Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Existencia y unicidad de solución fuerte para la ecuación de calor no lineal

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Denys VILCAS ESCALANTE

ASESOR

Mg. Gavino AYMITUMA PUMA

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Vilcas, D. (2021). *Existencia y unicidad de solución fuerte para la ecuación de calor no lineal*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemáticas]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Denys Vilcas Escalante
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	46664313
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Gavino Aymituma Puma
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	08025924
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-2580-9223
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Andrés Guardia Cayo.
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09406969
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Gavino Aymituma Puma
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08025924
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales(Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional.
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.059022 Longitud: -77.082320
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021 - octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 09:00 horas del domingo 24 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Andrés Guardia Cayo (MIEMBRO) y el Mg. Gavino Aymituma Puma (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN FUERTE PARA LA ECUACIÓN DE CALOR NO LINEAL**", presentado por el señor **Bachiller Denys Vilcas Escalante**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

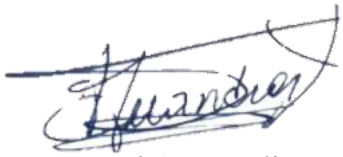
Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **Bueno,** con un calificativo promedio de **dieciséis (16).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Denys Vilcas Escalante** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 09:30 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.



Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE



Mg. Andrés Guardia Cayo
MIEMBRO



Mg. Gavino Aymituma Puma
MIEMBRO ASESOR

Agradezco a mi familia por apoyarme incondicionalmente a lo largo de estos años de estudio, a mis profesores que estuvieron presentes impartiendo sus conocimientos y a mi asesor por sus acertados consejos para culminar este proyecto.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos..... 2

Índice general..... 3

Resumen..... 5

Abstract..... 6

I. Introducción..... 7
1.1 Determinación del problema..... 7
1.2 Formulación del problema..... 7
1.2.1 Problema general..... 7
1.2.2 Problemas específicos..... 8
1.3 Objetivos de la investigación..... 8
1.3.1 Objetivo general..... 8
1.3.2 Objetivos específicos..... 8
1.4 Justificación..... 8
1.5 Importancia..... 9
1.6 Limitaciones de la investigación..... 9

II. Revisión de literatura..... 10
2.1 Antecedentes del estudio..... 10
2.2 Bases teóricas..... 12
2.2.1 Notaciones..... 12
2.2.2 Definiciones de medida..... 12
2.2.3 Espacios L^p..... 13
2.2.4 Función esencialmente acotada..... 14
2.2.5 Dual topológico..... 14
2.2.6 Espacios reflexivos..... 14
2.2.7 Espacios separable..... 15
2.2.8 Espacios de Bochner..... 15
2.2.9 Espacios de Sobolev..... 16
2.2.10 El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$..... 17
2.2.11 Topología débil..... 17
2.2.12 Inmersión..... 17
2.2.13 Convergencia en $L^p(0,T;V)$..... 20
2.2.14 Teorema de Existencia..... 20
2.2.15 Desigualdades importantes..... 21

III. Variables e hipótesis..... 22
3.1 Hipótesis..... 22
3.1.1 Hipótesis general..... 22
3.1.2 Hipótesis especificas..... 22

3.2 Variables…… 22

3.3 Operacionalización de las variables…… 23

IV. Materiales y métodos…….... 24
4.1 Área de estudios……... 24
4.2 Diseño de investigación…….. 24

V. Resultados…….…… 25

VI. Conclusiones…… 41

VII. Recomendaciones…… 42

VIII. Bibliografía…… 43

Resumen

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN FUERTE PARA LA ECUACIÓN DE CALOR NO LINEAL

Denys Vilcas Escalante

Septiembre – 2021

Asesor: Mg. Gavino Aymituma Puma

Titulo obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente trabajo se estudió de forma detallada la existencia y unicidad de solución fuerte para el siguiente problema de ecuación de calor no lineal.

$$\begin{cases} u' - div(a(u)\nabla u) + b(u)|\nabla u|^2 = 0 \quad en\ Q \\ \\ u = 0 \quad en \quad \Sigma\,, \quad \mathrm{u(x,0)} = u_0(x) en \quad \Omega \end{cases}$$

Donde Ω un conjunto abierto, acotado y no vacío de $\mathbb{R}$, con frontera regular.

Representamos por $Q = \Omega \times (0,T)$ para $T > 0$, un dominio cilíndrico, cuya frontera lateral representamos por $\Sigma = \Gamma \times (0,T), donde\ \Gamma = \partial\Omega$.

Palabras clave:

- Método de Faedo-Galerkin
- Existencia y unicidad de solución fuerte
- Teorema de Aubin-Lions
- Desigualdad de Gronwall
- Formulación Variacional

Abstract

EXISTENCE AND UNIQUITY OF STRONG SOLUTION FOR THE NON-LINEAR HEAT EQUATION

Denys Vilcas Escalante

September – 2021

Adviser: Mg. Gavino Aymituma Puma

Obtained title: Licenciado en Matemática

In this work, the existence and uniqueness of strong solution for the following nonlinear heat equation problem was studied in detail.

$$\begin{cases} u' - div(a(u)\nabla u) + b(u)|\nabla u|^2 = 0 \quad en\ Q \\ u = 0 \quad en \quad \Sigma\,, \quad \mathrm{u(x,0)} = u_0(x)\ en \quad \Omega \end{cases}$$

Where Ω is an open, bounded and nonempty set of $\mathbb{R}$, with a regular boundary.

We represented by $Q = \Omega \times (0,T)$ for $T > 0$, a cylindrical domain, whose lateral boundary we represent by $\Sigma = \Gamma \times (0,T), donde\ \Gamma = \partial\Omega$.

Keywords:

- Faedo Galerkin method
- Existence and uniqueness of strong solution
- Aubin – Lions theorem
- Gronwall inequality
- Variational Formulation

Capítulo I

Introducción

1.1 Determinación del problema

Muchos fenómenos que aparecen en la física, química o biología están asociados con modelos matemáticos. Entonces para esto intervienen un conjunto de variables que se pueden describir en una Ecuación Diferencial Parcial (EDP). Para resolver este tipo de problemas existen diversas herramientas que se han ido desarrollando en el tiempo, por ejemplo, método de Fourier, teoría de semigrupos, métodos numéricos, por mencionar algunos. En el presente trabajo usaremos el método de Faedo Galerkin para desarrollar el siguiente problema de calor:

$$\begin{cases} u' - div(a(u)\nabla u) + b(u)|\nabla u|^2 = 0 \quad en\ Q \\ u = 0 \quad en \quad \Sigma\,, \quad \mathrm{u}(\mathrm{x},0) = u_0(x)\ en \quad \Omega \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

Donde Ω es un conjunto abierto, acotado y no vacío de $\mathbb{R}$, con frontera regular.

Representamos por $Q = \Omega \times (0,T)$ para $T > 0$, un dominio cilíndrico, cuya frontera lateral representamos por $\Sigma = \Gamma \times (0,T), donde\ \Gamma = \partial\Omega$.

1.2 Formulación del problema

Los problemas de este trabajo de investigación están planteados a continuación:

1.2.1 Problema general

¿Es posible obtener la existencia y unicidad de solución fuerte para la ecuación de calor no lineal planteada en (1)?

1.2.2 Problemas específicos

- ¿Se puede mostrar por medio del método de Faedo-Galerkin la existencia soluciones fuertes para la ecuación de calor no lineal?
- ¿Se puede realizar la prueba de la unicidad de la solución con ayuda de la desigualdad de Gronwall?

1.3 Objetivo de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Demostrar la existencia y unicidad de solución fuerte para la ecuación de calor no lineal planteada en (1).

1.3.2 Objetivos específicos

- Establecer el método de Faedo-Galerkin como argumento principal para probar la existencia de soluciones fuertes en la ecuación de calor no lineal dado en (1).
- Desarrollar la prueba de unicidad de soluciones para la ecuación de calor no lineal vía desigualdad de Gronwall.

1.4 Justificación

El problema abordado en nuestro trabajo, está asociado a la propagación de calor en materiales metálicos, cuyos parámetros dependen de la temperatura en el proceso de tratamiento térmico. En tal sentido, tenemos que entender cómo evoluciona este fenómeno, por lo que es necesario probar la existencia y unicidad de soluciones, en este caso fuerte, para la ecuación del calor con una no linealidad donde está presente el gradiente.

1.5 Importancia

La importancia de este trabajo es de carácter teórico, ya que nos permite observar una ecuación del calor con diferentes no linealidades y también a investigar a otros operadores que tengan propiedades similares al operador Laplaciano.

1.6 Limitaciones de la investigación

El área de limitación de este trabajo está realizada en el uso de las herramientas matemáticas sujeto a las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). En ese sentido, se puede indicar que este trabajo tiene un marco teórico debido a las pruebas que se realizan en cuanto a la existencia y unicidad de soluciones fuertes para la ecuación de calor no lineal.

