Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Computación Científica

Aplicación del modelo Black-Scholes para la simulación de acciones de empresas peruanas

TESINA

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Computación Científica

AUTOR

Kiara Lisseth LAZO OCHOA

ASESOR

Mg. Luis Javier VÁSQUEZ SERPA

Lima, Perú

2018

Referencia bibliográfica

Lazo, K. (2022). *Aplicación del modelo Black-Scholes para la simulación de acciones de empresas peruanas*. [Tesina de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Computación Científica]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Kiara Lisseth Lazo Ochoa
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	72912542
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Luis Javier Vásquez Serpa
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43389380
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-5414-6764
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	María Natividad Zegarra Garay
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09206994
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Luis Javier Vásquez Serpa
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43389380
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.4.3. Modelos Económicos
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos Facultad de Ciencias Matemáticas Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima

	Ciudad Universitaria - UNMSM, Av. República de Venezuela 3400 Latitud: -12.0602615 Longitud: -77.0822256
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2017 – 2018
URL de disciplinas OCDE	Estadísticas, Probabilidad https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.03 Ciencias de la computación https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.02.01 Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SANMARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMERICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

PROGRAMA DE ACTUALIZACIÓN PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL 2017-II
MODALIDAD EXAMEN DE SUFICIENCIA PROFESIONAL

(R.D. Nº 0681/FCM-D/2017)

ESCUELA PROFESIONAL DE COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

ACTA DE EXPOSICIÓN DE TESINA

En la Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 horas, del día 01 de marzo del 2018, se reunieron las docentes designadas como miembros del Jurado Evaluador:

- Dra. María Natividad Zegarra Garay — Presidenta
- Mg. Luis Javier Vásquez Serpa — Miembro

Para la exposición de Tesina titulada: ***«Aplicación del Modelo Black-Scholes para la simulación de acciones de Empresas Peruanas»***, presentada por la Bachiller **Kiara Lisseth Lazo Ochoa**.

Luego de la exposición de la tesina, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, a las cuales la Bachiller **Kiara Lisseth Lazo Ochoa**, respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

Hecha la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, la Bachiller **Kiara Lisseth Lazo Ochoa** mereció la aprobación obteniendo como calificativo promedio y la nota de dieciocho (18) (letras y números).

A continuación los miembros del Jurado, dan manifiesto que la Bachiller **Kiara Lisseth Lazo Ochoa** APROBÓ la exposición de la tesina.

Siendo las 16:30 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente acta en dos (2) copias originales.

Mg. Luis Javier Vásquez Serpa
MIEMBRO

Dra. María Natividad Zegarra Garay
PRESIDENTA

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

La directora de la Escuela Profesional de Computación Científica informa lo siguiente:

1. Operador del programa informático de similitudes: Dra. María Natividad Zegarra Garay.

2. Documento Evaluado:
   Tesina para obtener título de licenciada en Computación Científica, titulado «APLICACIÓN DEL MODELO BLACK-SCHOLES PARA LA SIMULACIÓN DE ACCIONES DE EMPRESAS PERUANAS».

3. Autor de la tesina: Kiara Lisseth Lazo Ochoa.

4. Fecha de recepción de la tesina: 21 de noviembre del 2022.

5. Fecha de aplicación del programa informático de similitudes: 21 de noviembre del 2022
   - Software utilizado: Turnitin

6. Configuración del programa detector de similitudes:
   - Excluye textos entrecomillados
   - Excluye bibliografía
   - Excluye cadenas menores a 40 palabras

7. Porcentaje de similitudes según programa detector de similitudes: nueve por ciento (9%)

8. Fuentes originales de las similitudes encontradas:
   - Fuentes de internet: 9%
   - Publicaciones: 1%
   - Trabajos del estudiante: 5%

9. Calificación de originalidad:
   - Documento cumple criterios de originalidad, sin observaciones.

Lima, 22 de noviembre del 2022.

UNMSM
Firmado digitalmente por ZEGARRA GARAY Maria Natividad FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 22.11.2022 14:10:03 -05:00

Dra. María Natividad Zegarra Garay
Directora

/spv

RESUMEN

Aplicación del modelo Black-Scholes para la simulación de acciones de empresas peruanas

Kiara Lisseth Lazo Ochoa

Febrero - 2018

Tutor: Mg. Luis Javier Vásquez Serpa

Título obtenido: Licenciada en Computación Científica

El modelo de Black-Scholes-Merton es un modelo utilizado en matemática financiera para obtener el valor de diversos activos financieros. Este modelo se basa en los procesos estocásticos y es uno de los modelos más utilizados dentro de los sistemas financieros a nivel mundial. En el siguiente trabajo se estudia dicho modelo para poder ser aplicado a las acciones de empresas peruanas para su posterior comparación con los valores reales y poder analizar su nivel de precisión. La ecuación de Black-Scholes-Merton muestra que:

$$C = SN(d_1) - Ke^{rT}N(d_2)$$

Donde usamos para abreviar:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Siendo:

C = Valor de una opción de compra.

S = Precio del activo subyacente.

K = Precio de ejercicio de la opción de compras.

T = Tiempo expresado en años que aún faltan por transcurrir en la opción.

r = Tasa de interés.

σ = Volatilidad de la tasa de cambio.

$N(x)$ = Valor de la función de probabilidad acumulada.

PALABRAS CLAVES: Procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales estocásticas, precio de las acciones, teoría de Black-Scholes-Merton.

ABSTRACT

Application of the Black-Scholes model for the simulation of shares of peruvian companies

Kiara Lisseth Lazo Ochoa

February - 2018

Adviser: Mg. Luis Javier Vásquez Serpa

Degree Obtained: Bachelor of Computing Science

The Black-Scholes-Merton is a model used in financial mathematics to obtain the value of financial assets. This model is based on stochastic processes and is one of the most widely used models within financial systems throughout the world. In the following work, this model is studied in order to be applied to the actions of Peruvian companies for later comparison with real values and analyze their level of precision. The Black-Scholes-Merton equation shows that:

$$C = SN(d_1) - Ke^{rT}N(d_2)$$

Where we use for abbreviation:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Being:

$C =$ Value of a purchase option.

$S =$ Price of the underlying asset.

$K =$ Exercise price called strike.

$T =$ Time expressed in years that still have to pass in the option.

$r =$ Interest rate.

$\sigma =$ Volatility of the exchange rate.

$N(x) =$ Cumulative normal distribution function

KEYWORDS: Stochastic processes, stochastic differential equations, stock price, Black-Scholes-Merton theory.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

1.1 Delimitación y planteamiento del problema

El modelo de Black Scholes es un modelo matemático estudiado en los sistemas internacionales como herramienta fundamental para la toma de decisiones en empresas y en diversos sistemas financieros. Este modelo mayormente es empleado para obtener los valores de opciones de compra (Call) y venta (Put). Esto lleva a la búsqueda de estimativas del valor de las acciones de las diferentes empresas para su posterior análisis.

En este trabajo se va a estudiar el Modelo de Black Scholes para el pronóstico y estimación de precios de las acciones en empresas peruanas, usando los datos de la Bolsa de Valores de Lima con la finalidad de garantizar un manejo de información más eficiente para la toma de decisiones sobre transacciones futuras.

1.2 Formulación de objetivos

Para el desarrollo de este modelo, se estudian los procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales estocásticas, movimiento browniano, proceso de Wiener, entre otros. Los cuales permiten entender, analizar y aplicar la ecuación para el pronóstico de los activos deseados.

Por lo tanto, la aplicación de este modelo matemático buscará predecir el valor de las acciones de cinco entidades representativas en la Bolsa de Valores de Lima de diferentes sectores empresariales. Por consiguiente, en el Capítulo 2, se pasará a estudiar los conceptos financieros relacionados al modelo, procesos estocásticos, movimiento browniano, procesos de Wiener, cálculo estocástico y las martingalas. En el Capítulo 3, se revisará el concepto, definiciones y aplicaciones del modelo de Black Scholes. En el Capítulo 4, se hará la implementación del modelo asociado a los parámetros dados por los sistemas financieros y de esta manera se buscará poder integrar estos valores usando el programa Matlab para poder hacer el pronóstico correspondiente. Finalmente se realizará un análisis comparativo de los valores pronosticados con lo reales y se darán las conclusiones y recomendaciones.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1 Conceptos financieros

2.1.1 Mercado de Capitales

Se entiende al mercado de capitales como una atmósfera en la cual se desarrollan operaciones como lo es la permuta de activos financieros de empresas y otras unidades económicas como las acciones, obligaciones, compra-venta de títulos y deudas a largo plazo. Este mercado permite a las empresas reducir el costo de fondeo y a los inversionistas obtener una mayor rentabilidad. El mercado de capitales se divide en dos tipos, el mercado primario y el mercado secundario. El mercado primario, también es llamado mercado de emisión, como su nombre lo dice es el mercado en el cual se transmiten valores y títulos por primera vez. Y mercado secundario es donde se realiza la negociación dedicado a la compra y venta de valores.

> *"En nuestro país, el segmento de mayor expansión desde la década de los noventa ha sido el mercado primario de bonos, destacando en particular las emisiones de bonos corporativos emitidos por empresas privadas no financieras".*
>
> *BCR, 2010*

2.1.2 Mercado Bursátil

> *"El Mercado Bursátil es la integración de todas aquellas Instituciones, Empresas o Individuos que realizan transacciones de productos financieros, entre ellos se encuentran la Bolsa de Valores, Casas Corredores de Bolsa de Valores,*

Emisores, Inversionistas e instituciones reguladoras de las transacciones que se llevan a cabo en la Bolsa de Valores".

Juan Dominguez, 2008

Por consiguiente, es un tipo de mercado caracterizado por conllevar transacciones financieras que se efectúan en las diferentes bolsas de valores alrededor del mundo. El mercado bursátil se encarga de que las empresas puedan financiar sus proyectos mediante la venta de diversos productos como vienen a ser los derechos de propiedad o activos. En este mercado se puede obtener información sobre el comportamiento, desarrollo y tendencias de los índices que se reflejan en los precios de los diversos productos bajo la influencia de la oferta y demanda u otros factores influyentes.

