Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Estructura local de las órbitas periódicas en sistemas dinámicos continuos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Bryan Alejandro CUEVA CORTEZ

ASESOR

Dr. Renato Mario BENAZIC TOMÉ

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Cueva, B. (2026). *Estructura local de las órbitas periódicas en sistemas dinámicos continuos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Bryan Alejandro Cueva Cortez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	76816869
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0001-8847-837X
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Benazic Tomé Renato Mario
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445668
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-1897-4383
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43688114
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Datos de investigación	
Línea de investigación	Sistemas dinámicos

Grupo de investigación	CIENCIAS MATEMATICAS PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA (CMATVIDA)
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	1 año
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 horas del martes 02 de junio de 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (PRESIDENTE), Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (MIEMBRO) y el Dr. Renato Mario Benazic Tomé (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "ESTRUCTURA LOCAL DE LAS ÓRBITAS PERIÓDICAS EN SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS", presentado por el señor Bachiller BRYAN ALEJANDRO CUEVA CORTEZ, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación SOBRESALIENTE CON MENCION con un calificativo promedio de DIECINUEVE (19).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas, manifestó que el señor Bachiller BRYAN ALEJANDRO CUEVA CORTEZ, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 17:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
PRESIDENTE

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
MIEMBRO

Dr. Renato Mario Benazic Tomé
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. Renato Mario Benazic Tomé, en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N° 001186-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es **"Estructura local de las órbitas periódicas en sistemas dinámicos continuos"**, presentado por el bachiller Bryan Alejandro Cueva Cortez para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 7% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Lima, 23 de junio de 2026



Renato Mario Benazic Tomé

DNI: 06445668

DEDICATORIA

Esta tesis, fruto de mi dedicación y esfuerzo,
la dedico con cariño a mis padres y a mi hermana,
por haber sembrado en mí los valores,
el deseo de triunfar y superarme,
y por su apoyo incondicional brindado en todo momento.

Agradecimientos

- Expreso mi más profundo agradecimiento a mi asesor, el Dr. Renato Benazic Tomé, por su apoyo en mi formación académica durante el pregrado, y por su orientación, paciencia y acompañamiento constante durante la realización de esta tesis.
- Mi sincero reconocimiento a los miembros del jurado, el Dr. Jorge Crisóstomo Parejas y el Dr. Jorge Coripaco Huarcaya, por su tiempo dedicado a la revisión de este trabajo, así como por sus observaciones y aportes, los cuales permitieron fortalecer esta investigación.
- Asimismo, agradezco a los docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas, quienes contribuyeron significativamente a mi crecimiento académico y personal. También a mis amigos y compañeros de la facultad, por los momentos de estudio y su amistad brindada.
- Por último, agradezco a todas las personas que, de una u otra forma, me brindaron su apoyo, motivación y colaboración durante el desarrollo de esta tesis.

Índice general

Introducción **1**

1. Nociones preliminares **3**
1.1. Sistemas autónomos continuos 3
1.2. Sistemas lineales con coeficientes variables 19
1.3. Superficies en $\mathbb{R}^n$ 21
1.4. Logaritmo de una matriz real 38

2. Dinámica discreta **48**
2.1. Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias 48
2.2. Atractores, repulsores e hiperbolicidad 49
2.3. Sistema autónomo de ecuaciones en diferencias 53
2.4. Linealización alrededor de un punto fijo 55

3. Existencia global de soluciones **60**
3.1. Campos vectoriales completos 60
3.2. Equivalencia de campos vectoriales 62

4. Estabilidad de órbitas periódicas **76**
4.1. Vecindades de conjuntos 76
4.2. Conjuntos límite, invariantes y atractores 77
4.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov 80
4.4. Conjuntos estable e inestable de un ciclo 82
4.5. Ciclos límite en el plano 83

5. La función de Poincaré **87**
5.1. Sección transversal local a un punto regular 87
5.2. Obtención de la función de Poincaré 90

6. Variedad estable para órbitas periódicas **106**
6.1. Teoría de Floquet 106
6.2. Matriz de monodromía 108
6.3. Hiperbolicidad de órbitas periódicas 113

Bibliografía **119**

Introducción

La teoría de sistemas dinámicos constituye un marco fundamental para modelar fenómenos evolutivos en la física, la química, la ingeniería, la biología y la economía. Los sistemas autónomos continuos, cuyas ecuaciones diferenciales son independientes del tiempo, describen comportamientos determinados por el estado actual, destacándose entre sus soluciones las órbitas periódicas, las cuales modelan oscilaciones recurrentes en áreas como mecánica celeste (estabilidad de órbitas planetarias), ingeniería (oscilaciones en sistemas mecánicos y eléctricos), ecología (competencia entre especies) y economía (ciclos de mercado).

El estudio matemático de órbitas periódicas se remonta a Newton, pero fue Henri Poincaré quien introdujo métodos cualitativos y topológicos ante la frecuente imposibilidad de obtener soluciones analíticas explícitas, desarrollando conceptos como secciones transversales y la función de primer retorno (después llamada función de Poincaré) para reducir flujos continuos a sistemas discretos. Paralelamente, Gaston Floquet (1883) estableció la teoría para sistemas lineales periódicos, definiendo los multiplicadores de Floquet para analizar estabilidad de dichas órbitas.

En el siglo XX, el Teorema de la Variedad Estable para singularidades hiperbólicas, demostrado por David M. Grobman y Philip Hartman, sentó la base para el análisis local. Sin embargo, extender estos resultados a órbitas periódicas presenta desafíos indicadas en las siguientes preguntas:

- ¿Es posible extrapolar los conceptos de estabilidad y el Teorema de la Variedad Estable a órbitas periódicas?
- ¿Qué estructura geométrica tienen los conjuntos estable e inestable de un ciclo?
- ¿En qué se diferencia el Teorema de la Variedad Estable para ciclos de su versión para singularidades?

El presente trabajo aborda estas cuestiones mediante un enfoque teórico-cualitativo que integra la construcción rigurosa de la función de Poincaré para reducir la dinámica continua a un sistema discreto, la aplicación de la teoría de Floquet para caracterizar estabilidad mediante la matriz de monodromía y la demostración del Teorema de la Variedad Estable para órbitas periódicas hiperbólicas, estableciendo que los conjuntos estable e inestable son superficies (variedades diferenciables) cuyas dimensiones dependen de los multiplicadores de Floquet.

La organización de este trabajo se divide en seis capítulos, estructurados pedagógicamente para guiar al lector desde los fundamentos hasta los resultados centrales.

En el **Capítulo 1**, se estudian sistemas autónomos continuos (lineales y no lineales), con énfasis en existencia, unicidad y estructura de soluciones. Luego se analizan sistemas lineales de coeficientes variables, cuya solución general se expresa mediante matrices fundamentales. Se introduce la teoría de superficies en el marco de variedades diferenciables, esencial para definir secciones transversales, construir la función de Poincaré y dotar de una estructura diferenciable a los conjuntos estable e inestable de un campo o un difeomorfismo. Finalmente, se revisa el logaritmo matricial, clave para la teoría de Floquet.

En el **Capítulo 2**, se presenta la teoría de sistemas dinámicos discretos, partiendo del caso lineal y extendiéndose al no lineal. Se definen conceptos fundamentales como atractores, repulsores e hiperbolicidad. Mediante técnicas de linealización, se establece el Teorema de la Variedad Estable para puntos fijos hiperbólicos, sentando las bases para el estudio de órbitas periódicas en capítulos posteriores.

En el **Capítulo 3**, se aborda la existencia global de soluciones para sistemas autónomos no lineales, estableciendo condiciones bajo las cuales las soluciones están definidas para todo tiempo. Se introduce el concepto de equivalencia topológica entre campos vectoriales, la cual permite comparar los sistemas dinámicos desde una perspectiva cualitativa, manteniendo la estructura de sus órbitas.

En el **Capítulo 4**, se definen las vecindades abiertas de un conjunto por medio de la función distancia. Posteriormente, se extienden los conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov y conjuntos estable e inestable para las órbitas periódicas. Por otro lado, se introducen los conjuntos límites, atractores y repulsores para definir los ciclos límites en el plano.

En el **Capítulo 5**, las secciones transversales serán una herramienta geométrica fundamental para reducir la dimensionalidad del flujo continuo. Se define la función de Poincaré, demostrando su existencia y diferenciabilidad cerca de una órbita periódica. Además, se estudia la relación entre la estabilidad de una órbita periódica con la de un punto fijo de la función de Poincaré.

En el **Capítulo 6**, se integran las herramientas desarrolladas previamente para caracterizar completamente la estructura local de órbitas periódicas. Primero, se desarrolla la teoría de Floquet a sistemas lineales con coeficientes periódicos, introduciendo la matriz de monodromía y los multiplicadores de Floquet. Finalmente, se demuestra el Teorema de la Variedad Estable para órbitas periódicas hiperbólicas, estableciendo que sus conjuntos estable e inestable son superficies cuyas dimensiones se determinan por el número de multiplicadores fuera del círculo unidad.

Capítulo 1

Nociones preliminares

En el presente capítulo, se darán una serie de conceptos y resultados que serán de utilidad durante el desarrollo de la tesis. [1]

1.1. Sistemas autónomos continuos

Repasando la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.), el caso más elemental consiste en resolver la ecuación

$$\dot{x} = ax \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

esta ecuación tiene como única solución a $x(t) = x(0) \cdot e^{at}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Cuando se incluyen más variables, se tiene una expresión del tipo

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x_2} & = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \vdots \\ \dot{x_n} & = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1.1}$$

y se llama *sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes*. Sin embargo, para denotar (1.1) de una manera más compacta, si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de coeficientes reales y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces el sistema (1.1) es equivalente a

$$\dot{x} = Ax$$

Por analogía con el caso escalar, se espera que la solución del sistema $\dot{x} = Ax$ sea de la forma $x(t) = e^{tA}x(0)$. Esto requiere definir rigurosamente la matriz exponencial e^{tA}, cuya construcción natural se inspira en el desarrollo de la serie de potencias de la exponencial real.

$$e^A := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots \tag{1.2}$$

Así que, para garantizar que esta serie es convergente, si $|\cdot|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la *norma uniforme asociada a* $|\cdot|$ se define como

$$\|A\| := \max_{|v|=1}\{|Av|\}$$

Se cumple que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^{n\times n}$ y por ende, $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. En consecuencia, se puede definir la convergencia de sucesiones y series de matrices. Sobre la convergencia de la serie (1.2), el lector interesado puede averiguarlo en Benazic [1].

[1] **A lo largo de esta tesis,** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **y** $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$**.**

Proposición 1.1.1. (Propiedades de la exponencial) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces se cumple que

1. Si $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\forall\, m \in \mathbb{N} : (PAP^{-1})^m = PA^mP^{-1}$ y $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.
2. Si A y B son matrices conmutativas ($AB = BA$), entonces $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, es decir, la exponencial de cualquier matriz siempre es invertible.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1], Perko [14] o Hirsch et al. [6]. ■

A continuación, se calculan las potencias y la exponencial de algunos tipos especiales de matrices.

Caso 1: Matrices diagonales: Una *matriz diagonal*, denotada por $A = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Luego, la m-ésima potencia de A es

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : A^m = \mathrm{diag}[\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m] \tag{1.4}$$

y su exponencial es

$$e^A = \mathrm{diag}[e^{\lambda_1}, \ldots e^{\lambda_n}] \tag{1.5}$$

Caso 2: Matrices diagonales por bloques: Una matriz diagonal por bloques, denotada por $A = \mathrm{diag}[A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{n_1} & \theta_{n_1\times n_2} & \ldots & \theta_{n_1\times n_k} \\ \theta_{n_2\times n_1} & A_{n_2} & \ldots & \theta_{n_2\times n_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n_k\times n_1} & \theta_{n_k\times n_2} & \ldots & A_{n_k} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

donde $A_{n_i} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$, $\theta_{n_i\times n_j} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_j}$ es la matriz nula y $n_1 + \cdots + n_k = n$, entonces la m-ésima potencia de A es

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : A^m = \mathrm{diag}[A_{n_1}^m, \ldots, A_{n_k}^m] \tag{1.7}$$

y su exponencial es

$$e^A = \mathrm{diag}[e^{A_{n_1}}, \ldots e^{A_{n_k}}] \tag{1.8}$$

Caso 3: Matrices nilpotentes: Se dice que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una *matriz nilpotente* si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = \theta$. Del principio del buen orden en $\mathbb{N}$, se sigue que existe un primer k que cumple esa propiedad, el cual es llamado *orden de nilpotencia*, entonces A es una matriz nilpotente de orden k si $A^{k-1} \neq \theta$ pero $A^k = \theta$.
Las matrices nilpotentes canónicas de orden n se denotan por $N_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde

$$N_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} = [0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}] \tag{1.9}$$

Las primeras $n-1$ potencias de N_n vienen dadas por

$$N_n = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix}, N_n^2 = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, N_n^3 = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, N_n^{n-1} = \begin{bmatrix} e_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Luego, efectivamente N_n es una matriz nilpotente de orden n, entonces para $m \geq n$, $N_n^m = \theta$, después al reemplazar en (1.2), la exponencial de N_n consiste de una suma finita de matrices

$$e^{N_n} = I + N_n + \frac{1}{2!}N_n^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}N_n^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Caso 4: Matrices de la forma $A = \lambda I_n + N_n$: Aquí, $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denotará la matriz identidad de orden n. Ahora, como la matriz identidad conmuta con cualquier otra matriz, usando la Proposición 1.1.1 y los **Casos 1 y 3**, la m-ésima potencia de A es

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : A^m = (\lambda I_n + N_n)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (\lambda I_n)^{m-i} N_n^i = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \lambda^{m-i} N_n^i \tag{1.12}$$

y su exponencial es

$$e^A = e^{\lambda I_n + N_n} = e^{\lambda I_n} \cdot e^{N_n} = e^{\lambda} e^{N_n} = e^{\lambda}\left(I + N_n + \frac{1}{2!}N_n^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}N_n^{n-1}\right) \tag{1.13}$$

Caso 5: Matrices de la forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$: A este tipo de matrices se les denota por $I_2(a,b)$ y cumplen las siguientes propiedades:

- Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $I_2(a,b) \cdot I_2(c,d) = I_2(ac - bd, ad + bc) = I_2(c,d) \cdot I_2(a,b)$.
- Si $(a,b) \neq (0,0)$, entonces $[I_2(a,b)]^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} I_2(a,-b)$.

El par (a,b) se puede representar en coordenadas polares como $a = r\cos(\theta)$ y $b = r\sin(\theta)$ para $r := \sqrt{a^2+b^2}$ y un único $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces $I_2(a,b) = I_2(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, entonces la m-ésima potencia de $A = I_2(a,b)$ es

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : A^m = \begin{bmatrix} r^m\cos(m\theta) & r^m\sin(m\theta) \\ -r^m\sin(m\theta) & r^m\cos(m\theta) \end{bmatrix} = I_2(r^m\cos(m\theta), r^m\sin(m\theta)) \tag{1.14}$$

y su exponencial es

$$e^A = \begin{bmatrix} e^a\cos(b) & e^a\sin(b) \\ -e^a\sin(b) & e^a\cos(b) \end{bmatrix} = I_2(e^a\cos(b), e^a\sin(b)) \tag{1.15}$$

Caso 6: Matrices de la forma $A = J_{2n}(a,b) + N_{2n}^2$: $J_{2n}(a,b) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ es una matriz diagonal por bloques, donde

$$J_{2n}(a,b) = \operatorname{diag}[I_2(a,b), \ldots I_2(a,b)] \tag{1.16}$$

y como N_{2n} es la matriz nilpotente canónica de orden $2n$, resulta que

$$N_{2n}^2 = \begin{bmatrix} \theta_2 & I_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 & \theta_2 \\ \theta_2 & \theta_2 & I_2 & \dots & \theta_2 & \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 & I_2 \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

y debido a que todos los bloques son matrices de orden 2, se puede multiplicar bloque por bloque como en la multiplicación usual de matrices y de este modo, se obtienen las siguientes propiedades:

- N_{2n}^2 es una matriz nilpotente canónica de orden n.
- Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $J_{2n}(a,b) \cdot J_{2n}(c,d) = J_{2n}(c,d) \cdot J_{2n}(a,b)$
- Si $(a,b) \neq (0,0)$, entonces $[J_{2n}(a,b)]^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} J_{2n}(a,-b)$
- $J_{2n}(a,b) \cdot N_{2n}^2 = N_{2n}^2 \cdot J_{2n}(a,b)$

Luego, usando la Proposición 1.1.1 y los **Casos 2, 3 y 5**, la m-ésima potencia de A es

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : A^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} [J_{2n}(a,b)]^{m-i} N_{2n}^{2i} \tag{1.18}$$

y su exponencial es

$$e^A = e^{J_{2n}(a,b)+N_{2n}^2} = e^{J_{2n}(a,b)} \cdot e^{N_{2n}^2} = J_{2n}(e^a \cos(b), e^a \sin(b)) \cdot e^{N_{2n}^2} \tag{1.19}$$

Gracias al Teorema de la Forma Canónica de Jordan, mediante un cambio de coordenadas adecuado, la matriz A es similar a una matriz diagonal por bloques cuyos bloques corresponden a los **Casos 4 o 6** descritos anteriormente:

Teorema 1.1.1. (Forma Canónica de Jordan para matrices reales) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces existe $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que $A = P^{-1} J_A P$ y

$$J_A = \mathrm{diag}[J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_k}]$$

donde

- $J_{\lambda_i} = \lambda I_{n_i} + N_{n_i}$ está asociado al autovalor $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- $J_{\lambda_j} = J_{2n_j}(a_j, b_j) + N_{2n_j}^2$ está asociado al autovalor $\lambda_j = a_j + i b_j \in \mathbb{C}$ $(b_j \neq 0)$.

además, la suma de los órdenes de los bloques de la forma $\lambda I_{n_i} + N_{n_i}$ es igual a la multiplicidad algebraica del autovalor real λ_i (multiplicidad como raíz del polinomio característico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$) mientras que la suma de los órdenes de los bloques de la forma $J_{2n_j}(a_j, b_j) + N_{2n_j}^2$ es igual al doble de la multiplicidad algebraica del autovalor complejo $a_j + i b_j$. La matriz J_A es única salvo por el orden de los bloques.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Hirsch et al. [6] o Hoffman [7]. ■

Sobre la obtención de la matriz P, el lector interesado puede averiguarlo en Benazic [1].

Por otro lado, una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ define una transformación lineal $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definida como $\forall\, x \in \mathbb{R}^n : T_A(x) := Ax$.

Antes de enunciar el siguiente teorema, el *espectro de una matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es el conjunto de los autovalores de A, esto es,

$$\mathrm{Aut}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ es autovalor de } A\}$$

Teorema 1.1.2. (Descomposición primaria) Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k} = \mathrm{Aut}(A)$ los distintos autovalores de A con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda_j) = d_j$, si se denotan los autoespacios generalizados de A asociados a cada autovalor λ_j como

$$\forall\, j \in \{1,\dots,k\} : W_j := \mathrm{Ker}((A-\lambda_j I)^{d_j})$$

entonces

1. Para todo $j \in \{1,\dots,k\}$, $(T_A - \lambda_j I)_{|W_j} \in \mathcal{L}(W_j)$ es una transformación lineal nilpotente.
2. $\forall\, j \in \{1,\dots,k\} : \dim(W_j) = d_j$
3. $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} W_j$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Hirsch et al. [6] o Hoffman [7]. ■

Para el siguiente teorema, sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial finito dimensional y $N \in \mathcal{L}(V)$ una transformación lineal nilpotente. Si $u \in V$ satisface $N^m(u) = 0$ y los vectores $u, N(u), \dots, N^{m-1}(u)$ son linealmente independientes, el subespacio

$$Z_m(u) := \langle u, N(u), \dots, N^{m-1}(u)\rangle$$

se llama *subespacio cíclico de V asociado a N y de dimensión m.*

Teorema 1.1.3. (Forma Canónica de Transformaciones Nilpotentes) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión d y $N \in \mathcal{L}(V)$ una transformación lineal nilpotente de orden $k \le d$, entonces existen vectores $u_1,\dots,u_r \in V$ linealmente independientes tales que

1. $\forall\, j \in \{1,\dots,r\} : Z_{k_r}(u_r)$ es un subespacio cíclico asociado a N.
2. $k = k_1 \ge \cdots \ge k_r \ge 1$ y $k_1 + \cdots + k_r = d$.
3. Si $p \in \{1,\dots,r\}$ verifica que $k_{p+1} = \dots k_r = 1$, entonces $u_{p+1}, \dots u_r \in \mathrm{Ker}(N)$.
4. $V = \bigoplus_{j=1}^{r} Z_{k_j}(u_j)$

y el conjunto

$$\mathcal{B} = \{N^{k_1-1}(u_1), \dots, u_1, \dots, N^{k_r-1}(u_r), \dots, u_r\}$$

es una base ordenada de V para la cual la representación matricial de N es

$$\mathrm{diag}[N_{k_1}, \dots N_{k_r}]$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Hoffman [7]. ■

Luego, tras comprobar que $t \mapsto e^{tA}$ es diferenciable en $\mathbb{R}$, se tiene el Teorema de Existencia y Unicidad:

Teorema 1.1.4. (Existencia y unicidad) Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces el *Problema de Valor Inicial* (P.V.I.)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

posee una única solución $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_{x_0}(t) = e^{tA}x_0$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1], Perko [14], Hirsch et al. [6] o Sotomayor [16]. ■

Si bien el cálculo de la exponencial e^A a través de la forma canónica de Jordan es teóricamente claro, este enfoque presenta obstáculos prácticos: en dimensiones muy altas, determinar la forma canónica de Jordan y la matriz cambio de base resulta ser un procedimiento computacionalmente intensivo y numéricamente delicado. Más aún, en sistemas paramétricos como

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + \mu y \\ \dot{y} = -3x + \lambda y \end{cases} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

la estructura de la forma canónica de Jordan puede cambiar drásticamente ante pequeñas perturbaciones, impidiendo un análisis continuo de la familia de soluciones.

Por ello, Henri Poincaré introdujo una perspectiva cualitativa: comprender el comportamiento asintótico de las trayectorias sin necesidad de calcularlas explícitamente.

Definición 1.1.1. (Flujo asociado a una matriz) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el *flujo asociado a* A es la función

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto e^{tA}x \end{aligned}$$

Observación. Para el flujo asociado a $-A$, resulta que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_{-A}(t, x) = e^{t(-A)}x = e^{(-t)A}x = \varphi_A(-t, x) \tag{1.20}$$

En otras palabras, el flujo asociado a $-A$ se obtiene de invertir el sentido del flujo asociado a A.

Proposición 1.1.2. (Propiedades del flujo) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces

1. $\forall\, (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \frac{\partial \varphi_A}{\partial t}(t, x) = A\varphi_A(t, x)$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \varphi_A(0, x) = x$
3. $\forall\, t, s \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R} : \varphi_A(t, \varphi_A(s, x)) = \varphi_A(t + s, x)$ (Propiedad fundamental)

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Sotomayor [16]. ■

Definición 1.1.2. (Órbita continua de una matriz) Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$

1. La *semiórbita positiva (continua) de* A *que pasa por* x_0 se define como el conjunto [2]

$$\mathcal{O}^+_{\mathcal{C},A}(x_0) := \{\varphi_A(t, x_0)\}_{t\geq 0}$$

2. La *semiórbita negativa (continua) de* A *que pasa por* x_0 se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^-_{\mathcal{C},A}(x_0) := \{\varphi_A(t, x_0)\}_{t\leq 0}$$

3. La *órbita total (continua) de* A *que pasa por* x_0 se define como el conjunto

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C},A}(x_0) := \{\varphi_A(t, x_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$$

Observación. De (1.20), resulta que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},-A}(x) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},A}(x)$.

[2] Más adelante, en el **Capítulo 2** se justificará el uso de la notación $\mathcal{C}$.

Proposición 1.1.3. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces

1. Si $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},A}(y)$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},A}(x) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},A}(y)$.
2. Si $x \notin \mathcal{O}_{\mathcal{C},A}(y)$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},A}(x) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{C},A}(y) = \emptyset$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

Definición 1.1.3. (Atractores y repulsores en sistemas continuos) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces

1. El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es un *$\mathcal{C}$-atractor de A* si
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t\to\infty} \varphi_A(t, x) = 0$$
2. El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es un *$\mathcal{C}$-repulsor de A* si
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t\to-\infty} \varphi_A(t, x) = 0$$

Observación. Debido a (1.20), $0 \in \mathbb{R}^n$ es un $\mathcal{C}$-repulsor de A si y solo si 0 es un $\mathcal{C}$-atractor de $-A$.

Definición 1.1.4. (Conjugación de matrices) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se dice que A y B son *matrices conjugadas* si existe una biyección $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que
$$\forall\, (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : h(\varphi_A(t, x)) = \varphi_B(t, h(x))$$

1. A y B son *topológicamente conjugadas* si h es un homeomorfismo.
2. A y B son *C^k-conjugadas* si h es un difeomorfismo de clase C^k.
3. A y B son *linealmente conjugadas* si h es un isomorfismo.

Teorema 1.1.5. (Criterio analítico de atractores) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. A es topológicamente conjugada a $-I_n$
2. $0 \in \mathbb{R}^n$ es un $\mathcal{C}$-atractor de A
3. $\forall\, \lambda \in \mathrm{Aut}(A) : \mathrm{Re}(\lambda) < 0$
4. $\exists\, \mu > 0, \exists\, K \geq 1, \forall\, t \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n : |\varphi_A(t, x)| \leq Ke^{-\mu t}|x|$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Perko [14]. ■

Corolario 1.1.1. (Criterio analítico de repulsores) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. A es topológicamente conjugada a I_n
2. $0 \in \mathbb{R}^n$ es un $\mathcal{C}$-repulsor de A
3. $\forall\, \lambda \in \mathrm{Aut}(A) : \mathrm{Re}(\lambda) > 0$
4. $\exists\, \mu > 0, \exists\, K \geq 1, \forall\, t \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n : |\varphi_A(t, x)| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Perko [14]. ■

Definición 1.1.5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, una *singularidad de A* es un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = 0$, i.e., $x \in \mathrm{Ker}(A)$.

- Si $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, entonces el origen es la única singularidad de A.
- Si $A \notin \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, entonces el conjunto de singularidades de A es un subespacio vectorial de dimensión $d \leq n$.

Definición 1.1.6. (Matriz hiperbólica en sistemas continuos) Sea $A \in \mathbb{R}^n$, se dice que A es una *matriz $\mathcal{C}$-hiperbólica* si

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Aut}(A) : \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$$

Al conjunto de matrices $\mathcal{C}$-hiperbólicas se le denota por $\mathrm{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^n)$, y el *índice de $\mathcal{C}$-estabilidad de A*, denotado por $i_{\mathcal{C},A}(0) = m$, es el número de autovalores de A con parte real negativa (incluyendo multiplicidad).

Definición 1.1.7. (Conjuntos estable e inestable) Sea $A \in \mathrm{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^n)$ con $i_{\mathcal{C},A}(0) = m$, entonces

1. El *conjunto $\mathcal{C}$-estable de A* se define como

$$E^s_{\mathcal{C},A}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_A(t,x) = 0\}$$

2. El *conjunto $\mathcal{C}$-inestable de A* se define como

$$E^u_{\mathcal{C},A}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi_A(t,x) = 0\}$$

Observación. Debido a (1.20), $E^u_{\mathcal{C},A}(0) = E^s_{\mathcal{C},-A}(0)$.

Por último, tanto el conjunto $\mathcal{C}$-estable y $\mathcal{C}$-inestable de una matriz son subespacios vectoriales cuyas dimensiones están relacionadas con el índice de $\mathcal{C}$-estabilidad de la matriz.

Proposición 1.1.4. Sea $A \in \mathrm{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^n)$ con $i_{\mathcal{C},A}(0) = m$, entonces

1. A es linealmente conjugada a $\mathrm{diag}[A_1, A_2]$, donde $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es una matriz que reúne los autovalores de A con parte real negativa, mientras que $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ reúne los autovalores de A con parte real positiva.
2. $E^s_{\mathcal{C},A}(0)$ y $E^u_{\mathcal{C},A}(0)$ son subespacios vectoriales de dimensión m y $n-m$ respectivamente. Asimsimo, $\mathbb{R}^n = E^s_{\mathcal{C},A}(0) \oplus E^u_{\mathcal{C},A}(0)$.
3. $\exists\, \mu_1 > 0, \exists\, K_1 \geq 1, \forall\, t \geq 0, \forall\, x \in E^s_{\mathcal{C},A}(0) : |\varphi_A(t,x)| \leq K_1 e^{-\mu_1 t}|x|$
4. $\exists\, \mu_2 > 0, \exists\, K_2 \geq 1, \forall\, t \geq 0, \forall\, x \in E^u_{\mathcal{C},A}(0) : |\varphi_A(t,x)| \geq K_2^{-1} e^{\mu_2 t}|x|$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

Considerando el caso general, un *sistema autónomo de E.D.O.* consiste en n ecuaciones acopladas de la forma

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x_2} &= X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x_n} &= X_n(x_1, x_2 \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1.21}$$

definidas en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Las funciones $X_1, \ldots, X_n$ pueden agruparse en un campo vectorial $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.Así, el punto $x \in U$ es el punto de aplicación del vector $X(x) \in \mathbb{R}^n$ y el sistema (1.21) puede reescribirse de forma compacta como

$$\dot{x} = X(x)$$

A diferencia de los sistemas lineales como (1.1), no existe una fórmula general para (1.21). Para garantizar la existencia y unicidad de soluciones, el Teorema de Picard-Lindelöf exige que el campo debe ser Lipschitz en una vecindad compacta de la condición inicial $x(0) = x_0 \in U$. La solución se construye mediante aproximaciones sucesivas de la ecuación integral asociada

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X(x(s))ds \tag{1.22}$$

cuya demostración se basa en el Teorema del Punto Fijo (el lector interesado puede averiguarlo en Rudin [15], Benazic [1] o Perko [14]).

Lema 1.1.1. (Desigualdad de Gronwall) Sea $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

1. $\forall\, t \in [a, b] : u(t) \geq 0$
2. Existen $C, K \geq 0$ tales que $\forall\, t \in [a, b] : u(t) \leq C + K \int_a^t u(s)ds$. entonces

$$\forall\, t \in [a, b] : u(t) \leq Ce^{K(t-a)}$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1], Perko [14] o Hirsch et al. [6]. ■

Proposición 1.1.5. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $X \in \mathcal{X}^1(U)$ (campo vectorial de clase C^1), entonces X es localmente Lipschitz en U, esto es, para cada $x_0 \in U$ existen $r = r(x_0) > 0$ y $K = K(x_0) > 0$ tales que

$$\forall\, x, y \in B_r(x_0) : |X(x) - X(y)| \leq K|x - y|$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Perko [14]. ■

Teorema 1.1.6. (Picard-Lindelöf) Sea X un campo Lipschitz en $B_r[x_0]$ (es decir, $X \in \text{Lip}(B_r[x_0], \mathbb{R}^n)$), si $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in U$, entonces existe una única solución del P.V.I. asociado a X,x_0 y t_0:

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.23}$$

definida en $I_\alpha[t_0]$, donde $\alpha = \frac{r}{N}$ y $N \geq \max\limits_{x \in\ B_r[x_0]} \{|X(x)|\}$.

Demostración. Este resultado puede consultarse en Benazic [1], Coddington [2] o Hirsch et al. [6]. ■

Como consecuencia, es suficiente que el campo vectorial sea de clase C^1 para que exista una única solución local dada una condición inicial $x(t_0) = x_0 \in U$. Posteriormente, se demuestra que el P.V.I. (1.23) admite una única solución maximal, es decir, una solución que está definida en el mayor intervalo posible de tiempo. Formalmente, existe una única solución $\varphi : I_M \longrightarrow U$, donde I_M es un intervalo abierto que contiene a t_0 y

1. $\varphi(t_0) = x_0$
2. $\forall\, t \in I_M : \dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t))$

3. Si $\psi : J \longrightarrow U$ es otra solución de (1.23), entonces $J \subseteq I_M$ y $\varphi\Big|_J = \psi$.

Teorema 1.1.7. (Existencia y unicidad) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^1(U)$, entonces para $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in U$, el P.V.I. (1.23) admite una única solución maximal $\varphi = \varphi_{(X,x_0,t_0)} : I(X, x_0, t_0) \longrightarrow U$ definida en el intervalo maximal

$$I(X, x_0, t_0) = (\omega_-(X, x_0, t_0), \omega_+(X, x_0, t_0))$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1], Perko [14], Sotomayor [16] o Hirsch et al. [6]. ■

En adelante, se asumirá que $t_0 = 0$, y si no es necesario especificar el campo

$$I(x_0) = I(X, x_0) \quad , \quad \omega_\pm = \omega_\pm(x_0) = \omega_\pm(X, x_0) \quad , \quad \varphi_{x_0} = \varphi_{(X,x_0)}$$

A continuación, se enuncian algunos resultados sobre el comportamiento de la solución cerca de los extremos del intervalo maximal.

Teorema 1.1.8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$ y $x_0 \in U$, si $\varphi = \varphi_{(X,x_0)}$ es la solución maximal del P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.24}$$

y $\omega_+ \in \mathbb{R}$ (resp. $\omega_- \in \mathbb{R}$), entonces para cualquier compacto $K \subseteq U$, existe $W_+ \subseteq \mathbb{R}$ vecindad abierta de ω_+ (resp. W_- vecindad abierta de ω_-) tal que

$$\forall\, t \in W_+ \cap (0, \omega_+) : \varphi(t) \notin K$$

(respectivamente $W_- \cap (\omega_-, 0)$).

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1], Perko [14] o Hirsch et al. [6]. ■

Corolario 1.1.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$, $x_0 \in U$ y $\varphi = \varphi_{(X,x_0)}$ la solución maximal del P.V.I. (1.24), si $\omega_+ \in \mathbb{R}$ (resp. $\omega_- \in \mathbb{R}$) y existe $\lim\limits_{t \to \omega_+^-} \varphi(t)$ (resp. existe $\lim\limits_{t \to \omega_-^+} \varphi(t)$), entonces $\lim\limits_{t \to \omega_+^-} \varphi(t) \in \partial U$ (resp. $\lim\limits_{t \to \omega_-^+} \varphi(t) \in \partial U$).

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Perko [14]. ■

Corolario 1.1.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$, $x_0 \in U$ y $\varphi = \varphi_{(X,x_0)}$ la solución maximal del P.V.I. (1.24), si existe un compacto $K \subseteq U$ tal que $\varphi([0, \omega^+)) \subseteq K$ (resp. $\varphi((\omega_-, 0]) \subseteq K$), entonces $\omega_+ = \infty$ (resp. $\omega_- = -\infty$).

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1], Perko [14] o Hirsch et al. [6]. ■

Proposición 1.1.6. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$ un campo acotado y $x_0 \in U$, si $\omega_+ \in \mathbb{R}$ (resp. $\omega_- \in \mathbb{R}$), entonces existe $\lim\limits_{t \to \omega_+^-} \varphi(t)$ (resp. $\lim\limits_{t \to \omega_-^+} \varphi(t)$).

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

Proposición 1.1.7. (Dependencia continua respecto a las condiciones iniciales) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ un campo Lipschitz en U, $x_0, x_1 \in U$, entonces

$$\forall\, t \in I(x_0) \cap I(x_1) : |\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_1}(t)| \leq |x_0 - x_1| e^{\mathrm{Lip}(X)|t|}$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Perko [14]. ■

Definición 1.1.8. (Flujo asociado a un campo vectorial) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^1(U)$, el *flujo asociado a* X es la función

$$\begin{aligned} \varphi_X : D_X &\longrightarrow U \\ (t, x_0) &\longmapsto \varphi_{(X,x_0)}(t) \end{aligned}$$

donde el dominio del flujo es el conjunto

$$D_X := \{(t, x_0) \,|\, t \in I(X, x_0), x_0 \in U\}$$

Proposición 1.1.8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^k(U)$, entonces

1. D_X es abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
2. φ_X es clase C^k en D_X.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Sotomayor [16]. ■

De la misma manera que en los sistemas lineales, el flujo asociado al campo $-X$ se obtiene de invertir el sentido temporal del flujo asociado a X.

Proposición 1.1.9. (Flujo inverso) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^1(U)$, entonces para cualquier $x_0 \in U$

1. $I(-X, x_0) = -I(X, x_0)$
2. $\omega_+(-X, x_0) = -\omega_-(X, x_0)$
3. $\omega_-(-X, x_0) = -\omega_+(X, x_0)$
4. $\forall\, s \in I(-X, x_0) : \varphi_{(-X,x_0)}(s) = \varphi_{(X,x_0)}(-s)$

y por consiguiente,

$$\forall\, (s, x_0) \in D_{-X} : \varphi_{-X}(s, x_0) = \varphi_X(-s, x_0)$$

Demostración. Considerando el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = -X(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.25}$$

y la función

$$\begin{aligned} \psi : -I(X, x_0) &\longrightarrow U \\ s &\longmapsto \varphi_X(-s, x) \end{aligned}$$

al derivar respecto a s, haciendo uso de la Regla de la Cadena,

$$\forall\, s \in -I(X, x_0) : \dot{\psi}(s) = -\frac{\partial \varphi_X}{\partial s}(-s, x_0) = -X(\varphi_X(-s, x_0)) = -X(\psi(s))$$

y $\psi(0) = \varphi_X(0, x_0) = x_0$, entonces ψ es solución del P.V.I. (1.25). Sin embargo, del Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 1.1.7), la única solución maximal de dicho P.V.I. es $\varphi_{(-X,x_0)} : I(-X, x_0) \longrightarrow U$, entonces $-I(X, x_0) \subseteq I(-X, x_0)$ y

$$\forall\, s \in -I(X, x_0) : \varphi_{(-X,x_0)}(s) = \varphi_{(X,x_0)}(-s)$$

Análogamente, se obtiene la inclusión inversa $I(-X, x_0) \subseteq -I(X, x_0)$. Por ende, los intervalos son iguales y

1. $I(-X, x_0) = -I(X, x_0)$
2. $\omega_+(-X, x_0) = -\omega_-(X, x_0)$
3. $\omega_-(-X, x_0) = -\omega_+(X, x_0)$
4. $\forall\, s \in I(-X, x_0) : \varphi_{(-X,x_0)}(s) = \varphi_{(X,x_0)}(-s)$

Por último, $\forall\, (s, x_0) \in D_{-X} : \varphi_{-X}(s, x_0) = \varphi_X(-s, x_0)$. ■

Asimismo, el flujo asociado a un campo vectorial cumple con la propiedad fundamental del flujo:

Teorema 1.1.9. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^k(U)$, entonces

1. $\forall\, (t, x) \in D_X : \frac{\partial \varphi_X}{\partial t}(t, x) = X(\varphi_X(t, x))$
2. $\forall\, x \in U : \varphi_X(0, x) = x$
3. Si $(t, x) \in D_X$ y $(s, \varphi_X(t, x)) \in D_X$, entonces $(s + t, x) \in D_X$ y

$$\varphi_X(s + t, x) = \varphi_X(s, \varphi_X(t, x))$$

Esta es la *propiedad fundamental del flujo*.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Sotomayor [16]. ■

Definición 1.1.9. (Órbita continua de un campo vectorial) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $x_0 \in U$

1. La *semiórbita positiva de X que pasa por x_0* se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(x_0) := \{\varphi_X(t, x_0) \mid 0 \leq t < \omega_+(X, x_0)\}$$

2. La *semiórbita negativa de X que pasa por x_0* se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^-_{\mathcal{C},X}(x_0) := \{\varphi_X(t, x_0) \mid \omega_-(X, x_0) < t \leq 0)\}$$

3. La *órbita total de X que pasa por x_0* se define como el conjunto

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(x_0) := \{\varphi_X(t, x_0)\}_{t \in I(X,x_0)}$$

Observación. De la Proposición 1.1.9, $\mathcal{O}^-_{\mathcal{C},X}(x_0) = \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},-X}(x_0)$.

Al igual que en las órbitas continuas asociadas a una matriz, o bien dos puntos están sobre la misma órbita o sus órbitas son disjuntas. Esto se deduce del Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 1.1.7) y la propiedad fundamental del flujo (Proposición 1.1.9).

Proposición 1.1.10. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $x, y \in U$, entonces

1. Si $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(y)$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(x) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(y)$.
2. Si $x \notin \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(y)$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(x) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(y) = \emptyset$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Teschl [17]. ■

Para la siguiente definición, si U_1 y U_2 son abiertos en $\mathbb{R}^n$, el conjunto de homeomorfismos entre U_1 y U_2 se denota por $\text{Hom}(U_1, U_2)$ mientras que el de difeomorfismos de clase C^k se denota por $\text{Diff}^k(U_1, U_2)$. Esto es,

$$\text{Hom}(U_1, U_2) = \{h : U_1 \longrightarrow U_2 \mid h \text{ es un homeomorfismo}\}$$
$$\text{Diff}^k(U_1, U_2) = \{h : U_1 \longrightarrow U_2 \mid h \text{ es un difeomorfismo de clase } C^k\}$$

Definición 1.1.10. (Conjugación de campos vectoriales) Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $X \in \mathcal{X}^k(U_1)$, $Y \in \mathcal{X}^k(U_2)$, se dice que X, Y son conjugados si existe una biyección $h : U_1 \longrightarrow U_2$ tal que

$$\forall\ (t, x) \in D_X : h(\varphi_X(t, x)) = \varphi_Y(t, h(x))$$

- Se dice que X y Y son *topológicamente conjugados* si $h \in \text{Hom}(U_1, U_2)$.
- Se dice que X y Y son C^k*-conjugados* si $h \in \text{Diff}^k(U_1, U_2)$.

Definición 1.1.11. (Singularidad de un campo vectorial) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^k(U)$, se dice que $p \in U$ es una *singularidad de* X si $X(p) = 0$. Al conjunto de singularidades de X se denota por $\text{Sing}(X)$. Se dice que p es un *punto regular de* X si $p \notin \text{Sing}(X)$.

Proposición 1.1.11. (Caracterización de singularidades) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^k(U)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $p \in \text{Sing}(X)$
2. $I(p) = \mathbb{R}$ y φ_p es la función constante $\varphi_p(t) = p$.
3. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) = \{p\}$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

Observación. Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $X \in \mathcal{X}^k(U_1)$, $Y \in \mathcal{X}^k(U_2)$ y $h : U_1 \longrightarrow U_2$ una conjugación, entonces $p \in \text{Sing}(X)$ si y solo si $h(p) \in \text{Sing}(Y)$. En efecto, si p es una singularidad de X, entonces de la Proposición 1.1.11,

$$\forall\ t \in \mathbb{R} : \varphi_Y(t, h(p)) = h(\varphi_X(t, p)) = h(p)$$

Por ende, $h(p) \in \text{Sing}(Y)$. Considerando a h^{-1} como conjugación se demuestra el recíproco.

Definición 1.1.12. (Órbita periódica) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$ un punto regular de X, se dice que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo u órbita periódica de* X si $I(p) = \mathbb{R}$ y φ_p es una función periódica.

Un resultado importante sobre la geometría de las soluciones establece que si el campo es de clase C^1, entonces la órbita $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ satisface solamente uno de los siguientes casos:

- La órbita es difeomorfa a un intervalo.
- La órbita consiste de un solo punto.
- La órbita es difeomorfa a un círculo.

Lema 1.1.2. (Criterio para determinar órbitas periódicas) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ un punto regular de X y $\varphi_p : I(p) \longrightarrow U$ la solución maximal, si existen $a, b \in I(p)$ tales que $a < b$ y $\varphi_p(a) = \varphi_p(b)$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es una órbita periódica de X.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Sotomayor [16]. ■

Teorema 1.1.10. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$, entonces ocurre uno y solo uno de los siguientes casos:

1. φ_p es inyectiva.
2. $I(p) = \mathbb{R}$ y φ_p es constante.
3. $I(p) = \mathbb{R}$ y φ_p es periódica con periodo positivo.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

Cuando un sistema autónomo presenta una singularidad, es natural preguntarse cómo se comportan las trayectorias cercanas a ella. La linealización es la técnica que responde esta interrogante aproximando el sistema no lineal por su mejor aproximación lineal. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in \mathrm{Sing}(X)$, dado que X es diferenciable en p,

$$\forall\, x \in U : X(x) = X(p) + DX(p) \cdot (x - p) + r(x, p)$$

donde $\lim\limits_{x \to p} \frac{r(x,p)}{|x-p|} = 0$. Sin pérdida de generalidad, se puede trasladar p al origen mediante el cambio de variable $y = x - p$, entonces denotando por $A := DX(0)$, se obtiene

$$\forall\, y \in U : X(y) = Ay + r(y)$$

Cuando y se acerca a 0, el término lineal Ay predomina sobre el resto $r(y)$. Esto sugiere que, localmente, las órbitas de $\dot{y} = Ay$ se asemejan a las de $\dot{y} = X(y)$.

Definición 1.1.13. (Linealización alrededor de una singularidad) Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in \mathrm{Sing}(X)$, entonces $A := DX(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada *linealización de X alrededor de p.*

Definición 1.1.14. (Singularidad hiperbólica) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in \mathrm{Sing}(X)$, entonces p es una *singularidad hiperbólica de X* si $A = DX(p) \in \mathrm{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^n)$. El índice de $\mathcal{C}$-estabilidad de p se define como $i_{\mathcal{C},X}(p) = i_{\mathcal{C},A}(0)$.

Definición 1.1.15. (Conjunto estable e inestable de una singularidad) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in \mathrm{Sing}(X)$ una singularidad hiperbólica,

1. El *conjunto estable de X respecto a p* se define como

$$W^s_{\mathcal{C},X}(p) := \{x \in U \mid \omega_+(x) = \infty \ , \ \lim_{t \to \infty} \varphi_X(t, x) = p\}$$

2. El *conjunto inestable de X respecto a p* se define como

$$W^u_{\mathcal{C},X}(p) := \{x \in U \mid \omega_-(x) = -\infty \ , \ \lim_{t \to -\infty} \varphi_X(t, x) = p\}$$

Observación. Debido a la Proposición 1.1.9, $W^u_{\mathcal{C},X}(p) = W^s_{\mathcal{C},-X}(p)$.

En el caso lineal, los conjuntos estable e inestable son espacios vectoriales cuyas dimensiones dependen del índice de estabilidad. En el caso no lineal, estos conjuntos se generalizan como superficies o variedades diferenciables (Sección 1.3) que, aunque dejen de ser lineales, localmente conservan las dimensiones y permanecen allí para todo tiempo futuro o pasado (esta propiedad se conoce como invarianza por el flujo y se verá en el Capítulo 4).

Teorema 1.1.11. (Teorema de la Variedad Estable para singularidades hiperbólicas) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in \mathrm{Sing}(X)$ una singularidad hiperbólica de X con $i_p(X) = m$, entonces existe $r > 0$ tal que

1. $W^s_{\mathcal{C},X}(p) \cap B_r(p)$ es una superficie de clase C^k y dimensión m que contiene a p y es positivamente invariante por X.

2. $W^u_{\mathcal{C},X}(p) \cap B_r(p)$ es una superficie de clase C^k y dimensión $n-m$ que contiene a p y es negativamente invariante por X.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Sotomayor [16]. ■

Teorema 1.1.12. (Teorema de Grobman-Hartman para campos vectoriales) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $0 \in \text{Sing}(X)$ una singularidad hiperbólica de X, entonces X es local y topológicamente conjugado con su linealización $A = DX(0)$ en un entorno de 0.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Hartman [5], De Melo [13] o Sotomayor [16]. ■

Mientras la estabilidad de una singularidad hiperbólica está determinada por los signos de las partes reales de los autovalores de su linealización, la presencia de autovalores con parte real nula vuelve insuficiente el análisis lineal. Ante esta limitación, la noción de estabilidad en el sentido de Lyapunov clasifica el comportamiento asintótico de las trayectorias cercanas a una singularidad mediante definiciones intrínsecas que no dependen de la linealización.

Definición 1.1.16. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in \text{Sing}(X)$, entonces

1. p es una *singularidad estable de* X si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, q \in B_\delta(p) : (\omega_+(q) = \infty\ ,\ \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(q) \subseteq B_\varepsilon(p))$$

2. p es una *singularidad atractora (local) de* X si

$$\exists\, \eta > 0, \forall\, q \in B_\eta(p) : (\omega_+(q) = \infty\ ,\ \lim_{t\to\infty} \varphi_X(t,q) = p)$$

3. p es una *singularidad inestable de* X si p no es una singularidad estable de X.

