)
21         f=np.power(gamma*np.pi,2)*\
22             np.sin((gamma/alpha)*\
23                    np.pi*x)/alpha+\
24                 np.sin((gamma/alpha)*np.pi*x)+\
25                     1-x+x*((gamma/alpha)*\
26                            np.pi*np.cos((gamma/alpha)*np.pi*x)-1)+\
27                         gamma*(np.sin((gamma/alpha)*np.pi*x)+1-x)
28
29     return f
```

Listing 13 – Funcion f(x)

Clase Inicial del Programa

```
def main():
    import numpy as np
    x0,x1=0,1
    tipo_ec=0
    caso="B" #"B"
    N_elementos=4
    Gradobase=2
    Gradobase_continua=1
    hh=1/N_elementos
    Mallado= 'no uniforme'
    P_nipg=np.array([0.33,3])
    P_sipg=np.array([0.3,0.96])
    P_iipg=np.array([0.3,3])

    locdim=Gradobase+1

    Penal_nipg,ext_NIPG = P_nipg[Gradobase-1] , "SI" ##cambiar si es
   necesario
    Penal_sipg,ext_SIPG = P_sipg[Gradobase-1] , "SI" ##cambiar si es
   necesario
    Penal_iipg,ext_IIPG = P_iipg[Gradobase-1] , "SI" ##cambiar si es
   necesario

    P=np.array([Penal_nipg,Penal_sipg,Penal_iipg])

    if (Mallado == 'uniforme'):
        a,b,c=1,1,1
        mesh,punt_med =\
        Malla.malla_uniform(x0,x1,N_elementos)
    if (Mallado == 'no uniforme'):
        a,b,c=1/7,1/7,5/7
        #a,b,c=1/3,1/3,1/3
        #a,b,c=1/7,1/5,23/35
        #a,b,c=1/7,1/2,5/14
        #a,b,c=
        mesh,punt_med =\
            Malla.malla_no_uniform(x0,x1,N_elementos,a,b,c)

    px0,px1,Alpha,Gamma,Beta,codigo=eleccion_ecuacion(tipo_ec,caso,mesh)

    print("Tipo de ecuaci n: ", ecuaciones[tipo_ec])
    datos_imprimir = """\nCodigo: {codigo}
                        \nGrado del polinomio: {Gradobase}
                        \n Alpha,Beta,Gamma: {Alpha},{Beta},{Gamma}
                        \n N: {N_elementos}
                        \nMallado: {Mallado}
                        \n Tiene extensi n?(NIPG,SIPG,IIPG):
```

```
45                          \n*{ext_N},*{ext_S},*{ext_I}""".format(codigo=
    codigo,
46                          Gradobase=Gradobase,
47                          Alpha = Alpha,
48                          Beta = Beta[0],
49                          Gamma= Gamma,
50                          N_elementos=N_elementos,
51                          Mallado = Mallado,
52                          ext_N=ext_NIPG,
53                          ext_S=ext_SIPG,
54                          ext_I=ext_IIPG)
55     ###########------------------------------------------------------
56
57     uapc_pc=pcont(x_0=x0,x_1=x1,px0=px0,px1=px1,Alpha=Alpha,
58                   Beta=Beta,Gamma=Gamma,n_elementos=N_elementos,
59                   gradobase=Gradobase_continua,tipo_ec=tipo_ec)
60
61     up_nipg=p(x_0=x0,x_1=x1,px0=px0,px1=px1,
62               Alpha=Alpha,Beta=Beta,Gamma=Gamma,
63               ss=1,penal=Penal_nipg,
64               n_elementos=N_elementos,gradobase=Gradobase,
65               mallado=Mallado,tipo_ec=tipo_ec,
66               extension=ext_NIPG,a=a,b=b,c=c) # NIPG
67
68     up_sipg=p(x_0=x0,x_1=x1,px0=px0,px1=px1,
69               Alpha=Alpha,Beta=Beta,Gamma=Gamma,
70               ss=-1,penal=Penal_sipg,
71               n_elementos=N_elementos,gradobase=Gradobase,
72               mallado=Mallado,tipo_ec=tipo_ec,
73               extension=ext_SIPG,a=a,b=b,c=c) # SIPG
74
75     up_iipg=p(x_0=x0,x_1=x1,px0=px0,px1=px1,
76               Alpha=Alpha,Beta=Beta,Gamma=Gamma,
77               ss=0,penal=Penal_iipg,
78               n_elementos=N_elementos,gradobase=Gradobase,
79               mallado=Mallado,tipo_ec=tipo_ec,
80               extension=ext_IIPG,a=a,b=b,c=c) # IIPG
81
82
83
84     print(datos_imprimir)
85     ex=Funciones.u_exacta(Alpha,Beta,Gamma,tipo_ec)
86
87     graficaconcontinua_nounif(ex,Alpha,Beta,Gamma,uapc_pc,uapc_pc,
88                               up_nipg,up_sipg,up_iipg,"NIPG",
89                               Gradobase,N_elementos,
90                               P_nipg,tipo_ec,codigo,"rut")
```

```
91
92      #graficaGeneral(ex,Alpha,Beta,Gamma,up_nipg,up_sipg,
93      #                up_iipg,Gradobase,N_elementos,P,tipo_ec,codigo,"
    rut_dg")
94      #graficaconcontinua(ex,Alpha,Beta,Gamma,uapc_pc,up_nipg,
95      #                 up_sipg,up_iipg,Gradobase,N_elementos,P,tipo_ec,
    codigo,rut_cg) #B01
96
97
98  if __name__ == '__main__':
99      sys.exit(main())
```

Listing 14 – Clase Inicial del Programa