2.1.3 Mercado de Valores

Es un mercado en el cual se negocia la renta variable y la renta fija a través de la compra venta de valores negociables, en el cual su conjunto de normas y participantes permiten el proceso de ubicación de los valores inscritos en el registro nacional o internacional de valores. En este se unen ciudadanos y empresas para invertir valores que en un futuro les pueda producir ganancias. Se definen actores en este proceso, los emisores que vienen a ser los que necesitan el financiamiento y los inversores que son los que están interesados en financiar. Esto permite a ambas partes obtener ganancias, por un lado la empresa tiene un financiamiento más cómodo y por el otro lado los inversionistas tienen una alternativa de inversión con más seguridad de retorno. Esto permite que ambas partes sepan la información tanto de inversionistas y la empresa donde la SMV (Superintendencia de Mercado de Valores) se encarga de supervisar el manejo de información tanto de empresas como inversionistas. Dentro del mercado de valores se tienen dos formas de adquirir estos financiamientos, la primera que son las bolsas de valores organizados donde los interesados están presentes en las transacciones y la otra manera es a través de los mercados extrabursátiles que se realizan mediante medios electrónicos, lo cual hace que éste no sea un método tan seguro ya que no se ponen las cláusulas de una manera tan especificada como puede ser en el caso de las bolsas de valores. En el mercado de valores . además de emisores e inversionistas, también existen diversas instituciones que tienen un rol determinado en la negociación de acciones. Los principales actores son las Casas de Bolsa, la Bolsa de Valores, CAVALI, las empresas evaluadoras de riesgo y la SMV. Asimismo, las entidades bancarias pueden realizar diversas operaciones en el mercado de valores, incluyendo operaciones de financiamiento estructurado, participación en procesos de titulación, suscripción previa a ofertas iniciales de valores y garantía total o parcial de su colocación, de conformidad con el principio de banca múltiple. Para ello, los bancos deben establecer filiales especializadas tales como Sociedades de Bolsa, Sociedades de Inversión, Sociedades de Gestión de Fondos Mutuos y Sociedades de Cartera.

2.1.4 Acciones, Valores, Dividendos y Bonos

Acciones

Una empresa se divide en partes del mismo tamaño y una acción será una de estas partes, entonces una acción vendría a ser una unidad de propiedad de una sociedad anónima, estas partes vienen a ser poseídas por personas que reciben el nombre de accionistas y así al tener cada persona un conjunto de acciones se forman los porcentajes que sumados dan el total de la empresa, al adquirir acciones de una empresa, el accionista pasa a tener derecho y obligaciones que cumplir, entre los derechos se encuentra el de poder asistir a la Junta de Accionistas de la empresa, obtener información sobre la situación de la entidad, recibir porcentajes de ganancias de la empresa o vender y traspasar sus acciones; mientras que en sus obligaciones está el soportar cualquier perdida que se pueda dar mientras la empresa no pueda tener resultados favorables.

Valores

Los valores son los instrumentos financieros que dan derechos a los propietarios sobre ciertas sociedades, se le define también como un documento mercantil en el que está incorporado un derecho privado y que pueden llegar a ser transferibles. Se tienen diferentes tipos de valores como son: el valor adquisitivo constante, valor de mercado, valor de rescate, valor emitido al descuento, valor en riesgo, valores nominales, entre otros. Entre los más reconocidos se tienen a las acciones, bonos, letras hipotecarias, dividendos, etc.

Dividendos

Es el beneficio ya sea efectivo o accionario que obtienen los accionistas por ser propietarios de una sociedad. La rentabilidad por dividendo es una de las razones o indicadores que utilizan los analistas para valorar las acciones de una empresa. Los dividendos se dividen en pasivos y activos en donde los dividendos pasivos pasan a formar parte de la obligación de realizar aportes al capital en circulación de la empresa. Esto se debe a que en algunas entidades comerciales los fondos aportados por los socios pueden estar aún pendientes y no pagados al momento de firmar la escritura. Por otro lado, un dividendo activo es una parte de las utilidades o reservas que una empresa distribuye a los accionistas durante un periodo de tiempo como compensación por su capital aportado. La distribución de dividendos debe ser acordada con la Junta General de accionistas.

Bonos

Un bono viene a ser un título de deuda que puede emitir una instancia. Se podría explicar como una obligación financiera que se adquiere al obtener algún bien u otros con la promesa de un pago posterior en un contrato donde se indican el monto, mes y condiciones en las cuales se restituirá este préstamo. Los bonos vienen a ser las principales fuentes de ingresos para empresas o instancias públicas ya que mediante los bonos materializan una deuda. Los bonos se consideran activos de renta fija ya que al realizarse la devolución se le agrega a la cantidad prestada un tipo de interés previamente establecido.

Adicionalmente tenemos los siguientes elementos financieros:

Precio del Ejercicio (K): Conocido como Strike, viene a ser el valor del instrumentos subyacente que se compra cuando se ejerce la opción.

Fecha de los contratos: Cuando se ejecutan las opciones y/o finalizan los acuerdos.

Tipos de contratos: Se deciden si las opciones serán americanas, europeas o de otra índole.

Prima del contratos: Referido al valor pagado por el contrato en mención.

2.1.5 Opciones Financieras

> *"Las opciones financieras son un contrato por el que el poseedor obtiene el derecho de compra o vender un activo a un precio determinado o en una fecha fijada".*
>
> *Anónimo, 2005*

Tenemos dos tipos básicos de opciones financieras, de tipo americano y europeo. En el caso de las americanas se pueden comprar o vender en cualquier momento, mientras que las de tipo europeo solo se pueden adquirir al ejercer el vencimiento, más todo esto no influye en nada con sus precios. Para estudiarlas debemos de manejar los términos: strike, prima, call y put. Una opción de compra (call) le da al comprador el derecho de adquirir el activo subyacente a un precio determinado en una fecha determinada . Por otro lado, una opción de venta (put) le da al comprador el derecho de vender el activo subyacente a un precio específico en una fecha específica. El precio determinado en el contrato, que denotaremos con la letra K, también es llamado precio de ejercicio, por otro lado, la fecha en que se celebra el contrato, que denotaremos con la letra T, se conoce también como fecha de madurez o vencimiento.

Hull [2003] menciona que las opciones le dan al propietario el derecho de hacer algo, a diferencia de los forwards, donde el propiertario tiene la obligación de comprar o vender el activo subyacente.

> *"Lo que hace el modelo Black-Scholes es dar valores teóricos para las opciones call y put europeas sobre acciones que no pagan dividendos. Se asume que el precio de la acción sigue un proceso aleatorio y usando métodos estocásticos de cálculo, el precio de la opción puede ser calculado".*
>
> *Nuñez, 2009*

Por Nuñez [2009] ahora si el precio de las acciones es más alto que el precio de contrato ($S(T) > K$) la opción se ejerce porque el propietario puede obtener una ganancia $Y = S(T) - K$. En el momento T el dueño de la opción comprará la acción al precio de ejercicio K y la podrá vender al precio del mercado $S(T)$ con una ganancia de $S(T)\breve{}K$. no tiene beneficio, es decir, $Y = 0$. Se expresa la función de pago call de la siguiente manera.

$$Y = (S(T) - K)^{+} = \text{máx}\{(S(T) - K), 0\}. \tag{2.1}$$

En cuanto a la función de pago put, ésta se asemeja a la función de pago call. En el momento T el propietario de la opción deberá vender la acción al precio K e inmediatamente podrá comprarla al precio de mercado $S(T)$ obteniendo una ganacia $K - S(T)$. Cuando $K < S(t)$, la opción no se ejercerá porque el propietario no obtendría beneficios, es decir, $Y = 0$. Se observa la función de pago de un contrato put en la expresión 2.2 y en el gráfico (Chávez, J., 2004).

$$Y = (K - S(T))^{+} = \max\{(K - S(T)), 0\}. \tag{2.2}$$

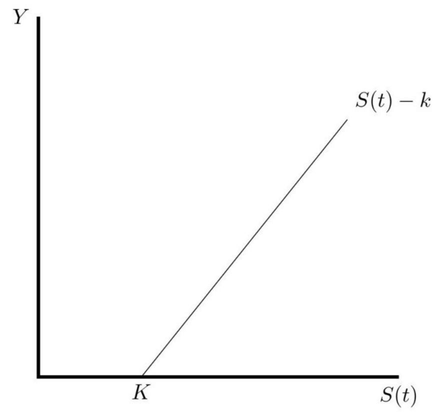


Figura 2.1: Función de pago de una opción call.

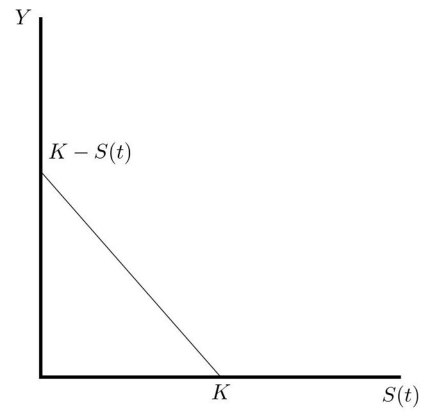


Figura 2.2: Función de pago de una opción put.

2.1.6 Bolsa de Valores de Lima

La Bolsa de Valores de Lima viene a ser un mercado en el cual tanto compradores como vendedores pueden negociar títulos valores que pertenecen a empresas privadas o públicas por ende se puede comprender que la bolsa facilita negociación de los valores inscritos en la Bolsa. Tiene diferentes funciones entre una de ellas está la de brindar información necesaria a sus participantes para poder realizar la compra y venta de valores, también tiene la función de divulgar de manera pública la información de la cotización de valores. En la actualidad, la Bolsa de Valores de Lima participa en toda la cadena de valor, y posee el 93% del accionariado de la empresa CAVALI ICLV (Registro Central de Valores y Liquidaciones), responsable de la gestión eficiente del liquidación, compensación, registro y custodia de los valores negociados en el mercado de capitales peruano. En la BVL se cotizan las acciones de los diferentes sectores, en la cual predomina el valor de las acciones mineras que es algo que caracteriza a la bolsa peruana.

