UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Teorema Fundamental de Eilenberg

TESIS

para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Willian Cesar Olano Diaz

ASESOR

Ricardo López Guevara

Lima – Perú

2002

AGRADECIMIENTOS

A mi madre por su apoyo y comprensión.
Al Dr. Agripino García Armas por haberme sugerido el tema del presente trabajo
Al Dr. Pedro Contreras Chamorro por haberme comprendido y motivado.
En especial a la Srta. Cidalia Bustamante Correa su apoyo y comprensión.
A los profesores y compañeros de la Facultad de Ciencias Matemáticas, que contribuyeron a fortalecer a mi formación profesional.

RESUMEN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE EILENBERG
(SEGUNDA FORMA)

WILLIAM CESAR OLANO DIAZ

ABRIL – 2002

Orientador: Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Título obtenido: Licenciado en Matemática
En el presente trabajo consiste en probar el Teorema Fundamental de Eilenberg (Segunda forma) usando los métodos de la Topología Algebraica que consiste en asociar a cada espacio topológico X un grupo $\mathcal{B}_{\times}(X)$ denominado Grupo de Bruschlinsky.

PALABRAS CLAVES

GRUPO DE BRUSCHLINSKY

UNICOHERENCIA

TEOREMAS FUNDAMENTALES DE EILENBERG

TEOREMA DE LA DUALIDAD DE ALEXANDER

TEOREMA DE DE LA CURVA DE JORDAN

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

UNICOHERENCIAS EN $\mathbb{C}P^n$ Y $\mathbb{R}P^n$

ABSTRACT

FUNDAMENTAL THEOREM OF EILENBERG (SECOND FORM)

WILLIAM CESAR OLANO DIAZ

ABRIL 2002

Advisor: Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Professional degree: Licentiate in Mathematics

This work consists in prove the Fundamental Theorem of Eilenberg(Second Form) using the methds of algebraic topology that consists in associate to each space a group $\mathcal{B}_{\times}(X)$ called Group of Bruschlinsky.

KEY WORDS

GROUP OF BRUSCHLINSKY

UNICOHERENT

THEOREM FUNDAMENTALS OF EILENBERG

THEOREM OF THE DUALITY OF ALEXANDER

JORDAN CURVA THEOREM

THEOREM FUNDAMENTAL THE ALGEBRA

UNICOHERENTS $\mathbb{C}P^n$ Y $\mathbb{R}P^n$

Indice

Capítulo I

Introducción

I.1 Generalidades topológica 1

I.1.16 Notación: Compactación de $\mathbb{R}^n$ 5

I.2 Espacios sólidos y paracompactos 6

I.2.1 Teorema(Urysohn) 6
I.2.2 Corolario(Urysohn) 6
I.2.3 Teorema(Tietze) 7
I.2.4 Ejemplos de espacios sólidos 7

I.3 Los conjuntos $\mathbf{V}^{\theta}$ y $\mathbf{V}_k^{\theta}$ 10

I.3.8 Ejemplos de regiones elementales 13
I.3.10 Ejemplos de espacios de recubrimientos 13
I.3.11 Proposición(Levantamiento de caminos) 13

Capítulo II

Grupo de Bruschlinsky

II.1 Grupo de Bruschlinsky 15

II.1.5 Grupo de Bruschlinsky 16

II.1.18 Homomorfismo inducido de Bruschlinsky 19
II.1.24 Ejemplos de grupos de Bruschlinsky triviales 20
II.1.36 Grupo de Bruschlinsky-Eilenberg 23
II.1.49 Homomorfismo inducido de Bruschlinsky-Eilenberg 25
II.1.55 Teorema(Producto de grupos de Bruschlinsky-Eilenberg) 26
II.1.56 Corolario(Producto de grupos de Bruschlinsky) 27
II.1.63 Teorema(Whyburn) 29
II.1.71 Grado en $\mathcal{F}(X)$ 30

II.2. Una caracterización de los espacios unicoherentes 33

Capítulo III

Teoremas Fundamentales de Eilenberg

III.1 Teoremas Fundamentales de Eilenberg (Primera y segunda forma) 37

III.1.5 Teorema Fundamental de Eilenberg(primera forma) 38
III.1.6 Teorema Fundamental de Eilenberg(segunda forma) 38

III.2 Teoremas de la Dualidad de Alexander 39

III.2.2 Teorema de la dualidad de Alexander 39

Capítulo IV

Aplicaciones

IV.1 Teorema de la curva de Jordan 42

IV.1.5 Teorema de la curva de Jordan 43

IV.2 Teorema Fundamental del Algebra 43

IV.3 Unicoherencias en $\mathbb{C}P^n$, $n-$espacio proyectivo complejo y $\mathbb{R}P^n$, $n-$espacio proyectivo real 44

IV.2 $\mathbb{R}P^n$ no es un espacio sólido 45

Apéndice 46

Referencias Bibliográficas de acuerdo a la citas en el texto 48

y $([14]; v.7.6, 228)$, en $(I.2; 6)$ definimos los espacios sólidos.

En el Segundo Capítulo, recogiendo las ideas de $([16]; 2, 88-99)$ en $(II; 1.5, 16)$ se define el grupo de Bruschlinsky y recogiendo las ideas de $([15]; 63)$, en $(II; 1.36, 23)$ se define el grupo de Bruschlinsky-Eilenberg. En $(II; 1.56, 27)$ se da una demostración original para espacios conexos y localmente conexo por caminos el producto de grupos de Bruschlinsky. Siguiendo las ideas de $([15]; 3, 6.9), ([5]; 4, 364), ([16]; 6, 96)$ y $([1]; 5, 274)$, definimos en $(II; 2, 33)$ los espacios unicoherentes y en $(II; 2.12, 35)$ se da una caracterización de los espacios unicoherentes y el grupo de Bruschlinsky triviales para los espacios conexos, localmente conexos y normales.

En el Capítulo III, recogiendo las ideas de $([16]; 7, 97)$ y $([10]; 8.9, 309)$ en $(III; 1, 37)$ se define la función de Möbius. Recogiendo las ideas de $([1]; 258-259)$ y $([1]; 9, 262)$ en $(III; 1.5, 38)$ se da el Teorema Fundamental de Eilenberg(Primera Forma). En $(III; 1.6, 38)$ se prueba el Teorema Fundamental de Eilenberg(Segunda Forma) y recogiendo las ideas (1) y (2) de $([15]; III.2, 91-92)$ y $([16]; 7.3, 99)$, se prueba en $(III; 2.2, 39)$ el teorema de la Dualidad de Alexander.

En el Capítulo IV como aplicación en $(IV; 1.5, 43)$, se prueban el Teorema de la Curva de Jordan, en $(IV; 2.1, 43)$, se prueban el Teorema Fundamental del Algebra y en $(IV; 3.44)$, se da una demostración original de la unicoherencias del Plano Proyectivo Complejo y Real.

En el presente trabajo, todos los espacios involucrados serán considerados como subconjuntos no vacios de un espacio topológico de Hausdorff lo cual no limita los resultados presentados.

Se hacen unas cuantas referencias a la bibliografía de acuerdo a la cita del texto que se enumera al final de este trabajo; lo hemos distinguido con paréntisis(corchetes).

Y finalmente, agradezco infinitamente a todas las personas que de una manera ú otra hayan contribuido en la elaboración del Presente Trabajo.

William Olano

Prólogo

La meta primordial de éste trabajo es, usando los métodos de la Topología Algebraica, probar el Teorema Fundamental de Eilenberg(Segunda Forma) que consiste en asociar a cada espacio X un grupo $\mathcal{B}_{\times}(X)$ denominado grupo de Bruchlinsky que son invariante bajo tipo de homotopía. Como aplicación se prueba el Teorema de la Curva de Jordan y damos una demostración original de la unicoherencias del Plano Proyectivo Complejo y Real.

Para espacio conexos y localmente conexos por caminos, demostramos en $(II.1.56;27)$ el producto de grupos de Bruchlinsky y en $(II.1.51;25)$ probamos y establecemos el isomorfismo del grupo de Bruschlinsky con el grupo de Bruschlinsky-Eilenberg.

En espacio conexos y localmente conexos y normales en $(II.2.12;35)$, demostramos que son equivalentes los grupos de Bruschlinsky triviales con la unicoherencia, y como ejemplos tenemos que los espacios

$$\mathbb{I}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n\,(n \geq 2), \mathbb{C}P^n \text{ y } \mathbb{R}P^n$$

son espacios unicoherentes. Por $(II.10;35)$, se tiene una implicación del concepto de espacios paracompactos sólidos en la unicoherencias.

Tres hechos importante son:

Primero que el Teorema Fundamental de Eilenberg(Primera Forma) implica el Teorema Fundamental de Eilenberg(Segunda Forma) y el recíproco es también cierto.
Segundo que el Plano Proyectivo Real, $\mathbb{R}P^n$ no es un espacio sólido y tercero que en ([23]) y ([24]), este trabajo sirve como base de estudio para continuar el estudio de los espacios multicoherentes I y II.