4. p es una *singularidad asintóticamente estable de* X si p es una singularidad estable y atractora de X.

Proposición 1.1.12. (Estabilidad de Lyapunov para matrices $\mathcal{C}$-hiperbólicas) Sea $A \in \text{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^n)$,

1. Si $i_{\mathcal{C},A}(0) = n$, entonces $0 \in \mathbb{R}^n$ es una singularidad asintóticamente estable de A.

2. Si $i_{\mathcal{C},A}(0) < n$, entonces $0 \in \mathbb{R}^n$ es una singularidad inestable de A.

Demostración. Procediendo por partes:

1. Si $i_{\mathcal{C},A}(0) = n$, entonces $0 \in \mathbb{R}^n$ es un $\mathcal{C}$-atractor de A por el Teorema 1.1.5. En consecuencia, 0 es un atractor global de A en el sentido de Lyapunov. Para la estabilidad, se sigue del cuarto item de este teorema que

$$\exists\, K \geq 1, \exists\, \mu > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, t \geq 0 : |\varphi_A(t,x)| \leq Ke^{-\mu t}|x|$$

Dado $\varepsilon > 0$, se escoge $\delta := \frac{\varepsilon}{K} > 0$. Como $\mu > 0$, se tiene para $t \geq 0$ que $e^{-\mu t} \leq 1$, y en consecuencia

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall\, t \geq 0 : |\varphi_A(t,x)| \leq Ke^{-\mu t}|x| < e^{-\mu t}\varepsilon \leq \varepsilon$$

Esto es, si $x \in B_\delta(0)$, entonces $\mathcal{O}^+_{\mathcal{C},A}(x) \subseteq B_\varepsilon(0)$. Por ende, 0 es una singularidad estable de A.

2. En cambio, si $i_{\mathcal{C},A}(0) = m < n$, entonces $E^u_{\mathcal{C},A}(0)$ tiene dimensión $n - m > 0$ debido al Teorema 1.1.4. Asimismo, del cuarto item de este teorema se sabe que

$$\exists\, \mu > 0, \exists\, K \geq 1, \forall\, t \geq 0, \forall\, x \in E^u_{\mathcal{C},A}(0) : |\varphi_A(t,x)| \geq K^{-1} e^{\mu t}|x|$$

Se probará directamente que 0 es una singularidad inestable de A. Para ello, se escoge $\varepsilon_0 := 1 > 0$ y sea $\delta > 0$. Como $\mu > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\mu t} = \infty$, resulta que

$$\exists\, t_\delta \geq 0, \forall\, t \geq t_\delta : e^{\mu t} \geq \frac{2K}{\delta}$$

Ahora, si $v \in E^u_{\mathcal{C},A}(0) - \{0\}$, se escoge $x_\delta := \frac{\delta}{2|v|} v \in E^u_{\mathcal{C},A}(0) - \{0\}$ que cumple $|x_\delta| = \frac{\delta}{2} < \delta$ y

$$|\varphi_A(t_\delta, x_\delta)| \geq K^{-1} e^{\mu t_\delta}|x_\delta| \geq K^{-1} \cdot \frac{2K}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = 1$$

En resumen, $\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, t_\delta \geq 0, \exists\, x_\delta \in B_\delta(0) : \varphi_A(t_\delta, x_\delta) \notin B_{\varepsilon_0}(0)$. Por lo tanto, 0 es una singularidad inestable de A.

■

Proposición 1.1.13. Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $X \in \mathcal{X}^k(U_1)$, $Y \in \mathcal{X}^k(U_2)$ y $h : U_1 \longrightarrow U_2$ una conjugación topológica, entonces $p \in U$ es una singularidad (asintóticamente) estable de X si y solo si $h(p)$ es una singularidad (asintóticamente) estable de Y.

Demostración. Procediendo por partes:

1. **Estabilidad:** ($\Rightarrow$:) Sea $\varepsilon > 0$, ya que $U_2 \cap B_\varepsilon(h(p))$ es abierto en U_2 y h es un homeomorfismo, $h^{-1}(U_2 \cap B_\varepsilon(h(p)))$ es un abierto en U_1 que contiene a p, entonces

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : U_1 \cap B_{\varepsilon_0}(p) \subseteq h^{-1}(U_2 \cap B_\varepsilon(h(p)))$$

Ahora, como p es una singularidad estable de X,

$$\exists\, \delta_0 > 0, \forall\, x \in U_1 \cap B_{\delta_0}(p), \forall\, t \geq 0 : \varphi_X(t,x) \in U_1 \cap B_{\varepsilon_0}(p)$$

Dado que $U_1 \cap B_{\delta_0}(p)$ es abierto en U_1 y h es un homeomorfismo, $h(U_1 \cap B_{\delta_0}(p))$ es un abierto en U_2 que contiene a $h(p)$, entonces

$$\exists\, \delta > 0 : U_2 \cap B_\delta(h(p)) \subseteq h(U_1 \cap B_{\delta_0}(p))$$

Si $q \in U_2 \cap B_\delta(h(p))$, entonces $q = h(x)$ para un único $x \in U_1 \cap B_{\delta_0}(p))$, además

$$\forall\, t \geq 0 : \varphi_X(t,x) \in U_1 \cap B_{\varepsilon_0}(p) \subseteq h^{-1}(U_2 \cap B_\varepsilon(h(p)))$$

Sin embargo, puesto que h es una conjugación topológica,

$$\forall\, t \geq 0 : h(\varphi_X(t,x)) = \varphi_Y(t, h(x)) = \varphi_Y(t,q) \in U_2 \cap B_\varepsilon(h(p))$$

Por ende, $h(p)$ es una singularidad estable de Y.

($\Leftarrow$) : Es análogo al paso anterior considerando a h^{-1} como conjugación topológica.

2. **Atracción:** ($\Rightarrow$) : Dado que p es una singularidad atractora de X,

$$\exists\, \eta_0 > 0, \forall\, x \in U_1 \cap B_{\eta_0}(p) : \lim_{t\to\infty} \varphi_X(t,x) = p$$

Como $U_1 \cap B_{\eta_0}(p)$ es abierto en U_1 y h es un homeomorfismo, $h(U_1 \cap B_{\eta_0}(p))$ es un abierto en U_2 que contiene a $h(p)$, entonces

$$\exists\, \eta > 0 : U_2 \cap B_\eta(h(p)) \subseteq h(U_1 \cap B_{\eta_0}(p))$$

Si $q \in U_2 \cap B_\eta(h(p))$, entonces $q = h(x)$ para un único $x \in U_1 \cap B_{\eta_0}(p)$, luego, puesto que h es una conjugación topológica,

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_Y(t, q) = \lim_{t\to\infty} \varphi_Y(t, h(x)) = \lim_{t\to\infty} h(\varphi_X(t, x)) = h(p)$$

Por ende, $h(p)$ es una singularidad atractora de Y.

($\Leftarrow$) : Es análogo al paso anterior considerando a h^{-1} como conjugación topológica.

■

Corolario 1.1.4. (Estabilidad de Lyapunov para singularidades hiperbólicas) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $0 \in \mathrm{Sing}(X)$ una singularidad hiperbólica de X, entonces

1. Si $i_{\mathcal{C},X}(0) = n$, entonces 0 es una singularidad asintóticamente estable de X.
2. Si $i_{\mathcal{C},X}(0) < n$, entonces 0 es una singularidad inestable de X.

Demostración. Primero, $A = DX(0)$ es una matriz hiperbólica con índice de $\mathcal{C}$-estabilidad $i_{\mathcal{C}.A}(0)$. Asimismo, del Teorema de Grobman-Hartman para campos vectoriales (Teorema 1.1.12), X y A son topológicamente conjugados en un entorno de $0 \in U$.

1. Si $i_{\mathcal{C},X}(0) = n$, entonces $i_{\mathcal{C}.A}(0) = n$. Esto implica por la Proposición 1.1.12 que 0 es una singularidad asintóticamente estable de A, y en virtud de la Proposición 1.1.13, 0 es una singularidad asintóticamente estable de X.
2. En cambio, cuando $i_{\mathcal{C},X}(0) < n$, se tiene que $i_{\mathcal{C}.A}(0) < n$. Esto implica por la Proposición 1.1.12 que 0 es una singularidad inestable de A, y en virtud de la Proposición 1.1.13, 0 es una singularidad inestable de X.

■

1.2. Sistemas lineales con coeficientes variables

Dado un P.V.I. de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas en un intervalo abierto J que contiene a t_0, la ecuación asociada a este P.V.I. se llama *sistema lineal de coeficientes variables*. Cuando $n = 1$, este P.V.I. puede resolverse mediante el *método del factor integrante*; sin embargo, este método por lo general falla para dimensiones superiores (puede encontrarse un ejemplo en Benazic [1]).

La solución del problema homogéneo de coeficientes variables se construye por aproximaciones sucesivas, siguiendo el mismo esquema que el Teorema 1.1.7 para sistemas autónomos continuos.

Teorema 1.2.1. (Existencia y unicidad) Sean $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto que contiene a t_0, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ una función continua, entonces el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.26}$$

admite una única solución $\varphi = \varphi_{(t_0,x_0)} : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Coddington [2]. ■

Se define el conjunto de soluciones de $\dot{x} = A(t)x$

$$\mathcal{V}_A := \{\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ es solución de } \dot{x} = A(t)x\}$$

Resulta que $\mathcal{V}_A \subseteq C^1(J, \mathbb{R}^n)$, donde $C^1(J, \mathbb{R}^n)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de escalar por función.

Proposición 1.2.1. $\mathcal{V}_A$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Coddington [2]. ■

Si $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ es una base de $\mathcal{V}_A$ y $\varphi \in \mathcal{V}_A$, entonces existen únicos escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall\, t \in J : \varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t)$$

Si para cualquier $t \in J$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$ las coordenadas de φ_j y c se definen como

$$\varphi_j(t) := \begin{bmatrix} \varphi_{1j}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nj}(t) \end{bmatrix} \quad , \quad c =: \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$\forall\, t \in J : \varphi(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] \cdot c$$

Denotando por $\Phi(t) := [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)]$, resulta que las filas de $\Phi(t)$ forman una base de $\mathcal{V}_A$ y así surge el concepto de matriz fundamental.

Definición 1.2.1. (Matriz fundamental) Sean $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ una función continua, se dice que $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es una *matriz fundamental de* A si los vectores columna de Φ forman una base de $\mathcal{V}_A$.

Proposición 1.2.2. (Caracterización de matrices fundamentales) Sea $A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ una función continua, entonces $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz fundamental de A si y solo si cumple las siguientes condiciones

1. Φ es solución del sistema lineal matricial homogéneo $\dot{X} = A(t)X$, es decir, $\forall\, t \in J : \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$.
2. $\exists\, t_0 \in J : \Phi(t_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

Proposición 1.2.3. (Relación entre matrices fundamentales) Sean $A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ una función continua, y $\Phi, \Psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices fundamentales de A, entonces existe una matriz $C \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\forall\, t \in J : \Phi(t) = \Psi(t)C$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

Proposición 1.2.4. (Existencia y unicidad en un P.V.I. matricial) Sea $A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ una función continua, entonces el P.V.I. matricial

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X \\ X(0) = I \end{cases}$$

admite una única solución $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$.

Demostración. Para $j \in \mathbb{N}$, se tiene el siguiente P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(0) = e_j \end{cases}$$

y debido al Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 1.2.1), existe una única solución $\varphi_j : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Ahora, si $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ y $\Phi(0) = I$, esto implica por la Proposición 1.2.2 que Φ es una matriz fundamental de A. Para la unicidad, si $\Psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es otra solución del P.V.I. matricial, entonces Ψ es una matriz fundamental de A, pero por la Proposición 1.2.3,

$$\exists\, C \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \forall\, t \in J : \Phi(t) = \Psi(t)C$$

En particular, para $t = 0$, $C = I$ y así $\forall\, t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = \Psi(t)$. Por lo tanto, $\Psi = \Phi$. ■

Teorema 1.2.2. (Existencia y unicidad) Sean $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto que contiene a t_0, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ una función continua, entonces el P.V.I. (1.26) admite como única solución a $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\forall\, t \in J : \varphi(t) = \Phi(t)[\Phi(t_0)]^{-1}x_0$$

donde Φ es una matriz fundamental de A.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

A diferencia del Teorema 1.2.1, el cual solo garantiza existencia y unicidad de la solución del P.V.I. (1.26), el Teorema 1.2.2 ofrece una fórmula cerrada para dicha solución en términos de una matriz fundamental.

1.3. Superficies en $\mathbb{R}^n$

La teoría de superficies constituye el marco geométrico para analizar conjuntos localmente homeomorfos a espacios euclidianos. Su estudio será esencial para definir secciones transversales a puntos regulares, construir la función de Poincaré y caracterizar los conjuntos estable e inestable como objetos geométricos diferenciables.

Definición 1.3.1. (Parametrización) Sea $U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y $m \leq n$, se dice que $\varphi : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una *parametrización de clase C^k y dimensión m* si

1. φ es de clase C^k
2. φ es una inmersión, es decir, $\forall\, u \in U_0 : D\varphi(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es inyectiva.
3. $\varphi : U_0 \longrightarrow \varphi(U_0)$ es un homeomorfismo.

Observación. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

1. $D\varphi(u)$ es inyectiva.
2. $\{\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\}_{j=1}^m$ es un conjunto linealmente independiente.
3. $J\varphi(u)$ tiene rango m, i.e., m columnas linealmente independientes.

Ejemplo 1.3.1. Algunos ejemplos de parametrizaciones:

1. **(Parametrizaciones unidimensionales en $\mathbb{R}^n$)** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, entonces $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de clase C^k y dimensión 1 si

- φ es de clase C^k.
- φ es un homeomorfismo sobre su imagen.
- $\forall\, t \in I : \dot{\varphi}(t) \neq 0$.

Para ilustrarlo (Figura 1.1), sea

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

resulta que φ es una función suave en $(0, 2\pi)$ y $\varphi : (0, 2\pi) \longrightarrow S^1 - \{(0, 1)\}$ es un homeomorfismo y

$$\forall\, t \in (0, 2\pi) : \dot{\varphi}(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0)$$

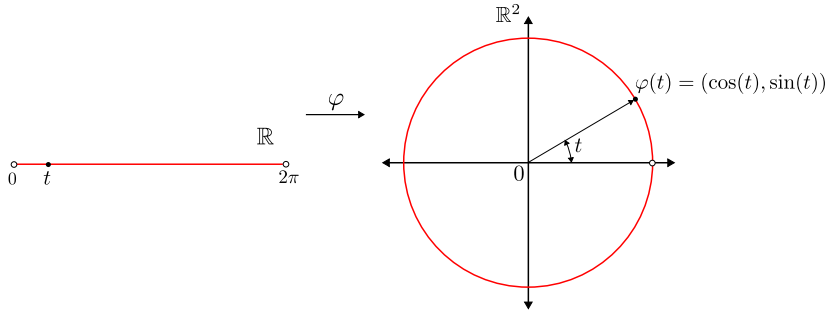


Figura 1.1: Parametrización de una curva en $\mathbb{R}^2$.

2. **(Parametrizaciones bidimensionales en $\mathbb{R}^3$)** Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, entonces $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de clase C^k y dimensión 2 si

   - φ es de clase C^k.
   - φ es un homeomorfismo sobre su imagen.
   - Los vectores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ son linealmente independientes (Figura 1.2), i.e.,

$$\forall\, (u, v) \in U : \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq 0$$

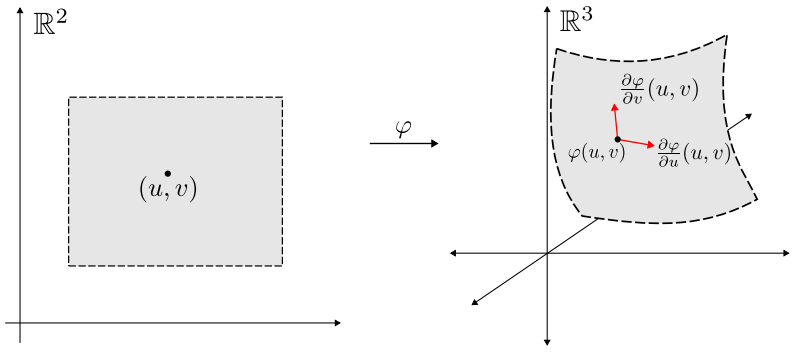


Figura 1.2: Parametrización de una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.3.2. (Superficie) Sea $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que M^m es una *superficie de clase C^k y dimensión m* si para todo $p \in M^m$, existen $U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ y $U = U(p) \subseteq M$ abiertos con $p \in U$ y una parametrización $\varphi : U_0 \longrightarrow U$ de clase C^k. El abierto U es llamado entorno parametrizado de p.

Proposición 1.3.1. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que para todo $p \in M$ existe una vecindad abierta $V_p \subseteq M$ de p en M tal que V_p es una superficie de clase C^k y dimensión m, entonces M es una superficie de clase C^k y dimensión m.

Demostración. Sea $p \in M$, por hipótesis existe un entorno abierto $V_p \subseteq M$ en M tal que V_p es una superficie de clase C^k y dimensión m, entonces existe una parametrización de clase C^k y dimensión m $\varphi : U_0 \longrightarrow V_p$, donde $\varphi(U_0) \subseteq V_p$ es abierto en V_p con $p \in \varphi(U_0)$, pero como V_p es abierto en M, resulta que $\varphi(U_0) \subseteq M$ es abierto en M. Es decir, en cada punto de $p \in M$ existe un entorno parametrizado. Por lo tanto, M es una superficie de clase C^k y dimensión m. ■

Ejemplo 1.3.2. Los abiertos en $\mathbb{R}^n$ son superficies de clase C^∞ y dimensión n. En efecto, si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, entonces es suficiente elegir la función identidad $\varphi = \mathrm{Id}_U$, la cual es una parametrización de clase C^∞ y dimensión n.

Ejemplo 1.3.3. Cualquier subespacio vectorial m-dimensional de $\mathbb{R}^n$ es una superficie suave (de clase C^∞) de dimensión m. En efecto, sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial con $\dim(V) = m$, si $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^m$ es una base ortonormal de V, entonces, denotando por $x = (x_1, \ldots, x_m)$,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^m &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^m x_i v_i \end{aligned}$$

es una parametrización suave. En efecto,

1. φ **es una función suave:** Luego de verificarse que φ es lineal sobre un espacio vectorial finito dimensional, φ es una función suave en $\mathbb{R}^m$.

2. φ **es una inmersión:** Se cumple que

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^m : J\varphi(x) = [v_1, \ldots, v_m]$$

   tiene m columnas linealmente independientes porque $\mathcal{B}$ es una base de V. Equivalentemente, $D\varphi(x)$ es inyectiva. Por lo tanto, φ es una inmersión.

3. φ **es un homeomorfismo:** Considerando la función

   $$\begin{aligned} \psi : V &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ y &\longmapsto (\langle y, v_1\rangle, \ldots, \langle y, v_m\rangle) \end{aligned}$$

   resulta que ψ es continua en V debido a la bilinealidad del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un espacio vectorial finito dimensional. Además,

   - Si $x \in \mathbb{R}^m$, entonces

     $$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(x) = \psi\left(\sum_{i=1}^m x_i v_i\right) &= \left(\left\langle \sum_{i=1}^m x_i v_i, v_1 \right\rangle, \ldots, \left\langle \sum_{i=1}^m x_i v_i, v_m \right\rangle\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m x_i \langle v_i, v_1\rangle, \ldots, \sum_{i=1}^m x_i \langle v_i, v_m\rangle\right) \\ &= (x_1, \ldots, x_m) = x \end{aligned}$$

     Por ende, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$.

- Si $y \in V$, como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, existe un único $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $y = \varphi(x)$, luego
$$(\varphi \circ \psi)(y) = \varphi(\psi(\varphi(x))) = \varphi(x) = y$$
Por ende, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_V$.

Esto implica que $\varphi^{-1} = \psi$ es continua en V y así, φ es un homeomorfismo.

Por último, la imagen de esta parametrización cubre todo el conjunto, y en conclusión, V es una superficie suave de dimensión m.

La definición de superficie exige hallar, en cada punto, una parametrización que cubra un entorno local. Aunque este enfoque explícito es conceptualmente claro, resulta poco práctico cuando el conjunto está definido de manera compleja. Afortunadamente, existen métodos implícitos que permiten verificar si un conjunto dado es una superficie sin necesidad de exhibir parametrizaciones explícitas.

Proposición 1.3.2. (Gráfico de una función de clase C^k) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, entonces el *gráfico de* f, definido por

$$\mathrm{Graf}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$$

es una superficie de clase C^k y dimensión m.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Lages [12]. ■

Proposición 1.3.3. (Valor regular de una función de clase C^k) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $g = (g_1, \ldots, g_m) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ y $c \in \mathbb{R}^m$, si $g^{-1}(\{c\})$ no es vacío y c es un *valor regular de* g, es decir,

$$\forall\, p \in g^{-1}(\{c\}) : Dg(p) \text{ es sobreyectiva}$$

entonces $g^{-1}(\{c\})$ es una superficie de clase C^k y dimensión $n - m$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Lages [12]. ■

Observación. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

1. $Dg(p)$ es sobreyectiva.
2. $\{\nabla g_i(p)\}_{i=1}^m$ es un conjunto linealmente independiente.
3. $Jg(p)$ tiene rango m, i.e., m filas linealmente independientes.

Ejemplo 1.3.4. Algunos ejemplos de superficies obtenidas implícitamente mediante ecuaciones:

1. Para ilustrar la Proposición 1.3.2, el conjunto
$$A = \{(x, \sin(x)) \mid -\pi < x < \pi\}$$
es una superficie suave unidimensional pues $A = \mathrm{Graf}(f)$, donde
$$\begin{aligned} f : (-\pi, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$
es una función suave en $(-\pi, \pi)$. Asimismo, el conjunto
$$B = \{(x, y, x^2 + y^2) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$$

es una superficie suave bidimensional pues $B = \text{Graf}(f)$, donde

$$\begin{aligned} f : B_1(0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

es una función suave en $B_1(0)$.

2. Para ilustrar la Proposición 1.3.3, la esfera

$$S^n := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle y, y\rangle = 1\}$$

es una superficie suave de dimensión n pues $S^n = g^{-1}(\{1\})$, donde

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \langle y, y\rangle \end{aligned}$$

es una función suave en $\mathbb{R}^{n+1}$ y

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall\, v \in \mathbb{R}^{n+1} : Dg(y)(v) = 2\langle y, v\rangle$$

Si $y \in g^{-1}(\{1\})$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces se escoge $v := \frac{r}{2}y$ de tal modo que

$$Dg(y)(v) = 2\left\langle y, \frac{r}{2}y\right\rangle = r\langle y, y\rangle = r$$

lo cual muestra que 1 es un valor regular de g. Asimismo, el conjunto

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\,,\, x = 1)\}$$

es una superficie suave unidimensional pues $C = g^{-1}(\{(0, 1)\})$, donde $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) := (x^2 + y^2 - z^2, x)$$

es una función suave en $\mathbb{R}^3$ y

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Jg(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las filas del jacobiano de g en $(x, y, z) \in g^{-1}(\{(0, 1)\})$ son linealmente independientes pues si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son tales que

$$c_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2c_1x + c_2 = 0 \\ 2c_1y = 0 \\ -2c_1z = 0 \end{cases}$$

pero $(x, y, z) \in g^{-1}(\{(0, 1)\})$ implica que $z^2 = y^2 + 1 > 0$ y entonces $c_1 = 0$ y después $c_2 = 0$. Equivalemente, $Dg(x, y, z)$ es sobreyectiva. Por lo tanto, $(0, 1)$ es un valor regular de g.

Proposición 1.3.4. (Abiertos relativos a una superficie) Sean $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m y $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, entonces $M \cap W$ es una superficie de clase C^k y dimensión m.

Demostración. En efecto, sea $p \in M \cap W$, entonces $p \in M$, pero como M es una superficie, existe una parametrización de clase C^k y dimensión n $\varphi : U_0 \longrightarrow M$, donde $U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ es abierto y $\varphi(U_0) \subseteq M$ una vecindad abierta de p en M. Luego, considerando $V := \varphi(U_0) \cap W$ resulta que este es un abierto en $M \cap W$ y en $\varphi(U_0)$, además $p \in V$, entonces por continuidad de φ, $V_0 := \varphi^{-1}(V)$ es abierto en U_0, pero este último es un abierto de $\mathbb{R}^m$, así que V_0 es un abierto de $\mathbb{R}^m$.
De este modo, se obtiene la restricción $\psi := \varphi\Big|_{V_0} : V_0 \longrightarrow M \cap W$. Como las restricciones de inmersiones de clase C^k y homeomorfismos siguen siendo inmersiones de clase C^k y homeomorfismos, se sigue que ψ es una parametrización de clase C^k y dimensión m de un entorno de p en $M \cap W$. Por lo tanto, $M \cap W$ es una superficie de clase C^k y dimensión m. ■

Definición 1.3.3. (Cambio de coordenadas) Sean $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m, $p \in M$ y $\varphi : U_0 \longrightarrow M$ una parametrización de clase C^k y dimensión m, un *cambio de coordenadas* es un difeomorfismo de clase C^k $\xi : V_0 \longrightarrow U_0$, donde $V_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ es abierto.

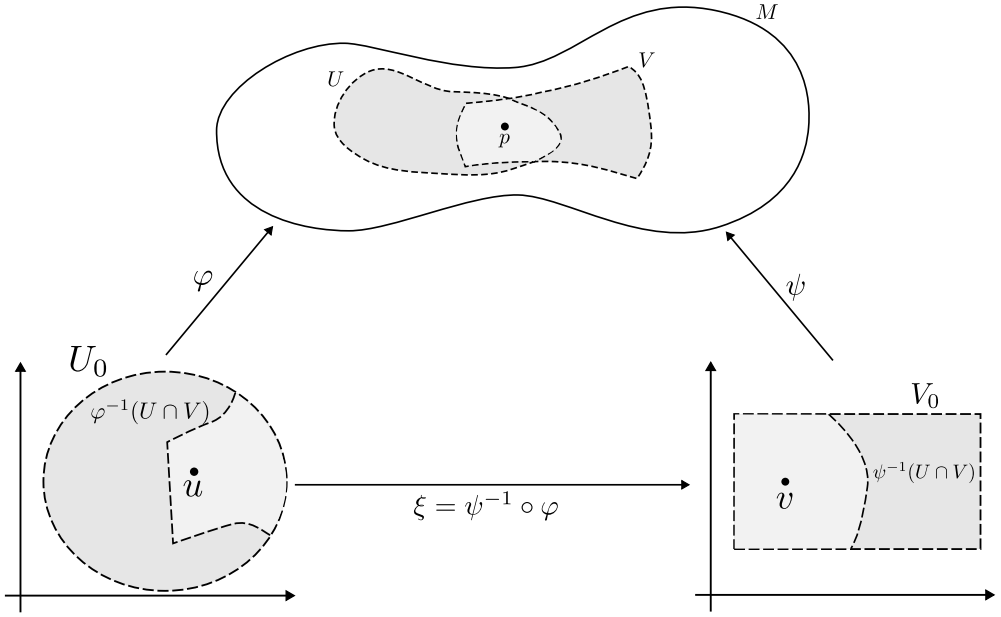


Figura 1.3: Cambio de coordenadas en una superficie bidimensional en $\mathbb{R}^3$.

Ahora, dada una superficie, en cualquier punto se puede encontrar un entorno parametrizado. Sin embargo, puede que este entorno no sea único, así como en la Figura 1.3.

Si $\varphi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow U$ y $\psi : V_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow V$ son parametrizaciones de clase C^k y $p \in U \cap V$, entonces $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \longrightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$ es un homeomorfismo (por ser una composición de homeomorfismos). Sin embargo, esto no granatiza que ξ sea un difeomorfismo ya que ξ^{-1} a priori solo es continua. Afortunadamente, el siguiente lema muestra que ξ^{-1} es, de hecho, diferenciable:

Lema 1.3.1. Sean $V_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y $\varphi : V_0 \longrightarrow V$ una parametrización de clase C^k y dimensión m, si $U_0 \subseteq \mathbb{R}^r$ es abierto y $f : U_0 \longrightarrow V$ es una función de clase C^k, entonces

1. $\xi := \varphi^{-1} \circ f : U_0 \longrightarrow V_0$ es una función de clase C^k.
2. $\forall\, x \in U_0 : Df(x) = D\varphi(\xi(x)) \cdot D\xi(x)$

Demostración. Sea $u \in U_0$, entonces $p := f(u) \in V$ y $q := \varphi^{-1}(p) \in V_0$, luego como φ es una parametrización de clase C^k y dimensión m, se tiene que $D\varphi(q)$ es inyectiva; esto

implica, por el Teorema de la Forma Local de las Inmersiones (Lages [12]), que existen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$, $Z_0 \subseteq V_0$ y $W \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ abiertos con $p \in Z$, $q \in Z_0$ y $0 \in W$, y $h \in \mathrm{Diff}^k(Z, Z_0 \times W)$ tales que

$$\forall\, x \in Z_0 : (h \circ \varphi)(x) = (x, 0)$$

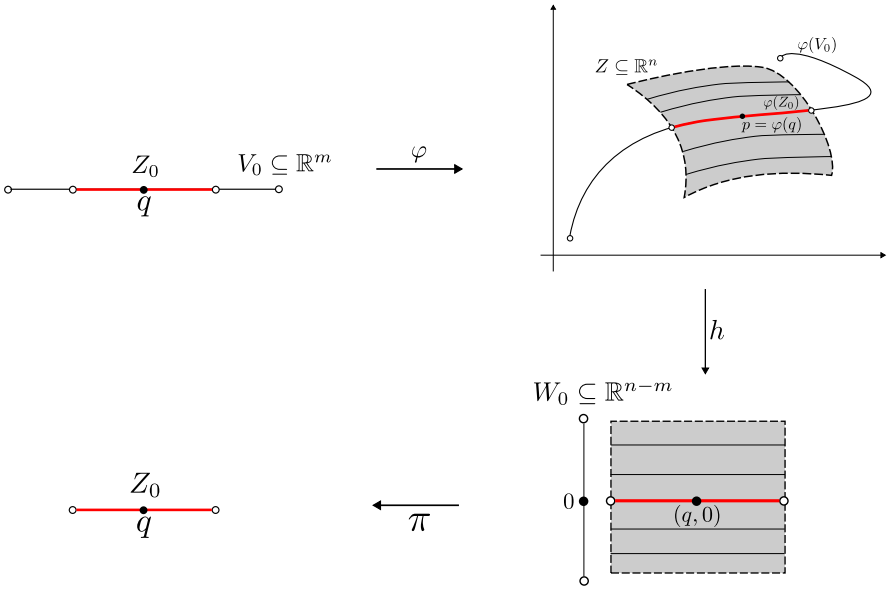


Figura 1.4: Forma Local de las Inmersiones para $m = 1$ y $n = 2$.

Ahora, si $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es la proyección sobre las m primeras coordenadas de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, w) &\longmapsto x \end{aligned}$$

entonces esta es una función de clase C^k y después $g := \pi \circ h : Z \longrightarrow Z_0$ es de clase C^k, además

- Si $x \in Z_0$, entonces $\varphi(x) \in \varphi(Z_0)$ y

$$(g\Big|_{\varphi(Z_0)} \circ \varphi\Big|_{Z_0})(x) = g\Big|_{\varphi(Z_0)}(\varphi\Big|_{Z_0}(x)) = g(\varphi(x)) = \pi(h(f(x))) = \pi(x, 0) = x$$

  esto es, $g\Big|_{\varphi(Z_0)} \circ \varphi\Big|_{Z_0} = \mathrm{Id}_{Z_0}$.

- Si $y \in \varphi(Z_0)$, entonces $y = \varphi(x)$ para un único $x \in Z_0$ y $g(y) = g(\varphi(x)) = x$,

$$(\varphi\Big|_{Z_0} \circ g\Big|_{\varphi(Z_0)})(y) = \varphi\Big|_{Z_0}(g\Big|_{\varphi(Z_0)}(x)) = \varphi(g(y)) = \varphi(x) = y$$

  esto es, $\varphi\Big|_{Z_0} \circ g\Big|_{\varphi(Z_0)} = \mathrm{Id}_{\varphi(Z_0)}$.

Luego, usando la biyectividad de φ, se obtiene que $g\Big|_{\varphi(Z_0)} = (\varphi\Big|_{Z_0})^{-1} = \varphi^{-1}\Big|_{\varphi(Z_0)}$.
Ahora, resulta que $\varphi(Z_0) \cap Z$ es un abierto en V con $p \in \varphi(Z_0) \cap Z$, entonces por continuidad

de f, $A_0 := f^{-1}(\varphi(Z_0) \cap Z)$ es una vecindad abierta de u en U_0, además si $v \in A_0$, entonces $f(v) \in \varphi(Z_0) \cap Z$ y

$$(\varphi^{-1} \circ f)\Big|_{A_0}(v) = \varphi^{-1}(f(v)) = \varphi^{-1}\Big|_{\varphi(Z_0)\cap Z} \circ f\Big|_{A_0}(v) = g\Big|_{\varphi(Z_0)\cap Z} \circ f\Big|_{A_0}(v)$$

Esto es, $\xi\Big|_{A_0} = (\varphi^{-1} \circ f)\Big|_{A_0} = g\Big|_{\varphi(Z_0)\cap Z} \circ f\Big|_{A_0}$, donde las restricciones de g y f tambien son de clase C^k, entonces $\xi\Big|_{A_0}$ es de clase C^k. En resumen, ξ es de clase C^k en todo $u \in U_0$. Por lo tanto, $\xi \in C^k(U_0, V_0)$ y por la Regla de la Cadena, $\forall\ x \in U_0 : Df(x) = D\varphi(\xi(x)) \cdot D\xi(x)$. ■

Corolario 1.3.1. Si $\varphi : U_0 \longrightarrow U$ y $\psi : V_0 \longrightarrow V$ son parametrizaciones de clase C^k y dimensión m, y $p \in U \cap V = W$, entonces $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \longrightarrow \psi^{-1}(W)$ es un difeomorfismo de clase C^k, i.e., ξ es un cambio de coordenadas.

Demostración. Con $U_0 = \varphi^{-1}(W)$ y $V_0 = \psi^{-1}(W)$, ψ como parametrización de clase C^k y dimensión m, y φ como función de clase C^k en el Lema 1.3.1, $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi$ es de clase C^k en $\varphi^{-1}(W)$. De la misma manera, con $U_0 = \psi^{-1}(W)$ y $V_0 = \varphi^{-1}(W)$, φ como parametrización de clase C^k y dimensión m, y ψ como función de clase C^k, se sigue que $\xi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ es de clase C^k en $\psi^{-1}(W)$. Por lo tanto, ξ es un cambio de coordenadas. ■

Definir la diferenciabilidad de una función que tiene como dominio a una superficie requiere cuidado: dado que una superficie no es necesariamente un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, no se puede usar directamente la noción de derivada, la cual requiere moverse en todas las direcciones. La estrategia consiste en transportar el problema mediante parametrizaciones a un abierto de $\mathbb{R}^m$, donde sí se dispone del cálculo diferencial estándar.

Definición 1.3.4. (Función diferenciable en una superficie) Sea $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^s$ es una *función diferenciable en* $p \in M$ si existe una parametrización $\varphi : U_0 \longrightarrow M$ de clase C^k y dimensión m, con $p \in \varphi(U_0)$, tal que $f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^s$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$ en el sentido usual.

Observación. La definición es independiente de la elección de la parametrización pues si existiese otra parametrización $\psi : V_0 \longrightarrow M$, entonces del Corolario 1.3.1, $\xi := \varphi^{-1} \circ \psi : V_0 \longrightarrow U_0$ es un difeomorfismo de clase C^k (en el sentido usual), luego como $f \circ \varphi$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$ en el sentido usual, resulta que $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ también lo es en $\psi^{-1}(p)$.

Definición 1.3.5. (Función diferenciable entre superficies) Sean $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^l$ y $N = N^n \subseteq \mathbb{R}^s$ dos superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$ una función entre superficies,

1. f es una *función diferenciable en* $p \in M$ si existe una parametrización $\varphi : U_0 \longrightarrow M$ de clase C^k y dimensión m, con $p \in \varphi(U_0)$, tal que $f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^s$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$ en el sentido usual.

2. f es *diferenciable en* M si f es diferenciable en todo $p \in M$.

3. f es *de clase* C^j *en el sentido de las superficies*, $j \in \{1, \ldots, k\}$, si para todo $p \in M$ existe una parametrización de clase C^k y dimensión m $\varphi : U_0 \longrightarrow M$, donde $p \in \varphi(U_0) \subseteq M$, tal que $f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^s$ es de clase C^j en el sentido usual.

Proposición 1.3.5. Sean $M = M^m, N = N^n$ superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$, f es de clase C^j, $j \in \{1, \ldots, k\}$, si y solo si para todo $p \in M$, existen parametrizaciones $\varphi : U_0 \longrightarrow M$, $\psi : V_0 \longrightarrow N$ de clase C^k, donde $p \in \varphi(U_0) \subseteq M$ y $f(p) \in \psi(V_0) \subseteq N$, tales que $\hat{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow V_0$ es de clase C^j en el sentido usual.

Demostración. ($\Rightarrow$) : Sea $p \in M$, entonces como f es de clase C^j en el sentido de las superficies, existe una parametrización de clase C^k y dimensión m $\varphi : U_0 \longrightarrow M$ tal que $f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^s$ es de clase C^j en el sentido usual; pero, como $f(p) \in N$ y N es superficie, existe otra parametrización de clase C^k y dimensión n $\psi : V_0 \longrightarrow N$, donde $f(p) \in \psi(U_0) \subseteq N$. Aplicando el Lema 1.3.1 a ψ como parametrización y $f \circ \varphi$ como función de clase C^j, $\hat{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow V_0$ es de clase C^j en el sentido usual.

($\Leftarrow$) : Sea $p \in M$, por hipótesis, existen parametrizaciones $\varphi : U_0 \longrightarrow M$, $\psi : V_0 \longrightarrow N$ de clase C^k, con $p \in \varphi(U_0)$, tal que $\hat{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow V_0$ es de clase C^j en el sentido usual; como ψ es de clase C^k en el sentido usual, $f \circ \varphi = \psi \circ \hat{f}$ es de clase C^j en el sentido usual. Por lo tanto, f es de clase C^j en el sentido de las superficies. ■

Observación. La definición anterior no depende de la elección de las parametrizaciones. En efecto, si existiesen otras parametrizaciones de clase C^k $\tilde{\varphi} : \tilde{U_0} \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow M$ y $\tilde{\psi} : \tilde{V_0} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow N$, donde $p \in \tilde{\varphi}(\tilde{U_0}) \subseteq M$ y $f(p) \in \tilde{\psi}(\tilde{V_0}) \subseteq N$, entonces del Corolario 1.3.1, $\xi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ y $\eta := \tilde{\psi}^{-1} \circ \psi$ son difeomorfismos de clase C^k en el sentido usual, y como $\hat{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ también es de clase C^j en el sentido usual, se concluye que, con ayuda del diagrama en la Figura 1.5,

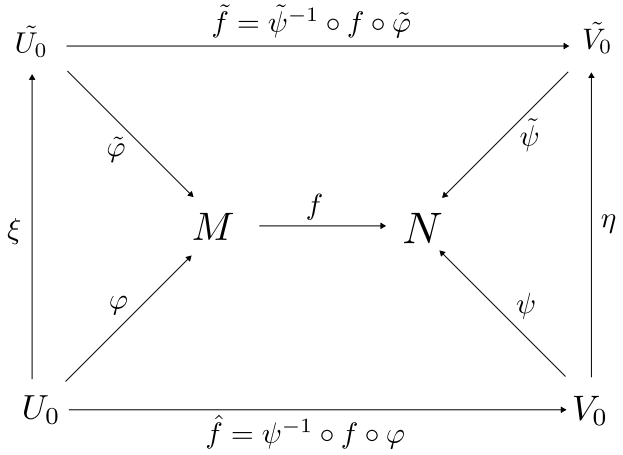


Figura 1.5: Diagrama conmutativo para la definición de diferenciabilidad.

$$\tilde{f} := \tilde{\psi}^{-1} \circ f \circ \tilde{\varphi} = (\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}) = \eta \circ \hat{f} \circ \xi^{-1}$$

es de clase C^j en el sentido usual.

Ejemplo 1.3.5. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, entonces f es de clase C^k en dos sentidos: en el sentido usual y en el sentido de las superficies. Resulta que ambas perspectivas son equivalentes porque basta con escoger la función identidad como parametrización.

Definición 1.3.6. (Difeomorfismos entre superficies) Sean $M = M^m$ y $N = N^n$ dos superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$ una función entre superficies

1. f es un *difeomorfismo de clase C^j, $j \in \{1, \ldots, k\}$, en el sentido de las superficies* si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son funciones de clase C^j en el sentido de las superficies.

2. f es un *difeomorfismo local de clase C^j, $j \in \{1, \ldots, k\}$, en $p \in M$ en el sentido de las superficies* si existe $U_p \subseteq M$ abierto en M con $p \in U_p$ tal que $f\Big|_{U_p} : U_p \longrightarrow f(U_p)$ es un difeomorfismo de clase C^j en el sentido de las superficies.

Ejemplo 1.3.6. Los parametrizaciones son difeomorfismos en el sentido de las superficies. En efecto, si $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ es una superficie de clase C^k y dimensión m, $p \in M$ y $\varphi : U_0 \longrightarrow M$ una parametrización de clase C^k y dimensión m, donde $p \in \varphi(U_0) \subseteq M$, entonces, considerando U_0 y M como superficies, para U_0 se escoge la función identidad Id_{U_0} y para M se escoge otra parametrización de clase C^k y dimensión m $\psi : V_0 \longrightarrow M$. Luego, del Corolario 1.3.1, $\hat{\varphi} = \psi^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_{U_0} = \psi^{-1} \circ \varphi$ es un difeomorfismo de clase C^k en el sentido usual. En virtud de la Proposición 1.3.5, φ es un difeomorfismo de clase C^k en el sentido de las superficies.

Corolario 1.3.2. (Composición de funciones de clase C^j) Sean $M = M^m, N = N^n, P = P^p$ superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ funciones de clase C^j, $j \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $g \circ f : M \longrightarrow P$ es de clase C^j.

Demostración. Sea $p \in M$, entonces $f(p) \in N$, y puesto que la diferenciabilidad es independiente de la elección de la parametrización, se escogen parametrizaciones de clase C^k $\varphi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow M$, $\psi : V_0 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow N$ y $\gamma : W_0 \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow P$ donde $p \in \varphi(U_0) \subseteq M$, $f(p) \in \psi(V_0) \subseteq N$ y $g(f(p)) \in \gamma(W_0) \subseteq P$, de modo que $\hat{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ y $\hat{g} = \gamma^{-1} \circ g \circ \psi$ son de clase C^j en el sentido usual, entonces

$$\hat{g} \circ \hat{f} = (\gamma^{-1} \circ g \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) = \gamma^{-1} \circ (g \circ f) \circ \varphi$$

es de clase C^j en el sentido usual. En virtud de la Proposición 1.3.5, $g \circ f$ es de clase C^j en el sentido de las superficies. ■

Dada una superficie $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y de clase C^k, $p \in M$, entonces existe una parametrización de clase C^k y dimensión m $\varphi : U_0 \longrightarrow M$, donde $p \in \varphi(U_0)$ y $u = \varphi^{-1}(p) \in U_0$. Sin embargo, si existiese otra parametrización $\psi : V_0 \longrightarrow M$, donde $p \in \psi(V_0)$ y $v = \psi^{-1}(p)$, denotando $W = \varphi(U_0) \cap \psi(V_0)$ y $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \longrightarrow \psi^{-1}(W)$, entonces del Lema 1.3.1 y del Corolario 1.3.1, ξ es un cambio de coordenadas y

$$D\varphi(u) = D\psi(\xi(u)) \cdot D\xi(u) = D\psi(v) \cdot D\xi(u) \tag{1.27}$$

Como ξ es un difeomorfismo, $D\xi(u) \in GL(\mathbb{R}^m)$, lo cual implica que $D\xi(u)[\mathbb{R}^m] = \mathbb{R}^m$ y así

$$D\varphi(u)[\mathbb{R}^m] = D\psi(v) \cdot D\xi(u)[\mathbb{R}^m] = D\psi(v)[\mathbb{R}^m]$$

Dado que $D\varphi(u)$ es inyectiva,

$$\dim(D\varphi(u)[\mathbb{R}^m]) = \dim(\mathbb{R}^m) - \dim(\mathrm{Ker}(D\varphi(u))) = m - 0 = m$$

Definición 1.3.7. (Espacio tangente a una superficie) Sea $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m, $p \in M$, y $\varphi : U_0 \longrightarrow M$ una parametrización de clase C^k y dimensión m, si $u = \varphi^{-1}(p)$ entonces el *espacio tangente a M en p* es el conjunto

$$T_pM := D\varphi(u)[\mathbb{R}^m]$$

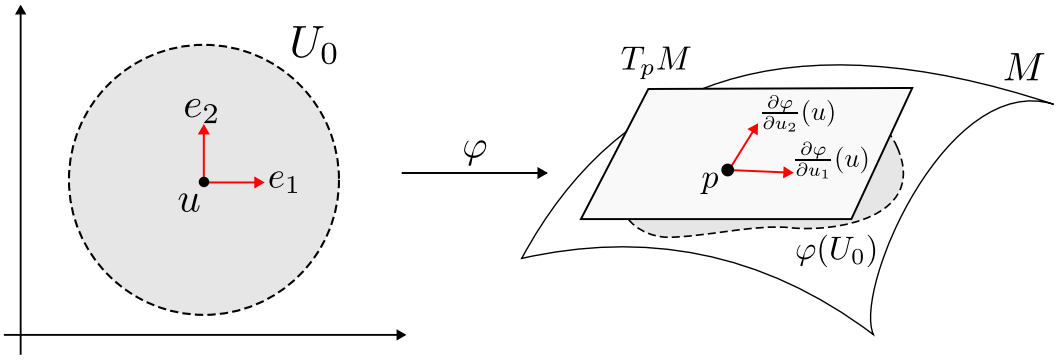


Figura 1.6: Espacio tangente a una superficie bidimensional en $\mathbb{R}^3$.

Observación. T_pM es un subespacio vectorial de dimensión m y una base de dicho espacio (asociado a la parametrización φ) es

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u) \right\}_{j=1}^{m}$$

Sin embargo, otra base del espacio tangente (asociada a la parametrización ψ) es

$$\hat{\mathcal{B}} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial v_i}(v) \right\}_{i=1}^{m}$$

Luego, para $j \in \{1, \ldots, m\}$, se sigue de (1.27) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u) &= D\varphi(u)(e_j) = D\psi(v) \cdot D\xi(u)(e_j) \\ &= D\psi(v) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u_j}(u) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j}(u) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v_i}(v) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz cambio de base es $J\xi(u)$.

Definición 1.3.8. (Caminos diferenciables sobre una superficie) Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m, se dice que $\alpha : I \longrightarrow M$ es un *camino diferenciable sobre* M si α es diferenciable en el sentido usual.