2.1.7 Índices de la Bolsa de Valores de Lima

El índice general de la Bolsa de Valores de Lima (IGVL) viene a ser un indicador que se encarga de la medir el comportamiento del mercado bursátil. El IGVL es el único índice basado en la liquidez que mide el desempeño de las 25 acciones más negociadas en la Bolsa de Valores de Lima. Estas acciones se determinarán evaluando el índices de liquidez de cada acción cotizada, el cual tiene en cuenta la frecuencia de cotización, el número de operaciones y el volumen de negociación, descartándose las operaciones atípicas. Este índice sigue la historia del índice Selectivo de la Bolsa de Valores de Lima (ISBVL), que se remonta al 30 de diciembre de 1991. La fórmula para poder calcular el Índice General de la Bolsa de Valores y otras bolsas viene a ser la siguiente:

$$IGVL = \frac{\sum \frac{Pin \times W_i \times C_i}{Pib}}{\sum W_i} \times 100$$

Donde:

Pin: Precio de la acción "i" en el día "n".

Pib: Precio de la acción "i" en la fecha base.

W_i: Peso de la acción "i" dentro del portafolio. Este se calcula usando el número de

operaciones que registra el valor, el monto efectivo negociado y la frecuencia.
C_i: Corrector acumulado por dividendos en efectivo, derechos de suscripción y entrega de acciones liberadas,

2.2 Procesos estocásticos

2.2.1 Teoría de probabilidad

La probabilidad de un evento viene a ser la posibilidad de que un evento ocurra. Entenderemos por tal evento como el experimento cuyo resultado no es completamente predecible. Así, encajan en esta definición el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, el juego de la ruleta, entre otros. Sea Ω el conjunto de resultados posibles entonces Ω será llamado espacio muestral. El espacio muestral debe contener todos los resultados posibles. (Barry,1996)

Definición 2.2.1. Llamaremos **evento aleatorio** a un evento A al cual se le puede asignar una probabilidad.

Definición 2.2.2. Dado un conjunto no vacío Ω. Una clase $\boldsymbol{A}$ de subconjuntos de Ω es llamada una **álgebra** en Ω si satisface:

$A1$. Si $A \in \boldsymbol{A}$ y $B \in \boldsymbol{A}$ entonces $A \cup B \in \boldsymbol{A}$

$A2$. Si $A \in \boldsymbol{A}$ entonces $A^c \in \boldsymbol{A}$

$A3$. $\Omega \in \boldsymbol{A}$

en la práctica podemos considerar que la clase de eventos aleatorios satisface:

$A3'$. Si $A_n \in \boldsymbol{A}$ para todo $n = 1, 2, 3, ...$ entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{A}$

Definición 2.2.3. Dado un conjunto no vacío Ω. Una clase A de subconjuntos de Ω es llamada una $\sigma-$**álgebra** si satisface A_1, A_2, A'_3.

Observación 2.1. En general podemos suponer que $\boldsymbol{A}$ es una $\sigma-$álgebra en vez de un álgebra, por el Teorema de Extensión de Carathéodory. Tal teorema de Teoría de la Medida nos dice que una probabilidad definida en un álgebra se puede extender de forma única a la $\sigma-$álgebra "generada" por el álgebra.

Observación 2.2. En el caso que $\Omega \subset \mathbb{R}$ consideraremos la $\sigma-$álgebra generada por intervalos contenidos en ω (es decir, la menor σ-álgebra que los contiene). Esta σ-álgebra es llamada la σ-álgebra de Borel cuyos elementos son denominados **borelianos**. En términos intuitivos un boreliano es un conjunto obtenido a partir de una cantidad contable de intervalos aplicándoles las operaciones básicas (intersección, unión y complementos) una cantidad contable de veces.

La siguiente definición es consecuencia del trabajo de Kolmogórov, quien en 1933 formuló una construcción axiomática que brindó a la Teoría de la Probabilidad un sustento matemático firme.

Definición 2.2.4. Dado un conjunto no vacío Ω y una σ-álgebra $\boldsymbol{A}$, una **medida de probabilidad** en $\boldsymbol{A}$ es una función $P : \boldsymbol{A} \longrightarrow [0,1]$ que verifica los siguientes axiomas:

1. $P(\Omega) = 1$

2. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \boldsymbol{A}$

3. Si $A_1, A_2, ... \in \boldsymbol{A}$ son disjuntos dos a dos entonces:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Modelo Probabilístico

Un modelo probabilístico está constituido por:

a) El espacio muestral, un conjunto no vacío Ω

b) Una probabilidad P definida en $\boldsymbol{A}$;

c) Una $\sigma-$álgebra $\boldsymbol{A}$ de eventos aleatorios.

Definición 2.2.5. La $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ descrita en $a), b), c)$ será llamada de **espacio de probabilidad**.

De aqui en adelante, todo será estudiado en estos espacios sin embargo seguiremos hablando de experimentos y eventos para que todo sea más intuitivo. Podemos ver a los espacios de probabilidad como modelos para el experimento "elegir un punto de Ω de acuerdo a la probabilidad P".

Probabilidad condicional

Definición 2.2.6. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Sean $A_1, A_2 \in \boldsymbol{A}$ con $P(A_2) > 0$, definimos la probabilidad condicional de A_1 dado A_2 siendo:

$$P(A_1|A_2) := \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}.$$

Definición 2.2.7. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.Sean $A_1, A_2 \in \boldsymbol{A}$, decimos que los eventos son (estocásticamente) independientes si

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Observación 2.3. Note que si A_1 y A_2 son independientes con $P(A_1) \neq 0$ y $P(A_2) \neq 0$ tenemos que $P(A_1|A_2) = P(A_1)$ y $P(A_2|A_1) = P(A_2)$ de lo que se deduce que la probabilidad de que un evento ocurra no está condicionada al otro, siendo ese el origen del término "independientes".

Definición 2.2.8. Los eventos aleatorios Aj, $j \in J$, son independientes 2 a 2 (o de a pares) si

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k), \quad \forall\, j, k \in J; j \neq k.$$

Definición 2.2.9. Tenemos

a) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \boldsymbol{A}$ $(n \geq 2)$ decimos que los eventos son (colectivamente o estocásticamente) independientes si:

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_m})$$

$\forall\ 1 \leq j_1 \leq j_2 < \cdots \leq n$, $\forall\ m = 2, 3, \ldots, n$ (es decir, si cualquier combinación finita satisface la regla del producto);

c) Los eventos A_j, $j \in J$ (donde J es un conjunto de índices tal que $\text{card}(J) \geq 2$) son (estocásticamente) independientes si cualquier subfamilia finita de eventos es una familia de eventos independientes, es decir, si $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}$ son independientes para toda combinación $j_1, j_2, \ldots, j_m$ de elementos de J, $\forall\ m = 2, 3, \ldots$

Variable Aleatoria

Según (Barry, 1996) Intuitivamente una variable aleatoria viene a ser una característica numérica del resultado de un experimento.

Definición 2.2.10. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ una variable aleatoria sobre $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ es una función real definida sobre el espacio Ω tal que $[X \leq x] = X^{-1}(< -\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \boldsymbol{A}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observación 2.4. En términos de Teoría de la Medida, decir que el conjunto $[X \leq x]$ está en $\boldsymbol{A}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ significa que X es una función real $\boldsymbol{A}$-medible. Encontrar funciones no medibles es una tarea complicada sin embago estas existen. En nuestro contexto las funciones encontradas son siempre medibles, por tanto son variables aleatorias, asi que no nos distraeremos en este asunto.

Definición 2.2.11. Dada una variables aleatoria X, Llamaremos la **función de distribución** de X, denotada por F_X o abreviadamente por F (si la variables aleatoria X está sobreentendida), a la función definida por:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observación 2.5. La función de distribución de la variable aleatoria X depende de la medida de probabilidad que estemos considerando sobre el espacio muestral. En ese sentido, una misma variable aleatoria tendrá una función de distribución diferente para cada medida de probabilidad considerada.

Tenemos los siguientes tipo de variables aleatorias:

Definición 2.2.12. *a*) Diremos que la variable aleatoria X es **discreta** si la función alcanza una cantidad finita o contable de valores, es decir, si existe un conjunto finito o contable $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\}\ \forall\ \omega \in \Omega$. En este caso, la función $p(x_i)$ dada por $p(x_i) := P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, se llama **función de probabilidad**, también comocida como (o **de frecuencia**), de la variable aleatoria X.

b) Si existe una función real de variable real $f(x) \geq 0$ que satisface

$$F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

diremos que la variable aleatoria X es **continua**.

Cuando esto sucede decimos que f es una función de **densidad de probabilidad** para la variable aleatoria X o simplemente **densidad** de X.

Observación 2.6. En la práctica para verificar que una variable aleatoria X tiene densidad podemos usar el siguiente criterio que es válido en la mayoría de casos que surgen en la práctica: X tiene densidad si F_X es (i) continua y (ii) derivable por partes. En esta situación, la derivada de F_X será la densidad de X.

Definición 2.2.13. Sea X una variable aleatoria. En la $\sigma-$álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ definimos la medida de probabilidad $P_X(A) = P(X \in A)$, la cual será llamada la **distribución de $\boldsymbol{X}$**.

Observación 2.7. En los casos discreto y continuo, podemos describir la distribución a través de la función de probabilidad o de la densidad. En efecto:

(a) Si la variable aleatoria X es discreta, para todo B boreliano tenemos:

$$P_X(B) = \sum_{\{i:x_i \in B\}} P(X = x_i) = \sum_{\{i:x_i \in B\}} p(x_i)$$

(b) Si tenemos que la variable aleatoria X fuese continua con densidad $f(x)$, entonces para todo A boreliano tenemos:

$$P_X(A) = \int_A f(x)dx$$

2.2.2 Procesos estocásticos

"Un proceso estocástico, hablando intuitivamente, es un objeto matemático que intenta representar el comportamiento de un fenómeno aleatorio en el tiempo. El concepto de proceso estocástico es elemental para desarrollar la teoría financiera con tiempo continuo y en ambientes de incertidumbre y riesgo. Los procesos estocásticos se pueden utilizar para representar el comportamiento aleatorio de las variables financieras a lo largo del tiempo: tipos de cambio, precios de los activos, tasas de interés, , índice bursátil, etc..