En el Presente Trabajo está dividido en Cuatro Capítulos:

En el Primer Capítulo, se recogen las ideas de ([10]; 8.16.1; 338) y ([18]; $26-27$), se introducen en $(I.3;10)$ los conjuntos $\mathbb{V}^{\theta}$ y $\mathbb{V}^{\theta}_{k}$ probándose en $(I.3.2;11)$ que son homeomorfos y de $(I.3.8;13)$, $\mathbb{V}^{\theta}$ es llamado región elemental cumpliendo una función en el desarrollo del grupo de Bruschlinsky. Siguiendo las ideas de ([13]; 2), ([3]; $7A, 96$)

Capítulo I

Introducción

I.1 Generalidades topológicas

Sean X e Y espacios de Hausdorff y consideremos el conjunto

$$C(X,Y) = \{f; f : X \to Y \text{ es una función continua}\}.$$

Si $X = Y$, el símbolo id_X significa que $id_X \in C(X,X)$ es la función identidad.

I.1.1 Definición
1) $A \subset X$ es un retracto de X si $\exists r \in C(X,A)/r_A = id_A$.
2) $f \in C(X,Y)$ es un homeomorfismo entre X e Y y escribiremos por $f : X \approx Y$ si $\exists g \in C(Y,X)/f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$. Denotemos $f^{-1} = g$, $f^{-1} : X \approx Y$.
3) X e Y son espacios homeomorfos y escribiremos por $X \approx Y$ si $\exists f \in C(X,Y)/$ $f : X \approx Y$.

I.1.2 Definición
1) Sean $f, g \in C(X,Y)$, f es homótopico a g y escribiremos por $f \simeq g$ si $\exists h \in C(Y \times \mathbb{I}, X)/h(x,o) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$ $\forall x \in X$; $\mathbb{I} = [0,1]$.
2) $f \in C(X,Y)$ es una equivalencia homotópica si $\exists g \in C(Y,X)/f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$.
3) X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, y escribiremos por $X \simeq Y$ si $\exists f \in C(X,Y)$ una equivalencia homotópica.
4) X es contráctil si $\exists x \in X/X \simeq \{x\}$.

I.1.3 Proposición
Sean $f, \varphi \in C(X,Y)$ y $g, \psi \in C(Y,Z)$. Si $f \simeq \varphi$ y $g \simeq \psi$ entonces $f \circ g \simeq \varphi \circ \psi$.

Sean X y Y grupos abelianos. Denotemos el homomorfismo identidad de X por id_X.

I.1.4 Definición
1) Diremos que $f : X \to Y$ es un isomorfismo entre X e Y y escribiremos por

$f : X \cong Y$ si $\exists g : Y \to X$ homomorfismo tal que $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$.
Denotemos $f^{-1} = g$, $f^{-1} : Y \cong X$.

2) X e Y son isomorfos y escribiremos por $X \cong Y$ si $\exists f : X \to Y / f : X \cong Y$.

Con el objetivo de evitar repiticiones innecesarias, damos a continuación una lista de las notaciones usuales que usaremos:

1) $\emptyset$ conjuntos vacío
2) $A, B, ..., Y, Z$ espacios(sub espacios) topológicos
3) $\mathcal{V}_X(A) = \{V; \exists G \subset X$ abierto, $A \subset G \subset V\}$ familia de vecindades de A en X. Si $A = \{x\}, \mathcal{V}_X(x) = \mathcal{V}_X(A)$.
4) A° interior de A
5) $\overline{A}$ adherencia de A
6) $Fr(A)$ frontera de A
7) $\mathbb{N}$ conjuntos de números naturales
8) $\mathbb{Z}$ conjuntos de números enteros, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}, \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$
9) $\mathbb{R}$ conjuntos de números reales, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
10) $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ conjuntos de números reales positivos, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$
11) $\mathbb{C}$ conjuntos de números complejos, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$
12) Para $a \neq b$ en $\mathbb{R}$, $(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$ intervalos reales
13) Para $a \neq b$ en $\mathbb{R}$, $[ai, bi] = \{iy \in \mathbb{C}; a \leq y \leq b\}$ intervalo complejo cerrado
14) $2i\pi\mathbb{Z} = \{2\pi ni \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{Z}\}$
15) $\mathbb{V} = [0, 2\pi)$
16) $\mathbb{R}^n$ $n-$espacio euclidiano, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^{n*} = \mathbb{R}^n - \{0\}$
17) $\mathbb{I}^n = \mathbb{I} \times ... \times \mathbb{I}$ $n-$cubo unidad, $\mathbb{I} = \mathbb{I}^1 = [0, 1]$
18) $\mathbb{J}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_i| \leq 1, i = 1, 2, ..., n\} = \mathbb{J} \times ... \times \mathbb{J}$ $n-$ cuadrado unidad, $\mathbb{J} = \mathbb{J}^1 = [-1, 1]$
19) $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1, i = 1, 2, ..., n\}$ $n-$ disco unidad, $\mathbb{D}^{n*} = \mathbb{D}^n - \{0\}$
20) $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \mid x \mid = 1\}$ $n-$esfera estandar
21) $\mathbb{S}_+^n = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n; x_{n+1} \geq 0\}$ casquete superior
22) $\mathbb{S}_-^n = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n; x_{n+1} \leq 0\}$ casquete inferior
23) El símbolo $\exists!$ significa existencia y unicidad.

Se considera siempre $\mathbb{R}^n$ como el hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por los puntos $(x_1, ..., x_n, 0)$, con esta convención $\mathbb{S}^n$ se identifica al ecuador de $\mathbb{S}^{n+1}$, es decir, $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}_+^{n+1} \cap \mathbb{S}_-^{n+1}$ y $\mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{S}_+^{n+1} \cup \mathbb{S}_-^{n+1}$.

I.1.5 Proposición

$\mathbb{I}^n \approx \mathbb{J}^n$.

Demostración

Definamos $f : \mathbb{I}^n \to \mathbb{J}^n, g : \mathbb{J}^n \to \mathbb{I}^n$ por

$$f(x) = 2x - (1,1,...,1), g(x) = \tfrac{1}{2}x + (1,1,...,1).$$

Entonces f, g son continuas y $g \circ f = id_{\mathbb{I}^n}, f \circ g = id_{\mathbb{J}^n}$. Por lo tanto $\mathbb{I}^n \approx \mathbb{J}^n$ ■

I.1.6 Proposición

$\mathbb{J}^n \approx \mathbb{D}^n$.

Demostración

Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define $|x|_0 = \max\{x_i; i = 1, 2, ..., n\}$ y $|x|_\infty = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Definamos $f : \mathbb{J}^n \to \mathbb{D}^n, g : \mathbb{J}^n \to \mathbb{D}^n$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|_0}{|x|}x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ y } g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{|x|_0}x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para ver la continuidad de f, basta ver que f es continuia en 0. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$. Si $|x| < \delta; x \neq 0, |f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x|_0 \leq n|x| < n\delta = \varepsilon$. De la misma manera g es continua en 0. Entonces f y g son continuas y $f \circ g = id_{\mathbb{J}^n}, g \circ f = id_{\mathbb{D}^n}$. Por lo tanto $\mathbb{D}^n \approx \mathbb{J}^n$ ■

I.1.7 Corolario

$\mathbb{I}^n \approx \mathbb{D}^n$.

I.1.8 Corolario

$\mathbb{S}_+^n \approx \mathbb{S}_-^n$.

Demostración

Definamos $f : \mathbb{S}_+^n \to \mathbb{S}_-^n, g : \mathbb{S}_-^n \to \mathbb{S}_+^n$ por $f(x) = -x, g(x) = -x$. Entonces f y g son continuas y $f \circ g = id_{\mathbb{S}_-^n}, g \circ f = id_{\mathbb{S}_+^n}$. Por lo tanto $\mathbb{S}_+^n \approx \mathbb{S}_-^n$■

I.1.9 Proposición

$\mathbb{S}_+^{n+1} \approx \mathbb{D}^{n+1}$.

Demostración

Definamos $h : \mathbb{S}_+^n \to \mathbb{D}^n$ por $h(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n,) = y$, h es continua.
h es inyectiva:
$(x_1, ..., x_n) = h(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = h(y_1, ..., y_n, y_{n+1}) = (y_1, ..., y_n)$,
$x_1^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2 = y_1^2 + ... + y_n^2 + y_{n+1}^2$. Luego $x_{n+1}^2 = y_{n+1}^2, x_{n+1} = y_{n+1}$ pues $x_{n+1}, y_{n+1} \geq 0$. Por consiguiente $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (y_1, ..., y_n, y_{n+1})$.
h es sobreyectiva:
Si $|y| = 1$, tomo $x = (x_1, ..., x_n, 0)$ y si $|y| < 1, \exists r \in \mathbb{R}^+ / |y|^2 + r^2 = 1$, tomo

$x=(x_1,...,x_n,r)$. Ya que $\mathbb{S}_+^n$ es compacto, h es continua y biyectiva se sigue que $\mathbb{S}_+^n \approx \mathbb{D}^n$ ■

I.1.10 Corolario

$$\mathbb{I}^{n+1} \approx \mathbb{S}_+^{n+1}.$$

I.1.11 Proposición

$$\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{R}^{n+1*}.$$

Demostración

Sea $i \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1*})$ la inclusión y $r \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1*}, \mathbb{S}^n)$ dado por

$$r(x) = \frac{x}{|x|} \ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1*}.$$