Capítulo II

Revisión de literatura

2.1 Antecedentes del estudio.

El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) juega un rol importante en la aplicación de diversas áreas como ingeniería, física y otras. Se presentan 3 ecuaciones que son de carácter básico su estudio en las EDP: ecuación de la onda, ecuación del calor y ecuación del potencial.

El problema de la cuerda vibrante es el punto de partida para hacer el estudio de este fenómeno, es así que el primer matemático en hacer un modelo matemático fue Jean Le Rond D'Alembert, quien planteó un problema de tipo mixto con derivadas parciales en segundo orden que llamamos *ecuación de la onda,* D'Alembert demostró en 1747 que la función debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < \pi, \;\; t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\,, \qquad 0 \le x \le \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; t \ge 0 \end{cases}$$

Posteriormente realizaron este estudio Euler y Daniel Bernouilli con otras perspectivas.

El estudio de la gravitación universal hecha por Newton da origen a la *ecuación del potencial*, cuyos posteriores estudios se dan bajo personajes como Green, Gauss y Kelvin en el siglo XIX.

Finalmente, Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés, durante su estudio de la propagación de calor y en base a su experimento sobre una varilla se cuestionó: ¿Cuál será la temperatura de la varilla en cualquier punto "x" para cierto tiempo "t" ?, es así que se plantea un nuevo

problema de tipo mixto bajo condiciones físicas apropiadas al cual llamamos *ecuación del calor.* Demostró que si la función $u(x,t)$ representa la temperatura en el punto "x" y en el tiempo "t", entonces $u(x,t)$ debe satisfacer:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,, \;\; 0 < x < \pi, \;\; 0 < t < T \\ \qquad u(x,0) = f(x)\,, \qquad 0 \le x \le \pi \\ \\ \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; 0 \le t \le T \end{cases}$$

Usando el método de variables separadas, Fourier buscó soluciones más sencillas para la ecuación del calor. Luego se han presentado diversos estudios de la ecuación del calor como mostramos a continuación.

Lawrence Evans en su libro Partial differential equations, en el capítulo II muestra la existencia de la solución fundamental para la ecuación del calor homogénea con condición de Dirichlet en la frontera. En el capítulo VI, muestra la existencia y unicidad de soluciones débiles para la ecuación del calor no homogénea con condición de Dirichlet en la frontera. También aborda este problema desde el punto de vista de semigrupo. Brezis en su libro Functional análisis, Sobolev spaces partial differential equations, trata la ecuación del calor en el capítulo X. Recientemente, Quittner & Souplet tratan en su libro Superlinear Parabolic Problems, la misma ecuación con diversas no linealidades y condiciones de frontera, usando la teoría de semigrupos.

Dentro de los estudios de la ecuación de calor, también podemos mencionar: Una ecuación con términos gradientes cuya motivación para estudiar, es investigar el efecto de un término de gradiente y la existencia o no existencia global de soluciones.
También se presenta el artículo Faedo-Galerkin method for heat equation [5] que está dedicado a la existencia de la ecuación de calor en dominios acotados donde se prueba la existencia, unicidad de la ecuación con una condición de Dirichlet homogénea por el método de Faedo-Galerkin.

2.2 Bases teóricas

En este capítulo daremos las herramientas que utilizaremos para demostrar el resultado principal. Para más detalles de las definiciones y propiedades revisar: [1], [4], [6] y [8].

2.2.1 Notaciones.

Sea $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}$ un conjunto abierto y no vacío.

- $C(\boldsymbol{\Omega})$ es el espacio de las funciones continuas sobre $\boldsymbol{\Omega}$.

$$C(\boldsymbol{\Omega}) = \{f: \boldsymbol{\Omega} \to \mathbb{R}, f\ es\ función\ continua\}$$

- $C^k(\boldsymbol{\Omega})$ es el espacio de las funciones "k" veces continuamente diferenciables sobre $\boldsymbol{\Omega}$ $(\mathbf{k} \geq \mathbf{1}$ **es un número entero**$)$.
- $C^\infty(\boldsymbol{\Omega}) = \cap_k C^k(\boldsymbol{\Omega}) = \{f: \boldsymbol{\Omega} \to \mathbb{R}, f\ infinitamente\ diferenciable\}$
- $C_C(\Omega)$ es el espacio de las funciones continuas sobre Ω con soporte compacto en Ω, es decir, que se anulan fuera de un conjunto compacto $K \subset \Omega$.
- $C_C^k(\boldsymbol{\Omega}) = C^k(\boldsymbol{\Omega}) \cap C_C(\Omega)$
- $C_C^\infty(\boldsymbol{\Omega}) = C^\infty(\boldsymbol{\Omega}) \cap C_C(\Omega)$

2.2.2 Definiciones de medida

1. $\boldsymbol{\sigma - \text{Á}lgebra}$
   Dado un conjunto Ω consideramos la clase $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ de subconjuntos de Ω. Entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es un $\sigma - álgebra$ de conjuntos de Ω si cumple las siguientes propiedades.
   I. $\Omega \in \mathcal{A}$
   II. Para todo $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ se tiene que $A^C \in \Omega$, donde A^C es el complemento de A en Ω.
   III. Si $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$.

2. **Medida**
   Llamaremos medida a una función $\mu: \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ definida en un $\sigma - álgebra\ \mathcal{A}$ que satisfaga las siguientes propiedades:
   I. La medida del conjunto vacío es cero: $\mu(\emptyset) = 0$
   II. La función μ es contablemente aditiva $(\sigma - aditiva\ )$ esto es:

$$\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3. **Conjunto medible**
   Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ satisface la $condición\ de\ Caratheodory$ si se verifica la igualdad siguiente: $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$ para todo $A \subset \mathbb{R}$
   Donde m^* es una función llamada medida exterior.
   $m^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0; +\infty]$
   Si $E \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, entonces
   $$m^*(E) = \inf\{longitud\ de\ G : G \subset \mathbb{R}\ es\ abierto\ y\ E \subset G\}$$
   Los conjuntos que satisfacen la $condición\ de\ Caratheodory$ son llamados medibles.

4. **Función medible**
   Sea $A \subset \Omega$ un conjunto medible y una función $f: A \to \mathbb{R}$. Se dice que $f\ es\ medible$ si $\{x \in A / f(x) > \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. **Teorema de convergencia dominada de Lebesgue**
   Consideremos $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables sobre un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que converge casi siempre para una función u. Si existe una función u_0 que domina ella $|u_n| \leq u_0$ casi siempre para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:
   I. $u\ es\ integrable\ sobre\ \Omega$
   II. $\int_\Omega u = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n$

2.2.3 Espacios L^p

Sea $(\Omega, \mu, \mathcal{A})$ un espacio medible. Denotamos por $L^1(\Omega)$ al espacio de las funciones integrables de Ω en $\mathbb{R}$.

Definición 2.1. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < \infty$. Establecemos

$$L^p(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R} ; f\ es\ medible\ y\ |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Con

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right]^{1/p}$$

Donde $\| \ \|_p$ es una norma.

Definición 2.2. Establecemos

$$L^\infty(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R} ; f\ es\ medible\ y\ hay\ una\ constante\ C$$
$$talque\ |f(x)| \leq C\ casi\ todo\ punto\ de\ \Omega \}$$

Con

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \ casi\ todo\ punto\ de\ \Omega\} \ldots (2.1)$$

Donde $\| \ \|_\infty$ es una norma.

Observación 2.1:

- L^p es completo con la norma que se coloca en la definición, con $1 \leq p < \infty$.
- L^2 es un espacio que posee un producto interno, el cual es dado por:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx = \int_\Omega fg$$

2.2.4 Función esencialmente acotada.

Sea $N \geq 1 \ y \ \Omega$ un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ con medida positiva. Decimos que una función $f: \Omega \to \mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}$ el cuerpo de los número reales$(\mathbb{R})$ o el cuerpo de los números complejos $(\mathbb{C})$, esta **esencialmente acotada** cuando existe una constante $M \geq 0$ talque $|f(t)| \leq M$ para casi todo $t \in \Omega$. Definimos en $L^\infty(\Omega)$.

$\|f\|_\infty = ess\sup|f| = min\{M \geq 0 : \ |f(t)| \leq M \text{ para casi todo } t \in \Omega\} \ (f \in L^\infty(\Omega))$

Se puede comprobar que el conjunto de constantes que aparece en (2.1) tiene efectivamente un mínimo, al que es lógico llamar **supremo esencial** de $|f|$.

2.2.5 Dual Topológico

Denotamos por $E' = \{f: E \to \mathbb{R} : f\ es\ funcional\ lineal\ continua\}$ al espacio dual de E, que es, el espacio de todas l*as funciones lineales continuas sobre* E; la norma del dual sobre E' está definida por:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} |f(x)| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} f(x)$$

2.2.6 Espacios Reflexivos

Sea E un espacio de Banach y sea $J : \ E \to E^{**}$ la inyección canónica de E en E**. El espacio E se dice que es reflexivo si J es suryectiva, es decir, J(E)=E**.

