



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Académico Profesional de Matemática

**Conjugación analítica local de difeomorfismos
analíticos de \mathbb{C} en \mathbb{C}**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jorge Alberto CORIPACO HUARCAYA

ASESOR

Renato Mario BENAZIC TOMÉ

Lima, Perú

2016



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

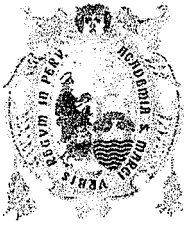
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Coripaco, J. (2016). *Conjugación analítica local de difeomorfismos analíticos de C en C* . [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Académico Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

117



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34

Teléfono IP Nº 619-7000

Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe

Lima - Perú

8(e)

83

Escuela Académico-Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 15:08 horas del día martes 9 de agosto de 2016 se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Mg. Tomás Alberto Núñez Lay (Presidente), Teófanos Quispe Méndez (Miembro), Dr. Renato Mario Benazic Tomé (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «CONJUGACIÓN ANALÍTICA LOCAL DE DIFEOMORFISMOS ANALÍTICOS DE C EN C », presentado por el señor Bachiller JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

dieciocho (18).

A continuación el Presidente del Jurado, Mg. Tomás Alberto Núñez Lay, manifestó que el señor Bachiller JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 16:03 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

[Signature of Tomás Alberto Núñez Lay]

MG. TOMÁS ALBERTO NÚÑEZ LAY
PRESIDENTE

[Signature of Renato Mario Benazic Tomé]

DR. RENATO MARIO BENAZIC TOMÉ
MIEMBRO ASESOR

[Signature of Teófanos Quispe Méndez]

MG. TEÓFANES QUISPE MÉNDEZ
MIEMBRO

CONJUGACIÓN ANALÍTICA LOCAL DE DIFEOMORFISMOS
ANALÍTICOS DE \mathbb{C} EN \mathbb{C}

Jorge Alberto Coripaco Huarcaya

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas,
de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener
el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

.....
Dr. Renato Benazic Tomé

.....
Mg. Tomas Nuñez Lay

.....
Mg. Quispe Méndez Teófanés

Lima - Perú
Agosto - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

CORIPACO HUARCAYA, JORGE ALBERTO

Conjugación analítica local de difeomorfismos analíticos de \mathbb{C} en \mathbb{C} , (Lima) 2016.

VIII, 83 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2016).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática

I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas.

II. Conjugación analítica local de difeomorfismos analíticos de \mathbb{C} en \mathbb{C} (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias).

Dedicatoria

A mis padres: Alejandra y Juan de Dios.

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mis queridos padres, Juan de Dios Curipaco y Alejandra Huarcaya por todo el amor y cariño que siempre me dieron, por apoyo incondicional durante mis estudios, a mis hermanos por la amistad que me dieron durante toda mi vida.

Agradezco a mi asesor el Profesor Dr. Renato Benazic, por todo el conocimiento transmitido y por la formación académica que me brindo durante mi etapa de estudiante en la Facultad de Ciencias Matemáticas.

Agradezco a la Dra. Doris Gómez Ticerán, por todo el apoyo y consideración que me ha brindado en la Facultad de Ciencias Matemáticas.

Agradezco al Dr. Raul Moises Izaguirre Maguinña, por todo el apoyo y la amistad que me brindo.

Agradezco a los Profesores Tomas Nuñez Lay y Teófanés Quispe Méndez, por la paciencia de leer mi trabajo y las sugerencias que me puedan dar para mejorar este trabajo.

Agradezco a la Escuela Académica Profesional-E.A.P. de Matemática y a la plana docente responsable de mi formación académica.

Jorge Alberto Coripaco Huarcaya

Resumen

CONJUGACIÓN ANALÍTICA DE DIFEOMORFISMOS ANALÍTICOS DE \mathbb{C} EN \mathbb{C} .

JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA

Agosto - 2016

Orientador: Profesor Dr. Renato Benazic Tomé.

Título obtenido: Licenciado en Matemática

.....
En este trabajo pretendemos analizar el comportamiento dinámico de una función analítica $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida en una vecindad del origen con $\varphi'(0) \neq 0$ y sobre que condiciones es linealizable.

Como parte central de este trabajo, mostraremos que toda función analítica con $|\varphi'(0)| = 1$, que satisface una condición que llamaremos *Convergencia C_ν* , es linealizable.

Finalmente, se presenta como aplicación, un estudio sobre ecuaciones en diferencias, que nos permite estudiar los puntos de equilibrio y estabilidad de fenómenos asociados a logística y economía.

PALABRAS CLAVES: Difeomorfismos locales Analíticos, Conjugación Analítica, Punto Atractor, Punto Repulsor, Convergencia C_ν .

Abstract

LOCAL ANALYTIC CONJUGATION OF ANALYTIC DIFFEOMORPHISMS
FROM \mathbb{C} TO \mathbb{C} .

JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA

Agost - 2016

Advisor: Renato Benazic Tomé
Degree: Licentiate in Mathematic

.....
In this work, we analyze the dynamic behavior of an analytic function $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ defined in a neighborhood of the origin with $|\varphi'(0)| = 1$ and on what conditions is conjugated to its linear part.

As a central part of this work, we show that any analytic function with $|\varphi'(0)| = 1$, which satisfies the condition that we call *Convergence C_ν* is linearizable.

Finally, it is presented as an application, a study of difference equations that allows us to study the equilibrium points and stability of phenomena associated with logistics and economy.

KEYWORDS: Analytic local diffeomorphisms, Analytic Conjugation , Attractor Point, Repulsor Point, Convergence C_ν .

Índice general

1. Preliminares	4
1.1. Funciones de variable compleja	4
1.2. Integración sobre caminos	6
1.3. El teorema local de Cauchy	7
1.4. Productos infinitos	13
2. Dinámica de difeomorfismos locales analíticos	18
2.1. Equivalencia analítica de difeomorfismos locales	18
2.2. Comportamiento dinámico de difeomorfismos locales	20
2.2.1. Difeomorfismos locales con $ \varphi'(0) \neq 1$	20
2.2.2. Difeomorfismos locales con $ \varphi'(0) = 1$	25
3. Fracciones continuas	43
3.1. Fracciones continuas finitas	43
3.2. Fracciones continuas infinitas	46
4. Convergencia C_ν	53
4.1. Parte central	53
4.2. Demostración de la convergencia	60
4.2.1. Dinámica de $T(z) = \lambda z$, donde $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ y $\alpha \in \Gamma$	72
4.3. Ecuaciones en diferencias	73
4.3.1. Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden	73
4.3.2. Puntos de equilibrio y estabilidad asintótica	75

Introducción

En este trabajo pretendemos analizar el comportamiento dinámico de las órbitas de una función analítica $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida en una vecindad del origen con $\varphi'(0) \neq 0$ y sobre qué condiciones es linealizable. Es decir, sobre qué condiciones existe $F : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ función analítica definida en una vecindad del origen tal que $F(0) = 0$ con $F'(0) = 1$, satisfaciendo la ecuación:

$$F(\lambda \cdot z) = \varphi(F(z)) \quad (1)$$

para todo z en una vecindad del origen, donde $\lambda = \varphi'(0)$. Como veremos en este trabajo dichas condiciones dependerán del parámetro λ .

El problema de linealización será satisfactoriamente resuelto si $|\lambda| < 1$ o $|\lambda| > 1$. Sin embargo para $|\lambda| = 1$ tendremos los siguientes casos.

Caso I: $|\lambda| = 1$ y λ es raíz de la unidad.

En este caso obtendremos resultados de carácter dinámico basado en el comportamiento dinámico de las órbitas positivas y negativas de $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Caso II: $|\lambda| = 1$ y λ no es la raíz de la unidad.

En este caso podemos encontrar formalmente una solución de la ecuación (1) basado en el desarrollo formal en serie de potencias. Sea $\varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ función analítica y sea $F(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ solución formal de (1), resolviendo formalmente la ecuación (1) obtenemos,

$$\begin{aligned} F(\lambda z) - \lambda F(z) &= \varphi(F(z)) - \lambda F(z) \\ \lambda z + \sum_{i=2}^{\infty} b_i (\lambda z)^i - \lambda z - \lambda \sum_{i=2}^{\infty} b_i z^i &= \lambda F(z) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i (F(z))^i - \lambda F(z) \\ \sum_{i=2}^{\infty} (\lambda^i - \lambda) b_i z^i &= \sum_{i=2}^{\infty} a_i (F(z))^i. \end{aligned}$$

Comparando términos, obtenemos la siguiente relación

$$(\lambda^k - \lambda)b_n = a_n + P(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}) \text{ para todo } k \geq 2, \quad (2)$$

donde $P(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$ es un polinomio de variables $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$ con coeficientes enteros.

De la relación (2) obtendremos una fórmula recursiva para hallar los coeficientes b_n de F . El problema central está en analizar la convergencia de F en una vecindad del origen, para estudiar este problema el proceso de comparación de coeficientes será omitido, así en este trabajo resolveremos el problema de la convergencia por un proceso iterativo que consiste en una sustitución de variables.

Nuestro objetivo será encontrar una sustitución F tal que $T = F^{-1} \circ \varphi \circ F$ sea la transformación $\lambda \cdot z$. En vez de hacerlo directamente comenzaremos por encontrar una sustitución ϕ_0 tal que $\phi_0^{-1} \circ \varphi \circ \phi_0 = \varphi_1$ este más próxima a la transformación $\lambda \cdot z$ de la que estaba φ , partiendo ahora de φ_1 , repetimos el proceso para encontrar una sustitución ϕ_1 que conduzca a una transformación,

$$\varphi_2 = \phi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \phi_1 = \phi_1^{-1} \circ \phi_0^{-1} \circ \varphi_1 \circ \phi_0 \circ \phi_1,$$

que se aproxime cada vez más a $\lambda \cdot z$. Este proceso nos conduce a sustituciones φ_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) y a las transformaciones

$$\varphi_{\nu+1} = \phi_\nu^{-1} \circ \varphi_\nu \circ \phi_\nu = F_\nu^{-1} \circ \varphi \circ F_\nu \text{ donde } F_\nu = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_\nu,$$

las cuales convergirán a la sustitución requerida. Para el éxito de este método será importante que la composición de $F_\nu = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_\nu$ este bien definida, es decir que el conjunto de valores de ϕ_ν se encuentre en el dominio de definición de $\phi_{\nu-1}$, además de esto que el dominio de F_ν contenga una vecindad fijada del origen, para todo ν tal que

$$\varphi_\nu \rightarrow T \text{ cuando } \nu \rightarrow \infty \text{ donde } T(z) = \lambda \cdot z,$$

donde la convergencia será uniforme en una vecindad fijada del origen.

Suponiendo que las condiciones anteriores son satisfechas, se sigue que

$$T(z) = F^{-1} \circ \varphi \circ F,$$

de modo que F será la única sustitución deseada. También mostraremos que el conjunto de los $\lambda \in S^1 = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ tales que para toda $\varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ convergente en una vecindad del origen su respectiva $F(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$ que la linealiza formalmente, sea convergente en una vecindad del origen, como subconjunto de S^1 tiene medida 2π . Para ello usaremos algunos resultados de teoría de la medida.

Teorema 0.1. Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $L = \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ es medible}\}$ y sea $m : L \rightarrow [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in L \quad \text{y ademas} \quad m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_n)$$

Teorema 0.2. Sea E, F medibles y $E \subseteq F$ entonces $m(E) \leq m(F)$.

Los resultados anteriores nos ayudaran a probar lo afirmado y nos permitirá mostrar que el conjunto de los $\lambda \in S^1$, para los cuales existe por lo menos una serie convergente $\varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ cuya serie formal $F(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ la cual es solución de la ecuación (1) es divergente, tenga medida nula. Esto nos dirá que las aplicaciones $\varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ con $|\lambda| = 1$ generalmente son linealizables.

Preliminares

Índice

1.1. Funciones de variable compleja	5
1.2. Integración sobre caminos	7
1.3. El teorema local de Cauchy	8
1.4. Productos infinitos	14

En este capítulo mostraremos algunos resultados básicos sobre variable compleja los cuales pueden ser encontrados en Ahlfors, L. V [1], Cartan Henri, [4], Conway J. B. [6] y Rudin Walter, [9].

1.1 Funciones de variable compleja

En lo que sigue Ω denotará un subconjunto abierto del plano \mathbb{C} .

Definición 1.1: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y sea $z_0 \in \Omega$. Decimos que f es *diferenciable en* z_0 si existe el

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

El cual denotaremos por $f'(z_0)$ y la llamaremos derivada de f en z_0 . Decimos que f es *analítica en* Ω (u holomorfa), si existe $f'(z_0)$ para todo $z_0 \in \Omega$.

Denotaremos por $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones analíticas en Ω .

Observación 1.2: Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones complejas. Se cumplen:

- (i) Si f es analítica en Ω , entonces f es continua en Ω .
- (ii) Si $f \in H(\Omega)$ y $g \in H(\Omega)$, entonces $f \pm g \in H(\Omega)$ and $f \cdot g \in H(\Omega)$.

Teorema 1.3 ([9, Remark 10.3]). *Sea $f \in H(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$ y $g \in H(\Omega_1)$. Entonces $h = g \circ f \in H(\Omega)$ y además h' puede calcularse por regla de la cadena*

$$h'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Definición 1.4: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ función. Decimos que f es **representable en series de potencias en Ω** si para cada disco $D(a, r) \subseteq \Omega$ le corresponde una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n \tag{1.1}$$

que converge a $f(z)$ para todo $z \in D(a, r) \subseteq \Omega$.

Teorema 1.5 ([9, Theorem 10.6]). *Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función representable en serie de potencias en Ω , entonces $f \in H(\Omega)$ y además f' es también representable por serie de potencias en Ω , más aún, si*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n, \text{ para todo } z \in D(a, r) \subseteq \mathbb{C},$$

entonces

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z - a)^{n-1}, \text{ para todo } z \in D(a, r) \subseteq \mathbb{C}.$$

Corolario 1.6 ([9, pag. 201]). *Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función representable en serie de potencias en Ω , entonces f tiene derivadas de todos los ordenes y cada derivada es representable en serie de potencias en Ω , más aún*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n(z - a)^{n-k}, \text{ para todo } z \in D(a, r) \subseteq \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Por lo tanto, en las condiciones del corolario anterior, la igualdad (1.2) implica que

$$k!c_k = f^{(k)}(a), \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \dots$$

Ahora veremos que toda $f \in H(\Omega)$ es representable por serie de potencias en Ω .

1.2 Integración sobre caminos

Definición 1.7: Una *curva* en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una aplicación continua γ de un intervalo compacto $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ en Ω , donde $\alpha \leq \beta$. Llamaremos a $[\alpha, \beta]$ el intervalo de parámetros de γ y denotaremos la imagen de γ por γ^* . Si el punto inicial $\gamma(\alpha)$ de γ coincide con el punto final $\gamma(\beta)$ diremos que γ es una *curva cerrada*.

Un *camino* es una curva en el plano la cual es continuamente diferenciable a trozos. Un *camino cerrado* es una curva cerrada que también es camino.

Definición 1.8: Supongamos que $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino y f una función continua en γ^* . Definimos la *integral de f sobre γ* como la integral sobre el intervalo de parámetros $[\alpha, \beta]$ de γ .

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \quad (1.3)$$

Observación 1.9: Tenemos algunas propiedades de la integral definida anteriormente:

- (i) La propiedad más importante de integral definida en (1.3) es su invarianza respecto a un cambio de parámetros. Es decir, si φ es una aplicación inyectiva continuamente diferenciable de un intervalo $[\alpha_1, \beta_1]$ sobre $[\alpha, \beta]$, tal que $\varphi(\alpha_1) = \alpha$, $\varphi(\beta_1) = \beta$. Entonces si hacemos $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, tenemos

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

- (ii) Si $\gamma_1(t) = \gamma(-t)$ es un cambio de orientación, entonces tenemos

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

- (iii) Se cumple la siguiente desigualdad,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Teorema 1.10 ([9, Theorem 10.10]). *Sea γ un camino cerrado, sea G el complementario de γ^* (con respecto al plano) y definamos*

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} d\xi.$$

Entonces Ind_{γ} es una función en G cuyos valores son números enteros, el cual es constante en cada componente de G y cero en la componente no acotada.

Corolario 1.11. Si γ es una circunferencia positivamente orientada con centro en a y radio r . Entonces

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - a| < r \\ 0 & \text{si } |z - a| > r \end{cases}$$

Demostración. Tomemos γ como en el Teorema 1.10, entonces $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$, si $|z - a| > r$ en la componente no acotada. Luego es suficiente calcular $\text{Ind}_\gamma(a)$

$$\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a} = \frac{r}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} e^{it} dt = 1.$$

Desde que $\text{Ind}_\gamma(z)$ es constante en la componente acotada G , tenemos que

$$\text{Ind}_\gamma(z) = 1, \quad \text{si } |z - a| < r.$$

□

1.3 El teorema local de Cauchy

En esta sección mostraremos que toda función holomorfa definida en un abierto de \mathbb{C} es representable por una serie de potencias, así como un resultado de convergencia uniforme de funciones holomorfas en subconjuntos compactos que serán utilizados para mostrar nuestro resultado central.

Teorema 1.12. Supongamos que $F \in H(\Omega)$ y F' es continua en Ω . Entonces

$$\int_\gamma F'(z) dz = 0, \quad \text{para todo camino cerrado } \gamma \text{ en } \Omega.$$

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ camino cerrado, entonces por Teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$\int_\gamma F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma) \gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$

dado que, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

□

Teorema 1.13 (Teorema de Cauchy para un triángulo). [9, Theorem 10.13] Sea Δ un triángulo cerrado contenido en un abierto Ω del plano, $p \in \Omega$ y f es una función continua en Ω , tal que $f \in H(\Omega - \{p\})$. Entonces

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Teorema 1.14 (Teorema de Cauchy para un conjunto convexo). *Sean Ω un conjunto abierto y convexo, $p \in \Omega$. Si f es una función continua y $f \in H(\Omega - \{p\})$, entonces $f = F'$ para alguna $F \in H(\Omega)$ y por tanto,*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0, \text{ para todo camino } \gamma \text{ cerrado en } \Omega.$$

Demostración. Sea $a \in \Omega$ fijo. Por la convexidad de Ω , tenemos que Ω contiene el segmento de recta $[a, z] = \{(1-t)a + tz : t \in [0, 1]\}$, para todo $z \in \Omega$. Definamos

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi.$$

Para todo $z, z_0 \in \Omega$, el triángulo con vértices en a, z_0 y z está contenido en Ω ; por lo tanto $F(z) - F(z_0)$ es la integral de f sobre $[z_0, z]$. Por el teorema anterior, fijando z_0 , obtenemos que

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} [f(\xi) - f(z_0)]d\xi, \text{ para } z \neq z_0. \quad (1.4)$$

Por la continuidad de f en z_0 , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$, si $|\xi - z_0| < \delta$. Observando que el modulo del lado izquierdo de (1.4) es menor que ε , siempre que $|\xi - z_0| < \delta$, obtenemos que $F' = f$. Así el resultado se sigue por Teorema 1.13. \square

Teorema 1.15 (Fórmula de Cauchy en un conjunto convexo). *Sea γ un camino cerrado en un conjunto abierto y convexo Ω del plano y $f \in H(\Omega)$. Supongamos que $z \in \Omega \setminus \gamma^*$. Entonces*

$$f(z) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1.5)$$

Demostración. Sea $z \in \Omega \setminus \gamma^*$, definimos

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \in \Omega, \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si } \xi = z \end{cases} \quad (1.6)$$

Dado que, g satisface la hipótesis del teorema anterior, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\xi)d\xi = 0. \quad (1.7)$$

Sustituyendo (1.6) en (1.7) obtenemos (1.5). \square

Teorema 1.16. *Sea un abierto Ω del plano. Entonces toda función $f \in H(\Omega)$ es representable por serie de potencias en Ω .*

Demostración. Sea $f \in H(\Omega)$ y $D(a, R) \subseteq \Omega$. Consideremos γ una circunferencia positivamente orientada con centro en a y radio $r < R$. La convexidad de $D(a, r)$ nos permite aplicar el Corolario 1.11 junto con el Teorema 1.15, para obtener

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \text{ para todo } z \in D(a, r). \quad (1.8)$$

Puesto que, $|\xi - z| < r$ y $\xi \in \gamma^*$, un cálculo directo muestra la siguiente desigualdad

$$\frac{|f(\xi)| |z - a|^n}{|\xi - a|^{n+1}} \leq \frac{M}{r} \left(\frac{|z - a|}{r} \right)^n,$$

donde $M = \max \{|f(\xi)| : \xi \in S_r[a]\}$, el cual existe puesto que $S_r[a] = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - a| = r\}$ es un conjunto compacto y $|f|$ es continua en $S_r[a]$. Luego por M de Weierstrass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} = \frac{f(\xi)}{\xi - z} \quad (1.9)$$

converge uniformemente en γ , para todo z fijado en $D(a, r)$. De la serie (1.9), obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi) \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} \left[\frac{z - a}{\xi - a} \right]^n = \frac{f(\xi)}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z - a}{\xi - a} \right]^n. \quad (1.10)$$

Ahora, puesto $|z - a| < r = |\xi - a|$, se observa que $|\frac{z-a}{\xi-a}| < 1$. Por tanto, para todo $\xi \in S_r[a]$, se tiene que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z - a}{\xi - a} \right]^n = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{\xi - a}{\xi - z}.$$

Reemplazando está ultima igualdad en (1.10), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi) \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} = \frac{f(\xi)}{\xi - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z - a}{\xi - a} \right]^n = \frac{f(\xi)}{\xi - a} \cdot \frac{\xi - a}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z}.$$

Por la convergencia uniforme, podemos integrar término a término, obteniendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right] (z - a)^n.$$

Haciendo $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$, obtenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

□

Observación 1.17: De lo desarrollado hasta ahora, obtenemos las siguientes consecuencias:

(i) Por Corolario 1.6 y el teorema anterior tenemos que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

(ii) Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica entonces f es infinitamente diferenciable.

Corolario 1.18 (Estimativa de Cauchy). *Si f es analítica en $D(a, R)$ y $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(a, R)$. Entonces*

$$|f^n(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Demostración. Sea γ una circunferencia positivamente orientada con centro en a y radio $r < R$, entonces por la observación anterior, tenemos que

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi.$$

De esto, fácilmente obtenemos la siguiente desigualdad,

$$|f^n(a)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|^{n+1}} |d\xi| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r$$

Por lo tanto, haciendo $r \rightarrow R$ obtenemos que $|f^n(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$. □

Teorema 1.19 (Teorema de Morera). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en un abierto Ω del plano complejo tal que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0, \text{ para todo triángulo cerrado } \Delta \subseteq \Omega.$$

Entonces $f \in H(\Omega)$.

Demostración. Sea V un subconjunto convexo contenido en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Como en la prueba del Teorema 1.15, podemos construir $F \in H(V)$ tal que $F' = f$. Dado que la derivada de funciones holomorfas también son holomorfas (Teorema 1.16), tenemos que $f \in H(V)$, para todo conjunto abierto convexo contenido en Ω . Por tanto, $f \in H(\Omega)$. □

Definición 1.20: Decimos que una sucesión $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de funciones en Ω converge a f *uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω* si para todo compacto $K \subseteq \Omega$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $N = N(K, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon$, para todo $z \in K$, y para todo $j \geq N$.

Teorema 1.21. Sea $f_j \in H(\Omega)$ para $j = 0, 1, 2, \dots$ y supongamos que $f_j \rightarrow f$ uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω . Entonces $f \in H(\Omega)$ y $f'_j \rightarrow f'$ uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω .

Demostración. Primeramente probaremos que f es continua. En efecto, sea $z_0 \in \Omega$ entonces existe $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$. Por hipótesis, tenemos que para $\varepsilon > 0$, existe $j_0 = j(\overline{D(z_0, r)}, \varepsilon)$ tal que $|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon$, para todo $z \in \overline{D(z_0, r)}$. Sea $z, z' \in \overline{D(z_0, r)}$ y $j \geq j_0$, entonces

$$|f(z') - f(z)| \leq |f(z') - f_{j_0}(z')| + |f_{j_0}(z') - f_{j_0}(z)| + |f_{j_0}(z) - f(z)|.$$

Luego

$$|f(z') - f(z)| < 2\varepsilon + |f_{j_0}(z') - f_{j_0}(z)|. \quad (1.11)$$

Por continuidad uniforme de f_{j_0} en $\overline{D(z_0, r)}$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $z', z \in \overline{D(z_0, r)}$ con $|z' - z| < \delta$, entonces $|f_{j_0}(z') - f_{j_0}(z)| < \varepsilon$ y por la desigualdad anterior obtenemos que:

$$|f(z') - f(z)| < 3\varepsilon, \text{ siempre que } |z - z'| < \delta.$$

Luego f es uniformemente continua en $\overline{D(z_0, r)}$ y en consecuencia continua en z_0 .