Luego $r \circ i(x) = r(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{1} = x = id_{\mathbb{S}^n}$. Veamos que $r \circ i \simeq id_{\mathbb{R}^{n+1*}}$ para concluir que $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{R}^{n+1*}$. Sea $h : \mathbb{R}^{n+1*} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^{n+1*}$ dado por $h(x,t) = tx + (1-t)r(x)$. Si $\exists (x,t) \mathbb{R}^{n+1*} \times \mathbb{I} / tx + (1-t)r(x) = 0$. Tomando norma, $(1-t)|r(x)| = |x|$, luego $1 = t(|x|+1)$ y de aquí $t = \frac{1}{|x|+1}$. Tenemos que $0 = tx + (1-t)r(x) = tx + (1-t)\frac{x}{|x|}$ $= \frac{1}{|x|+1} + \left(1 - \frac{1}{|x|+1}\right)t = \frac{x}{|x|+1} + \frac{x}{|x|+1} = \frac{2x}{|x|+1}$ entonces $x = 0$, esto contradice a que $x \in \mathbb{R}^{n+1*}$. Luego h es continua y $h(x,0) = r(x) = i \circ r(x), h(x,0) = id_{\mathbb{R}^{n+1*}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1*}$ entonces $i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^{n+1*}}$ ■

I.1.12 Proposición

$$\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{D}^{n+1*}.$$

Demostración

Sea $i \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^n, \mathbb{D}^{n+1*})$ la inclusión y $r \in \mathcal{C}(\mathbb{D}^{n+1*}, \mathbb{S}^n)$ dado por

$$r(x) = \frac{x}{|x|} \ \forall x \in \mathbb{D}^{n+1*}.$$

Luego $r \circ i(x) = r(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{1} = x = id_{\mathbb{S}^n}$, es decir, $i \circ r \simeq id_{\mathbb{S}^n}$. Defino $h : \mathbb{D}^{n+1*} \times \mathbb{I} \to \mathbb{D}^{n+1*}$ por $h(x,t) = tx + (1-t)r(x)$, por la demostración anterior, $h(x,t) \neq 0 \ \forall (x,t) \in \mathbb{D}^{n+1*} \times \mathbb{I}$. Luego $h(x,0) = r(x), h(x,1) = x = id_{\mathbb{D}^{n+1*}} = i \circ r(x) \ \forall x \in \mathbb{D}^{n+1*}$. Entonces

$$i \circ r \simeq id_{\mathbb{D}^{n+1*}}.$$

Por consiguiente $r \circ i \simeq id_{\mathbb{S}^n}$ y $i \circ r \simeq id_{\mathbb{D}^{n+1*}}$, es decir, $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{D}^{n+1*}$ ■

I.1.13 Corolario

$$\mathbb{R}^{n+1*} \simeq \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{D}^{n+1*}.$$

I.1.14 Proposición

$$\mathbb{R}^n \approx (\mathbb{D}^n)^\circ.$$

Demostración

Definamos $f:\mathbb{R}^n \to (\mathbb{D}^n)^\circ$ y $g:(\mathbb{D}^n)^\circ \to \mathbb{R}^n$ por

$$f(x)=\tfrac{x}{1+|x|}\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n \text{ y } g(x)=\tfrac{y}{1+|y|}\ \ \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

Luego f,g son continuas y $f\circ g=id_{(\mathbb{D}^n)^\circ}, g\circ f=id_{\mathbb{R}^n}$.
Por lo tanto $\mathbb{R}^n\approx(\mathbb{D}^n)^\circ$ ■

I.1.15 Teorema

$$\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}\approx\mathbb{R}^{n*}.$$

Demostración

Definamos $f:\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n*}$ y $g:\mathbb{R}^{n*}\to\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$ por
$f(x,t)=xe^t\ \forall(x,t)\in\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$, y $g(y)=\left(\frac{y}{|y|},\ln|y|\right)\ \forall y\in\mathbb{R}^{n*}$.
Luego f,g son continuas y $f\circ g=id_{\mathbb{R}^{n*}}, g\circ f=id_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}}$.
Por lo tanto $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}\approx\mathbb{R}^{n*}$ ■

I.1.16 Notación: Compactación de $\mathbb{R}^n$

Denotemos la compactación unipuntual de $\mathbb{R}^n$ por $\overline{\mathbb{R}}^n=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ definido en ([3];103). Este espacio compacto $\overline{\mathbb{R}}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ ([22];166). En realidad, la proyección estereográfica $h:\mathbb{S}^n\to\overline{\mathbb{R}}^n$ definido para cada $x=(x_0,x_1,...,x_n)\in\mathbb{S}^n$ por

$$h(x)=\begin{cases}\infty & \text{si } x_0=1\\ y=(y_0,y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n & \text{si } x_0\neq 1\end{cases}$$

en donde las coordenadas esta dado por $y_i=\frac{x_i}{1-x_0}$ para cada $i=1,2,...,n$, $x_0\neq 1$ es un homeomorfismo de $\mathbb{S}^n$ sobre $\overline{\mathbb{R}}^n$. La inversa $g=h^{-1}:\overline{\mathbb{R}}^n\to\mathbb{S}^n$ de este homeomorfismo h esta definido para cada punto $y\in\mathbb{R}^n$ por

$$g(x)=\begin{cases}(1,0,...,0) & \text{si} \quad y=\infty\\ (x_0,x_1,...,x_n) & \text{si} \quad y=(y_0,y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

donde las coordenadas $x_0,x_1,...,x_n$ esta dado por

$$x_i=\begin{cases}\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} & \text{si } i=0\\ \frac{2y_i}{|y|^2+1} & \text{si } i>0\end{cases}$$

I.1.17 Proposición

$$\mathbb{S}^{n-1}\times[0,+\infty)\approx\mathbb{D}^{n*}.$$

Demostración

Definamos $f : \mathbb{S}^{n-1} \times [0,+\infty) \to \mathbb{D}^{n*}$ y $g : \mathbb{D}^{n*} \to \mathbb{S}^{n-1} \times [0,+\infty)$ por $f(x,t) = \frac{1}{1+t}x$ $\forall (x,t) \in \mathbb{S}^{n-1} \times [0,+\infty)$ y $g(y) = \left(\frac{y}{|y|}, \frac{1-|y|}{|y|}\right)$ $\forall \in y \in \mathbb{D}^{n*}$.
Luego $f \circ g = id_{\mathbb{D}^{n*}}, g \circ f = id_{\mathbb{S}^{n-1} \times [0,+\infty)}$. Por lo tanto $\mathbb{S}^{n-1} \times [0,+\infty) \approx \mathbb{D}^{n*}$ ■

I.1.18 Proposición

$$\mathbb{S}^{n-1} \times (-\infty, 0] \approx \mathbb{R}^n - (\mathbb{D}^{n*})^\circ .$$

Demostración

Definamos $f : \mathbb{S}^{n-1} \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n - (\mathbb{D}^{n*})^\circ$ y $g : \mathbb{R}^n - (\mathbb{D}^{n*})^\circ \to \mathbb{S}^{n-1} \times (-\infty, 0]$ por $f(x,t) = (1-t)x$ $\forall (x,t) \in \mathbb{S}^{n-1} \times (-\infty, 0]$ y

$$g(y) = \left(\frac{y}{|y|}, 1 - |y|\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n - (\mathbb{D}^{n*})^\circ .$$

Luego $f \circ g = id_{(\mathbb{D}^{n*})^\circ}, g \circ f = id_{\mathbb{S}^{n-1} \times (-\infty, 0]}$.
Por lo tanto $\mathbb{S}^{n-1} \times (-\infty, 0] \approx \mathbb{R}^n - (\mathbb{D}^{n*})^\circ$ ■

I.1.19 Corolario

$$\mathbb{D}^{n*} \approx \mathbb{R}^n - (\mathbb{D}^{n*})^\circ .$$

I.2 Espacios sólidos y paracompactos

Los siguientes resultados son clásicos para la topología de conjuntos.

I.2.1 Teorema(Urysohn)

Sea X un espacio de Hausdorff. Son equivalentes:

1) X es normal
2) Para cada par (A,B) de cerrados disjuntos no vacíos en X, $\exists f \in C(X, \mathbb{I}) /$ $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$
3) Para cada par (A,B) de cerrados disjuntos no vaciós en X y para cada par $a < b$ en $\mathbb{R}$, $\exists f \in C(X,[a,b]) / f(A) = \{a\}$ y $f(B) = \{b\}$.

I.2.2 Corolario(Urysohn)

Si A y B son subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos de un espacio normal de Hausdorff X, $\exists a, b$ en $\mathbb{R}$, y $f \in C(X,[ia,ib]) / f(A) = \{ia\}$ y $f(B) = \{ib\}$.

Demostración

Sean $a < b$ en $\mathbb{R}$ y por el teorema de Urysohn, $\exists g \in C(X,[a,b])$ / $g(A) = \{a\}$ y $g(B) = \{b\}$. Ya que $h : [a,b] \approx [ia,ib]$ dado por $h(x) = ix \ \forall x \in [a,b]$, basta tomar $f = h \circ g \in C(X,[ia,ib])$ ■

I.2.3 Teorema(Tietze)

Sea X un espacio de Hausdorff. Son equivalentes:

1) X es normal

2) $\forall A \subset X$ cerrado y $\forall f \in C(A,\mathbb{I})$, $\exists g \in C(X,\mathbb{I}) / g_{|A} = f$.