Teorema 1.3.1. (Caracterización del espacio tangente) Sea $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m, $p \in M$, $\varphi : U_0 \longrightarrow M$ una parametrización de clase C^k y dimensión m, y $u = \varphi^{-1}(p)$, entonces

$$T_pM = \{\dot{\alpha}(0) \,|\, \alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow M \text{ es diferenciable y } \alpha(0) = p\}$$

Demostración. $(\subseteq)$: Sea $v \in T_pM$, entonces existe un único $w \in \mathbb{R}^m$ tal que $v = D\varphi(u)(w)$, pero

$$v = D\varphi(u)(w) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tw) - \varphi(u)}{t}$$

Dado que $U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ es abierto y $u \in U_0$, se escoge $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de tal modo que $\forall\, t \in I_\varepsilon(0) : u + tw \in U_0$, esto permite definir el camino

$$\begin{aligned} \alpha : I_\varepsilon(0) &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \varphi(u + tw) \end{aligned}$$

α es un camino diferenciable, $\alpha(0) = \varphi(u) = p$ y

$$\dot{\alpha}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tw) - \varphi(u)}{t} = D\varphi(u)(w) = v$$

$(\supseteq)$: Sea $\alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ un camino diferenciable con $\alpha(0) = p$, como $U \subseteq M$ es abierto y α es continua en 0, se reduce $\varepsilon > 0$ de tal modo que $\alpha(I_\varepsilon(0)) \subseteq U$. Del Lema 1.3.1, el camino $\beta := \varphi^{-1} \circ \alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ es diferenciable, $\beta(0) = \varphi^{-1}(\alpha(0)) = \varphi^{-1}(p) = u$ y

$$\dot{\alpha}(0) = D\varphi(\beta(0))(\dot{\beta}(0)) = D\varphi(u)(\dot{\beta}(0))$$

Escogiendo $w := \dot{\beta}(0) \in \mathbb{R}^m$, resulta que $\dot{\alpha}(0) = D\varphi(u)(w) \in T_pM$. ■

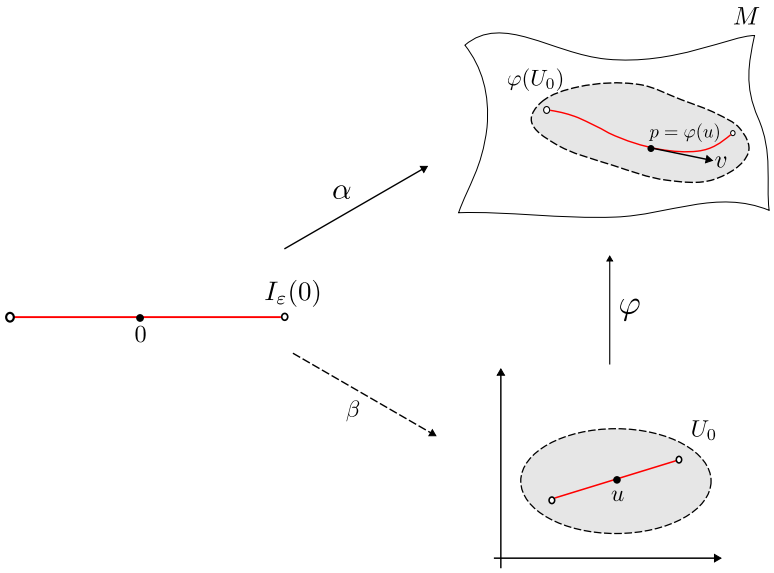


Figura 1.7: Caracterización del espacio tangente mediante caminos.

Ejemplo 1.3.7. Para cualquier $p \in \mathbb{R}^m$, $T_p\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. En efecto, sea $v \in \mathbb{R}^m$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha : I_\varepsilon(0) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto p + tv \end{aligned}$$

es un camino diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$, entonces por el Teorema 1.3.1, $v \in T_p\mathbb{R}^m$. Así, $\mathbb{R}^m \subseteq T_p\mathbb{R}^m$ y $\dim(\mathbb{R}^m) = \dim(T_p\mathbb{R}^m) = m$, esto implica que $\mathbb{R}^m = T_p\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 1.3.8. Sean $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m, si $U \subseteq M$ es un abierto relativo a M y $p \in U$, entonces $T_pU = T_pM$. Para empezar, U también es una superficie de la misma suavidad y dimensión que m gracias a la Proposición 1.3.4. Por esta razón, es posible definir en ella el espacio tangente en cada punto. Ahora, debido a que $U \subseteq M$, usando la caracterización del Teorema 1.3.1, $T_pU \subseteq T_pM$, pero como $\dim(T_pU) = \dim(T_pM) = m$, necesariamente $T_pU = T_pM$.

Proposición 1.3.6. (Superficie producto) Sean $M = M^m$ y $N = N^n$ superficies de clase C^k y dimensión m y n respectivamente, entonces $M \times N$ es una superficie de clase C^k y dimensión $m + n$, además $\forall\ (p, q) \in M \times N : T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \times T_qN$.

Demostración. Sea $(p, q) \in M \times N$, entonces $p \in M$ y $q \in N$, pero como M y N son superficies, existen parametrizaciones de clase C^k $\varphi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow M$ y $\psi : V_0 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow N$, donde $p \in \varphi(U_0)$ y $q \in \psi(V_0)$, luego $W_0 := U_0 \times V_0 \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ es un abierto y se define la función

$$\begin{aligned} F : W_0 &\longrightarrow M \times N \\ (u, v) &\longmapsto (\varphi(u), \psi(v)) \end{aligned}$$

F es de clase C^k pues φ y ψ lo son, de la misma manera, F es un homeomorfismo sobre su imagen. Asimismo, F es una inmersión ya que si $(u, v) \in W_0$ y $(a, b) \in \mathrm{Ker}(DF(u, v))$,

$$0 = DF(u, v)(a, b) = (D\varphi(u)(a), D\psi(v)(b)) \implies (D\varphi(u)(a) = 0 \ \wedge\ D\psi(v)(b) = 0)$$

y como $D\varphi(u)$ y $D\psi(v)$ son inyectivas, $(a, b) = (0, 0)$. Además, $F(U_0 \times V_0) = \varphi(U_0) \times \psi(V_0) \subseteq M \times N$ es una vecindad de (p, q) abierto en $M \times N$. Por lo tanto, $M \times N$ es una superficie de clase C^k y dimensión $m + n$.

Para el espacio tangente, usando la misma parametrización F, si $(p,q) \in M \times N$, entonces $(p,q) = F(u,v)$ para algún $(u,v) \in U_0 \times V_0$, luego

$$\begin{aligned}(x,y) \in T_{(p,q)}(M \times N) &\iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^{m+n} : (x,y) = DF(u,v)(a,b)\\ &\iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^{m+n} : (x,y) = (D\varphi(u)(a), D\psi(v)(b))\\ &\iff \exists\, a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n : (x = D\varphi(u)(a)\,,\ y = D\psi(v)(b))\\ &\iff (x \in T_pM \ \wedge\ y \in T_qM)\\ &\iff (x,y) \in T_pM \times T_qN\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \times T_qN$. ■

Sean $M = M^m, N = N^n$ superficies de clase C^k, $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable en p, si $v \in T_pM$, entonces por el Teorema 1.3.1, existe un camino diferenciable $\alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\dot\alpha(0) = v$, esto implica que $f \circ \alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow N$ sea un camino diferenciable con $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$, luego $\dot\gamma(0) \in T_{f(p)}N$.

Para garantizar la independencia de la elección del camino elegido, sea $\tilde\alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ otro camino diferenciable con $\tilde\alpha(0) = p$ y $\dot{\tilde\alpha}(0) = v$, entonces por el Lema 1.3.1, los siguientes caminos son diferenciables:

$$\begin{aligned}\beta &:= \varphi^{-1} \circ \alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow U_0 \quad , \quad \beta(0) = u\\ \tilde\beta &:= \varphi^{-1} \circ \tilde\alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow U_0 \quad , \quad \tilde\beta(0) = u\end{aligned}$$

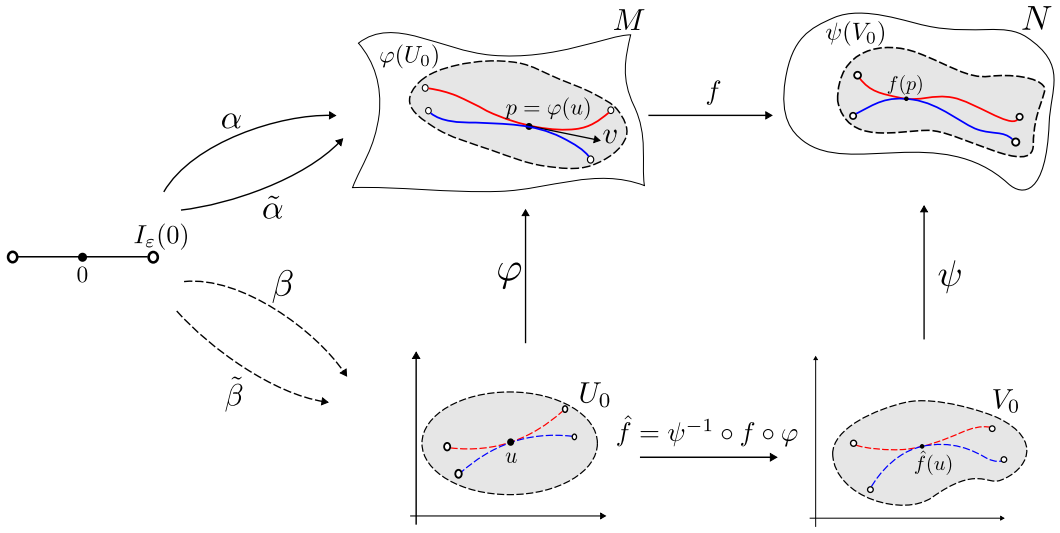


Figura 1.8: Caminos diferenciables sobre una superficie.

Asimismo,

$$\begin{aligned}v = \dot\alpha(0) &= D\varphi(u)(\dot\beta(0))\\ v = \dot{\tilde\alpha}(0) &= D\varphi(u)(\dot{\tilde\beta}(0))\end{aligned}$$

pero $D\varphi(u) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva, entonces $\dot\beta(0) = \dot{\tilde\beta}(0)$. Ahora, como f es diferenciable en $p \in M$, de la Proposición 1.3.5, existe otra parametrización $\psi : V_0 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow N$, donde $f(p) \in \psi(V_0) \subseteq N$ y $\hat f = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es de clase C^j, por consiguiente,

$$f \circ \alpha = \psi \circ \hat f \circ \beta \quad , \quad f \circ \tilde\alpha = \psi \circ \hat f \circ \tilde\beta$$

y usando la Regla de la Cadena,

$$\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}(0) = D(\psi\circ\hat{f})(\beta(0))\cdot\dot{\beta}(0) = D(\psi\circ\hat{f})(\tilde{\beta}(0))\cdot\dot{\tilde{\beta}}(0) = \frac{d(f\circ\tilde{\alpha})}{dt}(0)$$

De este modo, se puede definir la derivada de una función diferenciable entre superficies en un punto.

Definición 1.3.9. (Derivada entre superficies) Sean $M = M^m, N = N^n$ superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable en $p \in M$, entonces la *derivada de f en p* se define como

$$\begin{aligned} Df(p) : T_pM &\longrightarrow T_{f(p)}N \\ v &\longmapsto \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}(0) \end{aligned}$$

donde $\alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ es un camino diferenciable con $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = v$.

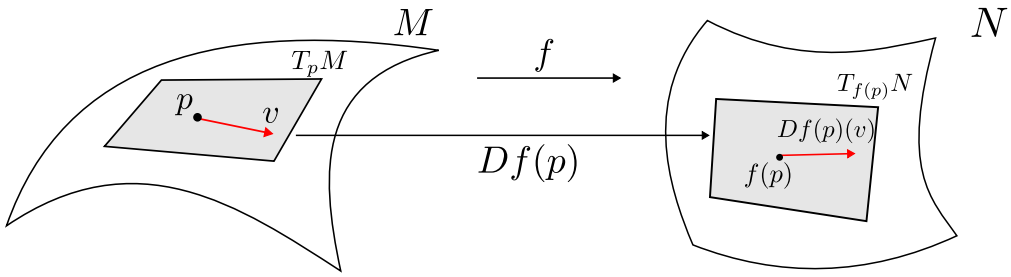


Figura 1.9: La derivada es una función entre espacios tangentes.

Proposición 1.3.7. Sean $M = M^m, N = N^n$ superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable en $p \in M$, entonces $Df(p) : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ es una transformación lineal.

Demostración. De la Proposición 1.3.5, existen parametrizaciones de clase C^k $\varphi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow M$ y $\psi : V_0 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow N$, donde $p \in \varphi(U_0) \subseteq M$ y $f(p) \in \psi(V_0) \subseteq N$, tales que $\hat{f} = \psi^{-1}\circ f\circ\varphi$ es diferenciable en $u := \varphi^{-1}(p)$. Ahora, como $T_pM = D\varphi(u)[\mathbb{R}^m]$ y $T_{f(p)}N = D\psi(\hat{f}(u))[\mathbb{R}^n]$, resulta que

$$\mathcal{B}_1 := \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\}_{j=1}^{m} \quad , \quad \mathcal{B}_2 := \left\{\frac{\partial\psi}{\partial v_i}(\hat{f}(u))\right\}_{i=1}^{n}$$

son bases de T_pM y $T_{f(p)}N$ respectivamente. Por otro lado, dado $j \in \{1,\ldots,m\}$, reduciendo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $\forall\ t \in I_\varepsilon(0) : u + te_j \in U_0$, se define el camino diferenciable

$$\begin{aligned} \alpha_j : I_\varepsilon(0) &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \varphi(u + te_j) \end{aligned}$$

resulta que $\alpha_j(0) = \varphi(u) = p$ y $\dot{\alpha_j}(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)$, pero

$$\forall\ t \in I_\varepsilon(0) : (f\circ\alpha_j)(t) = (f\circ\varphi)(u + te_j) = (\psi\circ\hat{f})(u + te_j)$$

y al derivar respecto a t

$$\frac{d(f\circ\alpha_j)}{dt}(t) = \frac{d}{dt}((\psi\circ\hat{f})(u + te_j)) = D\psi(\hat{f}(u + te_j))\cdot\frac{\partial\hat{f}}{\partial u_j}(u + te_j)$$

pero al evaluarlo en $t = 0$, resulta por definición de derivada que

$$Df(p)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right) = \frac{d(f\circ\alpha_j)}{dt}(0) = D\psi(\hat{f}(u))\cdot\frac{\partial\hat{f}}{\partial u_j}(u) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{f}_i}{\partial u_j}(u)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v_i}(\hat{f}(u))$$

esto indica que en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, $Df(p)$ tiene como represntación matricial a $[Df(p)] = J\hat{f}(u) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Por lo tanto, $Df(p)$ es una transformación lineal. ■

Proposición 1.3.8. (Regla de la cadena) Sean $M = M^m, N = N^n, P = P^p$ superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ funciones diferenciables en $p \in M$ y $f(p) \in N$ respectivamente, entonces

$$D(g\circ f)(p) = Dg(f(p))\cdot Df(p)$$

Demostración. Sean $v \in T_pM$ y $\alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ un camino diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$, entonces por definición de derivada,

$$Df(p)(v) = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}(0)$$

Luego, $\beta := f\circ\alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow N$ es un camino diferenciable tal que $\beta(0) = f(p)$ y $\dot{\beta}(0) = Df(p)(v)$, y usando una vez más la definición de derivada,

$$Dg(f(p))(Df(p)(v)) = \frac{d(g\circ\beta)}{dt}(0) = \frac{d(g\circ f\circ\alpha)}{dt}(0) = D(g\circ f)(p)(v)$$

Como $v \in T_pM$ fue arbitrario,

$$D(g\circ f)(p) = Dg(f(p))\cdot Df(p)$$

. ■

Teorema 1.3.2. (Teorema de la Función Inversa para superficies) Sean $M = M^m, N = N^n$ superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$ una función de clase C^j en el sentido de las superficies, $j \in \{1,\dots,k\}$, y $Df(p)$ un isomorfismo para $p \in M$, entonces f es un difeomorfismo local de clase C^j en p en el sentido de las superficies.

Demostración. Sean $\varphi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow M$ y $\psi : V_0 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow N$ parametrizaciones de clase C^k, donde $p \in \varphi(U_0) \subseteq M$ y $f(p) \in \psi(V_0) \subseteq N$, entonces de la Proposición 1.3.5, $\hat{f} = \psi^{-1}\circ f\circ\varphi : U_0 \longrightarrow V_0$ es de clase C^j en el sentido usual. Ahora, puesto que las parametrizaciones son difeomorfismos en el sentido de las superficies (Ejemplo 1.3.6), $D\psi(\hat{f}(u)) : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(p)}N$ y $D\varphi(u) : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_pM$ son isomorfismos. En consecuencia, del diagrama de la Figura 1.10,

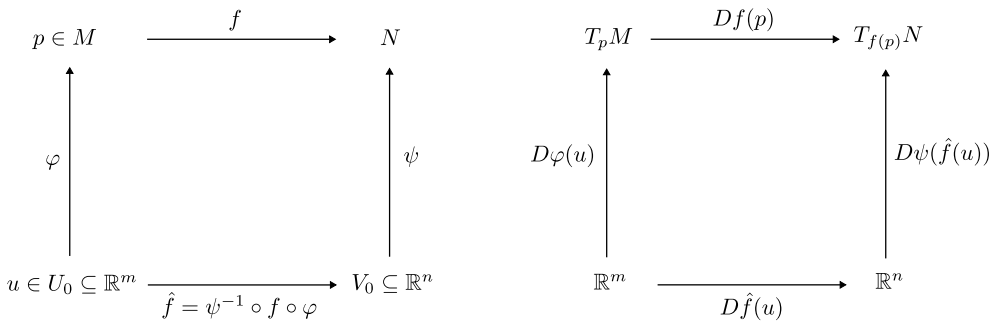


Figura 1.10: Diagrama conmutativo para el Teorema de la Función Inversa.

$$D\hat{f}(u) = [D\psi(\hat{f}(u))]^{-1} \cdot Df(p) \cdot D\varphi(u)$$

Pero como $Df(p)$ es un isomorfismo por hipótesis, $D\hat{f}(u)$ es un isomorfismo. Esto implica por el Teorema de la Función Inversa en $\mathbb{R}^m$ que existen $A_0 \subseteq U_0$ y $B_0 \subseteq V_0$ abiertos con $u \in A_0$ y $\hat{f}(u) \in B_0$ tales que $\hat{f}\Big|_{A_0} : A_0 \longrightarrow B_0$ es un difeomorfismo de clase C^j en el sentido usual. Escogiendo $\varphi(A_0) \subseteq M$ y $\psi(B_0) \subseteq N$, estos son abiertos en M y N respectivamente, además contienen a p y $f(p)$, pero como $f = \psi \circ \hat{f} \circ \varphi^{-1}$,

$$f\Big|_{\varphi(A_0)} = \psi\Big|_{B_0} \circ \hat{f}\Big|_{A_0} \circ (\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(A_0)}$$

De este modo, $f\Big|_{\varphi(A_0)}$ es un difeomorfismo de clase C^j en el sentido de las superficies. Por lo tanto, f es un difeomorfismo local de clase C^j en p en el sentido de las superficies. ■

Proposición 1.3.9. (Subsuperficies) Sean $M = M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m, si $S = S^s \subseteq M$ es otra superficie de clase C^k pero de dimensión $s \leq m$, entonces

1. $i : S \longrightarrow M$ es de clase C^k en el sentido de las superficies y $\forall\, p \in S : Di(p) = \mathrm{Id}_{T_pS}$.
2. Si $M_0 \subseteq M$ es abierto en M, entonces $S \cap M_0$ es una superficie de clase C^k y dimensión s.

Demostración. 1. Sea $p \in S$, entonces $p \in M$, como S y M son superficies, existen parametrizaciones de clase C^k $\varphi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^s \longrightarrow S$ y $\psi : V_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow M$, donde $p \in \varphi(U_0) \cap \psi(V_0)$. Luego, $\hat{i} = \psi^{-1} \circ i \circ \varphi = \psi^{-1} \circ \varphi$ es de clase C^k gracias al Lema 1.3.1, entonces por la Proposición 1.3.5, i es de clase C^k en el sentido de las superficies. Para la derivada, si $p \in S$ y $v \in T_pS$, entonces por el Teorema 1.3.1, existe un camino diferenciable $\alpha : I_\varepsilon(0) \longrightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$, luego

$$Di(p)(v) = \frac{d(i \circ \alpha)}{dt}(0) = \dot{\alpha}(0) = v$$

En otras palabras, $Di(p) = \mathrm{Id}_{T_pS}$.

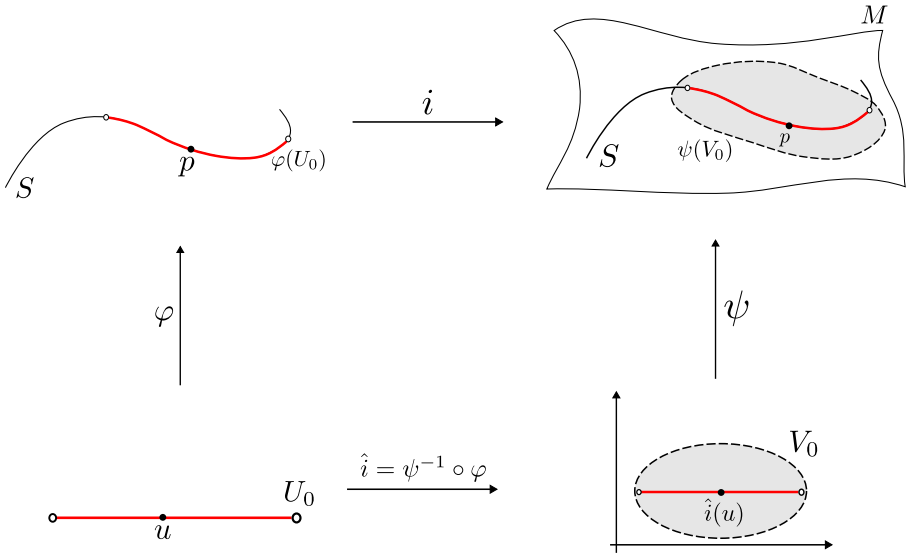


Figura 1.11: Parametrización de una subsuperficie.

2. Por hipótesis, $M_0 = M \cap W$ para algún abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n$, y como $S \subseteq M$, resulta que $S \cap M_0 = S \cap M \cap W = S \cap W$ es un abierto en S, donde S es una superficie, entonces por la Proposición 1.3.4, $S \cap M_0$ es una superficie de clase C^k y dimensión s,

■

Corolario 1.3.3. (Restricción sobre una subsuperficie) Sean $M = M^m$ y $N = N^n$ superficies de clase C^k y $f : M \longrightarrow N$ una función de clase C^k en el sentido de las superficies y $S = S^s \subseteq M$ otra superficie de clase C^k pero de dimensión s, entonces la restricción $F := f\Big|_S : S \longrightarrow N$ es una función de clase C^k y $\forall\, p \in S : DF(p) = Df(p)\Big|_{T_pS}$.

Demostración. De la Proposición 1.3.9, la inclusión $i : S \longrightarrow M$ es de clase C^r en el sentido de las superficies y para $p \in S$ se tiene que $Di(p) = \mathrm{Id}_{T_pS}$, entonces por el Corolario 1.3.2, $F = f\Big|_S = f \circ i$ es de clase C^k. Asimismo, si $p \in S$ y $v \in T_pS$, entonces de la Regla de la Cadena (Proposición 1.3.8),

$$DF(p)(v) = Df(p)(\mathrm{Id}_{T_pS}(v)) = Df(p)(v)$$

Por lo tanto, $DF(p) = Df(p)\Big|_{T_pS}$. ■

Proposición 1.3.10. (Invarianza de suavidad y dimensión) Sean $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ superficies de clase C^k y dimensión m, si $f : M_1 \longrightarrow M_2$ un difeomorfismo de clase C^k en el sentido de las superficies y $S = S^s \subseteq M_1$ otra superficie de clase C^k pero de dimensión $s \leq m$, entonces $f(S)$ es una superficie de la misma suavidad y dimensión que S.

Demostración. Sea $p \in f(S)$, entonces $p = f(q)$ para un único $q \in S$, pero como S es una superficie, existe una parametrización de clase C^k y dimensión m $\varphi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^s \longrightarrow S$, donde $q \in \varphi(U_0)$, entonces se define la función $\gamma := f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow f(S)$.

1. γ **es de clase** C^k **en el sentido usual:** Para cada $u \in U_0$, $\varphi(u) \in S \subseteq M_1$, y como f es de clase C^k en el sentido de las superficies, de la Proposición 1.3.5, existen parametrizaciones de clase C^k $\psi : V_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow M_1$ y $\lambda : W_0 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ (Figura 1.12), donde $\varphi(u) \in \psi(V_0)$ y $\gamma(u) \in \lambda(W_0)$, tales que $\lambda^{-1} \circ f \circ \psi$ es de clase C^k en el sentido usual, además del Lema 1.3.1, $\psi^{-1} \circ \varphi$ es de clase C^k en el sentido usual, y así $\gamma = f \circ \varphi = \lambda \circ (\lambda^{-1} \circ f \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)$ es de clase C^k en el sentido usual.

2. γ **es una inmersión:** Si $u \in U_0$ y $v \in \mathrm{Ker}(D\gamma(u))$, entonces de la Regla de la Cadena (Teorema 1.3.8),

$$0 = Df(\varphi(u)) \cdot D\varphi(u)(v) \quad \Longrightarrow \quad D\varphi(u)(v) \in \mathrm{Ker}(Df(\varphi(u)))$$

   Dado que f es un difeomorfismo, $Df(\varphi(u)) : T_{\varphi(u)}M_1 \longrightarrow T_{f(\varphi(u))}M_2$ es invertible y por consiguiente, $D\varphi(u)(v) = 0$, y desde que φ es una inmersión, $v \in \mathrm{Ker}(D\varphi(u)) = \{0\}$.

3. γ **es un homeomorfismo sobre su imagen:** En efecto, pues es la composición de dos homeomorfismos.

4. **Existe un entorno parametrizado de** p **en** $f(S)$**:** $p \in \gamma(U_0) = f(\varphi(U_0))$, pero como f es un difeomorfismo y $\varphi(U_0)$ es abierto en S, $\gamma(U_0)$ es abierto en $f(S)$.

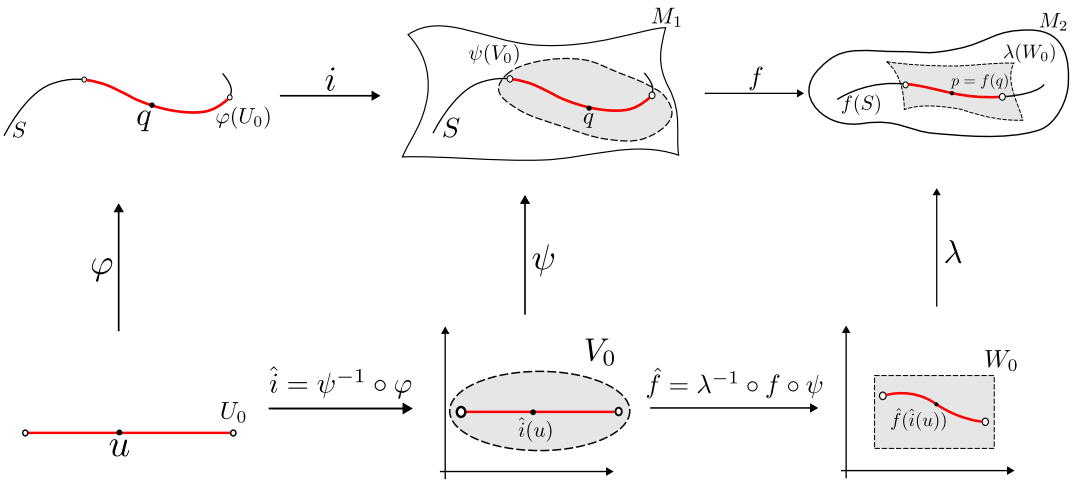


Figura 1.12

En conclusión, $f(S)$ es una superficie de clase C^k y dimensión s. ■

1.4. Logaritmo de una matriz real

Para matrices de coeficientes reales, la exponencial de cualquier matriz cuadrada siempre es una matriz invertible, entonces ¿será cierto que para toda matriz invertible exista una matriz cuadrada cuya exponencial sea la misma matriz invertible? Por lo general, esto no es cierto. Como contraejemplo se tiene la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$$

Si existiese una matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $e^B = A$, entonces se analizan los autovalores de B y de A. Si $\lambda \in \mathrm{Aut}(B)$ es real, entonces $e^\lambda \in \mathrm{Aut}(A) = \{-4, -1\}$, esto es absurdo porque $e^\lambda > 0$, lo cual implica que los autovalores de B son complejos y conjugados, es decir, $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathrm{Aut}(B)$, y así $e^\lambda, e^{\overline{\lambda}} \in \mathrm{Aut}(A) = \{-4, -1\}$. No obstante,

$$-4 = e^\lambda = \overline{e^\lambda} = e^{\overline{\lambda}} = -1$$

Por reducción al absurdo, no existe $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = e^B$.

Definición 1.4.1. (Matriz logaritmo real) Sea $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, se dice que $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una *matriz logaritmo real de* A si $e^B = A$.

Lema 1.4.1. $\exists\, P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2n}) : N_{2n}^2 = P\mathrm{diag}[N_n, N_n]P^{-1}$

Demostración. N_{2n}^2 es una matriz nilpotente de orden n, además representando esta matriz en sus vectores columna

$$N_{2n}^2 = [0, 0, e_1, e_2, \ldots, e_{2n-2}]$$

resulta que $\dim(\mathrm{Ker}(N_{2n}^2)) = 2$, entonces por el Teorema de Forma Canónica para Transformaciones Nilpotentes (Teorema 1.1.3), N_{2n}^2 es similar a una matriz diagonal por bloques $\mathrm{diag}[N_{k_1}, N_{k_2}]$, donde $n = k_1 \geq k_2$ y $k_1 + k_2 = 2n$, pero esto significa que $k_1 = k_2 = n$. Por lo tanto, $\exists\, P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2n}) : N_{2n}^2 = P\mathrm{diag}[N_n, N_n]P^{-1}$. ■

Para estudiar el logaritmo de matrices nilpotentes, se necesitará desarrollar potencias de series de matrices y reorganizar los términos. Los dos siguientes resultados proporcionan el fundamento analítico para dichas manipulaciones.

Lema 1.4.2. (Mertens) Sean $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ dos series convergentes de números reales, donde al menos una de ellas es absolutamente convergente, si $c_r := \sum_{l=0}^{r} a_l b_{r-l}$, entonces

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Rudin [15]. ■

Proposición 1.4.1. (Potencias de series absolutamente convergentes) Sea $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ una serie absolutamente convergente de números reales y $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)^m = \sum_{r=0}^{\infty} b_{r,m}$$

donde para $r \in \mathbb{N}_0$,

$$b_{r,m} = \sum_{\substack{j_1+\ldots j_m=r \\ j_1,\ldots,j_m\geq 0}} \prod_{i=1}^{m} a_{j_i}$$

Demostración. La demostración de este resultado se obtiene mediante inducción sobre m. El caso $m = 2$ es inmediato por el Lema 1.4.2. ■

Lema 1.4.3. $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente de orden $k \leq n$ si y solo si existe una matriz $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotente de orden k tal que $e^L = I_n + N$.

Demostración. ($\Rightarrow$) : Primero, se tienen las series de potencias de la exponencial y el logaritmo

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\ln(1+t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} t^{j+1} \quad , \quad |t| < 1$$

Tras comprobarse que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1}|t|^{j+1}$ es absolutamente convergente para todo $|t| < 1$ por el criterio de D'Alembert, se sigue de la Proposición 1.4.1 ($a_j = \frac{(-1)^j}{j+1} t^{j+1}$) que para $m \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario, y $|t| < 1$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} t^{j+1}\right)^m = \sum_{r=0}^{\infty} c_{r,m} t^{r+m}$$

donde los coeficientes $c_{r,m}$ son

$$c_{r,m} = \sum_{\substack{j_1+\ldots j_m=r \\ j_1,\ldots,j_m\geq 0}} \prod_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{j_i}}{j_i+1}$$

Afirmación. $c_{0,m} = 1$

Sean $j_1, \ldots, j_m \geq 0$ tales que $j_1 + \cdots + j_m = 0$, entonces $-j_m = j_1 + \cdots + j_{m-1} \geq 0$, así $0 \geq j_m$, por consiguiente $j_m = 0$. Repitiendo este argumento un número finito de veces, $j_1 = \cdots = j_m = 0$. Luego,

$$c_{0,m} = \prod_{i=1}^{m} \frac{(-1)^0}{0+1} = \prod_{i=1}^{m} 1 = 1$$

Convencionalmente, la sumatoria sobre un conjunto vacío de índices es 0, y dado que la suma de los subíndices es mayor o igual que 0, se tiene que para $r < 0$, $c_{r,m} = 0$. En consecuencia, si $r < m$, entonces $c_{r-m,m} = 0$.
Puesto que el desarrollo en series de potencias de $\ln(1+t)$ es absolutamente convergente para $|t| < 1$, al elevar a la m-ésima potencia se pueden reordenar los términos sin alterar la suma, y desde que la exponencial es la función inversa del logaritmo,

$$\begin{aligned} 1 + t = e^{\ln(1+t)} &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} t^{j+1} \right)^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{r=0}^{\infty} c_{r,m} t^{r+m} \right) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{r=m}^{\infty} c_{r-m,m} t^r \right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=m}^{\infty} \frac{c_{r-m,m}}{m!} t^r = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_{r-m,m}}{m!} t^r \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{r-m,m}}{m!} t^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{r} \frac{c_{r-m,m}}{m!} t^r \end{aligned}$$

De la unicidad de la representación en series de potencias, se deduce que

$$\forall\, r \in \mathbb{N} : d_r := \sum_{m=1}^{r} \frac{c_{r-m,m}}{m!} = \begin{cases} 1, & r = 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \tag{1.28}$$

Ahora, se tiene la matriz

$$L := \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{j+1} N^{j+1}$$

como N es nilpotente de orden k, $\forall\, j \geq k-1 : N^{j+1} = \theta_k$, esto permite extender esta suma finita a una serie absolutamente convergente

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} N^{j+1}$$

Dado que las potencias de N siempre conmutan entre sí, los coeficientes que genera la m-ésima potencia de L son los mismos que los de $e^{\ln(1+t)}$, es decir, para $m \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario

$$L^m = \sum_{r=0}^{\infty} c_{r,m} N^{r+m} = \sum_{r=m}^{\infty} c_{r-m,m} N^r = \sum_{r=m}^{k-1} c_{r-m,m} N^r$$

L es nilpotente de orden k porque de la *Afirmación*, $L^{k-1} = c_{0,k-1} N^{k-1} = N^{k-1} \neq \theta_k$ y

$$L^k = L L^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{j+1} N^{j+k} = \theta_k$$

entonces su exponencial consiste de una suma finita de términos y usando la *Afirmación* y (1.28),

$$\begin{aligned} e^L &= I_n + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m!} L^m = I_n + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{r=m}^{k-1} c_{r-m,m} N^r \right) = I_n + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{r=1}^{k-1} c_{r-m,m} N^r \right) \\ &= I_n + \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{c_{r-m,m}}{m!} N^r = I_n + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{c_{r-m,m}}{m!} N^r = I_n + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{r} \frac{c_{r-m,m}}{m!} N^r \\ &= I_n + \sum_{r=1}^{k-1} d_r N^r = I_n + N \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) : De la Proposición 1.4.1, resulta que para $m \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} x^{j+1} \right)^m = \sum_{r=0}^{\infty} c_{r,m} x^{r+m}$$

donde los coeficientes $c_{r,m}$ son

$$c_{r,m} = \sum_{\substack{j_1+\ldots j_m=r \\ j_1,\ldots,j_m \geq 0}} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{(j_i+1)!}$$

Análogamente al paso anterior, se tienen que para $r < m$, $c_{r,m} = 0$, y $c_{0,m} = 1$. Puesto que las potencias de L conmutan entre sí y L es nilpotente de orden k por hipótesis,

$$N^m = (e^L - I_n)^m = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} L^{j+1} \right)^m = \sum_{r=0}^{\infty} c_{r,m} L^{r+m} = \sum_{r=m}^{k-1} c_{r-m,m} L^r$$

En particular, para $m = k-1$, $N^{k-1} = L^{k-1} \neq \theta_k$, luego

$$N^k = N N^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{1}{(j+1)!} L^{j+k} = \theta_k$$

Por lo tanto, N es una matriz nilpotente de orden k. ■

El siguiente teorema, demostrado por W. Culver [3], caracteriza las matrices invertibles que admiten por lo menos una matriz logaritmo real, asimismo proporciona un algoritmo para construirla.

Teorema 1.4.1. (Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz logaritmo real) Sea $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, entonces A posee una matriz logaritmo real si y solo si cada bloque de Jordan de orden n_k asociado a un autovalor negativo de A se repite un par de veces.

Demostración. ($\Rightarrow$) : Por hipótesis, existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $e^B = A$, luego pasando por las formas canónicas de Jordan de A y B, se tiene por la Proposición 1.1.1 que $e^{J_B} = M J_A M^{-1}$ para alguna matriz invertible M.

$$\lambda \in \mathrm{Aut}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = e^{\lambda} \in \mathrm{Aut}(A)$$

Sea μ un autovalor real negativo de A, entonces $\lambda = \ln(-\mu) \pm i\pi$ es un autovalor de B y un bloque asociado a este autovalor es de la forma $J_\lambda = J_{2k}(\ln(-\mu), \pi) + N_{2k}^2$. La exponencial de este bloque es, por (1.19),

$$e^{J_\lambda} = e^{\ln(-\mu)} J_{2k}(\cos(\pi), \sin(\pi)) \cdot e^{N_{2k}^2} = -\mu(-I_{2k}) \cdot e^{N_{2k}^2} = \mu e^{N_{2k}^2}$$

Asimismo, del Lema 1.4.1, existe $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2k})$ tal que $N_{2k}^2 = P\mathrm{diag}[N_k, N_k]P^{-1}$, entonces se sigue de la Proposición 1.1.1 y de (1.8)

$$\begin{aligned} e^{J_\lambda} - \mu I_{2k} &= \mu(e^{N_{2k}^2} - I_{2k}) = \mu(e^{P\mathrm{diag}[N_k,N_k]P^{-1}} - I_{2k}) \\ &= \mu(P\mathrm{diag}[e^{N_k}, e^{N_k}]P^{-1} - I_{2k}) \\ &= \mu P(\mathrm{diag}[e^{N_k}, e^{N_k}] - I_{2k})P^{-1} \\ &= \mu P(\mathrm{diag}[e^{N_k} - I_k, e^{N_k} - I_k])P^{-1} \end{aligned}$$

Afirmación. Si $D = \mathrm{diag}[e^{N_k} - I_k, e^{N_k} - I_k]$, entonces $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 2$.

Extendiendo el bloque $e^{N_k} - I_k$,

$$e^{N_k} - I_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(k-2)!} & \frac{1}{(k-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(k-3)!} & \frac{1}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $x = (x_1, \dots, x_{2k}) \in \mathrm{Ker}(D)$, entonces

$$Dx = \begin{bmatrix} e^{N_k} - I_k & \theta_k \\ \theta_k & e^{N_k} - I_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primero, $x_{2k} = x_k = 0$, luego $x_{2k-1} = x_{k-1} = 0$, siguiendo así sucesivamente hasta que $x_{k+2} = x_2 = 0$. De este modo, $x_2 = \cdots = x_k = x_{k+2} = \cdots = x_{2k} = 0$. Por consiguiente, $\mathrm{Ker}(D) = \langle e_1, e_{k+1} \rangle$ y así $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 2$.

A continuación, del Lema 1.4.3, el bloque $e^{N_k} - I_k$ es una matriz nilpotente de orden k, entonces D es nilpotente de orden k. Esto implica por la Forma Canónica de Transformaciones Nilpotentes (Teorema 1.1.3) que μD es similar a $\mathrm{diag}[N_{k_1}, N_{k_2}]$, donde $k = k_1 \geq k_2$ y $k_1 + k_2 = 2k$, i.e., existe $Q \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2k})$ tal que $\mu D = Q\mathrm{diag}[N_k, N_k]Q^{-1}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} e^{J_\lambda} - \mu I_{2k} &= \mu P(\mathrm{diag}[e^{N_k} - I_k, e^{N_k} - I_k])P^{-1} \\ &= P(\mu D)P^{-1} \\ &= PQ\mathrm{diag}[N_k, N_k]Q^{-1}P^{-1} \end{aligned}$$

Denotando por $R := PQ \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2k})$ se tiene que

$$e^{J_\lambda} = \mu I_{2k} + R\mathrm{diag}[N_k, N_k]R^{-1} = R\mathrm{diag}[\mu I_k + N_k, \mu I_k + N_k]R^{-1}$$

Esto significa que al autovalor μ le corresponde un par de bloques de la forma $J_\mu = \mu I_k + N_k$. En resumen, por cada bloque J_λ de la matriz J_B se generan, al exponenciar, dos bloques J_μ de la matriz J_A, y por tanto, cada bloque J_μ se debe repetir un par de veces.

($\Leftarrow$) : Como A es invertible, todo autovalor μ admite estos casos:

Caso 1: μ es un autovalor positivo: Su bloque asociado es de la forma $J_\mu = \mu I_k + N_k$. Se tiene la matriz

$$B := \ln(\mu) I_k + L_k \quad , \quad L_k := \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{j+1} \left(\frac{N_k}{\mu}\right)^{j+1} \tag{1.29}$$

Del Lema 1.4.3 se cumple que $e^{L_k} = I_k + \frac{N_k}{\mu}$, y ya que la matriz identidad conmuta con cualquier matriz,

$$e^B = e^{ln(\mu)} I_k (I_k + \frac{N_k}{\mu}) = \mu I_k + N_k = J_\mu$$

Caso 2: $\mu = a \pm ib$ **es un autovalor complejo**: Su bloque asociado es de la forma $J_\mu = J_{2k}(a,b) + N_{2k}^2$. Luego, existen únicos $r = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que $a = r\cos(\theta)$ y $b = r\sin(\theta)$. Se tiene la matriz

$$B := J_{2k}(\ln(r), \theta) + M_k \quad , \quad M_k := \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{j+1} [J_{2k}(a,b)]^{-(j+1)} N_{2k}^{2(j+1)} \tag{1.30}$$

Del Lema 1.4.3 se cumple que $e^{M_k} = I_{2k} + [J_{2k}(a,b)]^{-1} N_{2k}^2$. Puesto que $J_{2k}(\ln(r), \theta)$, $J_{2k}(a,b)$ y N_{2k}^2 conmutan entre sí (Propiedades del **Caso 6** de la Sección 1.1), se sigue que $J_{2k}(\ln(r), \theta)$ y M_k también, entonces

$$e^B = e^{J_{2k}(\ln(r),\theta)} e^{M_k} = J_{2k}(a,b)(I_{2k} + [J_{2k}(a,b)]^{-1} N_{2k}^2) = J_{2k}(a,b) + N_{2k}^2 = J_\mu$$

Caso 3: μ **es un autovalor negativo**: Su bloque asociado es de la forma $J_\mu = \mu I_k + N_k$ pero por hipótesis se sabe que este bloque se repite un par de veces. Sobre cada par de bloques resulta que

$$\text{diag}[J_\mu, J_\mu] = \mu I_{2k} + \text{diag}[N_k, N_k]$$

pero se tiene del Lema 1.4.1 que existe una matriz invertible Q tal que $\text{diag}[N_k, N_k] = Q^{-1} N_{2k}^2 Q$, entonces

$$\text{diag}[J_\mu, J_\mu] = \mu I_{2k} + Q^{-1} N_{2k}^2 Q = Q^{-1}(\mu I_{2k} + N_{2k}^2) Q$$

y resulta que $\mu I_{2k} + N_{2k}^2$ tiene logaritmo real, el cual es dado por

$$C := J_{2k}(\ln(-\mu), \pi) + R_k \quad , \quad R_k := \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{j+1} \left(\frac{N_{2k}^2}{\mu}\right)^{j+1} \tag{1.31}$$

Del Lema 1.4.3, se cumple que $e^{R_k} = I_{2k} + \frac{N_{2k}^2}{\mu}$. Desde que $J_{2k}(\ln(-\mu), \pi)$ y N_{2k}^2 son matrices conmutativas, se tiene que $J_{2k}(\ln(-\mu), \pi)$ y R_k también, entonces

$$e^C = e^{J_{2k}(\ln(-\mu),\pi)} e^{R_k} = \mu I_{2k}(I_{2k} + \frac{N_{2k}^2}{\mu}) = \mu I_{2k} + N_{2k}^2$$

Por consiguiente, $B := Q^{-1} C Q$ y así

$$e^B = Q^{-1} e^C Q = Q^{-1}(\mu I_{2k} + N_{2k}^2) Q = \text{diag}[J_\mu, J_\mu]$$

Finalmente, si $J_A = \text{diag}[J_{\mu_1}, \ldots, J_{\mu_l}]$, entonces para cada uno de los bloques (y cada par de bloques asociado a un autovalor negativo) posee un logaritmo real, denotado por B_i, entonces, por (1.8)

$$J_A = \text{diag}[e^{B_1}, \ldots, e^{B_k}] = e^{\text{diag}[B_1, \ldots, B_k]}$$

Como $A = P^{-1} J_A P$, usando la Proposición 1.1.1,

$$A = P^{-1} J_A P = P^{-1} e^{\text{diag}[B_1,\ldots,B_k]} P = e^{P^{-1}\text{diag}[B_1,\ldots B_k]P} = e^B$$

Es decir, $B := P^{-1}\text{diag}[B_1, \ldots, B_k]P$ es una matriz logaritmo real de A. ■

Si una matriz invertible A no admite una matriz logaritmo real, su cuadrado A^2 siempre posee por lo menos uno.

Corolario 1.4.1. Para cualquier $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, A^2 posee una matriz logaritmo real.

Demostración. Como $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, A^2 también es invertible, además, pasando por las formas canónicas de Jordan de A y A^2, $J_A^2 = MJ_{A^2}M^{-1}$ para alguna matriz invertible M.

$$\lambda \in \mathrm{Aut}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 \in \mathrm{Aut}(A^2)$$

Si μ es un autovalor negativo de A^2, entonces $\lambda = \pm ib$ es un autovalor de A, donde $b = \sqrt{-\mu}$, y un bloque de Jordan asociado a este autovalor es de la forma $J_\lambda = J_{2k}(0,b) + N_{2k}^2$, como $J_{2k}(0,b)$ y N_{2k}^2 conmutan,

$$J_\lambda^2 = J_{2k}(-b^2,0) + J_{2k}(0,2b)N_{2k}^2 + N_{2k}^4 \quad \Longrightarrow \quad J_\lambda^2 - \mu I_{2k} = (J_{2k}(0,2b) + N_{2k}^2)N_{2k}^2$$

Afirmación. Si $D = J_\lambda^2 - \mu I_{2k}$, entonces $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 2$.

Dado que todos los bloques son del mismo orden, multiplicando bloque a bloque como en el producto usual entre matrices

$$D = \begin{bmatrix} I_2(0,2b) & I_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 \\ \theta_2 & I_2(0,2b) & I_2 & \dots & \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & I_2 \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & I_2(0,2b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 & I_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 \\ \theta_2 & \theta_2 & I_2 & \dots & \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_2 & I_2(0,2b) & I_2 & \dots & \theta_2 \\ \theta_2 & \theta_2 & I_2(a,2b) & \dots & \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & I_2(0,2b) \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $x = (x_1, \dots, x_{2k}) \in \mathrm{Ker}(D)$, entonces $x_{2k} = x_{2k-1} = 0$, luego $x_{2k-2} = x_{2k-3} = 0$, siguiendo así hasta que $x_4 = x_3 = 0$. De este modo, $x_3 = \cdots = x_{2k} = 0$ y por ende $\mathrm{Ker}(D) = \langle e_1, e_2 \rangle$ y así $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 2$.