Cuando E es reflexivo, E** es usualmente identificado con E.

Ejemplo: Los espacios $L^p, \ 1 < p < \infty$, son reflexivos.

2.2.7 Espacios Separables

Decimos que un espacio métrico E es *separable* si existe un subconjunto $D \subset E$ que es contable y denso.

Ejemplo: Los espacios $L^p(\boldsymbol{\Omega}),\ 1 \leq p < \infty$, son separables.

2.2.8 Espacios de Bochner

Espacios de funciones que mapean el intervalo (de tiempo) $(0,T)$ en algún espacio de Banach se llaman ESPACIOS DE BOCHNER. Sea $u\colon (0,T) \to X$ algún mapeo de un intervalo $(0,T),\ T > 0$ a un espacio de Banach X. Diremos que u es $fuertemente\ medible$ si la función real $t \to \|u(t)\|_X$ es $medible$.

Para $q \in [0,\infty]$ y un espacio de Banach X con la norma $\|\cdot\|_X$ denotamos por $L^q(0,T;X)$ al conjunto de todos los mapeos $f\colon [0,T] \to X$ que son $fuertemente\ medibles$ y tales que:

$$\|f\|_{L^q(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \quad para\ 1 \leq q < \infty$$

$$ess\ sup_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_X < \infty \quad para\ q = \infty$$

El espacio $L^q(0,T;X)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^q(0,T;X)}$ es un espacio de Banach.

Evidentemente $L^q\big(0,T;L^q(\Omega)\big) = L^q(\Omega \times (0,T))$.

Introduciremos la noción de derivada de funciones con valores en el espacio de Banach que usaremos.

Sea X un espacio de Banach, X' su dual y sea $u \in L^1(0,T;X)$ por $u'\ o\ u_t$ denotamos un elemento de $L^1(0,T;X)$ talque para todo $v \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle v, u(t)\rangle_{X',X} = \langle v, u'(t)\rangle_{X',X}$$

2.2.9 Espacios de Sobolev

Sea $N \geq 1 \ y \ \Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto no vacío y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ es definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \ \in L^p(\Omega) / \exists \ g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \ talque$$

$$\int_\Omega \ u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \ g_i \varphi \ \forall \ \varphi \in C_C^\infty(\Omega), \qquad \forall \ i = 1,2, \dots, N\}$$

Establecemos:

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y escribimos:

$$\nabla u = grad(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está equipado con la norma.

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

O a veces con la norma equivalente

$$\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p} \quad (Si \ 1 \leq p < \infty)$$

El espacio $H^1(\Omega)$ está equipado con el producto escalar.

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

La norma asociada.

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{1/2}$$

Es equivalente a la norma $W^{1,2}(\Omega)$.

Observación 2.2: Sea $\big((\cdot,\cdot)\big), \|\cdot\|$ y $(\cdot,\cdot), \|\cdot\|_{L^2}$ respectivamente el producto escalar y la norma en $H_0^1(\Omega) \ y \ L^2(\Omega)$. Cuando escribamos $\|u\| = \|u(t)\|$, $\|u\|_{L^2} = \|u(t)\|_{L^2}$ significan la norma de $u(x,t)$ en $H_0^1(\Omega) \ y \ L^2(\Omega)$ respectivamente.

2.2.10 El espacio $\boldsymbol{W_0^{1,p}(\Omega)}$

Sea $1 \leq p < \infty$; $\boldsymbol{W_0^{1,p}(\Omega)}$ denota la clausura de $\boldsymbol{C_C^1(\Omega)}$ en $W^{1,p}(\boldsymbol{\Omega})$ **.**

Tenemos el conjunto: $\boldsymbol{H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)}$

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ equipado con la norma de $W^{1,p}(\Omega)$, es un espacio de Banach separable, este es reflexivo si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ está equipado con el producto escalar de H^1, el cual es un espacio de Hilbert.

2.2.11 Topología Débil

Sea E un espacio de Banach, $f \in E'$ y consideremos la aplicación $\varphi_f: E \to R$ definida por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$ cuando f recorre E', se tiene la familia $(\varphi_f)_{f\in E'}$ de aplicaciones de E en R.

Definición 2.3. La topología débil de $\sigma(E, E')$ sobre E es la topología menos fina sobre E que torna continua todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f\in E'}$.

Consideramos E un espacio vectorial normado. Dada la sucesión$(x_n) \subseteq E$, la notación de la **convergencia débil** será: $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E')$.

Propiedades de convergencia débil. [1, Capítulo 3, Proposición 3.5]

Sea (x_n) una sucesión en E.

i. $x_n \rightharpoonup x \ en \ \sigma(E, E') \ \leftrightarrow \ \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \ \forall f \in E'$
ii. Si $x_n \to x$, entonces $x_n \rightharpoonup x$
iii. Si $x_n \rightharpoonup x$, entonces $\|x\|$ es acotada y $\|x\| \leq \lim_{n\to+\infty} Inf\|x_n\|$
iv. Si $x_n \rightharpoonup x \ en E$ y $f_n \rightharpoonup f \ en E'$, entonces $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$

2.2.12 Inmersión

Sean X y Y dos espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$ con $X \subseteq Y$ y el operador de inmersión.

$$\boldsymbol{j: X \to Y}$$

$$\boldsymbol{u \mapsto j(u) = u}$$

i. La inmersión $X \subseteq Y$ es llamada *continua*, denotada por $X \hookrightarrow Y$, si y solo si, j es continua, esto es,

$$\|u\|_Y \leq M\|u\|_X, \qquad \forall\, u \in X, M > 0 \ldots (2.2)$$

ii. La inmersión $X \subseteq Y$ es llamada *compacta*, denotada por $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, si y solo si, j es compacto, esto es, (2.2) es verdadero y cada sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ acotada en X posee una subsucesión $(u_{n'})_{n \in \mathbb{N}}$ el cual es convergente en Y.

Teorema 2.1 (Aubin – Lions) [6, Capítulo 2, Teorema 2.3.1]

Sean X_0, X, X_1 tres espacios de Banach talque $X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$, donde las inyecciones son continuas, la inyección de $X_0 \hookrightarrow X_1$ es compacta, y X_0, X_1 con reflexivas. Sea $T > 0$ un número fijo y sea $\alpha_0, \alpha_1 > 0$. Denotamos por Y un espacio de Banach de aquellas $v \in L^{\alpha_0}(0, T\ ;\ X_0)$ para las cuales $v' \in L^{\alpha_1}(0, T\ ;\ X_1)$ provistas con la norma

$$\|v\|_Y = \|v\|_{L^{\alpha_0}(0,T\ ;\ X_0)} + \|v'\|_{L^{\alpha_1}(0,T\ ;\ X_1)}$$

Entonces la inyección de $Y\ en\ L^{\alpha_0}(0, T\ ;\ X)$ es compacta.

Lema 2.1 [6, Capítulo 2, Lema 2.3.1]

Sean V, H, V' tres espacios de Hilbert con $V \subset H \equiv H' \subset V'$ donde cada espacio es denso en el siguiente y las inyecciones o inmersiones son continuas, H' siendo el dual de H, V' el dual de V. Si la función u pertenece a $L^2(0, T\ ;\ V)$ y su derivada u'(derivada respecto al tiempo) pertenece $L^2(0, T\ ;\ V)$, luego u está en casi todas partes igual a la función continua de [0;T] en H y tenemos la siguiente igualdad, la cual se mantiene en el sentido de distribución escalar sobre (0,T) donde $T > 0$:

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2 < u', u >_{V',V}$$

Teorema 2.2 (Banach- Alouglu- Bourbacki)

Consideremos E un espacio de Banach separable y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E', entonces existe una subsucesión $\left(f_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge en la topología $\sigma(E', E)$.

Teorema 2.3 (Kakutani) [1, Capítulo 3, Teorema 3.17]

Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo si y solo si

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$$

es compacto en la topología débil $\sigma(E, E*)$.

Lema 2.2 (Lions)

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y sean las funciones $g\ y\ g_j$ que pertenecen a $L^p(\Omega)\ con\ 1 < p < \infty$ talque

$$\|g_j\|_{L^p(\Omega)} \leq C\ y\ g_j \to g\ en\ casi\ todo\ punto\ de\ \Omega$$

Entonces $g_j \rightharpoonup g\ en\ L^p(\Omega)$.

Lema 2.3

Consideremos A un espacio de Banach y B un espacio de Banach que es reflexivo talque $A \subset B$ con inclusión continua. Si $v_n \rightharpoonup v\ \ y\ \ v'_n \rightharpoonup z$ entonces $v' = z$.