Definición

Decimos que un espacio de Hausdorff Y es un espacio sólido si para cada subconjuntos cerrados A de un espacio de Hausdorff normal X y $\forall f \in C(A,Y)$, $\exists g \in C(X,Y) / g_{|A} = f$.

I.2.4 Ejemplos de espacios sólidos

Por el teorema de Tietze, $\mathbb{I}$ es sólido y por ([8]; 7.18, 134), ([8]; 7.19, 135), $(-1,1)$ y $[-1,1), (-1,1]$ son sólidos.

I.2.5 Teorema

La solidez es invariante bajo homeomorfismo.

I.2.6 Teorema

Los intervalos en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ son sólidos.

I.2.7 Teorema

Sea A de un subconjunto de un espacio sólido normal X. Son equivalentes:

1) A es un retracto de X

2) A es sólido y cerrado.

Ver ([26]; 2.6, 9)

I.2.8 Teorema

Todo retracto de un espacio contractible es contractible.

I.2.9 Teorema

Todo espacio contractible es conexo por caminos.

Ver ([3]; 5.2, 84).

I.2.10 Teorema

X es conexo por caminos si X es sólido.

Ver ([14]; *v*.7.7, 228).

I.2.11 Teorema

X es contractible si X es sólido binormal($X \times \mathbb{I}$ es normal y X es paracompacto).

Ver ([14]; $v.7.7, 228$).

I.2.12 Teorema

Un sólido compacto es localmente conexo por caminos.

Ver ([14]; $v.7.7, 229$).

I.2.13 Teorema

$\mathbb{R}^n$ es paracompacto.

Ver ([5]; $EX.5, 164$).

I.2.15 Teorema

Todo espacio compacto es paracompacto.

Ver ([5]; $I.2, 223$).

I.2.16 Teorema

Todo subconjunto cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.

Ver ([5]; $2.4, 165$).

I.2.17 Teorema

Si Y es paracompacto y X compacto, entonces $Y \times X$ es paracompacto.

Ver ([23]; $x.1.8, 17$).

I.2.18 Teorema

El producto de espacios sólidos es sólido(el inverso es cierto).

Ver ([14]; $v.7.7, 228$).

I.2.19 Teorema

$\mathbb{I}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{D}^n$ y sus interiores son sólidos.

Demostración

Consecuencia de $(I.2.18)$ y $(I.1.17)$ ■

I.2.20 Teorema

$\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $\mathbb{D}^n$ ($n \geq 1$).

Veáse ([13]; $3.1, 4$).

I.2.21 Teorema

$\mathbb{S}^{n-1}$ no es sólido($n \geq 1$).

Demostración

Como $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado, normal entonces por $(I.2.20)$ y $(I.2.7)$ se tiene que $\mathbb{S}^{n-1}$ no es sólido($n \geq 1$)

I.2.21* Teorema

Cada espacio paracompacto es normal.

Veáse $([5]; 2.2, 163)$.

I.2.22 Teorema

$X \times \mathbb{I}$ es contractible si X es sólido paracompacto.

Demostración

Si X es sólido paracompacto y como $\mathbb{I}$ es sólido y paracompacto, entonces $X \times \mathbb{I}$ es sólido paracompacto. Se sigue que $X \times \mathbb{I}$ es sólido binormal, entonces $X \times \mathbb{I}$ es contractible ■

I.2.23 Teorema

$X \times \mathbb{I}$ es contractible si X es un subconjunto sólido cerrado de un paracompacto.

Demostración

Si X es es un subconjunto sólido cerrado paracompacto, X es paracompacto. Entonces $X \times \mathbb{I}$ es sólido binormal. Por lo tanto $X \times \mathbb{I}$ es contractible ■

I.2.24 Corolario

$X \times \mathbb{I}$ es contractible si X es sólido compacto.

Definición

Sea Y un espacio topológico. Diremos que Y es un espacio sólido por vecindades si para cada subconjunto cerrado A de un espacio normal X y $\forall f \in C(A, Y)$, $\exists V \in \mathcal{V}_X(A) / g_{|A} = f$.

I.2.25.1 Corolario

Todo espacio sólido es sólido por vecindades.

I.2.25.2 Teorema

La solidez por vecindades es invariante bajo homeomorfismo.

I.2.26 Proposición

$\mathbb{C}^*$ es un espacio sólido por vecindades.

Demostración

Sea A subconjunto cerrado de un espacio normal X. Sea $i \in C(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$ la inclusión y $f \in C(A, \mathbb{C}^*)$, $f = io f \in C(A, \mathbb{C})$. Por la solidez de $\mathbb{C}$, $\exists h \in C(X, \mathbb{C}) / h_{|A} = f$. Por otra parte $h^{-1}(\mathbb{C}^*)$ es abierto en X ya que $\mathbb{C}^*$ es abierto en $\mathbb{C}$. Pongamos $G = h^{-1}(\mathbb{C}^*)$ y $g = h_{|G}$, entonces

$$\exists V = G \in \mathcal{V}_X(A) \text{ y } g \in C(V, \mathbb{C}^*) / g_{|A} = f \ \blacksquare$$

I.2.27 Teorema

$\mathbb{S}^n$ es un espacio sólido por vecindades.

Demostración

Sea A subconjunto cerrado de un espacio normal X y $i \in C(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ la inclusión. Si $f \in C(A, \mathbb{S}^n)$, $f = i \circ f \in C(A, \mathbb{R}^{n+1})$ y por la solidez de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\exists g \in C(X, \mathbb{R}^{n+1}) / g_{|A} = i \circ f = f$. Entonces $G = \{x \in X; g(x) \neq 0\} \in \mathcal{V}_X(A)$ abierto y definimos $h : G \to \mathbb{S}^n$ por $h(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}$ $\forall x \in G$.
Luego $h \in C(G, \mathbb{S}^n)$ y $h_{|A} = f$, se sigue que $\mathbb{S}^n$ es sólido por vecindades $\blacksquare$

I.3 Los conjuntos $\mathbb{V}^\theta$ y $\mathbb{V}_k^\theta$

Hemos denotado el plano complejo por $\mathbb{C}$, y el plano complejo sin el origen por $\mathbb{C}^*$, es decir, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, y escribiremos la función exponencial compleja como $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Para $z = x + iy$, $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

Por ([27]; 7.5, 99), e es abierta y por tanto continua.
Usando la propiedades conocidas de la función exponencial real y la fórmula de la adición para las funciones trigonométricas reales se obtiene que $e^{z+w} = e^z e^w$, es decir, $e : (\mathbb{C}, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, +)$ es un homomorfismo de grupos.
Se sigue de la definición que $e^{z+2\pi ki} = e^z$, así el periodo de la función $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es 2π. Además si $e^z = e^w$, se tiene que $e^{z-w} = 1$, entonces $z - w = 2\pi ki$ para algún k entero.

Definición

Sea $(\theta, k) \in \mathbb{V} \times \mathbb{Z}$ y consideremos los conjuntos

$$\mathbb{V}^\theta = \{z \in \mathbb{C}^*; \arg(z) \neq \theta\} \text{ y}$$
$$\mathbb{V}_k^\theta = \{x + iy \in \mathbb{C}; \theta + 2\pi k < y < \theta + 2\pi(k+1)\}.$$

I.3.1 Proposición

$$e^{-1}\left(\mathbb{V}^\theta\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{V}_k^\theta.$$

Demostración

Si $z = x + iy \in e^{-1}\left(\mathbb{V}^{\theta}\right), e^{z} \in \mathbb{V}^{\theta}$ y de aquí $\theta \neq \arg\left(e^{z}\right) = y$, es decir, $y \neq \theta$.
Ya que $y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}/\theta + 2\pi n < y \leq \theta + 2\pi\left(n+1\right)$. Si $y = \theta + 2\pi\left(n+1\right)$, $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x+i(\theta+2\pi(n+1))} = e^{x+i\theta}$ entonces $y = \arg\left(e^{z}\right) = \arg\left(e^{x+i\theta}\right) = \theta$, esto contradice a $y \neq \theta$. Por consiguiente, $\theta + 2\pi n < y < \theta + 2\pi\left(n+1\right)$, y de aquí, $z \in \mathbb{V}_{n}^{\theta}$. Por lo tanto, $e^{-1}\left(\mathbb{V}^{\theta}\right) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{V}_{k}^{\theta}$.
Inversamente si
$z = x + iy \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{V}_{k}^{\theta}$, $\exists n \in \mathbb{Z}/z \in \mathbb{V}_{n}^{\theta}$ y de aquí, $\theta + 2\pi n < y < \theta + 2\pi\left(n+1\right)$.
Si $y = \theta$, $n < 0 < n+1$ esto contradice a $\mathbb{Z}$, luego $\arg\left(e^{z}\right) \neq \theta$, es decir, $e^{z} \in \mathbb{V}^{\theta}$.
Por lo tanto $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{V}_{k}^{\theta} \subset e^{-1}\left(\mathbb{V}^{\theta}\right)$ ■

I.3.2 Proposición

$$e : \mathbb{V}_{k}^{\theta} \approx \mathbb{V}^{\theta}.$$

Demostración

Si $z \in \mathbb{V}_{k}^{\theta} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{V}_{k}^{\theta} = e^{-1}\left(\mathbb{V}^{\theta}\right)$, $z \in e^{-1}\left(\mathbb{V}^{\theta}\right)$ y de aquí $e^{z} \in \mathbb{V}^{\theta}$. Luego e esta bien definido.