Ahora probaremos que $f \in H(\Omega)$. Sea Δ un triángulo cerrado en Ω , entonces tenemos que Δ es un conjunto compacto y se verifica que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_j(z)dz = 0.$$

En efecto: Por Teorema de Cauchy tenemos que $\int_{\partial\Delta} f_j(z)dz = 0$ para todo $j \geq 1$ y

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz - \int_{\partial\Delta} f_j(z)dz \right| \leq \max \{|f(z) - f_j(z)| : z \in \partial\Delta\} \cdot \ell(\partial\Delta).$$

Por lo tanto $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ para todo triángulo cerrado $\Delta \subseteq \Omega$, entonces por Teorema de Morera $f \in H(\Omega)$.

Finalmente probaremos que f'_j converge uniformemente a f' en los subconjuntos compactos de Ω . En efecto, sea $z \in \overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$, entonces por la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$f'_j(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f_j(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} dz. \quad (1.12)$$

Donde $r_1 = r + \frac{\delta}{2}$, y $\delta = \text{dist}(\mathbb{C} \setminus \Omega, \overline{D(z_0, r)}) = \inf\{|a - b| : a \in \mathbb{C} \setminus \Omega \text{ y } b \in \overline{D(z_0, r)}\}$.

Luego $|\xi - z| \geq |\xi - z_0| - |z - z_0| = r_1 - |z - z_0|$ y como $|z - z_0| < r$, tenemos que $|\xi - z| \geq r_1 - |z - z_0| > r + \frac{\delta}{2} - r = \frac{\delta}{2}$. Por tanto, tenemos que $|\xi - z| > \frac{\delta}{2}$, para todo $\xi \in \mathbb{C}$

tal que $|\xi - z_0| = r_1$. Luego de (1.12) tenemos

$$|f'_j(z) - f'(z)| \leq \frac{4r_1}{\delta^2} \max \{|f_j(\xi) - f(\xi)|; |\xi - z_0| = r_1\}.$$

Esto prueba que $f'_j \rightarrow f'$ uniformemente en $\overline{D(z_0; r)} \subseteq \Omega$.

Sean $K \subseteq \Omega$ un subconjunto compacto y $\delta_K = \text{dist}(\mathbb{C} \setminus \Omega, K)$. Entonces

$$D(z, \delta_K/2) \subseteq \Omega, \text{ y } \{D(z, \delta_K/2), z \in K\} \text{ es un cubrimiento abierto de } K.$$

Por compacidad de K existe un subcubrimiento finito $\{D(z_1, \frac{\delta_K}{2}), \dots, D(z_p, \frac{\delta_K}{2})\}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^p \overline{D(z_i, \delta_K/2)}.$$

Lo que muestra que f'_j converge uniformemente a f' en K . □

Teorema 1.22. [9, Pag. 216] *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica no constante. Entonces para todo $U \subseteq \Omega$ abierto, $f(U)$ es abierto.*

Observación 1.23: El teorema anterior es muy conocido como el **Teorema de la Aplicación abierta** y por este resultado es fácil de ver que si $U, V \subseteq \mathbb{C}$ son subconjuntos abiertos y $f : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo, entonces f lleva la frontera de todo subconjunto abierto $A \subseteq U$ en la frontera de $f(A)$.

En esta parte daremos una desigualdad que utilizaremos en el siguiente resultado y que será de mucha utilidad en la parte central de este trabajo. Sea $f : D(z_0, r) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Observamos que si $z_1, z_2 \in D(z_0, r)$, entonces,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \sup\{|f'(\xi)| : \xi \in D(z_0, r)\} \cdot |z_1 - z_2|. \quad (1.13)$$

El cual es consecuencia inmediata del teorema fundamental del cálculo

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(\xi) d\xi \right| \leq \int_{[z_1, z_2]} |f'(\xi)| |d\xi|.$$

Como una consecuencia del Teorema de la aplicación abierta, tenemos el siguiente resultado, el cual nos da condiciones necesarias para que una función holomorfa definida en un abierto de \mathbb{C} , sea un difeomorfismo local.

Teorema 1.24. *Sea $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces Ω contiene una vecindad U de z_0 tal que:*

- (i) f es inyectiva en U , y

(ii) $V = f(U)$ es un conjunto abierto

(iii) Si $g : V \rightarrow U$ está definido por $g(f(z)) = z$ entonces $g \in H(V)$.

Demostración. Tenemos que (i) y (ii) es consecuencia directa del Teorema 1.22 y la desigualdad (1.13).

Probaremos (iii). Fijemos $w_1 \in V$, entonces por (i) y (ii), existe un único $z_1 \in V$ tal que $f(z_1) = w_1$. Si $w \in V$ y $g(w) = z$, entonces observamos que

$$\frac{g(w) - g(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} \quad (1.14)$$

Dado que f es una aplicación abierta, tenemos que g es continua, por tanto $z \rightarrow z_1$, siempre que $w \rightarrow w_1$. Como f es inyectiva en una vecindad de $z_1 \in V$, tenemos que $f'(z_1) \neq 0$. Luego tenemos que si $w \rightarrow w_1$, entonces (1.14) muestra que $g'(w_1) = 1/f'(z_1)$. Por tanto, g es diferenciable en todo punto de V . Así tenemos que $g \in H(V)$. \square

1.4 Productos infinitos

Definición 1.25: Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos definimos:

$$p_n = (1 + z_1) \cdots (1 + z_n) \quad (1.15)$$

y supongamos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$. Entonces escribimos

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n). \quad (1.16)$$

Los p_n son los *productos parciales del producto infinito* (1.15). Diremos que el **producto infinito** (1.15) *converge* si y solo si la sucesión p_n es convergente.

Observación 1.26: En el estudio de la serie infinita $\sum a_n$ es importante que los a_n se aproximen a cero rápidamente, en el estudio de los productos infinitos es de interés si los factores están cerca de 1 o no. Esto se tiene en cuenta en la anterior notación $1 + z_n$ está cerca de 1 si z_n está cerca de cero.

Lema 1.27. Sean z_1, z_2, \dots, z_N números complejos y

$$p_N = \prod_{n=1}^N (1 + z_n) \quad \text{y} \quad p_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |z_n|)$$

Entonces

$$p_N^* \leq \exp(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_N|), \quad (1.17)$$

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1. \quad (1.18)$$

Demostración. Para (1.17), observamos que para todo $x \geq 0$, tenemos $\exp(x) \geq 1 + x$, entonces sustituyendo $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_N|$ y multiplicando las desigualdades obtenemos:

$$p_N^* \leq \exp(|z_1| + |z_2| + \dots + |z_N|).$$

Para obtener (1.18) procedemos por inducción. Si $N = 1$, entonces

$$|p_1 - 1| = |1 + z_1 - 1| = |z_1| \leq \exp(|z_1|) - 1.$$

Supongamos la desigualdad dada en (1.18) es satisfecha para cualquier k -upla de números complejos. Sean $z_1, z_2, \dots, z_k, z_{k+1}$ números complejos. entonces tenemos

$$\begin{aligned} p_{k+1} - 1 &= p_k(1 + z_{k+1}) - 1 = p_k(1 + z_{k+1}) - 1 - z_{k+1} + z_{k+1} \\ &= (p_k - 1)(1 + z_{k+1}) + z_{k+1}. \end{aligned}$$

Tomando módulo, tenemos

$$\begin{aligned} |p_{k+1} - 1| &= |(p_k - 1)(1 + z_{k+1}) + z_{k+1}| \leq |p_k - 1| |1 + z_{k+1}| + |z_{k+1}| \\ &\leq |p_k - 1| (1 + |z_{k+1}|) + |z_{k+1}|. \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva, tenemos que $|p_k - 1| \leq p_k^* - 1$, y como $1 + |z_{k+1}| \leq \exp(|z_{k+1}|)$, tenemos

$$\begin{aligned} |p_{k+1} - 1| &\leq (p_k^* - 1)(1 + |z_{k+1}|) + |z_{k+1}| \\ &\leq (p_k^* - 1) \cdot \exp(|z_{k+1}|) + |z_{k+1}| \\ &\leq p_{k+1}^* + |z_{k+1}| - \exp(|z_{k+1}|) \\ &\leq p_{k+1}^* - 1. \end{aligned}$$

□

Definición 1.28: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces definimos

$$p_n(z) = (1 + f_1(z))(1 + f_2(z)) \cdots (1 + f_n(z)).$$

Decimos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n]$, **converge uniformemente en Ω** si y sólo si la sucesión $p_n = \prod_{k=1}^n [1 + f_k(z)]$ converge uniformemente en Ω .

Teorema 1.29. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas acotadas en un subconjunto $S \subseteq \mathbb{C}$ y supongamos que $\sum |f_n|$ es uniformemente convergente en S . Entonces el producto*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$$

es uniformemente convergente en S , y $f(z_0) = 0$ en algún punto $z_0 \in S$ si y sólo si $f_n(z_0) = -1$ para algún n . Además si $\{n_1, n_2, \dots\}$ es una permutación de $\{1, 2, \dots\}$, entonces también se tiene que

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + f_{n_k}(z)], \text{ para todo } z \in S.$$

Demostración. Por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ es uniformemente convergente, luego $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ es acotada en S . Si $p_n(z)$ denota el n -ésimo producto parcial de $\prod_{k=1}^{\infty} [1 + f_{n_k}(z)]$, entonces se concluye del Lema 1.27 que existe una constante $C > 0$ tal que $|p_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$. Eligamos $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, entonces existe un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |f_n(z)| < \varepsilon \text{ para todo } z \in S. \quad (1.19)$$

Sea $\{n_1, n_2, \dots\}$ una permutación de $\{1, 2, \dots\}$ si $n \geq N_0$ y m suficientemente grande tal que

$$\{1, 2, \dots, n\} \subseteq \{n_1, n_2, \dots, n_m\}.$$

Si denotamos $q_m(z) = \prod_{k=1}^m [1 + f_{n_k}(z)]$, entonces tenemos

$$q_m(z) - p_n(z) = p_n(z) \left(\prod_{n_k \geq N_0+1}^m [1 + f_{n_k}(z)] - 1 \right), \quad (1.20)$$

donde los n_k que figuran en (1.20) son todos distintos y mayores que N_0 , luego por las desigualdades (1.17) y (1.18) dadas en el Lema 1.27, obtenemos

$$|q_m(z) - p_n(z)| = |p_n(z)| \left| \prod_{n_k \geq N_0+1}^m [1 + f_{n_k}(z)] - 1 \right| \quad (1.21)$$

$$\leq |p_n(z)| \left(\prod_{n_k \geq N_0+1}^m (1 + |f_{n_k}(z)|) - 1 \right) \quad (1.22)$$

$$\leq |p_n(z)| \left(\exp\left(\sum_{n_k \geq N_0+1}^m |f_{n_k}(z)| \right) - 1 \right) \quad (1.23)$$

$$\leq |p_n(z)| (\exp(\varepsilon) - 1). \quad (1.24)$$

Por otro lado tenemos que

$$\exp(\varepsilon) - 1 = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots < \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots,$$

como $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, entonces $\exp(\varepsilon) - 1 \leq \frac{1}{1-\varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 2\varepsilon$ y reemplazando en (1.24) tenemos que

$$|q_m(z) - p_n(z)| \leq 2|p_n(z)|\varepsilon < 2C\varepsilon, \text{ para todo } z \in S. \quad (1.25)$$

Si $n_k = k$, ($k = 1, 2, \dots$), entonces $q_m = p_m$ y así (1.25) nos dice que $\{p_n\}$ es de Cauchy en S y por lo tanto converge uniformemente en S a una función límite a f . Además (1.25) muestra también que

$$|p_n(z) - p_{N_0}(z)| < 2|p_{N_0}(z)|\varepsilon, \text{ para todo } z \in S, \text{ y para todo } n > N_0.$$

Por cálculo directo tenemos que $|p_n(z)| - |p_{N_0}(z)| > -2|p_{N_0}(z)|\varepsilon$, lo cual implica que $|p_n(z)| > (1 - 2\varepsilon)|p_{N_0}(z)|$, para todo $n > N_0$ y para todo $z \in S$.

Dado que p_n converge a f uniformemente en S concluimos que

$$|f(z)| \geq (1 - 2\varepsilon)|p_{N_0}(z)|.$$

Esta última desigualdad muestra que $f(z) = 0$ si y sólo si $p_{N_0}(z) = 0$. Finalmente

$$|q_m(z) - f(z)| \leq |q_m(z) - p_n(z)| + |p_n(z) - f(z)|.$$

Por (1.25) tenemos $|q_m(z) - p_n(z)| < 2C\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_0$ y para todo $z \in S$. Como p_n converge a f uniformemente en S , entonces existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N' \text{ para todo } z \in S.$$

Por lo tanto

$$|q_m(z) - f(z)| < \varepsilon(2C + 1), \text{ para todo } z \in S \text{ y } m \text{ suficientemente grande.}$$

Así

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_{n_k}), \text{ para todo } z \in S.$$

□

Corolario 1.30. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas acotadas en la región Ω , si $f_n \in H(\Omega)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ y supongamos que $\sum |f_n|$ es uniformemente convergente en los subconjuntos compactos de Ω . Entonces el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) \quad z \in \Omega$$

es uniformemente convergente en los subconjuntos compactos de Ω . Por lo tanto $f \in H(\Omega)$

Demostración. Aplicación directa del teorema anterior y Teorema [1.21](#). □

Dinámica de difeomorfismos locales analíticos

Índice

2.1. Equivalencia analítica de difeomorfismos locales	19
2.2. Comportamiento dinámico de difeomorfismos locales	21
2.2.1. Difeomorfismos locales con $ \varphi'(0) \neq 1$	21
2.2.2. Difeomorfismos locales con $ \varphi'(0) = 1$	26

En este capítulo, estudiaremos el comportamiento dinámico de las órbitas de difeomorfismos locales analíticos, para ello introduciremos la noción de difeomorfismos locales analíticamente equivalentes y describiremos el comportamiento dinámico de las órbitas de un difeomorfismo local. Los resultados de este capítulo pueden ser encontrados en Beardon Alan F [3], César Camacho, Paulo Sad [5] y Paulo Sad [8].

2.1 Equivalencia analítica de difeomorfismos locales

Definición 2.1: Sean $\varphi, \psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismos locales analíticos tales que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Decimos que φ *es analíticamente equivalente a* ψ si existe un difeomorfismo analítico F , satisfaciendo las siguientes condiciones

- (i) $F(0) = 0$ y $F'(0) = 1$,

(ii) Existe $U \subseteq \mathbb{C}$ vecindad del origen tal que $F(\varphi(z)) = \psi(F(z))$ para todo $z \in U$.

Es decir el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}, 0) \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\psi} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

Lema 2.2. Sean $\varphi, \psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismos analíticos locales de \mathbb{C} en \mathbb{C} , tales que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Si φ es analíticamente equivalente a ψ , entonces $\varphi'(0) = \psi'(0)$.

Demostración. En efecto, por definición y por regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} F'(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0) &= \psi'(F(0)) \cdot F'(0) \\ F'(0) \cdot \varphi'(0) &= \psi'(0) \cdot F'(0) \end{aligned}$$

Por tanto se sigue que $\varphi'(0) = \psi'(0)$. □

Si φ es analíticamente equivalente a ψ entonces existe una vecindad U del origen tal que $F(\varphi(z)) = \psi(F(z))$ para todo $z \in U$. Como las composiciones $F \circ \varphi$ y $\psi \circ F$ están bien definidas, existen vecindades $V, W \subseteq \mathbb{C}$ del origen tales que $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi : W \rightarrow \mathbb{C}$ con $\varphi(U) \subseteq V \subseteq U$, $F(U) \subseteq W$ y

$$\varphi(z) = F^{-1} \circ \psi \circ F(z), \text{ para todo } z \in U.$$

Luego componiendo tenemos

$$\begin{aligned} \varphi^2(z) &= F^{-1} \circ \psi \circ F(\varphi(z)) \\ &= F^{-1} \circ \psi \circ F \circ F^{-1} \circ \psi \circ F(z) \\ &= F^{-1} \circ \psi^2 \circ F(z), \end{aligned}$$

para todo $z \in U$. Por inducción se prueba que $\varphi^n(z) = F^{-1} \circ \psi^n \circ F(z)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in U$.

Definición 2.3: Sean $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismo local analítico y $z \in \mathbb{C}$. Entonces se define la **órbita positiva de φ en z** (**órbita negativa respectivamente**) como.

$$\begin{aligned} O_+(\varphi, z) &:= \{\varphi^n(z) : n \geq 0\}. \\ O_-(\varphi, z) &:= \{\varphi^{-n}(z) : n \geq 0\}. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior, observamos que para estudiar el comportamiento dinámico de las órbitas de φ en una vecindad del 0 es suficiente estudiar la dinámica de las órbitas ψ en una vecindad del 0.

2.2 Comportamiento dinámico de difeomorfismos locales

En esta sección estudiaremos el comportamiento dinámico de difeomorfismos locales analíticos $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, el cual es parte central en este trabajo. Los resultados de esta sección pueden ser encontrados en Paulo Sad [8].

Definición 2.4: Sean $\varphi, \psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismos analíticos locales. Si φ es analíticamente equivalente a ψ , con $\psi(z) = \lambda z$ donde $\lambda = \varphi'(0)$ entonces decimos que φ es *analíticamente equivalente a su parte lineal o es linealizable*.

En esta sección estudiaremos algunas condiciones donde un difeomorfismo local analítico $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es linealizable, para esto analizaremos la parte lineal $\lambda = \varphi'(0)$ y mostraremos algunos resultados que dependen del valor de λ .

2.2.1 Difeomorfismos locales con $|\varphi'(0)| \neq 1$

En esta sección mostraremos que todo difeomorfismo local analítico $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es linealizable. Para estudiar el problema de linealización primero analizaremos cuando $|\lambda| < 1$.

Lema 2.5. Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un difeomorfismo local con $\varphi'(0) = \lambda$. Si $0 < |\lambda| < 1$, entonces dado $u \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |\lambda| < u < 1$, existe $r > 0$, tal que

$$|\varphi(z)| < u|z|, \text{ para todo } |z| \leq r.$$

Demostración. Sea $\varepsilon = u - |\lambda| > 0$, entonces por definición de derivada en 0, existe $r > 0$ tal que

$$\left| \frac{\varphi(z)}{z} - \varphi'(0) \right| < u - |\lambda|, \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| \leq r,$$

teniendo en cuenta que $\varphi'(0) = \lambda$, obtenemos

$$\left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| - |\varphi'(0)| < \left| \frac{\varphi(z)}{z} - \varphi'(0) \right| < u - |\lambda|. \quad (2.1)$$

De donde concluimos que $|\varphi(z)| < u|z|$, para todo $|z| \leq r$. □

Del lema anterior se observa lo siguiente

$$|\varphi^2(z)| = |\varphi(\varphi(z))| < u |\varphi(z)| < u \cdot u |z| < u^2 |z|, \text{ para todo } |z| \leq r.$$

Por inducción se sigue que:

$$|\varphi^n(z)| < u^n |z|, \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y para todo } |z| \leq r, \text{ con } 0 < u < 1. \quad (2.2)$$

Como $0 < u < 1$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = 0$ y tomando límite en la desigualdad (2.2) obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0, \text{ para todo } |z| \leq r.$$

Así la órbita positiva $O_+(\varphi, z) = \{\varphi^n(z) : n \geq 0\}$ de cualquier $z \in \mathbb{C}$ en el disco cerrado de radio r y centro $0 \in \mathbb{C}$ converge al punto fijo cero. Diremos en este caso que cero es un **punto fijo atractor** de φ .

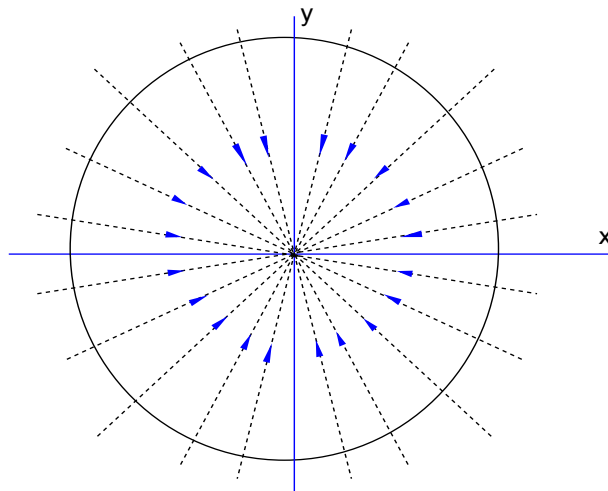


Figura 2.1: Punto fijo atractor

Teorema 2.6. *Existe una única función analítica F definida para $|z| \leq r$, satisfaciendo $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ y*

$$F(\varphi(z)) = \lambda F(z), \text{ para todo } |z| \leq r.$$

Es decir φ es analíticamente equivalente a su parte lineal.

Demostración. Consideremos la secuencia de funciones $\{h_n\}_{n \geq 0}$, definidas como

$$h_n(z) = \frac{\varphi^n(z)}{\lambda^n}, \text{ para todo } |z| \leq r,$$

donde $h_0(z) = z$. Probaremos que la secuencia $\{h_n\}_{n \geq 0}$ es uniformemente convergente, para

esto observamos que

$$h_{n+1}(z) = z \cdot \frac{h_1(z)}{h_0(z)} \cdot \frac{h_2(z)}{h_1(z)} \cdots \frac{h_{n+1}(z)}{h_n(z)} \quad (2.3)$$

$$= z \cdot \prod_{i=0}^n \frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)} \quad (2.4)$$

para todo $z \neq 0$. Si $z = 0$, entonces $h_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Por otro lado tenemos que

$$\frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\varphi^{i+1}(z)}{\varphi^i(z)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\varphi(\varphi^i(z))}{\varphi^i(z)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\varphi(z_i)}{z_i}, \quad \text{donde } z_i = \varphi^i(z).$$

Luego por (2.4), obtenemos

$$h_{n+1}(z) = z \prod_{i=0}^n \frac{\varphi(z_i)}{\lambda z_i}. \quad (2.5)$$

Dado que φ es una función analítica con $\varphi(0) = 0$, se sigue que

$$\varphi(z) = \lambda z + R(z), \quad \text{donde } R(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,$$

con $R(z)$ convergente en $D[0, r]$. Luego $\frac{\varphi(z)}{\lambda z} = 1 + \frac{R(z)}{\lambda z}$, para todo $z \neq 0$, haciendo $\xi(z) = \frac{R(z)}{\lambda z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \frac{R(z)}{\lambda z} = \frac{1}{\lambda z} \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \\ &= \frac{1}{\lambda z} z^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} z^k = \frac{z}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} z^k. \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ es convergente en $D[0, r]$, tenemos que $\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| r^k < \infty$, de donde se sigue que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+2}| r^k < \infty$. Concluyendo que $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} z^k$ es convergente en $D[0, r]$ y por consiguiente ξ es convergente en $D[0, r]$. Luego tomando módulo, obtenemos

$$|\xi(z)| \leq \frac{1}{|\lambda|} |z| \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+2}| |z|^k \leq \alpha |z|, \quad (2.6)$$

para todo $|z| \leq r$. Así $\varphi(z)/\lambda z = 1 + \xi(z)$ con $|\xi(z)| \leq \alpha |z|$, para todo $|z| \leq r$, donde α es un número real positivo. Dado que $z_i = \varphi^i(z)$, tenemos que $|z_i| = |\varphi^i(z)| \leq u^i |z|$ donde $u < 1$. Por lo tanto $|z_i| \leq r$, para todo $i \geq 0$. Así mostramos que $\frac{\varphi(z_i)}{\lambda z_i} = 1 + \xi(z_i)$ con ξ convergente. De (2.4) y (2.5) obtenemos

$$h_{n+1}(z) = z \prod_{i=0}^n \frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)} = z \prod_{i=0}^n \frac{\varphi(z_i)}{\lambda z_i} = z \prod_{i=0}^n [1 + \xi(z_i)].$$

Finalmente como $|z_i| = |\varphi^i(z)| < u^i |z|$ tenemos

$$\sum_i^\infty |\xi(z_i)| \leq \sum_i^\infty \alpha |z_i| < \alpha |z| \sum_i^\infty u^i < \infty.$$

Como $0 < u < 1$, la serie $\sum_{i=0}^\infty u^i$ es convergente. Luego por el Teorema 1.29 la sucesión de funciones $\{h_n\}$ es uniformemente convergente en $|z| \leq r$.