Ahora, dado que $J_{2k}(0,2b) + N_{2k}^2$ es invertible (tiene como autovalor a $\pm 2bi$) y N_{2k}^2 es nilpotente de orden k, $D = J_\lambda^2 - \mu I_{2k}$ es nilpotente de orden k, esto implica por la Forma Canónica de Transformaciones Nilpotentes (Teorema 1.1.3) que D es similar a $\mathrm{diag}[N_{k_1}, N_{k_2}]$, donde $k = k_1 \geq k_2$ y $k_1 + k_2 = 2k$, entonces existe $S \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2k})$ tal que $J_\lambda^2 - \mu I_{2k} = S\mathrm{diag}[N_k, N_k]S^{-1}$. En consecuencia,

$$J_\lambda^2 = \mu I_{2k} + S\mathrm{diag}[N_k, N_k]S^{-1} = S\mathrm{diag}[\mu I_k + N_k, \mu I_k + N_k]S^{-1}$$

Esto significa que al autovalor μ le corresponde un par de bloques de la forma $J_\mu = \mu I_k + N_k$. En resumen, por cada bloque J_λ de la matriz J_A se generan, al elevar al cuadrado, dos bloques J_μ de la matriz J_{A^2}, y por tanto, cada bloque J_μ se debe repetir un par de veces. En virtud del Teorema 1.4.1, A^2 posee por lo menos una matriz logaritmo real. ■

Observación. Una matriz invertible puede poseer infinitas matrices logaritmo real. En efecto, considérese la matriz identidad

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y esta tiene como matriz logaritmo real a

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 2k\pi \\ -2k\pi & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

pues

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} : e^{B_k} = \begin{bmatrix} \cos(2k\pi) & \sin(2k\pi) \\ -\sin(2k\pi) & \cos(2k\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Ejemplo 1.4.1. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{diag}[-2I_2 + N_2, -2I_2 + N_2]$$

posee por lo menos una matriz logaritmo real en virtud del Teorema 1.4.1 pues el único autovalor negativo de A es -2 y el bloque $-2I_2 + N_2$ se repite dos veces. Ahora, como $\text{diag}[N_2, N_2]$ es similar a N_4^2, después de comprobar mediante la Forma Canónica de Transformaciones Nilpotentes (Teorema 1.1.3) que la matriz cambio de base es

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y que el bloque $-2I_2 + N_2$, por (1.31),tiene como matriz logaritmo real a

$$C = J_4(\ln(2), \pi) - \frac{1}{2}N_4^2 = \begin{bmatrix} \ln(2) & \pi & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\pi & \ln(2) & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \ln(2) & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & \ln(2) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, una matriz logaritmo real para A es

$$B = Q^{-1}CQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln(2) & \pi & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\pi & \ln(2) & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \ln(2) & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & \ln(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi & 0 & \ln(2) & -\frac{1}{2} \\ \ln(2) & -\frac{1}{2} & -\pi & 0 \\ 0 & \pi & 0 & \ln(2) \\ 0 & \ln(2) & 0 & -\pi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ln(2) & -\frac{1}{2} & -\pi & 0 \\ 0 & \ln(2) & 0 & -\pi \\ \pi & 0 & \ln(2) & -\frac{1}{2} \\ 0 & \pi & 0 & \ln(2) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4.2. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = J_4(3,-4) + N_4^2$$

posee por lo menos una matriz logaritmo real. Primero, $\mathrm{Aut}(A) = \{3 \pm 4i\}$, ahora dado que el autovalor es complejo, $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ y $\theta = \arctan(-\frac{4}{3})$, entonces, por (1.30),

$$B := J_4(\ln(5), \theta) + [J_4(-3,4)]^{-1} N_4^2$$

donde $[J_4(3,-4)]^{-1} = \frac{1}{25} J_4(3,4)$ y así

$$B = \begin{bmatrix} \ln(5) & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & \ln(5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln(5) & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & \ln(5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(5) & \theta & \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ -\theta & \ln(5) & -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \\ 0 & 0 & \ln(5) & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & \ln(5) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4.3. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}[6I_3 + N_3, 4I_2 + N_2]$$

posee por lo menos una matriz logaritmo real. Primero, $\mathrm{Aut}(A) = \{6, 4\}$, después procediendo por bloques

- Para $A_1 = 6I_3 + N_3$, una matriz logaritmo real es, por (1.29),

$$B_1 = \ln(6) I_3 + \frac{1}{6} N_3 - \frac{1}{72} N_3^2 = \begin{bmatrix} \ln(6) & \frac{1}{6} & -\frac{1}{72} \\ 0 & \ln(6) & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \ln(6) \end{bmatrix}$$

- Para $A_2 = 4I_2 + N_2$, una matriz logaritmo real es, por (1.29)

$$B_2 = \ln(4) I_2 + \frac{1}{4} N_2 = \begin{bmatrix} \ln(4) & \frac{1}{4} \\ 0 & \ln(4) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, una matriz logaritmo de A es

$$B = \begin{bmatrix} \ln(6) & \frac{1}{6} & -\frac{1}{72} & 0 & 0 \\ 0 & \ln(6) & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln(6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ln(4) & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ln(4) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4.4. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

posee por lo menos una matriz logaritmo real. Para empezar, el polinomio característico es $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ y luego $\mathrm{Aut(A)} = \{2, 3\}$. Por consiguiente, la forma canónica de Jordan de A es

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Del Teorema de Descomposición Primaria (Teorema 1.1.2),

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(A - 2I) \oplus \mathrm{Ker}(A - 3I)$$

Así que se hallan los autoespacios asociados a cada autovalor para obtener la matriz cambio de base:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - 2I) = \langle (1, 1) \rangle$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - 3I) = \langle (4, 3) \rangle$$

De este modo,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para J_A, una matriz logaritmo real es, por (1.29),

$$C = \begin{bmatrix} \ln(2) & 0 \\ 0 & \ln(3) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, una matriz logaritmo para A es

$$\begin{aligned} B = P^{-1}CP &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln(2) & 0 \\ 0 & \ln(3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3\ln(2) & 4\ln(2) \\ \ln(3) & -\ln(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\ln(3) - 3\ln(2) & 4\ln(2) - 4\ln(3) \\ 3\ln(3) - 3\ln(2) & 4\ln(2) - 3\ln(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \ln(\frac{81}{8}) & \ln(\frac{16}{81}) \\ \ln(\frac{27}{8}) & \ln(\frac{16}{27}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Capítulo 2

Dinámica discreta

En este capítulo, conceptos como órbitas, puntos de equilibrio, estabilidad, hiperbolicidad, atractores, repulsores y conjuntos estable e inestable se formulan siguiendo el mismo esquema que en el Capítulo 1.

Asimismo, se resalta estos paralelos mediante la notación diferenciada $\mathcal{C}$ ***(para referirse a dinámica continua)*** frente a $\mathcal{D}$ ***(para referirse a dinámica discreta)***.

2.1. Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias

Definición 2.1.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces el *sistema lineal discreto con coeficientes constantes asociado a* A es la expresión

$$x(m+1) = Ax(m)$$

Proposición 2.1.1. (Existencia y unicidad) Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces la única solución del P.V.I. lineal discreto

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) \\ \quad x(0) = x_0 \end{cases}$$

es la sucesión

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N}_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ m &\longmapsto A^m x_0 \end{aligned}$$

Demostración. Para la **existencia**, la sucesión x es solución del P.V.I. discreto. En efecto, $x(0) = A^0(x_0) = x_0$ y

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : x(m+1) = A^{m+1}x_0 = AA^m x_0 = Ax(m)$$

Para la **unicidad**, sea y una solución del P.V.I. discreto, entonces $\forall\ m \in \mathbb{N}_0 : y(m) = A^m x_0$. En efecto, se cumple para $m = 0$, entonces por hipótesis inductiva se cumple para m, y después

$$y(m+1) = Ay(m) = AA^m x_0 = A^{m+1}x_0$$

Es decir, se cumple para $m+1$. Por lo tanto, la afirmación es verdadera y en consecuencia, $y = x$. ■

Definición 2.1.2. (Órbita discreta de una matriz) Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

1. La *semiórbita positiva (discreta) de* A *que pasa por* x_0 se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^+_{\mathcal{D},A}(x_0) := \{A^m x_0\}_{m\in\mathbb{N}_0} = \{x_0, Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, \dots\}$$

2. Cuando $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, la *semiórbita negativa (discreta) de A que pasa por x_0* se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^-_{\mathcal{D},A}(x_0) := \{A^{-m}x_0\}_{m\in\mathbb{N}_0} = \{\dots, A^{-3}x_0, A^{-2}x_0, A^{-1}x_0, x_0\}$$

3. Si $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, la *órbita total (discreta) de A que pasa por x_0* se define como el conjunto

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D},A}(x_0) := \{A^{m}x_0\}_{m\in\mathbb{Z}} = \{\dots, A^{-3}x_0, A^{-2}x_0, A^{-1}x_0, x_0, Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, \dots\}$$

Definición 2.1.3. (Punto fijo de una matriz) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se dice que $p \in \mathbb{R}^n$ es un *punto fijo de A* si $Ap = p$. Al conjunto de puntos fijos de A se le denota por $\mathrm{Fix}(A)$. Esto es,

$$\mathrm{Fix}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = x\}$$

Observación. $p \in \mathrm{Fix}(A)$ si y solo si $(I - A)\,p = 0$, por lo que solo pueden ocurrir dos posibilidades:

- $I - A \in GL(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathrm{Fix}(A) = \{0\}$.
- $I - A \notin GL(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathrm{Fix}(A) = \mathrm{Ker}(I - A)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $d \leq n$.

2.2. Atractores, repulsores e hiperbolicidad

Definición 2.2.1. (Atractores y repulsores en sistemas discretos) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

1. $0 \in \mathbb{R}^n$ es un *$\mathcal{D}$-atractor de A* si

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \lim_{m\to\infty} A^m x = 0$$

2. Si además $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, $0 \in \mathbb{R}^n$ es un *$\mathcal{D}$-repulsor de A* si

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \lim_{m\to\infty} A^{-m} x = 0$$

Proposición 2.2.1. (Criterio analítico de atractores) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $0 \in \mathbb{R}^n$ es un $\mathcal{D}$-atractor de A
2. $\forall\, \lambda \in \mathrm{Aut}(A) : |\lambda| < 1$
3. $\exists\, \rho > 1, \exists\, K \geq 1, \forall\, m \in \mathbb{N}_0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n : |A^m x| \leq K\rho^{-m}|x|$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Elaydi [4] o Katok [8]. ■

Corolario 2.2.1. (Criterio analítico de repulsores) Sea $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $0 \in \mathbb{R}^n$ es un $\mathcal{D}$-repulsor de A
2. $\forall\, \lambda \in \mathrm{Aut}(A) : |\lambda| > 1$
3. $\exists\, \rho > 1, \exists\, K \geq 1, \forall\, m \in \mathbb{N}_0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n : |A^m x| \geq K^{-1}\rho^{m}|x|$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Elaydi [4] o Katok [8]. ■

Definición 2.2.2. (Matriz hiperbólica en sistemas discretos) Se dice que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una *matriz $\mathcal{D}$-hiperbólica* si

$$\forall\ \lambda \in \operatorname{Aut}(A) : |\lambda| \neq 1$$

Al conjunto de matrices $\mathcal{D}$-hiperbólicas se le denota por $\operatorname{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$, y el *índice de $\mathcal{D}$-estabilidad de A*, denotado por $i_{\mathcal{D},A}(0)$, es el número de autovalores con módulo menor que 1, contando multiplicidad.

Ejemplo 2.2.1. Una matriz $\mathcal{D}$-hiperbólica no necesariamente es una matriz $\mathcal{C}$-hiperbólica y viceversa.

1. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ es una matriz $\mathcal{C}$-hiperbólica y $\mathcal{D}$-hiperbólica. En efecto,

$$\operatorname{Aut}(A) = \left\{ \frac{1}{2}, -5, \frac{3}{10} \pm \frac{4}{10}i \right\}$$

Analizando las partes reales de los autovalores de A:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0\ ,\ \operatorname{Re}(-5) = -5 < 0\ ,\ \operatorname{Re}\left(\frac{3}{10} \pm \frac{4}{10}i\right) = \frac{3}{10} > 0$$

Por ende, $A \in \operatorname{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^4)$ y $i_{\mathcal{C}}(A) = 1$. Analizando los módulos de los autovalores de A:

$$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1\ ,\ |-5| = 5 > 1\ ,\ \left|\frac{3}{10} \pm \frac{4}{10}i\right| = \frac{1}{4} < 1$$

Esto significa que $A \in \operatorname{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^4)$ y $i_{\mathcal{D}}(A) = 3$.

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ es una matriz $\mathcal{C}$-hiperbólica pero no $\mathcal{D}$-hiperbólica. En efecto,

$$\operatorname{Aut}(B) = \{1, -3\}$$

Analizando las partes reales de los autovalores de B:

$$\operatorname{Re}(1) = 1 > 0\ ,\ \operatorname{Re}(-3) = -3 < 0$$

Por ende, $B \in \operatorname{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^4)$ y $i_{\mathcal{C}}(B) = 3$. Analizando los módulos de los autovalores de B:

$$|1| = 1\ ,\ |-3| = 3 > 1$$

Esto significa que $B \notin \operatorname{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^4)$.

3. $C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ es una matriz $\mathcal{D}$-hiperbólica pero no $\mathcal{C}$-hiperbólica. En efecto,

$$\operatorname{Aut}(C) = \left\{ \pm\frac{1}{2}i, -2, 4 \right\}$$

Analizando las partes reales de los autovalores de C:

$$\mathrm{Re}\left(\pm\frac{1}{2}i\right) = 0\ ,\ \mathrm{Re}(-2) = -2 < 0\ ,\ \mathrm{Re}\,(4) = 4 > 0$$

Por ende, $C \notin \mathrm{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^4)$. Analizando los módulos de los autovalores de C:

$$\left|\pm\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2} < 1\ ,\ |-2| = 2 > 1\ ,\ |4| = 4 > 1$$

Esto significa que $C \in \mathrm{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^4)$ y $i_{\mathcal{D}}(C) = 2$.

4. $D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ no es una matriz $\mathcal{C}$-hiperbólica ni $\mathcal{D}$-hiperbólica. En efecto,

$$\mathrm{Aut}(D) = \left\{\pm 3i, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

Analizando las partes reales de los autovalores de D:

$$\mathrm{Re}\,(\pm 3i) = 0\ ,\ \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2} > 0$$

Por ende, $D \notin \mathrm{Hip}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^4)$. Analizando los módulos de los autovalores de D:

$$|\pm 3i| = 3 > 1\ ,\ \left|\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$$

Esto significa que $D \notin \mathrm{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^4)$.

Definición 2.2.3. (Conjuntos estables e inestables) Sea $A \in \mathrm{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$,

1. El *conjunto $\mathcal{D}$-estable de A* se define como

$$E^s_{\mathcal{D},A}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{m\to\infty} A^m x = 0\}$$

2. Si además $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, el *conjunto $\mathcal{D}$-inestable de A* se define como

$$E^u_{\mathcal{D},A}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{m\to\infty} A^{-m} x = 0\}$$

Observación. Se puede comprobar que $E^u_{\mathcal{D},A}(0) = E^s_{\mathcal{D},-A}(0)$ para $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.2.2. Sea $A \in \mathrm{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ con $i_{\mathcal{D}}(A) = m$, entonces

1. $\exists\ P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) : A = P^{-1}\mathrm{diag}[A_1, A_2]P$, donde $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es una matriz que reúne los autovalores de A con módulo menor que 1, mientras que $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ reúne los autovalores de A con módulo mayor que 1.

2. $E^s_{\mathcal{D},A}(0)$ y $E^u_{\mathcal{D},A}(0)$ son subespacios vectoriales de dimensión m y $n-m$ respectivamente. Asimismo, $\mathbb{R}^n = E^s_{\mathcal{D},A}(0) \oplus E^u_{\mathcal{D},A}(0)$.

3. $\exists\ \rho_1 > 1, \exists\ K_1 \geq 1, \forall\ m \in \mathbb{N}_0, \forall\ x \in E^s_{\mathcal{D},A}(0) : |A^m x| \leq K_1 \rho_1^{-m}|x|$

4. $\exists\, \rho_2 > 1, \exists\, K_2 \geq 1, \forall\, m \in \mathbb{N}_0, \forall\, x \in E^u_{\mathcal{D},A}(0) : |A^m x| \geq K_2^{-1}\rho_2^m |x|$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Elaydi [4]. ■

Ejemplo 2.2.2. Para obtener la fórmula general de la sucesión de Fibonacci se tiene el siguiente P.V.I. discreto:

$$\begin{cases} x(n+2) = x(n+1) + x(n) \\ x(0) = x_0\ ,\ x(1) = x_1 \end{cases}$$

Como la ecuación en diferencias es de segundo orden, esta puede transformarse en un sistema de ecuaciones en diferencias mediante el siguiente cambio de variables:

$$y(n) = x(n+1) \quad \Longrightarrow \quad y(0) = x(1) = x_1$$

Por consiguiente,

$$\begin{cases} x(n+1) = y(n), & x(0) = x_0 \\ y(n+1) = x(n) + y(n), & y(0) = x_1 \end{cases}$$

O en su forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, se hallan los autovalores de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, los autovalores de A son φ (proporción aúrea) y ψ:

$$\mathrm{Aut}(A) = \{\varphi, \psi\} \quad , \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Luego, la forma canónica de Jordan de A es

$$J_A = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}$$

Del Teorema de Descomposición Primaria (Teorema 1.1.2),

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(A - \varphi I) \oplus \mathrm{Ker}(A - \psi I)$$

Así que se hallan los autoespacios asociados a cada autovalor para obtener la matriz cambio de base:

$$A - \varphi I = \begin{bmatrix} -\varphi & 1 \\ 1 & 1-\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi & 1 \\ 1 & -\varphi^{-1} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - \varphi I) = \langle (1, \varphi) \rangle$$

$$A - \psi I = \begin{bmatrix} -\psi & 1 \\ 1 & 1-\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi & 1 \\ 1 & -\psi^{-1} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - \psi I) = \langle (1, \psi) \rangle$$

De este modo,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \psi & -1 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, del Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 2.1.1) y la Proposición 1.1.1, para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} &= P^{-1} J_A^n P \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi & -1 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\varphi^{n-1} & -\varphi^n \\ \psi^{n-1} & \psi^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \psi^{n-1} - \varphi^{n-1} & \psi^n - \varphi^n \\ \psi^n - \varphi^n & \psi^{n+1} - \varphi^{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} x_0(\psi^{n-1} - \varphi^{n-1}) + x_1(\psi^n - \varphi^n) \\ x_0(\psi^n - \varphi^n) + x_1(\psi^{n+1} - \varphi^{n+1}) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dado que $x(n)$ es la solución del P.V.I. original,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : x(n) = x_0 \left(\frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \right) + x_1 \left(\frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \right)$$

Como caso particular, cuando $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, se obtiene la *fórmula de Binet*:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

En cuanto a la $\mathcal{D}$-estabilidad, $|\varphi| > 1 > |\psi|$, entonces $A \in \mathrm{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^2)$ y $i_{\mathcal{D}}(A) = 1$, además puede comprobarse que los espacios estable e inestable de A son

$$E^s_{\mathcal{D},A}(0) = \mathrm{Ker}(A - \psi I) \quad , \quad E^u_{\mathcal{D},A}(0) = \mathrm{Ker}(A - \varphi I)$$

2.3. Sistema autónomo de ecuaciones en diferencias

Definición 2.3.1. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f = (f_1, \ldots, f_n) : S \longrightarrow S$ una función, el *sistema autónomo discreto asociado a* f es una expresión del tipo

$$x(m+1) = f(x(m))$$

Al expandir esta expresión, se obtiene

$$\begin{cases} x_1(m+1) = f_1(x_1(m), x_2(m), \ldots, x_n(m)), \\ x_2(m+1) = f_2(x_1(m), x_2(m), \ldots, x_n(m)), \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n(m+1) = f_n(x_1(m), x_2(m), \ldots, x_n(m)). \end{cases}$$

Si f es una función y $m \in \mathbb{N}$, f^m indica la m-ésima iteración de f consigo misma **(no confundirla con m-ésima potencia**), es decir,

$$f^m = f \circ f \circ \cdots \circ f \ (m \text{ veces})$$

Así mismo, si f es una biyección, entonces

$$f^{-m} = f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1} \ (m \text{ veces})$$

Convencionalmente, $f^0 = \mathrm{Id}$.

Proposición 2.3.1. (Existencia y unicidad) Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, $f : S \longrightarrow S$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces la única solución del P.V.I. discreto

$$\begin{cases} x(m+1) = f(x(m)) \\ \qquad x(0) = x_0 \end{cases}$$

es la sucesión

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N}_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ m &\longmapsto f^m(x_0) \end{aligned}$$

Demostración. Se procede exactamente igual que en el Teorema 2.1.1. ■

Definición 2.3.2. (Órbita discreta de una función) Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, $f : S \longrightarrow S$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

1. La *semiórbita positiva (dicreta) de f que pasa por x_0* se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^+_{\mathcal{D},f}(x_0) := \{f^m(x_0)\}_{m\in\mathbb{N}_0} = \{x_0\,, f(x_0)\,, f^2(x_0)\,, \dots\}$$

2. Cuando f es biyectiva, la *semiórbita negativa (discreta) de f que pasa por x_0* se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^-_{\mathcal{D},f}(x_0) := \{f^{-m}(x_0)\}_{m\in\mathbb{N}_0} = \{\dots, f^{-2}(x_0)\,, f^{-1}(x_0)\,, x_0\}$$

3. Si f es biyectiva, la *órbita total (discreta) de f que pasa por x_0* se define como el conjunto

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D},f}(x_0) := \{f^m(x_0)\}_{m\in\mathbb{Z}} = \{\dots, f^{-2}(x_0)\,, f^{-1}(x_0)\,, x_0\,, f(x_0)\,, f^2(x_0)\,, \dots\}$$

Observación. Cuando f es biyectiva, se cumple que $\mathcal{O}^-_{\mathcal{D},f}(x_0) = \mathcal{O}^+_{\mathcal{D},f^{-1}}(x_0)$

Definición 2.3.3. (Punto fijo de una función) Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, $f : S \longrightarrow S$ una función, se dice que $p \in S$ es un *punto fijo de f* si $f(p) = p$. Al conjunto de puntos fijos de f se le denota por $\mathrm{Fix}(f)$. Esto es,

$$\mathrm{Fix}(f) := \{x \in S \mid f(x) = x\}$$

Proposición 2.3.2. (Caracterización de puntos fijos) Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f : S \longrightarrow S$ una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $p \in \mathrm{Fix}(f)$
2. $\mathcal{O}^+_{\mathcal{D},f}(p) = \{p\}$
3. La solución del P.V.I asociado a f y p es la sucesión constante definida por $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : x(m) = p$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) : Se cumple que $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : f^m(p) = p$. En efecto, es inmediato para $m = 0$, así que por hipótesis inductiva, se asume que se cumple para m, luego, como p es punto fijo de P,

$$f^{m+1}(p) = f(f^m(p)) = f(p) = p$$

esto es, se cumple para $m + 1$. Por ende, la afirmación anterior es válida y de este modo,

$$\mathcal{O}^+_{\mathcal{D},f}(p) = \{f^m(p)\}_{m\in\mathbb{N}_0} = \{p\}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Ya que la órbita asociada a f y p consiste de un solo punto, usando la Proposición 2.1.1, la solución es la sucesión constante

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : x(m) = f^m(p) = p$$

(3) $\Rightarrow$ (1) : En particular, para $m = 1$, $p = x(1) = f(x(0)) = f(p)$. Por lo tanto, $p \in \mathrm{Fix}(f)$. ■

Definición 2.3.4. (Conjugación de funciones) Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $f \in C^k(U_1)$, $g \in C^k(U_2)$, se dice que *f y g son conjugados* si existe una biyección $h : U_1 \longrightarrow U_2$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

1. Se dice que f y g son *topológicamente conjugados* si $h \in \mathrm{Hom}(U_1, U_2)$.
2. Se dice que f y g son *C^k-conjugados* si $h \in \mathrm{Diff}^k(U_1, U_2)$.

2.4. Linealización alrededor de un punto fijo

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, si $p \in \mathrm{Fix}(f)$, como f es diferenciable en p,

$$\forall\, x \in U : f(x) = f(p) + Df(p)(x - p) + r(x - p)$$

donde $\lim_{x\to p} \frac{r(x-p)}{|x-p|} = 0$. Asumiendo que $p = 0$ mediante el cambio de variable $y = x - p$, al denotar por $A := Df(0)$ se tiene

$$\forall\, y \in U : f(y) = Ay + r(y)$$

Cuando y está cerca de 0, el término lineal Ay predomina sobre $r(y)$. Esto sugiere que las órbitas discretas de $y(m + 1) = f(y(m))$ se asemejan a las de $y(m + 1) = Ay(m)$.

Definición 2.4.1. (Linealización alrededor de un punto fijo) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ y $p \in \mathrm{Fix}(f)$, entonces $A := Df(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es llamado *linealización de f alrededor de p.*

Definición 2.4.2. (Punto fijo hiperbólico) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ se dice que $p \in \mathrm{Fix}(f)$ es un *punto fijo hiperbólico de f* si $A := Df(p) \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$. Además, el *índice de $\mathcal{D}$-estabilidad de f en p* se define como

$$i_{\mathcal{D},f}(p) := i_{\mathcal{D},A}(0)$$

Definición 2.4.3. (Conjuntos estable e inestable) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, $f \in C^k(U)$ y $p \in \mathrm{Fix}(f)$ un punto fijo hiperbólico, entonces

1. El *conjunto $\mathcal{D}$-estable de f en p* se define como

$$W^s_{\mathcal{D},f}(p) = \{x \in U \mid \lim_{m\to\infty} f^m(x) = p\}$$

Luego, el *conjunto $\mathcal{D}$-estable local de f en p de tamaño $r > 0$* está definido por

$$W^s_{\mathcal{D},f}(p, r) = \{x \in U \mid \mathcal{O}^+_{\mathcal{D},f}(x) \subseteq B_r(p)\,,\ \lim_{m\to\infty} f^m(x) = p\}$$

2. Si f es un difeomorfismo, el *conjunto $\mathcal{D}$-inestable de f en p* se define como

$$W^u_{\mathcal{D},f}(p) = \{x \in U \mid \lim_{m\to\infty} f^{-m}(x) = p\}$$

Luego, el *conjunto $\mathcal{D}$-inestable local de f en p de tamaño $r > 0$* está definido por

$$W^u_{\mathcal{D},f}(p, r) = \{x \in U \mid \mathcal{O}^-_{\mathcal{D},f}(x) \subseteq B_r(p)\,,\ \lim_{m\to\infty} f^{-m}(x) = p\}$$

Observación. Si f es un difeomorfismo, entonces $W^u_{\mathcal{D},f}(p) = W^s_{\mathcal{D},f^{-1}}(p)$ y $W^u_{\mathcal{D},f}(p,r) = W^s_{\mathcal{D},f^{-1}}(p,r)$.

Proposición 2.4.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^k sobre su imagen, entonces

1. $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : f^{-m}(W^s_{\mathcal{D},f}(p)) \subseteq W^s_{\mathcal{D},f}(p)$
2. $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : f^{m}(W^u_{\mathcal{D},f}(p)) \subseteq W^u_{\mathcal{D},f}(p)$
3. $W^s_{\mathcal{D},f}(p) = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(W^s_{\mathcal{D},f}(p,r))$
4. $W^u_{\mathcal{D},f}(p) = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{m}(W^u_{\mathcal{D},f}(p,r))$

Demostración. Procediendo por partes,

1. Sea $m_0 \in \mathbb{N}_0$ fijo pero arbitrario, si $x \in f^{-m_0}(W^s_{\mathcal{D},f}(p))$, entonces $f^{m_0}(x) \in W^s_{\mathcal{D},f}(p)$ y luego
$$\lim_{m\to\infty} f^m(x) = \lim_{m\to\infty} f^{m-m_0}(f^{m_0}(x)) = p$$
Esto es, $x \in W^s_{\mathcal{D},f}(p)$. Por lo tanto, $f^{-m_0}(W^s_{\mathcal{D},f}(p)) \subseteq W^s_{\mathcal{D},f}(p)$.

2. Sea $m_0 \in \mathbb{N}_0$ fijo pero arbitrario, entonces por la observación anterior,
$$f^{m_0}(W^u_{\mathcal{D},f}(p)) = f^{m_0}(W^s_{\mathcal{D},f^{-1}}(p)) \subseteq W^s_{\mathcal{D},f^{-1}}(p) = W^u_{\mathcal{D},f}(p)$$

3. $(\subseteq)$: Sea $x \in W^s_{\mathcal{D},f}(p)$, entonces $\lim_{m\to\infty} f^m(x) = p$. Por definición de límite, para $r > 0$,
$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}_0, \forall\, m \geq m_0 : f^m(x) \in B_r(p)$$
Esto equivale a decir que $\mathcal{O}^+_{\mathcal{D},f}(f^{m_0}(x)) \subseteq B_r(p)$. Asimismo,
$$\lim_{m\to\infty} f^m(f^{m_0}(x)) = \lim_{m\to\infty} f^{m+m_0}(x) = p$$
De este modo, $f^{m_0}(x) \in W^s_{\mathcal{D},f}(p,r)$, i.e., $x \in f^{-m_0}(W^s_{\mathcal{D},f}(p,r)$ para algún $m_0 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $W^s_{\mathcal{D},f}(p) \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(W^s_{\mathcal{D},f}(p,r))$.
$(\supseteq)$: En primer lugar, $W^s_{\mathcal{D},f}(p,r) \subseteq W^s_{\mathcal{D},f}(p)$. Luego, del ítem 1.,
$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : f^{-m}(W^s_{\mathcal{D},f}(p,r)) \subseteq f^{-m}(W^s_{\mathcal{D},f}(p)) \subseteq W^s_{\mathcal{D},f}(p)$$
Por lo tanto, $\bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(W^s_{\mathcal{D},f}(p,r)) \subseteq W^s_{\mathcal{D},f}(p)$.

4. De la misma manera, usando la observación anterior y el ítem 3.,
$$W^u_{\mathcal{D},f}(p) = W^s_{\mathcal{D},f^{-1}}(p) = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m(W^s_{\mathcal{D},f^{-1}}(p,r)) = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m(W^u_{\mathcal{D},f}(p,r))$$

■

Teorema 2.4.1. (Grobman-Hartman para difeomorfismos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen, si $0 \in \mathrm{Fix}(f)$ un punto fijo hiperbólico, entonces f es local y topológicamente conjugado a $A = Df(0)$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Hartman [5], Sotomayor [16], Katok [8] o De Melo [13]. ■

Teorema 2.4.2. (Teorema de la Variedad Estable para puntos fijos hiperbólicos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto[1] y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen, si $p \in \text{Fix}(f)$ es un punto fijo hiperbólico de f, $A = Df(p) \in \text{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ y $i_{\mathcal{D},f}(p) = m$, entonces existe $r > 0$ tal que

1. $W^s_{\mathcal{D},f}(p, r)$ es una superficie de clase C^k y dimensión m que contiene a p y es f-invariante.

2. $W^u_{\mathcal{D},f}(p, r)$ es una superficie de clase C^k y dimensión $n - m$ que contiene a p y es f^{-1}-invariante.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Hartman [5], Sotomayor [16], Katok [8] o De Melo [13]. ■

Definición 2.4.4. (Estabilidad en el sentido de Lyapunov) Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, $f : S \longrightarrow S$ una función y $p \in \text{Fix}(f)$,

1. p es un *punto fijo estable de* f si

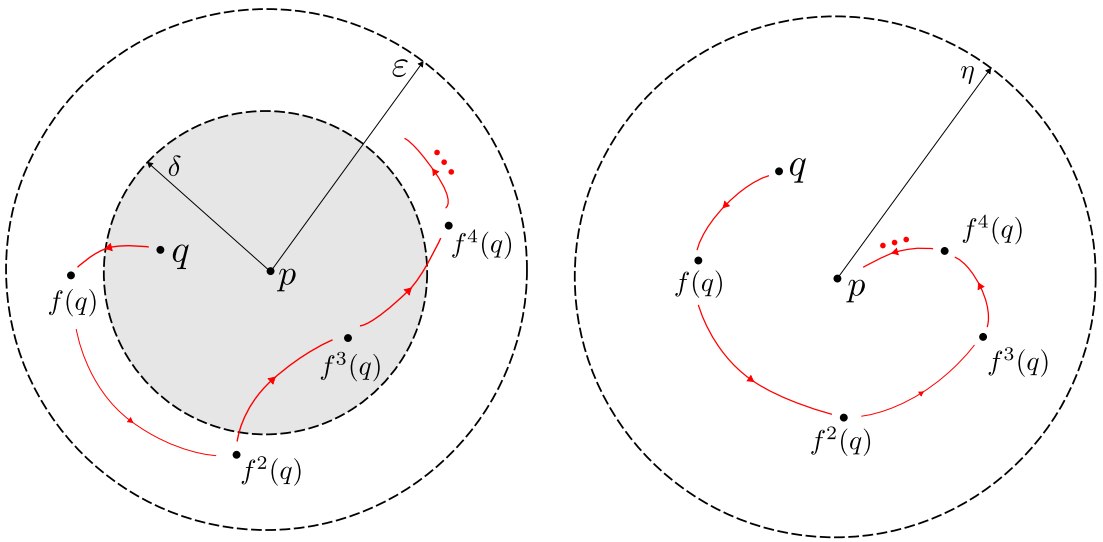
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in S \cap B_\delta(p) : \mathcal{O}^+_{\mathcal{D},f}(x) \subseteq B_\varepsilon(p)$$

2. p es un *punto fijo atractor de* f si

$$\exists\, r > 0, \forall\, x \in S \cap B_r(p) : \lim_{m\to\infty} f^m(x) = p$$

3. p es un *punto fijo inestable de* f si p no es un punto fijo estable de f.

4. p es un *punto fijo asintóticamente estable de* f si p es un punto fijo estable y atractor de f.



Punto fijo estable Punto fijo atractor

Figura 2.1: Estabilidad discreta en el sentido de Lyapunov.

[1]El teorema también es válido si el espacio ambiente es una superficie en lugar de un abierto en $\mathbb{R}^n$. Este argumento será aplicado a la función de Poincaré.

Proposición 2.4.2. (Estabilidad según Lyapunov para matrices $\mathcal{D}$-hiperbólicas) Sea $A \in \mathrm{Hip}_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$, entonces

1. Si $i_{\mathcal{D},A}(0) = n$, entonces $0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo asintóticamente estable de A.
2. Si $i_{\mathcal{D},A}(0) < n$, entonces $0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo inestable de A.

Demostración. Procediendo por partes:

1. Si $i_{\mathcal{D},A}(0) = n$, entonces $0 \in \mathbb{R}^n$ es un $\mathcal{D}$-atractor de A por el Teorema 2.2.1. En consecuencia, 0 es un atractor de A en el sentido de Lyapunov. Para la estabilidad, se sigue del tercer item de este teorema que

$$\exists\, \rho > 1, \exists\, K \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, t \geq 0 : |A^m x| \leq K\rho^{-m}|x|$$

Dado $\varepsilon > 0$, se escoge $\delta := \frac{\varepsilon}{K} > 0$. Como $\rho > 1$, se tiene para $m \in \mathbb{N}_0$ que $\rho^{-m} \leq 1$, y en consecuencia

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall\, m \in \mathbb{N}_0 : |A^m x| \leq K\rho^{-m}|x| < \rho^{-m}\varepsilon \leq \varepsilon$$

Esto es, si $x \in B_\delta(0)$, entonces $\mathcal{O}^+_{\mathcal{D},A}(x) \subseteq B_\varepsilon(0)$. Por ende, 0 es una punto fijo estable de A.

2. En cambio, si $i_{\mathcal{C},A}(0) = m < n$, entonces $E^u_{\mathcal{D},A}(0)$ tiene dimensión $n - m > 0$ debido a la Proposición 2.2.2. Asimismo, del cuarto item de esta proposición se sabe que

$$\exists\, \rho > 1, \exists\, K \geq 1, \forall\, m \in \mathbb{N}_0, \forall\, x \in E^u_{\mathcal{D},A}(0) : |A^m x| \geq K^{-1}\rho^m|x|$$

Se probará directamente que 0 es un punto fijo inestable de A. Para ello, se escoge $\varepsilon_0 := 1 > 0$ y sea $\delta > 0$. Como $\rho > 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} \rho^m = \infty$, resulta que

$$\exists\, m_\delta \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_\delta : \rho^m \geq \frac{2K}{\delta}$$

Ahora, si $v \in E^u_{\mathcal{D},A}(0) - \{0\}$, se escoge $x_\delta := \frac{\delta}{2|v|} v \in E^u_{\mathcal{D},A}(0) - \{0\}$ que cumple $|x_\delta| = \frac{\delta}{2} < \delta$ y

$$|A^{m_\delta} x_\delta| \geq K^{-1}\rho^{m_\delta}|x_\delta| \geq K^{-1} \cdot \frac{2K}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = 1$$

En resumen, $\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, m_\delta \in \mathbb{N}, \exists\, x_\delta \in B_\delta(0) : A^{m_\delta} x_\delta \notin B_{\varepsilon_0}(0)$. Por lo tanto, 0 es un punto fijo inestable de A.

■

Proposición 2.4.3. Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $f \in C^k(U_1)$, $Y \in C^k(U_2)$ y $h : U_1 \longrightarrow U_2$ una conjugación topológica, entonces $p \in U$ es un punto fijo (asintóticamente) estable de X si y solo si $h(p)$ es un punto fijo (asintóticamente) estable de Y.

Demostración. Procediendo por partes:

1. **Estabilidad:** ($\Rightarrow$) : Sea $\varepsilon > 0$, ya que $U_2 \cap B_\varepsilon(h(p))$ es abierto en U_2 y h es un homeomorfismo, $h^{-1}(U_2 \cap B_\varepsilon(h(p)))$ es un abierto en U_1 que contiene a p, entonces

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : U_1 \cap B_{\varepsilon_0}(p) \subseteq h^{-1}(U_2 \cap B_\varepsilon(h(p)))$$

Ahora, como p es un punto fijo estable de X,

$$\exists\, \delta_0 > 0, \forall\, x \in U_1 \cap B_{\delta_0}(p), \forall\, m \in \mathbb{N}_0 : f^m(x) \in U_1 \cap B_{\varepsilon_0}(p)$$

Dado que $U_1 \cap B_{\delta_0}(p)$ es abierto en U_1 y h es un homeomorfismo, $h(U_1 \cap B_{\delta_0}(p))$ es un abierto en U_2 que contiene a $h(p)$, entonces

$$\exists\, \delta > 0 : U_2 \cap B_\delta(h(p)) \subseteq h(U_1 \cap B_{\delta_0}(p))$$

Si $q \in U_2 \cap B_\delta(h(p))$, entonces $q = h(x)$ para un único $x \in U_1 \cap B_{\delta_0}(p))$, además

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : f^m(x) \in U_1 \cap B_{\varepsilon_0}(p) \subseteq h^{-1}(U_2 \cap B_\varepsilon(h(p)))$$

Sin embargo, puesto que h es una conjugación topológica,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : h(f^m(x)) = g^m(h(x)) = g^m(q) \in U_2 \cap B_\varepsilon(h(p))$$

Por ende, $h(p)$ es un punto fijo estable de Y.

($\Leftarrow$) : Es análogo al paso anterior considerando a h^{-1} como conjugación topológica.

2. **Atracción:** ($\Rightarrow$) : Dado que p es un punto fijo atractor de X,

$$\exists\, \eta_0 > 0, \forall\, x \in U_1 \cap B_{\eta_0}(p) : \lim_{m\to\infty} f^m(x) = p$$

Como $U_1 \cap B_{\eta_0}(p)$ es abierto en U_1 y h es un homeomorfismo, $h(U_1 \cap B_{\eta_0}(p))$ es un abierto en U_2 que contiene a $h(p)$, entonces

$$\exists\, \eta > 0 : U_2 \cap B_\eta(h(p)) \subseteq h(U_1 \cap B_{\eta_0}(p))$$

Si $q \in U_2 \cap B_\eta(h(p))$, entonces $q = h(x)$ para un único $x \in U_1 \cap B_{\eta_0}(p)$, luego, puesto que h es una conjugación topológica,

$$\lim_{m\to\infty} g^m(q) = \lim_{m\to\infty} g^m(h(x)) = \lim_{m\to\infty} h(f^m(x)) = h(p)$$

Por ende, $h(p)$ es un punto fijo atractor de Y.

($\Leftarrow$) : Es análogo al paso anterior considerando a h^{-1} como conjugación topológica.

■

Corolario 2.4.1. (Estabilidad según Lyapunov para puntos fijos hiperbólicos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $f \in \mathrm{Diff}^k(U)$ y $0 \in \mathrm{Fix}(X)$ un punto fijo hiperbólico de f, entonces

1. Si $i_{\mathcal{D},f}(0) = n$, entonces 0 es un punto fijo asintóticamente estable de f.
2. Si $i_{\mathcal{D},f}(0) < n$, entonces 0 es un punto fijo inestable de f.

Demostración. Primero, $A = Df(0)$ es una matriz $\mathcal{D}$-hiperbólica e invertible con índice de $\mathcal{D}$-estabilidad $i_{\mathcal{D}.A}(0)$. Asimismo, del Teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismos (Teorema 2.4.1), f y A son topológicamente conjugados en un entorno de $0 \in U$.

1. Si $i_{\mathcal{D},f}(0) = n$, entonces $i_{\mathcal{D}.A}(0) = n$. Esto implica por la Proposición 2.4.2 que 0 es un punto fijo asintóticamente estable de A, y en virtud de la Proposición 2.4.3, 0 es un punto fijo asintóticamente estable de f.
2. En cambio, cuando $i_{\mathcal{D},f}(0) < n$, se tiene que $i_{\mathcal{D}.A}(0) < n$. Esto implica por la Proposición 2.4.2 que 0 es un punto fijo inestable de A, y en virtud de la Proposición 2.4.3, 0 es un punto fijo inestable de f.

■

Proposición 2.4.4. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $f \in C^1(I)$ y $x_0 \in \mathrm{Fix}(f)$,

1. Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo asintóticamente estable de f.
2. Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo inestable de f.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Elaydi [4]. ■

Capítulo 3

Existencia global de soluciones

En sistemas dinámicos, interesa el comportamiento de las trayectorias en un largo plazo, lo cual requiere que existan para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Este capítulo aborda aquellos campos vectoriales cuyas soluciones se definen en toda la recta real. Asimismo, mediante reparametrizaciones, cualquier sistema autónomo continuo puede transformarse en uno completo preservando su configuración orbital.

3.1. Campos vectoriales completos

Definición 3.1.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, se dice que X es un *campo vectorial completo en* U si

$$\forall\, x \in U : I(X, x) = \mathbb{R}$$

Observación. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ es completo en U y D_X es el dominio del flujo generado por X, entonces $D_X = \mathbb{R} \times U$. Recíprocamente, si $D_X = \mathbb{R} \times U$, entonces X es completo en U. En efecto, dado $x \in U$, si $t \in \mathbb{R}$, entonces $(t, x) \in \mathbb{R} \times U = D_X$, después $t \in I(X, x)$. De este modo, $I(X, x) = \mathbb{R}$ para cualquier $x \in U$.

Definición 3.1.2. Si X es un campo completo en U, para $t \in \mathbb{R}$, se define el *flujo asociado a* X *en tiempo* t como

$$\begin{aligned} \varphi_t : U &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto \varphi_X(t, x) \end{aligned}$$

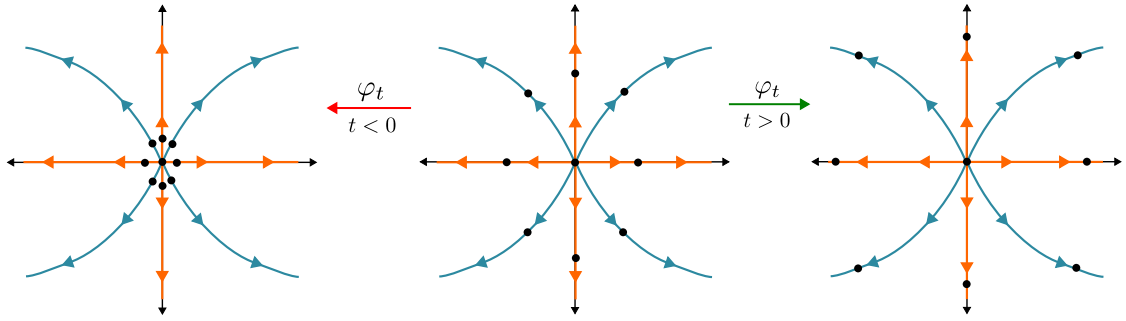


Figura 3.1: Flujo asociado a un campo vectorial completo.

Como ilustra la Figura 3.1, el operador φ_t traslada cada punto $x \in U$ a lo largo de su propia trayectoria, avanzando $(t > 0)$ o retrocediendo $(t < 0)$ t unidades de tiempo en el flujo generado por X. Puesto que el flujo φ_X es una función de clase C^k (Proposición 1.1.8), φ_t también será de clase C^k. Por otro lado, del Teorema 1.1.9,

1. $\varphi_0 = \mathrm{Id}_U$
2. $\forall\, t, s \in \mathbb{R} : \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$
3. $\forall\, t \in \mathbb{R} : (\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$

Este último item muestra que $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de clase C^k definidos en U. Asimismo, puede comprobarse que el flujo en tiempo t del campo $-X$ es $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

Observación. En cuanto a la derivada de φ_t en $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, dado que $\varphi_t(x) = \varphi_X(t, x)$, resulta que

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\} : \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \varphi_X}{\partial x_j}(t, x)$$

Si $D_x\varphi_X(t, x)$ representa la *derivada parcial del flujo respecto a sus variables espaciales*, entonces para $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n : D\varphi_t(x)(v) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \frac{\partial \varphi_X}{\partial x_j}(t, x) = D_x\varphi_X(t, x)(v)$$

Esto es, $D\varphi_t(x) = D_x\varphi_X(t, x)$ para cualquier $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$.

La derivada del flujo en tiempo t traslada vectores tangentes a lo largo de cada trayectoria: El vector $X(x)$ en el punto x es "empujado" por $D\varphi_t(x)$ hasta convertirse en el vector $X(\varphi_X(t, x))$ en el punto $\varphi_X(t, x)$ (Figura 3.2).

Lema 3.1.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^k(U)$ un campo completo en U, entonces

$$\forall\, (t, x) \in \mathbb{R} \times U : D\varphi_t(x)(X(x)) = X(\varphi_X(t, x))$$

Demostración. Fijando $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$, se sigue de la propiedad fundamental del flujo (Proposición 1.1.9) que

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : \varphi_X(s, \varphi_t(x)) = \varphi_X(s + t, x) = \varphi_t(\varphi_X(s, x))$$

Derivando respecto a s, se obtiene luego de usar la regla de la cadena

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : X(\varphi_t(x)) = \frac{\partial \varphi_X}{\partial s}(s, \varphi_t(x)) = D_x\varphi_X(t, x)\left(\frac{\partial \varphi_X}{\partial s}(s, x)\right) = D_x\varphi_X(t, x)(X(\varphi_X(s, x))$$

En particular, para $s = 0$, se concluye que $X(\varphi_X(t, x)) = D\varphi_t(x)(X(x))$. ■

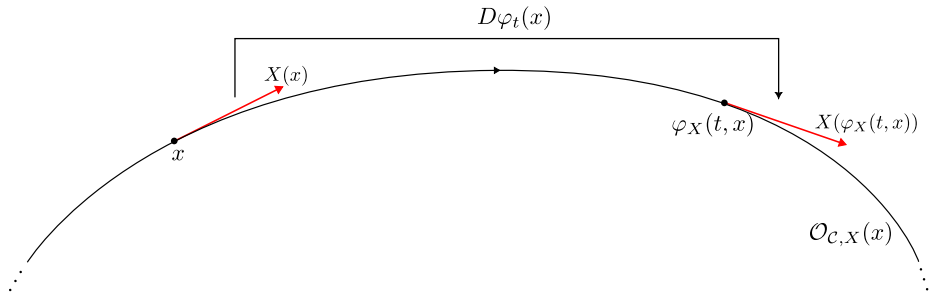


Figura 3.2: Los vectores tangentes son trasladados por la derivada del flujo en tiempo t.