$e_{|\mathbb{V}_{k}^{\theta}}$ es inyectiva:

En efecto, supongamos que $e^{z} = e^{w}; z = x+iy, w = a+ib \in \mathbb{V}_{k}^{\theta}$, veamos que $z = w$.
Como $e^{z-w} = e^{x-a+i(y-b)} = 1, x-a = 0$ y $y-b = 2\pi m$ para algún m entero. Puesto que $x + iy, a + ib \in \mathbb{V}_{k}^{\theta}$ se tiene que $\theta + 2\pi k < y < \theta + 2\pi\left(k+1\right)$ y
$\theta + 2\pi k < b < \theta + 2\pi\left(k+1\right)$ luego
$-2\pi = (\theta + 2\pi k) - (\theta + 2\pi\left(k+1\right)) < y - b < \theta + 2\pi\left(k+1\right) - (\theta + 2\pi k) = 2\pi$
entonces $y - b \in (-2\pi, 2\pi)$. De ésto y $y - b = 2\pi m$ se tiene que $m = 0$, es decir, $x = a$ y $y = b$. Por lo tanto $z = w$.

$e_{|\mathbb{V}_{k}^{\theta}}$ es sobreyectiva:

En efecto, sea $w \in \mathbb{V}^{\theta}$ y como e es sobre y $w \in \mathbb{V}^{\theta} \subset \mathbb{C}$, $\exists v = p+iq \in \mathbb{C}/e\left(v\right) = w$.
Tenemos que $q = \arg\left(e^{v}\right) = \arg\left(e^{w}\right) \neq \theta$, es decir, $q \neq \theta$.
Si $q = \theta + 2\pi j;\ j \in \mathbb{Z}$, $w = e^{v} = e^{p+iq} = e^{p+i(\theta+2\pi j)} = e^{p+i\theta}$. Entonces
$\arg\left(w\right) = \arg\left(e^{p+i\theta}\right) = \theta$, esto contradice a $\arg\left(w\right) \neq \theta$. Por lo tanto $q \neq \theta + 2\pi j$ $\forall j \in \mathbb{Z}$, es decir, $v \notin Fr\left(\mathbb{V}_{k}^{\theta}\right)$ (tampoco $v \notin Fr\left(\mathbb{V}_{j}^{\theta}\right)\ \forall j \in \mathbb{Z}$).
Entonces $\exists j \in \mathbb{Z}^{*}/v \in \mathbb{V}_{j}^{\theta}$, y de aquí, $\exists n \in \mathbb{Z}^{*}/j = n + k$.
Como $\theta + 2\pi j < q < \theta + 2\pi\left(j+1\right)$, entonces $(\theta + 2\pi k) + 2\pi n = \theta + 2\pi\left(k+n\right) = \theta + 2\pi j < q < \theta + 2\pi\left(j+1\right) = \theta + 2\pi\left(n+k+1\right) = \theta + 2\pi\left(k+1\right) + 2\pi n$.
Luego $\theta + 2\pi k < q - 2\pi n < \theta + 2\pi\left(k+1\right)$. Pongamos $z = p + i\left(q - 2\pi n\right)$ y por definición, $z \in \mathbb{V}_{k}^{\theta}$. Entonces $e^{z} = e^{p+i(q-2\pi n)} = e^{p+iq} = e^{v} = w$.
Por lo tanto $\exists z \in \mathbb{V}_{k}^{\theta}/e^{z} = w\ \forall w \in \mathbb{V}^{\theta}$. Por otra parte, e es continua y abierta, y por lo de arriba probado, se sigue que $e : \mathbb{V}_{k}^{\theta} \approx \mathbb{V}^{\theta}$ ■

I.3.3 Proposición

$\mathbb{V}_k^\theta \approx \mathbb{V}_n^\omega$.

Demostración

Definamos $\psi : \mathbb{V}_k^\theta \to \mathbb{V}_n^\omega$ por $\psi(x,y) = (x, y+\omega-\theta+2\pi(n-k))$.
ψ esta bien definida. En efecto, si $(x,y) = x+iy \in \mathbb{V}_k^\theta$, se tiene que
$\theta+2\pi k < y < \theta+2\pi(k+1)$. Luego $\omega+2\pi n = (\theta+2\pi k)+\omega-\theta+2\pi(n-k)$
$y+\omega-\theta+2\pi(n-k) < (\theta+2\pi(k+1))+\omega-\theta+2\pi(n-k) = \omega+2\pi(n+1)$,
entonces por definición, $x+i(y+\omega-\theta+2\pi(n-k)) \in \mathbb{V}_n^\omega$.
De la misma manera, definamos $\varphi : \mathbb{V}_n^\omega \to \mathbb{V}_k^\theta$ por

$$\varphi(x,y) = (x, y+\theta-\omega+2\pi(k-n)).$$

ψ, φ son continuas y $\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{V}_k^\theta}$, $\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{V}_n^\theta}$. Por lo tanto $\mathbb{V}_k^\theta \approx \mathbb{V}_n^\omega$ ■

I.3.4 Corolario

$\mathbb{V}^\theta \approx \mathbb{V}^\omega$.

I.3.5 Proposición

$\mathbb{V}_k^\theta$ es contractible.

Demostración

De la proposición anterior, $\mathbb{V}_k^\theta \approx \mathbb{V}_{-1}^\pi$ y por $(I.1.2)$, basta probar que $\mathbb{V}_{-1}^\pi$ es contractible. En efecto, sea $(x,y) \in \mathbb{V}_{-1}^\pi$, $-\pi < y < \pi$ y sea $t \in \mathbb{I} - \{1\}$,
$|(1-t)y| = (1-t)|y| \leq |y| < \pi$ entonces $|(1-t)y| < \pi$ es decir,
$-\pi < (1-t)y < \pi$. Por esta razón, definamos $h : \mathbb{V}_{-1}^\pi \times \mathbb{I} \to \mathbb{V}_{-1}^\pi$ por

$$h((x,y),t) = (1-t)(x,y)$$

entonces h es continua y $h((x,y),0) = id_{\mathbb{V}_{-1}^\pi}(x,y), h((x,y),1) = 0$. Entonces $id_{\mathbb{V}_{-1}^\pi} \simeq 0$. Por lo tanto $\mathbb{V}_k^\theta$ es contractible ■

I.3.6 Corolario

$\mathbb{V}^\theta$ es contractible.

Definición

Sea $X = \mathbb{C}^*$ o $X = \mathbb{C}^*$. Diremos que un subconjunto de X es una región, si el conjunto es abierto y conexo.

I.3.7 Teorema

1) $\mathbb{V}^\theta$ es una región en $\mathbb{C}^*$
2) $\mathbb{C}^*$ esta cubierto por regiones, es decir, para cada pareja $\theta \neq \omega$ en $\mathbb{V}$,

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{V}^\theta \cup \mathbb{V}^\omega$$

3) $\mathbb{V}_k^\theta$ es una región en $\mathbb{C}$
4) $\left\{\mathbb{V}_k^\theta\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una colección disjunta de regiones de $\mathbb{C}$.

Sea $X \subset \mathbb{C}^*$ un subconjunto abierto y por $([5];1,118)$, $e^{-1}(X)$ esta cubierto por una familia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in I}$ enumerable de regiones de $\mathbb{C}$, es decir, $e^{-1}(X) = \bigcup_{\lambda\in I} X_\lambda$.

Definición
Diremos que X es una región elemental de $\mathbb{C}^*$, si para cada componente X_λ de $\{X_\lambda\}_{\lambda\in I}$, $e : X_\lambda \approx X$. A los elementos de $\{X_\lambda\}_{\lambda\in I}$, se llama componentes de $e^{-1}(X)$ Es decir, X es una región elemental de $\mathbb{C}^*$, si para cada componente X_λ de $e^{-1}(X)$, $e : X_\lambda \approx X$.

I.3.8 Ejemplos de regiones elementales
Como consecuencia de $(I.3.1), (I.3.2)$ y $(I.3.7)$ tenemos que:
1) $\mathbb{V}^\theta$ es una región elemental
2) $\mathbb{C}^*$ esta cubierto por regiones elementales, es decir, para cada pareja $\theta \neq \omega$ en $\mathbb{V}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{V}^\theta \cup \mathbb{V}^\omega$.