Lema 2.4

Consideremos X un espacio de Banach reflexivo talque $1 \leq p < \infty$. Si $u_n \rightharpoonup u$ en $L^p(0, \mathrm{T}; \mathrm{X})$ entonces $\int_0^T \psi\, u_n \rightharpoonup \int_0^T \psi\, u\, dt\ \ sobre\ X, \forall\ \psi \in C[0,T]\ con\ T > 0$.

Lema 2.5 (Gronwall) [2, Capítulo 4, Lema 4.2.1]

Sea $T > 0$, $\lambda \in L^1(0,T)$, $\lambda \geq 0$ y $C_1, C_2 \geq 0$. Sea $\varphi \geq 0$ talque $\lambda\varphi \in L^1(0,T)$ y

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds\,, \text{para casi todo } t \in (0,T).$$

Entonces tenemos

$$\varphi(t) \leq C_1 exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds\right), \qquad para\ casi\ todo\ t \in (0,T)$$

2.2.13 Convergencia en $L^p(0,T;V)$

Dado un espacio de Banach V, y para $1 \leq p < \infty$ el espacio $L^p(0,T;V)$ de Banach de las clases de funciones u, definidas en $(0,T)$ con valores en V, se tiene la siguiente proposición.

Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(0,T;V)$ y $u \in L^p(0,T;V)$, se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $u \in L^p(0,T;V)$ si:

$$\langle f, u_k\rangle_{L^{p'}(0,T;V')\times L^p(0,T;V)} \to \langle f, u\rangle_{L^{p'}(0,T;V')\times L^p(0,T;V)}, \forall\, f \in L^{p'}(0,T;V')$$

$$donde\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

Observación 2.3: Si $V = H_0^1(\Omega)$ entonces $V' = H^{-1}(\Omega)$ además tenemos las siguientes inmersiones.

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong \left(L^2(\Omega)\right)' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Y también tenemos lo siguiente:

$$\langle G, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = (G \cdot v)\ ;\ \forall\ G \in L^2(\Omega), \forall\ v\ \in H_0^1(\Omega)$$

2.2.14 Teorema de Existencia

Sea D un subconjunto abierto, conexo y no vacío de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y sea $f: X \to \mathbb{R}^n$ una función que no va ser necesariamente continua. Ahora consideremos la siguiente ecuación:

$$x' = f(t,x) \qquad (2.3)$$

Resolver la ecuación (2.3) es encontrar una función $x(t)$ que este definida en un intervalo I de la recta talque sea una función absolutamente continua y cumpla que:

$$\big(t, x(t)\big) \in X, \forall\, t \in I\ \ y\ \ x'(t)) = f(t,x)$$

Sea $(t_0, x_0) \in X$ consideremos el siguiente problema de valor inicial.

$$\begin{cases} x'(t)) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

Definición 2.4. Sea $f: X \to \mathbb{R}^n$ una función, decimos que f cumple las condiciones de Caratheodory sobre X si:

I. $f(t,x)$ es medible en t para x fijo.
II. $f(t,x)$ es continua en x para cada t fijo.
III. Para cada $K \subset X$ compacto, existe una función real integrable $m_K(t)$ talque $|f(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t),\ \forall\ (t,x) \in K$.

Teorema 2.4 (Caratheodory)

Sean $a, b > 0$ y consideremos $X = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leq a,\ \ \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b\}$, y sea $f: X \to \mathbb{R}^n$ una función que satisface las condiciones de Caratheodory sobre X entonces existe una solución $x(t)$ de (2.4) en algún intervalo $|t - t_0| \leq \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$.

Definición 2.5. (Prolongamiento)

Sea Ψ una solución del problema (2.4) definida sobre $[a, b]$. Entonces Ψ si tiene una prolongación en el intervalo $[a, b + \beta]$, siempre que exista una función

$$\bar{\Psi} = \begin{cases} \Psi(t); t \in [a, b] \\ \phi(t); t \in [b, b + \beta] \end{cases}$$

Tal que $\bar{\Psi}$ es solución de (2.4).

Teorema 2.5 (Prolongamiento)

Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq c, c > 0\}$ y sea $X = [0, T] \times B$ con $T > 0, \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq c$, además f satisface las condiciones de Caratheodory en (2.4). Consideremos $\psi(t)$ una solución del problema (2.4). Supongamos que en cualquier intervalo donde $\psi(t)$ está definido $\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k, \forall\ t\ \in I,\ k: no\ depende\ del\ intervalo\ I\ y\ k < c$ entonces $\psi(t)$ tiene un prolongamiento en el intervalo $[0, T]$.

2.2.15 Desigualdades importantes

- **Desigualdad de Young**
  Sea $a \geq 0, b \geq 0\ y\ 1 < p, q < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces
  $$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

- **Desigualdad de Hölder**
  Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 < p, q$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
  Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y $\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$.

Capítulo III

Variables e Hipótesis

3.1 Hipótesis

3.1.1 Hipótesis general

Es factible desarrollar las pruebas tanto para la existencia como para la unicidad de soluciones fuertes de la ecuación de calor no lineal planteada en (1).

3.1.2 Hipótesis específicas

- El método de Faedo – Galerkin como instrumento principal para el desarrollo de la existencia de soluciones fuertes para la ecuación de calor no lineal (1).
- El uso necesario del Lema de Gronwall para probar la unicidad de la solución fuerte en la ecuación de calor no lineal (1).

3.2 Variables

La variable de investigación es la serie:

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x),$$

3.3 Operacionalización de variables

En la demostración del teorema 2.1, se usó el método de Faedo – Galerkin, este método nos permite desarrollar nuestro problema dado en (1) en subespacios de dimensión finita.

Siguiendo con el desarrollo de nuestro trabajo los subespacios de dimensión finita son los V_m.

Desde que V es un subespacio de $H^2(\Omega)$ el cual es separable, podemos elegir un conjunto numerable de distintos elementos básicos $w_j\ y\quad j = 1,2,\cdots$. Los cuales generan V y son ortonormales en $L^2(\Omega)$. Sea V_m el subespacio de V generado por los primeros m elementos: $w_1, w_2, \cdots, w_m$. Construimos la solución aproximada de la forma:

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x)\,, \qquad (x,t) \in\ \Omega \times (0,T)$$

Donde $\left(g_{jm}\right)_{j=1}^{m}$ quedan por determinar.

De esta manera proponemos la siguiente aproximación del problema: Determine $u_m \in V_m$ talque:

$$\begin{cases} (u'_m, v) + (a(u_m)\,\nabla u_m\,, \nabla v) + (b(u_m)|\nabla u_m|^2, v) = 0 \qquad \forall\ v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad en\ \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases}$$

Capítulo IV

Materiales y métodos

4.1 Área de estudio

Nuestra área de estudio está enmarcada en el desarrollo de ecuaciones parciales, haciendo uso de los espacios de medida, espacios L^p , espacios de Sobolev y otras definiciones que se pueden revisar en los libros de Evans Lawrence C [2], Brezis H. [1]. Además, se puede indicar que este trabajo es da en un marco teórico debido a las pruebas que se realizan en cuanto a la existencia y unicidad de soluciones fuertes para la ecuación de calor no lineal.

4.2 Diseño de investigación.

En lo que respecta al diseño de investigación el presente trabajo está limitado en un diseño no experimental.

Capítulo V

Resultados

En este capítulo presentamos el problema de la ecuación del calor, las hipótesis que nos permiten obtener solución. Posteriormente un teorema y la prueba de existencia y unicidad de la solución.

5.1 Formulación del problema

Sea Ω un conjunto abierto, acotado y no vacío de $\mathbb{R}$, con frontera regular. Representamos por $Q = \Omega \times (0,T)$ para $T > 0$, un dominio cilíndrico, cuya frontera lateral representamos por $\Sigma = \Gamma \times (0,T), donde\ \Gamma = \partial\Omega$. Consideraremos el siguiente problema no lineal:

$$\begin{cases} u' - div(a(u)\nabla u) + b(u)|\nabla u|^2 = 0 \quad en\ Q \\ \\ u = 0 \quad en \quad \Sigma, \quad \mathrm{u(x,0)} = u_0(x) en \quad \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Donde tenemos las siguientes hipótesis:

H1: Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales de clase $C^1(\mathbb{R})$, tales que

$a_0 \leq a(s) \leq a_1$ para algunas constantes positivas $a_0, a_1 > 0$ y

$$b(s) \cdot s \geq 0, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

H2: Para una constante positiva $M > 0$ talque

$$\max_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \left| \frac{da}{ds}(s) \right|, \left| \frac{db}{ds}(s) \right| \right\} \leq M$$

H3: $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tales que $|\Delta u_0| < \varepsilon$, para algún $\varepsilon > 0$ donde

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Observación 5.1: Desde que tenemos la hipótesis (H1) y usando la hipótesis (H2) $\max_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \left| \frac{da}{ds}(s) \right|, \left| \frac{db}{ds}(s) \right| \right\} \leq M$ para algún $M > 0$, además mediante el uso del teorema del valor medio obtenemos: $|b(u)| \leq M|u|$.