Proposición 3.1.1. (Derivada total del flujo) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^k(U)$ un campo completo en U, si $(t,x) \in \mathbb{R} \times U$, entonces

$$\forall\ (s,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : D\varphi_X(t,x)(s,v) = D_x\varphi_X(t,x)(sX(x)+v)$$

Demostración. Sean $(s,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces usando la observación anterior y el Lema 3.1.1,

$$\begin{aligned} D\varphi_X(t,x)(s,v) &= s\frac{\partial \varphi_X}{\partial t}(t,x) + \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \frac{\partial \varphi_X}{\partial x_j}(t,x) \\ &= sX(\varphi_X(t,x)) + \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}(x) \\ &= s\, D_x\varphi_X(t,x)(X(x)) + D_x\varphi_X(t,x)(v) \\ &= D_x\varphi_X(t,x)(sX(x)+v) \end{aligned}$$

y esto es válido para cualquier $(t,x) \in \mathbb{R} \times U$. ■

Teorema 3.1.1. Si $X \in \mathcal{X}^k(\mathbb{R}^n)$ es un campo acotado, entonces X es completo en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Perko [14]. ■

Teorema 3.1.2. Si $X \in \mathcal{X}^k(\mathbb{R}^n)$ es un campo vectorial Lipschitz, entonces X es completo en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Sotomayor [16]. ■

3.2. Equivalencia de campos vectoriales

Definición 3.2.1. Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $Y \in \mathcal{X}^k(V)$, se dice que X *es topológicamente equivalente (respectivamente C^r-equivalente) a* Y si existen $h \in \mathrm{Hom}(U,V)$ (respectivamente $h \in \mathrm{Diff}^r(U,V)$) y $\tau : D_X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

1. $\forall\ (t,x) \in D_X : \tau(t,x) \in I(Y, h(x))$
2. Para $x \in U$, la función

$$\begin{aligned} \tau_x : I(X,x) &\longmapsto I(Y,h(x)) \\ t &\longmapsto \tau(t,x) \end{aligned}$$

   es continua y estrictamente creciente en $I(X,x)$.
3. $\forall\ (t,x) \in D_X : h(\varphi_X(t,x)) = \varphi_Y(\tau(t,x), h(x))$

Observación. En contraste con las conjugaciones topológicas (o C^k), las equivalencias topólogicas (o C^k) no necesariamente preservan el tiempo: el homeomorfismo (o difemorfismo) h y la función τ permiten que las órbitas tengan la misma forma geométrica pero pueden recorrerse a distinta velocidad.

Teorema 3.2.1. Sean $X \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned} Y : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{X(x)}{1+|X(x)|} \end{aligned}$$

entonces $Y \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$, es completo en $\mathbb{R}^n$ y topológicamente equivalente a X.

Demostración. Procediendo por partes:

1. $Y \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$**:** Es suficiente mostrar que la función

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\longmapsto \frac{y}{1+|y|} \end{aligned}$$

es de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. Al denotar $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ por sus coordenadas,

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n : \phi_i(y) = \frac{y_i}{1+|y|}$$

Derivando cada función coordenada respecto a cada una de sus variables, se obtiene

$$\forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\}, \forall\, y \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(y) = \frac{\delta_{ij}}{1+|y|} - \frac{y_i y_j}{|y|(1+|y|)^2}$$

y son continuas en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Por otro lado, para comprobar si ϕ es diferenciable en $0 \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \phi(h) = \frac{h}{1+|h|} = h - \frac{|h|h}{1+|h|} = \phi(0) + Ih + r(h)$$

donde

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n - \{0\} : r(h) := -\frac{|h|h}{1+|h|} \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = \lim_{h\to 0} -\frac{h}{1+|h|} = 0$$

En consecuencia, ϕ es diferenciable en $0 \in \mathbb{R}^n$ y $D\phi(0) = I$. Es decir,

$$\forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\} : \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(0) = \delta_{ij}$$

Falta mostrar que $\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}$ sea continua en $0 \in \mathbb{R}^n$ para todo $i,j \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\forall\, y \neq 0 : \frac{|y_i y_j|}{|y|} \leq \frac{|y|^2}{|y|} = |y| \quad \Rightarrow \quad \lim_{y\to 0} \frac{y_i y_j}{|y|} = 0$$

entonces cuando $y \to 0$, se tiene

$$\forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\} : \lim_{y\to 0} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(y) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\delta_{ij}}{1+|y|} - \frac{y_i y_j}{|y|(1+|y|)^2} \right) = \delta_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(0)$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{y\to 0} D\phi(y) = I = D\phi(0)$ y esto concluye que $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Ahora, resulta que $Y = \phi \circ X$ y $X \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$, pero la composición de funciones de clase C^1 sigue siendo una función de clase C^1. Por ende, $Y \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$.

2. Y **es completo en** $\mathbb{R}^n$**:** Ahora, se observa que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : |Y(x)| = \frac{|X(x)|}{1+|X(x)|} \leq 1$$

Es decir, Y es un campo vectorial acotado en $\mathbb{R}^n$, lo cual implica por el Teorema 3.1.1 que Y es un campo vectorial completo en $\mathbb{R}^n$.

3. Y **es topológicamente equivalente a** X**:** Los flujos generados por X y Y son respectivamente $\varphi_X : D_X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\varphi_Y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (Y es completo en $\mathbb{R}^n$), entonces la siguiente función está bien definida:

$$\begin{aligned} \tau : D_X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto \int_0^t (1 + |X(\varphi_X(\xi,x))|) d\xi \end{aligned}$$

De este modo,

$$\forall\, t \in I(X,x_0) : \tau_{x_0}(t) = \int_0^t (1 + |X(\varphi_X(\xi,x))|)\, d\xi = t + \int_0^t |X(\varphi_X(\xi,x))|\, d\xi$$

Ya que $X \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi_{(X,x_0)}$ es continua en $I(X,x_0)$, el integrando es una función continua, y gracias al Primer Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\forall\, t \in I_X(x_0) : \frac{d\tau_{x_0}}{dt}(t) = 1 + |X(\varphi_{(X,x_0)}(t))| \geq 1 > 0$$

Esto implica que τ_{x_0} es continua y estrictamente creciente en $I(X,x_0)$. Para abreviar, $\omega_- = \omega_-(X,x_0)$ y $\omega_+ = \omega_+(X,x_0)$. Luego, se tiene gracias al Teorema del Valor Intermedio y a la monotonía estricta de τ_{x_0},

$$\tau_{x_0}(I(X,x_0)) = \left(\lim_{t \to \omega_-^+} \tau_{x_0}(t),\ \lim_{t \to \omega_+^-} \tau_{x_0}(t) \right)$$

Afirmación: $\lim\limits_{t \to \omega_-^+} \tau_{x_0}(t) = -\infty,\ \lim\limits_{t \to \omega_+^-} \tau_{x_0}(t) = +\infty$

En efecto, dado que el integrando es una función no negativa,

$$\forall\, t \geq 0 : \tau_{x_0}(t) \geq t \quad , \quad \forall t \leq 0 : \tau_{x_0}(t) \leq t$$

Caso 1 ($\omega_+ = +\infty$): Sea $M > 0$, entonces para $t \geq M$, $\tau_{x_0}(t) \geq t \geq M$. Por ende, $\lim\limits_{t \to +\infty} \tau_{x_0}(t) = +\infty$.

Caso 2 ($\omega_- = -\infty$): Sea $M < 0$, entonces para $t \leq M$, $\tau_{x_0}(t) \leq t \leq M$. Por ende, $\lim\limits_{t \to -\infty} \tau_{x_0}(t) = -\infty$.

Caso 3 ($\omega_+ \in \mathbb{R}$): Como hipótesis auxiliar, se supone que

$$\exists\, M > 0, \forall\, t \in [0,\omega_+) : \int_0^t |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi)|\, d\xi \leq M$$

Puesto que φ_{X,x_0} es solución del P.V.I. asociado a X y x_0,

$$\forall\, t \in [0,\omega_+) : |\varphi_{(X,x_0)}(t) - x_0| \leq \int_0^t |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))|\, d\xi \leq M$$

Esto es, $\varphi_{(X,x_0)}([0,\omega_+)) \subseteq B_M[x_0]$. Sin embargo, $B_M[x_0]$ es compacto, así que debido al Corolario 1.1.3, $\omega_+ = +\infty$, lo cual contradice que $\omega_+ \in \mathbb{R}$. Por reducción al absurdo,

$$\forall\, M > 0, \exists\, t_M \in [0,\omega_+) : \int_0^{t_M} |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))|\, d\xi > M$$

Sea $M > 0$, escogiendo $\delta := \omega_+ - t_M > 0$ resulta que si $t \in (\omega_+ - \delta, \omega_+) = (t_M, \omega_+)$, entonces

$$\tau_{x_0}(t) = t + \int_0^t |X(\varphi_X(\xi, x))|\, d\xi \geq \int_0^{t_M} |X(\varphi_X(\xi, x))|\, d\xi > M$$

En otras palabras, $\lim\limits_{t \to \omega_+^-} \tau_{x_0}(t) = +\infty$.

Caso 4 ($\omega_- \in \mathbb{R}$): Como hipótesis auxiliar, se supone que

$$\exists\, M < 0, \forall\, t \in (\omega_-, 0] : \int_0^t |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi)|\, d\xi \geq M$$

Puesto que φ_{X,x_0} es solución del P.V.I. asociado a X y x_0,

$$\forall\, t \in (\omega_-, 0] : |\varphi_{(X,x_0)}(t) - x_0| \leq \int_t^0 |X(\varphi_{X,x_0}(\xi))|\, d\xi \leq -M =: R$$

Esto es, $\varphi_{X,x_0}((\omega_-, 0]) \subseteq B_R[x_0]$. Sin embargo, $B_R[x_0]$ es compacto, así que debido al Corolario 1.1.3, $\omega_- = -\infty$, lo cual contradice que $\omega_- \in \mathbb{R}$. Por reducción al absurdo,

$$\forall\, M < 0, \exists\, t_M \in (\omega_-, 0] : \int_0^{t_M} |X(\varphi_{X,x_0}(\xi))|\, d\xi < M$$

Sea $M > 0$, escogiendo $\delta := t_M - \omega_- > 0$ resulta que si $t \in (\omega_-, \omega_- + \delta) = (\omega_-, t_M)$, entonces

$$\tau_{x_0}(t) = t + \int_0^t |X(\varphi_X(\xi, x))|\, d\xi \leq \int_0^{t_M} |X(\varphi_X(\xi, x))|\, d\xi < M$$

En otras palabras, $\lim\limits_{t \to \omega_-^+} \tau_{x_0}(t) = -\infty$.

En cualquier caso, $\tau_{x_0}(I(X, x_0)) = \mathbb{R}$, i.e., τ_{x_0} es sobreyectiva. Además, se tenía que τ_{x_0} es continua y estrictamente creciente en $I(X, x_0)$, lo cual garantiza que τ_{x_0} sea inyectiva. Por el Teorema de la Función Inversa, existe $\sigma_{x_0} := (\tau_{x_0})^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow I(X, x_0)$ diferenciable en $\mathbb{R}$, y es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ pues τ_{x_0} lo es. Más aún,

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : \frac{d\sigma_{x_0}}{ds}(s) = \left[\frac{d\tau_{x_0}}{dt}(\sigma_{x_0}(s))\right]^{-1} = \frac{1}{1 + |X(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)))|}$$

entonces se puede definir la función

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, x_0) &\longmapsto \sigma_{x_0}(s) = (\tau_{x_0})^{-1}(s) \end{aligned}$$

A continuación, se define

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto \varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)) \end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena, resulta que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\Psi}{ds}(s) = \frac{d\varphi_{(X,x_0)}}{dt}(\sigma_{x_0}(s))\frac{d\sigma_{x_0}}{ds}(s) = \frac{X(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)))}{1 + |X(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)))|} = Y(\Psi(s))$$

Asimismo, $\tau_{x_0}(0) = 0$, entonces $\sigma_{x_0}(0) = 0$,

$$\Psi(0) = \varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(0)) = \varphi_{(X,x_0)}(0) = x_0$$

Esto muestra que Ψ es solución del P.V.I. asociado a Y y x_0, pero $\varphi_{(Y,x_0)}$ es la única solución, entonces $\Psi = \varphi_{(Y,x_0)}$, i.e.,

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : \varphi_{(Y,x_0)}(s) = \varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s))$$

En resumen, se encontraron $h := \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ y $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

- $\forall\, (s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \sigma(s,x) \in I(X,x)$
- Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_x : \mathbb{R} \longrightarrow I(X,x)$ es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
- $\forall\, (s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \varphi_Y(s,x) = \varphi_X(\sigma(s,x),x)$

Por lo tanto, Y es topológicamente equivalente a X.

■

Ejemplo 3.2.1. (Perko [14]) Para ilustrar el Teorema 3.2.1, se considera el campo vectorial

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

este es un campo de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, entonces del Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 1.1.7), para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución maximal $\varphi_{(X,x_0)} : I(X,x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$. Como $\mathrm{Sing}(X) = \{0\}$, de la Proposición 1.1.11 se sigue que $I(X,0) = \mathbb{R}$ y $\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_{(X,0)}(t) = 0$. Ahora, para cualquier $x_0 \neq 0$, mediante el *método de variables separables*,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) = x^2(t) \implies \int_0^t \frac{d(x(s))}{x^2(s)} = \int_0^t ds \implies \left[-\frac{1}{x(s)}\right]_0^t = t \\ \implies \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t \implies x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \end{aligned}$$

pero esta función es diferenciable en $\mathbb{R}$ excepto en $\frac{1}{x_0}$, así que la elección del intervalo maximal dependerá del signo de x_0. En resumen,

$$\varphi_{(X,x_0)}(t) = \begin{cases} 0, & x_0 = 0 \\ \frac{x_0}{1 - x_0 t}, & x_0 \neq 0 \end{cases}$$

y su intervalo maximal es

$$I(X,x_0) = \begin{cases} \mathbb{R}, & x_0 = 0 \\ (-\infty, \frac{1}{x_0}), & x_0 > 0 \\ (\frac{1}{x_0}, +\infty), & x_0 < 0 \end{cases}$$

Sin embargo, transformando el campo vectorial

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : Y(x) := \frac{X(x)}{1 + |X(x)|} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{y^2}{1+y^2} \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución maximal $\varphi_{(Y,x_0)} : I(Y,x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$. Como $\mathrm{Sing}(Y) = \{0\}$, $I(X,x_0) = \mathbb{R}$ y $\forall\ t \in \mathbb{R} : \varphi_{(Y,x_0)}(t) = 0$. Ahora, si $x_0 \neq 0$, entonces mediante el *método de variables separables*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) = \frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} &\implies \int_0^t \left(1 + \frac{1}{y^2(s)}\right) d(y(s)) = \int_0^t ds \implies \left[y(s) - \frac{1}{y(s)}\right]_0^t = t \\ &\implies y(t) - \frac{1}{y(t)} - x_0 + \frac{1}{x_0} = t \implies y^2(t) - \left(t + x_0 - \frac{1}{x_0}\right) y(t) - 1 = 0 \\ &\implies y(t) = \frac{1}{2}\left(t + x_0 - \frac{1}{x_0}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(t + x_0 - \frac{1}{x_0}\right)^2 + 4} \end{aligned}$$

esta función es diferenciable en $\mathbb{R}$ y la elección de la solución dependerá del signo de x_0. De este modo,

$$\varphi_{(Y,x_0)}(t) = \begin{cases} 0 & , x_0 = 0 \\ \frac{1}{2}\left(t + x_0 - \frac{1}{x_0}\right) + \frac{|x_0|}{2x_0}\sqrt{\left(t + x_0 - \frac{1}{x_0}\right)^2 + 4} & , x_0 \neq 0 \end{cases}$$

y su intervalo maximal es

$$\forall\ x_0 \in \mathbb{R} : I(Y,x_0) = \mathbb{R}$$

Además la reparametrización del tiempo está dada por

$$\forall\ (t,x_0) \in D_X : \tau(t,x_0) = \int_0^t \left[1 + \left(\frac{x_0}{1-x_0 s}\right)^2\right] ds = \left[s + \frac{x_0}{1-x_0 s}\right]_0^t = t + \frac{x_0^2 t}{1-x_0 t}$$

Ejemplo 3.2.2. (Perko [14]) Sean $a, b > 0$ y el campo $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$X(x,y) := \left(-a^2 y + x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), b^2 x + y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right)$$

Al tratarse de un campo de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$, para cualquier $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = -a^2 y + x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = b^2 x + y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), & y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

admite una única solución maximal $\varphi_{(X,x_0,y_0)} : I(X,x_0,y_0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Tras comprobarse que $\mathrm{Sing}(X) = \{(0,0)\}$, se sigue de la Proposición 1.1.11 que $I(X,0,0) = \mathbb{R}$ y $\forall\ t \in \mathbb{R} : \varphi_{(X,0,0)}(t) = (0,0)$. Para $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, existen únicos $r_0 > 0$ y $\theta_0 \in [0,2\pi)$ tales que $x_0 = a r_0 \cos(\theta_0)$ y $y_0 = b r_0 \sin(\theta_0)$, por este motivo es conveniente realizar el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares:

$$x = ar\cos(\theta) \quad , \quad y = br\sin(\theta)$$

Derivando respecto a t y usando la regla del producto,

$$\begin{cases} a\cos(\theta)\dot{r} - ar\sin(\theta)\dot{\theta} = \dot{x} \\ b\sin(\theta)\dot{r} + br\cos(\theta)\dot{\theta} = \dot{y} \end{cases}$$

y resolviendo este sistema algebraico en las variables $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$,

$$r\dot{r} = \frac{x\dot{x}}{a^2} + \frac{y\dot{y}}{b^2} \quad , \quad r^2\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{ab} \tag{3.2}$$

Como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$,

$$\begin{cases} r\dot{r} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = r^2(1 - r^2) \\ r^2\dot{\theta} = \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{ab} = \frac{a^2b^2r^2}{ab} = abr^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = ab \end{cases}$$

y de este modo, el P.V.I. (3.1) se transforma en

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), & r(0) = r_0 \\ \dot{\theta} = ab, & \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Para la función angular θ, resulta que $\forall\, t \in \mathbb{R} : \theta(t) = abt + \theta_0$, esto indica que la curva girará en sentido antihorario. Y mediante el *método de variables separables*, se obtiene la función radial r:

$$\forall\, t \in I(X, x_0, y_0) : r(t) = r_{(r_0,\theta_0)}(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t}\right]^{-1/2} \tag{3.4}$$

Por lo tanto, para cualquier $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, la solución es

$$\forall\, t \in I(X, x_0, y_0) : \varphi_{(X,x_0,y_0)}(t) = (ar(t)\cos(abt + \theta_0), br(t)\sin(abt + \theta_0))$$

Respecto al intervalo maximal, si $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \leq 1$, entonces $r_0 \leq 1$ y después en (3.4),

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : 1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t} \geq 1 > 0$$

así que $I(X, x_0, y_0) = \mathbb{R}$. Sin embargo, si $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$, entonces $r_0 > 1$, en consecuencia, $\frac{1}{r_0^2} - 1 < 0$. Para que el radicando en (3.4) sea positivo se debe cumplir que

$$t > \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_0^2 - 1}{r_0^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}\right)$$

Por tanto,

$$\varphi_{(X,x_0,y_0)}(t) = \begin{cases} (0, 0), & (x_0, y_0) = (0, 0) \\ (ar(t)\cos(abt + \theta_0), br(t)\sin(abt + \theta_0)), & (x_0, y_0) \neq (0, 0) \end{cases}$$

y el intervalo maximal es

$$I(X, x_0, y_0) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \leq 1 \\ \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}\right), +\infty\right), & \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1 \end{cases}$$

Ahora, si $p = (x_0, y_0)$ con $r_0 = 1$, entonces $r(t) = 1$ en todo $\mathbb{R}$ y así

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_p(t) = (a\cos(abt + \theta_0), b\sin(abt + \theta_0))$$

Asimismo, φ_p es una función periódica cuyo periodo es $T = \frac{2\pi}{ab}$. En particular, como punto de paso se escoge a $p = (a, 0)$. De este modo, $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es una órbita periódica de X.

El campo X no es completo. Sin embargo, del Teorema 3.2.1, existe un campo Y de clase C^1 completo en $\mathbb{R}^2$ y topológicamente equivalente a X. Por esta razón, sin pérdidad de

generalidad, se puede asumir que X es completo en $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, de (3.4) se tienen los siguientes casos:

Caso 1 $(0 < r_0 < 1)$**:** Luego,

$$\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t\to\infty} r(t) = 1 \tag{3.5}$$

Caso 2 $(r_0 > 1)$**:** Luego,

$$\lim_{t\to-\infty} r(t) = \infty \quad , \quad \lim_{t\to\infty} r(t) = 1 \tag{3.6}$$

El Teorema 3.2.1 garantiza que las órbitas de un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^n$ siempre pueden ser definidas en toda la recta real mediante una reparametrización del tiempo y manteniendo la configuración de sus órbitas. Sin embargo, cuando el campo está definido en un subconjunto abierto y propio de $\mathbb{R}^n$, el teorema no siempre se cumple. Para ello, se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.3. (Perko [14]) Sea $U = (0, +\infty)$ y el campo vectorial

$$\begin{aligned} X : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

X es de clase C^∞ en U, se sigue del Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 1.1.7) que para cualquier $x_0 \in U$ el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{2x} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución $\varphi_{(X,x_0)} : I(X, x_0) \longrightarrow U$. Como $\mathrm{Sing}(X) = \emptyset$, mediante el *método de variables separables*,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{2x(t)} &\implies \int_0^t 2x(s)d(x(s)) = \int_0^t ds \implies [x^2(s)]_0^t = t \\ &\implies x^2(t) - x_0^2 = t \implies x(t) = \sqrt{t + x_0^2} \end{aligned}$$

Luego, la solución maximal es

$$\varphi_{(X,x_0)}(t) = \sqrt{t + x_0^2} \quad , \quad I(X, x_0) = (-x_0^2, +\infty)$$

además, $\lim_{t\to-x_0^2} \varphi_{(X,x_0)}(t) = 0 \in \partial U$. Sin embargo, cuando se tiene el campo vectorial

$$\forall\, x_0 \in U : Y(x) := \frac{X(x)}{1 + |X(x)|} = \frac{1/2x}{1 + 1/2x} = \frac{1}{1 + 2x}$$

para cualquier $x_0 \in U$, el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{1}{1 + 2y} \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución maximal $\varphi_{(Y,x_0)} : I(Y, x_0) \longrightarrow U$, mediante el *método de variables separables*,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) = \frac{1}{1 + 2y(t)} &\implies \int_0^t (1 + 2y(s))d(y(s)) = \int_0^t ds \implies [y(s) + y^2(s)]_0^t = t \\ &\implies y^2(t) + y(t) - x_0^2 - x_0 - t = 0 \\ &\implies y(t) = -\frac{1}{2} + \sqrt{t + \left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

y esta función es diferenciable $(-(x_0+\frac{1}{2})^2, +\infty)$. De este modo, la solución maximal es

$$\varphi_{(Y,x_0)}(t) = -\frac{1}{2} + \sqrt{t + \left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2} \quad , \quad I(Y,x_0) = \left(-\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2, +\infty\right)$$

Del Corolario 1.1.2, cuando el tiempo tiende a uno de los extremos del intervalo maximal, la curva solución se acerca hacia la frontera ∂U. Esto sugiere que el factor de reparametrización para el campo X debe involucrar la distancia a ∂U. No obstante, dicha función no es diferenciable en todo U (e.g. $U = (-1,1)$). Para superar esta dificultad, se emplea una técnica de "suavización" mediante *particiones de la unidad* (Lages [12] y Lee [9]) que permite construir una función diferenciable que desempeña un papel análogo al de la distancia.

Lema 3.2.1. (Distancia de punto a conjunto) Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $d_E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función distancia al conjunto E

$$d_E(x) := d(x,E) = \inf_{y\in E}\{|x-y|\}$$

entonces

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n : |d_E(x) - d_E(y)| \leq |x-y|$$

es decir, d_E es una función Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ y por consiguiente, es continua en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Perko [14] o Lages [10]. ■

Proposición 3.2.1. (Existencia de partición de la unidad) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de U, entonces existe una familia de funciones $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq C^\infty(U,\mathbb{R})$ tal que

1. $\forall\, x \in U, \forall\, \alpha \in \Lambda : \psi_\alpha(x) \geq 0$
2. Si el soporte de ψ_α es $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) := \overline{\{x \in U \,|\, \psi_\alpha(x) \neq 0\}}$, entonces $\{\operatorname{supp}(\psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia localmente finita, i.e., en cada $x \in U$ existen una vecindad abierta $V_x \subseteq U$ y $J \subseteq \Lambda$ finito tal que
$$\forall\, \alpha \in \Lambda - J : V_x \cap U_\alpha = \emptyset$$
3. $\forall\, x \in U : \sum_{\alpha\in\Lambda} \psi_\alpha(x) = 1$
4. $\forall\, \alpha \in \Lambda : \operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Lages [12]. ■

Lema 3.2.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, entonces existe una función $\delta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

$$\forall\, x \in U : 0 < \delta(x) < d(x, \partial U)$$

Demostración. Sea $x \in U$, entonces $r_x := \frac{1}{2}d(x,\partial U) > 0$ y $x \in B_{r_x}(x)$, entonces tomando la unión sobre todo U, resulta que

$$U \subseteq \bigcup_{x\in U} B_{r_x}(x)$$

es decir, $\{B_{r_x}(x)\}_{x\in U}$ es un cubrimiento abierto de U, pero como U hereda la propiedad de Lindelöf de $\mathbb{R}^n$ (Lages [12]), existe un subcubrimiento numerable $\mathcal{U} := \{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ de U. Debido a la Proposición 3.2.1, existe una familia de funciones $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty \subseteq C^\infty(U,\mathbb{R})$ tal que

1. $\forall\, x \in U, \forall\, i \in \mathbb{N} : \psi_i(x) \geq 0$
2. $\{\text{supp}(\psi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia localmente finita.
3. $\forall\, x \in U : \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1$
4. $\forall\, i \in \mathbb{N} : \text{supp}(\psi_i) \subseteq B_{r_i}(x_i)$

A continuación, se define la siguiente función:

$$\begin{aligned} \delta : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} r_i \psi_i(x) \end{aligned}$$

La suma está bien definida pues si $x \in U$, entonces desde que $\mathcal{U}$ es localmente finita, existen una vecindad abierta $V_x \subseteq U$ de x y $J = \{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, i \in \mathbb{N} - J : V_x \cap \text{supp}(\psi_i) = \emptyset$$

esto implica que para cualquier $i \in \mathbb{N} - J$, $x \notin \text{supp}(\psi_i)$, luego $\psi_i(x) = 0$. De este modo,

$$\delta(x) = \sum_{i \in J} r_i \psi_i(x)$$

por tanto, $\delta \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$. Además, δ es positiva en U ya que cada una de las ψ_i es no negativa en U y la suma de ellos es 1, entonces por lo menos una de ellas es positiva para cualquier $x \in U$. Por último, sea $x \in U$, entonces sin pérdida de generalidad se puede asumir que para todo $i \in J$, $x \in \text{supp}(\psi_i)$, entonces $x \in B_{r_i}(x_i)$, y usando la continuidad de la función distancia,

$$d(x, \partial U) \geq d(x_i, \partial U) - |x - x_i| = 2r_i - |x - x_i| > r_i$$

y así

$$0 < \delta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \psi_i(x) = \sum_{i \in J} r_i \psi_i(x) < \sum_{i \in J} d(x, \partial U) \psi_i(x) = d(x, \partial U)$$

■

Teorema 3.2.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $X \in \mathcal{X}^1(U)$, entonces existe $Y \in \mathcal{X}^1(U)$ completo en U y topológicamente equivalente a X.

Demostración. Sea $\delta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ la función del Lema 3.2.2, luego se define la siguiente función real

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\delta(x)}{1 + \delta(x)} \end{aligned}$$

de manera análoga al Teorema 3.2.1, g es de clase C^1 en U y $\forall\, x \in U : 0 < g(x) < 1$. Asimismo, el siguiente campo es de clase C^1:

$$\begin{aligned} G : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{X(x)}{1 + |X(x)|} \end{aligned}$$

G es acotada en U pues $\forall\, x \in U : |G(x)| < 1$ y a continuación se define el campo vectorial

$$\begin{aligned} Y : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto g(x) \cdot G(x) = \frac{\delta(x)}{1 + \delta(x)} \cdot \frac{X(x)}{1 + |X(x)|} \end{aligned}$$

1. Y **es de clase** C^1**:** Como g y G son de clase C^1, Y también lo es.

2. Y **es completo en** U**:** Sea $x_0 \in U$, si x_0 es una singularidad de Y, es inmediato que $I(Y, x_0) = \mathbb{R}$. Si $x_0 \in U$ un punto regular de Y, se denotan los extremos $\omega_-(Y, x_0)$ y $\omega_+(Y, x_0)$ por α y β respectivamente. Por hipótesis auxiliar, $I(Y, x_0) \neq \mathbb{R}$, entonces $\alpha \in \mathbb{R}$ o $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\beta \in \mathbb{R}$, como Y es acotada en U, se sigue de la Proposición 1.1.6 y del Corolario 1.1.2 que existe $x^* := \lim_{t\to\beta} \varphi_{(Y,x_0)}(t) \in \partial U$. Ahora, se tiene la función longitud de arco

$$\begin{aligned} a : [0, \beta] &\longrightarrow [0, s_0] \\ t &\longmapsto \int_0^t |Y(\varphi_{(Y,x_0)}(\xi))| d\xi \end{aligned}$$

Esta función es diferenciable y del Primer Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\forall\, t \in [0, \beta] : \dot{a}(t) = |Y(\varphi_{(Y,x_0)}(t))| > 0$$

Esto significa que a es estrictamente creciente en $[0, \beta]$, entonces a es continua e inyectiva. En consecuencia, $a([0, \beta]) = [0, s_0]$, i.e., a es sobreyectiva. Debido al Teorema de la Función Inversa, existe $b := a^{-1} : [0, s_0] \longrightarrow [0, \beta]$ y b es estrictamente creciente en $[0, s_0]$ pues a lo es, además $a(0) = 0$ implica que $b(0) = 0$ y

$$\forall\, s \in [0, s_0] : \frac{db}{ds}(s) = \left[\frac{da}{dt}(b(s))\right]^{-1} = \frac{1}{|Y(\varphi_{(Y,x_0)}(b(s)))|}$$

Integrando sobre $[0, s_0]$ resulta que

$$\forall\, s \in [0, s_0] : b(s) = \int_0^s \frac{d\xi}{|Y(\varphi_{(Y,x_0)}(b(\xi)))|}$$

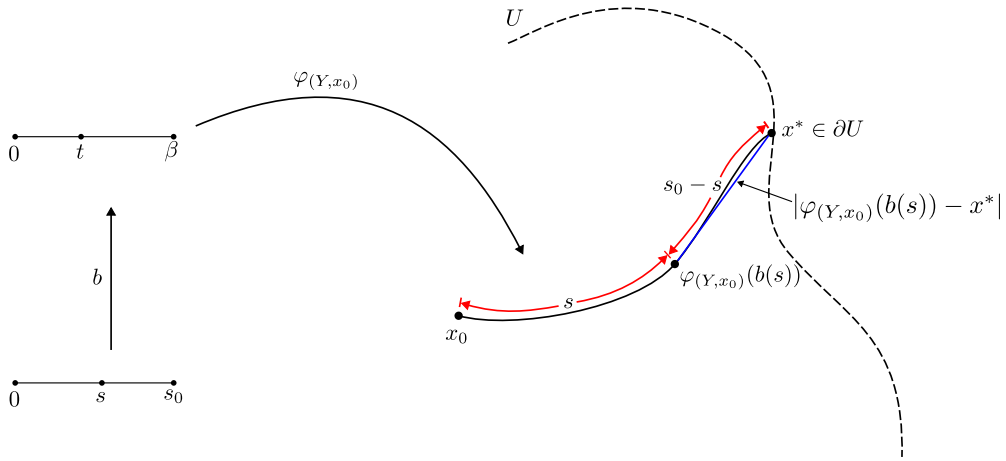


Figura 3.3

Si $s \in [0, s_0)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 < g(\varphi_{(Y,x_0)}(b(s))) &< \delta(\varphi_{(Y,x_0)}(b(s))) < d(\varphi_{(Y,x_0)}(b(s)), \partial U) \\ &\leq |\varphi_{(Y,x_0)}(b(s)) - x^*| = \left| \int_{b(s)}^{\beta} Y(\varphi_{(Y,x_0)}(\xi)) d\xi \right| \\ &\leq \int_{b(s)}^{\beta} |Y(\varphi_{(Y,x_0)}(\xi))| d\xi = s_0 - a(b(s)) = s_0 - s \end{aligned}$$

Luego, por monotonía del límite,

$$\begin{aligned}\beta = \lim_{s\to s_0} b(s) &= \lim_{s\to s_0}\int_0^s \frac{d\xi}{|Y(\varphi_{(Y,x_0)}(b(\xi)))|}\\ &\geq \lim_{s\to s_0}\int_0^s \frac{d\xi}{g(\varphi_{(Y,x_0)}(b(\xi)))} \geq \lim_{s\to s_0}\int_0^s \frac{d\xi}{s_0-\xi}\\ &= \lim_{s\to s_0} \ln\left(\frac{s_0}{s_0-s}\right) = \infty\end{aligned}$$

lo cual contradice que $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $\beta = \infty$ y análogamente $\alpha = -\infty$. Por reducción al absurdo, Y es un campo completo en U.

3. Y **es topológicamente equivalente a** X**:** Antes se tiene la función

$$\begin{aligned}\psi : U &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto 1 + \frac{1}{\delta(x)}\end{aligned}$$

la cual es de clase C^∞ y $\forall\, x \in U : g(x) = \frac{1}{\psi(x)}$, entonces se define la función

$$\begin{aligned}\tau : D_X &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (t, x_0) &\longmapsto \int_0^t (1 + |X(\varphi_X(\xi, x_0))|) \cdot \psi(\varphi_X(\xi, x_0))d\xi\end{aligned}$$

De este modo,

$$\forall\, t \in I(X, x_0) : \tau_{x_0}(t) = \int_0^t (1 + |X(\varphi_X(\xi, x_0))|) \cdot \psi(\varphi_X(\xi, x_0))d\xi$$

Como $X \in \mathcal{X}^1(U)$, ψ y el flujo φ_X son continuas, el integrando es una función continua, entonces del Primer Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\forall\, t \in I(X, x_0) : \frac{d\tau_{x_0}}{dt}(t) = (1 + |X(\varphi_{(X,x_0)}(t))|) \cdot \psi(\varphi_X(t, x_0)) \geq \psi(\varphi_X(t, x_0)) > 0$$

esto implica que τ_{x_0} es continua y estrictamente creciente en $I(X, x_0)$. Para abreviar, $\omega_- = \omega_-(X, x_0)$ y $\omega_+ = \omega_+(X, x_0)$. Luego, del Teorema del Valor Intermedio y la monotonía estricta de τ_{x_0},

$$\tau_{x_0}(I(X, x_0)) = \left(\lim_{t\to\omega_-^+} \tau_{x_0}(t), \lim_{t\to\omega_+^-} \tau_{x_0}(t)\right)$$

Afirmación: $\lim\limits_{t\to\omega_-^+} \tau_{x_0}(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to\omega_+^-} \tau_{x_0}(t) = +\infty$

En efecto, dado que el integrando es una función no negativa y $\psi(x) > 1$,

$$\forall\, t \geq 0 : \tau_{x_0}(t) \geq t \quad , \quad \forall t \leq 0 : \tau_{x_0}(t) \leq t$$

Caso 1 ($\omega_+ = +\infty$)**:** Si $M > 0$, entonces para $t \geq M$, $\tau_{x_0}(t) \geq t \geq M$. Por ende, $\lim\limits_{t\to+\infty} \tau_{x_0}(t) = +\infty$.

Caso 2 ($\omega_- = -\infty$)**:** Si $M < 0$, entonces para $t \leq M$, $\tau_{x_0}(t) \leq t \leq M$. Por ende, $\lim\limits_{t\to-\infty} \tau_{x_0}(t) = -\infty$.

Caso 3 ($\omega_+ \in \mathbb{R}$): Como hipótesis auxiliar, se supone que

$$\exists\, M > 0, \forall\, t \in [0, \omega_+) : \int_0^t |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))| \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))\, d\xi \leq M$$

Puesto que $\varphi_{(X,x_0)}$ es solución del P.V.I. asociado a X y x_0, y $\psi(x) > 1$,

$$\forall\, t \in [0, \omega_+) : |\varphi_{(X,x_0)}(t) - x_0| \leq \int_0^t |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))| \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\xi)) d\xi \leq M$$

Esto es, $\varphi_{(X,x_0)}([0, \omega_+)) \subseteq B_M[x_0]$. Sin embargo, $B_M[x_0]$ es compacto, así que debido al Corolario 1.1.3, $\omega_+ = +\infty$ y contradice que $\omega_+ \in \mathbb{R}$. Por reducción al absurdo,

$$\forall\, M > 0, \exists\, t_M \in [0, \omega_+) : \int_0^{t_M} |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))| \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\xi)) d\xi > M$$

Sea $M > 0$, escogiendo $\delta := \omega_+ - t_M > 0$ resulta que si $t \in (\omega_+ - \delta, \omega_+) = (t_M, \omega_+)$, entonces

$$\tau_{x_0}(t) \geq \int_0^{t_M} |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))| \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\xi)) d\xi > M$$

En otras palabras, $\lim\limits_{t \to \omega_+^-} \tau_{x_0}(t) = +\infty$.

Caso 4 ($\omega_- \in \mathbb{R}$): Como hipótesis auxiliar, se supone que

$$\exists\, M < 0, \forall\, t \in (\omega_-, 0] : \int_0^t |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))| \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\xi)) d\xi \geq M$$

Puesto que $\varphi_{(X,x_0)}$ es solución del P.V.I. asociado a X y x_0,

$$\forall\, t \in (\omega_-, 0] : |\varphi_{X,x_0}(t) - x_0| \leq \int_t^0 |X(\varphi_{(X,x_0)}(\xi))|\, d\xi \leq -M =: R$$

Esto es, $\varphi_{(X,x_0)}((\omega_-, 0]) \subseteq B_R[x_0]$ ($R = -M > 0$). Sin embargo, $B_R[x_0]$ es compacto, así que debido al Corolario 1.1.3, $\omega_- = -\infty$ y esto contradice que $\omega_- \in \mathbb{R}$. Por reducción al absurdo,

$$\forall\, M < 0, \exists\, t_M \in (\omega_-, 0] : \int_0^{t_M} |X(\varphi_{X,x_0}(\xi))| \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\xi)) d\xi < M$$

Sea $M > 0$, escogiendo $\delta := t_M - \omega_- > 0$ resulta que si $t \in (\omega_-, \omega_- + \delta) = (\omega_-, t_M)$, entonces

$$\tau_{x_0}(t) \leq \int_0^{t_M} |X(\varphi_X(\xi, x)| \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\xi)) d\xi < M$$

En otras palabras, $\lim\limits_{t \to \omega_-^+} \tau_{x_0}(t) = -\infty$.

En cualquier caso, $\tau_{x_0}(I(X, x_0)) = \mathbb{R}$, i.e., τ_{x_0} es sobreyectiva. Además, se tenía que τ_{x_0} es continua y estrictamente creciente en $I(X, x_0)$, lo cual garantiza que τ_{x_0} sea inyectiva. Por el Teorema de la Función Inversa, existe $\sigma_{x_0} := (\tau_{x_0})^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow I(X, x_0)$ diferenciable en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ pues τ_{x_0} lo es. Más aún,

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : \frac{d\sigma_{x_0}}{ds}(s) = \left[\frac{d\tau_{x_0}}{dt}(\sigma_{x_0}(s))\right]^{-1} = \frac{1}{(1 + |X(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)))|) \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)))}$$

entonces se puede definir la función

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, x_0) &\longmapsto \sigma_{x_0}(s) = (\tau_{x_0})^{-1}(s)\end{aligned}$$

A continuación, se define

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto \varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s))\end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena, resulta que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{ds}(s) &= \frac{d\varphi_{(X,x_0)}}{dt}(\sigma_{x_0}(s)) \cdot \frac{d\sigma_{x_0}}{ds}(s) \\ &= \frac{X(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)))}{(1 + |X(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)))|) \cdot \psi(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s)))} \\ &= g(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s))) \cdot G(\varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s))) \\ &= g(\Psi(s)) \cdot G(\Psi(s)) = Y(\Psi(s))\end{aligned}$$

Asimismo, $\tau_{x_0}(0) = 0$, entonces $\sigma_{x_0}(0) = 0$,

$$\Psi(0) = \varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(0)) = \varphi_{(X,x_0)}(0) = x_0$$

Esto muestra que Ψ es solución del P.V.I. asociado a Y y x_0, pero $\varphi_{(Y,x_0)}$ es la única solución, entonces $\Psi = \varphi_{(Y,x_0)}$, i.e.,

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : \varphi_{(Y,x_0)}(s) = \varphi_{(X,x_0)}(\sigma_{x_0}(s))$$

En resumen, se encontraron $h := \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ y $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

- $\forall\, (s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \sigma(s, x) \in I(X, x)$
- Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_x : \mathbb{R} \longrightarrow I(X, x)$ es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
- $\forall\, (s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \varphi_Y(s, x) = \varphi_X(\sigma(s, x), x)$

Por lo tanto, Y es topológicamente equivalente a X.

■

Capítulo 4

Estabilidad de órbitas periódicas

4.1. Vecindades de conjuntos

En $\mathbb{R}^n$, los entornos de un punto se definen naturalmente mediante bolas abiertas. Para extender esta noción a conjuntos arbitrarios no vacíos, se considera la función distancia de punto a conjunto. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es no vacío, entonces

$$d_E(x) := d(x, E) = \inf_{y \in E} \{|x - y|\}$$

es continua en $\mathbb{R}^n$ (Lema 3.2.1).

Dado $r > 0$, el intervalo $(-\infty, r)$ es abierto en $\mathbb{R}$, esto implica por continuidad de d_E que

$$d_E^{-1}(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_E(x) = d(x, E) < r\}$$

es abierto en $\mathbb{R}^n$. Asimismo, $(-\infty, r]$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, entonces

$$d_E^{-1}((-\infty, r]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_E(x) = d(x, E) \leq r\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 4.1.1. (Bola abierta o cerrada centrada en un conjunto) Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $r > 0$, la *bola abierta de radio r y centrada en E* es el conjunto

$$B_r(E) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, E) < r\}$$

mientras que la *bola cerrada de radio r y centrada en E* se define como

$$B_r[E] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, E) \leq r\}$$

Proposición 4.1.1. Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacíos y $r > 0$, entonces

1. $E \subseteq B_r(E)$
2. Si $F \subseteq E$, entonces $B_r(F) \subseteq B_r(E)$.

Demostración. En primer lugar, para cualquier $x \in E$, $d(x, E) = 0 < r$, y así $x \in B_r(E)$. Por otro lado, $x \in B_r(F)$ y $F \subseteq E$, entonces $d(x, E) \leq d(x, F) < r$, es decir, $x \in B_r(E)$. ■

Observación. Cuando $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, $B_r[K]$ es compacto para cualquier $r > 0$. En efecto, $B_r[K]$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ y como K es acotado,

$$\exists\, M > 0, \forall\, y \in K : |y| \leq M$$

Si $x \in B_r[K]$, entonces $d(x, K) \leq r$, pero de la compacidad de K resulta que $d(x, K) = |x - y|$ para algún $y \in K$, entonces de la desigualdad triangular,

$$|x| \leq |x - y| + |y| \leq r + M$$

Esto muestra que $B_r[K]$ es acotado. Por lo tanto, $B_r[K]$ es compacto.

Proposición 4.1.2. Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene a K, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(K) \subseteq U$.

Demostración. Sea $x \in K$, pero como U es abierto, existe $r_x > 0$ tal que $B_{\frac{r_x}{2}}(x) \subseteq B_{r_x}(x) \subseteq U$. Tomando la unión sobre todo K se tiene

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{r_x}{2}}(x) \subseteq U \tag{4.1}$$

Esto indica que $\{B_{\frac{r_x}{2}}(x)\}_{x \in K}$ es un cubrimientos abierto de K, pero por la compacidad del conjunto, existe un subcubrimiento finito $\{B_{\frac{r_i}{2}}(x_i)\}_{i=1}^m$.
Ahora, se define $\delta := \min\limits_{1 \leq i \leq m} \{\frac{r_i}{2}\} > 0$, si $x \in B_\delta(K)$, entonces $d(x, K) < \delta$, y una vez más por la compacidad de K

$$\exists\, y \in K : |x - y| = d(x, K) < \delta$$

Sin embargo, $y \in K$ implica por (4.1) que $\exists\ i \in \{1, \ldots, m\} : |y - x_i| < \frac{r_i}{2}$, y usando la desigualdad trinagular en $\mathbb{R}^n$,

$$|x - x_i| \leq |x - y| + |y - x_i| < \delta + \frac{r_i}{2} \leq \frac{r_i}{2} + \frac{r_i}{2} = r_i$$

De este modo, existe un $x_i \in K$ tal que $x \in B_{r_i}(x_i) \subseteq U$. Por lo tanto, $B_\delta(K) \subseteq U$. ■

Cuando K es un punto, i.e., $K = \{x\}$, la Proposición 4.1.2 coincide con la definición de punto interior.

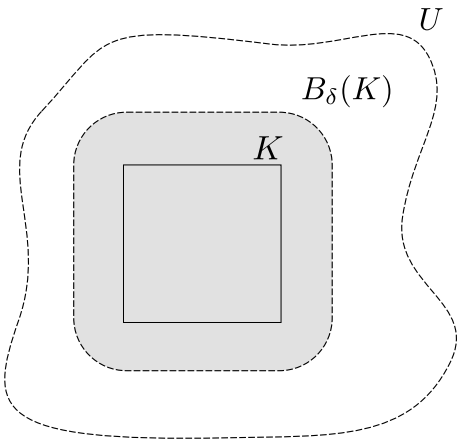


Figura 4.1: Vecindad abierta de un conjunto compacto.

4.2. Conjuntos límite, invariantes y atractores

Gracias a los resultados del Capítulo 3, de ahora en adelante, se asumirá que para $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, **el campo** $X \in \mathcal{X}^k(U)$ **es completo en** U.

Definición 4.2.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$, el *conjunto ω-límite de p* se define como

$$\omega_X(p) := \{q \in U \mid \exists\, \{t_m\}_{m=1}^\infty \subseteq [0, +\infty) : (\lim_{m \to \infty} t_m = \infty, \lim_{m \to \infty} \varphi_X(t_m, p) = q)\}$$

mientras que el *conjunto α-límite de p* se define como

$$\alpha_X(p) := \{q \in U \mid \exists\, \{t_m\}_{m=1}^\infty \subseteq (-\infty, 0] : (\lim_{m \to \infty} t_m = -\infty, \lim_{m \to \infty} \varphi_X(t_m, p) = q)\}$$

Observación. De la Proposición 1.1.9, $\alpha_X(p) = \omega_{-X}(p)$ y $\omega_X(p) = \alpha_{-X}(p)$.

Geométricamente, los conjuntos límite de un punto p representan los puntos de acumulación de su órbita cuando se avanza (ω-límite) o retrocede (α-límite) un tiempo suficientemente grande. Dinámicamente, $\omega_X(p)$ describe el destino asintótico de la órbita mientras que $\alpha_X(p)$ describe su origen asintótico.

Definición 4.2.2. (Invarianza por el flujo) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $S \subseteq U$,

1. S es un *conjunto invariante por* X si $\forall\, x \in S : \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(x) \subseteq S$
2. S es un *conjunto positivamente invariante por* X si $\forall\, x \in S : \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(x) \subseteq S$
3. S es un *conjunto negativamente invariante por* X si $\forall\, x \in S : \mathcal{O}^-_{\mathcal{C},X}(x) \subseteq S$

Observación. Dado que $\mathcal{O}^-_{\mathcal{C},X}(p) = \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},-X}(p)$, S es un conjunto negativamente invariante por X si y solo si S es un conjunto positivamente invariante por $-X$.

Proposición 4.2.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$,

1. Si $p \in \mathrm{Sing}(X)$, entonces $\omega_X(p) = \alpha_X(p) = \{p\}$.
2. Si $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es una órbita periódica, entonces $\omega_X(p) = \alpha_X(p) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1]. ■

Proposición 4.2.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$, si $q \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$, entonces $\omega_X(q) = \omega_X(p)$ y $\alpha_X(q) = \alpha_X(p)$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Hirsch et al. [6]. ■

Proposición 4.2.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$, entonces $\omega_X(p)$ y $\alpha_X(p)$ son cerrados en U.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1], Perko [14] o Teschl [17]. ■

Proposición 4.2.4. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$, si existe $K \subseteq U$ compacto tal que $\mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(p) \subseteq K$, entonces

1. $\omega_X(p) \neq \emptyset$
2. $\omega_X(p)$ es compacto.
3. $\omega_X(p)$ es conexo.
4. $\omega_X(p)$ es invariante por X.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1], Perko [14] o Teschl [17]. ■

Las singularidades pueden atraer o repeler órbitas, propiedad que motiva a extender dicha propiedad a conjuntos invariantes más generales.