I.3.9 Definición
Sea $p \in \mathcal{C}(X,Y)$, la terna (X,p,Y) se denomina un espacio de recubrimiento sobre Y si cumplen las propiedades siguientes:
1) p es sobre
2) $\forall y \in Y$, $\exists V^y \in \mathcal{V}_Y(y)$ abierto tal que $p^{-1}(V^y) = \bigcup_{x\in p^{-1}(y)} W^x; W^x \in \mathcal{V}_X(x)$ abierto,

$$p : W^x \approx V^y \ \forall x \in p^{-1}(y) \text{ y } W^x \cap W^z = \emptyset \ x \neq z \text{ en } p^{-1}(y).$$

El espacio X se denomina un espacio base, el espacio Y se denomina un espacio total y p se denomina función de recubrimiento o sencillamente recubrimiento.

I.3.10 Ejemplos de espacios de recubrimientos
Como consecuencias $(I.3.1), (I.3.2)$ y $(I.3.7)$ tenemos que $(\mathbb{C}, e, \mathbb{C}^*)$ es un espacio de recubrimiento sobre $\mathbb{C}^*$.

I.3.11 Proposición(Levantamiento de caminos)
Sea (X,p) un espacio de recubrimiento sobre Y y $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{I},Y)$. Si $\alpha(0) = p(x)$, $\exists!\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{I},X)/p\circ\beta = \alpha$ y $\beta(0) = x$.
Veáse $([11];17.6,157)$.

I.3.12 Corolario
Sea $(\alpha, z) \in \mathcal{C}(\mathbb{I},\mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}$. Si $\alpha(0) = e^z, \exists!\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{I},\mathbb{C})/e\circ\beta = \alpha$ y $\beta(0) = z$.

Demostración

Si $\alpha(0) = e^z$ y como $(\mathbb{C}, e, \mathbb{C}^*)$ es un espacio de recubrimiento sobre $\mathbb{C}^*$, entonces $\exists \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}) / e \circ \beta = \alpha$ y $\beta(0) = z$ ■

Capítulo II

Grupo de Bruschlinsky

II.1 Grupo de Bruschlinsky

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F}_{\times}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{C}^*).$$

Sean $f, g \in \mathcal{F}_{\times}(X)$, se definen

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) \text{ y } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \forall x \in X.$$

La función uno de $\mathcal{F}_{\times}(X)$ lo denotaremos por 1, es decir, $1(x) = 1 \ \forall x \in X$.

II.1.2 Proposición

$\mathcal{F}_{\times}(X)$ con el producto usual es un grupo abeliano multiplicativo.

Demostración

El elemento neutro esta dado por 1 y el inverso de f por $\frac{1}{f}$ ■

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{C}_{\times}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{C}).$$

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_{\times}(X)$, se definen

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \text{ y } (\varphi - \psi)(x) = \varphi(x) - \psi(x) \ \ \forall x \in X.$$

La función cero de $\mathcal{C}_{\times}(X)$ lo denotaremos por 0, es decir, $0(x) = 0 \ \forall x \in X$.

II.1.3 Proposición

$\mathcal{C}_{\times}(X)$ con la suma usual es un grupo abeliano aditivo.

Demostración

El elemento neutro esta dado por 0 y el inverso de φ por $-\varphi$ ■

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{E}_{\times}(X)=\left\{f\in\mathcal{F}_{\times}(X);\exists\varphi\in\mathcal{C}_{\times}(X)/f(x)=e^{\varphi(x)}\ \forall x\in X\right\}.$$

II.1.4 Proposición

$\mathcal{E}_{\times}(X)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}_{\times}(X)$.

Demostración

Si $f,g\in\mathcal{E}_{\times}(X)$, $\exists\varphi,\psi\in\mathcal{C}_{\times}(X)/f(x)=e^{\varphi(x)},g(x)=e^{\psi(x)}\ \forall x\in X$. Luego $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=e^{(\varphi-\psi)(x)}\ \forall x\in X$ y $(\varphi-\psi)\in\mathcal{C}_{\times}(X)$ entonces $\left(\frac{f}{g}\right)\in\mathcal{E}_{\times}(X)$ ■

II.1.5 Grupo de Bruschlinsky

El grupo $\mathcal{B}_{\times}(X)=\frac{\mathcal{F}_{\times}(X)}{\mathcal{E}_{\times}(X)}$ se denomina grupo de Bruschlinsky de X. Los elementos de $\mathcal{B}_{\times}(X)$ se denotan por $[f]_{\times}$ en donde $f\in\mathcal{F}_{\times}(X)$ y se denominan clase de f. Si $f,g\in\mathcal{F}_{\times}(X)$ y $[f]_{\times}=[g]_{\times}$ como elementos de $\mathcal{B}_{\times}(X)$, se dice que f es exponencialmente equivalente a g y se denotara por $f\sim_{\times}g$ es decir, $\exists\varphi\in\mathcal{C}_{\times}(X)/f(x)=g(x)e^{\varphi(x)}\ \forall x\in X$. Luego $f\sim_{\times}1$ significa que $f\in\mathcal{E}_{\times}(X)$ $\left(\text{también } 1=[f]_{\times} \text{ clase uno de } \mathcal{B}_{\times}(X)\right)$. Por brevedad, el símbolo $f\sim_{\times}g$ en X significa que $[f]_{\times}=[g]_{\times}$ en donde $f,g\in\mathcal{F}_{\times}(X)$ y $\mathcal{B}_{\times}(X)\cong 1$ significa que $\mathcal{B}_{\times}(X)$ es el grupo trivial(es decir, $\mathcal{F}_{\times}(X)=\mathcal{E}_{\times}(X)$).

De $(II.1.24)$ y $(II.1.60)$, se tiene que $\mathbb{I}^n,\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{R}^n$ tienen grupo de Bruschlinsky trivial o también veáse ([26];3.7,14).

II.1.6 Proposición

$\mathcal{B}_{\times}(x)\cong 1\ \forall x\in X$ en donde $\mathcal{B}_{\times}(x)=\mathcal{B}_{\times}(\{x\})$.

II.1.7 Proposición

Sean $f,g\in\mathcal{F}_{\times}(X)$. Son equivalentes:

1) $f\sim_{\times}g$ en X

2) $fh\sim_{\times}gh$ en $X\ \forall h\in\mathcal{F}_{\times}(X)$.

Demostración

Si $f\sim_{\times}g$ en X, $\exists\varphi\in\mathcal{C}_{\times}(X)/f(x)=g(x)e^{\varphi(x)}\ \forall x\in X$. Luego $\exists\varphi\in\mathcal{C}_{\times}(X)/f(x)h(x)=g(x)h(x)e^{\varphi(x)}\ \forall x\in X$, entonces $fh\sim_{\times}gh$ en X. Inversamente si $fh\sim_{\times}gh$ en X, $\exists\varphi\in\mathcal{C}_{\times}(X)/$
$f(x)h(x)=g(x)h(x)e^{\varphi(x)}\ \forall x\in X$.

Luego $\exists \varphi \in \mathcal{C}_{\times}(X) / f(x) = g(x) e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in X$, entonces $f \sim_{\times} g$ en X ■

II.1.8 Corolario

Sean $f, g \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim_{\times} g$ en X
2) $\frac{1}{f} \sim_{\times} \frac{1}{g}$ en X
3) $\frac{f}{g} \sim_{\times} 1$ en X.

II.1.9 Corolario

Sean $f \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim_{\times} 1$ en X
2) $\frac{1}{f} \sim_{\times} 1$ en X
3) $f \in \mathcal{E}_{\times}(X)$
4) $\frac{1}{f} \in \mathcal{E}_{\times}(X)$.

II.1.10 Proposición

Sea $f \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Si $f \sim_{\times} 1$ en X entonces $f \simeq 1$.

Demostración

Si $f \sim_{\times} 1$ en X, $\exists \varphi \in \mathcal{C}_{\times}(X) / f(x) = e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in X$. Definamos $h : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{C}^*$ por $h(x,t) = e^{t\varphi(x)}$ $\forall \in (x,t) \in X \times \mathbb{I}$, $h \in \mathcal{F}_{\times}(X \times \mathbb{I})$ y $h(x,0) = 1(x), h(x,1) = f(x)$ $\forall x \in X$ entonces $f \simeq 1$ ■

La recíproca de $(II.1.10)$ es válida.

II.1.11 Proposición

Sea $f \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Si $f \simeq 1$ entonces $f \sim_{\times} 1$ en X.

Veáse ([18]; 2.8, 28).

II.1.12 Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Son equivalentea:

1) $f \sim_{\times} 1$ en X
2) $f \simeq 1$.

II.1.13 Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \simeq g$
2) $fh \simeq gh$ $\forall h \in \mathcal{F}_{\times}(X)$.

Demostración

Si $f \simeq g$, $\exists \varphi \in \mathcal{F}_{\times}(X \times \mathbb{I}) / \varphi(x,0) = f(x), \varphi(x,1) = g(x)\ \ \forall x \in X$.
Definamos $\psi : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{C}^*$ por $\psi(x,t) = h(x)\varphi(x,t)\ \ \forall (x,t) \in X \times \mathbb{I}$,
$\psi \in \mathcal{F}_{\times}(X \times \mathbb{I})$ y $\psi(x,0) = h(x) f(x), \psi(x,1) = h(x) g(x)\ \ \forall (x,t) \in X \times \mathbb{I}$,
entonces $fh \simeq gh$.