Sea $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z)$, entonces por Teorema 1.21, se sigue que F es analítica y además $F(0) = 0$ y $F'(0) = 1$. En efecto, como $h_n(0) = 0$ para todo $n \geq 0$, se sigue que $F(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(0) = 0$. Ahora probaremos que $F'(0) = 1$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} h_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{z} \prod_{i=0}^n [1 + \xi(z_i)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n [1 + \xi(z_i)],$$

donde $z_i = \varphi^i(z)$. Luego tomando limite y usando la desigualdad (2.6), obtenemos

$$F'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n [1 + \xi(z_i)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n \left[1 + \lim_{z \rightarrow 0} \xi(z_i) \right] = 1.$$

También observamos que

$$F(\varphi(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\varphi(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{n+1}(z)}{\lambda^n} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n+1}(z) = \lambda F(z)$$

Así

$$F(\varphi(z)) = \lambda F(z), \text{ para todo } |z| \leq r.$$

Finalmente mostraremos la unicidad. Sea $\tilde{F}(z)$ otra función analítica definida en una vecindad del origen tal que $\tilde{F}(0) = 0$, $\tilde{F}'(0) = 1$ y $\tilde{F}(\varphi(z)) = \lambda \tilde{F}(z)$, entonces consideremos la función analítica definida como

$$H(z) = \tilde{F} \circ F^{-1}(z).$$

Se tiene que H satisface $H(0) = 0$, $H'(0) = 1$ y $H(\lambda z) = \lambda H(z)$ para todo z en una vecindad del origen, desde que, $H(0) = \tilde{F}(F^{-1}(0)) = \tilde{F}(0) = 0$ y por regla de la cadena se tiene

$$H'(0) = [\tilde{F}]'(F^{-1}(0)) \cdot [F^{-1}]'(0) = \tilde{F}'(0) \cdot [F^{-1}]'(0) = 1.$$

Además se observa que $F(\varphi(F^{-1}(z))) = \lambda F \circ F^{-1}(z) = \lambda z$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} H(\lambda z) &= \tilde{F} \circ F^{-1}(\lambda z) = \tilde{F} \circ F^{-1}(F(\varphi(F^{-1}(z)))) \\ &= \tilde{F}(\varphi(F^{-1}(z))) = \lambda \tilde{F}(F^{-1}(z)) = \lambda H(z). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $H(z) = z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots$. Entonces

$$H(\lambda \cdot z) = \lambda z + \lambda^2 b_2 z^2 + \lambda^2 b_3 z^3 + \dots \quad (2.7)$$

$$\lambda \cdot H(z) = \lambda z + \lambda b_2 z^2 + \lambda b_3 z^3 + \dots \quad (2.8)$$

Como $H(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot H(z)$, tenemos que $b_n(\lambda^n - \lambda) = 0$ para todo $n \geq 2$ y como $\lambda^n - \lambda \neq 0$, concluimos que $b_n = 0$, para todo $n \geq 2$. Reemplazando en su desarrollo en serie de potencias tenemos que $H(z) = z$ y consecuentemente $\tilde{F} = F$. \square

Así para $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismo local analítico con $\varphi'(0) = \lambda$, $0 < |\lambda| < 1$ tenemos que φ es analíticamente equivalente a su parte lineal λz y $0 \in \mathbb{C}$ es un punto fijo atractor. La siguiente gráfica muestra un punto fijo atractor.

Ahora consideremos un difeomorfismo analítico local $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, tal que $|\lambda| > 1$. En este caso, tenemos que $[\varphi^{-1}]'(0) = \frac{1}{\varphi'(0)} = \frac{1}{\lambda}$, de donde $|[\varphi^{-1}]'(0)| < 1$. Aplicando el Lema 2.5 a la función analítica φ^{-1} tenemos que dado $u \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{|\lambda|} < u < 1$, existe $r > 0$ tal que

$$|\varphi^{-1}(z)| < u|z|, \text{ para todo } |z| < r. \quad (2.9)$$

Luego por inducción se sigue que

$$|\varphi^{-n}(z)| < u^n |z|, \text{ para todo } |z| \leq r.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = 0, \text{ para todo } |z| \leq r.$$

Es decir la órbita negativa $O_-(\varphi, z) = \{\varphi^{-n}(z) : n \geq 0\}$ de cualquier $z \in \mathbb{C}$ en el disco cerrado de radio r y centro $0 \in \mathbb{C}$ converge al punto fijo 0. Diremos en este caso que 0 es un **punto fijo repulsor**.

Teorema 2.7. Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismo analítico local tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \lambda$ con $|\lambda| > 1$. Entonces existe una única función analítica F tal que $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ y

$$F(\varphi(w)) = \lambda F(w), \text{ para todo } w \text{ en una vecindad del origen.}$$

Demostración. Considerando la aplicación $w = \varphi^{-1}(z)$ y aplicando el Teorema 2.6, tenemos que existe F analítica en una vecindad del origen tal que $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ y $F(\varphi^{-1}(z)) = \frac{1}{\lambda} F(z)$. Luego como $z = \varphi(w)$, reemplazando en la igualdad anterior tenemos que:

$$\lambda F(w) = \lambda F(\varphi^{-1}(\varphi(w))) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} F(\varphi(w)) = F(\varphi(w)).$$

\square

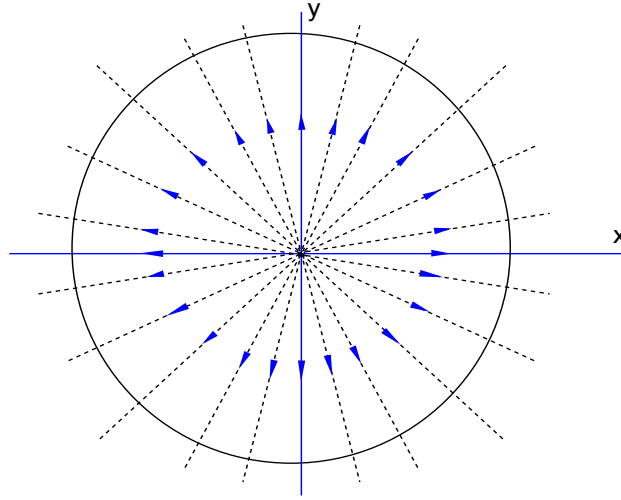


Figura 2.2: Punto fijo repulsor

2.2.2 Difeomorfismos locales con $|\varphi'(0)| = 1$

Finalmente, consideremos $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}, 0)$ un difeomorfismo analítico local con $|\lambda| = 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ raíz de la unidad. Consideremos inicialmente el caso $\lambda = 1$. En este caso tenemos que su desarrollo en serie de potencias en una vecindad del origen está dado por:

$$\varphi(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad \text{con } a_2 \neq 0.$$

Podemos suponer que $a_2 = -1$, considerando

$$\tilde{\varphi}(z) = z - z^2 + \frac{a_3}{a_2^2} z^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a_n}{a_2^{n-1}} z^n + \dots \quad \text{y } F(z) = -a_2 z.$$

Un cálculo sencillo, muestra que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \circ F(z) &= \tilde{\varphi}(-a_2 z) = -a_2 z - a_2^2 z^2 - a_3 a_2 z^3 - \dots - a_n a_2 z^n + \dots \\ F \circ \varphi(z) &= -a_2 \varphi(z) = -a_2 z - a_2^2 z^2 - a_3 a_2 z^3 - \dots - a_n a_2 z^n + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{\varphi} \circ F(z) = F \circ \varphi(z)$. Así φ es analíticamente equivalente a $\tilde{\varphi}$ y por la observación hecha anteriormente, es suficiente estudiar el comportamiento dinámico de las orbitas de $\tilde{\varphi}$.

Asumiendo que $a_2 = -1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= z - z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \dots \\ \varphi(z) &= z - z^2 \left[1 - a_3 z - a_4 z^2 - a_5 z^3 - \dots \right] \end{aligned}$$

Haciendo $\psi(z) = 1 - a_3 z - a_4 z^2 - a_5 z^3 - \dots$ tenemos que ψ es analítica con $\psi(0) = 1$.

Lo que nos permite mostrar lo siguiente

$$\varphi(z) = z - z^2\psi(z) = z[1 - z\psi(z)] = z \left[\frac{1}{\frac{1}{1-z\psi(z)}} \right] = z \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{1-z\psi(z)} - 1} \right].$$

Por lo tanto

$$\varphi(z) = z \left[\frac{1}{1 + z \left[\frac{\psi(z)}{1-z\psi(z)} \right]} \right].$$

Ahora sea $\xi(z) = \frac{\psi(z)}{1-z\psi(z)}$. Observamos que $1 - z\psi(z)$ es diferente de cero en una vecindad del origen, por tanto concluimos que ξ es analítica en una vecindad del origen con $\xi(0) = 1$.

Luego podemos escribir

$$\varphi(z) = z \left[\frac{1}{1 + z\xi(z)} \right] = \frac{z}{1 + z\xi(z)}.$$

Haciendo el cambio de coordenadas $z = w^{-1}$, tenemos que

$$\varphi(w^{-1}) = \frac{w^{-1}}{1 + w^{-1}\xi(w^{-1})}.$$

Sea $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismo local definido por $\phi(w) = \frac{1}{\varphi(w^{-1})}$, entonces por la igualdad anterior observamos fácilmente que $\phi(w) = w + \xi(w^{-1})$.

Como $\xi(z)$ es analítica en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}$ y $\xi(0) = 1$, entonces podemos suponer que el desarrollo en serie de potencias de ξ es dado por $\xi(z) = 1 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots$

Reescribiendo ξ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \xi(z) &= 1 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots \\ &= 1 + z \left[b_1 + b_2z + b_3z^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Tenemos que $\xi(z) = 1 + z\tilde{\xi}(z)$, con $\tilde{\xi}(z) = b_1 + b_2z + b_3z^2 + \dots$. De donde se observa fácilmente que $\tilde{\xi}$ es analítica en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$. Por lo tanto

$$\phi(w) = w + 1 + w^{-1}\tilde{\xi}(w^{-1}). \quad (2.10)$$

Nuestro cambio de coordenadas significa que una vecindad del origen es llevado por $z = f(w) = w^{-1}$ en una vecindad del infinito y es hecha de tal manera que $\phi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$ sea analíticamente equivalente a φ , entonces por lo visto anteriormente para estudiar el comportamiento dinámico de φ será suficiente estudiar el comportamiento dinámico de ϕ el cual será mas sencillo porque se aproxima al comportamiento dinámico de la transformación de $w + 1$.

Lema 2.8.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} w^{-1} \tilde{\xi}(w^{-1}) = 0. \quad (2.11)$$

Demostración. En efecto, el resultado se sigue de la siguiente igualdad:

$$w^{-1} \tilde{\xi}(w^{-1}) = w^{-1} [b_1 + b_2 w^{-1} + b_3 w^{-2} + \dots].$$

□

Por lema anterior, tenemos que para $0 < \varepsilon \ll 1$, existe $R > 0$ tal que $|w^{-1} \tilde{\xi}(w^{-1})| < \varepsilon$, para todo $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| > R$. Sea $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la traslación definida por $T(w) = w + 1$, entonces (2.10) muestra que

$$|\phi(w) - T(w)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } |w| > R. \quad (2.12)$$

Por lo tanto para $0 < \varepsilon \ll 1$, existe $R > 0$, tal que $|\phi(w) - T(w)| < \varepsilon$, para todo $|w| > R$.

Lo que afirma (2.12) es que para $|w| > R$, con R conveniente ϕ se comporta aproximadamente como la traslación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $T(w) = w + 1$. Entonces podemos tomar las orbitas de $\phi(w)$ como las orbitas de $T(w)$ para todo $|w| > R$.

Sea L_1^+ subconjunto de \mathbb{C} definido por $L_1^+ = \{w \in \mathbb{C} : \text{Rea}(w) > R\}$, donde $\text{Rea}(w)$ denota la parte real del número complejo w . El siguiente lema resalta la importancia de este conjunto.

Lema 2.9.

$$\phi(L_1^+) \subseteq L_1^+ \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(w) = \infty \text{ uniformemente en } L_1^+. \quad (2.13)$$

Demostración. Sea $w \in L_1^+$, entonces $|w| \geq \text{Rea}(w) > R$. Por la igualdad (2.10) tenemos que $\phi(w) - T(w) = w^{-1} \tilde{\xi}(w^{-1})$. De (2.12) deducimos fácilmente que

$$\text{Rea}(\phi(w)) > \text{Rea}(w) + 1 - \varepsilon > R, \quad \text{para todo } w \in L_1^+. \quad (2.14)$$

Por tanto $\phi(w) \in L_1^+$.

Ahora mostraremos la segunda afirmación: Sea $w \in L_1^+$, entonces por la primera afirmación tenemos que $\phi(w) \in L_1^+$ y por inducción se sigue que $\phi^n(w) \in L_1^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego por definición de L_1^+ y la primera desigualdad dada en (2.14), tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi(w)| &\geq |\text{Rea}(\phi(w))| > \text{Rea}(w) + 1 - \varepsilon > R + 1 - \varepsilon \\ |\phi^2(w)| &\geq |\text{Rea}(\phi^2(w))| > \text{Rea}(\phi(w)) + 1 - \varepsilon > R + 2(1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

y por inducción se sigue que

$$|\phi^n(w)| \geq |\text{Rea}(\phi^n(w))| > \text{Rea}(w) + n(1 - \varepsilon) > R + n(1 - \varepsilon),$$

para todo $n \geq 1$ y para todo $w \in L_1^+$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(w) = \infty \text{ uniformemente en } L_1^+.$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia directa de retornar a las coordenadas originales.

Proposición 2.10. *Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismo analítico local con $\varphi'(0) = 1$ y $\varphi(z) = z - z^2 + \dots$. Entonces existe una región $S_1^+ \subseteq \mathbb{C}$ tal que*

$$\varphi(S_1^+) \subseteq S_1^+ \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = \infty \text{ uniformemente en } S_1^+. \quad (2.15)$$

Demostración. Por el cambio de coordenadas, observamos que $\phi(w) = \frac{1}{\varphi(w-1)} = f^{-1} \circ \varphi \circ f(w)$, donde $z = f(w) = w^{-1}$. Sea el conjunto $S_1^+ \subseteq \mathbb{C}$ definido por $S_1^+ = f(L_1^+)$, entonces por Lema 2.9 tenemos que $\phi(L_1^+) \subseteq L_1^+$, lo que implica que

$$\varphi(S_1^+) \subseteq S_1^+. \quad (2.16)$$

De otro lado tenemos que

$$\phi^n(w) = f^{-1} \circ \varphi^n \circ f(w) = \frac{1}{\varphi^n(z)}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

De la segunda parte del Lema 2.9, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0, \text{ uniformemente en } S_1^+ \quad (2.17)$$

Así por (2.16) y (2.17) hemos demostrado que existe una región $S_1^+ \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(S_1^+) \subseteq S_1^+ \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0 \text{ uniformemente en } S_1^+$$

□

Observación 2.11: La transformación $z = f(w) = w^{-1}$, lleva rectas que no pasan por el origen en circunferencias que pasan por el origen, con esta observación se puede describir geoméricamente S_1^+ y el comportamiento dinámico de las orbitas de φ .

Observemos que $f(w) = w^{-1}$ lleva la recta $L_1 = \{w \in \mathbb{C} : \text{Rea}(w) = R\}$ en la circunferencia $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2R}| = \frac{1}{2R}\}$. Así tenemos que $f(w) = w^{-1}$ lleva el conjunto L_1^+ en el conjunto S_1^+ como se muestra en la siguiente gráfica.

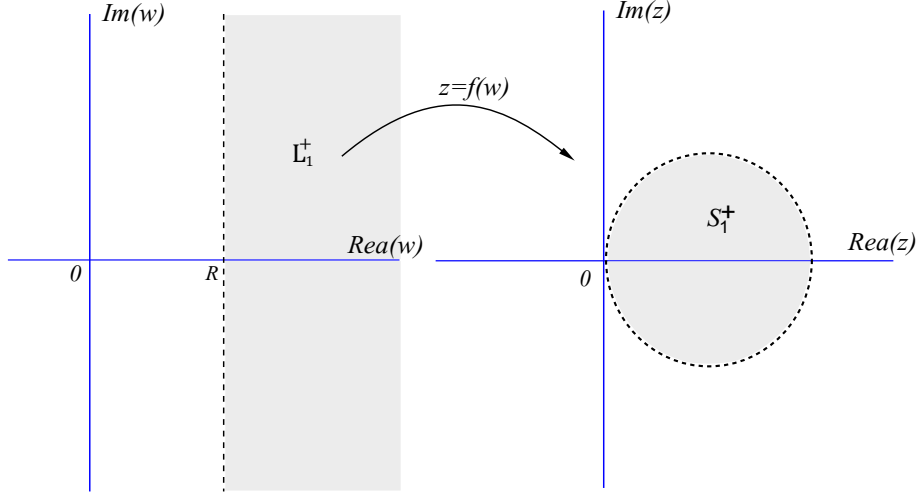


Figura 2.3: Cambio de coordenadas

Para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R$, hemos visto que $\phi(w)$ se comporta aproximadamente como la traslación $T(w) = w + 1$, luego la inversa de ϕ se comporta aproximadamente como la inversa de la traslación T la cual es $T^{-1}(w) = w - 1$, es decir,

$$|\phi^{-1}(w) - T^{-1}(w)| < \varepsilon, \text{ para todo } |w| > R, \quad (2.18)$$

con $0 < \varepsilon \ll 1$.

Sea L_1^- subconjunto de \mathbb{C} definido por $L_1^- = \{w \in \mathbb{C} : \text{Rea}(w) < -R\}$, el siguiente lema resalta la importancia de este conjunto en el estudio del comportamiento dinámico de las orbitas de ϕ .

Lema 2.12.

$$\phi^{-1}(L_1^-) \subseteq L_1^-, \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(w) = \infty \text{ uniformemente en } L_1^- \quad (2.19)$$

Demostración. Sea $w \in L_1^-$, entonces $|w| > -\text{Rea}(w) > R$ y de (2.18) se deduce que $\varepsilon > |\phi^{-1}(w) - T^{-1}(w)| > |\text{Rea}(\phi^{-1}(w) - T^{-1}(w))|$, de donde obtenemos

$$\text{Rea}(\phi^{-1}(w)) < \text{Rea}(T^{-1}(w)) + \varepsilon < \text{Rea}(w) - 1 + \varepsilon < -R, \quad (2.20)$$

para todo $w \in L_1^-$. Por tanto tenemos que $\phi^{-1}(w) \subseteq L_1^-$, para todo w en L_1^- .

Mostraremos la segunda afirmación: Sea $w \in L_1^-$, entonces por la primera afirmación se sigue que $\phi^{-1}(w) \in L_1^-$ y por inducción $\phi^n(w) \in L_1^-$, para todo $n \geq 1$. Luego por definición

de L_1^- y por la primera desigualdad dada en (2.20), tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi^{-2}(w)| &\geq |\operatorname{Rea}(\phi^{-2}(w))| > -\operatorname{Rea}(T^{-1}(\phi^{-1}(w))) - \varepsilon = -\operatorname{Rea}(\phi^{-1}(w)) + 1 - \varepsilon \\ &> -\operatorname{Rea}(T^{-1}(w)) + 1 - 2\varepsilon = -\operatorname{Rea}(w) + 2 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Luego por aplicaciones sucesivas de la primera desigualdad (2.20), tenemos que

$$|\phi^{-n}(w)| > -\operatorname{Rea}(\phi^{-1}(w)) + n - n\varepsilon > R + n(1 - \varepsilon).$$

para todo $n \geq 1$ y para todo $w \in L_1^-$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(w) = \infty \text{ uniformemente en } L_1^-.$$

□

Retornando a las coordenadas originales, se obtiene el siguiente resultado que describe el comportamiento dinámico de las orbitas negativas de un difeomorfismo local.

Proposición 2.13. *Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismo analítico local con $\varphi'(0) = 1$ y $\varphi(z) = z - z^2 + \dots$. Entonces existe una región $S_1^- \subseteq \mathbb{C}$ tal que*

$$\varphi(S_1^-) \subseteq S_1^- \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = \infty \text{ uniformemente en } S_1^-. \quad (2.21)$$

Demostración. Del cambio de coordenadas, se observa que $\phi^{-1}(w) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ f(w)$, donde $z = f(w) = w^{-1}$. Sea S_1^- un subconjunto de \mathbb{C} definida por $S_1^- = f(L_1^-)$. Por Lema 2.12 tenemos que $\phi^{-1}(L_1^-) \subseteq L_1^-$, lo que implica que

$$\varphi^{-1}(S_1^-) \subseteq S_1^-. \quad (2.22)$$

Como el caso anterior tenemos que $\phi^{-n}(w) = f^{-1} \circ \varphi^{-n} \circ f(w) = \frac{1}{\varphi^{-n}(z)}$, para todo $n \geq 1$. Por la segunda parte del Lema 2.12, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = 0, \text{ uniformemente en } S_1^-. \quad (2.23)$$

□

Para describir geoméricamente S_1^- y el comportamiento dinámico de las orbitas negativas de φ , observamos que la recta $L_2 = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Rea}(w) = -R\}$ es llevada por f en la circunferencia $C_1^{-1} = \{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{1}{2R}| = \frac{1}{2R}\}$ y L_1^- es llevado por f en S_1^- como se muestra en la siguiente gráfica

Finalmente tenemos el siguiente resultado.

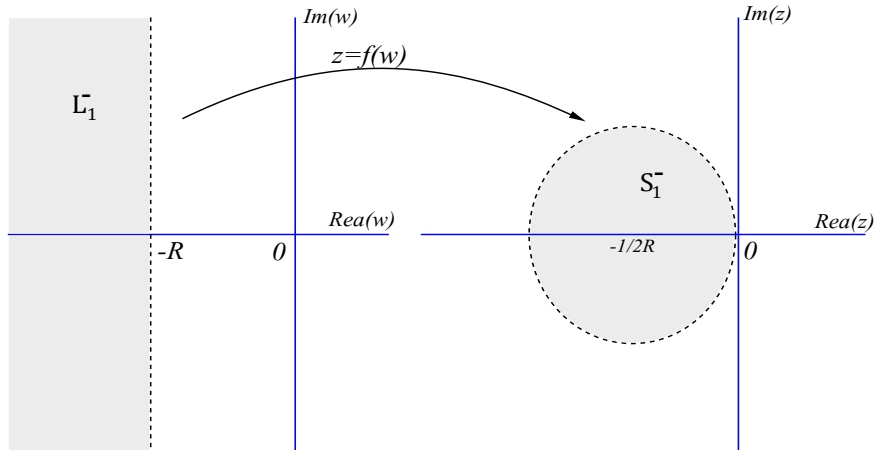


Figura 2.4: Cambio de coordenadas

Lema 2.14. Si $w \notin L_1^+ \cup L_1^-$ y $|w| > R$, entonces las orbitas positivas de ϕ (resp. sus orbitas negativas) atraviesan L_1^+ (resp. L_1^-).

Demostración. Supongamos que $w \notin L_1^+ \cup L_1^-$ y $|w| > R$, entonces de (2.11) y (2.12), tenemos que $\text{Rea}(\phi(w)) > \text{Rea}(w) + 1 - \varepsilon$, y por inducción se sigue que

$$\text{Rea}(\phi^n(w)) > \text{Rea}(w) + n(1 - \varepsilon), \text{ para todo } |w| > R. \quad (2.24)$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq \frac{R + |\text{Rea}(w)|}{1 - \varepsilon}$, entonces por la desigualdad anterior tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$,

$$\text{Rea}(\phi^n(w)) \geq \text{Rea}(w) + R + |\text{Rea}(w)| \text{ y como } |\text{Rea}(w)| + \text{Rea}(w) \geq 0,$$

Obtenemos que $\phi^n(w) \in L_1^+$ para todo $n \geq n_0$.