Venegas, 2008

El estudio de los procesos estocásticos está motivado por la necesidad de modelar la evolución en el tiempo de ciertos fenómenos aleatorios. Se inicio a principios del siglo XX, en forma paralela a la conclusión de las sucesiones de variables aleatorias independientes. Su principales precursores fueron Andrei A. Markov, A. N. Kolmogorov, A.Ya. Khintchine, N. Wiener y P. Lévy.
Seguidamente veamos como podemos describir formalmente en matemáticas la idea intuitiva de proceso estocástico.

Definición 2.2.14. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Sea T un intervalo contenido en $\mathbb{R}$, el cual interpretaremos como el tiempo y para nuestros fines asumiremos que $T = [0, +\infty)$. Un proceso estocástico (unidimensional) es una aplicación $X : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}$, que verifica que para cada $t \in T$ la función $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\omega \mapsto X_t(\omega) := X(\omega, t))$ es una variable aleatoria, es decir, $X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \boldsymbol{A}$ para toda $x \in \mathbb{R}$, y lo denotaremos simplemente por X_t.
Dado un proceso estocástico X_t, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, considere la función $t \mapsto \omega(t) := X(\omega, t)$, esta función mira la evolución de ω en el tiempo y es denominada como trayectoria del proceso. Así, diremos que proceso estocástico es continuo si todas las trayectorias de proceso son funciónes continuas en T.

2.3 Movimiento Browniano

2.3.1 Reseña

En 1827 Robert Brown fue quien con un microscopio se percató del movimiento aleatorio de partículas de polen en el agua. Al haber observado esto él pensó que se trataba de posible vida y más tarde al realizar otros experimentos se percató de ciertos comportamientos como, por ejemplo, al aumentar la temperatura el movimiento era mayor y que también se percibía más movimiento mientras más pequeñas eran las partículas. Después de realizar múltiples estudios de este fenómeno, se le paso a dar el nombre en honor a su descubridor. Luego en 1900 Louis Bachelier, conocido por ser el primero en realizar un modelo con el movimiento browniano, en su tesis doctoral “la teoría de la especulación” estudia el uso del movimiento browniano para asociarlo a opciones financieras esto lo llevó a ser conocido como un iniciador del estudio de matemáticas financieras y del proceso estocástico. Más adelante en 1905 Albert Einstein quien también se interesó por el movimiento aleatorio que trata en su artículo "Sobre el movimiento de partículas pequeñas suspendidas en un líquido estacionario". Einstein describió este movimiento matemáticamente y al mostrar la exactitud de los cálculos paso a la vez a silenciar el debate sobre el tema de las moléculas y posteriormente Jean Perrin se dedicaría a verificar los modelos matemáticos y al exponer resultados sus finales le puso fin a la disputa de la realidad de átomos y moléculas. En su investigación Einstein describió dos partes principales, la primera es matemática que con una ecuación describe el movimiento de una partícula en suspensión a través de un medio fluido y en la segunda que está constituida de argumentos físicos. En adelante Nolbert Wiener (Proceso de Wiener) y Paul Levy (Proceso de Levy) se encargarían de introducir y estudiar las propiedades aplicativas para luego pasar por Kiyoshi Ito quien complementaría estos estudios con el desarrollo del cálculo estocástico o cálculo de Ito. En conclusión, el movimiento browniano viene a ser el movimiento aleatorio que describe el comportamiento de variables aleatorias que se estudia frecuentemente en modelos financieros para poder describir el comportamiento de los precios de acciones, bonos y otros, y que habla que cada variación de precio es independiente al anterior.

2.3.2 Movimiento Browniano Estándar

Se suele dar el nombre de movimiento browniano a toda función aleatoria continua, ahora matemáticamente según (Venegas, 2008) se tiene que:
Fijemos un un espacio de probabilidad $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Entenderemos por movimiento Browniano (estándar y unidimensional) por un un proceso estocástico continuo W_t donde $t \in [0, +\infty >$, que satisface:

1. $W_0 = 0$ casi en todas partes, es decir, $P\{\omega \in \Omega \mid W_0(\omega) = 0\} = 1$.
   En palabras más simples, que las trayectorias del procesos comiencen en 0 tiene probabilidad uno;

2. Para cualquier par de tiempos s_1 y s_2 con $0 \leq s_1 < s_2$, $W_{s_2} - W_{s_1} \sim N(0, s_2 - s_1)$. Es decir, los incrementos en el tiempo se comportan como una distribución normal;

3. Dada una sucesión finita de tiempos creciente $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n$, los incrementos

$$W_{s_1} - W_{s_0}, \quad W_{s_2} - W_{s_1}, \ \ldots \ , W_{s_n} - W_{s_{n-1}}$$

son estocásticamente independientes.

Esto se puede pensar como que la información futura no depende de la información pasada, es decir, en estos procesos el futuro es independiente del pasado .

La extensión de la definición al caso multidimensional es inmediata. El movimiento browniano también es conocido como Proceso de Wiener.

Observación 2.8. Se conoce como movimiento browniano no estándar al proceso estocástico que satisface las condiciones 1, 2 y una versión debilitada de la condición 3 donde la sustituimos por $W_t - W_s \sim N(0, c(t-s))$, donde c representa un valor real positivo fijo.

2.3.3 Movimiento Geométrico Browniano

En el año 1827, el botánico inglés Robert Brown observó, a través del microscopio, que partículas pequeñísimas, formadas a partir de granos de polen en suspensión en el agua, realizaban un movimiento irregular, incesante y vigoroso, como si estos fuesen seres vivientes muy pequeños. El mismo Brown descubrió que partículas muy finas de varios minerales tenían el mismo comportamiento. Tal movimiento es llamado de movimiento browniano geométrico.

A pesar de que el movimiento browniano es usado para la construcción de modelos de riesgos financieros y económicos, este no puede representar del todo el comportamiento que las variables financieras presentan. El movimiento browniano geométrico consigue representar la fluctuación del precio de algunos bienes siguiendo las variaciones de los mercados financieros, en particular, es utilizado en matemáticas financieras para modelar precios en el modelo de Black-Scholes.

El movimiento geométrico Browniano, también conocido como movimiento Browniano exponencial, es obtenido mediante una transformación del movimiento Browniano estándar. En el caso que W_t es un movimiento Browniano estándar, μ (tendencia), $\sigma > 0$

(volatilidad) ambas contantes y S_0 es un precio inicial dado, tenemoque que el proceso:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\}$$

es dicho, movimiento geométrico Browniano. Tal proceso es comúnmente utilizado para modelar el rendimiento del precio de los activos. Además observamos que

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t.$$

Por tanto, tenemos que la distribución de $\ln(S_t)$ se comporta como una normal con

$$E[\ln(S_t)] : \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\right) t$$

y

$$\mathrm{Var}[\ln(S_t)] = \sigma^2 t.$$

En este caso, la tasa de cambio porcentual continuamente capitalizable, por unidad de tiempo sobre un intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ se distribuye normalmente con media $\mu - (1/2)\sigma^2$, varianza $\sigma^2/\Delta t$ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{\Delta t}$. Observe que la varianza converge a cero cuando $\Delta t \to \infty$. Aún más, la tasa de cambio porcentual por unidad de tiempo converge a $\mu - (1/2)\sigma^2$ con probabilidad uno cuando $\Delta t \to \infty$. Todo esto se puede probar usando la ley de los grandes números para el movimiento Browniano.

2.4 Cálculo Estocástico

El cálculo estocástico es en realidad calculo integral estocástico, por lo menos en lo que se refiere a la teoría que quedó concluida hacia finales de los años 70's del siglo pasado. Luego, esta teoría fue creciendo y se desarrolló en varios caminos.Igualmente que con el cálculo diferencial e integral que conocemos, la teoría de integración estocástica fue desarrollada para ser aplicada en la solución de cierto tipo de problemas. De manera específica, el objetivo es poder resolver las llamadas ecuaciones diferenciales estocásticas.

En el cálculo estocástico no hay derivadas, es decir no hay un cálculo diferencial estocástico ya que, en general, se trabaja con funciones que no son diferenciables. A su vez, al resolver ecuaciones diferenciales estocásticas tiene por objetivo el poder construir procesos estocásticos que modelen fenómenos de ínteres en diversas áreas.

Por tanto, el cálculo estocástico o Cálculo de Itô, es una rama de las matemáticas que se centra en estudiar los procesos estocásticos y las ecuaciones diferenciales estocásticas que aparecen con estos procesos (ecuaciones diferenciales estocásticas). El cálculo estocástico forma una teoría consistente de integración, que permite generalizar la integral de Stieljes-Lebesgue, con esto podemos hablar de manera totalmente formal acerca de la integral de un proceso estocástico respecto a otro proceso estocástico. Según (Nuñez, 2009), un proceso estocástico es denominado movimiento Browniano o proceso Wiener, con coeficientes σ y μ, siempre que posea el siguiente comportamiento dinámico:

$$\begin{aligned} dX &= \mu dt + \sigma dW \\ X(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Los valores de x_0, σ y μ son constantes. Además usando el Cálculo de Itô se puede obtener las soluciones explícitas de las ecuaciones diferenciales estocásticas dada encima, tal solución es:

$$X(t) = x_0 + \mu t + \sigma W. \quad t \in [0, T]$$

También se obtiene que la distribución de X está dada por $N(x_0 + \mu t, \sigma(t)^{\frac{1}{2}})$.

2.5 La medida de Martingala

Estos son un tipo de procesos forman parte fundamental de la teoría moderna de la probabilidad. Al punto que la herramienta matemática teórica sobre la cual se construye la teoría financiera matemática (el llamado cálculo estocástico) está basada en las martingalas.

Se puede explicar una martingala como un proceso estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que X_n representa la devolución de alguna información a un jugador que participa en un juego limpio en el tiempo n. cierta información. Para ser más explícitos veremos unos conceptos previos.