Inversamente si $fh \simeq gh$, $\exists \varphi \in \mathcal{F}_{\times}(X \times \mathbb{I}) / \varphi(x,0) = h(x) f(x)$,
$\varphi(x,1) = h(x) g(x)\ \ \forall x \in X$. Definamos $\psi : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{C}^*$ por
$\psi(x,t) = \frac{\varphi(x,t)}{h(x)}\ \ \forall (x,t) \in X \times \mathbb{I}$, $\psi \in \mathcal{F}_{\times}(X \times \mathbb{I})$ y $\psi(x,0) = f(x)$,
$\psi(x,1) = g(x)\ \ \forall (x,t) \in X \times \mathbb{I}$, entonces $f \simeq g$ ■

II.1.14 Corolario

Sean $f, g \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \simeq g$
2) $\frac{1}{f} \simeq \frac{1}{g}$
3) $\frac{f}{g} \simeq 1$.

II.1.15 Corolario

Sea $f \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \simeq 1$
2) $\frac{1}{f} \simeq 1$.

II.1.16 Lema

Sean $f, g \in \mathcal{F}_{\times}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim_{\times} g$ en X
2) $f \simeq g$.

Demostración

Si $f \sim_{\times} g$ en X, $\frac{f}{g} \sim_{\times} 1$ en X. Luego $\frac{f}{g} \simeq 1$, $f \simeq g$.
Inversamente si $f \simeq g$, $\frac{f}{g} \simeq 1$. Luego $\frac{f}{g} \sim_{\times} 1$, $f \sim_{\times} g$ en X ■

Si $(h, f) \in \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{F}_{\times}(Y)$, la composición $f \circ g \in \mathcal{F}_{\times}(X)$ nos induce un homomorfismo $h_{\times} : \mathcal{F}_{\times}(Y) \to \mathcal{F}_{\times}(X)$ de la siguiente manera $h_{\times}(g) = g \circ h\ \ \forall g \in \mathcal{F}_{\times}(Y)$.

II.1.17 Proposición

1) $h_{\times}$ es un homomorfismo
2) $h_{\times}(\mathcal{E}_{\times}(Y)) \subset (\mathcal{E}_{\times}(X))$
3) $h_{\times}$ induce el homomorfismo $h^{\times} : \mathcal{B}_{\times}(Y) \to \mathcal{B}_{\times}(X)$ dado por

$$h^{\times}\left([g]_{\times}\right) = [g \circ h]_{\times}\ \ \forall g \in \mathcal{F}_{\times}(Y).$$

Demostración

(1) Sean $f,g \in \mathcal{F}_x(Y)$, $h_x(fg) = (fg) \circ h = (f \circ h)(g \circ h) = h_x(f) \circ h_x(g)$.
(2) Si $f \in h_x(\mathcal{E}_x(Y))$, $\exists g \in \mathcal{E}_x(Y) / f = h_x(g) = g \circ h$.
Como $g \in \mathcal{E}_x(Y)$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}(Y) / g(x) = e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in X$.
Luego $g \circ h \in \mathcal{F}_x(X)$, $f(x) = g \circ h(x) = e^{\varphi \circ h(x)}$ $\forall x \in X$ y $\varphi \circ h \in \mathcal{C}(X)$
entonces $f \in \mathcal{E}_x(X)$.
(3) Como consecuencia de (1) y (2), tenemos que $h^x : \mathcal{B}_x(Y) \to \mathcal{B}_x(X)$ es un homomorfismo de grupos cociente dado por $h^x\left([g]_x\right) = [g \circ h]_x$ $\forall g \in \mathcal{F}_x(Y)$ ■

II.1.18 Homomorfismo inducido de Bruschlinsky

El homomorfismo $h^x : \mathcal{B}_x(Y) \to \mathcal{B}_x(X)$ dado por $h^x\left([g]_x\right) = [g \circ h]_x$ $\forall g \in \mathcal{F}_x(Y)$; en donde $h \in \mathcal{C}(X,Y)$, se llama homomorfismo inducido de grupos de Bruschlinsky.

II.1.19 Teorema

1) $(\varphi \circ \psi)^x = \psi^x \circ \varphi^x$ si $(\varphi \circ \psi) \in \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z)$
2) $(id_X)^x = id_X^x$ en donde $id_X^x = id_{\mathcal{B}_x(X)}$.

Demostración

(1) Si $f \in \mathcal{F}_x(Z)$, $(\psi^x \circ \varphi^x)\left([f]_x\right) = \varphi^x\left(\psi^x\left([f]_x\right)\right) = \varphi^x\left([f \circ \psi]_x\right)$
$= [(f \circ \psi) \circ \varphi]_x = [f \circ (\psi \circ \varphi)]_x = (\varphi \circ \psi)^x\left([f]_x\right)$.

(2) Si $f \in \mathcal{F}_x(X)$, $(id_X)^x\left([f]_x\right) = [f \circ id_X]_x = [f]_x = id_{\mathcal{B}_x(X)}\left([f]_x\right)$ ■

II.1.20 Corolario

Sean $f,g \in \mathcal{C}(X,Y)$. Si $f \simeq g$ entonces $f^x = g^x$.

Demostración

Si $f,g \in \mathcal{C}(X,Y)$, $f^x, g^x : \mathcal{B}_x(Y) \to \mathcal{B}_x(X)$. Sea $f \simeq g$ y $\varphi \in \mathcal{F}_x(Y)$, $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$. Luego por $(II.1.16)$, $\varphi \circ f \sim_x \varphi \circ g$ en X, $[\varphi \circ f]_x = [\varphi \circ g]_x$ en X entonces $f^x\left([\varphi]_x\right) = [\varphi \circ f]_x = [\varphi \circ g]_x = g^x\left([\varphi]_x\right)$ ■

II.1.21 Teorema

$\mathcal{B}_x(X) \cong \mathcal{B}_x(Y)$ si $X \simeq Y$.

Demostración

Si $X \simeq Y$, $\exists (f,g) \in \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,X) / g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$.
Entonces $f^x \circ g^x = (g \circ f)^x = (id_X)^x = id_X^x$, $g^x \circ f^x = (f \circ g)^x = (id_Y)^x = id_Y^x$.
De donde resulta que $\mathcal{B}_x(Y) \cong \mathcal{B}_x(X)$ ■

II.1.22 Corolario

$\mathcal{B}_{\times}(X) \cong \mathcal{B}_{\times}(Y)$ si $X \approx Y$.

II.1.23 Teorema

$\mathcal{B}_{\times}(X) \cong 1$ si X es contractible.

Demostración

Si X es contractible, $\exists x \in X / X \simeq \{x\}$ entonces $\mathcal{B}_{\times}(X) \cong 1$ ■

II.1.24 Ejemplos de grupos de Brushlinsky triviales

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{I}^n, \mathbb{V}^\theta$ y $\mathbb{S}^n_+ (n > 1)$ tienen trivial grupo de Bruschlinsky ya que $\mathbb{R}^n, \mathbb{I}^n, \mathbb{V}^\theta$ y $\mathbb{S}^n_+ (n > 1)$ son contractibles.

II.1.25 Proposición

$\mathcal{C}\left(X, \mathbb{V}^\theta\right) \subset \mathcal{E}_{\times}(X)$.

Demostración

Si $f \in \mathcal{C}\left(X, \mathbb{V}^\theta\right)$ y como $e : \mathbb{V}^\theta_k \approx \mathbb{V}^\theta$, $e^{-1} \circ f \in C_{\times}(X)$ y $f(x) = e^{e^{-1} f(x)}$ $\forall x \in X$.
Entonces $f \sim_{\times} 1$ en X y de $(II.1.9)$ resulta que $f \in \mathcal{E}_{\times}(X)$ ■

II.1.26 Teorema

Sea $(f, \theta) \in \mathcal{F}_{\times}(X) \times \mathbb{V}$. Entonces $f \sim_{\times} 1$ en X si $\arg(f(x)) \neq \theta$ $\forall x \in X$.

Demostración

Si $\arg(f(x)) \neq \theta$ $\forall x \in X$, $f(X) \subset \mathbb{V}^\theta$.
Luego $f \in \mathcal{C}\left(X, \mathbb{V}^\theta\right)$ entonces $f \in \mathcal{E}_{\times}(X)$ ■

II.1.27 Corolario

$\mathcal{B}_{\times}(X) \cong 1$ si $\arg(f(x)) \neq \theta$ $\forall x \in X$; $\theta \in \mathbb{V}$ $\forall f \in \mathcal{F}_{\times}(X)$.

Demostración

Si $f \in \mathcal{F}_{\times}(X) / \arg(f(x)) \neq \theta$ $\forall x \in X$, $f \in \mathcal{E}_{\times}(X)$.
Entonces $\mathcal{F}_{\times}(X) = \mathcal{E}_{\times}(X)$, es decir, $\mathcal{B}_{\times}(X) \cong 1$ ■

II.1.28 Corolario

Sea $f \in \mathcal{F}_{\times}(X)$, entonces:

1) $|f| \sim_{\times} 1$ en X
2) $f \sim_{\times} 1$ en X si f es constante
3) $f \sim_{\times} 1$ en X si $\frac{f}{|f|}(X) \neq \mathbb{S}^1$
4) $f \sim_{\times} 1$ en X si f no es sobreyectiva.