Definición 4.2.3. (Conjuntos atractores y repulsores) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $A, R \subseteq U$ cerrados en U e invariantes por X,

1. A es un *conjunto atractor de* X si existe un abierto $V \subseteq U$ con $A \subseteq V$ tal que V es positivamente invariante por X y $\forall\, q \in V : \lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t,q), A) = 0$.

2. R es un *conjunto repulsor de* X si existe un abierto $W \subseteq U$ con $R \subseteq W$ tal que W es negativamente invariante por X y $\forall\, q \in W : \lim_{t\to-\infty} d(\varphi_X(t,q), R) = 0$.

Ejemplo 4.2.1. (Perko [14]) Sean $a, b > 0$, $\lambda \neq 0$ y el campo $X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$X(x,y,z) := \left(-a^2 y + x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), b^2 x + y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \lambda z\right)$$

Del Ejemplo 3.2.2, la solución del P.V.I. asociado a X y $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ es

$$\varphi_{(X,x_0,y_0,z_0)}(t) = \begin{cases} (0,0,z_0 e^{\lambda t}), & (x_0,y_0) = (0,0) \\ (ar(t)\cos(abt+\theta_0), br(t)\sin(abt+\theta_0), z_0 e^{\lambda t}), & (x_0,y_0) \neq (0,0) \end{cases}$$

donde la función radial r es

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) e^{-2t}\right]^{-1/2}$$

Ahora, si $p = (x_0, y_0, 0)$ con $r_0 = 1$, entonces $r(t) = 1$ en todo $\mathbb{R}$ y así

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_p(t) = (a\cos(abt+\theta_0), b\sin(abt+\theta_0), 0)$$

Asimismo, φ_p es una función periódica cuyo periodo es $T = \frac{2\pi}{ab}$. En particular, como punto de paso se escoge a $p = (a, 0, 0)$. De este modo, $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es una órbita periódica de X. A continuación, se tienen los siguientes conjuntos:

$$M_1 = \{(x,y,z) \mid x = y = 0\} \qquad \text{(Eje Z)}$$
$$M_2 = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} \qquad \text{(Cilindro)}$$
$$M_3 = \{(x,y,z) \mid z = 0\} \qquad \text{(Plano XY)}$$

Afirmación 1. M_1 es un conjunto repulsor de X.

M_1 es invariante por X pues si $(0,0,z_0) \in M_1$, entonces

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_{(0,0,z_0)}(t) = (0,0,z_0 e^{\lambda t}) \in M_1$$

Asimismo, M_1 es cerrado en $\mathbb{R}^3$ y también una superficie. Ahora, si $q = (x^*, y^*, z^*)$ es tal que $r^* < 1$, entonces para acotar la distancia a M_1 se escoge $(0,0,z^{\text{`}} * e^{\lambda t}) \in M_1$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : d(\varphi_q(t), M_1)) \leq |ar(t)\cos(abt+\theta^*), br(t)\sin(abt+\theta^*), 0)|$$

Puesto que $\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0$ por (3.5) y las funciones seno y coseno son acotadas,

$$\lim_{t\to-\infty}(ar(t)\cos(abt+\theta^*)) = \lim_{t\to-\infty}(br(t)\sin(abt+\theta^*)) = 0$$

y por el Teorema del Sándwich se concluye que $\lim_{t\to-\infty} d(\varphi_q(t), M_1) = 0$.

Afirmación 2. M_2 es un conjunto atractor de X.

M_2 es invariante por X pues si $(x_0, y_0, z_0) \in M_2$, entonces $r_0 = 1$ y después

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_{(x_0,y_0,z_0)}(t) = (a\cos(abt+\theta_0), b\sin(abt+\theta_0), z_0 e^{\lambda t}) \in M_2$$

Asimismo, M_2 es cerrado en $\mathbb{R}^3$ y también una superficie. Ahora, si $q = (x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^3 - M_1$, entonces para acotar la distancia a M_2 se escoge $(a\cos(abt+\theta^*), b\sin(abt+\theta^*), z^*e^{\lambda t}) \in M_2$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : d(\varphi_q(t), M_2)) \leq |(a(r(t)-1)\cos(abt+\theta^*), b(r(t)-1)\sin(abt+\theta^*), 0)|$$

Puesto que $\lim_{t\to\infty}(r(t)-1) = 0$ por (3.5) y (3.6), y las funciones seno y coseno son acotadas,

$$\lim_{t\to\infty}(a(r(t)-1)\cos(abt+\theta^*)) = \lim_{t\to\infty}(b(r(t)-1)\sin(abt+\theta^*)) = 0$$

y por el Teorema del Sándwich se concluye que $\lim_{t\to\infty} d(\varphi_q(t), M_2) = 0$.

Afirmación 3. M_3 es un conjunto atractor (resp. repulsor) de X si $\lambda < 0$ (resp. $\lambda > 0$).

M_3 es invariante por X pues si $(x_0, y_0, 0) \in M_3$, entonces

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_{(x_0,y_0,0)}(t) = (ar(t)\cos(abt+\theta_0), br(t)\sin(abt+\theta_0), 0) \in M_3$$

Asimismo, M_3 es cerrado en $\mathbb{R}^3$ y también una superficie. Ahora, si $q = (x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^3$, entonces para acotar la distancia a M_3 se escoge $(ar(t)\cos(abt+\theta^*), br(t)\sin(abt+\theta^*), 0) \in M_3$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : d(\varphi_q(t), M_3)) \leq |(0, 0, z^*e^{\lambda t})| = |z^*|e^{\lambda t}$$

El signo de λ determina si M_3 atrae o repele las demás órbitas pues

$$\lambda < 0 \implies \lim_{t\to\infty} d(\varphi_q(t), M_3) = 0$$
$$\lambda > 0 \implies \lim_{t\to-\infty} d(\varphi_q(t), M_3) = 0$$

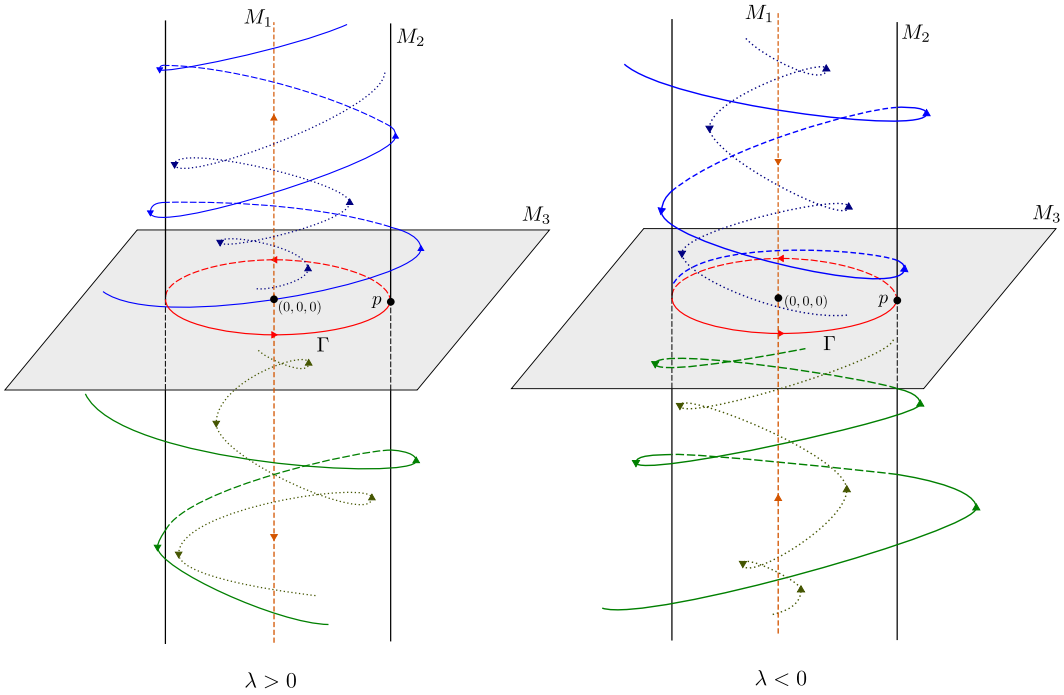


Figura 4.2: Diagrama de fases asociada al campo X (Ejemplo 4.2.1).

4.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La noción de estabilidad en el sentido de Lyapunov, definida tradicionalmente para singularidades y puntos fijos, se generaliza a órbitas periódicas considerando la proximidad de trayectorias al conjunto compacto que forma el ciclo.

Definición 4.3.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo de X, entonces

1. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo estable de* X si

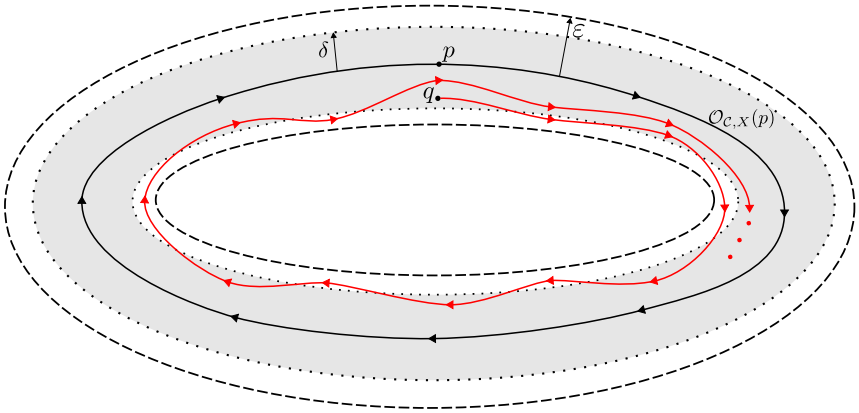
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, q \in B_\delta(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) : \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(q) \subseteq B_\varepsilon(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p))$$

2. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo atractor (local) de* X si

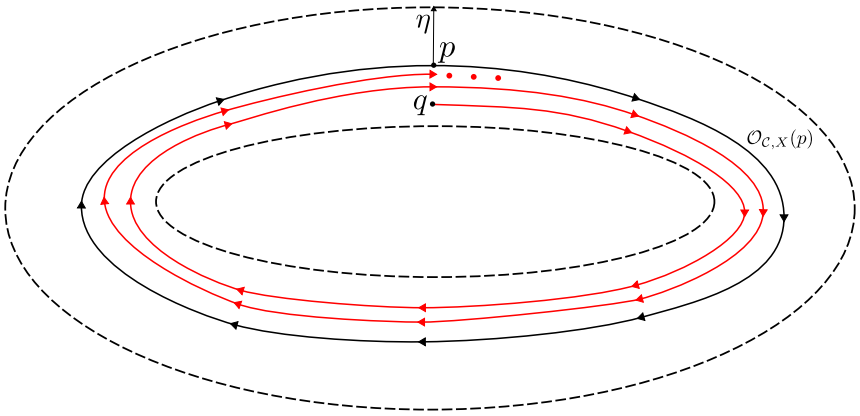
$$\exists\, \eta > 0, \forall\, q \in B_\eta(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) : \lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t,q), \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) = 0$$

3. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo inestable de* X si $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ no es un ciclo estable de X.

4. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo asintóticamente estable de* X si $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo estable y atractor de X.



Ciclo estable



Ciclo atractor

Figura 4.3: Estabilidad de órbitas periódicas en el sentido de Lyapunov.

Ejemplo 4.3.1. Del Ejemplo 4.2.1, Γ es un ciclo atractor de X solo si $\lambda < 0$. En efecto, Γ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^3$ e invariante por X. Si $(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^3 - M_1$, entonces para acotar la distancia a Γ se escoge $(a\cos(abt + \theta^*), b\sin(abt + \theta^*), 0) \in \Gamma$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : d(\varphi_q(t), \Gamma) \leq |(a(r(t) - 1)\cos(abt + \theta^*), b(r(t) - 1)\sin(abt + \theta^*), z^* e^{\lambda t})|$$

Como $\lambda < 0$, $\lim_{t\to\infty} z^* e^{\lambda t} = 0$. Por otro lado, $\lim_{t\to\infty}(r(t)-1) = 0$ por (3.5) y (3.6), y las funciones seno y coseno son acotadas, entonces

$$\lim_{t\to\infty}(a(r(t)-1)\cos(abt+\theta^*)) = \lim_{t\to\infty}(b(r(t)-1)\sin(abt+\theta^*)) = 0$$

y por el Teorema del Sándwich se concluye que $\lim_{t\to\infty} d(\varphi_q(t), \Gamma) = 0$.

4.4. Conjuntos estable e inestable de un ciclo

Así como se definen las variedades estable e inestable para singularidades y puntos fijos, estas nociones pueden extrapolarse a órbitas periódicas considerando el comportamiento asintótico de trayectorias en una vecindad del ciclo.

Definición 4.4.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$ un punto regular de X, si $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo de X, entonces

1. El *conjunto estable de* $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ se define como

$$W^s_{\mathcal{C},X}(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) = \{q \in U \mid \lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t,q), \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) = 0\}$$

   Luego, el *conjunto estable local de* $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ *y de tamaño* $r > 0$ está definido por

$$W^s_{\mathcal{C},X}(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p), r) = \{q \in U \mid \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(q) \subseteq B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)),\ \lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t,q), \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) = 0\}$$

2. El *conjunto inestable de* $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ se define como

$$W^u_{\mathcal{C},X}(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) = \{q \in U \mid \lim_{t\to-\infty} d(\varphi_X(t,q), \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) = 0\}$$

   Luego, el *conjunto inestable local de* $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ *y de tamaño* $r > 0$ está definido por

$$W^u_{\mathcal{C},X}(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p), r) = \{q \in U \mid \mathcal{O}^-_{\mathcal{C},X}(q) \subseteq B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)),\ \lim_{t\to-\infty} d(\varphi_X(t,q), \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) = 0\}$$

Observación. De la Proposición 1.1.9, para una órbita periódica, $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},-X}(p)$, entonces $W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma) = W^s_{\mathcal{C},-X}(\Gamma)$ y $W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma, r) = W^s_{\mathcal{C},-X}(\Gamma, r)$.

Proposición 4.4.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo y $r > 0$, entonces

1. $\forall\, t \le 0 : \varphi_t(W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)) \subseteq W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$
2. $\forall\, t \ge 0 : \varphi_t(W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma)) \subseteq W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$
3. $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma) = \bigcup_{t\le 0} \varphi_t(W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, r))$
4. $W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma) = \bigcup_{t\ge 0} \varphi_t(W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma, r))$

Demostración. Procediendo por partes,

1. Sea $t_0 \le 0$ fijo pero arbitrario, si $q \in \varphi_{t_0}(W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma))$, entonces $\varphi_{-t_0}(x) \in W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$ y luego por la propiedad fundamental del flujo,

$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi_t(q), \Gamma) = \lim_{t\to\infty} d(\varphi_{t+t_0}(\varphi_{-t_0}(q)), \Gamma) = p$$

   Esto es, $q \in W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$. Por lo tanto, $\forall\, t \le 0 : \varphi_t(W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)) \subseteq W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$

2. Sea $t_0 \geq 0$ fijo pero arbitrario, entonces por la observación anterior,
$$\varphi_{t_0}(W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma)) = \varphi_{t_0}(W^s_{\mathcal{C},-X}(\Gamma)) \subseteq W^s_{\mathcal{C},-X}(\Gamma) = W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$$

3. ($\subseteq$) : Sea $x \in W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} d(\varphi_t(q), \Gamma) = 0$. Por definición de límite, para $r > 0$,
$$\exists\, t_r \geq 0, \forall\, t \geq t_r : \varphi_t(q) \in B_r(\Gamma)$$
Esto equivale a decir que $\mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(\varphi_{t_r}(q)) \subseteq B_r(\Gamma)$. Asimismo, de la propiedad fundamental del flujo
$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi_t(\varphi_{t_r}(q)), \Gamma) = \lim_{t\to\infty} d(\varphi_{t+t_r}(q), \Gamma) = 0$$
De este modo, $\varphi_{t_r}(x) \in W^s_{\mathcal{D},f}(p, r)$, i.e., $x \in \varphi_{-t_r}(W^s_{\mathcal{D},f}(p, r)$ para algún $-t_r \leq 0$. Por lo tanto, $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma) \subseteq \bigcup\limits_{t\leq 0} \varphi_t(W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, r))$.
($\supseteq$) : En primer lugar, $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, r) \subseteq W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$. Luego, del ítem 1.,
$$\forall\, t \leq 0 : \varphi_t(W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, r)) \subseteq \varphi_t(W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)) \subseteq W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$$
Por lo tanto, $\bigcup\limits_{t\leq 0} \varphi_t(W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, r)) \subseteq W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma)$.

4. De la misma manera, usando la observación anterior y el ítem 3.,
$$W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma) = W^s_{\mathcal{C},-X}(\Gamma) = \bigcup_{t\geq 0} \varphi_t(W^s_{\mathcal{C},-X}(\Gamma, r)) = \bigcup_{t\geq 0} \varphi_t(W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma, r))$$

■

La proposición indica que el conjunto estable (inestable) global del ciclo se obtiene uniendo todas las preimágenes (imágenes) del conjunto estable (inestable) local.

4.5. Ciclos límite en el plano

Toda orbita periódica en el plano es una curva cerrada, continua y simple (sin autointersecciones), así que su estudio se beneficia de un resultado topológico clave: el Teorema de la Curva de Jordan (Perko [14]). Este garantiza que tal curva descompone el plano en una región interior acotada y otra exterior no acotada, siendo la curva misma la frontera común entre ambas.

Definición 4.5.1. (Interior y exterior de una curva de Jordan) Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, continua y simple, entonces la región acotada es llamada *interior de* Γ, mientras que la región no acotada es llamada *exterior de* Γ. Ambos denotados respectivamente por $\text{int}(\Gamma)$ y $\text{ext}(\Gamma)$.

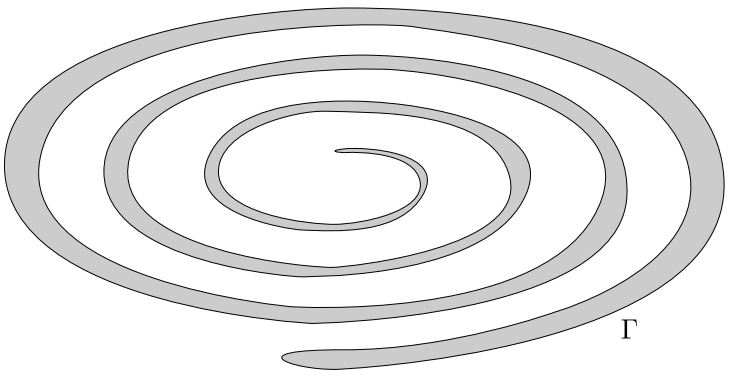


Figura 4.4: Curva de Jordan.

Del Teorema de la Curva de Jordan, se deduce que

- $\mathbb{R}^2 = \text{int}(\Gamma) \cup \Gamma \cup \text{ext}(\Gamma)$
- $\text{int}(\Gamma) \cap \text{ext}(\Gamma) = \emptyset$
- $\partial(\text{int}(\Gamma)) = \partial(\text{ext}(\Gamma)) = \Gamma$

Lema 4.5.1. (Invarianza del interior y exterior de un ciclo planar) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ una órbita periódica, entonces $\text{int}(\Gamma)$ y $\text{ext}(\Gamma)$ son invariantes por X.

Demostración. Se define la siguiente función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) := \begin{cases} -d(x,\Gamma), & x \in \overline{\text{int}(\Gamma)} \\ d(x,\Gamma), & x \in \text{ext}(\Gamma) \end{cases} \quad , \quad x = (x_1, x_2)$$

Desde que la función distancia es continua, f es continua tanto en el interior como en el exterior de Γ. Si $\varepsilon > 0$ y $q \in \Gamma$, entonces $f(q) = 0$ y escogiendo $\delta := \varepsilon > 0$, resulta que

$$|x - q| < \delta = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(q)| = d(x,\Gamma) \leq |x - q| < \varepsilon$$

De este modo, f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Para el interior de la órbita, suponiendo como hipótesis auxiliar que existen $q \in \text{int}(\Gamma)$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t_0, q) \notin \text{int}(\Gamma)$. Primero, del Teorema de la Curva de Jordan, $q \notin \Gamma$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(q) \cap \Gamma = \emptyset$. Asimismo, se tienen los siguientes casos:

Caso 1 ($\varphi_X(t_0, q) \in \Gamma$)**:** Luego, $\varphi_X(t_0, q) \notin \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(q)$, lo cual es imposible.

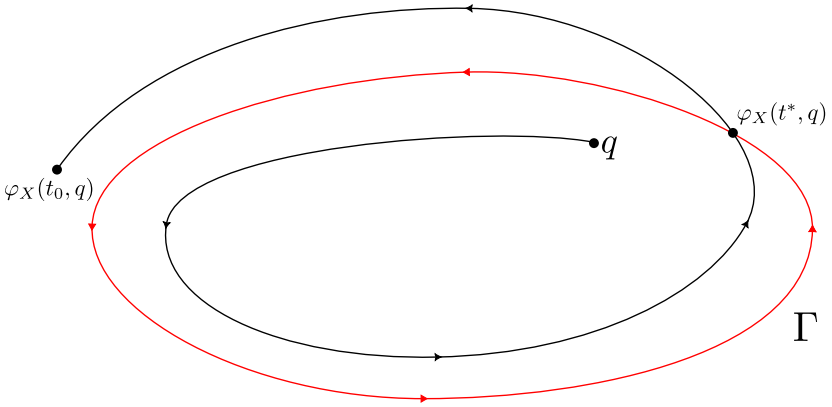


Figura 4.5: Invarianza del interior en un ciclo planar.

Caso 2 ($\varphi_X(t_0, q) \in \text{ext}(\Gamma)$)**:** La función $g = f \circ \varphi_q$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una composición de funciones continuas. Asimismo, $g(0) < 0 < g(t_0)$, así que del Teorema del Valor Intermedio, existe t^* entre 0 y t_0 tal que $g(t^*) = 0$. En consecuencia (Figura 4.5),

$$d(\varphi_X(t^*, q), \Gamma) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_X(t^*, q) \in \Gamma$$

Esto se reduce al **Caso 1** (contradicción).

Por reducción al absurdo, se concluye que $\forall\, q \in \text{int}(\Gamma) : \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(q) \subseteq \text{int}(\Gamma)$, i.e., $\text{int}(\Gamma)$ es invariante por X. Del mismo modo, el exterior de Γ es invariante por X. ■

Ejemplo 4.5.1. (Perko [14]) Recordando el Ejemplo 3.2.2, la solución del P.V.I. asociado a X y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\varphi_{(X,x_0,y_0)}(t) = \begin{cases} (0,0), & (x_0,y_0) = (0,0) \\ (ar(t)\cos(abt+\theta_0), br(t)\sin(abt+\theta_0)), & (x_0,y_0) \neq (0,0) \end{cases}$$

donde $a, b > 0$, el campo $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se define como

$$X(x,y) := \left(-a^2 y + x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), b^2 x + y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right)$$

y la función radial r es

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t}\right]^{-1/2} \iff \begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

Por $p = (a, 0)$ pasa una órbita periódica $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ cuyo periodo es $T = \frac{2\pi}{ab}$. Aplicando el Lema 4.5.1 a Γ, se tienen los siguientes casos para $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

Caso 1 $(0 < r_0 < 1)$**:** Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $0 < r(t) < 1$ y así $\dot{r}(t) > 0$. Esto indica que r es creciente en $\mathbb{R}$ y así

$$\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t\to\infty} r(t) = 1$$

Caso 2 $(r_0 > 1)$**:** Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $r(t) > 1$ y así $\dot{r}(t) < 0$. Esto indica que r es creciente en $\mathbb{R}$ y así

$$\lim_{t\to-\infty} r(t) = \infty \quad , \quad \lim_{t\to\infty} r(t) = 1$$

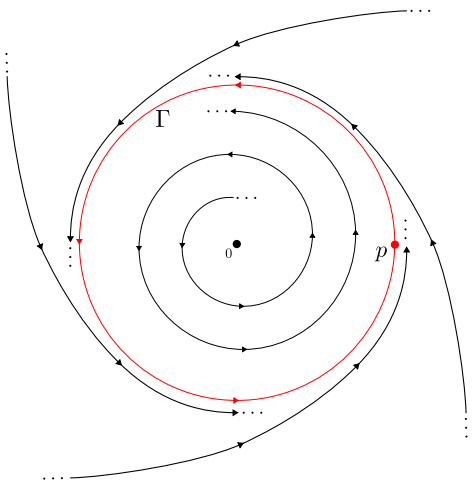


Figura 4.6: Diagrama de fases asociado al campo X (Ejemplo 3.2.2).

Afirmación. Γ es un ciclo atractor de X.

Γ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ e invariante por X. Si $q = (x^*, y^*) \neq (0, 0)$, entonces para acotar la distancia a Γ, se escoge $(a\cos(abt + \theta^*), b\sin(abt + \theta^*) \in \Gamma$ y así

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : d(\varphi_q(t), \Gamma) \leq |(a(r(t) - 1)\cos(abt + \theta^*), b(r(t) - 1)\sin(abt + \theta^*))|$$

Puesto que $\lim_{t\to\infty}(r(t) - 1) = 0$ y las funciones seno y coseno son acotadas,

$$\lim_{t\to\infty}(a(r(t) - 1)\cos(abt + \theta^*)) = \lim_{t\to\infty}(b(r(t) - 1)\sin(abt + \theta^*)) = 0$$

y por el Teorema del Sándwich se concluye que $\lim_{t\to\infty} d(\varphi_q(t), \Gamma) = 0$

Definición 4.5.2. (Ciclo límite) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$, se dice que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo límite de* X si

$$\exists\, q \in U - \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) : (\omega_X(q) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) \ \vee \ \alpha_X(q) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p))$$

En caso afirmativo,

1. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo límite estable de* X si

$$\exists\, r > 0, \forall\, q \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) : \omega_X(q) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$$

2. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo límite inestable de* X si

$$\exists\, r > 0, \forall\, q \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) : \alpha_X(q) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$$

3. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un *ciclo límite semiestable de* X si existe $r > 0$ tal que

   - $\forall\, q \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \cap \operatorname{int}(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) : \omega_X(p) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$
   - $\forall\, q \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \cap \operatorname{ext}(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) : \alpha_X(p) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$

   o viceversa.

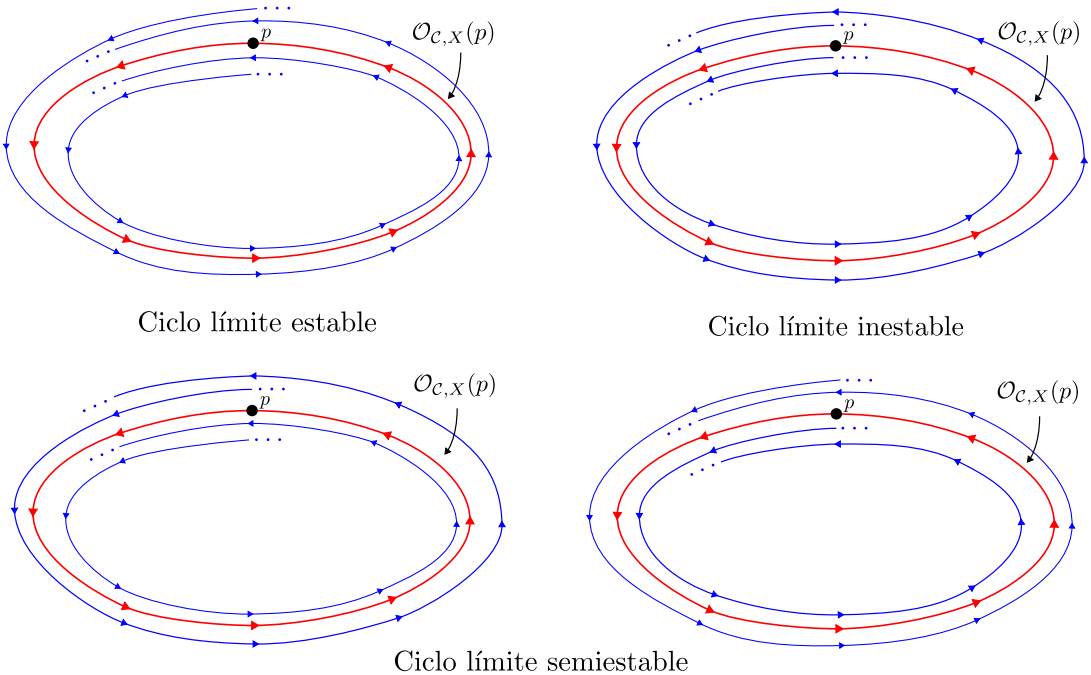


Figura 4.7: Clasificación de ciclos límite.

Observación. Ya que $\alpha_X(q) = \omega_{-X}(q)$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo límite inestable de X si y solo si $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo límite estable de $-X$.

Capítulo 5

La función de Poincaré

El estudio de la estabilidad de órbitas periódicas se simplifica notablemente mediante la función de Poincaré, que reduce la dinámica continua a un sistema discreto. Para construir dicha función es necesario introducir previamente el concepto de sección transversal local a un punto regular de la órbita.

5.1. Sección transversal local a un punto regular

Definición 5.1.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$ un punto regular de X, $\Sigma \subseteq U$ es una *C^r-sección transversal local al campo X en p* si existen un abierto (conexo) $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ y una función $\sigma : V \longrightarrow U$ tal que

1. σ es una inmersión de clase C^r.
2. $\sigma : V \longrightarrow \sigma(V) = \Sigma$ es un homeomorfismo sobre su imagen
3. $p \in \Sigma$
4. $\forall\, v \in V : D\sigma(v)[\mathbb{R}^{n-1}] \oplus \langle X(\sigma(v)\rangle = \mathbb{R}^n$ (condición de transversalidad)

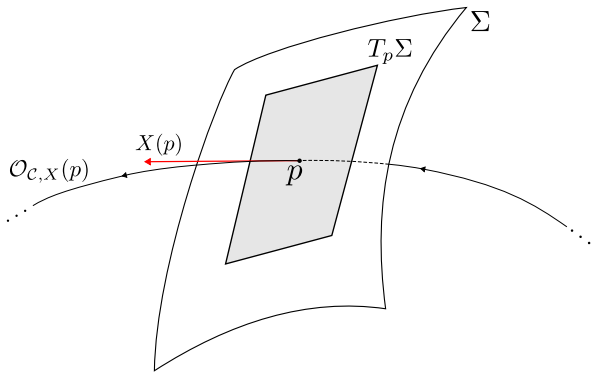


Figura 5.1: Sección transversal en $\mathbb{R}^3$.

De acuerdo con la Sección 1.3, una C^r-sección transversal local a X en p es una superficie Σ de dimensión $n-1$ que pasa por p y en cada punto de Σ, la trayectoria interseca a Σ de manera no tangencial, esto es

$$\forall\, y \in \Sigma : T_y\Sigma \oplus \langle X(y)\rangle = \mathbb{R}^n$$

Observación. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$, si $\Sigma \subseteq U$ es una C^r-sección transversal local a X en p, entonces cualquier vecindad abierta de p relativa a Σ es también es una C^r-sección transversal.

Observación. Si existiese $y \in \Sigma$ tal que $X(y) = 0$, entonces en la condición de transversalidad, $n - 1 = \dim(T_q\Sigma) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$, lo cual es absurdo. Por tanto, dentro de una C^r-sección transversal local a X en p, todos los puntos son regulares.

A partir del hecho de que $X(p) \neq 0$, es posible construir una sección transversal suave local a X en p tomando una porción del *hiperplano ortogonal a* $X(p)$. Esta construcción se detalla en la siguiente proposición:

Proposición 5.1.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$ un punto regular, entonces existe una C^∞-sección transversal local a X en p.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Sotomayor [16]. ■

Teorema 5.1.1. (Teorema del Flujo Tubular) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ un punto regular, si Σ es una C^k-sección transversal local a X en p, entonces existen $V_p \subseteq U$ abierto con $p \in V_p$, $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, $r = r(p) > 0$ y $F \in \mathrm{Diff}^k(V_p, I_\varepsilon(0) \times B_r^{n-1}(0))$ tales que

1. $F(\Sigma \cap V_p) = \{0\} \times B_r^{n-1}(0)$
2. F es una C^k-conjugación entre $X\Big|_{V_p}$ y $Y = (1, 0, \ldots, 0) : I_\varepsilon(0) \times B_r^{n-1}(0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Sotomayor [16]. ■

Corolario 5.1.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ un punto regular, si Σ es una C^k-sección transversal local a X en p, entonces existen $V_p \subseteq U$ abierto con $p \in V_p$, $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ y $\tau \in C^k(V_p, \mathbb{R})$ tales que

1. $q \in \Sigma \cap V_p \iff \tau(q) = 0$
2. Para cualquier $q \in V_p$, φ_q está definida y es inyectiva en $I_\varepsilon(\tau(q))$.
3. $\forall\, q \in V_p : \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(q) \cap (\Sigma \cap V_p) = \{\varphi_X(\tau(q), q)\}$
4. La función

$$\begin{aligned} \zeta : V_p &\longrightarrow \Sigma \\ q &\longmapsto \varphi_X(\tau(q), q) \end{aligned}$$

es una submersión de clase C^k y $\forall\, q \in V_p : \mathrm{Ker}(D\zeta(q)) = \langle X(q) \rangle$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Benazic [1] o Sotomayor [16]. ■

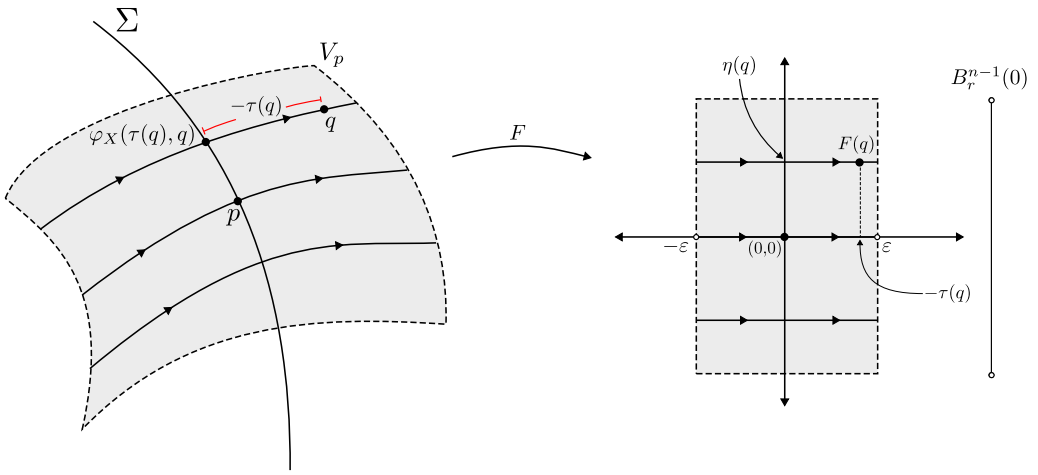


Figura 5.2: El difeomorfismo F "endereza" las órbitas de X.

La función τ se interpreta como el tiempo que requiere un punto cercano a p para llegar a la sección transversal siguiendo el flujo de X.

Proposición 5.1.2. (Restricción del flujo) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ un punto regular y Σ es una C^k-sección transversal local a X en p, si $F := \varphi_X\Big|_{\mathbb{R}\times\Sigma} : \mathbb{R}\times\Sigma \longrightarrow U$ es la restricción del flujo φ_X sobre $\mathbb{R}\times\Sigma$, entonces para cualquier $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\Sigma$, F es un difeomorfismo local de clase C^k en (t_0, y_0) en el sentido de las superficies.

Demostración. Primero, de la Proposición 1.3.6, $\mathbb{R}\times\Sigma$ es una superficie de clase C^k y dimensión n y para cualquier $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\Sigma$,

$$T_{(t_0,y_0)}(\mathbb{R}\times\Sigma) = T_{t_0}\mathbb{R}\times T_{y_0}\Sigma = \mathbb{R}\times T_{y_0}\Sigma$$

y en virtud del Corolario 1.3.3, $DF(t_0, y_0) = D\varphi_X(t_0, y_0)\Big|_{\mathbb{R}\times T_{y_0}\Sigma}$. Si $(s, v) \in \mathrm{Ker}(DF(t_0, y_0))$, entonces $s \in \mathbb{R}$ y $v \in T_{y_0}\Sigma$, además resulta de la Proposición 3.1.1 que

$$0 = DF(t_0, y_0)(s, v) = D_x\varphi_X(t_0, y_0)(sX(y_0) + v)$$

pero como $\varphi_{t_0} : U \longrightarrow U$ es un difeomorfismo, $D\varphi_{t_0}(y_0) = D_x\varphi_X(t_0, y_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, en consecuencia

$$sX(y_0) + v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = -sX(y_0) \in \langle X(y_0)\rangle$$

No obstante, se sigue de la condición de transversalidad que $v \in T_{y_0}\Sigma \cap \langle X(y_0)\rangle = \{0\}$, luego, $sX(y_0) = 0$, pero dado que y_0 es un punto regular, $s = 0$, y así $(s, v) = (0, 0)$.
De este modo, $DF(t_0, y_0) : \mathbb{R}\times T_{y_0}\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un monomorfismo entre espacios vectoriales de la misma dimensión ($\dim(\mathbb{R}\times T_{y_0}\Sigma) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$), y del Álgebra Lineal esto implica que $DF(t_0, y_0)$ sea un difeomorfismo. Por el Teorema de la Función Inversa para superficies (Teorema 1.3.2), se concluye que F es un difeomorfismo local de clase C^k en (t_0, y_0) en el sentido de las superficies. ■

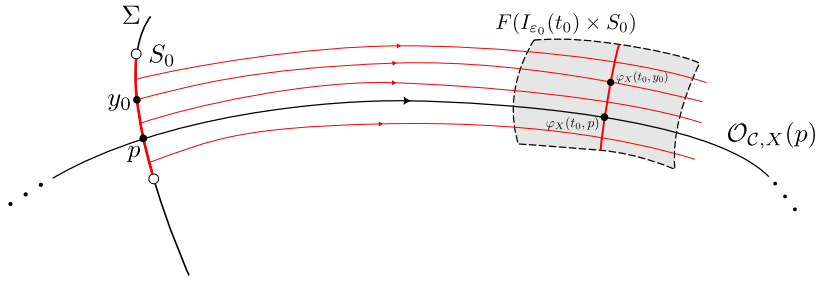


Figura 5.3: Restricción del flujo sobre $\mathbb{R} \times \Sigma$.

5.2. Obtención de la función de Poincaré

Lema 5.2.1. (Existencia del primer tiempo de retorno) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\Sigma \subseteq U$ una C^k-sección transversal local a X en p, y $T > 0$ el menor tiempo tal que $\varphi_X(T, p) \in \Sigma$, entonces existen $W_p \subseteq U$ abierto con $p \in W_p$ y $\tau_\Sigma \in C^k(W_p, \mathbb{R})$ tales que

1. $\tau_\Sigma(p) = T$
2. $\forall\, x \in W_p : \varphi_X(\tau_\Sigma(x), x) \in \Sigma$

Demostración. Del Corolario 5.1.1, existen una vecindad abierta $V_{p_T} \subseteq U$ de $p_T = \varphi_T(p)$ en U y $\tau \in C^k(V_{p_T}, \mathbb{R})$ tales que

$$\begin{aligned} \zeta : V_{p_T} &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longmapsto \varphi_X(\tau(x), x) \end{aligned}$$

es una submersión de clase C^k y $\forall\, q \in V_{p_T} : \mathrm{Ker}(D\zeta(q)) = \langle X(q) \rangle$. Ahora, como $\varphi_{-T} : U \longrightarrow U$ es un difeomorfismo, $W_p := \varphi_{-T}(V_{p_T})$ es un abierto en U que contiene a p, y entonces se puede definir la función

$$\begin{aligned} \tau_\Sigma : W_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto T + \tau(\varphi_X(T, x)) \end{aligned}$$

Esta función es de clase C^k pues τ y φ_T lo son. De las propiedades que cumple τ, como $\varphi_X(T, p) \in \Sigma$, se sigue que $\tau_\Sigma(p) = T$. Por otro lado, la composición $h := \zeta \circ \varphi_T : W_p \longrightarrow \Sigma$ es de clase C^k (en el sentido de las superficies) debido a la Regla de la Cadena (Teorema 1.3.8), y usando la propiedad fundamental del flujo,

$$\forall\, x \in W_p : h(x) = \zeta(\varphi_X(T, x)) = \varphi_X(\tau(\varphi_X(T, x)), \varphi_X(T, x)) = \varphi_X(\tau_\Sigma(x), x) \in \Sigma$$

■

Físicamente, la función τ_Σ se interpreta como el menor tiempo positivo que requiere un punto de la sección transversal para regresar por primera vez siguiendo el flujo de X. En adelante, $\Sigma_p := \Sigma \cap W_p$ es una vecindad abierta en Σ de p que será el dominio de la función de Poincaré, asimismo, para abreviar se denotará por τ en vez de τ_Σ (a menos que se diga lo contrario) a la función tiempo de primer retorno a Σ.

Definición 5.2.1. (Función de Poincaré) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo de periodo $T > 0$ y $\Sigma \subseteq U$ una C^k-sección transversal local a X en p, entonces la *función de Poincaré asociada a* Σ *y a* X se define como

$$\begin{aligned} P : \Sigma_p &\longrightarrow \Sigma \\ y &\longmapsto \varphi_X(\tau(y), y) \end{aligned}$$

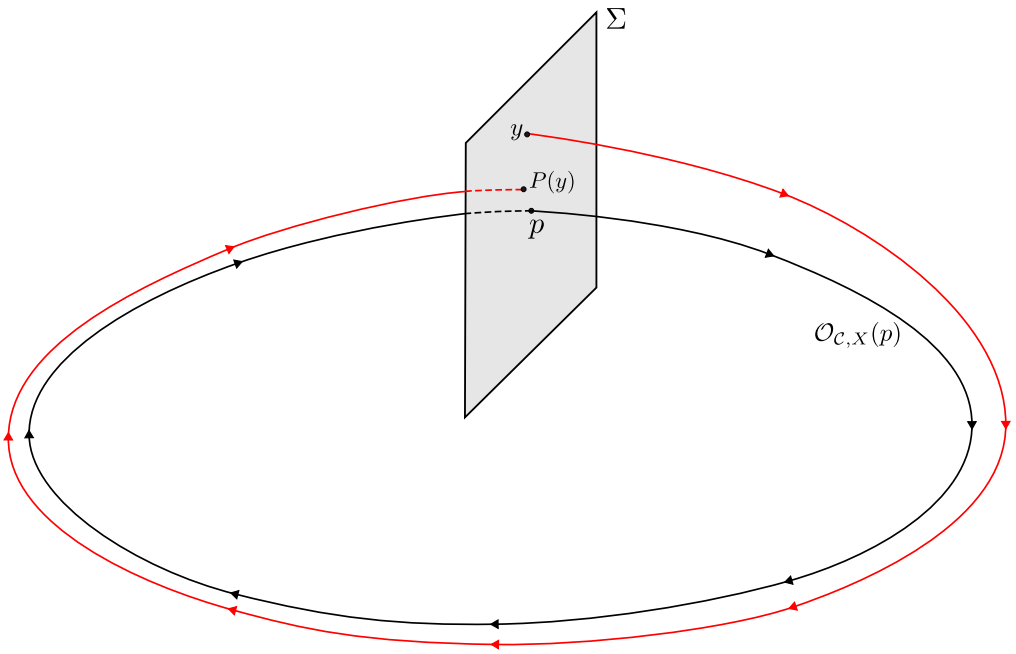


Figura 5.4: Función de Poincaré en $\mathbb{R}^3$.

Observación. p es un punto fijo de P si y solo si $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo. En efecto, si p es un punto fijo de P, entonces $p = P(p) = \varphi_X(\tau(p), p)$, lo cual implica por el Teorema 1.1.2 que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo de periodo $\tau(p)$. Recíprocamente, si $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo de periodo $T > 0$, el tiempo de primer retorno de p a Σ es $\tau(p) = T$, y $P(p) = \varphi_X(\tau(p), p) = \varphi_X(T, p) = p$, luego p es un punto fijo de P.

Ejemplo 5.2.1. (Perko [14]) Recordando el Ejemplo 3.2.2, la solución del P.V.I. asociado a X y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\varphi_{(X,x_0,y_0)}(t) = \begin{cases} (0,0), & (x_0,y_0) = (0,0) \\ (ar(t)\cos(abt+\theta_0), br(t)\sin(abt+\theta_0)), & (x_0,y_0) \neq (0,0) \end{cases}$$

donde $a, b > 0$, el campo $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se define como

$$X(x,y) := \left(-a^2 y + x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), b^2 x + y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right)$$

y la función radial r es

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) e^{-2t}\right]^{-1/2}$$

Por $p = (a, 0)$ pasa una órbita periódica $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ cuyo periodo es $T = \frac{2\pi}{ab}$. Aplicando el Lema 4.5.1 a Γ, se tienen los siguientes casos para $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$: El vector tangente a la órbita en dicho punto es $X(p) = (0, ab^2)$, entonces la porción del hiperplano ortogonal a $X(p)$ que pasa por p es el semieje positivo X:

$$\Sigma = \{(x, 0) \mid x > 0\}$$

Esta superficie tiene como parametrización a

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \Sigma \\ u &\longmapsto (u, 0) \end{aligned}$$

A continuación, se debe encontrar el primer tiempo de retorno a Σ, sea $q = (u, 0) \in \Sigma$, entonces $r_0 = \frac{u}{a}$ y $\theta_0 = 0$, luego

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_q(t) = (ar(t)\cos(abt), br(t)\sin(abt))$$

El primer tiempo de retorno debe satisfacer la siguiente condición:

$$\varphi_q(\tau(q)) = (ar(\tau(q))\cos(ab\tau(q)), br(\tau(q))\sin(ab\tau(q))) \in \Sigma$$

Esto es, $ar(\tau(q))\cos(ab\tau(q)) > 0$ y $br(\tau(q))\sin(ab\tau(q)) = 0$, lo cual implica que

$$\cos(ab\tau(q)) > 0 \quad , \quad \sin(ab\tau(q)) = 0$$

El menor tiempo positivo que verifica esas condiciones es $\tau(q) = \frac{2\pi}{ab}$, entonces la función de Poincaré asociada a Σ y X es

$$P(u, 0) = \left(a\left[1 + \left(\frac{a^2}{u^2} - 1\right) e^{-\frac{4\pi}{ab}}\right]^{-1/2}, 0 \right)$$

y $(a, 0) \in \Sigma$ es su punto fijo.

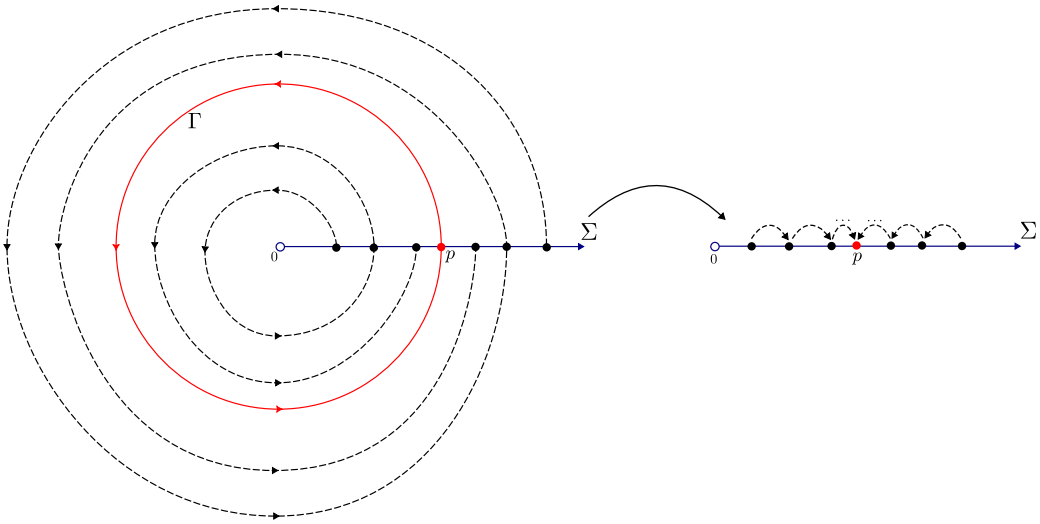


Figura 5.5: Función de Poincaré en $\mathbb{R}^2$ (Ejemplo 5.2.1).