Definición 2.5.1. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de $\sigma-$álgebras contenidas sobre $\boldsymbol{A}$. Diremos que tal familia es una filtración si se cumple que $F_n \subset F_m$ cuando $n \leq m$.

Dada una filtación $(\boldsymbol{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pensaremos intuitivamente en $\boldsymbol{A}_n$ como siendo la información acumulada hasta el tiempo n.

Definición 2.5.2. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ y $(\boldsymbol{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración en tal espacio. Una familia de variables aleatorias reales $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es llamada de martingala respecto a la filtración considerada si:

1. X_n es una función $\boldsymbol{A}_n-$medible para todo $n \in \mathbb{N}$,

2. $X_n \in L^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

3. $\mathbb{E}(X_{n+1}|\boldsymbol{A}_n) = X_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

La primera propiedad establece que conocemos la ganancia en el momento n a partir de la información que se brinda hasta ese momento, lo que generalmente significa que la secuencia de variables aleatorias está adecuada a tal filtración. El segundo es un supuesto técnico que nos permite utilizar la esperanza condicional como un operador lineal y el tercero nos dice que el juego es justo en cuanto a la información que se nos proporciona.

Definición 2.5.3. Dada una familia de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface (1) y (2) de la definición anterior, pero en vez de tener una igualdad en (3), observamos la siguiente desigualdad:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\boldsymbol{A}_n) \leq X_n.$$

Entonces diremos que la familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una supermartingala. (Siguiendo nuestra interpretación intuitiva de X_n como evolución de nuestra fortuna, una **supermartingala** no tiene nada de super).

Si tenemos la desigualdad contraria:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\boldsymbol{A}_n) \geq X_n,$$

entonces diremos que la familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **submartingala**.

Capítulo 3

Black Scholes

3.1 Reseña

El estudio del modelo de Black Scholes es relevante para la economía moderna, ya que la fórmula es usada para efectuar predicciones del valor de bienes y/o activos financieros en determinados puntos temporales, como es el caso de las acciones que pertenecen a una sociedad anónima. Anteriormente se contaban con modelos para determinar el valor de los derivados pero estos tenían algunas deficiencias que producían significativas discrepancias entre el valor dado por el modelo y el valor real. El modelo de Black Scholes fue un cambio innovador, que para muchos, propició el desarrollo exposivo de las finanzas a partir de 1973, fecha en que se pasó a publicar por Fischer Black (1938-1995, para la mayoría, el padre de los mercados actuales de derivados) y Myron Scholes (quien obtuvó el premio Nobel de Economía en 1997 con Robert Merton quien tuvo un aporte en el desarrollo de la fórmula que los llevó a ganar este reconocimiento, debido a esto muchas veces encontraremos a la fórmula con el nombre de Black Scholes Merton).

Cabe señalar que debido a la naturaleza general de la fórmula, se puede aplicar a varios contratos que especifican la forma de vender los bienes relacionados, y debido a las condiciones de mercado la información se puede obtener de la fórmula BS que es muy útil para la toma de decisiones futuras, especialmente para las empresas.

La dinámica estocástica del precio de una acción en el modelo de Black Scholes se basa en el proceso de Wiener (también conocido como movimiento browniano). A pesar de su mayor complejidad matemática, el modelo de tiempo continuo produce una fórmula única de fijación de precios para las opciones europeas que es más simple que su contraparte de tiempo discreto, por esto ha sido adoptado universalmente como una herramienta estándar por los profesionales de finanzas.

3.2 Modelo de Black Scholes

Seguidamente se mostrará la ecuación en cuanto a la opción Call y Put en la cual se definirá y mostrará el proceso para hallar algunos parámetros necesarios. El desarrollo detallado de la ecuación es otro proceso de estudio que se puede seguir en adelante.
La ecuación de Black-Scholes-Merton concluye que:

$$\begin{aligned} C &= SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \\ p &= Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \end{aligned}$$

Donde usamos para abreviar:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Siendo:
C = Precio de una opción de compra.
S = Precio del activo subyacente.
K = Precio de ejercicio de la opción de compras.
T = Tiempo expresado en años que todavía falta por transcurrir para la opción.
r = Tasa de interés.
σ = Volatilidad de la tasa de cambio.
$N(x)$ = valor de la función de probabilidad acumulada o función normalidad en x.

Por (Fernandez,1997), todas las operaciones en la aplicación de la fórmula de Black Scholes son fáciles a excepción de la función $N(x)$ donde se sabe que esta función no cuenta con una solución explícita. Y su desarrollo se va a basar en aproximaciones polinómicas usando funciones de probabilidad normal. Para hacer aún más sencillo este procedimiento se pasará a obtener las probabilidades en una hoja de Excel usando la función distribución normal.

3.3 Precio de acciones con Black Scholes

Por (Korn, 2010), esta parte utiliza la distribución normal, que es la distribución marginal binomial, porque nos permite explicar el modelo de Black Scholes, un modelo marginal cada vez más complejo en la familia de modelos binomiales.

Al igual que en un modelo binomial, dentro del modelo de Black Scholes también es posible realizar inversiones financieras sin riesgo si conseguimos una rentabilidad constante. Así, para el desarrolo de la unidad monetaria de la inversión libre de riesgo $P_0(t)$, para el tiempo $t = 0$, tenemos

$$P_0(t) = e^{rt}, \quad t \in [0, T].$$

La cotización temporal para $P_1(t)$ será modelada según

$$P_1(t) = p_1 e^{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}, \quad t \in [0, T],$$

donde r, b y σ son valores constantes, cuyo significado se describe más adelante. El proceso estocástico $W(t)$, es decir, el conjunto de variables aleatorias $\{W(t),\ t \in [0, T]\}$ es la parte más importantes del modelo de Black-Scholes. Este conjunto indexado por la variable tiempo es obtenido como resultado de un experimento aleatorio. La idea central para entender $P_1(t)$ es que se cumple que $W(t) \sim N(0, t)$.

3.3.1 El movimiento Browniano

En esta parte vamos a dedicarnos a unir y repasar los conceptos antes estudiados. Dado el movimiento Browniano $\{W(t),\ t \in [0, T]\}$, se determina que $W(t)$ es una familia de variables aleatorias que se comportan como una normal y además tienen varianza t y valor esperado cero, por tanto se verifica que

$$W(t) \sim N(0, t).$$

Siendo $W(t)$ un movimieno Browniano también tenemos que como función de t es una función continua y satisface

i) $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ cuando $s < t$ “distribución de incrementos según una normal”;

ii) $W(0) = 0$;;

iii) $W(t) - W(s)$ y $W(r) - W(u)$ son variables independientes para $u < r \leq s < t$, lo que se conoce como la propiedad de "incrementos independientes".

Para observar esto se presentará un trayectoria simulada del movimiento browniano, donde se obtiene asi un resultado posible de la correspondiente variable aleatoria. En Korn (2010:177) se explica cómo hacer estas simulaciones.

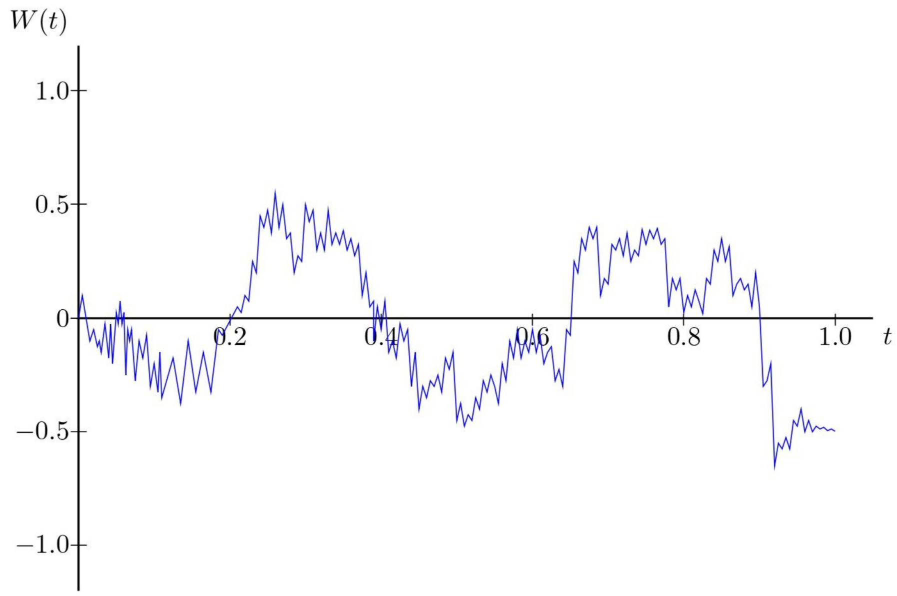


Figura 3.1: Trayectoria simulada del movimiento Browniano $W(t)$.

Debido a las características del movimiento Browniano (en esta parte solo requerimos que $W(t) \sim N(0,t))$) podemos entender que $P_1(t)$ verifica que

$$\frac{1}{t}\operatorname{Var}\left(\ln\left(\frac{P_1(t)}{p_1}\right)\right) = \sigma^2, \qquad \frac{1}{t}E\left(\ln\left(\frac{P_1(t)}{p_1}\right)\right) = b - \frac{1}{2}\sigma^2, .$$

$$E(P_1(t)) = p_1 \cdot e^{bt}$$

La esperanza matemática de $E(P_1(t))$ se comporta como una cuenta de depósito a plaza fijo, donde su ganancia se paga con interés b, que en tiempo continuo, contiene los dividendos por cada unidad de tiempo. El valor b representa la **tasa media de**

beneficios para $P_1(t)$. La desviación estándar para los dividendos por unidad de tiempo de una acción es llamada la **volatilidad** y denotada por σ.