Por otro lado de (2.18), fácilmente obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\text{Rea}(\phi^{-1}(w)) < \text{Rea}(w) - 1 + \varepsilon, \text{ para todo } |w| > R.$$

Luego por inducción también se prueba que

$$\text{Rea}(\phi^{-n}(w)) < \text{Rea}(w) - n(1 - \varepsilon), \text{ para todo } |w| > R. \quad (2.25)$$

Por la desigualdad (2.25), tenemos que para todo $n \geq n_0$ se cumple:

$$\text{Rea}(\phi^{-n}(w)) < \text{Rea}(w) - n(1 - \varepsilon) < \text{Rea}(w) - R - |\text{Rea}(w)|.$$

Por lo tanto, como $\operatorname{Rea}(w) - |\operatorname{Rea}(w)| \leq 0$, tenemos que $\operatorname{Rea}(\phi^{-n}(w)) < -R$, para todo $n \geq n_0$. Lo que muestra lo afirmado. \square

Proposición 2.15. *Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un difeomorfismo analítico local con $\varphi'(0) = 1$ y $\varphi(z) = z - z^2 + \dots$. Entonces, si $z \notin S_1^+ \cup S_1^-$, las orbitas positivas de φ (resp. las orbitas negativas) atraviesan S_1^+ (resp. S_1^-).*

Demostración. Del cambio de coordenadas, sea $z = f(w) = w^{-1} \notin S_1^+ \cup S_1^-$ con $|w| > R$, entonces $w \notin L_1^+ \cup L_1^-$. Por Lema 2.14, tenemos que $\phi^n(w) = f^{-1} \circ \varphi^n(z) \in L_1^+$, para todo $n \geq n_0$, obteniendo $\varphi^n(z) \in f(L_1^+) = S_1^+$ para todo n suficientemente grande, así la orbita positiva de φ (resp. negativa) atraviesa S_1^+ (resp. S_1^-). \square

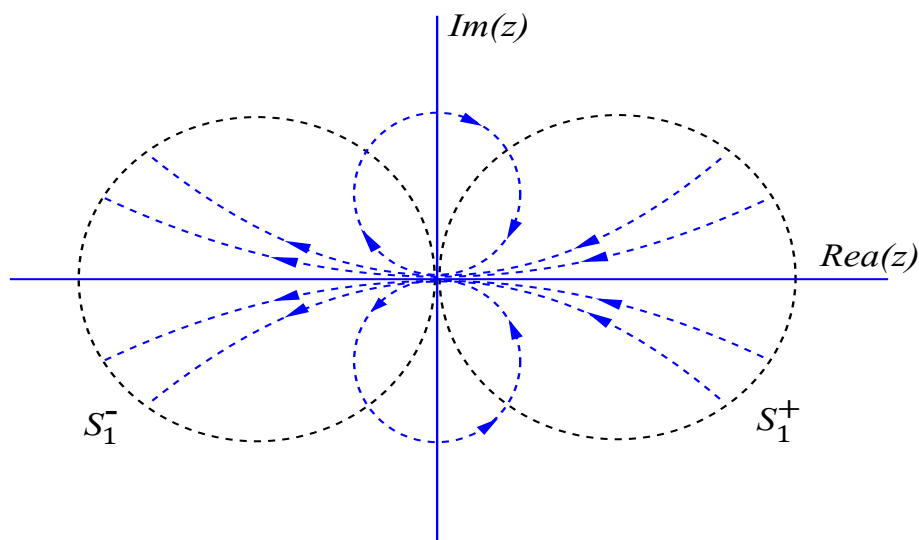


Figura 2.5: Comportamiento dinámico de las orbitas de φ

Así hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.16. *Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismo local analítico del tipo*

$$\varphi(z) = z + \sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i, \text{ con } a_2 \neq 0.$$

Entonces existen regiones S_1^+ y S_1^- disjuntas teniendo $0 \in \mathbb{C}$ en su borde tal que:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0$ uniformemente en S_1^+ y $\varphi(S_1^+) \subseteq S_1^+$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = 0$ uniformemente en S_1^- y $\varphi^{-1}(S_1^-) \subseteq S_1^-$.
- (iii) Si z es suficientemente pequeño tal que $z \notin S_1^+ \cup S_1^-$, entonces la orbita positiva de φ en z (resp. negativa) atraviesa S_1^+ (resp. S_1^-).

Demostración. Consecuencia directa de las proposiciones 2.10, 2.13 y 2.15. \square

El teorema anterior describe el comportamiento dinámico de las orbitas de $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, como se muestra en la gráfica anterior.

De manera más general tendremos el siguiente resultado.

Teorema 2.17. *Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ difeomorfismo local analítico del tipo*

$$\varphi(z) = z + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i z^i \quad \text{con } a_{k+1} \neq 0.$$

Entonces existen regiones $S_1^+, S_2^+, \dots, S_k^+$ que se alternan con otras $S_1^-, S_2^-, \dots, S_k^-$ disjuntos entre si y teniendo a $0 \in \mathbb{C}$ en su borde tales que :

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0$ uniformemente en cada S_i^+ y $\varphi(S_i^+) \subseteq S_i^+$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = 0$ uniformemente en cada S_i^- y $\varphi^{-1}(S_i^-) \subseteq S_i^-$.
- (iii) *Si z es suficientemente pequeño tal que $z \notin \bigcup_{i=1}^k S_i^+ \cup \bigcup_{i=1}^k S_i^-$ entonces la orbita positiva de φ (resp. negativa) atraviesa $\bigcup_{i=1}^k S_i^+$ (resp. $\bigcup_{i=1}^k S_i^-$).*

Demostración. Para la demostración de este resultado consideremos por simplicidad el caso $k = 2$, entonces el resultado será una consecuencia directa de las proposiciones 2.20, 2.22, 2.23, 2.24 y 2.25 que serán mostradas a continuación. \square

Consideremos $\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \sum_{i=4}^{\infty} a_i z^i$ con $a_3 \neq 0$. Entonces tenemos que $\varphi(z) = z + z^3 [a_3 + a_4 z + a_5 z^2 + \dots]$, haciendo $\psi(z) = a_3 + a_4 z + a_5 z^2 + \dots$, se observa que ψ es una función analítica en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}$ y $\psi(0) = a_3$.

Luego

$$\varphi(z) = z + z^3 \psi(z) = z \left[1 + z^2 \psi(z) \right] = z \left[\frac{1}{\frac{1}{1+z^2 \psi(z)}} \right] = z \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{1+z^2 \psi(z)} - 1} \right].$$

Por lo tanto

$$\varphi(z) = z \left[\frac{1}{1 - z^2 \xi(z)} \right].$$

Donde $\xi(z) = \frac{\psi(z)}{1+z^2 \psi(z)}$. Observamos que la función ξ es analítica en una vecindad del origen, dado que $1 + z^2 \psi(z)$ es distinto de cero en una vecindad del origen y además $\xi(0) = a_3$.

Haciendo el cambio de coordenadas $z = f_1(w) = w^{-\frac{1}{2}}$, se observa que $z = f_1(w)$ es un difeomorfismo analítico con inversa $w = f_1^{-1}(z) = z^{-2}$. Considerando $\text{Arg}(a_3) \in [0, 2\pi[$,

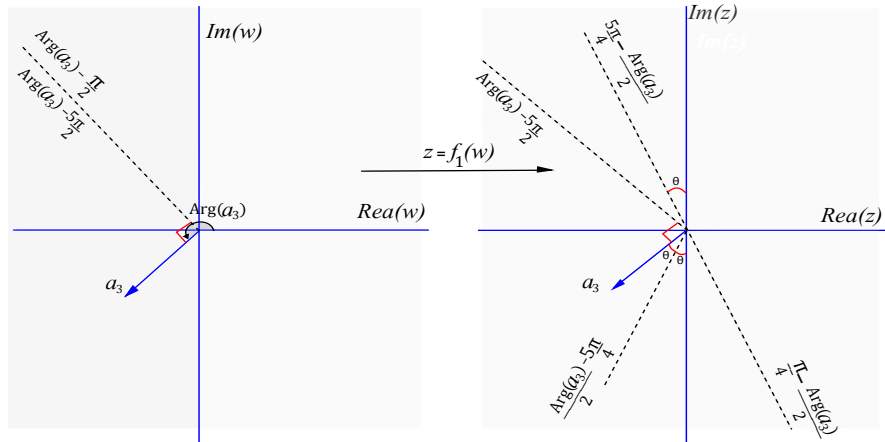


Figura 2.6: Cambio de coordenadas

observamos que $z = f_1(w)$ lleva el conjunto $\{w \in \mathbb{C} : \text{Arg}(a_3) - 5\pi/2 < \text{Arg}(w) < \text{Arg}(a_3) - \pi/2\}$ en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \pi/4 - \text{Arg}(a_3)/2 < \text{Arg}(z) < 5\pi/4 - \text{Arg}(a_3)/2\}$.

Sea $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ función analítica definida por $\phi(w) = f_1^{-1} \circ \varphi \circ f_1(w)$, entonces

$$\begin{aligned} \phi(w) &= [\varphi(w^{-\frac{1}{2}})]^{-2} = \left[\frac{w^{-\frac{1}{2}}}{1 - (w^{-\frac{1}{2}})^2 \xi(w^{-\frac{1}{2}})} \right]^{-2} = \left[\frac{1 - w^{-1} \xi(w^{-\frac{1}{2}})}{w^{-\frac{1}{2}}} \right]^2 \\ &= (w^{\frac{1}{2}})^2 [1 - w^{-1} \xi(w^{-\frac{1}{2}})]^2 = w [1 - 2w^{-1} \xi(w^{-\frac{1}{2}}) + w^{-2} \xi^2(w^{-\frac{1}{2}})] \end{aligned}$$

Luego

$$\phi(w) = w - 2\xi(w^{-\frac{1}{2}}) + w^{-1}\xi^2(w^{-\frac{1}{2}}) \quad (2.26)$$

Como $\xi(0) = a_3$, tenemos que $\xi(z) = a_3 + zR(z)$ donde $R(z)$ es una función analítica en una vecindad del origen, reemplazado en (2.26) tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(w) &= w - 2(a_3 + w^{-\frac{1}{2}}R(w^{-\frac{1}{2}})) + w^{-1}\xi^2(w^{-\frac{1}{2}}) \\ &= w - 2a_3 - 2w^{-\frac{1}{2}}R(w^{-\frac{1}{2}}) + w^{-1}\xi^2(w^{-\frac{1}{2}}) \\ &= w - 2a_3 + w^{-\frac{1}{2}}[-2R(w^{-\frac{1}{2}}) + w^{-\frac{1}{2}}\xi^2(w^{-\frac{1}{2}})]. \end{aligned}$$

Sea $\tilde{\xi}(z) = -2R(z) + z\xi^2(z)$, entonces observamos que $\tilde{\xi}$ es una función analítica definida en una vecindad del origen. Reemplazando en la última igualdad tenemos que,

$$\phi(w) = w - 2a_3 + w^{-\frac{1}{2}}\tilde{\xi}(w^{-\frac{1}{2}}). \quad (2.27)$$

Similarmente al Lema 2.8, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.18.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} w^{-\frac{1}{2}} \tilde{\xi}(w^{-\frac{1}{2}}) = 0$$

Demostración. Consecuencia inmediata de su desarrollo de potencias. \square

Entonces para $0 < \varepsilon \ll \max\{1, |a_3|\}$, suficientemente pequeño, existe $R > 0$ tal que

$$\left| w^{-\frac{1}{2}} \tilde{\xi}(w^{-\frac{1}{2}}) \right| < \varepsilon, \text{ para todo } |w| > R. \quad (2.28)$$

Considerando la función $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $T(w) = w - 2a_3$. De la igualdad (2.27) y del lema anterior, tenemos que

$$|\phi(w) - T(w)| = \left| w^{-\frac{1}{2}} \xi^2(w^{-\frac{1}{2}}) \right| < \varepsilon, \text{ para todo } w \in \mathbb{C} \text{ con } |w| > R.$$

Por tanto, se concluye que para $|w| > R$, con R suficientemente grande, ϕ se comporta aproximadamente como la traslación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $T(w) = w - 2a_3$. Así podemos considerar las orbitas de ϕ como las orbitas de T , para todo $w \in \mathbb{C}$, tal que $|w| > R$.

Consideremos L_1^+ subconjunto de \mathbb{C} , definido por $L_1^+ = \{w \in \mathbb{C} : \text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) + R|a_3| < 0\}$. El siguiente resultado nos da propiedades importantes de este conjunto.

Lema 2.19.

$$\phi(L_1^+) \subseteq L_1^+, \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(w) = \infty \text{ uniformemente en } L_1^+ \quad (2.29)$$

Demostración. Sea $w \in L_1^+$, entonces por definición tenemos que

$$|w| = \frac{|w \cdot \bar{a}_3|}{|a_3|} \geq \frac{|\text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3)|}{|a_3|} \geq \frac{-\text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3)}{|a_3|} > R.$$

Teniendo en cuenta que $0 < \varepsilon \ll \max\{1, |a_3|\}$, tenemos por definición de L_1^+ y por la desigualdad dada en (2.28) que,

$$\begin{aligned} \text{Rea}(\phi(w) \cdot \bar{a}_3) &= \text{Rea}\left((w - 2a_3 + w^{-\frac{1}{2}} \tilde{\xi}(w^{-\frac{1}{2}})) \cdot \bar{a}_3\right) \\ &= \text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) - 2|a_3|^2 + \text{Rea}(w^{-\frac{1}{2}} \tilde{\xi}(w^{-\frac{1}{2}}) \cdot \bar{a}_3) \\ &< \text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) - |a_3|^2 < -R|a_3| - |a_3|^2 < -R|a_3| \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por tanto, tenemos que $\phi(L_1^+) \subseteq L_1^+$.

Mostraremos la segunda afirmación: Sea $w \in L_1^+$, entonces por la afirmación anterior tenemos que $\phi^2(w) \in L_1^+$ y por la desigualdad (2.28) tenemos los siguiente

$$\text{Rea}(\phi^2(w) \cdot \bar{a}_3) < \text{Rea}(\phi(w) \cdot \bar{a}_3) - |a_3|^2 < \text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) - 2|a_3|^2.$$

Luego, por inducción se sigue fácilmente que

$$\operatorname{Rea}(\phi^n(w) \cdot \bar{a}_3) < \operatorname{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) - n|a_3|^2 < -R|a_3| - n|a_3|^2, \quad (2.31)$$

para todo $n \geq 1$ y para todo $w \in L_1^+$. Entonces por la desigualdad anterior obtenemos que

$$|\phi^n(w)| = \frac{|\phi^n(w) \cdot \bar{a}_3|}{|a_3|} \geq \frac{|\operatorname{Rea}(\phi^n(w) \cdot \bar{a}_3)|}{|a_3|} > R + n|a_3|,$$

para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(w) = \infty, \text{ uniformemente en } L_1^+$$

□

Retornando a las coordenadas originales, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.20. *Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un difeomorfismo analítico local con $\varphi'(0) = 1$ y $\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \dots$, $a_3 \neq 0$. Entonces existe una región $S_1^+ \subseteq \mathbb{C}$ tal que*

$$\varphi(S_1^+) \subseteq S_1^+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0 \text{ uniformemente en } S_1^+. \quad (2.32)$$

Demostración. Sea $S_1^+ = f_1(L_1^+)$, entonces por la primera afirmación del lema anterior tenemos que $\phi(L_1^+) \subseteq L_1^+$ y por el cambio de coordenadas se obtiene que $\varphi(S_1^+) \subseteq S_1^+$.

De otro lado tenemos que $\phi^n(w) = f_1^{-1} \circ \varphi^n \circ f_1(w) = (1/\varphi^n(z))^2$ y por la segunda afirmación del lema anterior tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0$, uniformemente en S_1^+ . □

Geoméricamente L_1^+ es la región ubicada a la derecha de la recta orientada $L_{1,+}$, definido por $L_{1,+} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) + R|a_3| = 0\}$, y S_1^+ es la región que es la imagen de L_1^+ por f_1 , como se muestra en la gráfica siguiente.

Por otro lado, hemos visto que $\phi(w)$ se comporta aproximadamente como la traslación $T(w) = w - 2a_3$, para todo $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| > R$, luego la inversa de ϕ también se comporta aproximadamente como la inversa de la traslación T la cual es $T^{-1}(w) = w + 2a_3$, es decir,

$$|\phi^{-1}(w) - T^{-1}(w)| < \varepsilon, \text{ para todo } |w| > R, \quad (2.33)$$

con $0 < \varepsilon \ll \max\{1, |a_3|\}$ suficientemente pequeño.

Sea L_1^- subconjunto de \mathbb{C} definido por $L_1^- = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) - R|a_3| > 0\}$. El siguiente resultado es importante en el estudio del comportamiento dinámico de las orbitas de ϕ .

Lema 2.21.

$$\phi^{-1}(L_1^-) \subseteq L_1^- \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(w) = \infty, \text{ uniformemente en } L_1^-. \quad (2.34)$$

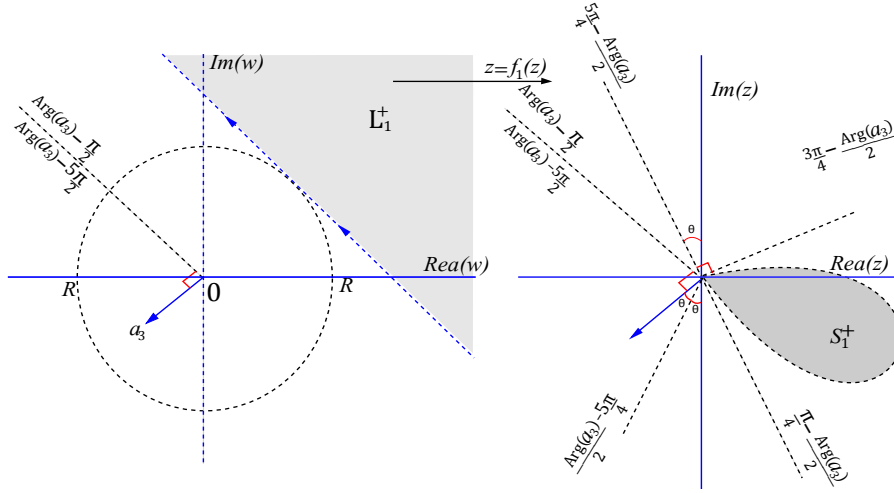


Figura 2.7: La gráfica muestra como L_1^+ es llevado por f_1 .

Demostración. Sea $w \in L_1^-$, entonces por definición tenemos que

$$|w| = \frac{|w \cdot \bar{a}_3|}{|a_3|} \geq \frac{\text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3)}{|a_3|} > R.$$

Luego por definición de L_1^+ , por la desigualdad (2.33) y la elección de ε tenemos que,

$$\begin{aligned} \text{Rea}(\phi^{-1}(w) \cdot \bar{a}_3) &= \text{Rea}(T^{-1}(w) \cdot \bar{a}_3) + \text{Rea}(\phi^{-1}(w) - T^{-1}(w)) \cdot \bar{a}_3 \\ &> \text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) + 2|a_3|^2 - |a_3|^2 > \text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) + |a_3|^2 \\ &> R|a_3| + |a_3|^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Por tanto, tenemos que lo anterior muestra que $\phi^{-1}(L_1^-) \subseteq L_1^-$.

Mostraremos la segunda afirmación: Sea $w \in L_1^-$, entonces por la afirmación anterior tenemos que $\phi^{-2}(w) \in L_1^-$ y por la desigualdad dado en (2.35) tenemos los siguiente

$$\text{Rea}(\phi^{-2}(w) \cdot \bar{a}_3) > \text{Rea}(\phi^{-1}(w) \cdot \bar{a}_3) + |a_3|^2 > \text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) + 2|a_3|^2 > R|a_3| + 2|a_3|^2.$$

Luego, por inducción se sigue fácilmente que

$$\text{Rea}(\phi^{-n}(w) \cdot \bar{a}_3) > R|a_3| + n|a_3|^2. \quad (2.36)$$

para todo $n \geq 1$ y para todo $w \in L_1^-$. Por lo tanto, de la desigualdad anterior tenemos que

$$|\phi^{-n}(w)| = \frac{|\phi^{-n}(w) \cdot \bar{a}_3|}{|a_3|} \geq \frac{|\text{Rea}(\phi^{-n}(w) \cdot \bar{a}_3)|}{|a_3|} > R + n|a_3|,$$

para todo $n \geq 1$. Por tanto, obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(w) = \infty$, uniformemente en L_1^{-1} \square

Proposición 2.22. Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un difeomorfismo analítico local con $\varphi'(0) = 1$ y $\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \dots$, $a_3 \neq 0$. Entonces existe una región $S_1^- \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$\phi(S_1^-) \subseteq S_1^-, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = 0 \text{ uniformemente en } S_1^-. \quad (2.37)$$

Demostración. Retornando a las coordenadas originales, consideremos $S_1^- = f_1(L_1^-)$. Por la primera afirmación del lema anterior tenemos que $\phi^{-1}(L_1^-) \subseteq L_1^-$ y por el cambio de coordenadas concluimos que $\varphi^{-1}(S_1^-) \subseteq S_1^-$. De otro lado tenemos que

$$\phi^{-n}(w) = f_1^{-1} \circ \varphi^{-n} \circ f_1(w) = \left[\frac{1}{\varphi^{-n}(z)} \right]^2$$

Por lo tanto, por la segunda afirmación del lema anterior tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = 0$, uniformemente en S_1^- . \square

Geoméricamente L_1^- es la región ubicada a la izquierda de la recta orientada $L_{1,-}$, definido por $L_{1,-} = \{w \in \mathbb{C} : \text{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) - R|a_3| = 0\}$ y S_1^- es la región que es la imagen de L_1^- por f_1 , como se muestra en la gráfica siguiente.

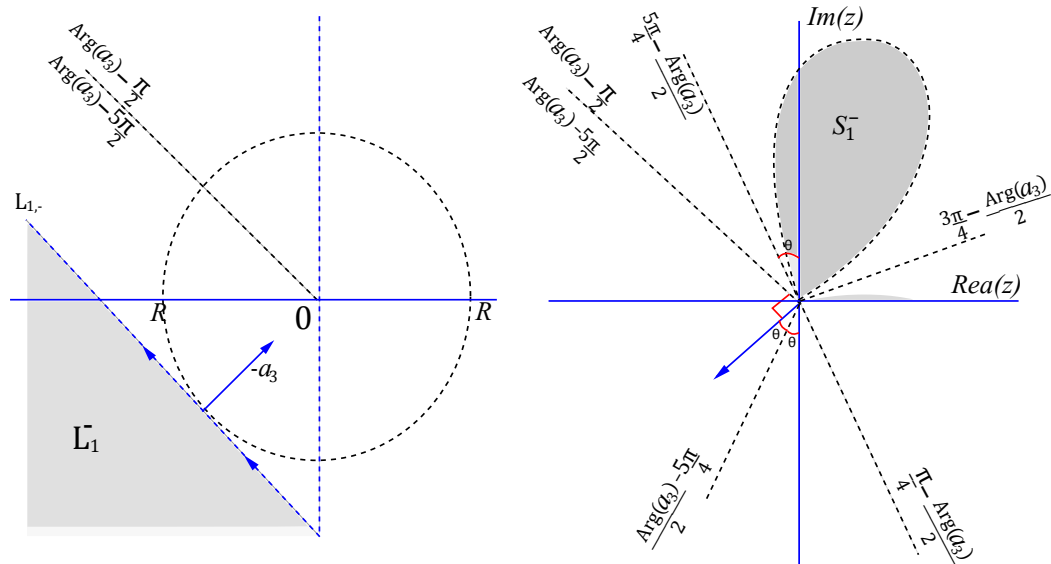


Figura 2.8: La gráfica muestra como el conjunto L_1^- es llevado por f_1 en S_1^-

Ahora encontraremos las regiones S_2^+ y S_2^-

Haciendo el cambio de coordenadas $\phi(w) = f_2^{-1} \circ \varphi \circ f_2(w)$, donde $z = f_2(w) = w^{-\frac{1}{2}}$ es un difeomorfismo analítico definido en el abierto $\{w \in \mathbb{C} : \text{Arg}(a_3) - \pi/2 < \text{Arg}(w) < \text{Arg}(a_3) + 3\pi/2\}$, con inversa $w = f_2^{-1}(z) = z^{-2}$, definido en el abierto $\{z \in \mathbb{C} : -3\pi/4 - \text{Arg}(a_3)/2 < \text{Arg}(z) < \pi/4 - \text{Arg}(a_3)/2\}$.