Ejemplo 5.2.2. Recordando el Ejemplo 4.2.1, la solución del P.V.I. asociado a X y $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ es

$$\varphi_{(X,x_0,y_0,z_0)}(t) = \begin{cases} (0, 0, z_0 e^{\lambda t}), & (x_0, y_0) = (0, 0) \\ (ar(t)\cos(abt + \theta_0), br(t)\sin(abt + \theta_0), z_0 e^{\lambda t}), & (x_0, y_0) \neq (0, 0) \end{cases}$$

donde $a, b > 0$, $\lambda \neq 0$, el campo $X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se define como

$$X(x, y, z) := \left(-a^2 y + x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), b^2 x + y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \lambda z \right)$$

y la función radial r es

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) e^{-2t}\right]^{-1/2}$$

Por $p = (a, 0, 0)$ pasa una órbita periódica $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ cuyo periodo es $T = \frac{2\pi}{ab}$. El vector tangente a la órbita en dicho punto es $X(p) = (0, ab^2, 0)$, entonces el hiperplano ortogonal a $X(p)$ que pasa por p es el semiplano derecho XZ:

$$\Sigma = \{(x, 0, z) \mid x > 0\ ,\ z \in \mathbb{R}\}$$

Esta superficie tiene como parametrización a

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \Sigma \\ (u, z) &\longmapsto (u, 0, z) \end{aligned}$$

A continuación, se debe encontrar el primer tiempo de retorno a Σ, sea $q = (u, 0, z) \in \Sigma$, entonces $r_0 = \frac{u}{a}$ y $\theta_0 = 0$, luego

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_q(t) = (ar(t)\cos(abt), br(t)\sin(abt)), z_0 e^{\lambda t})$$

El primer tiempo de retorno debe satisfacer la siguiente condición:

$$\varphi_q(\tau(q)) = (ar(\tau(q))\cos(ab\tau(q)), br(\tau(q))\sin(ab\tau(q)), ze^{\lambda\tau(q)}) \in \Sigma$$

Esto es, $ar(\tau(q))\cos(ab\tau(q)) > 0$ y $br(\tau(q))\sin(ab\tau(q)) = 0$, lo cual implica que

$$\cos(ab\tau(q)) > 0 \quad , \quad \sin(ab\tau(q)) = 0$$

El menor tiempo positivo que verifica esas condiciones es $\tau(q) = \frac{2\pi}{ab}$, entonces la función de Poincaré asociada a Σ y X es

$$P(u, 0, z) = \left(a\left[1 + \left(\frac{a^2}{u^2} - 1\right) e^{-\frac{4\pi}{ab}}\right]^{-1/2}, 0, ze^{\frac{2\pi\lambda}{ab}} \right)$$

y $(a, 0, 0) \in \Sigma$ es su punto fijo.

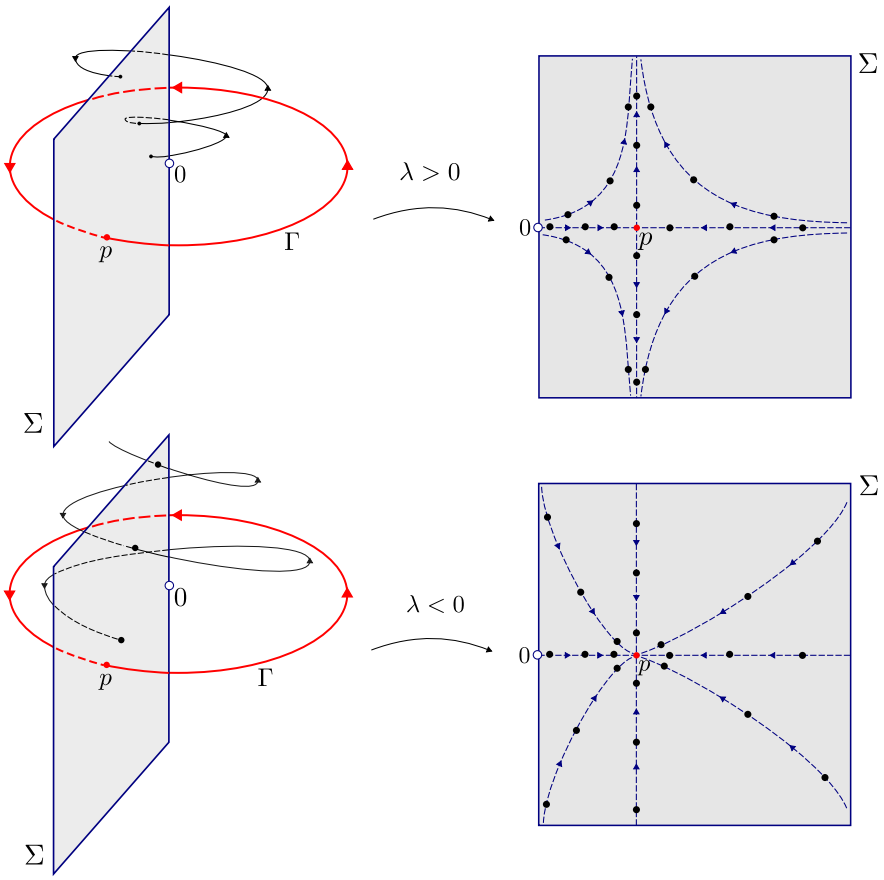


Figura 5.6: Función de Poincaré en $\mathbb{R}^3$ (Ejemplo 5.2.2).

Teorema 5.2.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo de periodo $T > 0$ y $\Sigma \subseteq U$ una C^k-sección transversal local a X en p, entonces $P : \Sigma_p \longrightarrow \Sigma$ es un difeomorfismo de clase C^k local en p en el sentido de las superficies.

Demostración. Procediendo por partes:

1. P **es de clase** C^k **en el sentido de las superficies:** Si h es la función del Lema 5.2.1, entonces $P = h\Big|_{\Sigma_p}$ y en virtud del Corolario 1.3.3, P es de clase C^k en el sentido de las superficies y
$$DP(p) = Dh(p)\Big|_{T_p\Sigma}$$

2. P **es un difeomorfismo local en** p**:** Si $v \in \mathrm{Ker}(DP(p))$, entonces $v \in T_p\Sigma$ y por la Regla de la Cadena (Proposición 1.3.8) y el Corolario 5.1.1,
$$0 = DP(p)(v) = D\zeta(p) \cdot D\varphi_T(p)(v) \iff D\varphi_T(p)(v) \in \mathrm{Ker}(D\zeta(p)) = \langle X(p)\rangle$$
Esto es, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $D\varphi_T(p)(v) = D_x\varphi_X(T,p)(X(p)) = cX(p)$. Sin embargo, del Lema 3.1.1 y puesto que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es T-periódica,
$$D_x\varphi_X(T,p)(X(p)) = X(\varphi_T(p)) = X(p)$$
Ahora, $\varphi_T : U \longrightarrow U$ es un difeomorfismo, entonces $D\varphi_T(p) = D_x\varphi_X(T,p) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, esto implica que $v = cX(p)$, y así $v \in \langle X(p)\rangle$. Sin embargo, por la condición de transversalidad de Σ, resulta que $v \in T_p\Sigma \cap \langle X(p)\rangle = \{0\}$.
Es decir, $DP(p) : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$ es un monomorfismo entre espacios vectoriales de la misma dimensión y por consiguiente, $DP(p)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, se concluye del Teorema de la Función Inversa para superficies (Teorema 1.3.2) que P es un difeomorfismo local en p.

■

Observación. Para el campo X, la función tiempo de primer retorno es $\tau = \tau_X$ y la función de Poincaré es $P = P_X$. Una manera de obtener la inversa local de P es aplicando el Lema 5.2.1 sobre el campo $-X$, para ese campo existen la función tiempo de primer retorno τ_{-X} y función de Poincaré P_{-X}.

El tiempo que necesita $y \in \Sigma$ para retornar a Σ siguiendo el flujo de $-X$ es el mismo tiempo que necesita $P_{-X}(y) \in \Sigma$ para retornar a Σ siguiendo el flujo de X (ver Figura 5.7), entonces
$$\tau_X(P_{-X}(y)) = \tau_{-X}(y) \quad , \quad \tau_{-X}(P_X(x)) = \tau_X(x) \tag{5.1}$$

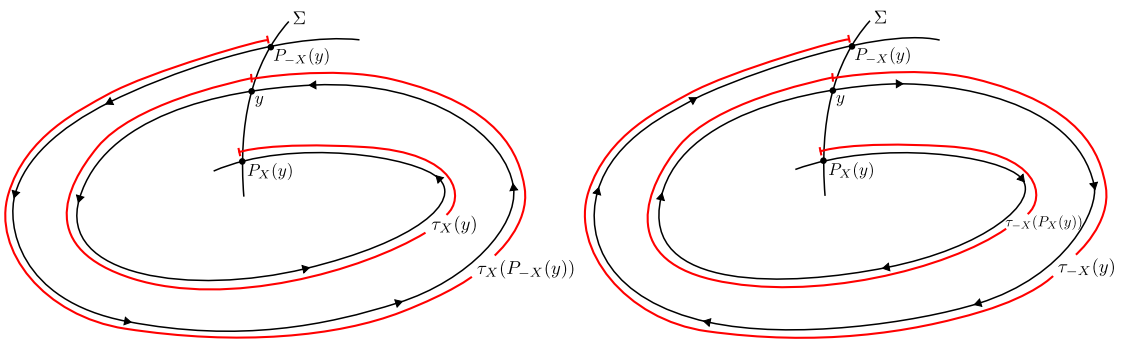


Figura 5.7: Relación entre las funciones de Poincaré de X y $-X$.

Luego, de (5.1) y usando la propiedad fundamental del flujo e invirtiendo el flujo,

$$\begin{aligned}(P_X \circ P_{-X})(y) &= \varphi_X(\tau_X(P_{-X}(y)), P_{-X}(y)) = \varphi_X(\tau_X(P_{-X}(y)), \varphi_{-X}(\tau_{-X}(y), y)) \\ &= \varphi_X(\tau_X(P_{-X}(y)), \varphi_X(-\tau_{-X}(y), y)) \\ &= \varphi_X(\tau_X(P_{-X}(y)) - \tau_{-X}(y), y) = \varphi_X(0, y) = y \\ (P_{-X} \circ P_X)(x) &= \varphi_{-X}(\tau_{-X}(P_X(x)), P_X(x)) = \varphi_{-X}(\tau_{-X}(P_X(x)), \varphi_X(\tau_X(x), x)) \\ &= \varphi_X(-\tau_{-X}(P_X(x)), \varphi_X(\tau_X(x), x)) \\ &= \varphi_X(\tau_X(x) - \tau_{-X}(P_X(x)), x) = \varphi_X(0, x) = x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P_{-X} = (P_X)^{-1}$ en un entorno de p.

Si bien se elige un punto de una órbita periódica y en él se traza una sección transversal, este procedimiento puede realizarse en cualquier punto de la órbita, dando lugar a una función de Poincaré asociada a cada sección. Así, podría pensarse que la elección concreta del punto y de la sección transversal son determinantes para estudiar la estabilidad de la órbita a través del mapa de Poincaré. Sin embargo, esto no es así: la información sobre la estabilidad es independiente de dicha elección.

Teorema 5.2.2. (Sotomayor) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo de periodo $T > 0$, $q_1, q_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ y $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq U$ C^k-secciones transversales locales a X en q_1 y q_2 respectivamente, si $P_1 : \Sigma_{1,1} \longrightarrow \Sigma_1$ y $P_2 : \Sigma_{2,2} \longrightarrow \Sigma_2$ son sus respectivas funciones de Poincaré, entonces P_1 y P_2 son localmente C^k-conjugados, esto es, existe $\alpha : \Sigma_{1,1} \longrightarrow \Sigma_2$ difeomorfismo local de clase C^k en q_1 con $\alpha(q_1) = q_2$ tal que $\alpha \circ P_1 = P_2 \circ \alpha$.

Demostración. Como $q_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(q_2) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es una órbita T-periódica. Ahora, $q_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(q_2)$, entonces existe un único $t_{12} \in [0, T)$ tal que $q_2 = \varphi_X(t_{12}, q_1) = \varphi_{t_{12}}(q_1)$.

Por otro lado, aplicando el Corolario 5.1.1 a Σ_2, existen $V_2 \subseteq U$ con $q_2 \in V_2$ y $\tau \in C^k(V_2, \mathbb{R})$ tales que

$$\begin{aligned}\zeta : V_2 &\longrightarrow \Sigma_2 \\ y &\longmapsto \varphi_X(\tau(y), y)\end{aligned}$$

es una submersión de clase C^k y $\forall\, q \in V_2 : \mathrm{Ker}(D\zeta(q)) = \langle X(q) \rangle$.
Puesto que $q_2 = \varphi_X(t_{12}, q_1) = \varphi_{t_{12}}(q_1)$, $V_2 \subseteq U$ es una vecindad abierta de q_2 y $\varphi_{t_{12}} : U \longrightarrow U$ es continua en q_1, existe una vecindad abierta $V_1 \subseteq U$ de q_1 tal que

$$\forall\, q \in V_1 : \varphi_{t_{12}}(q) \in V_2$$

Así que, sin pérdida de generalidad, se puede considerar $\Sigma_{1,1} = \Sigma_1 \cap V_1$. Esto permite definir la función $\alpha := (\zeta \circ \varphi_{t_{12}})\Big|_{\Sigma_{1,1}} : \Sigma_{1,1} \longrightarrow \Sigma_2$, luego, usando la propiedad fundamental del flujo (Proposición 1.1.9), para $y \in \Sigma_{1,1}$,

$$\alpha(y) = \zeta(\varphi_{t_{12}}(y)) = \varphi_X(\tau(\varphi_X(t_{12}, y)), \varphi_X(t_{12}, y)) = \varphi_X(t_{12} + \tau(\varphi_X(t_{12}, y)), y)$$

En consecuencia, se tiene la función

$$\begin{aligned}\tau_{12} : \Sigma_{1,1} &\longrightarrow \Sigma_2 \\ y &\longmapsto t_{12} + \tau(\varphi_X(t_{12}, y))\end{aligned}$$

La cual es continua en $\Sigma_{1,1}$ y verifica que $\tau_1(q_1) = T > t_{12} = \tau_{12}(q_1)$, esto implica que $\Sigma_{1,1}$ puede reducirse de tal modo que $\forall\, y \in \Sigma_{1,1} : \tau_1(y) > \tau_{12}(y)$.

1. $\alpha(q_1) = q_2$**:** En efecto, como $q_2 = \varphi_X(t_{12}, q_1) \in \Sigma_2$,

$$\alpha(q_1) = \varphi_X(t_{12} + \tau(q_2), q_1) = \varphi_X(t_{12}, q_1) = q_2$$

2. α **es de clase** C^k **en el sentido de las superficies:** Puesto que ζ y $\varphi_{t_{12}}$ son de clase C^k en el sentido de las superficies, se sigue del Corolario 1.3.2 que $\zeta \circ \varphi_{t_{12}}$ es de clase C^k en el sentido de las superficies. Luego, como $\Sigma_{1,1}$ es una superficie, la restricción $\alpha = (\zeta \circ \varphi_{t_{12}})\Big|_{\Sigma_{1,1}}$ es de clase C^k en el sentido de las superficies gracias al Corolario 1.3.3, además $D\alpha(q_1) = D(\zeta \circ \varphi_{t_{12}})(q_1)\Big|_{T_{q_1}\Sigma_1}$.

3. α **es un difeomorfismo local en** q_1**:** Si $v \in \mathrm{Ker}(D\alpha(q_1))$, entonces $v \in T_{q_1}\Sigma_1$ y usando la Regla de la Cadena (Proposición 1.3.8) y el Corolario 5.1.1,

$$0 = D\alpha(q_1)(v) = D\zeta(q_2) \cdot D\varphi_{t_{12}}(q_1)(v) \iff D\varphi_{t_{12}}(q_1)(v) \in \mathrm{Ker}(D\zeta(q_2)) = \langle X(q_2) \rangle$$

Esto es, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $D\varphi_{t_{12}}(q_1)(v) = D_x\varphi_X(t_{12}, q_1)(v) = cX(q_2)$. Sin embargo, del Lema 3.1.1,

$$D_x\varphi_X(t_{12}, q_1)(X(q_1)) = X(\varphi_{t_{12}}(q_1)) = X(q_2)$$

Ahora, $\varphi_{t_{12}} : U \longrightarrow U$ es un difeomorfismo, entonces $D\varphi_{t_{12}}(q_1) = D_x\varphi_X(t_{12}, q_1) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, esto implica que $v = cX(q_1)$, y así $v \in \langle X(q_1) \rangle$. No obstante, por la condición de transversalidad de Σ_1, resulta que $v = T_{q_1}\Sigma_1 \cap \langle X(q_1) \rangle = \{0\}$. Es decir, $D\alpha(q_1) : T_{q_1}\Sigma_1 \longrightarrow T_{q_2}\Sigma_2$ es un monomorfismo entre espacios vectoriales de la misma dimensión y por ende, $D\alpha(q)$ es un isomorfismo. En virtud del Teorema de la Función Inversa para superficies (Teorema 1.3.2), se concluye que α es un difeomorfismo local en q_1.

4. α **conjuga** P_1 **y** P_2**:** Si $y \in \Sigma_{1,1}$, entonces $\alpha(y)$ es la primera intersección de $\mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(p)$ con Σ_2. Ahora,

$$P_1(y) = \varphi_X(\tau_1(y), y) = \varphi_X(\tau_1(y) - \tau_{12}(y), \alpha(y)) \in \Sigma_1 \cap \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(\alpha(y))$$

Luego, $\alpha(P_1(y))$ es la primera intersección de la semiórbita positiva que pasa por $P_1(y)$ con Σ_2. Dado que esta órbita está contenida en la órbita que parte desde $\alpha(y)$, $\alpha(P_1(y))$ es el primer retorno de $\alpha(y)$ a Σ_2 (Figura 5.8):

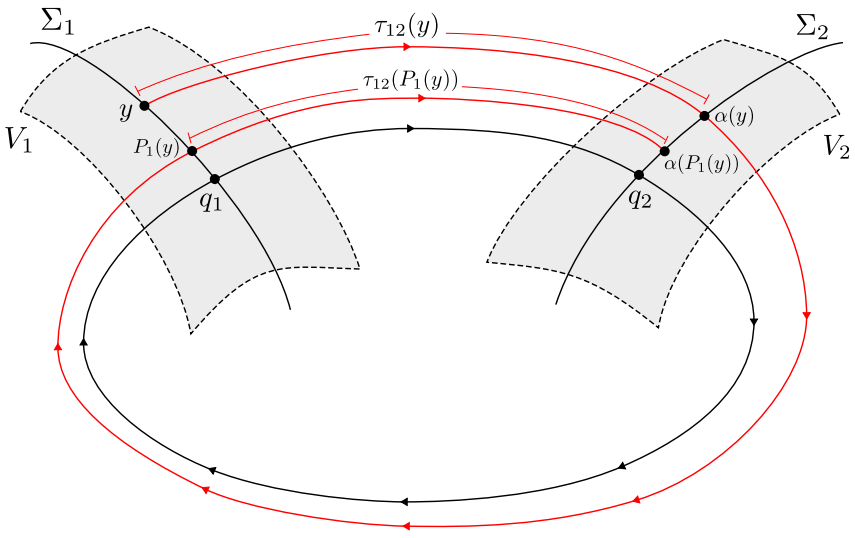


Figura 5.8: Conjugación local entre funciones de Poincaré

Sin embargo, dicho punto es, por definición, $P_2(\alpha(y))$. Por ende, $\alpha(P_1(y)) = P_2(\alpha(y))$. Así, $\alpha \circ P_1 = P_2 \circ \alpha$ en un entorno de q_1 en $\Sigma_{1,1}$.

■

Corolario 5.2.1. En las condiciones del Teorema 5.2.2, $DP_1(q_1)$ y $DP_2(q_2)$ tienen los mismos autovalores.

Demostración. Dado que $\alpha \circ P_1 = P_2 \circ \alpha$, usando la Regla de la Cadena (Teorema 1.3.8),

$$D\alpha(q_1) \cdot DP_1(q_1) = DP_2(q_2) \cdot D\alpha(q_1)$$

Como $\alpha : \Sigma_{1,1} \longrightarrow \Sigma_2$ es un difeomorfismo, $D\alpha(q_1) : T_{q_1}\Sigma_1 \longrightarrow T_{q_2}\Sigma_2$ es un isomorfismo lineal, entonces

$$DP_1(q_1) = [D\alpha(q_1)]^{-1} \cdot DP_2(q_2) \cdot D\alpha(q_1)$$

Esto muestra que $DP_1(q_1)$ y $DP_2(q_2)$ son linealmente conjugados. Por lo tanto, $DP_1(q_1)$ y $DP_2(q_2)$ tienen los mismos autovalores. ■

Observación. Algunas consideraciones sobre la función de Poincaré:

1. Del Teorema 5.2.1, P es un difeomorfismo local en p en el sentido de las superficies, entonces se puede reducir Σ_p de tal modo que P sea un difeomorfismo.

2. $\tau(p) = T$, entonces por continuidad de τ, se puede reducir W_p de tal modo que

$$\forall\, x \in W_p : \tau(x) \in \left(\frac{T}{2}, 2T\right) \tag{5.2}$$

3. Si todos los iterados de P en y están bien definidos, entonces para $m \in \mathbb{N}_0$ se define el *tiempo de llegada de* $y \in \Sigma_p$ *hasta el* m*-ésimo iterado de* P como

$$T_0(y) = 0 \quad , \quad T_m(y) = \sum_{j=0}^{m-1} \tau(P^j(y)) \tag{5.3}$$

   Luego, existe una fórmula explicita para cada iterado,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : P^m(y) = \varphi_X(T_m(y), y) \tag{5.4}$$

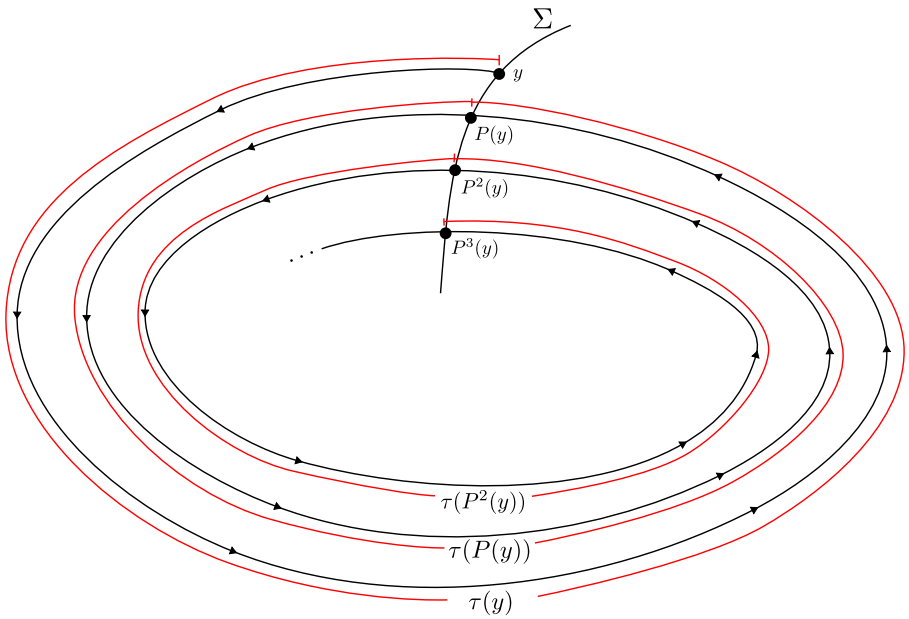


Figura 5.9: Iteraciones de la función de Poincaré y sus tiempos de llegada.

En efecto, se cumple para $m = 0$, entonces se asume por hipótesis inductiva que se cumple para m, entonces usando la definición de la función de Poincaré y la propiedad fundamental del flujo,

$$\begin{aligned} P^{m+1}(y) &= P(P^m(y)) = \varphi_X(\tau(P^m(y)), P^m(y)) \\ &= \varphi_X(\tau(P^m(y)), \varphi_X(T_m(y), y)) \\ &= \varphi_X(\tau(P^m(y)) + T_m(y), y)) \\ &= \varphi_X(T_{m+1}(y), y) \end{aligned}$$

4. Con las previas consideraciones, si $y \in \Sigma_p$, entonces $\{T_m(y)\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión estrictamente creciente y divergente. En efecto, para cualquier $y \in \Sigma_p$ se cumple que $\frac{T}{2} < \tau(y) < 2T$ por (5.2), después, como todos los iterados existen y pertenecen a Σ_p,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : T_{m+1}(y) = T_m(y) + \tau(P^m(y)) > T_m(y)$$

y también

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : \tau(P^m(y)) > \frac{T}{2}$$

pero

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{T}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{mT}{2} = \infty$$

entonces por el Criterio de Comparación para series,

$$\lim_{m\to\infty} T_m(y) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \tau(P^j(y)) = \infty \tag{5.5}$$

Lema 5.2.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ una órbita periódica, entonces

$$\exists\, \delta > 0 : B_\delta(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \subseteq \varphi_X(\mathbb{R} \times \Sigma)$$

Demostración. Sea $q \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$, entonces existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q = \varphi_X(t_0, p)$. Ahora, $F := \varphi_X\Big|_{\mathbb{R}\times\Sigma} : \mathbb{R} \times \Sigma \longrightarrow U$ es un difeomorfismo local de clase C^k en (t_0, p) debido a la Proposición 5.1.2, esto es, existen $\varepsilon_0 > 0$, $S_p \subseteq \Sigma$ y $V_q \subseteq U$ abiertos con $p \in S_p$ y $q = F(t_0, p) \in V_q$ tales que $F\Big|_{I_{\varepsilon_0}(t_0)\times S_p} : I_{\varepsilon_0}(t_0) \times S_p \longrightarrow V_q$ es un difeomorfismo de clase C^k. Por definición resulta que $V_q \subseteq \varphi_X(\mathbb{R} \times \Sigma)$.
Tomando la unión de esas vecindades sobre toda la órbita $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$, resulta que

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) \subseteq \bigcup_{q\in\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)} V_q =: V \subseteq \varphi_X(\mathbb{R} \times \Sigma)$$

V es abierto en U por ser una unión de abiertos en U pero como U es abierto en $\mathbb{R}^n$, V también lo es. Asimismo, $K = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un conjunto compacto contenido en V, entonces por el Lema 4.1.2, $\exists\, \delta > 0 : B_\delta(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \subseteq V \subseteq \varphi_X(\mathbb{R} \times \Sigma)$. ■

Lema 5.2.3. (Control de órbitas cercanas) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ una órbita periódica y $\Sigma \subseteq U$ una C^k-sección transversal local a X en p, entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, y \in \Sigma \cap B_\delta(p), \forall\, s \in [0, 2T] : \varphi_X(s, y) \in B_\varepsilon(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p))$$

Demostración. Se consideran las funciones

$$\begin{aligned} g : [0,2T] \times \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} & \qquad G : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s,y) &\longmapsto d(\varphi_X(s,y), \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) & \qquad y &\longmapsto \max_{s\in[0,2T]}\{g(s,y)\} \end{aligned}$$

Afirmación. G es continua en Σ

En primer lugar, $g = d_{\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)} \circ \varphi_X$ es una composición de funciones continuas, entonces g es continua en $[0,2T] \times \Sigma$.
Sean $y_0 \in \Sigma$ y $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ una sucesión tal que $\lim_{m\to\infty} y_m = y_0$, desde que $[0,2T]$ es compacto, existe una sucesión $\{s_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq [0,2T]$ tal que $G(y_m) = g(s_m, y_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y de la compacidad de $[0,2T]$,

$$\exists\, s^* \in [0,2T], \exists\, \{s_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \{s_m\}_{m=1}^{\infty} : \lim_{m\to\infty} s_{k_m} = s^*$$

Por continuidad de g, $\lim_{m\to\infty} g(s_{k_m}, y_{k_m}) = g(s^*, y_0) \leq G(y_0)$. Cualquier subsucesión convergente está acotada superiormente por $G(y_0)$ y el límite superior es el mayor límite de una subsucesión convergente (Rudin [15]),

$$\limsup_{m\to\infty} G(y_m) \leq G(y_0)$$

Ahora, existe $t_0 \in [0,2T]$ tal que $G(y_0) = g(t_0, y_0)$, por definición de máximo, se tiene que $G(y_m) \geq g(t_0, y_m)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, así que tomando límite inferior,

$$\liminf_{m\to\infty} G(y_m) \geq \liminf_{m\to\infty} g(t_0, y_m) = g(t_0, y_0) = G(y_0)$$

Por ende, $\lim_{m\to\infty} G(y_m) = G(y_0)$. De este modo, G es continua en Σ.

En particular,

$$\forall\, s \in [0,2T] : \varphi_X(s,p) \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) \quad \Longrightarrow \quad \forall\, s \in [0,2T] : g(s,p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad G(p) = 0$$

y así, de la *Afirmación*, como G es continua en p,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, y \in \Sigma \cap B_\delta(p) : |G(y)| = \max_{s\in[0,2T]}\{d(\varphi_X(s,y), \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p))\} < \varepsilon$$

Esto se traduce en

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, y \in \Sigma \cap B_\delta(p), \forall\, s \in [0,2T] : \varphi_X(s,y) \in B_\varepsilon(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p))$$

■

Lema 5.2.4. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ una órbita periódica y $\Sigma \subseteq U$ una C^k-sección transversal local a X en p, si $\overline{\Sigma} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) = \{p\}$, entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta \in (0,\varepsilon) : \Sigma \cap B_\eta(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \subseteq \Sigma \cap B_\varepsilon(p)$$

Demostración. Suponiendo que

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, \eta \in (0,\varepsilon), \exists\, x_\eta \in \Sigma : (d(x_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) < \eta\ ,\ |x_\eta - p| \geq \varepsilon_0)$$

se construye una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ tal que

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : (d(x_m, \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) < \frac{\varepsilon_0}{m} \quad , \quad |x_m - p| \geq \varepsilon_0) \tag{5.6}$$

Como $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es una órbita periódica, es un conjunto compacto, entonces

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \exists\, y_m \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) : |x_m - y_m| = d(x_m, \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) < \frac{\varepsilon_0}{m}$$

Una vez más, por la compacidad de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$,

$$\exists\, y \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p), \exists\, \{y_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \{y_m\}_{m=1}^{\infty} : \lim_{m\to\infty} y_{k_m} = y$$

En consecuencia, $\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = y$. En efecto, pues

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : |x_{k_m} - y| \leq |x_{k_m} - y_{k_m}| + |y_{k_m} - y| < \frac{\varepsilon_0}{k_m} + |y_{k_m} - y|$$

y cuando $m \to \infty$, por el Teorema del Sándwich, $\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = y$. Esto indica que $y \in \overline{\Sigma}$, además $y \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$, entonces $y \in \overline{\Sigma} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) = \{p\}$, esto es, $\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = p$, pero esto contradice (5.6). Por reducción al absurdo, el lema está demostrado. ■

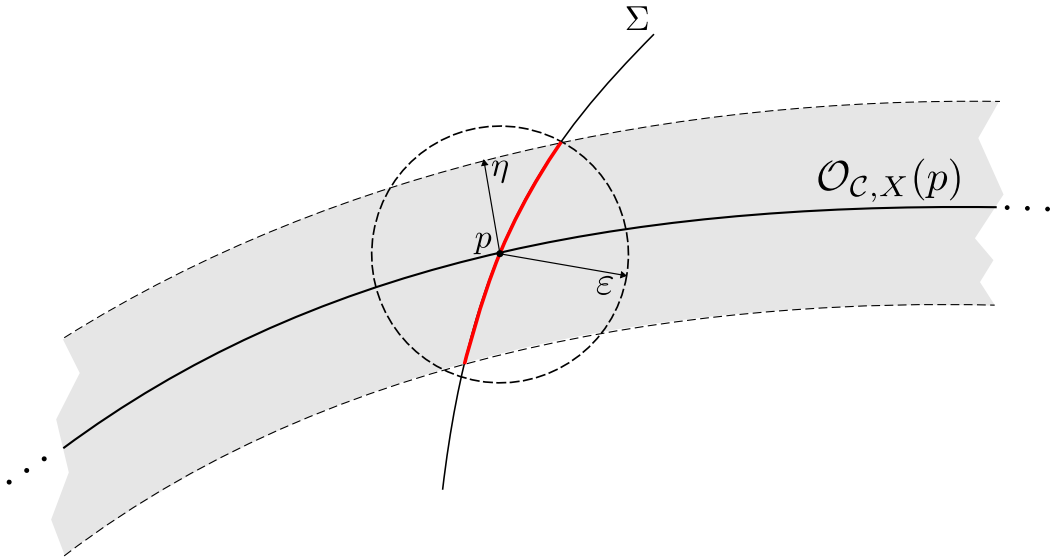


Figura 5.10: Vecindad de un ciclo y su sección transversal.

Teorema 5.2.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$, $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo de periodo $T > 0$, si $\Sigma \subseteq U$ es una sección transversal local de clase C^k a X en p y P es la función de Poincaré, entonces Γ es un ciclo (asintóticamente) estable de X si y solo si p es un punto fijo (asintóticamente) estable de P.

Demostración. ($\Leftarrow$) : **Estabilidad:** Sea $\varepsilon > 0$, entonces del Lema 5.2.3,

$$\exists\, \varepsilon_1 > 0, \forall\, y \in \Sigma_p \cap B_{\varepsilon_1}(p), \forall\, s \in [0, 2T] : \varphi_X(s, y) \in B_\varepsilon(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \tag{5.7}$$

Dado que p es un punto fijo estable de P, entonces

$$\exists\, \delta_1 > 0, \forall\, y \in \Sigma_p \cap B_{\delta_1}(p), \forall\, m \in \mathbb{N}_0 : P^m(y) \in \Sigma_p \cap B_{\varepsilon_1}(p) \tag{5.8}$$

En virtud del Lema 5.2.2,

$$\exists\, \delta > 0 : B_\delta(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \subseteq \varphi_X(\mathbb{R} \times (\Sigma_p \cap B_{\delta_1}(p))) \tag{5.9}$$

Si $q \in B_\delta(\Gamma)$ y $t \geq 0$, entonces por (5.9) existen $t_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in \Sigma_p \cap B_{\delta_1}(p)$ tales que $q = \varphi_X(t_0, y_0)$, luego $\lim_{m\to\infty}(T_m(y_0) - t_0) = +\infty$ por (5.5). En consecuencia, por definición de límite y el principio del buen orden en $\mathbb{N}$,

$$\exists!\, m \in \mathbb{N}_0 : T_{m+1}(q) = T_m(y_0) + \tau(P^m(y_0)) > t + t_0 \geq T_m(y_0)$$

Luego, $s := t + t_0 - T_m(y_0) \in [0, \tau(P^m(y_0))) \subseteq [0, 2T]$, y de (5.7), (5.8) y la propiedad fundamental del flujo,

$$\varphi_X(t, q) = \varphi_X(t + t_0, y_0) = \varphi_X(s + T_m(y_0), y_0) = \varphi_X(s, P^m(y_0)) \in B_\varepsilon(\Gamma)$$

Por lo tanto, Γ es un ciclo estable de X.

Atracción: Dado que p es un punto fijo atractor de P, resulta que

$$\exists\, \eta > 0, \forall\, y \in \Sigma_p \cap B_\eta(p) : \lim_{m\to\infty} P^m(y) = p \tag{5.10}$$

Usando una vez más el Lema 5.2.2,

$$\exists\, r > 0 : B_r(\Gamma) \subseteq \varphi_X(\mathbb{R} \times (\Sigma_p \cap B_\eta(p))) \tag{5.11}$$

Si $q \in B_r(\Gamma)$, entonces por (5.11) existen $t_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in \Sigma_p \cap B_\eta(p)$ tales que $q = \varphi_X(t_0, y_0)$, luego se tiene por (5.10) que $\lim_{m\to\infty} P^m(y_0) = p$. Ahora, si $\varepsilon > 0$, entonces del Lema 5.2.3

$$\exists\, \delta > 0, \forall\, y \in \Sigma_p \cap B_\delta(p), \forall\, s \in [0, 2T] : \varphi_X(s, y) \in B_\varepsilon(\Gamma) \tag{5.12}$$

Por definición de límite, resulta que

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_1 : P^m(y_0) \in \Sigma_p \cap B_\delta(p) \tag{5.13}$$

Sin embargo, dado que $\lim_{m\to\infty}(T_m(y_0) - t_0) = \infty$ por (5.5),

$$\exists\, m_2 \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_2 : T_m(y_0) - t_0 \geq 0 \tag{5.14}$$

Eligiendo $m_0 := \text{máx}\{m_1, m_2\} \in \mathbb{N}$, si $t \geq T_{m_0}(y_0) - t_0 \geq 0$, entonces por definición de límite y el principio del buen orden en $\mathbb{N}_0$

$$\exists!\, m \geq m_0 : t + t_0 \in [T_m(y_0), T_{m+1}(y_0))$$

y también $s := t + t_0 - T_m(y_0) \in [0, \tau(P^m(y_0))) \subseteq [0, 2T]$. Finalmente, de (5.12), (5.13) y la propiedad fundamental del flujo,

$$\varphi_X(t, q) = \varphi_X(t + t_0, y_0) = \varphi_X(s + T_m(y_0), y_0) = \varphi_X(s, P^m(y_0)) \in B_\varepsilon(\Gamma)$$

Esto es, $\lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t, q), \Gamma) = 0$. Por lo tanto, Γ es un ciclo atractor de X.

($\Rightarrow$) : **Estabilidad:** Sea $\varepsilon > 0$, entonces por el Lema 5.2.4

$$\exists\, \eta \in (0, \varepsilon) : \Sigma_p \cap B_\eta(\Gamma) \subseteq \Sigma_p \cap B_\varepsilon(p) \tag{5.15}$$

Dado que Γ es un ciclo estable de X,

$$\exists\, \delta > 0, \forall\, q \in B_\delta(\Gamma) : \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(q) \subseteq B_\eta(\Gamma) \tag{5.16}$$

Si $y \in \Sigma_p \cap B_\delta(p)$, entonces por la Proposición 4.1.1, $y \in \Sigma_p \cap B_\delta(\Gamma)$, luego de (5.15) y (5.16)

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : P^m(y) \in \Sigma_p \cap \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(y) \subseteq \Sigma_p \cap B_\eta(\Gamma) \subseteq \Sigma_p \cap B_\varepsilon(p)$$

De este modo, p es un punto fijo estable de P.

Atracción: Puesto que Γ es un ciclo atractor de X,

$$\exists\, \eta > 0, \forall\, q \in B_\eta(\Gamma) : \lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t,q),\Gamma) = 0 \tag{5.17}$$

Si $y \in \Sigma_p \cap B_\eta(p)$, entonces por la Proposición 4.1.1, $y \in \Sigma_p \cap B_\eta(\Gamma)$, pero dado que $\lim_{m\to\infty} T_m(y) = \infty$ por (5.5), del criterio secuencial resulta de (5.17) que

$$\lim_{m\to\infty} d(\varphi_X(T_m(y),y),\Gamma) = \lim_{m\to\infty} d(P^m(y),\Gamma) = 0$$

Si $\varepsilon > 0$, entonces del Lema 5.2.4,

$$\exists\, r \in (0,\varepsilon) : \Sigma_p \cap B_r(\Gamma) \subseteq \Sigma_p \cap B_\varepsilon(p) \tag{5.18}$$

pero por definición de límite y por (5.18)

$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_0 : P^m(y_0) \in \Sigma_p \cap B_r(\Gamma) \subseteq \Sigma_p \cap B_\varepsilon(p)$$

Esto es, $\lim_{m\to\infty} P^m(y) = p$. Por lo tanto, p es un punto fijo atractor de P. ■

Sea $\sigma : V \longrightarrow \Sigma$ una parametrización de la sección transversal Σ, con $\sigma(0) = p$ (salvo mediante traslación), se denota por $V_0 := \sigma^{-1}(\Sigma_p)$. Del Teorema 5.2.1 se sabe que P es un difeomeorfismo de clase C^k en el sentido de las superficies; por tanto, su representación en coordenadas locales

$$\hat{P} = \sigma^{-1} \circ P \circ \sigma : V_0 \longrightarrow V$$

es un difeomorfismo de clase C^k en el sentido usual. Se cumple en consecuencia que P y $\hat{P}$ son C^k-conjugados por el difeomorfismo σ, esto es porque las parametrizaciones son difeomorfismos en el sentido de las superficies (Ejemplo 1.3.6):

$$\sigma \circ \hat{P} = P \circ \sigma$$

Como p es punto fijo de P, se tiene que 0 es punto fijo de $\hat{P}$. Además, de manera análoga al Corolario 5.2.1, se concluye que $DP(p)$ y $D\hat{P}(0)$ tienen los mismos autovalores.

Corolario 5.2.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ una órbita periódica, $\Sigma \subseteq U$ una C^k-sección transversal local a X en p y $\sigma : V \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \Sigma$ una parametrización de Σ, con $\sigma(0) = p$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo (asintóticamente) estable de X.
2. p es un punto fijo (asintóticamente) estable de P.
3. 0 es un punto fijo (asintóticamente) estable de $\hat{P}$.

Demostración. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) : Es el Teorema 5.2.3.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) : P y $\hat{P}$ son C^k-conjugados, entonces, por la Proposición 2.4.3, p es un punto fijo (asintóticamente) estable de P si y solo si 0 es un punto fijo (asintóticamente) estable de $\hat{P}$. ■

Concretamente, para $n = 2$, resulta que $V \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, el cual será denotado por I, y en consecuencia, $\hat{P}$ es una función real de variable real. Así, el estudio de la función de Poincaré se reduce al análisis de una función $\hat{P} : I_0 \longrightarrow I$ con $\hat{P}(0) = 0$.

Lema 5.2.5. (Teschl) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $q \in U$ un punto regular de X, si $\omega_X(q)$ (resp. $\alpha_X(q)$) es conexo y existe una órbita periódica $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ tal que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) \subseteq \omega_X(q)$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) \subseteq \alpha_X(p)$), entonces $\omega_X(q) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ (resp. $\alpha_X(q) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$).

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Teschl [17]. ■

Lema 5.2.6. (Dini) Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(I, \mathbb{R})$ una sucesión de funciones tal que

1. $f_n \to f$ puntualmente en I.
2. $f \in C(I, \mathbb{R})$
3. $\forall\, x \in I : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ es monótona.

entonces $f_n \to f$ uniformemente en I.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Lages [11]. ■

Teorema 5.2.4. (Perko) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ una órbita periódica, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo asintóticamente estable de X si y solo si es un ciclo límite estable de X.

Demostración. ($\Rightarrow$) : Dado que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo asintóticamente estable de X, se sigue del Teorema 5.2.3 que p es un punto fijo asintóticamente estable de P. En particular, p es un punto fijo atractor de P, esto es,

$$\exists\, \eta > 0, \forall\, y \in \Sigma_p \cap B_\eta(p) : \lim_{m\to\infty} P^m(y) = p \tag{5.19}$$

Del Lema 5.2.2,

$$\exists\, \rho > 0 : B_\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \subseteq \varphi_X(\mathbb{R} \times (\Sigma_p \cap B_\eta(p))) \tag{5.20}$$

En particular, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo estable de X, entonces

$$\exists\, r > 0, \forall q \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) : \mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(q) \subseteq B_{\frac{\varrho}{2}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) \tag{5.21}$$

y $K := B_{\frac{\varrho}{2}}[\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)]$ es un compacto, en consecuencia, se sigue del Teorema 4.2.4 que $\omega_X(q)$ es conexo para cualquier $q \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p))$.
Sea $q \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p))$, entonces de (5.20) y (5.21), resulta que $q = \varphi_X(t_0, y_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in \Sigma_p \cap B_\eta(p)$. Sin embargo,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : P^m(y_0) = \varphi_X(T_m(y_0), y_0) \quad , \quad \lim_{m\to\infty} T_m(y_0) = \infty$$

Esto es, de (5.19) se tiene que $p \in \omega_X(y_0)$, pero como q pertenece a la órbita de y_0, se sigue de la Proposición 4.2.2 que $\omega_X(q) = \omega_X(y_0)$, y puesto que el conjunto ω-límite es invariante por X, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) \subseteq \omega_X(q)$. Finalmente, del Lema 5.2.5 se concluye que $\omega_X(q) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo límite estable de X.

($\Leftarrow$) : Sea $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo límite estable, entonces

$$\exists\, r > 0, \forall\, q \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)) : \omega_X(q) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) \tag{5.22}$$

Atracción: Sea $y \in \Sigma_p \cap B_r(p)$, entonces de la Proposición 4.1.1, $y \in B_r(\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p))$, y de (5.22) se sigue que $\omega_X(y) = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$. Ahora, $p \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p) = \omega_X(q)$, entonces existe una sucesión $\{t_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq [0, +\infty)$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \infty \quad , \quad \lim_{m\to\infty} \varphi_X(t_m, y) = p$$

Si $W_p \subseteq U$ es la vecindad abierta de p obtenida del Lema 5.2.1, entonces

$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_0 : \varphi_X(t_m, y) \in W_p$$

A continuación, se define la siguiente sucesión $T_m := t_m + \tau(\varphi_X(t_m, y))$. Puesto que τ es continua en p,

$$\lim_{m\to\infty} \tau(\varphi_X(t_m, y)) = \tau(p) = T < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty} T_m = \infty$$

Asimismo, se tiene que

$$\varphi_X(T_m, y) = \varphi_X(t_m + \tau(\varphi_X(t_m, y)), y) = \varphi_X(\tau(\varphi_X(t_m, y)), \varphi_X(t_m, y)) \in \Sigma_p$$

y por consiguiente

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_X(T_m, y) = \varphi_X(\tau(p), p) = \varphi_X(T, p) = p$$

Luego, se puede escoger una subsucesión, $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$, estrictamente creciente de tal modo que T_m sea el tiempo que requiere y hasta alcanzar el m-ésimo iterado de P, y así $P^m(y) = \varphi_X(T_m, y)$. Por ende, $\lim_{m\to\infty} P^m(y) = p$. De este modo, p es un punto fijo atractor de P, esto es, por el Teorema 5.2.3, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo atractor.

Estabilidad: Como p es un punto fijo atractor de P, 0 también será un punto fijo atractor de $\hat{P}$, entonces

$$\exists\, r_0 > 0, \forall\, s \in I_{r_0}[0] : \lim_{m\to\infty} \hat{P}^m(s) = 0$$

Afirmación. Si $s > 0$, entonces $0 < \hat{P}(s) < s$. Si $s < 0$, entonces $s < \hat{P}(s) < 0$.

Para $s > 0$, suponiendo como hipótesis auxiliar que $\hat{P}(s) \geq s$, entonces mediante el primer principio de inducción, $\forall\, m \in \mathbb{N} : \hat{P}^m(s) \geq s$, pero como $\lim_{m\to\infty} \hat{P}^m(s) = 0$, por monotonía del límite resulta que $0 \geq s$, esto contradice la tricotomía en $\mathbb{R}$. Por reducción al absurdo, $\hat{P}(s) < s$. Análogamente, si $s < 0$, entonces $s < \hat{P}(s) < 0$.

De la *Afirmación*, mediante el primer principio de inducción

- Si $s > 0$, entonces $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : 0 < \hat{P}^{m+1}(s) < \hat{P}^m(s)$, luego $\{\hat{P}^m(s)\}_{m=1}^{\infty}$ es monótona.
- Si $s < 0$, entonces $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : 0 > \hat{P}^{m+1}(s) > \hat{P}^m(s)$, luego $\{\hat{P}^m(s)\}_{m=1}^{\infty}$ es monótona.
- Para $s = 0$, resulta que $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : 0 = \hat{P}^{m+1}(s) \leq \hat{P}^m(s) = 0$, entonces $\{\hat{P}^m(s)\}_{m=1}^{\infty}$ es monótona.