5.2 Existencia y unicidad

MOTIVACIÓN DE LA FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA (1.1).

Se multiplica la ecuación (1.1) por una función $\omega \in C_C^{\infty}(\Omega)$ y luego se integra sobre Ω.

$$\int_{\Omega} u_t(x,t)\omega(x)dx - \int_{\Omega} div\left(a\big(u(x,t)\big)\nabla u(x,t)\right)\omega(x)dx$$

$$+ \int_{\Omega} b\big(u(x,t)\big)|\nabla u(x,t)|^2\omega(x)dx = 0$$

Otra forma de expresarlo:

Usamos el teorema de Green y del hecho que $u = 0$ en la frontera:

$$-\int_{\Omega} div\,(a(u)\nabla u)\omega(x)dx = \int_{\Omega} a(u)\,\nabla u\,\nabla\omega\,dx$$

Así nos queda:

$$\int_{\Omega} u_t\,\omega\,dx + \int_{\Omega} a(u)\,\nabla u\,\nabla\omega\;dx + \int_{\Omega} b(u)\,|\nabla u|^2\,\omega\,dx = 0, \qquad \forall\,\omega \in H^1(\Omega)\ldots(1.2)$$

Definición 5.1 (Solución fuerte)

Sea $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, Decimos que u es solución del problema (1.1) si $u \in L^2(0,T;\,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ y $u' \in L^2(0,T;\,H_0^1(\Omega))$ para algún $T > 0$ y satisface (1.2).

Teorema 5.1

Entonces el problema (1.1) admite solución en el sentido de la definición (3.1) y esta es única, además satisface las siguientes condiciones.

Bajo las hipótesis (H1), (H2) y (H3) existe una constante positiva ε_0 talque, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ entonces el problema (1.1) admite solución única $u: Q \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

i. $u \in L^2\big(0,T;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big),\quad u' \in L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega))$
ii. $u' - div(a(u)\nabla u) + b(u)|\nabla u|^2 = 0\ en\ L^2(Q)$
iii. $u(0) = u_0$

Prueba.

Desde que V es un subespacio de $H^2(\Omega)$ el cual es separable. Podemos elegir un conjunto numerable de distintos elementos básicos $w_j\ y\quad j = 1,2,\cdots$. Los cuales generan V y son ortonormales en $L^2(\Omega)$. Sea V_m el subespacio de V generado por los primeros m elementos: $w_1, w_2, \cdots, w_m$. Construimos la solución aproximada de la forma:

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x)\,, \qquad (x,t) \in\ \Omega \times (0,T)$$

Donde $\big(g_{jm}\big)_{j=1}^{m}$ quedan por determinar.

Para probar el teorema emplearemos el método de Faedo-Galerkin con una base de Hilbert de $H_0^1(\Omega)$, dada por autovectores (w_j) del problema espectral:

$\Big(\big(w_j, v\big)\Big) = \lambda_j(w_j, v)$ para todo $v \in V\ \ y\ \ j = 1,2,\cdots$. Representamos por V_m al subespacio de V generado por vectores $\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$. Proponemos la siguiente aproximación del problema: Determine $u_m \in V_m$ talque:

$$\begin{cases} (u'_m, v) + (a(u_m)\,\nabla u_m\,, \nabla v) + (b(u_m)|\nabla u_m|^2, v) = 0 \qquad \forall\ v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad en\ \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.1}$$

Existencia

El sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) tiene solución local en el intervalo $(0, T_m)$, esto debido a que el problema planteado en (2.1) cumple las condiciones del Teorema 2.4, y para extender la solución local al intervalo $(0, T)$ de tal forma que no dependa de m se necesitan las siguientes estimaciones que detallamos a continuación.

Estimativa I: Tomando $v = u_m(t)$ en la ecuación(2.1)

$$\left(\frac{d}{dt}u_m,\ u_m\right) + (a(u_m)\nabla u_m, \nabla u_m) + (b(u_m)|\nabla u_m|^2, u_m) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 + (a(u_m)\nabla u_m, \nabla u_m) + (b(u_m)|\nabla u_m|^2, u_m) = 0$$

Integrando de $(0, T)$

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T (a(u_m)\nabla u_m, \nabla u_m) + \int_0^T (b(u_m)|\nabla u_m|^2, u_m) = 0$$

$$\frac{1}{2}\|u_m(T)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^T (a(u_m)\nabla u_m, \nabla u_m) + \int_0^T (b(u_m)|\nabla u_m|^2, u_m) = 0$$

$$\frac{1}{2}\|u_m(T)\|_{L^2}^2 + \int_0^T (a(u_m)\nabla u_m, \nabla u_m) + \int_0^T (b(u_m)|\nabla u_m|^2, u_m) = \frac{1}{2}\|u_m(0)\|_{L^2}^2$$

Además:

$$\frac{1}{2}\|u_m(0)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2$$

Veamos que:

$$(a(u_m)\nabla u_m, \nabla u_m) = \int_\Omega a(u_m)\nabla u_m\, \nabla u_m = \int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2 \geq a_0 \int_\Omega |\nabla u_m|^2$$

Así tenemos:

$$\frac{1}{2}\|u_m(T)\|_{L^2}^2 + a_0 \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_m|^2 + \int_0^T (b(u_m)|\nabla u_m|^2, u_m) \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2$$

Denotamos:

$$\|\nabla u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$$

Luego.

$$\frac{1}{2}\|u_m(T)\|_{L^2}^2 + a_0\int_0^T \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \int_0^T\int_\Omega b(u_m)u_m|\nabla u_m|^2 \ \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 \ldots . (2.2)$$

Considerando: $\hat{a}_0 = \min\left\{a_0; \frac{1}{2}\right\} > 0$, obtenemos

$$\|u_m(T)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \int_0^T\int_\Omega b(u_m)u_m|\nabla u_m|^2 \ \leq \frac{1}{2\hat{a}_0}\|u_0\|_{L^2}^2 \ldots . (2.3)$$

Observamos que: $b(u_m)u_m \geq 0 \ \ y \ \ |\nabla u_m|^2 \geq 0$ entonces

$$b(u_m)u_m|\nabla u_m|^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^T\int_\Omega b(u_m)u_m|\nabla u_m|^2 \ \geq 0$$

Como los sumandos son no negativos.

$\|u_m(T)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\hat{a}_0}\|u_0\|_{L^2}^2$ tomando supremo: $\underset{t\in[0,T]}{\text{Sup}}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\hat{a}_0}\|u_0\|_{L^2}^2$

Así $u_m \in L^\infty(0,T\,;\ L^2(\Omega)\ )$

De la misma forma.

$\int_0^T \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\hat{a}_0}\|u_0\|_{L^2}^2 < \infty$ luego utilizando $H_0^1(\Omega) \ \hookrightarrow \ L^2(\Omega)$

$$\int_0^T \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\hat{a}_0}\|u_0\|_{H_0^1}^2 < \infty$$

Así $u_m \in L^2(0,T\,;\ H_0^1(\Omega)\ )$

Por lo tanto. $(u_m)\ esta\ acotado\ en\ L^\infty(0,T\,;\ L^2(\Omega)\ ) \cap L^2(0,T\,;\ H_0^1(\Omega)\ ) \ldots \ldots (2.4)$

Estimativa II: Tomando $v = u'_m$ en la ecuación (2.1) e integrando sobre $(0,T)$ obtenemos

$$(u'_m, u'_m) + (a(u_m)\nabla u_m, u'_m) + (b(u_m)|\nabla u_m|^2, u'_m) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m\|_{L^2} + \int_\Omega a(u_m)\, u'_m\, \nabla u_m dx + \int_\Omega b(u_m)\, u'_m\, |\nabla u_m|^2\, dx = 0$$

$$\int_0^T 2\frac{d}{dt}\|u'_m\|_{L^2}\, dt + \int_0^T 4\int_\Omega a(u_m)\, u'_m\, \nabla u_m\, dx\, dt + \int_0^T 4\int_\Omega b(u_m)\, u'_m\, |\nabla u_m|^2\, dx\, dt = 0$$

$$2\| u'_m(T)\|_{L^2} - 2\| u'_m(0)\|_{L^2} + 4\int_0^T\int_\Omega a(u_m)\, u'_m\, \nabla u_m\, dx\, dt + 4\int_0^T\int_\Omega b(u_m)\, u'_m |\nabla u_m|^2\, dx\, dt = 0$$

Así nos queda aplicando la regla de la cadena:

$$2\| u'_m(T)\|_{L^2} + \frac{d}{dt}\int_\Omega a(u_m)\, |\nabla u_m|^2 = \int_\Omega \frac{d}{du}a(u_m)\, u'_m |\nabla u_m|^2 + 2\int_\Omega b(u_m)\, u'_m |\nabla u_m|^2 \qquad (2.5)$$