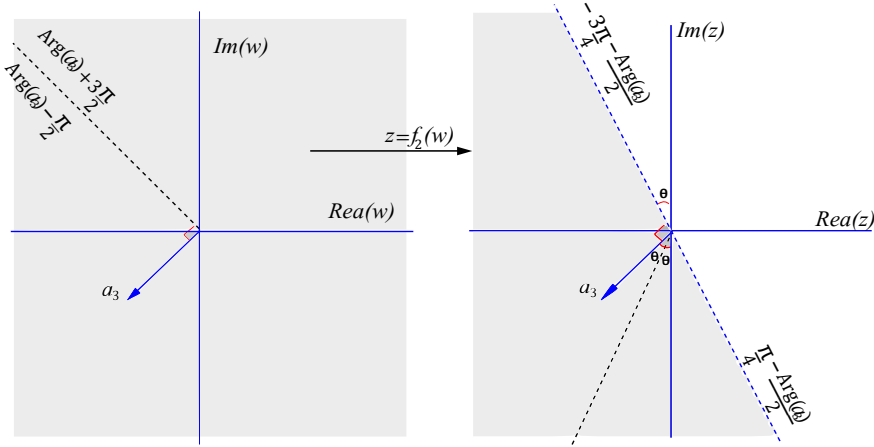


Figura 2.9: Cambio de coordenadas

Consideremos S_2^+ subconjunto de \mathbb{C} definido por $S_2^+ = f_2(L_1^+)$.

Proposición 2.23. Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un difeomorfismo analítico local con $\varphi'(0) = 1$ y $\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \dots$, $a_3 \neq 0$. Entonces existe una region $S_2^+ \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(S_2^+) \subseteq S_2^+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0 \text{ uniformemente en } S_2^+. \quad (2.38)$$

Demostración. Del Lema 2.19 tenemos que $\phi(L_1^+) \subseteq L_1^+$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(z) = \infty$ uniformemente en L_1^+ y como $\phi(w) = f_2^{-1} \circ \varphi \circ f_2(w)$, se obtiene que $\phi^n(w) = f_2^{-1} \circ \varphi^n \circ f_2(w) = [\varphi^n(z)]^{-2}$, para todo $n \geq 1$, luego las afirmaciones anteriores implican que $\varphi(S_2^+) \subseteq S_2^+$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0$, uniformemente en S_2^+ . \square

Finalmente sea S_2^- subconjunto de \mathbb{C} definido por $S_2^- = f_2(L_1^-)$, de manera similar a la afirmación anterior, utilizando el Lema 2.21, se muestra que:

Proposición 2.24. Sea $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un difeomorfismo analítico local con $\varphi'(0) = 1$ y $\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \dots$, $a_3 \neq 0$. Entonces existe una region $S_2^- \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(S_2^-) \subseteq S_2^- \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = 0, \text{ uniformemente en } S_2^-. \quad (2.39)$$

Demostración. Del Lema 2.21 tenemos que $\phi(L_1^-) \subseteq L_1^-$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(z) = \infty$ uniformemente en L_1^- y como $\phi(w) = f_2^{-1} \circ \varphi \circ f_2(w)$, se obtiene que $\phi^{-n}(w) = f_2^{-1} \circ \varphi^{-n} \circ f_2(w) = [\varphi^{-n}(z)]^2$, para todo $n \geq 1$, luego las afirmaciones anteriores implican que $\varphi(S_2^-) \subseteq S_2^-$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(z) = 0$, uniformemente en S_2^- . \square

La gráfica siguiente nos muestra como L_1^+ (resp. L_1^-) es transformado por f_2 en S_2^+ (resp. S_2^-).

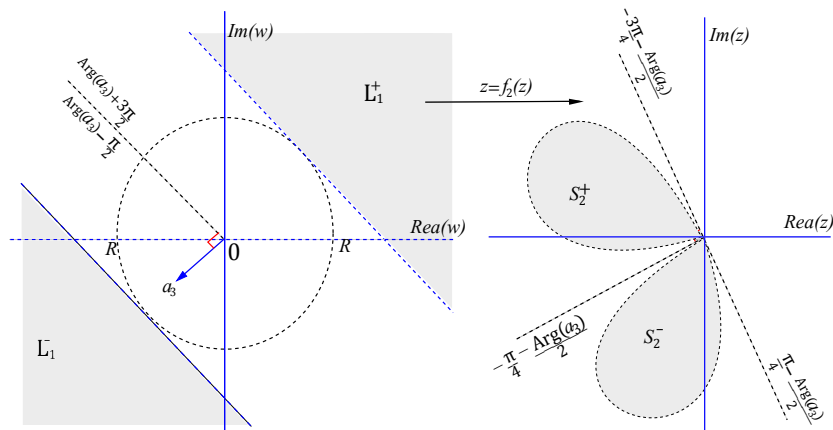


Figura 2.10: Conjuntos S_2^+ y S_2^-

Luego hemos encontrado las regiones S_1^+ , S_2^+ , S_1^- , S_2^- en el plano z , tal como se muestra en la gráfica.

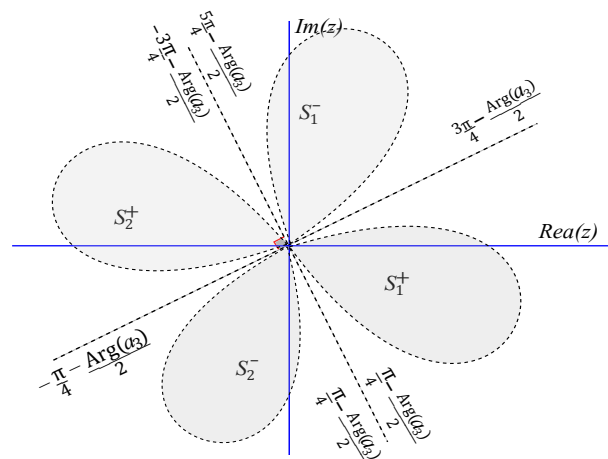


Figura 2.11: Conjunto S_1^+ , S_1^- , S_2^+ y S_2^-

Finalmente tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.25. Sea $z \in \mathbb{C}$ suficientemente pequeño tal que $z \notin \bigcup_{i=1}^2 S_i^+ \cup S_i^-$, entonces su órbita positiva (resp. su órbita negativa) atraviesa $\bigcup_{i=1}^2 S_i^+$ (resp. $\bigcup_{i=1}^2 S_i^-$).

Demostración. Esto será consecuencia de que para $|w| > R$, con R suficientemente grande, tenemos por la primera desigualdad (2.30) que

$$\operatorname{Rea}(\phi(w) \cdot \bar{a}_3) < \operatorname{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) - |a_3|^2.$$

Luego si $w \notin L_1^+$ y $|w| > R$, entonces por inducción se sigue que

$$\operatorname{Rea}(\phi(w) \cdot \bar{a}_3) < \operatorname{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) - n|a_3|^2, \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y para todo } |w| > R.$$

Por lo tanto, por la desigualdad anterior y un cálculo sencillo tenemos que $\operatorname{Rea}(\phi(w) \cdot \bar{a}_3) < -R|a_3|$, para $n \geq (R|a_3| + |\operatorname{Rea}(w \cdot \bar{a}_3)|)/|a_3|^2$, luego tenemos que $\phi^n(w) \in L_1^+$ y retornando a las coordenadas originales tenemos que $\varphi^n(z) \in S_1^+ \cup S_2^+$, para z suficientemente pequeño.

Analogamente para la órbita negativa tenemos que si $w \notin L_1^-$ y $|w| > R$, entonces procediendo de manera similar a la prueba de la primera afirmación y utilizando la desigualdad (2.35), obtenemos que

$$\operatorname{Rea}(\phi(w) \cdot \bar{a}_3) > \operatorname{Rea}(w \cdot \bar{a}_3) + n|a_3|^2, \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y para todo } |w| > R.$$

Por lo tanto para n suficientemente grande tenemos que $\phi^{-n}(w) \in L_1^-$, y retornando a las coordenadas originales tenemos que $\varphi^{-n}(z) \in S_1^- \cup S_2^-$, para z suficientemente pequeño. \square

La gráfica siguiente nos muestra el comportamiento dinámico de las órbitas de un difeomorfismo analítico $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, de la forma $\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \dots$, con $a_3 \neq 0$.

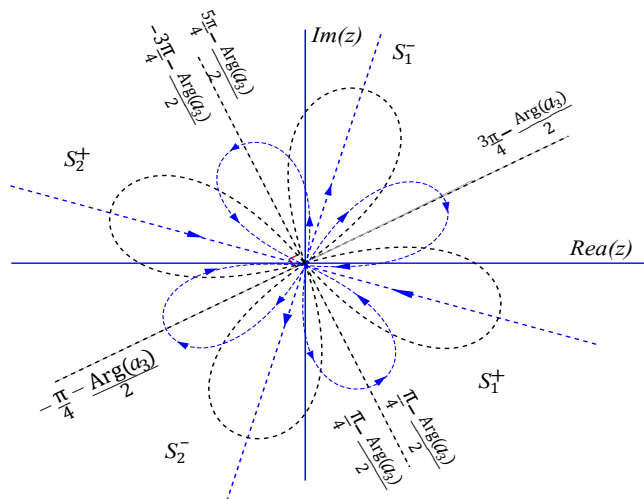


Figura 2.12: Conjuntos S_1^+ , S_1^- , S_2^+ y S_2^-

Finalmente para λ cualquiera tenemos que

$$\varphi(z) = \lambda z + \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j z^j, \text{ con } a_{k+1} \neq 0.$$

Supongamos que $\lambda^m = 1$, para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\varphi^m(z) = z + m\lambda a_{k+1} z^{km+1} + \dots$$

Utilizando el teorema anterior concluimos que existen $S_1^+, S_2^+ \dots S_{km}^+$ regiones que se alternan con otros $S_1^-, S_2^- \dots S_{km}^-$ teniendo a cero en su borde tales que

- i $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{nm}(z) = 0$, uniformemente en cada S_i^+ y $\varphi^m(S_i^+) \subseteq S_i^+$.
- ii $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-nm}(z) = 0$, uniformemente en cada S_i^- y $\varphi^{-m}(S_i^-) \subseteq S_i^-$.
- iii Si $z \in \mathbb{C}$ es suficientemente pequeño tal que $z \notin \bigcup_{i=1}^{km} S_i^+ \cup S_i^-$ entonces la órbita positiva de φ (resp. negativa) atraviesa $\bigcup_{i=1}^{km} S_i^+$ (resp. $\bigcup_{i=1}^{km} S_i^-$)

En el caso que λ no es raíz de la unidad, el estudio es más cuidadoso y será tratado en el siguiente capítulo.

Fracciones continuas

Índice

3.1. Fracciones continuas finitas	45
3.2. Fracciones continuas infinitas	48

3.1 Fracciones continuas finitas

En este capítulo desarrollaremos parte de la teoría de fracciones continuas la cual será utilizada para mostrar uno de los resultados importantes de este trabajo. Mas detalles sobre fracciones continuas pueden ser encontradas en Petrofezzo Anthony, [7].

Definición 3.1: Una *fracción continua finita* es una expresión de la forma

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{\ddots + \frac{b_n}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}} \tag{3.1}$$

En general los números a_i y b_i de (3.1) pueden ser números reales o complejos.

Definición 3.2: Una fracción continua es llamada *fracción continua simple* si para todo

$i \geq 1$, se tiene que $b_i = 1$ y a_i es un entero mayor que cero.

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \quad (3.2)$$

En este capítulo estudiaremos principalmente fracciones continuas simples. Los a_i de la fracción continua simple (3.2) son llamados los *términos de la fracción continua simple*.

Si el número de términos de una fracción continua simple es finito tal como se indica en (3.2), entonces se dice que la fracción continua es una *fracción continua simple finita* y si el número de términos es infinito, entonces la fracción continua simple es una *fracción continua simple infinita*.

Denotaremos por $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ a la fracción continua simple

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Ejemplo 3.3: $-\frac{16}{9}$ puede ser expresado como una fracción continua simple, de la siguiente forma

$$-\frac{16}{9} = -2 + \frac{2}{9} = -2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}.$$

Por tanto $-\frac{16}{9} = [-2, 4, 2]$ se escogió -2 para el entero a_1 con el fin de que los términos restantes pudieran ser enteros positivos

Teorema 3.4. *Todo número racional puede ser expresado como una fracción continua simple finita*

Demostración. Sea $\frac{p}{q}$ un número racional y supongamos que $q > 0$ entonces por el algoritmo

euclidiano de la división, existen enteros a_i y r_i tales que

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_1 + \frac{r_1}{q} = a_1 + \left(\frac{q}{r_1}\right)^{-1}, \text{ donde } a_1 < \frac{p}{q} \text{ y } 0 < r_1 < q, \\ \frac{q}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1} = a_2 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}, \text{ donde } a_2 < \frac{q}{r_1} \text{ y } 0 < r_2 < r_1, \\ \frac{r_1}{r_2} &= a_3 + \frac{r_3}{r_2} = a_3 + \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{-1}, \text{ donde } a_3 < \frac{r_1}{r_2} \text{ y } 0 < r_3 < r_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \left(\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}\right)^{-1}, \text{ donde } a_{n-1} < \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} \text{ y } 0 < r_{n-1} < r_{n-2}.$$

Nótese que $0 < r_{n-1} < r_{n-2} < \dots < r_1$ es una sucesión decreciente de enteros positivos, como sólo existe un número finito de enteros positivos menores que q , este proceso, debe de terminar, esto es, existe un número finito de enteros positivos r_i que satisfacen las ecuaciones descritas anteriormente. Por sustitución y usando los pasos del proceso anterior obtenemos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Por lo tanto, como tenemos sólo un número finito de términos, el número racional $\frac{p}{q}$ queda representado por una fracción continua simple. □

Observación 3.5: La representación de un número racional como una fracción continua simple finita no es única debido a la manera en que los a_i son escogidos en el Teorema 3.4 cada a_i es único para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$, sin embargo si $a_n > 1$, entonces

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1} \text{ y } \frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$$

Si $a_n = 1$ entonces

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1 \text{ y } \frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1]$$

Así todo número racional puede ser expresado como una fracción continua simple finita en exactamente dos formas. Además una representación tiene un número impar de términos y la otra representación tiene un número par de términos

Teorema 3.6. *Todo fracción continua simple finita representa un número racional*

Demostración. Aplicamos inducción sobre el número de términos de la fracción continua

simple finita. Si $n = 1$, entonces $[a_1] = a_1 \in \mathbb{Q}$.

Hipotesis inductiva: Supongamos que toda fracción continua simple finita con n términos es un número racional. Sea $[a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}]$ una fracción continua simple finita con $n + 1$ términos, entonces tenemos

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$$

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}]}$$

Luego por hipótesis de inducción la fracción continua simple finita $[a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}]$ tiene n términos entonces $[a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}]$ es racional. Por lo tanto

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}]} \in \mathbb{Q}.$$

□

Así por Teorema 3.4 todo número racional es representado por una fracción continua simple finita e inversamente por el Teorema 3.6 toda fracción continua simple finita representa un número racional.

3.2 Fracciones continuas infinitas

Teorema 3.7. *Todo número irracional puede ser expresado como una única fracción continua simple infinita*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{I}$, entonces x puede ser expresado en la forma

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1}; \text{ donde } a_1 = \llbracket x \rrbracket \text{ es el mayor entero menor que } x \text{ y } 0 < \frac{1}{x_1} < 1.$$

Afirmamos que $x_1 \in \mathbb{I}$. Caso contrario $x_1 \in \mathbb{Q}$, entonces $1/x_1 \in \mathbb{Q}$ y así $x = a_1 + 1/x_1 \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice el hecho de que x es irracional. Además $x_1 > 1$ ya que $0 < \frac{1}{x_1} < 1$ luego x_1 puede ser expresado en la forma:

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}, \text{ donde } a_2 = \llbracket x_1 \rrbracket \text{ y } 0 < \frac{1}{x_2} < 1.$$

Ademas a_2 es un número positivo y x_2 es un número irracional, el proceso puede continuar indefinidamente. Para cada x_i existe un a_i que es el mayor entero menor que x_i tal que:

$$x_i = a_{i+1} + \frac{1}{x_{i+1}}$$

Donde $a_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor$ y x_i es un número irracional por tanto

$$x = [a_1, a_2, a_3 \dots].$$

Como a_1 es el mayor entero menor que x y cada a_{i+1} es el mayor entero positivo menor que x_i , la representación del número x como la fracción continua simple infinita es única. \square

Teorema 3.8. *Toda fracción continua simple infinita representa un número irracional*

Demostración. Tomemos una fracción continua simple infinita cualquiera, sea x el número representado por esta fracción continua por el teorema 3.4 x no puede ser racional, por tanto x es un número irracional \square

Así por los teoremas anteriores tenemos que todo número irracional puede ser expresado como una fracción continua simple infinita e inversamente toda fracción continua simple infinita representa un número irracional.

Definición 3.9: Las fracciones continuas simples finitas $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ son llamados los *convergentes o reducidos* de la fracción continua simple $[a_1, a_2, a_3 \dots]$ (la fracción continua simple $[a_1, a_2, a_3 \dots]$ puede ser finita o infinita)

Haciendo simples cálculos obtenemos

$$[a_1] = a_1, \quad [a_1, a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2}, \tag{3.3}$$

$$[a_1, a_2, a_3] = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1}{a_3 a_2 + 1}, \tag{3.4}$$

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \left[a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right], \text{ para todo } n \geq 2. \tag{3.5}$$

Teorema 3.10. *Si p_n y q_n son definidas de la siguiente forma*

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2 a_1 + 1 \quad \text{y} \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \tag{3.6}$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = a_2 \quad \text{y} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \tag{3.7}$$

para todo $n \geq 3$. Entonces $[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$

Demostración. Las expresiones para p_1, q_1, p_2 y q_2 pueden ser obtenidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} [a_1] &= a_1 \text{ entonces } p_1 = a_1; \quad q_1 = 1. \\ [a_1, a_2] &= \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} \text{ entonces } p_2 = a_1 a_2 + 1; \quad q_2 = a_2. \end{aligned}$$

Las relaciones recursivas para p_n y q_n , donde $n \geq 3$ son demostradas por inducción matemática. Para $n = 3$ por la igualdad (3.4) tenemos

$$[a_1, a_2, a_3] = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1}{a_3 a_2 + 1} = \frac{a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$$

Por tanto

$$[a_1, a_2, a_3] = \frac{p_3}{q_3}.$$

Supongamos que las relaciones recursivas son verdaderas para todo número entero entre 3 y k , entonces por (3.5), tenemos que

$$[a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] = \left[a_1, a_2, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right].$$

Por hipótesis inductiva aplicada a $\left[a_1, a_2, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right]$ tenemos

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] &= \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$[a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

□

Teorema 3.11. *Los números p_n y q_n satisfacen*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \tag{3.8}$$

Demostración. La demostración es por inducción. Si $n = 1$ tomamos $p_0 = 1, q_0 = 0$ entonces $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (-1)^1$. Supongamos que la relación (3.8) es válida para n , entonces

$$\begin{aligned} p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} &= (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) \\ &= a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - a_{n+1} p_n q_n - p_n q_{n-1} \\ &= -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = -(-1)^n \text{ (por hipótesis inductiva)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

□

Denotamos por $c_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. Si n es impar, entonces c_n es llamado **convergente impar** y si n es par c_n es llamado **convergente par**. Por Teorema 3.10, tenemos que $c_n = \frac{p_n}{q_n}$.

Sea $n \geq 1$, entonces de la igualdad (3.8), podemos dividir entre q_nq_{n-1} obteniendo

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}.$$

Por tanto

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}. \quad (3.9)$$

Teorema 3.12. *Los numeros p_n y q_n satisfacen*

$$p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (-1)^{n-1}a_n \quad (3.10)$$

Demostración. Como $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ y $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, entonces para todo $n \geq 1$, por un cálculo sencillo y el teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned} p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-2} - a_n p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-2}q_{n-2} \\ &= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) = (-1)^{n-1}a_n \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (-1)^{n-1}a_n$, para todo $n \geq 1$. □

De la igualdad (3.10), dividiendo entre q_nq_{n-2} tenemos

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_nq_{n-2}}. \quad (3.11)$$

Por tanto

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_nq_{n-2}} \quad (3.12)$$

Teorema 3.13. *Los convergentes impares de una fracción continua simple forman una sucesión creciente; los convergentes pares forman una sucesión decreciente y todo convergente impar es menor que todo convergente par*

Demostración. Sea $n = 2k + 1$, con $k \geq 1$. Entonces por la igualdad (3.12) y como a_n, q_n y $q_{n-2} > 0$, tenemos que

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-2}} = \frac{a_n(-1)^{2k+1-1}}{q_n q_{n-2}} = \frac{a_n}{q_n q_{n-2}} > 0$$

Así

$$c_{2k+1} > c_{2k-1}, \text{ para todo } k \geq 1 \quad (3.13)$$

Luego la afirmación está probada, es decir, los convergentes impares forman una sucesión creciente.

Ahora si $n = 2k$, con $k \geq 1$. Entonces por (3.12) y como a_n, q_n y $q_{n-2} > 0$, tenemos que:

$$c_{2k} - c_{2k-2} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}} = \frac{(-1)^{2k-1} a_n}{q_n q_{n-2}} = \frac{-a_n}{q_n q_{n-2}} < 0 \quad (3.14)$$

Así

$$c_{2k} < c_{2k-2}, \text{ para todo } k \geq 1 \quad (3.15)$$

Por lo tanto los convergentes pares forman una sucesión decreciente.

Ahora sea k un entero positivo, entonces por (3.9) para $n = 2k$ tenemos

$$c_{2k} - c_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k} q_{2k-1}}, \quad (3.16)$$

y como $q_{2k}, q_{2k-1} > 0$, se obtiene que:

$$c_{2k} > c_{2k-1}, \text{ para todo } k \geq 1. \quad (3.17)$$

Sean dos enteros positivos cualesquiera r y s , entonces por las desigualdades anteriores tenemos los siguientes casos:

- (i) Si $r > s$, entonces por (3.13) y (3.17), tenemos $c_{2r} > c_{2r-1} > c_{2s-1}$
- (ii) Si $r = s$, entonces $2r > 2s - 1$ y por (3.17), se tiene que $c_{2r} > c_{2s-1}$.
- (iii) Si $r < s$, entonces $2r < 2s$ y por (3.15), se tiene que $c_{2r} > c_{2s}$.

Por lo tanto para dos enteros positivos cualesquiera r y s hemos demostrado $c_{2r} > c_{2s-1}$, así todo convergente impar es menor que todo convergente par

$$c_1 < c_3 < c_5 < \dots < c_{2k-1} < \dots < c_{2k} < c_{2k-2} < \dots < c_6 < c_4 < c_2.$$

□

Proposición 3.14. *Los números q_n determinados en una fracción continua simple satisfacen $q_n \geq n$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Procedamos por inducción. Si $n = 1$ tenemos que $q_1 = 1 \geq 1$. Supongamos que $q_n \geq n$ (Hipótesis inductiva). Entonces como $a_n, q_{n-1} \geq 1$

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1} \geq n + 1$$

□

Proposición 3.15. *Sea x un número irracional representado por una fracción continua simple infinita $[a_1, a_2, \dots]$ entonces x satisfase la siguiente desigualdad*

$$|q_n x - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} \quad (3.18)$$

Demostración. Sea $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, x_{n+1}]$ donde $x_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$, entonces por un cálculo directo y (3.8) tenemos

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{x_{n+1}p_n q_n + p_{n-1}q_n - x_{n+1}p_n q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} \quad (3.19)$$

Por otro lado, desde que $x_n > a_n$ para todo $n \geq 1$, tenemos que

$$x_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1} \quad (3.20)$$

Reemplazando (3.20) en (3.19), obtenemos

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Por lo tanto de está desigualdad se puede deducir fácilmente el resultado. □

De la proposición anterior podemos deducir las siguientes desigualdades

$$|q_n x - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}q_n + q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}q_n} < \frac{1}{a_{n+1}}. \quad (3.21)$$

Teorema 3.16. *Si x es un número irracional representado por la fracción continua simple infinita $[a_1, a_2, a_3, \dots]$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x, \text{ donde } c_n \text{ es el convergente } n\text{-ésimo.}$$

Ademas

$$\begin{aligned}x &< c_n, & \text{si } n \text{ es par} \\x &> c_n, & \text{si } n \text{ es impar}\end{aligned}$$

Demostración. Por Teorema 3.13, tenemos que (c_{2k+1}) es una sucesión creciente de números racionales que está acotada superiormente por c_2 , entonces existe $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k+1} = L_1$ y $c_{2k+1} \leq L_1$, para todo $k \geq 1$.