Ahora se pasa a relacionar los conceptos que tiene el modelo binomial y el modelo de Black Scholes lo que nos lleva a obtener el precio de un número n de acciones.
Para tener que los precios de una determinada acción $P_1^{(n)}(T)$ en un modelo binomial esten convergiendo al precio de la acción de $P_1(T)$ dado por el modelo de BS, se tienen que cumplir al menos dos condiciones cuando incrementamos el número de periodos n:

- En el modelo binomial, la variación del tiempo $\Delta t = T/n$, tiene que converger hacia cero, de modo que el modelo de continuo de los periodos con probabilidades continuas de negocio actúe como un caso marginal.

- También los 'factores aditivos' d y u convergen a 1, de forma que se tiene un proceso marginal que sea un proceso continuo (respecto al tiempo).

Para d y u usaremos la aproximación:

$$d = d(\Delta t) = \exp\left(\Delta t \cdot \beta - \sigma\sqrt{\Delta t}\frac{1-p}{\sqrt{(1-p)p}}\right)$$

$$u = u(\Delta t) = \exp\left(\Delta t \cdot \beta + \sigma\sqrt{\Delta t}\frac{1-p}{\sqrt{(1-p)p}}\right),$$

donde $\sigma > 0$ y β son valores constantes y $p \in (0,1)$. Ahora supongamos que Δt es tan pequeño de modo qye verifica $d < 1 < u$. En esta situación σ y β vienen expresados por la siguientes expresiones:

$$\beta = \frac{p(\ln(u)|\ln(d)) + \ln(d)}{\sqrt{\Delta t}} \quad \sigma = \frac{\ln(u)|\ln(d)}{\sqrt{\Delta t}}\sqrt{(1-p)p},.$$

Tenemos la secuencia de valores de d y u, que convergen monótonamente a 1 cuando n aumenta. A partir de la formulación previa de d y u se obtenemos que:

$$P_1^{(n)} = p_1 \cdot \exp\left(X_n \cdot \ln\left(\frac{u}{d}\right) + \ln(d) \cdot n\right) = p_1 \cdot \exp\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{(1-p)np}}\sigma\sqrt{T} + T \cdot \beta\right).$$

Siguiendo el teorema de Moivre—Laplace, el exponente de la derecha de la ecuación encima es asintóticamente (es decir, cuando $n \to \infty$) igual a $b - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \cdot W(t)$ por tanto tenemos que:

$$P_1(T) = p_1 \cdot e^{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + W(t)\cdot\sigma},$$

donde $b = \beta + \frac{1}{2}\sigma^2$. De esta forma tenemos la convergencia en el punto T hacia el precio de la acción según el modelo de Black-Scholes en ese mismo punto. Para la demostración de la convergencia en todos los puntos $t \in [0, T]$ del precio de la acción, hacia el modelo de Black Scholes, se usan matemáticas que están fuera del objetivo de este trabajo. (Véase por e.j. Korn y Korn [2010]).

3.4 Medición de las Variables del Modelo

Se pasa a describir y medir el valor de cada variable de la siguiente manera:

- S = Precio del activo subyacente o precio inicial que viene a ser el valor actual del activo a evaluar en este caso el precio actual de las acciones.

- K = Según Saavedra (2005:76), es el valor actual del pasivo el cual se calculará usando la tasa de costo del pasivo para cada sociedad. Y se pasará a considerar un determinado tiempo de vencimiento.
  Para calcular K usaremos la fórmula de interés compuesto $M = C(1+i)^n$, donde n es el plazo de vencimiento de la deuda en años, i es el costo pasivo, C es el valor actual de la deuda y M es el valor del pasivo a futuro,

- r = Tasa libre de riesgo. Usaremos la tasa de interés anual que se obtiene en porcentaje para su cálculo.

- σ = Desviación estándar de la tasa anual de rendimiento de la acción o también llamada volatilidad de la acción. Que se mide en porcentaje.

- T = Es el tiempo trascurrido en años que aún faltan en transcurrir la opción en este caso se dividirá los días que se va a pronosticar entre los días donde se realizan intercambios financieros.

- μ = En este caso como se quiere modelar los precios, μ viene a ser la media de la variación diaria de precios.

- C = Valor de la opción Call descrita por la Ecuación de Black Scholes.

- P = Valor de la opción Put descrita por la Ecuación de Black Scholes.

Capítulo 4

Implementación del modelo

4.1 Matlab

MATLAB es un entorno de software ampliamente utilizado para la informática científica y cuenta con una amplia variedad de herramientas numéricas disponibles (para resolver sistemas lineales, integrando ecuaciones diferenciales ordinarias, etc.) permite concentrarse en las principales características del algoritmo de resolución. Un gráfico altamente versátil que también es muy importante para una fácil visualización de los resultados obtenidos. Contiene diversas herramientas y utilidades que permiten realizar las más diversas funcionalidades, como la representación grafica en dos y tres dimensiones, las cuales están agrupadas en 'paquetes' (toolboxes). Adicionalmente, a Matlab se le pueden añadir paquetes especializados para determinadas tareas (por ejemplo, para tratamiento de imágenes).

4.2 Simulación

> *"Simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos periodos".*
>
> *Thomas T. Goldsmith Jr. y Estle Ray Mann*

"Un modelo de simulación busca imitar el comportamiento del sistema que investiga estudiando las interacciones entre sus componentes. Es el seguimiento a lo largo del tiempo de los cambios que tienen lugar en el modelo dinámico del sistema. La simulación de un sistema permite reunir información acerca del comportamiento del mismo, mediante la ejecución de un modelo computarizado".

Robert E. Shannon

En este trabajo se pasará a simular los posibles valores de los precios de las acciones de empresas peruanas.

4.3 Construcción del Modelo

4.3.1 Determinación de la Muestra

Para la tarea de determinar una muestra se necesita saber claramente cuál es el universo total de elementos. Se entiende por universo al conjunto de todos los elementos que comparten determinadas características, las cuales son de interés de una investigación dada. Por ejemplo, los precios de las acciones de la bolsa de Valores de Lima (Ver Cuadro 4.2.

En la página de la BVL se pueden encontrar los precios de las acciones diarias desde el 2011 hasta la actualidad y nos muestra los precios de apertura, cierre, máximo, mínimo, cantidad negociada, monto negociado, precios de fechas anteriores y el promedio de precios por día, estos últimos son los que se van a estudiar y pronosticar en el presente trabajo. En el Cuadro 4.1 se pueden observar los valores de los precios actuales (enero, 2018) de la BVL.

Cuadro 4.1: Bolsa de Valores enero 2018

Fecha Cotización	Apertura	Cierre	Máxima	Mínima	Promedio	Cantidad Negociada	Monto Negociado	Fecha anterior	Cierre anterior
01/02/2018	11.25	11.26	11.26	11.25	11.26	283,587.00	3,193,127.72	31/01/2018	11.16
31/01/2018	11.5	11.16	11.5	11.16	11.33	117,335.00	1,329,007.00	30/01/2018	11.5
30/01/2018	11.62	11.5	11.62	11.5	11.53	76,158.00	878,049.46	29/01/2018	11.62
29/01/2018	11.63	11.62	11.63	11.62	11.62	54,170.00	629,550.40	26/01/2018	11.64
26/01/2018	11.61	11.64	11.7	11.59	11.64	140,185.00	1,631,574.70	25/01/2018	11.61
25/01/2018	11.61	11.61	11.61	11.61	11.61	205,898.00	2,390,475.78	24/01/2018	11.61
24/01/2018	11.45	11.61	11.61	11.45	11.56	56,206.00	649,492.33	23/01/2018	11.48
23/01/2018	11.45	11.48	11.48	11.45	11.46	117,935.00	1,351,598.20	22/01/2018	11.45
22/01/2018	11.4	11.45	11.45	11.4	11.4	3,316,403.00	37,810,894.00	19/01/2018	11.4
19/01/2018	11.61	11.4	11.61	11.4	11.56	64,256.00	742,725.50	18/01/2018	11.61
18/01/2018	11.62	11.61	11.62	11.61	11.61	152,697.00	1,772,825.17	17/01/2018	11.61
17/01/2018	11.8	11.61	11.8	11.61	11.74	1,286,371.00	15,106,164.06	16/01/2018	11.75
16/01/2018	11.35	11.75	11.75	11.35	11.51	70,421.00	810,753.00	15/01/2018	11.3
12/01/2018	11.2	11.3	11.3	11.2	11.25	41,740.00	469,500.50	11/01/2018	11.15
11/01/2018	11.2	11.15	11.2	11.15	11.18	66,677.00	745,514.90	10/01/2018	11.2
10/01/2018	11.28	11.2	11.28	11.2	11.24	84,177.00	946,542.96	9/01/2018	11.25
9/01/2018	11.25	11.25	11.25	11.25	11.25	938,523.00	10,558,383.75	8/01/2018	11.2
8/01/2018	11.1	11.2	11.2	11.1	11.1	366,278.00	4,066,319.30	5/01/2018	11.15
5/01/2018	10.89	11.15	11.15	10.89	10.97	516,131.00	5,663,802.17	4/01/2018	10.85
4/01/2018	10.7	10.85	10.85	10.7	10.72	5,757.00	61,738.20	3/01/2018	10.7
3/01/2018	10.75	10.7	10.75	10.6	10.62	312,206.00	3,316,947.14	2/01/2018	10.75
2/01/2018	10.61	10.75	10.75	10.6	10.65	27,592.00	293,735.70	29/12/2017	10.6
1/01/2018									10.6

Cuadro 4.2: Empresas con mayor disponibilidad de datos.

Empresa	**Sector**	**Nemónico**
Casa Grande S.A.A.	Sector Agrario	CASAGRC1
BBVA Continental	Bancos y Financieras	COUNTINC1
Alicorp S.A.A	Sector Industrial	ALICORC1
Sociedad Minera Cerro Verde	Sector Minero	CVERDEC1
Rimac Seguros y Reaseguros	Seguros	RIMSEGC1

Por lo antes definido se toma como nuestro universo al precio de las acciones de las diferentes empresas peruanas que están divididas según la Bolsa de Valores de Lima en diferentes sectores como son Administradoras de fondos de pensiones, agrario, bancos y financieras, fondos de inversión, industriales, mineras, seguros, servicios públicos y diversas. Se han escogido a las empresas con mayor disponibilidad de datos, empresas representativas de cada sector con mayor movimiento empresarial y que cotizan en la BVL de forma regular y continua en el Cuadro 4.2 se lista a las empresas, al sector que pertenece y su respectivo nemónico.