Por la hipótesis (2) tenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{du}a(u_m)\, u'_m |\nabla u_m|^2 \leq \frac{1}{2}M\int_\Omega u'_m\, |\nabla u_m|^2$$

Usando la desigualdad de Holder

$$\frac{1}{2}M\int_\Omega u'_m\, |\nabla u_m|^2 \leq \frac{1}{2}M\| u'_m\|_{L^2}\|\nabla u_m\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{2}MC_0\| u'_m\|_{L^2}\|u_m\|^2_{H_0^1}$$

Finalmente

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{du}a(u_m)\, u'_m |\nabla u_m|^2 \leq \frac{1}{2}MC_0\| u'_m\|_{L^2}\|u_m\|^2_{H_0^1} \qquad (2.6)$$

Desde que: $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ y $|b(u_m)| \leq M|u_m|$. Además, por la desigualdad de Hölder. Obtenemos:

$$\int_\Omega b(u_m)\, u'_m |\nabla u_m|^2 \leq M\int_\Omega |u_m|\, u'_m\, |\nabla u_m|^2 dx$$

$$\leq M\|u_m\|_\infty \int_\Omega |\, u'_m|\, |\nabla u_m|^2$$

$$\leq M\, \|u_m\|_\infty C_0\, \| u'_m\|_{L^2}\, \|u_m\|^2_{H^1}$$

$$\leq MC_0\|u_m\|_{H^1}\, C_0\, \|\, u'_m\|_{L^2}\, \|u_m\|_{H^1}^2$$

$$\leq MC_0^2\|\, u'_m\|_{L^2}\, \|u_m\|_{H^1}^3 \qquad (2.7)$$

Dado $C_0 = C_0(\Omega)$ depende del dominio Ω

Reemplazando (2.6) y (2.7) en (2.5)

$$\|u'_m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2 \leq \frac{1}{2}MC_0\|\, u'_m\|_{L^2}\, \|u_m\|_{H^1}^2 + MC_0^2\|\, u'_m\|_{L^2}\, \|u_m\|_{H^1}^3$$

Aplicando la desigualdad de Young con $\varepsilon > 0$ (este épsilon será escogido apropiadamente más adelante)

$$MC_0\|u'_m\|\|u_m\|^2 = (MC_0\|u'_m\|\|u_m\|)(\|u_m\|)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}(MC_0\|u'_m\|\|u_m\|)^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u_m\|^2$$

$$MC_0^2\|u'_m\|\|u_m\|^3 = (MC_0^2\|u'_m\|\|u_m\|^2)(\|u_m\|)$$

$$\leq \frac{\varepsilon'}{2}(MC_0^2\|u'_m\|\|u_m\|^2)^2 + \frac{1}{4\varepsilon'}\|u_m\|^2$$

Considerando $\varepsilon = 1,\ \varepsilon' = 2$ en la desigualdad inicial

$$\|u'_m\|^2{}_{L^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2$$

$$\leq \frac{1}{4}(MC_0)^2\|u'_m\|^2\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_m\|^2 + (MC_0^2)^2\|u'_m\|^2\|u_m\|^4 \qquad (2.8)$$

Ahora considerando la derivada de la ecuación (2.1) con respecto a t y tomando $v = u'_m$ tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m\|_{L^2}^2 + \int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u'_m|^2$$

$$= -\int_\Omega \frac{d}{du}b(u_m)\|u'_m\|^2\,|\nabla u_m|^2 - \int_\Omega \frac{d}{du}a(u_m)u'_m\,|\nabla u_m|^2$$

$$-2\int_\Omega b(u_m)\nabla u_m \nabla u'_m\, u'_m$$

$$\leq MC_0^2(3+M)\|u'_m\|^2\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2 \qquad (2.9)$$

Sumando (2.8) y (2.9)

$$\|u'_m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|u'_m\|_{L^2}^2 + \int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u'_m|^2$$
$$\leq \frac{1}{4}(MC_0)^2\|u'_m\|^2\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2 + (MC_0^2)^2\|u'_m\|^2\|u_m\|^4$$
$$+ MC_0^2(3+M)\|u'_m\|^2\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2 + \frac{1}{2}\|u'_m\|_{L^2}^2\right) + \|u'_m\|_{L^2}^2 + \int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u'_m|^2$$
$$\leq \frac{1}{4}(MC_0)^2\|u'_m\|^2\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2 + (MC_0^2)^2\|u'_m\|^2\|u_m\|^4$$
$$+ MC_0^2(3+M)\|u'_m\|^2\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2$$

Como $a_0 \leq a(u_m) \quad por\ \ (H1)$

$$\|u'_m\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2 + \frac{1}{2}\|u'_m\|_{L^2}^2\right) + a_0\int_\Omega |\nabla u'_m|^2$$
$$\leq \frac{1}{4}(MC_0)^2\|u'_m\|^2\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2 + (MC_0^2)^2\|u'_m\|^2\|u_m\|^4$$
$$+ MC_0^2(3+M)\|u'_m\|^2\|u_m\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2$$

Luego agrupando tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,\|u'_m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2\right\} + \|u'_m\|^2 + \frac{a_0}{2}\|u'_m\|^2$$
$$+ \|u'_m\|^2\left\{\frac{a_0}{2} - \alpha_0\|u_m\|^4 - \alpha_1\|u_m\|^2\right\} \leq \|u_m\|^2 \qquad \cdots\ (2.10)$$

Donde $\alpha_0 = (MC_0^2)^2, \quad \alpha_1 = MC_0\left(\frac{1}{4}MC_0 + 3C_0 + 1\right)$

Bajo la siguiente condición de desigualdad:

$$\alpha_0\|u_m\|^4 + \alpha_1\|u_m\|^2 < \frac{a_0}{4} \qquad \forall\, t \geq 0 \qquad \cdots\ (2.11)$$

Resulta válido que el coeficiente de $\|u'_m\|^2$ es positivo y podemos integrar con respecto a t en (2.10)

$$\|u'_m\|_{L^2}^2 + \int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2 + \int_0^t \|u'_m\|^2 + a_0\int_0^t \|u'_m\|^2 \leq C \ldots\ldots (2.12)$$

Trabajando con:

$\|u'_m\|_{L^2}^2 \leq C$ entonces $\ Sup_{[0,T]}\,\|u'_m\|_{L^2}^2 \leq C \rightarrow\ u'_m \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$

$$\int_0^t \|u'_m\|^2 \leq C \rightarrow\ u'_m \in L^2(0,T\,;\,H_0^1(\Omega))$$

Así obtenemos:

(u'_m) es acotada en $L^\infty(0,T\,;\,L^2(\Omega)) \cap L^2\big(0,T,H_0^1(\Omega)\big)$ ... ... (2.13)

Ahora queremos probar la desigualdad (2.11) la cual es válida si la condición inicial es suficientemente pequeña. Supongamos que:

$$\frac{\alpha_0}{a_0}\Big(S_0 + a_1\|u_0\|^2 + \frac{1}{a_0}|u_0|^2\Big)^2 + \frac{\alpha_1}{a_0}(S_0 + a_1\|u_0\|^2 + \|u_0\|^2) < \frac{a_0}{4} \quad \dots (2.14)$$

$$\text{Y}\ \ \alpha_0\|u_0\|^4 + \alpha_1\|u_0\|^2 < \tfrac{a_0}{4} \quad \dots . (2.15)$$

Donde $S_0 = (M(\|u_0\| + |\Delta u_0|^2 + \|u_0\||\Delta u_0|^2) + a_1|\Delta u_0|)^2$

Veamos por contradicción, asumiendo que (2.11) es falso entonces existe t^* talque

$$\alpha_0\|u_m(t)\|^4 + \alpha_1\|u_m(t)\|^2 < \frac{a_0}{4} \quad si\ 0 < t < t^* \quad \dots (2.16)$$

$$\text{Y}\ \alpha_0\|u_m(t^*)\|^4 + \alpha_1\|u_m(t^*)\|^2 = \tfrac{a_0}{4} \quad \dots (2.17)$$

Integrando de $0\ a\ t^*$ (2.10) obtenemos.

$$\frac{1}{2}|u'_m(t^*)|^2 + \int_\Omega a(u_m)|\nabla u_m(t^*)|^2 \leq \int_\Omega a\big(u_m(0)\big)|\nabla u_m(0)|^2 + \frac{1}{2}|u'_m(0)|^2 + \int_0^{t^*}\|u_m\|^2$$

$$\leq a_1\|u_0\|^2 + \frac{1}{a_0}|u_0|^2 + (M(\|u_0\| + |\Delta u_0|^2 + \|u_0\||\Delta u_0|^2) + a_1|\Delta u_0|^2)^2 \dots (2.18)$$