En virtud del Lema de Dini (Lema 5.2.6), $\hat{P}^m \to 0$ uniformemente en $I_{r_0}[0]$. Esto significa que si $\varepsilon > 0$, entonces

$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}, \forall\, s \in I_{r_0}[0], \forall\, m \geq m_0 : \hat{P}^m(s) \in I_0 \cap I_\varepsilon(0) \tag{5.23}$$

Como $\hat{P}^m$ es continua en 0 para cualquier $m \in \{0, \ldots m_0 - 1\}$, se tiene que

$$\exists\, \delta_0 > 0, \forall\, s \in I_0 \cap I_{\delta_0}(0), \forall\, m \in \{0, \ldots m_0 - 1\} : \hat{P}^m(s) \in I_0 \cap I_\varepsilon(0) \tag{5.24}$$

Finalmente, con $\delta := \text{mín}\{\delta_0, r_0\}$, resulta de (5.23) y de (5.24) que

$$\forall\, s \in I_0 \cap I_\delta(0), \forall\, m \in \mathbb{N}_0 : \hat{P}^m(s) \in I_\varepsilon(0) \cap I_0$$

Esto es, 0 es un punto fijo estable de $\hat{P}$, entonces del Corolario 5.2.2 se concluye que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo estable.

En virtud del Teorema 5.2.3, como p es un punto fijo asintóticamente estable de P, se concluye que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo asintóticamente estable de X. ■

Corolario 5.2.3. (Criterio analítico para ciclos límites) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ una órbita periódica, $\Sigma \subseteq U$ una C^k-sección transversal local a X en p y $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \Sigma$ una parametrización de Σ, con $\sigma(0) = p$, entonces

1. Si $|\hat{P}'(0)| < 1$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo límite estable de X.

2. Si $|\hat{P}'(0)| > 1$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo límite inestable de X.

Demostración. Si $|\hat{P}'(0)| < 1$, entonces por la Proposición 2.4.4, 0 es un punto fijo asintóticamente estable de $\hat{P}$, y del Corolario 5.2.2, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo asintóticamente estable de X, y por el Teorema 5.2.4, $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo límite estable de X.

Si $|\hat{P}'(0)| > 1$, entonces $|(\hat{P}^{-1})'(0)| < 1$, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C},-X}(p)$ es un ciclo límite estable de $-X$, i.e., $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es un ciclo límite inestable de X. ■

Ejemplo 5.2.3. (Perko [14]) Recordando el Ejemplo 5.2.1, la representación en coordenadas locales de P es

$$\hat{P}(u) = a\left[1 + \left(\frac{a^2}{u^2} - 1\right) e^{-\frac{4\pi}{ab}}\right]^{-1/2}$$

donde $u = a$ es su punto fijo. Derivando respecto a u,

$$\hat{P}'(u) = a^3 e^{-\frac{4\pi}{ab}} u^{-3}\left[1 + \left(\frac{a^2}{u^2} - 1\right) e^{-\frac{4\pi}{ab}}\right]^{-3/2} \quad \Longrightarrow \quad \hat{P}'(a) = e^{-\frac{4\pi}{ab}} \in (0,1)$$

Se concluye del Corolario 5.2.3 que Γ es un ciclo límite estable de X.

Ejemplo 5.2.4. (Perko [14]) Recordando el Ejemplo 5.2.2, la representación en coordenadas locales de P es

$$\hat{P}(u,z) = \left(a\left[1 + \left(\frac{a^2}{u^2} - 1\right) e^{-\frac{4\pi}{ab}}\right]^{-1/2}, ze^{\frac{2\pi\lambda}{ab}}\right)$$

donde $u = a$ es su punto fijo. Derivando respecto a u,

$$D\hat{P}(u,z) = \begin{bmatrix} a^3 e^{-\frac{4\pi}{ab}} u^{-3}\left[1 + \left(\frac{a^2}{u^2} - 1\right) e^{-\frac{4\pi}{ab}}\right]^{-3/2} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi\lambda}{ab}} \end{bmatrix} \Longrightarrow D\hat{P}(a,0) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{4\pi}{ab}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi\lambda}{ab}} \end{bmatrix}$$

Se observa que $\mathrm{Aut}(D\hat{P}(a,0)) = \{e^{-\frac{4\pi}{ab}}, e^{\frac{2\pi\lambda}{ab}}\}$. El módulo del primer autovalor es menor que 1 mientras que el del segundo no es igual a 1 porque $\lambda \neq 0$. Luego, $(a,0)$ es un punto fijo hiperbólico de $\hat{P}$.

- Si $\lambda > 0$, entonces $i_{\mathcal{D},\hat{P}}(a,0) = 1$. De acuerdo con el Corolario 2.4.1, esto significa que $(a,0)$ es un punto fijo inestable de $\hat{P}$, y del Corolario 5.2.2, Γ es un ciclo inestable de X.

- Si $\lambda < 0$, entonces $i_{\mathcal{D},\hat{P}}(a,0) = 2$. De acuerdo con el Corolario 2.4.1, esto significa que $(a,0)$ es un punto fijo asintóticamente estable de $\hat{P}$, y del Corolario 5.2.2, Γ es un ciclo asintóticamente estable de X.

Capítulo 6

Variedad estable para órbitas periódicas

Mientras que la linealización de un campo vectorial en una singularidad hiperbólica permite reducir el estudio local a un sistema lineal autónomo, el caso de órbitas periódicas requiere considerar la linealización a lo largo de la órbita, dando lugar a un sistema lineal con coeficientes periódicos. Este capítulo desarrolla dicho marco analítico, esencial para caracterizar la estabilidad de ciclos mediante la matriz de monodromía y los multiplicadores de Floquet.

6.1. Teoría de Floquet

Definición 6.1.1. (Linealización alrededor de una órbita) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ y $p \in U$, entonces la *linealización de X sobre $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$* es la función matricial

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\ t &\longmapsto DX(\varphi_X(t,p)) \end{aligned}$$

Observación. En la definición anterior, cuando p es una singularidad de X, $A(t) = DX(p)$. Por otro lado, si $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ es una órbita T-periódica, entonces A es una función matricial continua en $\mathbb{R}$ y T-periódica.

Ejemplo 6.1.1. (Perko [14]) Sean $a, b > 0$ y el campo $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$X(x,y) := \left(-a^2 y + x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), b^2 x + y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right)$$

La derivada de X en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está dada por su matriz jacobiana

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : DX(x,y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} & -a^2 - \frac{2xy}{b^2} \\ b^2 - \frac{2xy}{a^2} & 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Se sabe del Ejemplo 3.2.2 que por $p = (a, 0)$ pasa una órbita periódica cuyo periodo es $T = \frac{2\pi}{ab}$, donde

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_p(t) = (a\cos(abt), b\sin(abt))$$

Reemplazando en (6.1), se obtiene la linealización alrededor de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : A(t) = DX(\varphi_p(t)) = \begin{bmatrix} -2\cos^2(abt) & -a^2 - \frac{a}{b}\sin(2abt) \\ b^2 - \frac{b}{a}\sin(2abt) & -2\sin^2(abt) \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Usando propiedades trigonométricas y la Proposición 1.2.3, puede verificarse que $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz fundamental de A y $\Phi(0) = I_2$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos(abt) & -\frac{a}{b}\sin(abt) \\ \frac{b}{a}e^{-2t}\sin(abt) & \cos(abt) \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

Ejemplo 6.1.2. (Perko [14]) Sean $a, b > 0$, $\lambda \neq 0$ y el campo $X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$X(x, y, z) := \left(-a^2 y + x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), b^2 x + y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \lambda z\right)$$

La derivada de X en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ está dada por su matriz jacobiana

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : DX(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} & -a^2 - \frac{2xy}{b^2} & 0 \\ b^2 - \frac{2xy}{a^2} & 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Se sabe del Ejemplo 4.2.1 que por $p = (a, 0, 0)$ pasa una órbita periódica cuyo periodo es $T = \frac{2\pi}{ab}$, donde

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi_p(t) = (a\cos(abt), b\sin(abt), 0)$$

Reemplazando en (6.4), se obtiene la linealización alrededor de $\Gamma := \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : A(t) = DX(\varphi_p(t)) = \begin{bmatrix} -2\cos^2(abt) & -a^2 - \frac{a}{b}\sin(2abt) & 0 \\ b^2 - \frac{b}{a}\sin(2abt) & -2\sin^2(abt) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Usando propiedades trigonométricas y la Proposición 1.2.3, puede verificarse que $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz fundamental de A y $\Phi(0) = I_3$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos(abt) & -\frac{a}{b}\sin(abt) & 0 \\ \frac{b}{a}e^{-2t}\sin(abt) & \cos(abt) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

Teorema 6.1.1. (Floquet) Sea $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ una función matricial continua en $\mathbb{R}$ y T-periódica, si $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz fundamental de A, entonces existen $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ diferenciable en $\mathbb{R}$ y $2T$-periódica, y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ \Phi(t) = Q(t)e^{tB}$$

Demostración. Considerando la siguiente función matricial

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\ t &\longmapsto \Phi(t + T) \end{aligned}$$

y dado que Φ es una matriz fundamental y A es T-periódica,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \dot{\Psi}(t) = \dot{\Phi}(t + T) = A(t + T)\Phi(t + T) = A(t)\Psi(t)$$
$$\Psi(t_0 - T) = \Phi(t_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

resulta que Ψ también es una matriz fundamental de A, entonces por el Teorema 1.2.3,

$$\exists\, C \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \forall\, t \in \mathbb{R} : \Phi(t + T) = \Phi(t)C$$

Luego,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \Phi(t+2T) = \Phi(t+T)C = \Phi(t)C^2$$

Debido al Corolario 1.4.1, la matriz C^2 posee una matriz logaritmo real, es decir,

$$\exists\, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : C^2 = e^{2TB}$$

A continuación se define la siguiente función matricial:

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \\ t &\longmapsto \Phi(t)e^{-tB} \end{aligned}$$

Debido a que Q es un producto de funciones diferenciables, Q es diferenciable en $\mathbb{R}$, además es $2T$-periódica porque

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : Q(t+2T) = \Phi(t+2T)e^{-(t+2T)B} = \Phi(t)e^{2TB}e^{-tB-2TB} = \Phi(t)e^{-tB} = Q(t)$$

Por último, $\forall\, t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = Q(t)e^{tB}$. ■

Observación. Si $\Phi(0) = I_n$, entonces por la periodicidad de Q, $I_n = \Phi(0) = Q(0) = Q(2T)$ y por consiguiente $\Phi(2T) = e^{2TB}$.

Corolario 6.1.1. (Cambio de variable) En las condiciones del Teorema 6.1.1, si para $t \in \mathbb{R}$, $x(t) := Q(t)y(t)$, entonces x es solución de $\dot{x} = A(t)x$ si y solo si y es solución de $\dot{y} = By$.

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces del Teorema de Floquet, $Q(t) = \Phi(t)e^{-tB}$. Luego, derivando $x(t) = Q(t)y(t)$ respecto a t, como Φ es matriz fundamental,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{Q}(t)y(t) + Q(t)\dot{y}(t) = (\dot{\Phi}(t)e^{-tB} - \Phi(t)e^{-tB}B)y(t) + Q(t)\dot{y}(t) \\ &= (A(t)\Phi(t)e^{-tB} - \Phi(t)e^{-tB}B)y(t) + Q(t)\dot{y}(t) \\ &= (A(t)Q(t) - Q(t)B)y(t) + Q(t)\dot{y}(t) \\ &= A(t)Q(t)y(t) - Q(t)By(t) + Q(t)\dot{y}(t) \\ &= A(t)x(t) + Q(t)(\dot{y}(t) - By(t)) \end{aligned}$$

Así, $\dot{x}(t) - A(t)x(t) = Q(t)(\dot{y}(t) - By(t))$, y como $Q(t)$ es invertible, $\dot{x} = A(t)x$ si y solo si $\dot{y} = By$. ■

6.2. Matriz de monodromía

Definición 6.2.1. (Multiplicadores y exponentes de Floquet) Si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz obtenida del Teorema 6.1.1, $\lambda \in \mathrm{Aut}(B)$ es llamado *exponente de Floquet* mientras que e^{2TB} es llamada *matriz de monodromía* y $\gamma \in \mathrm{Aut}(e^{2TB})$ se llama *multiplicador de Floquet*.

Ejemplo 6.2.1. (Perko [14]) Recordando el Ejemplo 6.1.1 y aplicando el Teorema de Floquet (Teorema 6.1.1), se obtiene la matriz de monodromía evaluando $t = \frac{4\pi}{ab}$ en (6.3)

$$e^{\frac{4\pi}{ab}B} = \Phi\left(\frac{4\pi}{ab}\right) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{8\pi}{ab}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}[e^{-\frac{8\pi}{ab}}, 1] \tag{6.7}$$

En virtud del Teorema 1.4.1,

$$B = \mathrm{diag}[-2, 0] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los exponentes de Floquet son -2 y 0 mientras que los multiplicadores de Floquet son $e^{-\frac{8\pi}{ab}}$ y 1. Se obtiene, por consiguiente, la función matricial Q,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : Q(t) = \Phi(t)e^{-tB} = \begin{bmatrix} \cos(abt) & -\frac{a}{b}\sin(abt) \\ \frac{b}{a}\sin(abt) & \cos(abt) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.2.2. (Perko [14]) Recordando el Ejemplo 6.1.2 y aplicando el Teorema de Floquet (Teorema 6.1.1), se obtiene la matriz de monodromía evaluando $t = \frac{4\pi}{ab}$ en (6.6)

$$e^{\frac{4\pi}{ab}B} = \Phi\left(\frac{4\pi}{ab}\right) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{8\pi}{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{4\pi\lambda}{ab}} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}[e^{-\frac{8\pi}{ab}}, 1, e^{\frac{4\pi\lambda}{ab}}] \tag{6.8}$$

En virtud del Teorema 1.4.1,

$$B = \operatorname{diag}[-2, 0, \lambda] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Los exponentes de Floquet son -2, 0 y λ, mientras que los multiplicadores de Floquet son $e^{-\frac{8\pi}{ab}}$, 1 y $e^{\frac{4\pi\lambda}{ab}}$. Se obtiene, por consiguiente, la función matricial Q,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : Q(t) = \Phi(t)e^{-tB} = \begin{bmatrix} \cos(abt) & -\frac{a}{b}\sin(abt) & 0 \\ \frac{b}{a}\sin(abt) & \cos(abt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que la linealización alrededor de una órbita periódica da lugar a un sistema lineal de coeficientes periódicos, es natural preguntarse cómo construir una matriz fundamental asociada. Esto se resuelve considerando la derivada espacial del flujo respecto a las condiciones iniciales.

Lema 6.2.1. (Matriz fundamental de la linealización) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $x_0 \in U$ y $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ la linealización de X sobre $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(x_0)$, entonces la solución del P.V.I. matricial

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X \\ X(0) = I \end{cases} \tag{6.9}$$

está dada por

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = D_x\varphi_X(t, x_0)$$

Demostración. En primer lugar, de la Proposición 1.1.5, X es localmente Lipschitz, es decir, existen $K > 0$ y $r > 0$ tales que

$$\forall\, x, y \in B_r(x_0) : |X(x) - X(y)| \leq K|x - y|$$

Para $a > 0$ arbitrario, A es continua en $I_a[0]$, entonces existe $M = M_a := \max_{t\in I_a[0]}\{\|A(t)\|\}$. Por otro lado, de la dependencia continua respecto a las condiciones iniciales (Teorema 1.1.7), si $|h| < r$, entonces

$$\forall\, t \in I_a[0] : |\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0)| \leq |h|e^{K|t|} \leq |h|e^{Ka} \tag{6.10}$$

Ahora, dado que X es diferenciable en U, por definición se tiene que en una vecindad de cualquier $u_0 \in U$ se cumple

$$X(u) - X(u_0) = DX(u_0)(u - u_0) + R(u, u_0) \quad , \quad \lim_{u\to u_0}\frac{R(u, u_0)}{|u - u_0|} = 0 \tag{6.11}$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces de (6.11), existe $d > 0$ tal que

$$\forall\, u \in B_d(u_0) : |R(u, u_0)| < \frac{\varepsilon |u - u_0|}{2ae^{(K+M)a}} \tag{6.12}$$

Si además $|h| < de^{-Ka}$, de (6.10) se obtiene que para cualquier $t \in I_a[0]$,

$$|\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0)| \leq |h|e^{Ka} < d \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t, x_0 + h) \in B_d(\varphi(t, x_0))$$

Haciendo $u = \varphi(t, x_0 + h)$ y $u_0 = \varphi(t, x_0)$ en (6.11) y (6.12),

$$X(\varphi(t, x_0+h)) - X(\varphi(t, x_0)) = A(t)(\varphi(t, x_0+h) - \varphi(t, x_0)) + R(\varphi(t, x_0+h), \varphi(t, x_0)) \tag{6.13}$$

$$|R(\varphi(t, x_0 + h), \varphi(t, x_0))| < \frac{\varepsilon |\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0)|}{2ae^{(K+M)a}} \tag{6.14}$$

Por otro lado, el P.V.I. (6.9) posee una única solución Φ la cual satisface la ecuación integral matricial

$$\Phi(t) = I + \int_0^t A(s)\Phi(s)ds$$

Ahora, escogiendo $\delta := \text{mín}\{r, de^{-Ka}\} > 0$, si $|h| < \delta$, entonces

$$\varphi(t, x_0 + h) = x_0 + h + \int_0^t X(\varphi(s, x_0 + h))ds$$

$$\varphi(t, x_0) = x_0 + \int_0^t X(\varphi(s, x_0))ds$$

$$\Phi(t)h = h + \int_0^t A(s)\Phi(s)h\, ds$$

y luego de usar (6.13),

$$\begin{aligned} g_h(t) &:= \varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0) - \Phi(t)h = \int_0^t X(\varphi(s, x_0 + h)) - X(\varphi(s, x_0)) - A(s)\Phi(s)\, ds \\ &= \int_0^t A(s)(\varphi(s, x_0 + h) - \varphi(s, x_0) - \Phi(s)) + R(\varphi(s, x_0 + h), \varphi(s, x_0))ds \\ &= \int_0^t A(s)g_h(s)ds + \int_0^t R(\varphi(s, x_0 + h), \varphi(s, x_0))ds \end{aligned}$$

Posteriormente, de la desigualdad triangular, de (6.14) y de (6.10),

$$\begin{aligned} |g_h(t)| &\leq \int_0^{|t|} |A(s)g_h(s)|ds + \int_0^{|t|} |R(\varphi(s, x_0 + h), \varphi(s, x_0))|ds \\ &\leq \int_0^{|t|} \|A(s)\||g_h(s)|ds + \int_0^{|t|} \frac{\varepsilon |\varphi(s, x_0 + h) - \varphi(s, x_0)|}{2ae^{(K+M)a}} ds \\ &\leq \int_0^{|t|} M|g_h(s)|ds + \frac{\varepsilon}{2ae^{(K+M)a}} \int_0^{|t|} |h|e^{Ka} ds \\ &= \int_0^{|t|} M|g_h(s)|ds + \frac{\varepsilon |h| e^{Ka} |t|}{2ae^{Ka}e^{Ma}} \\ &\leq \int_0^{|t|} M|g_h(s)|ds + \frac{\varepsilon |h|}{2e^{Ma}} \end{aligned}$$

En virtud de la desigualdad de Gronwall (Lema 1.1.1),

$$|g_h(t)| \leq \frac{\varepsilon |h|}{2} e^{M(|t|-a)} < \varepsilon |h|$$

es decir,

$$\frac{|\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0) - \Phi(t)h|}{|h|} < \varepsilon$$

Por definición de límite, esto significa que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0) - \Phi(t)h|}{|h|} = 0$$

Pero por definición de diferenciabilidad,

$$\forall\, t \in I_a[0] : \Phi(t) = D_x\varphi(t, x_0)$$

Como $a > 0$ es arbitrario, la igualdad se cumple en todo $\mathbb{R}$. ■

Si bien el cálculo directo de la función de Poincaré y de su derivada en p es generalmente complicado en altas dimensiones, la matriz de monodromía permite acceder a $DP(p)$. La Proposición 5.2.1 garantiza que $DP(p) : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$ es invertible; equivalentemente, para una base conveniente de $T_p\Sigma$, se tiene $[DP(p)] \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n-1})$.

De la condición de transversalidad, $T_p\Sigma \oplus \langle X(p)\rangle = \mathbb{R}^n$, y si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces x se puede descomponer de manera única como $x = v + cX(p)$, donde $v \in T_p\Sigma$ y $c \in \mathbb{R}$, esto permite definir la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre $T_p\Sigma$ como

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_p\Sigma \\ x &\longrightarrow v \end{aligned}$$

Esta función es una transformación lineal. Ahora, sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de $T_p\Sigma$, desde que $T_p\Sigma \oplus \langle X(p)\rangle = \mathbb{R}^n$ resulta que $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \{X(p)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, n-1\} : \pi(v_j) = v_j \quad , \quad \pi(X(p)) = 0$$

lo cual implica que en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, la representación matricial de π es

$$[\pi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$$

Asimismo, en las bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$, el monomorfismo inclusión $i : T_p\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tiene por representación matricial a

$$[i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$$

Teorema 6.2.1. (Derivada de la función de Poincaré) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ una órbita T-periódica, $P : \Sigma_p \longrightarrow \Sigma$ la función de Poincaré, donde Σ es una C^k-sección transversal local a p, si $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es una base de $T_p\Sigma$ (y en consecuencia $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \{X(p)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$), entonces

1. La última columna de la representación matricial de e^{2TB} en la base $\mathcal{B}_2$ es $(0, \ldots, 0, 1)^T$.

2. La representación matricial de $DP(p)$ en la base $\mathcal{B}_1$ se obtiene eliminando la última fila y columna de e^{2TB}.

3. Si $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ son los multiplicadores de Floquet, entonces por lo menos uno de ellos es igual a 1, llámese $\gamma_n = 1$, y $\{\gamma_j\}_{j=1}^{n-1}$ son los autovalores de $DP(p)$.

Demostración. Procediendo por partes:

1. En primer lugar, dado que φ_p es solución del P.V.I. asociado a X y p, derivando dos veces respecto a t, de la Regla de la Cadena se obtiene,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \ddot{\varphi_p}(t) = DX(\varphi_p(t))\dot{\varphi_p}(t) = A(t)\dot{\varphi_p}(t)$$

y $\dot{\varphi_p}(0) = X(\varphi_p(0)) = X(p)$, i.e., $\dot{\varphi_p}$ es solución del P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(0) = X(p) \end{cases}$$

pero del Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 1.2.2),

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \dot{\varphi_p}(t) = \Phi(t)[\Phi(0)]^{-1}X(p)$$

donde $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz fundamental de A. Sin embargo, del Lema 6.2.1,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = \frac{\partial \varphi_X}{\partial x}(t,p) \quad , \quad \Phi(0) = I_n$$

Del Teorema de Floquet (Teorema 6.1.1), existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\Phi(2T) = e^{2TB}$. Luego, dado que la órbita es periódica,

$$X(p) = X(\varphi_p(2T)) = \dot{\varphi_p}(2T) = e^{2TB}X(p)$$

Esto significa que 1 es autovalor de e^{2TB}. Asimismo, en la base $\mathcal{B}_2$, la representación matricial de e^{2TB} tiene como última columna a $(0,\ldots,0,1)^T$.

2. Recordando que P se origina a partir de h, donde

$$\begin{aligned} h : W_p &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longmapsto \varphi_X(\tau(x), x) \end{aligned}$$

Se tiene que $P = h\Big|_{\Sigma_p}$ y $\tau(p) = 2T$ (se puede considerar así porque la órbita es, en consecuencia, $2T$-periódica), entonces del Corolario 1.3.3, $DP(p) = Dh(p)\Big|_{T_p\Sigma}$. Si $v \in T_p\Sigma$, entonces usando la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} DP(p)(v) = Dh(p)(v) &= X(\varphi_X(\tau(p),p)) \cdot D\tau(p)(v) + \frac{\partial \varphi_X}{\partial x}(\tau(p),p)(v) \\ &= X(\varphi_X(2T,p)) \cdot D\tau(p)(v) + \frac{\partial \varphi_X}{\partial x}(2T,p)(v) \\ &= (D\tau(p)(v))X(p) + e^{2TB}v \end{aligned}$$

y como $DP(p)(v) \in T_p\Sigma$, al aplicar la proyección sobre el espacio tangente $T_p\Sigma$,

$$\begin{aligned} DP(p)(v) = \pi(DP(p)(v)) &= \pi((D\tau(p)(v))X(p) + e^{2TB}v) \\ &= D\tau(p)(v) \cdot \pi(X(p)) + \pi(e^{2TB}v) \\ &= (\pi \cdot e^{2TB})(v) \end{aligned}$$

De este modo, $DP(p) = (\pi \cdot e^{2TB})\Big|_{T_p\Sigma} = \pi \cdot e^{2TB} \cdot i$.

Si en la base $\mathcal{B}_2$, la representación matricial de e^{2TB} es $[e^{2TB}] = [a_{ij}]$, entonces

$$
\begin{aligned}
[DP(p)] &= [\pi] \cdot [e^{2TB}] \cdot [i] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Esto es, al eliminar la última fila y columna de e^{2TB} en la base $\mathcal{B}_2$, se obtiene la representación matricial de $DP(p)$ en la base $\mathcal{B}_1$.

3. Por último, Si $M = [DP(p)]$, entonces

$$A = [e^{2TB}] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix}$$

Esto implica que $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)\det(M - \lambda I)$ y por ende, si $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n$ son los autovalores de e^{2TB}, entonces $\gamma_n = 1$ y $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ son los autovalores de $DP(p)$.

■

6.3. Hiperbolicidad de órbitas periódicas

Del Corolario 5.2.1, dos funciones de Poincaré P_1 y P_2 asociadas a una misma órbita periódica tienen sus partes lineales con los mismos autovalores. Asimismo, la estabilidad de un ciclo Γ se rige por la estabilidad del punto fijo correspondiente de la función de Poincaré (Teorema 5.2.3). Estos hechos justifican la definición de ciclo hiperbólico.

Definición 6.3.1. (Ciclo hiperbólico) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo, se dice que Γ es un *ciclo hiperbólico de* X si p es un punto fijo hiperbólico de la función de Poincaré P, además el *índice de $\mathcal{C}$-estabilidad del ciclo* Γ se define como $i_{\mathcal{C},X}(\Gamma) := i_{\mathcal{D},P}(p) + 1$.

Teorema 6.3.1. (Teorema de la Variedad Estable para ciclos hiperbólicos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo hiperbólico de X con $i_{\mathcal{C},X}(\Gamma) = m + 1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

1. $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$ es una superficie de clase C^k, de dimensión $m+1$ y positivamente invariante por X.

2. $W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$ es una superficie de clase C^k, de dimensión $n-m$ y negativamente invariante por X.

Demostración. En primer lugar, p es un punto fijo hiperbólico de P con $i_{\mathcal{D},P}(p) = m$, entonces del Teorema de la Variedad Estable para puntos fijos hiperbólicos (Teorema 2.4.2), existe $r_0 > 0$ tal que

- $W^s_{\mathcal{D},P}(p, r_0)$ es una superficie de clase C^k, de dimensión m que contiene a p y es P-invariante.

- $W^u_{\mathcal{D},P}(p, r_0)$ es una superficie de clase C^k, de dimensión $n - m - 1$ que contiene a p y es P^{-1}-invariante.

Por otro lado, de los Lemas 5.2.2, 5.2.4 y 5.2.3 que existen $r, \delta > 0$ suficientemente pequeños que verifican simultáneamente las tres condiciones:

$$B_\delta(\Gamma) \subseteq \varphi_X(\mathbb{R} \times (\Sigma_p \cap B_r(p))) \tag{6.15}$$

$$\Sigma_p \cap B_\delta(\Gamma) \subseteq \Sigma_p \cap B_r(p) \tag{6.16}$$

$$\forall\, y \in \Sigma_p \cap B_r(p), \forall\, s \in [0, 2T] : \varphi_X(s, y) \in B_\delta(\Gamma) \tag{6.17}$$

A partir de los conjuntos estable e inestable asociados a p, se construirán los conjuntos estable e inestable de la órbita periódica.

1. Se considera el conjunto de todas las trayectorias que inician desde la variedad estable de P, es decir,

$$S := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)) = \{\varphi_X(t, y) \,|\, t \in \mathbb{R}\,,\ y \in W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)\}$$

Afirmación 1: S es una superficie de clase C^k y dimesnión $m + 1$.

Se probará que S es localmente una superficie: Si $q \in S$, entonces existen $t_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)$ tales que $q = \varphi_X(t_0, y_0)$. Ahora, del Lema 5.1.2, $F = \varphi_X\Big|_{\mathbb{R}\times\Sigma_p}$ es un difeomorfismo local de clase C^k en (t_0, y_0) en el sentido de las superficies, i.e., existen $\varepsilon_0 > 0$, $S_0 \subseteq \Sigma_p$ y V_q abiertos con $y_0 \in S_0$ y $q \in V_q$ tales que

$$G := F\Big|_{I_{\varepsilon_0}(0)\times S_0} : I_{\varepsilon_0}(0) \times S_0 \longrightarrow V_q$$

es un difeomorfismo de clase C^k en el sentido de las superficies.
Del Corolario 1.3.9, como $W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)$ es una superficie de clase C^k y dimensión m, y $S_0 \subseteq \Sigma_p$ es abierto en Σ_p, $S_0 \cap W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)$ es una superficie de clase C^k y dimensión m. Puesto que $I_{\varepsilon_0}(0)$ es una superficie suave unidimensional por ser un abierto en $\mathbb{R}$, se deduce de la Proposición 1.3.6 que $I_{\varepsilon_0}(0) \times (S_0 \cap W^s_{\mathcal{D},P}(p, r))$ es una superficie de clase C^k y dimensión $m + 1$. Luego, dado que G es un difeomorfismo en el sentido de las superficies, por la Proposición 1.3.10 se concluye que $G(I_{\varepsilon_0}(0) \times (S_0 \cap W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)))$ es una superficie de clase C^k y dimensión $m + 1$. Sin embargo,

$$q \in G(I_{\varepsilon_0}(0)\times(S_0\cap W^s_{\mathcal{D},P}(p,r))) = \{\varphi_X(t, y) \,|\, t \in I_{\varepsilon_0}(0)\,,\ y \in S_0\cap W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)\} = S\cap V_q$$

En otras palabras, en cada punto de S se encuentra un entorno abierto en S que es una superficie de clase C^k y dimensión $m+1$. Por lo tanto, en virtud de la Proposición 1.3.1, S es una superficie de clase C^k y dimensión $m + 1$.

Afirmación 2. $S = W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$

$(\subseteq)$: Sea $q \in S$, entonces existen $t_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)$ tales que $q = \varphi_X(t_0, y_0)$. Ahora, $y_0 \in W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)$ implica que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : P^m(y_0) \in \Sigma_p \cap B_r(p) \quad , \quad \lim_{m\to\infty} P^m(y_0) = p$$

Para la estabilidad, sea $t \geq 0$, como $\lim_{m\to\infty}(T_m(y_0) - t_0) = \infty$ por (5.5), se sigue por definición de límite y el principio del buen orden en $\mathbb{N}_0$,

$$\exists!\, m \in \mathbb{N}_0 : T_m(y_0) - t_0 \leq t < T_{m+1}(y_0) - t_0 = T_m(y_0) + \tau(P^m(y_0)) - t_0$$

Denotando por $s := t + t_0 - T_m(y_0) \in [0, \tau(P^m(y_0))) \subseteq [0, 2T]$, resulta que de (6.17) y la propiedad fundamental del flujo,

$$\varphi_X(t, q) = \varphi_X(t + t_0, y_0) = \varphi_X(s + T_m(y_0), y_0) = \varphi_X(s, P^m(y_0)) \in B_\delta(\Gamma)$$

En otras palabras, $\mathcal{O}^+_{\mathcal{C},X}(q) \subseteq B_\delta(\Gamma)$.

Para la atracción, sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\exists\, \eta > 0, \forall\, y \in \Sigma_p \cap B_\eta(p), \forall\, s \in [0, 2T] : \varphi_X(s, y) \in B_\varepsilon(\Gamma) \tag{6.18}$$

Como $\lim_{m\to\infty} P^m(y_0) = p$, resulta que

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_1 : P^m(y_0) \in \Sigma_p \cap B_\eta(p) \tag{6.19}$$

Sin embargo, dado que $\lim_{m\to\infty}(T_m(y_0) - t_0) = \infty$, por definición de límite,

$$\exists\, m_2 \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_2 : T_m(y_0) - t_0 \geq 0$$

Eligiendo $m_0 := \max\{m_1, m_2\} \in \mathbb{N}$, si $t \geq T_{m_0}(y_0) - t_0 \geq 0$, entonces por el principio del buen orden en $\mathbb{N}_0$,

$$\exists!\, m \geq m_0 : T_m(y_0) - t_0 \leq t < T_{m+1}(y_0) - t_0 = T_m(y_0) + \tau(P^m(y_0)) - t_0$$

y también $s := t + t_0 - T_m(y_0) \in [0, \tau(P^m(y_0))) \subseteq [0, 2T]$. Finalmente, por (6.18), (6.19) y la propiedad fundamental del flujo,

$$\varphi_X(t, q) = \varphi_X(t + t_0, y_0) = \varphi_X(s + T_m(y_0), y_0) = \varphi_X(s, P^m(y_0)) \in B_\varepsilon(\Gamma)$$

Esto es, $\lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t, q), \Gamma) = 0$. Por lo tanto, $q \in W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$.

($\supseteq$) : Sea $q \in W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$, entonces

$$\forall\, t \geq 0 : \varphi_X(t, q) \in B_\delta(\Gamma) \quad , \quad \lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t, q), \Gamma) = 0$$

Sin embargo, $q \in B_\delta(\Gamma)$ implica por (6.15) que $q = \varphi_X(t_0, y_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in \Sigma_p \cap B_r(p)$. Como $\lim_{m\to\infty}(T_m(y_0) - t_0) = \infty$ por (5.5), se tiene por definición de límite y el principio del buen orden en $\mathbb{N}_0$,

$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_0 : T_m(y_0) - t_0 \geq 0$$

Si $m \geq m_0$, entonces de (6.16) y la propiedad fundamental del flujo

$$\varphi_X(T_m(y_0) - t_0, q) = \varphi_X(T_m(y_0), y_0) = P^m(y_0) \in \Sigma_p \cap B_\delta(\Gamma) \subseteq \Sigma_p \cap B_r(p) \tag{6.20}$$

Una vez más, como $\lim_{m\to\infty}(T_m(y_0) - t_0) = \infty$, usando el criterio secuencial de límites,

$$0 = \lim_{m\to\infty} d(\varphi_X(T_m(y_0) - t_0, q), \Gamma) = \lim_{m\to\infty} d(\varphi_X(T_m(y_0), y_0), \Gamma) = \lim_{m\to\infty} d(P^m(y_0), \Gamma)$$

Si $\varepsilon > 0$, entonces por el Lema 5.2.4,

$$\exists\, \eta \in (0, \varepsilon) : \Sigma_p \cap B_\eta(\Gamma) \subseteq \Sigma_p \cap B_\varepsilon(p) \tag{6.21}$$

Por definición de límite, resulta de (6.21) que

$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}, \forall\, m \geq m_0 : P^m(y_0) \in \Sigma_p \cap B_\eta(\Gamma) \subseteq \Sigma_p \cap B_\varepsilon(p)$$

y así $\lim_{m\to\infty} P^m(y_0) = p$.

Luego, definiendo $y_q := P^{m_0}(y_0) = \varphi_X(T_{m_0}(y_0), y_0) \in \Sigma_p \cap B_r(p)$, resulta de (6.20) que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : P^m(y_q) = P^{m+m_0}(y_0) \in \Sigma_p \cap B_r(p)$$

así como

$$\lim_{m\to\infty} P^m(y_q) = \lim_{m\to\infty} P^{m+m_0}(y_0) = p$$

De este modo, $y_q \in W^s_{\mathcal{D},P}(p, r)$, pero $q = \varphi_X(t_0, y_0) = \varphi_X(t_0 - T_{m_0}(y_0), y_q)$. Por lo tanto, $q \in S$.

Afirmación 3. $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$ es positivamente invariante por X

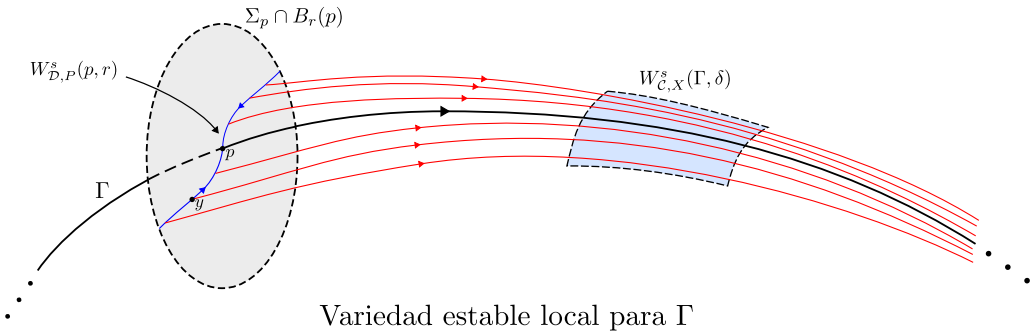
Sean $q \in W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$ y $t_0 \geq 0$ fijo pero arbitrario, entonces

$$\forall\, s \geq 0 : \varphi_X(s, q) \in B_\delta(\Gamma) \quad , \quad \lim_{s\to\infty} d(\varphi_X(s, q), \Gamma) = 0$$

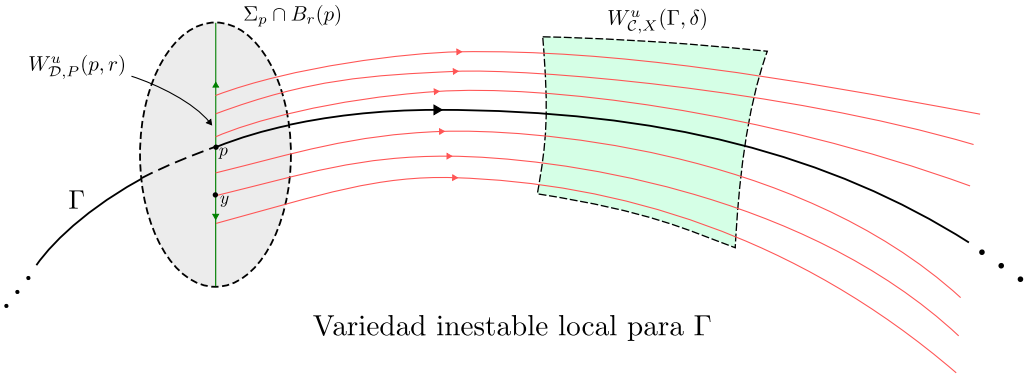
Luego, si $t \geq 0$, entonces $t + t_0 \geq 0$ y si $t \to \infty$, luego $t + t_0 \to \infty$, y debido a la propiedad fundamental del flujo, $\varphi_X(t + t_0, q) = \varphi_X(t, \varphi_X(t_0, q))$, y así

$$\forall\, t \geq 0 : \varphi_X(t, \varphi_X(t_0, q)) \in B_\delta(\Gamma) \quad , \quad \lim_{t\to\infty} d(\varphi_X(t, \varphi_X(t_0, q)), \Gamma) = 0$$

Así, $\varphi_X(t_0, q) \in W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$. En conclusión, $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$ es positivamente invariante por X.



Variedad estable local para Γ



Variedad inestable local para Γ

Figura 6.1: Construcción de las variedades estable e inestable del ciclo.

2. Para el conjunto inestable, considerando el campo $-X$, si su función de Poincaré es P^{-1}, y como los autovalores de $DP^{-1}(p) = [DP(p)]^{-1}$ son los inversos de los autovalores de $DP(p)$, los autovalores con módulo menor que 1 de $DP^{-1}(p)$ son los autovalores de $DP(p)$ que tienen módulo mayor que 1, entonces $i_{\mathcal{C},-X}(\Gamma) = (n-m-1)+1 = n-m$. Aplicando la misma construcción al campo $-X$, existe $\delta > 0$ tal que $W^s_{\mathcal{C},-X}(\Gamma,\delta) = W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma,\delta)$ es una superficie de clase C^k y dimensión $n-m$, y negativamente invariante por X.

■

Corolario 6.3.1. (Estabilidad de Lyapunov para ciclos hiperbólicos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $p \in U$ y $\Gamma = \mathcal{O}_{\mathcal{C},X}(p)$ un ciclo hiperbólico de X, entonces

1. Si $i_{\mathcal{C},X}(\Gamma) = n$, entonces Γ es un ciclo asintóticamente estable de X.

2. Si $i_{\mathcal{C},X}(\Gamma) < n$, entonces Γ es un ciclo inestable de X.

Demostración. Primero, p es un punto fijo hiperbólico de P porque Γ es un ciclo hiperbólico de X y su índice es $i_{\mathcal{D},P}(p) = i_{\mathcal{C},X}(\Gamma) - 1$.

1. Si $i_{\mathcal{C},X}(\Gamma) = n$, entonces $i_{\mathcal{D},P}(p) = n-1$. Esto implica por el Corolario 2.4.1 que p es un punto fijo asintóticamente estable de P. En virtud del Teorema 5.2.3, Γ es un ciclo asintóticamente estable de X.

2. Si $i_{\mathcal{C},X}(\Gamma) < n$, entonces $i_{\mathcal{D},P}(p) < n-1$. Del Corolario 2.4.1 resulta que p es un punto fijo inestable de P. En virtud del Teorema 5.2.3, Γ es un ciclo inestable de X.

■

Ejemplo 6.3.1. (Perko [14]) Recordando el Ejemplo 6.2.1, dado que $X(p) = (0, ab^2)$, del Teorema 6.2.1, la derivada de P en p se obtiene eliminando la última fila y columna de la matriz de monodromía en (6.7), esto es

$$[DP(p)] = [e^{-\frac{8\pi}{ab}}]$$

Su único autovalor es $e^{-\frac{8\pi}{ab}}$ y $|e^{-\frac{8\pi}{ab}}| < 1$, así que p es un punto fijo hiperbólico de P con $i_{\mathcal{D},P}(p) = 1$,i.e., Γ es un ciclo hiperbólico de X con $i_{\mathcal{C},X}(\Gamma) = 2$. En virtud del Teorema de la Variedad Estable para ciclos hiperbólicos (Teorema 6.3.1), existen las superficies suaves $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma,\delta)$ y $W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma,\delta)$, la primera tiene dimensión 2 y es positivamente invariante por X mientras que la segunda tiene dimensión 1 y es negativamente invariante por X.

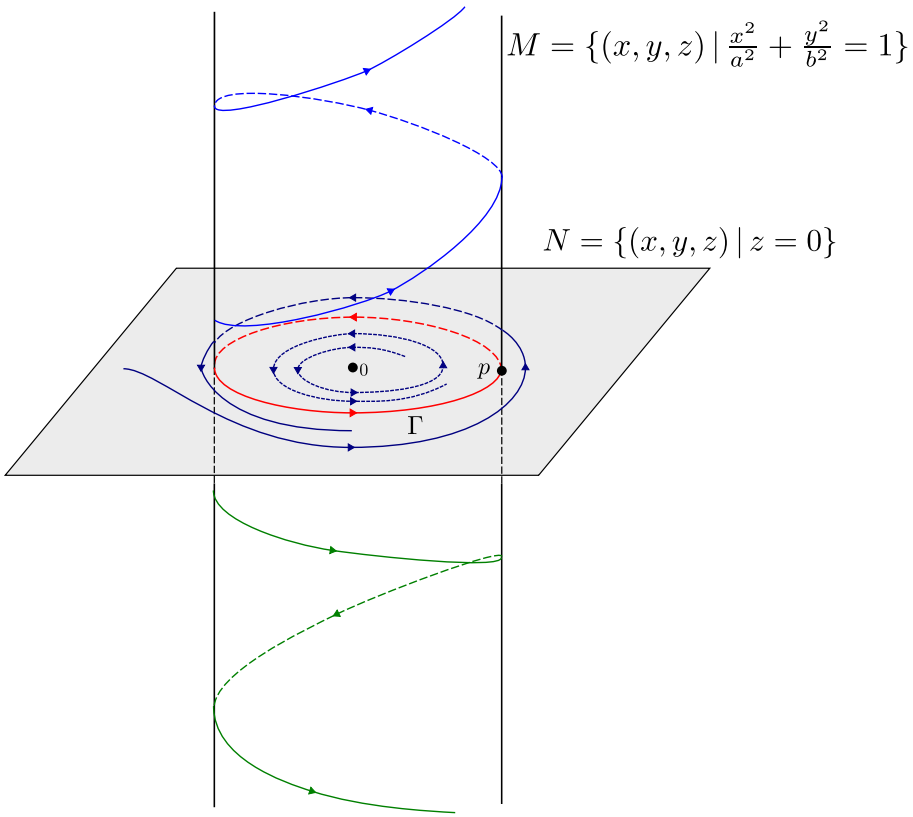
Ejemplo 6.3.2. (Perko [14]) Recordando el Ejemplo 6.2.2, dado que $X(p) = (0, ab^2, 0)$, del Teorema 6.2.1, la derivada de P en p se obtiene eliminando la segunda fila y columna de la matriz de monodromía en (6.8), esto es

$$[DP(p)] = \begin{bmatrix} e^{-\frac{8\pi}{ab}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{4\pi\lambda}{ab}} \end{bmatrix}$$

Resulta que $|e^{-\frac{8\pi}{ab}}| < 1$ y desde que $\lambda \neq 0$, $|e^{\frac{4\pi\lambda}{ab}}| \neq 1$. Esto indica que p es un punto fijo hiperbólico de P, i.e., Γ es un ciclo hiperbólico de X. Luego, del Teorema de la Variedad Estable para ciclos hiperbólicos (Teorema 6.3.1), existen las superficies suaves $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma,\delta)$ y $W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma,\delta)$, el primero es positivamente invariante por X mientras que el segundo es negativamente invariante por X. La dimensión de cada superficie depende del signo de λ:

- Si $\lambda > 0$, entonces $|e^{\frac{4\pi\lambda}{ab}}| > 1$ y por ende $i_{\mathcal{D},P}(p) = 1$, i.e., $i_{\mathcal{C}.X}(\Gamma) = 2$. Luego, $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma,\delta)$ tiene dimensión 2 y $W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma,\delta)$ tiene dimensión 2. Para añadir, Γ es un ciclo inestable de X debido al Corolario 6.3.1.

- Si $\lambda < 0$, entonces $|e^{\frac{4\pi\lambda}{ab}}| < 1$ y por ende $i_{\mathcal{D},P}(p) = 2$, i.e., $i_{\mathcal{C}.X}(\Gamma) = 3$. Luego, $W^s_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$ tiene dimensión 3 y $W^u_{\mathcal{C},X}(\Gamma, \delta)$ tiene dimensión 1. Para añadir, Γ es un ciclo asintóticamente estable de X debido al Corolario 6.3.1.



$\lambda > 0$

Figura 6.2: El plano N (dimensión 2) es la variedad estable local de Γ, mientras que el cilindro M (dimensión 2) es la variedad inestable local de Γ, siempre que $\lambda > 0$.

Bibliografía

[1] R. Benazic. *Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), Lima, Perú, 2007.

[2] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] W. J. Culver. On the existence and uniqueness of the real logarithm of a matrix. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(5):1146–1151, 1966.

[4] S. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer, New York, 3 edition, 2005.

[5] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 2 edition, 2002.

[6] M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, Waltham, MA, 3 edition, 2013.

[7] K. Hoffman and R. Kunze. *Álgebra Lineal*. Prentice-Hall, México, 2 edition, 1973.

[8] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[9] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2 edition, 2013.

[10] E. L. Lima. *Análise Real*, volume 2. IMPA, Rio de Janeiro, 2004. Curso de Análise, Volume 2.

[11] E. L. Lima. *Análise Real*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, 2004. Curso de Análise, Volume 1.

[12] E.L. Lima. *Variedades Diferenciáveis*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1973.

[13] J. Palis and W. De Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer, New York, 1982.

[14] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York, 3 edition, 2001.

[15] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1976.

[16] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2005.

[17] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.