Por el mismo teorema (c_{2k}) es una sucesión decreciente de números racionales que está acotada inferiormente por c_1 , entonces existe $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k} = L_2$ y $L_2 \leq c_{2k}$ para todo $k \geq 1$.

Probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k+1}$. En efecto, por Lema 3.14 y la igualdad dada en (3.16) obtenemos que $|c_{2k} - c_{2k-1}| < \frac{1}{2k(2k-1)}$, para todo $k \geq 1$.

Por tanto, tomando limite tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k+1} = L$$

Por Lema 3.15 tenemos

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = |x - c_n| < \frac{1}{q_n} < \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

□

Las propiedades de la teoría de fracciones continuas serán utilizadas para mostrar el resultado central de este trabajo el cual es abordado en el siguiente capítulo.

Convergencia C_ν

Índice

4.1. Parte central	55
4.2. Demostración de la convergencia	62
4.2.1. Dinámica de $T(z) = \lambda z$, donde $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ y $\alpha \in \Gamma$	74
4.3. Ecuaciones en diferencias	75
4.3.1. Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden	75
4.3.2. Puntos de equilibrio y estabilidad asintótica	77

En este capítulo nos dedicaremos a mostrar el resultado central de este trabajo, el cual consiste en linealizar un difeomorfismo local analítico φ , definido en una vecindad del origen tal que $\lambda = \varphi'(0)$ no es raíz de la unidad. Resaltamos que la condición estudiada en este capítulo es debido C. L. Siegel J.K. Meser, [13], pero Bruno en [2], muestra el mismo resultado con una condición mas general de la que estudiamos aqui.

4.1 Parte central

Sea $\varphi(z) = \lambda z + \sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i$ un difeomorfismo local analítico donde $|\lambda| = 1$ y λ no es raíz de la unidad, entonces siempre es posible encontrar un cambio formal de coordenadas que transforma $\varphi(z)$ en $z \rightarrow \lambda z$, bastando para esto resolver formalmente la ecuación:

$$F(\lambda z) = \varphi(F(z)) \tag{4.1}$$

Sea $F(z) = z + \sum_{i=2}^{\infty} b_i z^i$, entonces resolviendo formalmente la ecuación (4.1) se puede encontrar los b_i para los cuales la ecuación anterior es satisfecha.

Resolviendo formalmente (4.1) tenemos:

$$F(\lambda z) - \lambda F(z) = \varphi(F(z)) - \lambda F(z) \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} b_i (\lambda^i - \lambda) z^i = \sum_{i=2}^{\infty} a_i [F(z)]^i \quad (4.3)$$

Desarrollando tenemos que

$$b_2(\lambda^2 - \lambda)z^2 + b_3(\lambda^3 - \lambda)z^3 + \dots = a_2 z^2 + (a_3 + 2a_2 b_2)z^3 + \dots$$

Luego un cálculo directo muestra que:

$$b_2 = \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda} \quad \text{y} \quad b_3 = \frac{a_3 + 2a_2 b_2}{\lambda^3 - \lambda}.$$

Ahora supongamos conocidos los coeficientes del desarrollo formal en series de potencias de $F(z)$ hasta el orden $n - 1$. Procediendo a la comparación de los terminos en z^n en la ecuación (4.3) y teniendo en cuenta que el coeficiente de z^n de cada $[F(z)]^i$ con $2 \leq i \leq n - 1$ es de la forma $P_i(b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$, donde $P_i(b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$ es un polinomio en las variables b_2, b_3, \dots, b_{n-1} con coeficientes enteros, y el coeficiente de z^n en $[F(z)]^n$ es igual 1, tenemos que el coeficiente de z^n en el segundo miembro de (4.3) será de la forma:

$$a_n + a_2 P_2(b_2, b_3, \dots, b_{n-1}) + a_3 P_3(b_2, b_3, \dots, b_{n-1}) + \dots + a_{n-1} P_{n-1}(b_2, b_3, \dots, b_{n-1}).$$

Haciendo $P_n(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) = \sum_{i=2}^{n-1} a_i P_i(b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$ y observando que el coeficiente de z^n en el primer miembro de (4.3) es igual a $b_n(\lambda^n - \lambda)$, obtenemos que

$$b_n(\lambda^n - \lambda) = a_n + P_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}), \quad (4.4)$$

donde $P_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})$ es un polinomio con coeficientes enteros en las variables $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$. De la igualdad (4.4) se sigue que b_n puede ser calculado por la siguiente formula recursiva:

$$b_n = \frac{a_n}{\lambda^n - \lambda} + \frac{P_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})}{\lambda^n - \lambda}, \quad (4.5)$$

donde $\lambda^n - \lambda \neq 0$, dado que λ no es raíz de la unidad.

Así los coeficientes b_n son determinados por recurrencia y por lo tanto estan determinados univocamente por los coeficientes ya conocidos $a_2, \dots, a_{n-1}, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$. La expresion (4.5) evidencia el papel de los *pequeños denominadores* es decir la sucesión $\lambda^n - \lambda$ tiene a cero como punto de acumulación.

Lema 4.1. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que λ no es raíz de la unidad y $|\lambda| = 1$. Entonces

$$0 \in \overline{\{\lambda^n - \lambda : n \in \mathbb{N}\}}. \quad (4.6)$$

Demostración. Como $G = \{n\alpha + m : \alpha \in \mathbb{I}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ es denso en \mathbb{R} , tenemos que G tiene a cero como punto de acumulación.

Sea $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ donde $\alpha \in \mathbb{I}$, entonces por un cálculo directo el cual es mostrado mas adelante en (4.11), tenemos que $|\lambda^n - \lambda| = 2 \sin(\pi|n\alpha + m|)$, y utilizando el hecho que G tiene a cero como punto de acumulación y $\sin(0) = 0$, tenemos que la afirmación queda probada. \square

Por lo tanto, observamos que la sucesión $\lambda^n - \lambda$ tiene a cero como punto de acumulación, así la serie $F(z) = z + \sum_{i=2}^{\infty} b_i z^i$ no necesariamente podría converger, por lo que podríamos preguntarnos ¿Bajo que condiciones $F(z)$ es convergente?. Esta pregunta será satisfactoriamente respondida en este capítulo.

Teorema 4.2. El cambio formal de coordenadas en (4.1) es único.

Demostración. Supongamos que existe otra serie formal \tilde{F} tal que $\tilde{F}(\lambda z) = \varphi(\tilde{F}(z))$. Considerando $H(z) = \tilde{F}^{-1} \circ F(z)$, tenemos que

$$\begin{aligned} H(\lambda z) &= \tilde{F}^{-1} \circ F(\lambda z) = \tilde{F}^{-1}(F(\lambda z)) = \tilde{F}^{-1}(\varphi(F(z))) \\ &= \tilde{F}^{-1}(\varphi(\tilde{F}(\tilde{F}^{-1}(F(z))))) = \tilde{F}^{-1}(\tilde{F}(\lambda \tilde{F}^{-1}(F(z)))) \\ &= \lambda \tilde{F}^{-1}(F(z)) = \lambda \tilde{F}^{-1} \circ F(z) = \lambda H(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H(\lambda z) = \lambda H(z)$$

Comparando los coeficientes en su desarrollo formal de series de potencias similarmente como fue hecho en el Teorema 2.6, obtenemos que $H(z) = z$ y por lo tanto $\tilde{F}^{-1} \circ F(z) = z$, lo que implica que $\tilde{F}^{-1}(z) = F(z)$. \square

Como siempre es posible encontrar una serie formal F que linealiza formalmente φ , podemos definir el siguiente conjunto:

$$\mathcal{F} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1, \text{ existe una serie formal convergente } \varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 \dots \\ \text{cuya serie } F(z) = z + b_2 z^2 + \dots \text{ que la linealiza diverge} \}$$

Por definición del conjunto \mathcal{F} , tenemos que $\mathcal{F} \subseteq S^1$, donde $S^1 = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \}$.

Teorema 4.3. \mathcal{F} es denso en S^1 .

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$, consideremos $\varphi(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ donde los coeficientes a_n , $n = 2, 3, \dots$ son siempre iguales a $\pm \frac{1}{n!}$ con el signo fijado por recurrencia. En particular $\varphi(z)$ será convergente en todo \mathbb{C} .

Sea

$$F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \text{ serie formal tal que } F(\lambda z) = \varphi(F(z)).$$

De la igualdad (4.5) tenemos lo siguiente:

$$(\lambda^n - \lambda)b_n = a_n + P_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}).$$

Así podemos escoger $a_n = \pm \frac{1}{n!}$ de manera que:

$$|b_n| \geq \frac{1}{n!} |\lambda^n - \lambda|^{-1} = \frac{1}{n!} |\lambda^{n-1} - 1|^{-1}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

En efecto como:

$$\begin{aligned} |(\lambda^n - \lambda)b_n|^2 &= |a_n + P_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})|^2 \\ &= |a_n|^2 + |P_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})|^2 + 2\text{Rea}(a_n \cdot P_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})) \\ &\geq |a_n|^2 + 2\text{Rea}(a_n \cdot P_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Luego podemos elegimos el signo de a_n , de manera que:

$$a_n \text{Rea}(P(a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})) \geq 0,$$

el cual muestra una formula recursiva para hallar el signo de a_n , para todo n . Luego por la desigualdad (4.7), obtenemos que

$$|b_n| \geq \frac{1}{n!} |\lambda^{n-1} - 1|^{-1}. \quad (4.8)$$

Supongamos ahora que λ satisface la siguiente desigualdad

$$|\lambda^n - 1| < (n!)^{-2}, \quad (4.9)$$

para una infinidad de valores n .

Sea $\varphi(z)$ una serie de potencias cuyos coeficientes a_n , $n = 2, 3, \dots$ han sido determinados de la manera indicada. Entonces por un lado la serie $\varphi(z)$ será convergente para todos los valores de $z \in \mathbb{C}$, mientras que la respectiva serie formal $F(z)$ solución de la ecuación (4.1) es divergente, porque para cada $z \neq 0$, tenemos por (4.9) que

$$|b_n| \geq \frac{1}{n!} |\lambda^{n-1} - 1|^{-1} > \frac{1}{n!} [(n-1)!]^2.$$

Luego observamos que el termino general b_n de $F(z)$ no tiende a cero, lo que prueba que $F(z)$ es divergente.

Por consiguiente resta probar que existe un subconjunto denso de valores de λ en la circunferencia unitaria que no son raices de la unidad y que satisfagan la desigualdad:

$$|\lambda^n - 1| < (n!)^{-2}, \text{ para una infinidad de valores naturales.} \quad (4.10)$$

Si $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, donde $(0 \leq \alpha \leq 1)$, entonces para cada número natural n podemos escoger un entero m tal que

$$-\frac{1}{2} \leq n\alpha - m < \frac{1}{2}, \text{ dado que } \mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}[.$$

Entonces se observa de lo anterior que $-\frac{\pi}{2} \leq \pi(n\alpha - m) < \frac{\pi}{2}$, para algún m escogido. También tenemos que:

$$\begin{aligned} |\lambda^n - 1| &= |\exp(2\pi i\alpha n) - 1| = |\exp(\pi i\alpha n) - \exp(-\pi i\alpha n)| = 2|\sin(\pi\alpha n)| \\ &= 2|\sin(n\pi\alpha - m\pi + m\pi)| = 2|\sin(\pi(n\alpha - m)) \cos(m\pi)| \\ &= 2|\sin(\pi(n\alpha - m))|. \end{aligned}$$

Haciendo $\vartheta = |n\alpha - m|$, obtenemos por la igualdad anterior que

$$|\lambda^n - 1| = 2|\sin(\pi(n\alpha - m))| = 2\sin(|\pi(n\alpha - m)|) = 2\sin(\pi\vartheta). \quad (4.11)$$

Ahora utilizaremos la siguiente desigualdad, el cual es consecuencia directa de la propiedad de la función trigonométrica $\sin(\theta)$:

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \leq \theta, \text{ para todo } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (4.12)$$

Dado que $0 \leq \pi\vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, podemos utilizar la desigualdad anterior para obtener que:

$$2\vartheta \leq \sin(\pi\vartheta) \leq \pi\vartheta.$$

De donde concluimos que

$$4\vartheta \leq |\lambda^n - 1| = 2\sin(\pi\vartheta) \leq 2\pi\vartheta < 7\vartheta \quad (4.13)$$

Por consiguiente, basta construir un conjunto de números irracionales α denso en $[0, 1[$ los cuales satisfagan lo siguiente:

$$|n\alpha - m| < \frac{1}{7(n!)^2}, \text{ tenga infinitas soluciones enteras } n \text{ y } m. \quad (4.14)$$

Esto se consigue fácilmente utilizando la representación de números reales por fracciones continuas. Como vimos en el Capítulo 3 a todo número irracional $0 < \alpha < 1$ se le puede asociar una sucesión de números naturales r_1, r_2, r_3, \dots tal que la sucesión de fracciones p_k/q_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ definidas por recurrencia según la siguiente regla:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, & p_2 &= r_1 r_2 + 1 & \text{y} & p_n &= r_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_1 &= 1, & q_2 &= r_2 & \text{y} & q_n &= r_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

Los números r_1, r_2, r_3, \dots , tienden a α y son unicamente definidos por α y designan los cocientes parciales. Por la desigualdad (3.18) tenemos

$$|q_k \alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{r_{k+1} q_k} < \frac{1}{r_{k+1}} \quad (4.15)$$

Observando que $0 < \alpha < 1$, entonces $r_1 = 0$ esto es una consecuencia de:

$$\alpha = [r_1, r_2, r_3, \dots] = r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{\ddots}}$$

de donde se deduce fácilmente que $r_1 = 0$.

Sea ahora $\lambda = \exp(2\pi i \beta)$, con $0 < \beta < 1$ número irracional y donde $\lambda \in S^1$ es arbitrario. Sean s_1, s_2, s_3, \dots los cocientes parciales de β en su expresión en fracción continua. Para un número l fijo y arbitrario, definimos

$$\begin{aligned} r_k &= s_k, & 0 < k &\leq l. \\ r_{k+1} &= 7(q_k!)^2, & k &> l. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Donde los q_1, q_2, q_3, \dots son determinados por recurrencia de acuerdo al Teorema 3.10, para la fracción continua α_l con cocientes parciales r_1, r_2, r_3, \dots se verifica también

$$|q_k \alpha_l - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{r_{k+1} q_k} < \frac{1}{r_{k+1}} < \frac{1}{7(q_k!)^2}.$$

Como los primeros l cocientes parciales de las fracciones continuas α_l y β coinciden se verifica también que $|q_l \beta - p_l| < q_l^{-1}$, luego utilizando la desigualdad triangular y la desigualdad 3.18 tenemos

$$|\alpha_l - \beta| \leq \left| \alpha_l - \frac{p_l}{q_l} \right| + \left| \beta - \frac{p_l}{q_l} \right| < 2q_l^{-2}$$

Luego por (4.15) y (4.16) tenemos que para una infinidad de pares $n = q_k$, $m = p_k$ ($k = l, l+1, l+2, \dots$), se verifica la condición (4.14). Así el número $\lambda_l = \exp(2\pi i \alpha_l) \in S^1$ pertenecera a \mathcal{F} y por lo indicado anteriormente $|\alpha_l - \beta| \leq 2q_l^{-2}$ de donde se concluye $\lim \alpha_l = \beta$

Por consiguiente $\lambda_l = \exp(2\pi i \alpha_l)$ constituye una sucesión en \mathcal{F} tal que $\lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_l = \lambda$ y como λ fue arbitrario la afirmación queda probada.

Sea $\lambda = \exp(2\pi i \theta)$, donde θ es un número racional, entonces por continuidad existe $0 < \theta_1 < 1$ número irracional tal que

$$|\lambda - \lambda_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{donde } \lambda_1 = \exp(2\pi i \theta_1)$$

Luego aplicando lo hecho anteriormente obtenemos un $\lambda_2 \in \mathcal{F}$ tal que $|\lambda_1 - \lambda_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ así

$$|\lambda - \lambda_2| \leq |\lambda - \lambda_1| + |\lambda_1 - \lambda_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que \mathcal{F} es denso en S^1 . □

Definimos el siguiente subconjunto de S^1

$\Lambda = \{\lambda \in S^1 : \text{Para toda } \varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots, \text{ donde } \lambda = \exp(2\pi i \alpha), \text{ convergente en una vecindad de } z = 0 \text{ la correspondiente serie formal } F(z) = z + b_2 z^2 + \dots \text{ que linealiza } \varphi \text{ es convergente en una vecindad de } z = 0\}$

Vamos a demostrar que Λ , como subconjunto de la circunferencia unitaria S^1 , tiene medida unidimensional Lebesgue 2π o equivalentemente que el conjunto de los respectivos valores α en el intervalo unitario tiene medida unidimensional 1. Mas aún, observando que $S^1 - \exp(\Lambda) = \mathcal{F}$, tendremos que la medida unidimensional Lebesgue de \mathcal{F} será cero.

Denotemos por $E = [0, 1]$ y $m(\Gamma)$ la medida de Lebesgue de un conjunto medible Γ .

Teorema 4.4. *Sea el conjunto*

$$\Gamma = \{\alpha \in E : \text{existe } \mu, \varepsilon > 0 \text{ tal que } |n\alpha - m| > \varepsilon n^{-\mu} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ y para todo } m \in \mathbb{Z}\}$$

Entonces Γ es medible y $m(\Gamma) = 1$.

Demostración. Para dos números enteros positivos consideremos el siguiente conjunto

$$B(\varepsilon, \mu) = \{\alpha \in E : |n\alpha - m| < \varepsilon n^{-\mu}, \text{ tenga por lo menos una solución } m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\varepsilon' \leq \varepsilon$ y $\mu \leq \mu'$, entonces es fácil mostrar que $B(\varepsilon', \mu') \subseteq B(\varepsilon, \mu)$. Ahora consideremos el conjunto

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B(k^{-1}, 2)$$

Afirmamos que $B \subseteq B(\varepsilon, 2)$, para todo $0 < \varepsilon < 1$. En efecto dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$, entonces por lo afirmado anteriormente tenemos

que $B(k^{-1}, 2) \subseteq B(\varepsilon, 2)$ para todo $k \geq k_0$, mostrando lo siguiente

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B(k^{-1}, 2) \subseteq B(k_0^{-1}, 2) \subseteq B(\varepsilon, 2)$$

Como $B(\varepsilon, 2) = \{\alpha \in E : |n\alpha - m| < \varepsilon n^{-2}, \text{ tenga por lo menos una solución } m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$, podemos expresar $B(\varepsilon, 2)$ de la siguiente forma

$$B(\varepsilon, 2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} [0, 1] \cap \left] \frac{m}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{n^3} \right[.$$

Como la unión numerable de conjuntos medibles también es medible, tenemos que $B(\varepsilon, 2)$ es medible. También tenemos que si $m > n$, entonces $m \geq n + 1$, luego un cálculo directo muestra lo siguiente

$$\frac{m}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3} > 1.$$

Por lo tanto si $m > n$ tenemos $[0, 1] \cap \left] \frac{m}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{n^3} \right[= \emptyset$. Así

$$B(\varepsilon, 2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \leq n} [0, 1] \cap \left] \frac{m}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{n^3} \right[.$$

De la igualdad anterior tenemos que $m(B(\varepsilon, 2)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \left(2 \frac{\varepsilon}{n^3} \right) = 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ tenemos que $m(B(\varepsilon, 2)) < 2\varepsilon C$ donde $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Luego como ε fue arbitrario tenemos que $m(B(\varepsilon, 2)) = 0$ y como $B \subseteq B(\varepsilon, 2)$ concluimos que $m(B) = 0$.

Consideremos el siguiente conjunto

$$\Delta = \left\{ \alpha \in E : \text{para todo } \varepsilon, \mu > 0 \quad |n\alpha - m| < \varepsilon n^{-\mu}, \text{ tenga por lo menos una solución entera } m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Es claro que $\Delta \subseteq B$. Por lo tanto $m(\Delta) = 0$, desde que $m(B) = 0$. Observamos que $\Gamma = E - \Delta$, entonces $m(\Gamma) = m(E) - m(\Delta) = 1$, por lo tanto $m(\Gamma) = 1$. \square

4.2 Demostración de la convergencia

A continuación demostraremos que para todo $\alpha \in \Gamma$, toda

$$\varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad \text{convergente en una vecindad del origen,}$$

donde $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$, la serie formal $F(z)$ que la linealiza $\varphi(z)$ también será convergente. En este caso por definición tenemos $\exp(\Gamma) \subseteq \Lambda$, de este modo tenemos que $m(\Lambda) = 2\pi$, como se

había afirmado. A continuación mostramos algunos resultados que nos ayudaran a mostrar la convergencia.

Lema 4.5. Sean los números $\delta_n > 0$ ($n \geq 0$) satisfaciendo

$$\delta_{n+1} \leq AB^n \delta_n^2,$$

para todo $n \geq 0$, donde $A, B > 1$ y $\delta_0 > 0$. Entonces $AB^{n+1} \delta_n \leq (AB\delta_0)^{2^n}$, para todo $n \geq 0$.

Demostración. Procedamos por inducción si $n = 0$, entonces por hipótesis $\delta_1 \leq AB^0 \delta_0^2$, luego $AB\delta_1 \leq (AB\delta_0)^{2^1}$. Supongamos que la desigualdad se cumpla para $n = k$, es decir, $AB^{k+1} \delta_k \leq (AB\delta_0)^{2^k}$. Entonces

$$AB^{k+2} \delta_{k+1} \leq AB^{k+2} AB^k \delta_k^2 \leq (AB^{k+1} \delta_k)^2$$

Luego por hipótesis de inducción

$$AB^{k+2} \delta_{k+1} \leq (AB^{k+1} \delta_k)^2 \leq [(AB\delta_0)^{2^k}]^2 = (AB\delta_0)^{2^{k+1}}.$$

□

Observación 4.6: Si $AB\delta_0 < 1$ entonces $(AB\delta_0)^{2^n} < (AB\delta_0)^n$ por lo tanto

$$\delta_n < AB^{n+1} \delta_n \leq (AB\delta_0)^{2^n} < (AB\delta_0)^n.$$

Este Lema será utilizado en el teorema siguiente, en el proceso iterativo el cual es de mucha importancia en la convergencia.

Teorema 4.7 (Teorema Principal). *Supongamos que $\alpha \in \Gamma$, entonces toda función analítica con desarrollo en serie de potencias*

$$\varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad \text{donde} \quad \lambda = \exp(2\pi i \alpha),$$

es linealizable en una vecindad del origen, es decir su serie

$$F(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

la cual lo linealiza formalmente es convergente en una vecindad del origen.

Demostración. La prueba de este resultado es consecuencia inmediata de los Lemas 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 y Proposición 4.13. □

Primeramente consideremos $\alpha \in \Gamma$, entonces por definición existe $\varepsilon, \mu > 0$ tal que $|n\alpha - m| > \varepsilon n^{-\mu}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $m \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$ no es raíz de la unidad.

Consideremos la siguiente sucesión $\rho_n = |\lambda^n - 1|^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$ y sea $\vartheta = |n\alpha - m|$ entonces por la desigualdad 4.13, obtenemos

$$\rho_n \leq \frac{1}{4\vartheta} = \frac{1}{4} |n\alpha - m|^{-1} < \frac{1}{4\varepsilon} n^\mu = C_0 \frac{1}{\mu!} n^\mu, \quad (4.17)$$

donde μ es un número natural y ε, μ pueden depender de α y $C_0 = \frac{1}{4\varepsilon} \mu!$.