Por otro lado:

$$\frac{1}{2}|u'_m(t^*)|^2 + \int_\Omega a(u_m)|\nabla u_m(t^*)|^2 \geq \frac{1}{2}|u'_m(t^*)|^2 + a_0\int_\Omega |\nabla u_m(t^*)|^2$$

$$\geq a_0|\nabla u_m(t^*)|^2 \geq a_0\|u_m(t^*)\|^2$$

Consecuentemente

$$a_0\|u_m(t^*)\|^2 \leq S_0 + a_1\|u_0\|^2 + \frac{1}{a_0}|u_0|^2$$

$$\|u_m(t^*)\|^2 \leq \frac{S_0}{a_0} + \frac{a_1}{a_0}\|u_0\|^2 + \frac{1}{{a_0}^2}|u_0|^2$$

Desde (2.14) y (2.15) obtenemos:

$$\alpha_0\|u_m(t^*)\|^4 + \alpha_1\|u_m(t^*)\|^2$$
$$\leq \frac{\alpha_0}{{a_0}^2}\left(S_0 + a_1\|u_0\|^2 + \frac{1}{a_0}|u_0|^2\right)^2 + \frac{\alpha_1}{a_0}(S_0 + a_1\|u_0\|^2 + \|u_0\|^2)$$
$$< \frac{a_0}{4} \ \ldots (2.19)$$

Así comparando con (2.17) tenemos una contradicción.

Estimativa III: Tomando $v = -\Delta u_m(t)$ en la ecuación (2.1) y usando la hipótesis (H1) tenemos

$$\left(\frac{d}{dt}u_m, -\Delta u_m(t)\right) + (a(u_m)\nabla u_m, \nabla(-\Delta u_m(t))) + (b(u_m)|\nabla u_m|^2, -\Delta u_m(t)) = 0$$

Veamos:

i. Primer sumando:

$$\left(\frac{d}{dt}u_m, -\Delta u_m(t)\right) = \int_\Omega \frac{d}{dt}u_m(-\Delta u_m(t)) = \int_\Omega \nabla\frac{d}{dt}u_m\,\nabla u_m - \int_{\Gamma\Omega} u_m$$

$$\left(\frac{d}{dt}u_m, -\Delta u_m(t)\right) = \int_\Omega \frac{d}{dt}\nabla u_m\,\nabla u_m = \left(\frac{d}{dt}\nabla u_m, \nabla u_m\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{H_0^1}^2$$

ii. Segundo sumando, aplicando regla de Green, regla del producto y cadena:

$$(a(u_m)\nabla u_m, \nabla(-\Delta u_m(t))) = \int_\Omega a(u_m)\nabla u_m\,\nabla(-\Delta u_m(t))$$

$$= \int_\Omega a(u_m)|\Delta u_m|^2 \; - a_1\|u_m\||\Delta u_m|$$

iii. Tercer sumando:

$$\left(b(u_m)|\nabla u_m|^2, -\Delta u_m(t)\right) = \int_\Omega b(u_m)|\nabla u_m|^2\left(-\Delta u_m(t)\right)$$

$$\left(b(u_m)|\nabla u_m|^2, -\Delta u_m(t)\right) \le \int_\Omega b(u_m)|\nabla u_m||\nabla u_m||\Delta u_m(t)|$$

$$\left(b(u_m)|\nabla u_m|^2, -\Delta u_m(t)\right) \le \bar{b}_1|\nabla u_m|_{L^\infty}\int_\Omega |\nabla u_m||\Delta u_m(t)|$$

$$\left(b(u_m)|\nabla u_m|^2, -\Delta u_m(t)\right) \le \bar{b}_1\|\nabla u_m\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla u_m\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2}$$

Como

$$\|\nabla u_m\|_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla(\nabla u_m)|^2 dx = \|\Delta u_m\|_{L^2}$$

Regresando a la desigualdad anterior y utilizando la desigualdad de Hölder e inmersión$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

$$\left(b(u_m)|\nabla u_m|^2, -\Delta u_m(t)\right) \le \bar{b}_1\|\Delta u_m\|_{L^2}\|\nabla u_m\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2}$$

$$\left(b(u_m)|\nabla u_m|^2, -\Delta u_m(t)\right) \le \bar{b}_1\|\nabla u_m\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2}^2$$

$$En\ esta\ expresión\ \ se\ denota\ \ \bar{b}_1 = Sup|b(s)| \quad \forall\, s \in \left[\frac{-a_0}{4a_1}; \frac{a_0}{a_1}\right]$$

Luego de (i), (ii) y (iii):

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \int_\Omega a(u_m)|\Delta u_m|^2 \; \le a_1\|u_m\||\Delta u_m| + b_1\|\nabla u_m\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2}^2$$

Por otro lado usando la hipótesis (H1): $\int_\Omega a(u_m)|\Delta u_m|^2 \geq \frac{a_0}{2}|\Delta u_m|^2$ y teniendo en cuenta que $b_1 = \bar{b}_1 + M$ tenemos

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \frac{a_0}{2}|\Delta u_m|^2 \leq a_1\|u_m\||\Delta u_m| + b_1\|\nabla u_m\|_{L^2}\|\Delta u_m\|^2{}_{L^2}$$

O equivalentemente:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \left(\frac{a_0}{2} - b_1\|\nabla u_m\|_{L^2}\right)\|\Delta u_m\|^2{}_{L^2} \leq a_1\|u_m\||\Delta u_m|$$

Recordando de (2.12) la constante "C" es dado por $C = S_0 + a_1\|u_0\|^2 + \frac{1}{2a_0}|u_0|^2$

Considerando

$$b_1\left(\frac{1}{a_0}\left(S_0 + a_1\|u_0\|^2 + \frac{1}{2a_0}|u_0|^2\right)^{1/2}\right) < \frac{a_0}{4} \qquad (2.20)$$

De (2.12) obtenemos: $\frac{a_0}{4} \leq \left(\frac{a_0}{4} - b_1\|u_m\|\right)$

Esto implica que:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \frac{a_0}{4}\|\Delta u_m\|^2{}_{L^2} \leq a_1\|u_m\||\Delta u_m| \leq \frac{a_0}{8}|\Delta u_m|^2 + C\|u_m\|^2 \qquad (2.21)$$

Ahora integrando de $0\ a\ t$ obtenemos:

$$\|u_m\|^2 + \int_0^t |\Delta u_m|^2 \leq \hat{C}$$

Notamos:

$\|u_m\|^2 \leq \hat{C}$ tomando supremo: $\underset{t\in[0,T]}{\text{Sup}}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 \leq \hat{C}$

Así $(u_m) \in L^\infty(0,T\,;\,H_0^1(\Omega))$

También:

$\int_0^t |\Delta u_m|^2 \leq \hat{C}$, donde se conoce que u_m se anula en la frontera y tiene segundas derivadas.

Así: $(u_m) \in L^2(0,T\,;\,H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

Por lo tanto:

$$(u_m)\ esta\ acotado\ en\ L^\infty(0,T\,;\,H_0^1(\Omega)) \cap\ L^2(0,T\,;\,H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \ldots (2.22)$$

Límite de la aproximación de soluciones:

De las estimativas $(2.4), (2.13), (2.22)$ podemos tomar límite al sistema no lineal. De hecho existe una subsucesión $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la cual se denota como la sucesión original tal que:

$u'_m \rightarrow u'_m$ débil en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

$u_m \rightarrow u$ débil en $L^2(0,T\,;\, H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ ... (2.23)

Donde $H_0^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ son reflexivos, esto se da por el lema 2.3.