4.3.2 Cálculo de Parámetros

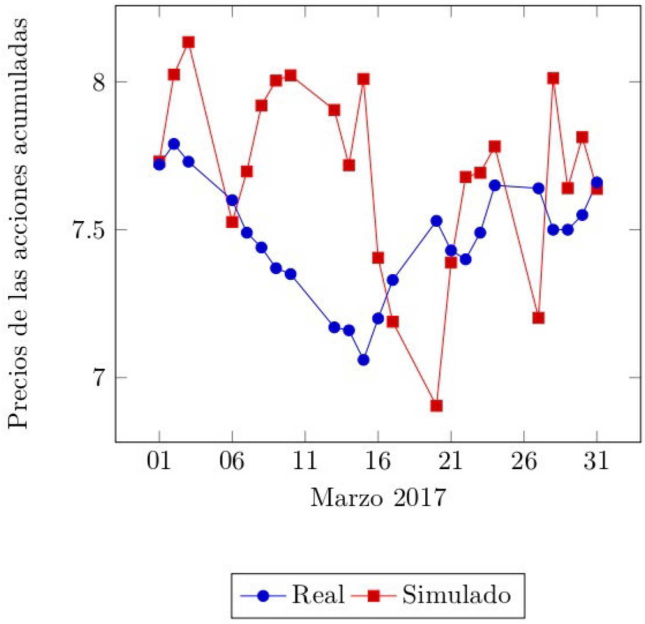
Cuadro 4.3: Cálculo de Parámetros.

Empresa	S	K	σ	μ
Alicorp S.A.A	7.72	7.7	0.160757137	0.01
Casa Grande S.A.A	6.71	7.1	0.20346756	-0.01
Sociedad Minera Cerro Verde	24.00	24.1	0.64913496	0.05
BBVA Continental	4.38	4.3	0.06427619	0.01
Rimac Seguros y Reaseguros	1.64	1.7	0.06224759	-0.01

Con el uso de Matlab pasa simular los precios de las acciones para los 23 días hábiles del mes de marzo del 2017 usando los valores del mes anterior (febrero del 2017) tanto la volatidad como la media de la variación de precios son del mes de febrero del 2017, el precio inicial es del último día del mes de febrero ya que lo que se busca es el pronóstico del mes siguiente y en la sección 4.4 se muestra el código relizado.

Empresa Alicorp - Sector Industrial

Figura 4.1: Alicorp



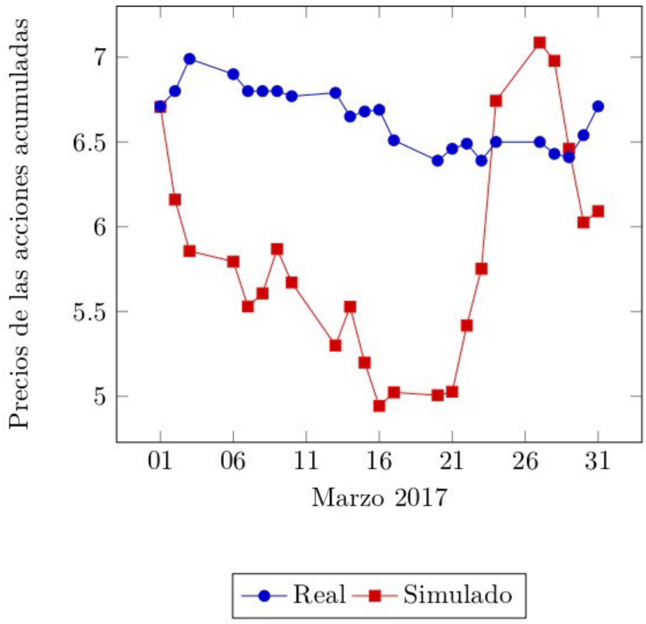
Cuadro 4.4: Comparativo de los Valores Reales y Simulados Alicorp.

Fecha	Real	Simulado
01/03/2017	7.72	7.7303
02/03/2017	7.79	8.0244
03/03/2017	7.73	8.1345
06/03/2017	7.60	7.5257
07/03/2017	7.49	7.697
08/03/2017	7.44	7.9199
09/03/2017	7.37	8.0043
10/03/2017	7.35	8.022
13/03/2017	7.17	7.9048
14/03/2017	7.16	7.7181
15/03/2017	7.06	8.0097
16/03/2017	7.20	7.4051

Fecha	Real	Simulado
16/03/2017	7.20	7.4051
17/03/2017	7.33	7.1889
20/03/2017	7.53	6.9046
21/03/2017	7.43	7.389
22/03/2017	7.40	7.6784
23/03/2017	7.49	7.6923
24/03/2017	7.65	7.7814
27/03/2017	7.64	7.2019
28/03/2017	7.50	8.0122
29/03/2017	7.50	7.6406
30/03/2017	7.55	7.8129
31/03/2017	7.66	7.6381

Casa Grande

Figura 4.2: Casa Grande

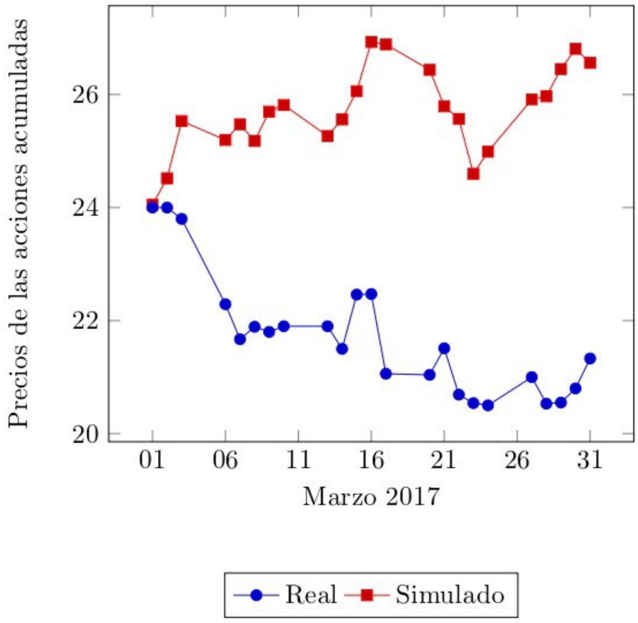


Cuadro 4.5: Casa Grande

Fecha	Real	Simulado
01/03/2017	6.71	6.7073
02/03/2017	6.80	6.1599
03/03/2017	6.99	5.8569
06/03/2017	6.90	5.7944
07/03/2017	6.80	5.5297
08/03/2017	6.80	5.6066
09/03/2017	6.80	5.8681
10/03/2017	6.77	5.6709
13/03/2017	6.79	5.2996
14/03/2017	6.65	5.5277
15/03/2017	6.68	5.1986
16/03/2017	6.69	4.9424
16/03/2017	6.69	4.9424
17/03/2017	6.51	5.0227
20/03/2017	6.39	5.0059
21/03/2017	6.46	5.0266
22/03/2017	6.49	5.4174
23/03/2017	6.39	5.7519
24/03/2017	6.50	6.743
27/03/2017	6.50	7.0866
28/03/2017	6.43	6.9791
29/03/2017	6.41	6.4604
30/03/2017	6.54	6.0251
31/03/2017	6.71	6.0909

Cerro Verde

Figura 4.3: Cerro Verde

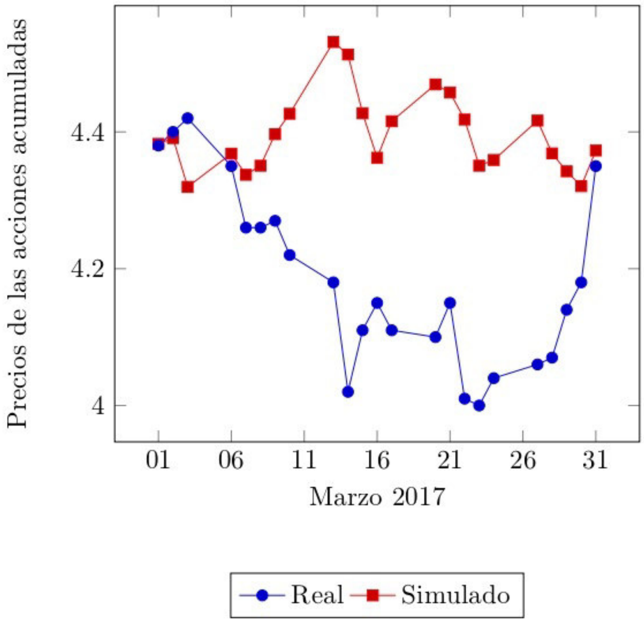


Cuadro 4.6: Cerro Verde

Fecha	Real	Simulado	Fecha	Real	Simulado
01/03/17	24.00	24.0501	16/03/17	22.47	26.9291
02/03/17	24.00	24.5163	17/03/17	21.06	26.8864
03/03/17	23.80	25.5311	20/03/17	21.04	26.4368
06/03/17	22.29	25.1954	21/03/17	21.51	25.7928
07/03/17	21.67	25.4737	22/03/17	20.69	25.5683
08/03/17	21.89	25.1789	23/03/17	20.54	24.5971
09/03/17	21.80	25.6964	24/03/17	20.50	24.9893
10/03/17	21.90	25.8154	27/03/17	21.00	25.9123
13/03/17	21.90	25.2666	28/03/17	20.53	25.969
14/03/17	21.50	25.5602	29/03/17	20.55	26.4506
15/03/17	22.46	26.059	30/03/17	20.80	26.8077
16/03/17	22.47	26.9291	31/03/17	21.33	26.5606