Sea $\varphi(z) = \lambda z + \hat{\varphi}(z)$, función analítica con $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ y donde $\hat{\varphi}(z)$ es una serie de potencias convergente que comienza con término cuadrático, entonces la derivada $\hat{\varphi}'(z)$ es también convergente en un círculo centrado en el origen y dado que $\lim_{z \rightarrow 0} \hat{\varphi}'(z) = 0$ tenemos que para $\delta > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$|\hat{\varphi}'(z)| < \delta, \quad \text{para todo } |z| < r. \quad (4.18)$$

Sea $z = F(w) = w + \tilde{F}(w)$, la sustitución que linealiza formalmente a la transformación anterior, donde $\tilde{F}(w)$ es una serie de potencias que comienza con término cuadrático, es decir, F satisface la igualdad (4.1). Entonces un fácil cálculo muestra lo siguiente

$$\tilde{F}(\lambda w) - \lambda \tilde{F}(w) = \hat{\varphi}(F(w))$$

En vez de resolver esta ecuación, consideremos la sustitución $z = \phi(w) = w + \psi(w)$ (donde $\psi(w)$ es una serie de potencias que comienza con término cuadrático), el cual es solución de la ecuación lineal

$$\psi(\lambda w) - \lambda \psi(w) = \hat{\varphi}(w) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k w^k, \quad (4.19)$$

Esta sustitución constituye un paso fundamental en el proceso iterativo. Definiendo $g(w) = \phi^{-1} \circ \varphi \circ \phi(w)$ y escribiéndolo de la forma siguiente:

$$g(w) = \lambda w + \hat{g}(w) \quad (4.20)$$

Vamos a mostrar que escogiendo convenientemente $\delta, r > 0$ la función \hat{g} , mide cuanto g , se aleja de la transformación lineal λz , de hecho mostraremos que g está más próxima a λz que la función φ .

Para esto escogemos las constantes $\delta, \theta > 0$ tales que

$$0 < \theta < \frac{1}{5}, \quad C_0 \delta < \theta^{\mu+2}, \quad 0 < \delta < \theta \quad (4.21)$$

considerando $r > 0$ suficientemente pequeño verificando (4.18). Comencemos por hallar la

solución ψ de (4.19). Sea $\psi(w) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k w^k$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} b_k (\lambda w)^k - \lambda \sum_{k=2}^{\infty} b_k w^k &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k w^k \\ \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda^k - \lambda) b_k w^k &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k w^k \end{aligned}$$

igualando término a término obtenemos $b_k = \frac{a_k}{\lambda^k - \lambda}$ y por consiguiente

$$\psi(w) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda^k - \lambda} w^k.$$

Lema 4.8. ψ es convergente para todo $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < r$ y además

$$|\psi(w)| \leq \theta r, \text{ para todo } |w| < r(1 - \theta). \quad (4.22)$$

Demostración. Como φ es convergente en $|z| < r$, entonces por estimativa de Cauchy tenemos que:

$$k |a_k| < \frac{\delta}{r^{k-1}}, \quad \text{dado que } |\varphi'(z)| < \delta. \quad (4.23)$$

Veamos que ψ es convergente en $|w| < r$. En efecto, sea $\rho > 0$ tal que $|w| < \rho < r$, entonces por (4.17) tenemos

$$\begin{aligned} |b_k w^k| &= \frac{|a_k|}{|\lambda^k - \lambda|} |w|^k = \frac{|a_k|}{|\lambda^{k-1} - 1|} |w|^k \\ &\leq C_0 \frac{(k-1)^\mu}{\mu!} |a_k| |w|^k = \frac{C_0}{\mu!} \left(\frac{|w|}{\rho} \right)^k (k-1)^\mu |a_k| \rho^k \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \rho^k < \infty$, entonces existe $M > 0$ tal que $|a_k| \rho^k < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego por la desigualdad obtenida anteriormente tenemos

$$|b_k w^k| \leq \frac{C_0}{\mu!} M (k-1)^\mu \left[\frac{|w|}{\rho} \right]^k.$$

Haciendo $\alpha = \frac{|w|}{\rho} < 1$, tenemos que la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)^\mu \left[\frac{|w|}{\rho} \right]^k$ es convergente, puesto que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^\mu \alpha^{k+1}}{(k-1)^\mu \alpha^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{k}{k-1} \right]^\mu \alpha = \alpha < 1$$

Luego por criterio de comparación tenemos que $\sum_{k=2}^{\infty} b_k w^k$ es convergente si $|w| < r$.

Por otro lado tenemos por desigualdades (4.17) y (4.23), obtenemos

$$k |b_k| = k \frac{|a_k|}{|\lambda^k - \lambda|} = k \frac{|a_k|}{|\lambda| |\lambda^{k-1} - 1|} = k \frac{|a_k|}{|\lambda^{k-1} - 1|} \leq C_0 \frac{\delta}{r^{k-1}} \frac{(k-1)^\mu}{\mu!}$$

Ahora consideremos un dominio un poco menor $|w| < r(1-\theta)$. Entonces por la desigualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} |\psi'(w)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} k |b_k| |w|^{k-1} \leq \sum_{k=2}^{\infty} C_0 \frac{\delta}{r^{k-1}} \frac{(k-1)^\mu}{\mu!} r^{k-1} (1-\theta)^{k-1} \\ &\leq C_0 \delta \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)^\mu}{\mu!} (1-\theta)^{k-1} = C_0 \delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\mu}{\mu!} (1-\theta)^k. \end{aligned}$$

Como $\frac{k^\mu}{\mu!} \leq \frac{(k+\mu)!}{k! \mu!} = \binom{k+\mu}{\mu}$, entonces concluimos que

$$|\psi'(w)| \leq C_0 \delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\mu}{\mu!} (1-\theta)^k \leq C_0 \delta \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+\mu}{\mu} (1-\theta)^k$$

Obteniendo

$$|\psi'(w)| \leq C_0 \frac{\delta}{\theta^{\mu+1}}, \quad \text{dado que} \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_\mu^{k+\mu} (1-\theta)^k = \frac{1}{\theta^{\mu+1}} \quad (4.24)$$

Luego por (4.21), tenemos que

$$|\psi'(w)| \leq C_0 \frac{\delta}{\theta^{\mu+1}} \leq \theta, \quad \text{para todo } |w| < r(1-\theta). \quad (4.25)$$

Por integración obtenemos lo afirmado.

$$|\psi(w)| \leq C_0 \frac{\delta}{\theta^{\mu+1}} r \leq \theta r, \quad \text{para todo } |w| < r(1-\theta). \quad (4.26)$$

□

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$D_m = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r(1-m\theta)\}, \quad \text{donde } m = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Un cálculo directo muestra los siguientes contenidos,

$$D_5 \subseteq D_4 \subseteq D_3 \subseteq D_2 \subseteq D_1 \subseteq D_0.$$

La desigualdad (4.22) muestra el siguiente resultado.

Lema 4.9. $\phi(D_4) \subseteq D_3$. Más aún ϕ^{-1} está definido en D_2 y $\phi^{-1}(D_2) \subseteq D_1$

Demostración. En efecto, el siguiente cálculo muestra este hecho

$$|z| = |\phi(w)| \leq |w| + |\psi(w)| < r(1 - 4\theta) + r\theta = r(1 - 3\theta).$$

Para la segunda afirmación, supongamos $\phi(w_1) = \phi(w_2)$ con $w_1, w_2 \in D_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < r(1 - \theta)\}$, entonces

$$\begin{aligned} |w_1 - w_2| &= |\phi(w_1) - \psi(w_1) - \phi(w_2) + \psi(w_2)| = |\psi(w_1) - \psi(w_2)| \\ &\leq \max\{|\psi'(w)| : |w| \in \overline{D_1}\} |w_1 - w_2| < \theta |w_1 - w_2|, \end{aligned}$$

como $|\psi'(w)| < \theta < 1$, para todo w tal que $|w| < r(1 - \theta)$, concluimos que $w_1 = w_2$. Esto nos muestra que la restricción de ϕ a D_1 es un homeomorfismo de D_1 sobre un dominio cuya frontera está en $\varphi(\partial D_1)$. Sin embargo, si $w_1 \in \partial D_1$, entonces como $|\psi(w_1)| \leq r\theta$, tenemos que

$$|\phi(w_1)| \geq |w_1| - |\psi(w_1)| \geq r(1 - \theta) - r\theta = r(1 - 2\theta),$$

lo que muestra que $D_2 \subseteq \varphi(D_1)$ donde $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r(1 - 2\theta)\}$. \square

El lema anterior nos permite mostrar lo siguiente:

Lema 4.10. *La transformación $g(w)$, definido por $g(w) = \phi^{-1} \circ \varphi \circ \phi(w)$ es analítica en D_4 .*

Demostración. Por Lema 4.9 es suficiente mostrar que φ transforma D_3 en D_2 . Sea $z \in D_3$ entonces por (4.21) tenemos que

$$|\varphi(z)| \leq |\lambda z| + |\hat{\varphi}(z)| \leq |z| + \delta r < r(1 - 3\theta) + \theta r.$$

Lo que muestra lo afirmado. Así tenemos el siguiente diagrama:

$$D_4 \xrightarrow{\phi} D_3 \xrightarrow{\varphi} D_2 \xrightarrow{\phi^{-1}} D_1.$$

Luego g esta bien definida y como ϕ , φ y ϕ^{-1} son analíticas, g también es analítica. \square

En el siguiente resultado acotaremos superiormente la derivada de g en D_5 .

Lema 4.11.

$$|\hat{g}'(w)| < C_1 \frac{\delta^2}{\theta^{\mu+2}}, \quad \text{para todo } w \in D_5.$$

Demostración. Primeramente escribamos la igualdad $\phi \circ g = \varphi \circ \phi$ en términos de $\hat{\varphi}, \psi, \hat{g}$

$$\begin{aligned} g(w) + \psi(g(w)) &= \lambda\phi(w) + \hat{\varphi}(\phi(w)) \\ \lambda w + \hat{g}(w) + \psi(\lambda w + \hat{g}(w)) &= \lambda w + \lambda\psi(w) + \hat{\varphi}(\phi(w)) \\ \hat{g}(w) + \psi(\lambda w + \hat{g}(w)) &= \lambda\psi(w) + \hat{\varphi}(\phi(w)), \end{aligned} \tag{4.27}$$

como ψ satisface la ecuación $\psi(\lambda w) - \lambda\psi(w) = \hat{\varphi}(w)$, entonces restando en la igualdad anterior tenemos que $\hat{g}(w) + \psi(\lambda w + \hat{g}(w)) - \psi(\lambda w) + \lambda\psi(w) = \lambda\psi(w) + \hat{\varphi}(\phi(w)) - \hat{\varphi}(w)$, obteniendo

$$\hat{g}(w) = \psi(\lambda w) - \psi(\lambda w + \hat{g}(w)) + \hat{\varphi}(w + \psi(w)) - \hat{\varphi}(w). \quad (4.28)$$

Teniendo en cuenta que $g(D_4) \subseteq D_1$ y $\phi(D_4) \subseteq D_3$, tendremos que $[w, \lambda w + \hat{g}(w)] \subseteq D_1$ y $[w, w + \psi(w)] \subseteq D_3 \subseteq D_1$. Entonces por las siguientes desigualdades $|\hat{\varphi}'(w)| < \delta$ y $|\psi'(w)| < \theta$, para todo $w \in D_1$, las cuales fueron dadas en (4.18) y (4.25), tendremos de la igualdad 4.28 que

$$\begin{aligned} |\hat{g}(w)| &\leq |\psi(\lambda w) - \psi(\lambda w + \hat{g}(w))| + |\hat{\varphi}(w + \psi(w)) - \hat{\varphi}(w)| \\ &\leq \sup\{|\psi'(w)| : w \in D_1\}|\hat{g}(w)| + \sup\{|\hat{\varphi}'(w)| : w \in D_1\}|\psi(w)| \\ &\leq \theta|\hat{g}(w)| + \delta|\psi(w)| \end{aligned}$$

Luego por (4.25), tenemos que $|\psi(w)| < C_0 \frac{\delta r}{\theta^{\mu+1}}$ y como $0 < \theta < 1/5$, obtenemos

$$\frac{4}{5}|\hat{g}(w)| < (1 - \theta)|\hat{g}(w)| < \delta|\psi(w)| < \delta C_0 \frac{\delta r}{\theta^{\mu+1}}.$$

Por lo tanto, haciendo $C_1 = \frac{5}{4}C_0$, tenemos

$$|\hat{g}(w)| < C_1 \frac{\delta^2 r}{\theta^{\mu+1}} \quad \text{para todo } w \in D_1.$$

Consideremos $w \in D_5$ y el camino cerrado γ definido por $\gamma(t) = w + r\theta \exp(it)$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces $|\gamma(t)| \leq |w| + r\theta < r(1 - 5\theta) + r\theta = r(1 - 4\theta)$. Así se tiene $\gamma(t) \in D_4 \subseteq D_1$, para todo $t \in [0, 2\pi]$. Luego aplicando la fórmula integral de Cauchy a $w \in D_5$ e integrando en γ , obtenemos

$$\begin{aligned} |\hat{g}'(w)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|\hat{g}(z)|}{|z - w|^2} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} C_1 \frac{\delta^2 r}{\theta^{\mu+1}} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z - w|^2} = \frac{1}{2\pi} C_1 \frac{\delta^2 r}{\theta^{\mu+1}} \int_0^{2\pi} \frac{|r\theta \mathbf{i} \exp(it)|}{|r\theta \exp(it)|^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} C_1 \frac{\delta^2 r}{\theta^{\mu+1}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\theta} dt = \frac{1}{2\pi} C_1 \frac{\delta^2 r}{\theta^{\mu+1}} \frac{2\pi}{r\theta} \end{aligned}$$

De donde concluimos que:

$$|\hat{g}'(w)| \leq C_1 \frac{\delta^2}{\theta^{\mu+2}}, \quad \text{para todo } w \in D_5.$$

□

La característica esencial de esta estimativa es la dependencia de δ como el cuadrado del desvío δ anterior, de donde resultará que el proceso de convergencia será muy rápido.

Resumiendo lo que hemos obtenido, para constantes $\delta, \theta > 0$ tales que

$$0 < \theta < \frac{1}{5}, \quad C_0\delta < \theta^{\mu+2}, \quad 0 < \delta < \theta,$$

encontramos $r > 0$ tal que $|\hat{\varphi}'(z)| < \delta$, para todo $|z| < r$. Obteniendo lo siguiente:

$$|\psi(w)| \leq \theta r, \quad \text{para todo } |w| < r(1 - \theta). \quad (4.29)$$

$$|\hat{g}'(w)| \leq C_1 \frac{\delta^2}{\theta^{\mu+2}}, \quad \text{para todo } |w| < r(1 - 5\theta). \quad (4.30)$$

Ahora retomamos el proceso iterativo sugerido en el capítulo introductorio y definimos inductivamente

$$\varphi_\nu(z) = \lambda z + \hat{\varphi}_\nu(z)$$

Para $\varphi_0 = \varphi$, $\phi_0 = \phi$ y construimos ϕ_ν para φ_ν como fue construido ϕ para φ después definimos:

$$\varphi_{\nu+1} = \phi_\nu^{-1} \circ \varphi_\nu \circ \phi_\nu, \quad \text{donde } \phi_\nu(w) = w + \psi_\nu(w)$$

Así $\varphi_{\nu+1}$ es obtenido por φ_ν como \hat{g} fue obtenido de $\hat{\varphi}$ y observando que en el proceso reemplazamos $\phi_\nu, \varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}$ por ϕ, φ, g y teniendo en cuenta que las cantidades $r_\nu, \theta_\nu, \delta_\nu$ que aparecerán en lugar de r, θ, δ dependerán ahora de ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) y serán escogidas de modo que:

$$0 < \theta_\nu < \frac{1}{5}, \quad C_0\delta_\nu < \theta_\nu^{\mu+2}, \quad 0 < \delta_\nu < \theta_\nu, \\ |\hat{\varphi}'_\nu(w)| < \delta_\nu, \quad \text{para todo } |w| < r_\nu.$$

Con estas condiciones el proceso iterativo podrá continuar.

La elección de los parámetros es como sigue $r_\nu = \frac{r}{2}(1 + 2^{-\nu})$, en cuanto a θ_ν es definido por la relación $\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = 1 - 5\theta_\nu$ el cual es sugerida por la necesidad de sustituir $|z| < r$ por $|w| < r(1 - 5\theta)$ de donde resulta

$$\theta_\nu = \frac{1}{10(2^\nu + 1)}$$

y el parámetro $\delta_{\nu+1} = C_1 \frac{\delta_\nu^2}{\theta_\nu^{\mu+2}}$, el cual está sugerida por la necesidad de pasar de la estimativa de $\hat{\varphi}'$ a la estimativa de \hat{g}' . Así hemos escogido las constantes $r_\nu, \theta_\nu, \delta_\nu$.

Para poder seguir el proceso iterativo mostraremos que los números $r_\nu, \theta_\nu, \delta_\nu$ satisfacen la relación

$$0 < \theta_\nu < \frac{1}{5}, \quad C_0\delta_\nu < \theta_\nu^{\mu+2}, \quad 0 < \delta_\nu < \theta_\nu.$$

Para lo cual haremos uso del Lema 4.5. Primeramente observamos que $3^\nu \geq 2^\nu + 1$ para todo $\nu \geq 1$, entonces por un cálculo directo y elección de θ_ν , tenemos que $10\theta_\nu \geq 3^{-\nu}$, de donde

obtenemos que

$$\frac{1}{\theta_\nu^{\mu+2}} \leq 10^{\mu+2}(3^{\mu+2})^\nu.$$

De la desigualdad anterior y la elección del parametro δ_ν , obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\delta_{\nu+1} = C_1 \frac{\delta_\nu^2}{\theta_\nu^{\mu+2}} \leq C_1 10^{\mu+2} (3^{\mu+2})^\nu \delta_\nu^2.$$

Luego haciendo $A = C_1 10^{\mu+2} > 1$ y $B = 3^{\mu+2} > 1$, tenemos que

$$\delta_{\nu+1} \leq AB^\nu \delta_\nu^2.$$

Escogiendo $\delta = \delta_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que $AB\delta_0 < 1$, tenemos por Lema 4.5 y su observación que:

$$\delta_\nu \leq (AB\delta_0)^\nu = (C_1 30^{\mu+2} \delta_0)^\nu, \quad \text{para todo } \nu \geq 1.$$

Ahora sea $\delta_0 \leq C_2^{-2}$, donde $C_2 = C_1 30^{\mu+2}$. Entonces para está elección de δ_0 , probaremos que:

$$C_1^\nu \delta_\nu \leq \theta_\nu^{\mu+2}.$$

En efecto, por elección de δ_0 y como la desigualdad $30^\nu \geq 10(1+2^\nu)$ es satisfecha para todo $\nu \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_\nu &\leq (C_1 \delta_0 30^{\mu+2})^\nu \leq \frac{1}{(C_1 30^{\mu+2})^\nu} = \frac{1}{C_1^\nu (30^{\mu+2})^\nu} \\ &\leq \frac{1}{C_1^\nu} \left[\frac{1}{30^\nu} \right]^{\mu+2} \leq \frac{1}{C_1^\nu} \left[\frac{1}{10(1+2^\nu)} \right]^{\mu+2}. \end{aligned}$$

Por está última desigualdad y la elección de los parametros θ_ν , obtenemos que $\delta_\nu \leq \frac{1}{C_1^\nu} \theta_\nu^{\mu+2}$.

Tenemos también que $C_1 > C_0 > 1$, entonces $C_1^\nu > C_1$, de donde por un cálculo directo obtenemos que $C_0 \delta_\nu < C_1 \delta_\nu \leq \theta_\nu^{\mu+2}$. Por tanto,

$$C_0 \delta_\nu < \theta_\nu^{\mu+2}$$

Así los números $\theta_\nu, r_\nu, \delta_\nu$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$0 < \theta_\nu < \frac{1}{5}, \quad C_0 \delta_\nu < \theta_\nu^{\mu+2}, \quad 0 < \delta_\nu < \theta_\nu.$$

Observamos que $\delta_\nu \rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow \infty$ ya que $\theta_\nu \rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow \infty$. Una vez escogido $r_\nu, \theta_\nu, \delta_\nu$ vamos a proseguir nuestro proceso de iteración.

Supongamos que φ_ν es representado por

$$\varphi_\nu(z) = \lambda z + \hat{\varphi}_\nu(z), \quad \text{con} \quad |\varphi'_\nu(z)| < \delta_\nu \quad \text{para todo} \quad |z| < r_\nu.$$

Las consideraciones hechas anteriormente conducen a una sustitución $z = \phi_\nu(w) = w + \hat{\psi}_\nu(w)$ que transforma φ_ν en $\varphi_{\nu+1} = \phi_\nu^{-1} \circ \varphi_\nu \circ \phi_\nu$, la cual la escribimos de la forma:

$$\varphi_{\nu+1}(z) = \phi_\nu^{-1} \circ \varphi_\nu \circ \phi_\nu(z) = \lambda z + \hat{\varphi}_{\nu+1}(z),$$

para todo $|z| < r_{\nu+1}$. Como hemos probado para \hat{g} en nuestro primer paso iterativo, ahora obtenemos para $\hat{\varphi}_{\nu+1}$ que

$$|\hat{\varphi}'_{\nu+1}(z)| < C_1 \frac{\delta_\nu^2}{\theta_\nu^{\mu+2}} = \delta_{\nu+1}, \quad \text{para todo} \quad |z| < r_\nu(1 - 5\theta_\nu) = r_{\nu+1}. \quad (4.31)$$

está última desigualdad nos permite seguir nuestro proceso inductivo.

Finalmente probaremos que $F_\nu(z) = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_\nu(z)$ converge a la sustitución requerida, para todo $|z| < \frac{r}{2}$.

Recordemos que ϕ transforma el círculo de radio $r(1 - 4\theta)$ en otro de radio $r(1 - 3\theta)$ y por lo tanto en nuestro proceso iterativo $\phi_{\nu+1}$ transforma el círculo de radio $r_{\nu+1}(1 - 4\theta_{\nu+1})$ en otro de radio $r_{\nu+1}(1 - 3\theta_{\nu+1})$, mas aún

$$r_{\nu+1}(1 - 3\theta_{\nu+1}) \leq r_{\nu+1} = r_\nu(1 - 5\theta_\nu) \leq r_\nu(1 - 4\theta_\nu).$$

Escribiendo

$$D_{\nu,m} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_\nu(1 - m\theta_\nu)\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad m = 0, 1, 2, 4, 5.$$

Luego con esta notación tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_{\nu+1}(D_{\nu+1,4}) &\subseteq D_{\nu,4} \\ D_{\nu+1,4} &\xrightarrow{\phi_{\nu+1}} D_{\nu+1,3} \subseteq D_{\nu,4} \xrightarrow{\phi_\nu} D_{\nu,3} \subseteq D_{\nu-1,4} \dots \end{aligned}$$

para todo $\nu = 0, 1, 2, \dots$. De donde se concluye que $\phi_\nu \circ \phi_{\nu+1}$ está bien definida en $D_{\nu+1,4}$

Lema 4.12. F_ν está definida en $D_{\nu,4}$ para todo $\nu = 0, 1, 2, \dots$

Demostración. En efecto, si $\nu = 0$ entonces tenemos que $F_0 = g$, el cual está definida en $D_{0,4} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r(1 - m\theta)\}$ donde $r_0 = r$ y $\theta_0 = \theta$. Supongamos que F_ν está definida en $D_{\nu,4}$ (Hipotesis inductiva). Entonces tenemos que

$$F_{\nu+1} = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_\nu \circ \phi_{\nu+1} = F_\nu \circ \phi_{\nu+1} = F_\nu \circ \phi_{\nu+1}.$$

Como $\phi_{\nu+1}(D_{\nu+1,4}) \subseteq D_{\nu,4}$ y F_ν por hipotesis inductiva está definida en $D_{\nu,4}$, entonces tenemos que $F_{\nu+1}$ está definida en $D_{\nu+1,4}$. \square

Sea V subconjunto abierto de \mathbb{C} , definido por

$$V = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{r}{2} \right\}.$$

Como $\frac{r}{2} \leq \frac{r}{2}(1 + 2^{-\nu}) = r_\nu$, entonces $\frac{r}{2} \leq r_\nu(1 - 5\theta_\nu) = r_{\nu+1}$, para todo $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$. Así

$$V \subseteq D_{\nu,5} \subseteq D_{\nu,4} \subseteq D_{\nu,3} \subseteq D_{\nu,2} \subseteq D_{\nu,1} \subseteq D_{\nu,0} = D_{\nu-1,5}.$$

Luego cada F_ν tiene a V contenido en su dominio $D_{\nu,4}$ mas aún F_ν es analítica debido a que es composición de funciones analíticas y por lo tanto F_ν es analítica en V .