Como existe una inyección compacta de $H_0^1(\Omega \text{ x } (0,\text{T}))$ en $L^2(\Omega \text{ x } (0,\text{T}))$ por teorema 2.1, extraemos una subsucesión de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ representada por $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$u_m \rightarrow u$ fuerte en $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$, $u_m \rightarrow u$ para casi todo punto(c.t.p.) en Q

$\nabla u_m \rightarrow \nabla u$ fuerte en $L^2(Q)$; $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$ para casi todo punto(c.t.p.) en Q … (2.24)

Lo cual se da por el lema 2.3. Donde $Q = \Omega \times (0,\text{T})$

Analizamos los términos no lineales del sistema aproximado en (2.1)

Del primer término tenemos que:

$$\int_\Omega a(u_m)\,|\nabla u_m|^2 \le a_1 \int_\Omega |\nabla u_m|^2 \le a_1 C \quad \cdots \quad (2.25)$$

Desde que obtenemos $u_m \rightarrow u$ c.t.p. en Q y $a(x,.)$ es continua obtenemos

$a(u_m) \rightarrow a(u)$ y $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$ c.t.p. en Q

Por tanto del lema (2.2) : $a(u_m)\,|\nabla u_m|^2 \rightarrow a(u)|\nabla u|^2$ c.t.p. en Q $\cdots$ (2.26)

De $(2.25)\ y\ (2.26)$ y el teorema 2.1 obtenemos

$a(u_m)\nabla u_m \rightarrow a(u)\nabla u$ débil en $L^2(Q)$ …. (2.27)

Del segundo término sabemos que:

$$\int_0^T\int_\Omega |b(u_m)|\nabla u_m|^2|^2 = \int_0^T\int_\Omega |b(u_m)|^2|\nabla u_m|^4 \le b_1^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_m|^2|\nabla u_m|^2$$

$$= b_1^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_m(x,t)|^2|\nabla u_m(x,t)|^2 dxdt$$

$$\le b_1^2\int_0^T\int_\Omega (Sup_{x\in\Omega}|\nabla u_m(x,t)|)^2|\nabla u_m(x,t)|^2$$

$$\leq b_1^2 \int_0^T |\nabla u_m|_{L^\infty}^2 \int_\Omega |\nabla u_m|^2$$

$$\leq b_1^2 C_0 \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 |\nabla u_m|_{H^1}^2$$

$$\leq b_1^2 C_0 \int_0^T Sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^1}^2 \ |\Delta u_m|^2$$

$$\leq b_1^2 C_0 \|u_m(t)\|^2 \int_0^T |\Delta u_m|^2 \leq C \quad \ldots. \ (2.28)$$

Donde C_0 está definido en (2.7)

Por el mismo argumento que lleva a (2.26), obtenemos

$$|b(u_m)|\nabla u_m|^2|^2 \ \rightarrow \ |b(u)|\nabla u|^2|^2 \quad \text{c. t. p. } en\ Q \quad \ldots \ (2.29)$$

Por tanto, de (2.28) y (2.29) obtenemos la convergencia

$$b(u_m)|\nabla u_m|^2 \ \rightarrow \ b(u)|\nabla u|^2 \ d\acute{e}bil \ en\, L^2(Q) \ \ldots \ (2.30)$$

Teniendo en cuenta (2.23), (2.27) y (2.30) en (2.1), existe una función $u = u(x,t)$ definida sobre $\Omega \times [0, \mathrm{T})$ con valor en $\mathbb{R}$ satisfaciendo (1.1). Más aun de la convergencia resultante obtenida, tenemos que $u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0\ en\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y la condición inicial está bien definida.

Por tanto, concluimos que la ecuación (1.1) tiene el sentido de $L^2(0,T\ ;\ L^2(\Omega))$.

Unicidad

Sea $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ donde $u(x,t) y\, v(x,t)$ son soluciones del problema (1.1)

$$u' - div(a(u)\nabla u) + b(u)|\nabla u|^2 = 0$$

$$v' - div(a(v)\nabla \mathrm{v}) + b(v)|\nabla v|^2 = 0$$

Restando, obtenemos:

$$(u-v)' - div(a(u)\nabla u) + div(a(v)\nabla \mathrm{v}) + b(u)|\nabla u|^2 - b(v)|\nabla v|^2 = 0$$

Luego agregamos:

$$div(a(u)\nabla v) - div(a(u)\nabla v) - b(u)|\nabla v|^2 + b(u)|\nabla v|^2$$

Así tenemos:

$$(2.31)\begin{cases} w' - div(a(u)\nabla w) - div\big(a(u) - a(v)\big)\nabla v + b(u)(|\nabla \mathrm{u}|^2 - |\nabla v|^2) + \big(b(u) - b(v)\big)|\nabla v|^2 = 0 \\ en\ Q \\ w = 0\ en\ \Sigma \quad , \quad w(x,0) = 0\ en\ \Omega \end{cases}$$

Multiplicando por $w(t)$, integrando sobre (Ω) obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \int_\Omega a(u)|\nabla w|^2$$

$$\leq \int_\Omega \left|\frac{da}{du}(\hat{u})\right| |w||\nabla v|\,|\nabla w| + \int_\Omega b(u)(|\nabla u| + |\nabla v|)|\nabla w||w|$$

$$+ \int_\Omega |\nabla v|^2 \left|\frac{\partial b}{\partial u}(\bar{u})\right| |w|^2$$

$$\leq M\int_\Omega |w||\nabla v|\,|\nabla w| + C_0\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)|\nabla w||w| + M\int_\Omega |\nabla v|^2\,|w|^2$$

$$\leq M|\nabla v|_{L^\infty(\Omega)}\|w\||w| + C_0\big(|\nabla u|_{L^\infty(\Omega)} + |\nabla v|_{L^\infty(\Omega)}\big)\|w\||w| + M|\nabla v|^2{}_{L^\infty(\Omega)}|w|^2$$

$$\leq \frac{a_0}{2}\|w\|^2 + \bar{C}(|\Delta \mathrm{u}|^2 + |\Delta v|^2)|w|^2$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \int_\Omega a(u)|\nabla w|^2 \leq \frac{a_0}{2}\|w\|^2 + \bar{C}(|\Delta \mathrm{u}|^2 + |\Delta v|^2)|w|^2 \qquad (2.32)$$

Donde se ha usado:

a) El teorema generalizado del valor medio
$$|a(u) - a(v)| = \left|\frac{da}{du}(\hat{u})(u - v)\right| \leq \left|\frac{da}{du}(\hat{u})\right| |w| \ , \ u \leq \hat{u} \leq v$$
b) Diferencia de cuadrados
$$|b(u)(|\nabla \mathrm{u}|^2 - |\nabla v|^2)| \leq |b(u)||\nabla w|(|\nabla u|) + |\nabla \mathrm{v}|$$
c) En la siguiente desigualdad "v" tiene decaimiento en la frontera
$$|\nabla v|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{H^1(\Omega)} \leq \ \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq |\Delta v|_{L^2(\Omega)}$$

Integrando (2.32) de $0 \ a \ t$ obtenemos:

$$\frac{1}{2}|w|^2 \leq \frac{1}{2}|w|^2 + \frac{a_0}{2}\int_0^t \|w\|^2 \leq \frac{1}{2}|w(0)|^2 + \bar{C}\int_0^t (|\Delta \mathrm{u}|^2 + |\Delta v|^2)|w|^2$$

Donde: $\bar{C}$ es una constante positiva y $\int_0^t (|\Delta \mathrm{u}|^2 + |\Delta v|^2) < \infty$

Como $w(0) = u(0) - v(0) = 0$ y usando lema de Gronwall (ver 2.2.16)

$$|w|^2 + \int_0^t \|w\|^2 = 0$$

De esta forma: $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t) = 0 \ \rightarrow \ u(x,t) = v(x,t)$ y la unicidad está probada.

Para finalizar, del teorema 2.5 tenemos que:

$u \in L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ y $u' \in L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega))$ para algún $T > 0$.

Capítulo VI

Conclusiones

1. Se presentó la demostración de la existencia de soluciones fuertes para la ecuación de calor no lineal por medio del método de Faedo-Galerkin.
2. El método de Faedo Galerkin nos permitió afrontar el problema de ecuación de calor mediante el uso de aproximaciones y estimativas para luego utilizar el Teorema de Aubin Lions y encontrar la convergencia de la solución.
3. Se desarrolló la unicidad de la solución para la ecuación de calor no lineal vía lema de Gronwall.

Capítulo VII

Recomendaciones

1. Esperamos que el desarrollo de este trabajo se pueda complementar con otras investigaciones en EDP.
2. Estudiar más adelante el comportamiento asintótico de la solución del presente problema de ecuación de calor no lineal.
3. Realizar la implementación de este problema de ecuación de calor no lineal en Matlab o algún otro programa con herramientas informáticas.

Capítulo VIII

Bibliografía

[1] Brezis H.- Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer (2010)

[2] Cazenave, Thierry and Haraux, Alain. An Introduction to Semilinear Evolution Equations. Oxford (1998)

[3] Coddington Earl A. and Levinson Norman. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Rill New York (1955)

[4] Evans Lawrence C. - Partial Differential Equations -American Mathematical Society (1998)

[5] Hamrouni Ahmed, Said Mohammed Saïd. Faedo-Galerkin method for heat equation.

[6] Lukaszewicz, Grzegorz. *Micropolar fluids Theory and applications.* Institute of Applied Mathematics and Mechanics, University of Warsaw. Polonia (1999)

[7] Lions, J. L. Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux limites non- lineares. Dunod. Paris (1969).

[8] Metzger Roger - Curso básico de Teoría de la Medida. Sociedad Matemática Peruana. Perú, primera edición (2008)

[9] Payá Albert, Rafael. Apuntes de Análisis Funcional. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada.

[10] Rincon M.A., Límaco J. and Liu I-Shih. Existence and Uniqueness of solutions of a Nonlinear Heat Equations. Sociedad Brasilera de Matemática Aplicada y Computacional (2005)

[11] Zheng, Songmu. Nonlinear evolution equations. Chapman & Hall/RCR (2004)