BBVA Continental

Figura 4.4: BBVA Continental



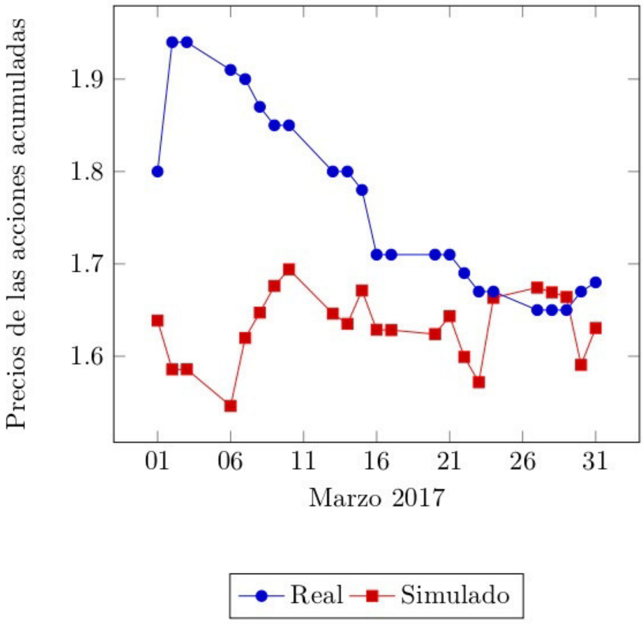
Cuadro 4.7: BBVA Continental

Fecha	Real	Simulado
01/03/17	4.38	4.3825
02/03/17	4.40	4.391
03/03/17	4.42	4.3196
06/03/17	4.35	4.3682
07/03/17	4.26	4.3373
08/03/17	4.26	4.3506
09/03/17	4.27	4.3967
10/03/17	4.22	4.4265
13/03/17	4.18	4.5314
14/03/17	4.02	4.5131
15/03/17	4.11	4.4273
16/03/17	4.15	4.3622

Fecha	Real	Simulado
16/03/17	4.15	4.3622
17/03/17	4.11	4.4156
20/03/17	4.10	4.4694
21/03/17	4.15	4.4576
22/03/17	4.01	4.4181
23/03/17	4.00	4.3506
24/03/17	4.04	4.3589
27/03/17	4.06	4.4166
28/03/17	4.07	4.3686
29/03/17	4.14	4.3424
30/03/17	4.18	4.3207
31/03/17	4.35	4.3728

Rimac Seguros

Figura 4.5: Rimac Seguros



Cuadro 4.8: Rimac Seguros

Fecha	Real	Simulado
01/03/17	1.80	1.6386
02/03/17	1.94	1.5858
03/03/17	1.94	1.5859
06/03/17	1.91	1.5462
07/03/17	1.90	1.6198
08/03/17	1.87	1.6472
09/03/17	1.85	1.6761
10/03/17	1.85	1.6941
13/03/17	1.80	1.6461
14/03/17	1.80	1.6351
15/03/17	1.78	1.6712
16/03/17	1.71	1.6287

Fecha	Real	Simulado
16/03/17	1.71	1.6287
17/03/17	1.71	1.6283
20/03/17	1.71	1.624
21/03/17	1.71	1.6434
22/03/17	1.69	1.5993
23/03/17	1.67	1.5719
24/03/17	1.67	1.6632
27/03/17	1.65	1.6743
28/03/17	1.65	1.6692
29/03/17	1.65	1.6642
30/03/17	1.67	1.5907
31/03/17	1.68	1.6305

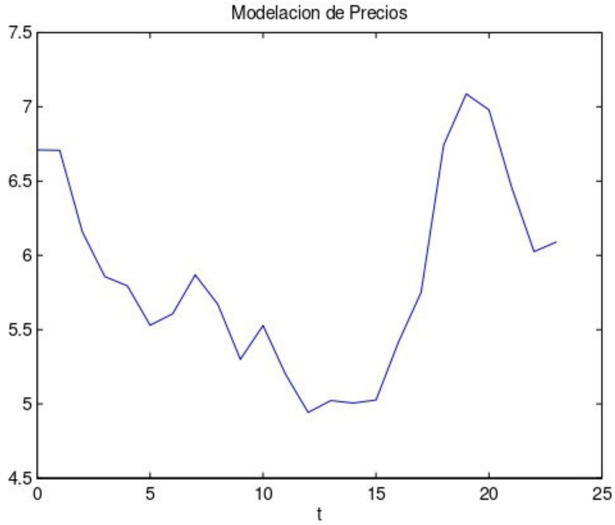
4.4 Codificación

Hecho en Matlab

```
%MODELAMIENTO DE PRECIOS DE ACCIONES PERUANAS CON BLACK SCHOLES
%Se especifica los datos de las acciones en términos anuales
clear;
clf;
%El valor de T sera conseguira de dividir la cantidad de días a pronosticar
%entre el numero de dias laborables del año que es 252
T = 0.09;
%Precio inicial de las acciones
S(1)=6.71;
%promedio de la variación diaria
u=-0.01;
%Volatilidad
sig=0.2;
%Función aleatoria
W(1)=0;
%Tiempo de inicio
t(1)=0;
%Se comienza el loop principal para intervalos de tiempo de T
for m=1:1000
    for i=1:23
      t(i+1,m)=i;
      W(i+1,m)=W(i)+sqrt(T)*randn(1,1);
      S(i+1,m)=S(1)*exp((u-(sig^2)/2)*(t(i+1)*T)+sig*W(i+1,m));
    end
end
M(1)=0;
med(1)=S(1);
for x=1:23
    M(x+1)=x;
    med(x+1)=mean(S(x+1,:));
end
disp(med)
plot(M,med)
title('Modelacion de Precios')
xlabel('t')
```

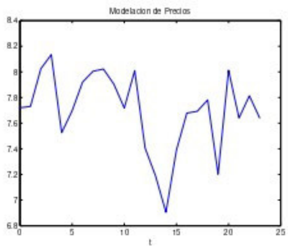
Donde se obtiene el siguiente gráfico

Figura 4.6: Gráfico de MATLAB para Casa Grande S.A.A

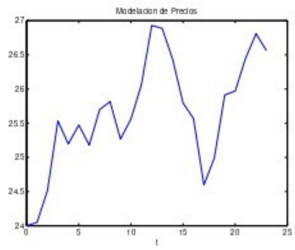


Del Cuadro 4.3 observamos variables para ciertas empresas, estas variables pueden ser reemplazadas en el código hecho anteriormente y obtener otros resultados para distintas empresas:

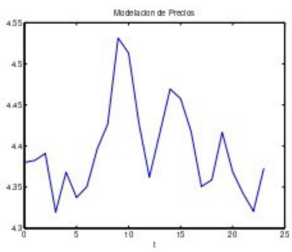
Figura 4.7: Subfiguras



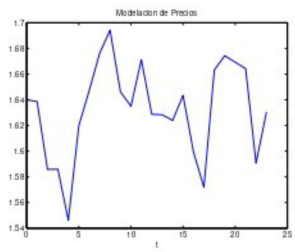
(a) Alicorp S.A.A



(b) Sociedad Minera Cerro Verde



(c) BBVA Continental



(d) Rimac Seguros y Reaseguros

Capítulo 5

Resultados y Conclusiones

Se puede observar que el modelo de Black Scholes refleja bien el precio de las acciones en la Bolsa de Valores, más dentro de los cuadros comparativos se visualizan puntos en los que tienen defectos y se alejan de los valores reales de las acciones, por ende en la actualidad se llevan a cabo estudios buscando mejorar el modelo de Black Scholes con modelos más complejos y realistas que permitan un pronóstico más certero.

Se puede observar que la dispersión de los valores debido a la cantidad mínima de precios simulados se hace más notoria, pero si se modela una mayor cantidad de datos se podría observar que la variación es mínima y que por tanto el modelo de Black Scholes es uno de los más usados en los sistemas
financieros internacionales.

Según (Korn-2010), para hacer posibles propuestas de mejoras se puede analizar la independencia del incremento relativo del precio, la volatilidad constante y el Logaritmo de la tasa de beneficios distribuida según una normal; siendo la volatilidad uno de los mas usados para la mejora de este modelo.

Para un posterior estudio, se puede tener el desarrollo de los precios del Modelos de Black Scholes, ya que para su estudio es necesario profundizar un poco más en la teoría de probabilidades, distribución binomial y procesos estocásticos.

Bibliografía

[2008] Francisco Venegas Martínez (2008) *Riesgos financieros y económicos.* (Compañía de Cengage Learning). México D. F. México.

[1997] Pablo Fernández (1997) *Utilización de la fórmula de Black y Scholes para valorar Opciones.* (Nota técnica de la división de Investigación de IESE). Universidad de Navarra, Barcelona-Madrid.

[2005] María Luisa Saavedra García (2005) *Aplicación Empírica de Modelo de Black y Scholes en México: 1991-2000.* (Estudio de Postgrado). Universidad Nacional Autónoma de México, México.

[2007] Carlos Héctor Daniel Alliera (2007) *Estudio y Aplicaciones de Black Scholes.* (Tesis de Licenciatura) Universidad de Buenos Aires - Argentina.

[2009] Sandra Isabel Núñez Vargas (2009) *Adaptación del modelo Black-Scholes en la simulación de un portafolio de acciones.* (Tesis de pregrado). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima - Perú.

[2007] Danae Duana Ávila y César Gabriel Millán Díaz (2007) *Modelo Black-Scholes-Merton para la toma de decisiones financieras.* Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

[2012] Marek Capinski y Ekkehard Kopp (2012) *The Black-Scholes Model.* AGH University of Science and Technology, Krakow. Cambridge - Inglaterra.

[2010] Mathieu Kessler (2010) *Cálculo Estocástico - Introducción.* Universidad Politécnica de Cartagena. Murcia - España.

[2010] Elke Korn y Ralf Korn (2010) *Modelo para el precio de las acciones.* Universidad Técnica de Kaiserslautern. Kaiserslautern - Alemania.

[2004] Carlos Alberola López (2004) *Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos.* (Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial, 2004). Universidad de Valladolid. Valladolid - España.

[2013] Gerónimo Uribe Bravo (2013) *Procesos Estocásticos I.* (Investigación Científica). Universidad Nacional Autónoma de México. México.

[2003] John C. Hull (2003) *Options, Futures and other Derivatives.* Prentice Hall, New Jersey.