Proposición 4.13. *La sucesión de funciones analíticas $\{F_\nu\}_\nu$ es uniformemente convergente a una función analítica F en V y $F(\lambda z) = \varphi(F(z))$, para todo $z \in V$.*

Demostración. Primeramente escribamos F_ν como $F_\nu = F_{\nu-1} \circ \phi_\nu$, para todo $\nu \geq 0$. Donde $\phi_\nu : D_{\nu,4} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow D_{\nu,3} \subseteq D_{\nu-1,4}$, es la función analítica definida por $\phi_\nu(z) = z + \psi_\nu(z)$, con ψ_ν satisfaciendo $|\psi_\nu(z)| \leq r_\nu \theta_\nu$, para todo $z \in D_{\nu,4}$.

Consideremos $\|F'_\nu\| = \max\{|F'_\nu(z)| : z \in \overline{D}_{\nu,1}\}$, el cual existe desde que ϕ_ν es analítica en $\overline{D}_{\nu,1} \subseteq D_{\nu,0}$ y ϕ_ν transforma este círculo en $D_{\nu-1,5}$, el cual está contenido en $D_{\nu-1,4}$ dominio de $F_{\nu-1}$ y de donde se concluye que $\overline{D}_{\nu,1}$ está contenido en el dominio de F'_ν .

Por regla de cadena tenemos

$$|F'_\nu(z)| = |F'_{\nu-1}(\phi_\nu(z))| |1 + \psi'_\nu(z)| \leq \|F'_{\nu-1}\| (1 + |\psi'_\nu(z)|),$$

y desde que $|\psi'_\nu(z)| < \theta_\nu$, para todo $|z| \leq r_\nu(1 - 5\theta_\nu)$, obtenemos

$$|F'_\nu(z)| < \|F'_{\nu-1}\| (1 + \theta_\nu), \text{ para todo } |z| \leq r_\nu(1 - 5\theta_\nu).$$

Por lo tanto:

$$\|F'_\nu\| \leq \|F'_{\nu-1}\| (1 + \theta_\nu), \text{ para todo } \nu = 0, 1, \dots$$

Por un cálculo directo concluimos que $\|F'_\nu\| \leq \prod_{k=0}^{\nu} (1 + \theta_k)$, para todo $\nu = 0, 1, \dots$

Desde que $\theta_k = 1/10(1+2^k) \leq 1/2^k$, por el criterio de comparación obtenemos que $\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k$ es convergente, entonces por Lema 1.27 la sucesión de productos parciales $\prod_{k=0}^{\nu} (1 + \theta_k)$ es convergente. Por lo tanto

$$\|F'_\nu\| \leq \prod_{k=0}^{\nu} (1 + \theta_k) \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{\nu} \theta_k\right) \leq C_3 < \infty. \quad (4.32)$$

De otro lado tenemos $|\psi_{\nu+1}(z)| < \theta_{\nu+1}r_{\nu+1}$ para todo $|z| < r_{\nu+1}(1 - \theta_{\nu+1})$, entonces para todo $z \in V$, obtenemos que

$$|F_{\nu+1}(z) - F_\nu(z)| = |F_\nu(\phi_{\nu+1}(z)) - F_\nu(z)| \leq \|F'_\nu\| |\phi_{\nu+1}(z) - z| < C_3 r_{\nu+1} \theta_{\nu+1},$$

para todo $z \in V$ y desde que $r_{\nu+1} < r$, concluimos que

$$|F_{\nu+1}(z) - F_\nu(z)| \leq C_3 \theta_{\nu+1} r \quad \text{para todo } z \in V.$$

Teniendo en cuenta que $\theta_{\nu+k} = 1/10(1 + 2^{\nu+k}) \leq 1/2^{\nu+k}$, obtenemos para cualquier $p > 0$ arbitrario que

$$\begin{aligned} |F_{\nu+p}(z) - F_\nu(z)| &= \left| \sum_{k=1}^p F_{\nu+k}(z) - F_{\nu+k-1}(z) \right| \leq \sum_{k=1}^p |F_{\nu+k}(z) - F_{\nu+k-1}(z)| \\ &\leq \sum_{k=1}^p C_3 \theta_{\nu+k} r = C_3 r \sum_{k=1}^p \theta_{\nu+k} \\ &\leq C_3 r \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^{\nu+k}} = C_3 r \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq C_3 r \frac{1}{2^\nu} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right], \end{aligned}$$

para todo $z \in V$. De donde concluimos que

$$|F_{\nu+p}(z) - F_\nu(z)| \leq C_3 r \frac{1}{2^\nu} \quad \text{para todo } z \in V.$$

Así la sucesión de funciones analíticas $\{F_\nu\}_\nu$ es de Cauchy en V , por tanto $\{F_\nu\}_\nu$ converge uniformemente a una función F en V . Desde que $F_\nu \rightarrow F$ converge uniformemente en V , entonces F converge uniformemente en los subconjuntos compactos $K \subseteq V$ y por Teorema 1.21, se tiene que F es también una función analítica.

Ahora probaremos que $F(\lambda z) = \varphi(F(z))$ para todo $z \in V$. De nuestro proceso iterativo tenemos que $|\varphi_{\nu+1}(z) - \lambda z| = |\hat{\varphi}_{\nu+1}(z)|$ y $|\hat{\varphi}'_{\nu+1}(z)| \leq \delta_{\nu+1}$, para todo $|z| < r$, entonces obtenemos que:

$$|\varphi_{\nu+1}(z) - \lambda z| = |\hat{\varphi}_{\nu+1}(z)| \leq \delta_{\nu+1} r, \quad \text{para todo } z \in V.$$

Desde que $\delta_{\nu+1} \rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow \infty$, concluimos que $\varphi_\nu \rightarrow \lambda z$ uniformemente en V .

De la igualdad $F_\nu(\varphi_{\nu+1}) = \varphi(F_\nu)$ y por la desigualdad dada en (4.32) obtenemos

$$|F_\nu(\varphi_{\nu+1}(z)) - F(\lambda z)| \leq |F_\nu(\varphi_{\nu+1}(z)) - F_\nu(\lambda z)| + |F_\nu(\lambda z) - F(\lambda z)| \quad (4.33)$$

$$\leq \|F'_\nu\| |\varphi_{\nu+1}(z) - \lambda z| + |F_\nu(\lambda z) - F(\lambda z)| \quad (4.34)$$

$$\leq C_3 |\varphi_{\nu+1}(z) - \lambda z| + |F_\nu(\lambda z) - F(\lambda z)| \quad (4.35)$$

para todo $z \in V$. Desde que $\varphi_\nu \rightarrow \lambda z$ y $F_\nu \rightarrow F$ convergen uniformemente en V , tenemos

que para $\varepsilon > 0$ existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $\nu \geq \nu_0$, entonces

$$|\varphi_{\nu+1}(z) - \lambda z| < \frac{\varepsilon}{2C_3} \quad \text{y} \quad |F_\nu(\lambda z) - F(\lambda z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } z \in V.$$

Entonces por la desigualdad dada en (4.35), obtenemos

$$|F_\nu(\varphi_{\nu+1}(z)) - F(\lambda z)| < C_3 \frac{\varepsilon}{2C_3} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{para todo } z \in V.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(\varphi_{\nu+1}(z)) = F(\lambda z) \quad \text{uniformemente en } V.$$

Por lo descrito anteriormente obtenemos que

$$F(\lambda z) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(\varphi_{\nu+1}(z)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi(F_\nu(z)) = \varphi(\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(z)) = \varphi(F(z)), \quad \text{para todo } z \in V.$$

□

Finalmente la convergencia uniforme de las funciones analíticas F_ν y la convergencia de las derivadas en su interior garantizadas por Teorema 1.21 nos garantiza que $F(0) = 0$ y $F'(0) = 1$.

Por lo tanto, si $\varphi(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ es un difeomorfismo analítico en una vecindad del origen, con $|\lambda| = 1$ y λ no raíz de la unidad donde $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$ con $\alpha \in \Gamma$, entonces por Teorema tenemos que φ es analíticamente equivalente a su parte lineal λz y por la observación hecha en el capítulo II tenemos que para estudiar el comportamiento dinámico de las obbitas de φ es suficiente estudiar el comportamiento dinámico de las orbitas de λz .

4.2.1 Dinámica de $T(z) = \lambda z$, donde $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$ y $\alpha \in \Gamma$.

Finalmente estudiaremos el comportamiento dinámico de las orbitas de $T(z) = \lambda z$.

Observamos primeramente que la inversa de T está dado por $T^{-1}(z) = \lambda^{-1}z$ y por cálculo directo se tiene que $T^n(z) = \lambda^n z$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego como $|\lambda| = 1$, tenemos que

$$|T^n(z)| = |\lambda^n z| = |\lambda|^n |z| = |z|.$$

De donde se concluye que la orbita $\{T^n(z) = \lambda^n z : n \in \mathbb{Z}\}$ está contenida en la circunferencia de radio $|z|$.

Teorema 4.14. *La orbita de $T(z)$ es densa en el circunferencia de radio $|z|$.*

Demostración. Sea $z_1 \in S_{|z|} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = |z|\}$ para z fijo, entonces por definición $z_1 = |z| \exp(2\pi i \beta)$, con $\beta \in [0, 1]$. Luego obtenemos que

$$\begin{aligned} |z_1 - T^n(z)| &= |z| |\exp(2\pi i \beta) - \exp(2\pi i n \alpha)| = |z| |\exp(2\pi i (n\alpha - \beta)) - 1| \\ &= |z| |\exp(\pi i (n\alpha - \beta)) - \exp(-\pi i (n\alpha - \beta))| \\ &= |z| |2 \sin(\pi (n\alpha - \beta))| = 2 |z| |\sin(\pi (n\alpha - m - \beta + m))| \\ &= 2 |z| |\sin(\pi (n\alpha - m - \beta)) \cos(m\pi)| \\ &= 2 |z| |\sin(\pi (n\alpha - m - \beta))|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|z_1 - T^n(z)| = 2 |z| |\sin(\pi (n\alpha - m - \beta))|$$

Por otro lado, por la continuidad de la función $f(x) = \sin(x)$ tenemos que para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x| < \delta$ entonces $|\sin(x)| < \varepsilon$. Desde que $G = \{n\alpha - m : n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } \alpha \in \mathbb{I}\}$ es denso en \mathbb{R} , tenemos que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tal que $|n\alpha - m - \beta| < \delta$, de esto y la última igualdad concluimos que $|z_1 - T^n(z)| < 2|z|\varepsilon$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Así queda demostrado lo establecido. \square

4.3 Ecuaciones en diferencias

En esta sección veremos algunas de las aplicaciones de lo estudiado anteriormente. Mas detalles de esta sección, pueden ser encontradas en [10]

4.3.1 Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

Ecuaciones en diferencias usualmente describen la evolución de ciertos fenómenos sobre el transcurso del tiempo. Por ejemplo, si una cierta población tiene generaciones discretas, el tamaño de la $(n+1)$ -ésima generación $x(n+1)$ es una función de la n -ésima generación $x(n)$. Esta relación se expresa en una *ecuación de diferencias*.

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{4.36}$$

Podemos observar este problema desde otro punto de vista. Comenzando desde un punto x_0 , podemos generar la secuencia

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Por conveniencia adoptamos la siguiente notación

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots$$

$f(x_0)$ es llamado la primera iteración de f en x_0 ; $f^2(x_0)$ es llamado la segunda iteración de f en x_0 ; mas generalmente, $f^n(x_0)$ es la n -ésima iteración de f en x_0 . El conjunto de todas las iteraciones positivas $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ donde $f^0(x_0) = x_0$ por definición, es llamado órbita positiva de x_0 y será denotado por $O_+(x_0)$. Análogamente se define la órbita negativa. Este procedimiento iterativo es un ejemplo de un sistema dinámico discreto.

Si la función en f en (4.36) es reemplazado por una función g en dos variables, esto es, $g : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \mathbb{Z}_+ es el conjunto de los número enteros no negativos y \mathbb{R} es el conjunto de los números reales, entonces tenemos

$$x(n+1) = g(n, x(n)) \quad (4.37)$$

La ecuación (4.37) es llamado *no autonomo o variante de tiempo*, mientras que la ecuación (4.36) es llamado *autonomo o invariante de tiempo*.

A continuación estudiaremos ecuaciones en diferencias lineales de primero orden y algunas aplicaciones. Un estudio mas detallado de ecuaciones en diferencias referenciamos a Saber Elaydi [10].

Una típica ecuación en diferencias *de primer orden homogenea* es de la siguiente forma:

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (4.38)$$

y la asociada *ecuación no homogenea* es dado por

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (4.39)$$

Donde en ambas ecuaciones son asumidas que $a(n) \neq 0$ y a y g son funciones reales definidas para todo $n \geq n_0$. Podemos obtener la solución de (4.38), por simple iteración

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0 \\ x(n_0+2) &= a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0 \end{aligned}$$

Inductivamente es fácil de ver que

$$x(n+1) = x(n_0+n-n_0) = a(n-1)a(n-2)\cdots a(n_0)x_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 \quad (4.40)$$

La única solución de la ecuación no homogenea (4.39) puede ser encontrado como sigue:

$$\begin{aligned} y(n_0+1) &= a(n_0)y(n_0) + g(n_0) = a(n_0)y_0 + g(n_0) \\ y(n_0+2) &= a(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1). \end{aligned}$$

Nuevamente usando inducción matemática, se muestra para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ que

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) \quad (4.41)$$

Ejemplo 4.15: Encontrar la solución de la ecuación

$$x(n+1) = 3x(n) + 2^n, \quad x(1) = 0,5 \quad (4.42)$$

Solución: De (4.41), tenemos

$$\begin{aligned} y(n) &= \left(\frac{1}{2} \right) 3^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{n-k+1} 2^k \\ &= \frac{3^{n-1}}{2} + 3^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^k \\ &= \frac{3^{n-1}}{2} + 2, 3^{n-1} - 2^n = \left(\frac{5}{2} \right) 3^{n-1} - 2^n \end{aligned}$$

4.3.2 Puntos de equilibrio y estabilidad asintótica

Definición 4.16: Decimos que x es un *punto de equilibrio* de la ecuación en diferencias (4.36) si $f(x) = x$. Es evidente que x es punto de equilibrio de f , si y sólo si, la diagonal corta a la grafica de f en el punto x .

Se deduce que la ecuación $x(n+1) = f(x(n))$ con condición inicial $x_0 = x$ tiene una solución estacionaria, es decir, $x(n) = x$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$.

Uno de los principales objetivos en el estudio de un sistema dinámico discreto es analizar el comportamiento de sus soluciones, cerca de un punto de equilibrio. Este estudio constituye la teoría de la estabilidad. A continuación presentamos las definiciones básicas de estabilidad.

Definición 4.17: (i) Un punto de equilibrio x de f es *estable*, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x_0 - x| < \delta$ implica que $|f^n(x_0) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n > 0$. Si x no es *estable* entonces x es llamado *inestable*.

(ii) Un punto x es llamado *atractor* si existe $\eta > 0$ tal que si

$$|x(0) - x| < \eta, \quad \text{implica que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x \quad (4.43)$$

Si $\eta = \infty$, x es llamado *atractor global* o *globalmente atractor*.

(iii) El punto x es un *punto de equilibrio asintóticamente estable* si este es estable y atractor. Si $\eta = \infty$, x es llamado *globalmente asintóticamente estable*.

En esta sección damos un criterio simple pero de gran alcance para la estabilidad asintótica de puntos de equilibrio como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.18. *Sea x un punto de equilibrio de la ecuación de diferencias*

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (4.44)$$

Donde f es continuamente diferenciable en x . Entonces las siguientes afirmaciones son satisfechas

- (i) *Si $|f'(x)| < 1$, entonces x es asintóticamente estable.*
- (i) *Si $|f'(x)| > 1$, entonces x es inestable.*

Demostración. Haciendo los cambios respectivos, la prueba de este resultado es analogo al Lema 2.5. También puede ser encontrada en [10, Theorem 1.13, pg. 27]. \square

Ejemplo 4.19: La Ecuación Logística

Si $y(n)$ es el tamaño de una población en el tiempo n . Si μ es la tasa de crecimiento de la población de una generación a otra, entonces consideremos el modelo matematico de la forma

$$y(n+1) = \mu y(n), \quad \mu > 0. \quad (4.45)$$

Si el punto inicial de la población es $y(0) = y_0$, entonces por una simple iteración podemos encontrar que

$$y(n) = \mu^n y_0 \quad (4.46)$$

es solución de (4.45). Si $\mu > 1$, entonces $y(n)$ crece indefinidamente, y $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \infty$. Si $\mu = 1$, entonces $y(n) = y_0$ para todo $n > 0$, el cual significa que el tamaño de la población es constante para el futuro indefinido. Sin embargo si $\mu < 1$, entonces $y(n)$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$, y eventualmente la población queda extinta.

Para la mayoría de las especies biológicas ninguno de los casos anteriores es válida ya que la población aumenta hasta que se alcanza un cierto límite superior. Entonces, debido a las limitaciones de los recursos disponibles, las criaturas serán susceptible y participarán en la competencia por los recursos limitados. Esta competición es proporcional al número de peleas entre ellos, dada por $y^2(n)$. Un modelo más razonable sería permitir una constante de proporcionalidad b , que será mayor que 0,

$$y(n+1) = \mu y(n) - by^2(n). \quad (4.47)$$

Si en (4.47), hacemos $x(n) = \frac{b}{\mu} y(n)$ obtenemos que

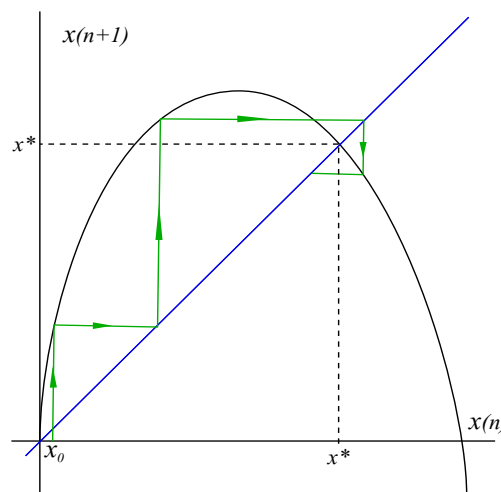
$$x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n)). \quad (4.48)$$

Esta ecuación es la ecuación de diferencia más simple no lineal de primer orden, comúnmente referido como la (discreto) ecuación logística. Sin embargo, no hay una solución explícita de (4.48) válida (excepto para ciertos valores de μ). Para encontrar los puntos fijos de (4.48) hacemos $f(x) = \mu x(1 - x) = x$. Por lo tanto, los puntos fijos de f son : $x = 0$ y $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Un cálculo directo muestra que $f'(x) = \mu(1 - 2x)$. Tendremos los siguientes casos:

- (a) Si consideramos el punto fijo 0 y $0 < |\mu| < 1$, tendremos por teorema anterior que 0 es un punto asintóticamente estable.
- (b) Para $3 > \mu > 1$ y el punto fijo $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$, se tiene que $f'(x^*) = 2 - \mu$ y por un cálculo directo muestra que $|f'(x^*)| < 1$, luego tenemos que x^* es un punto asintóticamente estable.

La gráfica siguiente muestra la dinámica de la ecuación en diferencias dada por (4.48), para $1 < \mu < 3$.



Ejemplo 4.20: Aplicación a la economía

En este ejemplo se estudia el precio de un determinado producto. Sea $S(n)$ el número de unidades suministradas en el periodo n , $D(n)$ el número de unidades demandada en el periodo n , y $p(n)$ el precio por unidad en el periodo n .

Por simplicidad, se supone que $D(n)$ sólo depende linealmente de $p(n)$ y es denotado por

$$D(n) = -m_d p(n) + b_d, \quad m_d > 0, \quad b_d > 0. \quad (4.49)$$

Esta ecuación es denominada como la curva del precio y la demanda. La constante m_d representa la sensibilidad del consumidor al precio. También suponemos que la curva del precio y la oferta relaciona la oferta de cualquier período, al precio de un período anterior, es decir,

$$S(n + 1) = m_o p(n) + b_o, \quad m_o > 0, \quad b_o > 0. \quad (4.50)$$

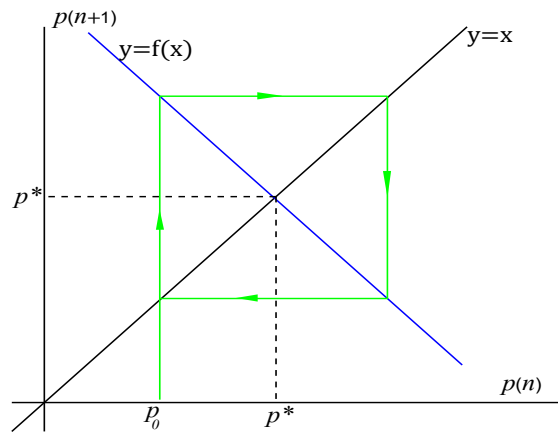


Figura 4.2: Precio de equilibrio estable

- (c) En el caso que $A < -1$, los precios oscilan infinitamente alrededor del punto de equilibrio p^* , pero progresivamente se aleja más de ella. Por lo tanto, el punto de equilibrio se considera inestable.

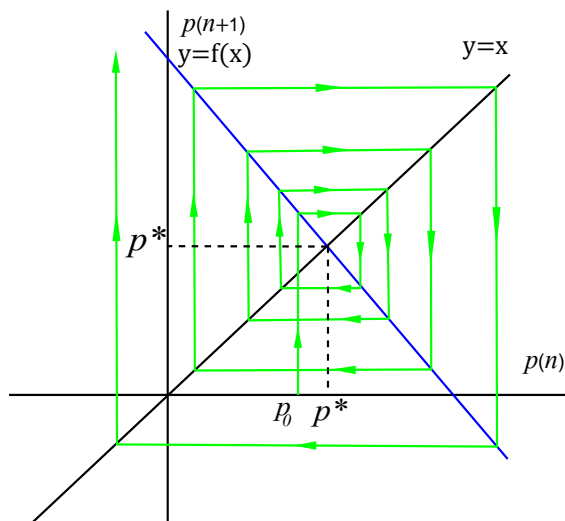


Figura 4.3: Precio de equilibrio inestable

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L. V., Complex Analysis, 3era ed., McGraw-Hill, 1979
- [2] A. D. Bruno, Analytic form of differential equations, Tr. Mosk. Mat. Obs., 1972, Volume 26, 199-239
- [3] Beardon Alan F, Iteration of rational function, complex analitic dynamical systems, Springer-Verlag, Cambrige, England November 1990.
- [4] Cartan Henri, Teoria elemental de funciones analíticas de una o varias variables complejas, Selecciones Cientificas, Madrid 1968.
- [5] César Camacho, Paulo Sad, Pontos Singulares de equações diferenciais analíticas, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA 1987.
- [6] Conway, J. B., Functions of One Complex Variable, 2a ed., Springer-Verlag, 1978
- [7] Petrofizzo Anthony, Introducción a la Teoria de Números, Prentice-Hall internacional englewood cliffs New Jersey USA 1972.
- [8] Paulo Sad, Introdução à dinâmica das funções racionais na esfera de Riemann, 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA 1983.
- [9] Rudin Walter, Analisis real y complejo, Tercera edicion McGraw-Hill,
- [10] Saber Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Springer. Department of Mathematics Trinity University San Antonio, Texas 78212 USA.
- [11] Timoteo, Carletti and Stefano, Marmi, Linearization of analytic and no-analytic germs of diffeomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$, Bulletin de la S.M.F., tome 128 n° 1(2000), p. 69-85.
- [12] C. L. Siegel, Iteration of Analytic Functions, Ann. Math., t 43, 1942, p. 807-812.
- [13] C. L. Siegel J.K. Meser, Lecturas on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Meidelberg New-York 1971.