Demostración

(1)
Como $\arg(|f(x)|) = 0 \ \forall x \in X, \ \exists \theta \neq 0$ en $\mathbb{V}/\arg(|f(x)|) \neq \theta \ \forall x \in X$. Entonces

$$|f| \in \mathcal{E}_{\times}(X).$$

(2) Si f es una constante, $\exists \theta \in \mathbb{V}/\arg(|f(x)|) \neq \theta \ \forall x \in X$. Entonces $|f| \in \mathcal{E}_{\times}(X)$.
(3) Si $\frac{f}{|f|}(X) \neq \mathbb{S}^1$, $\exists z \in \mathbb{S}^1/z \notin \frac{f}{|f|}(X)$. Luego $\exists \theta = \arg(z) \in \mathbb{V}/$

$$\arg\left(\frac{f}{|f|}(x)\right) \neq \theta \ \forall x \in X.$$

Luego $\frac{f}{|f|} \sim_{\times} 1$ en X y de (1), $|f| \sim_{\times} 1$ en X entonces $f = \frac{f}{|f|}|f| \sim_{\times} 1$ en X
(4) Claro ■

II.1.29 Corolario

Sean $f, g, h \in \mathcal{F}_{\times}(X)/f \sim_{\times} gh$ en X. Entonces:
(1) $f \sim_{\times} h$ en X si g es constante
(2) $f \sim_{\times} 1$ en X si g es constante y $h \sim_{\times} 1$ en X.

Demostración

(1) Si g es constante, $g \sim_{\times} 1$ en X se tiene que

$$f \sim_{\times} gh \sim_{\times} h \text{ en } X, \text{ es decir, } f \sim_{\times} h \text{ en } X.$$

(2) Si g es constante y por (1), $f \sim_{\times} h$ en X y como $h \sim_{\times} 1$ en X, entonces $f \sim_{\times} 1$ en X ■

II.1.30 Corolario

Sean $f, g \in \mathcal{F}_{\times}(X)/\frac{f}{g}(x) \neq \pm\left|\frac{f}{g}(x)\right| \ \forall x \in X$. Entonces $f \sim_{\times} g$ en X.

Demostración

Si $\frac{f}{g}(x) \neq \left|\frac{f}{g}(x)\right| \ \forall x \in X, \ \exists 0 \in \mathbb{V}/\arg\left(\frac{f}{g}(x)\right) \neq 0 \ \forall x \in X.$
Luego $\frac{f}{g} \sim_{\times} 1$ en X, de aquí $f \sim_{\times} g$ en X.
Si $\frac{f}{g}(x) \neq -\left|\frac{f}{g}(x)\right| \ \forall x \in X, \ \exists \pi \in \mathbb{V}/\arg\left(\frac{f}{g}(x)\right) \neq \pi \ \forall x \in X.$
Luego $\frac{f}{g} \sim_{\times} 1$ en X, de aquí $f \sim_{\times} g$ en X ■

II.1.31 Corolario

Sean $f, g \in \mathcal{F}_{\times}(X)/\frac{f}{g}(x) \neq \pm\left|\frac{f}{g}(x)\right| \ \forall x \in X.$
Entonces $f \sim_{\times} 1$ en $X \Leftrightarrow g \sim_{\times} 1$ en X.

Definición

Sea $f \in \mathcal{F}_{\times}(X)$ y $n \in \mathbb{Z}^{+}$. Definamos $f^{n}: X \to \mathbb{C}^{*}$ por $f^{n}(x) = f(x) \cdot f(x) ... \cdot f(x)$ $n-$veces $\forall x \in X$, entonces $f^{n} \in \mathcal{F}_{\times}(X)$ y $f^{0} = 1$.

II.1.32 Teorema

$f \sim_{\times} 1$ en X si $f^{n} \sim_{\times} 1$ en X para $n \in \mathbb{Z}^{+}$ dado.

Demostración

Si $f^{n} \sim_{\times} 1$ en X, $\exists \varphi \in \mathcal{C}_{\times}(X) / f^{n}(x) = e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in X$.

(1) Ponemos $g(x) = \frac{f(x)}{e^{\varphi(x)/n}}$ $\forall x \in X$.

Tenemos que $g^{n}(x) = 1$ $\forall x \in X$ lo cual implica que es raíz enésima de 1, es decir, uno de los números $e^{2\pi ki/n}$; $k = 0, 1, ..., n-1$.

(2) Pongamos $A_{k} = g^{-1}\left(e^{2\pi ki/n}\right)$.

Tenemos que $A_{0}, A_{1}, .., A_{n-1}$ son cerrados ajenos que cubre a X.

Definamos $\psi: X \to \mathbb{C}^{*}$ por $\psi(x) = \frac{\varphi(x)+2\pi ki}{n}$; $x \in A_{k}$.

Luego de (1) y (2), $f(x) = e^{\psi(x)}$ $\forall x \in X$ entonces $f \in \mathcal{E}_{\times}(X)$ ■

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^{1}).$$

Sean $f, g \in \mathcal{F}(X)$, se definen

$$(fg)(x) = f(x) g(x) \text{ y } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \forall x \in X.$$

La función uno de $\mathcal{F}(X)$ lo denotaremos por 1, es decir, $1(x) = 1$ $\forall x \in X$.

II.1.33 Proposición

$\mathcal{F}(X)$ con el producto usual es un grupo abeliano multiplicativo.

Demostración

El elemento neutro esta dado por 1 y el inverso de f por $\frac{1}{f}$ ■

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(X)$, se definen

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \text{ y } (\varphi - \psi)(x) = \varphi(x) - \psi(x) \ \forall x \in X.$$

La función cero de $\mathcal{C}(X)$ lo denotaremos por 0, es decir, $0(x) = 0 \ \forall x \in X$.

II.1.34 Proposición

$\mathcal{C}(X)$ con la suma usual es un grupo abeliano aditivo.

Demostración

El elemento neutro esta dado por 0 y el inverso de φ por $-\varphi$ ■

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{E}(X) = \left\{ f \in \mathcal{F}(X) ; \exists \varphi \in \mathcal{C}(X) / f(x) = e^{2\pi i \varphi(x)} \ \forall x \in X \right\}.$$

II.1.35 Proposición

$\mathcal{E}(X)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(X)$.

Demostración

Si $f, g \in \mathcal{E}(X)$, $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{C}(X) / f(x) = e^{2\pi i \varphi(x)}$, $g(x) = e^{2\pi i \psi(x)} \ \forall x \in X$.
Luego $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = e^{2\pi i(\varphi - \psi)(x)} \ \forall x \in X$ y $(\varphi - \psi) \in \mathcal{C}(X)$ entonces $\left(\frac{f}{g}\right) \in \mathcal{E}(X)$ ■

II.1.36 Grupo de Bruschlinsky-Eilenberg

El grupo $\mathcal{B}(X) = \frac{\mathcal{F}(X)}{\mathcal{E}(X)}$ se denomina grupo de Bruschlinsky-Eilenberg de X. Los elementos de $\mathcal{B}(X)$ se denotan por $[f]$ en donde $f \in \mathcal{F}(X)$ y se denominan clase de f. Si $f, g \in \mathcal{F}(X)$ y $[f] = [g]$ como elementos de $\mathcal{B}(X)$, se dice que f es exponencialmente equivalente a g y se denotara por $f \sim g$ es decir $\exists \varphi \in \mathcal{C}(X) /$ $f(x) = g(x) e^{2\pi i \varphi(x)} \ \forall x \in X$. Luego $f \sim 1$ significa que $f \in \mathcal{E}(X)$ (también $1 = [f]$ clase uno de $\mathcal{B}(X)$). Por brevedad, el símbolo $f \sim g$ en X significa que $[f] = [g]$ en donde $f, g \in \mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{B}(X) \cong 1$ significa que $\mathcal{B}(X)$ es el grupo trivial(es decir, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{E}(X)$).

Las propiedades del grupo de Bruschlinsky de $(II.1.6)$ hasta $(II.1.29)$ se cumplen también para las propiedades del grupo de Bruschlinsky-Eilenberg.

II.1.37 Proposición

$\mathcal{B}(x) \cong 1 \ \forall x \in X$ en donde $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(\{x\})$.

II.1.38 Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim g$ en X
2) $fh \sim gh$ en $X \ \forall h \in \mathcal{F}(X)$.

II.1.39 Corolario

Sean $f,g \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim g$ en X
2) $\frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$ en X
3) $\frac{f}{g} \sim 1$ en X.

II.1.40 Corolario

Sean $f \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim 1$ en X
2) $\frac{1}{f} \sim 1$ en X
3) $f \in \mathcal{E}(X)$
4) $\frac{1}{f} \in \mathcal{E}(X)$.

II.1.41 Proposición

Sea $f \in \mathcal{F}(X)$. Si $f \sim_{\times} 1$ en X entonces $f \simeq 1$.

II.1.42 Proposición

Sea $f \in \mathcal{F}(X)$. Si $f \simeq 1$ entonces $f \sim 1$ en X.

Demostración

Sea $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^*$ la inclusión y si $f \simeq 1$, $f = i \circ f \simeq i \circ 1 = 1$.
Por $(II.1.12)$, $f \sim_{\times} 1$ en X, $\exists \varphi = (h,g) \in \mathcal{C}_{\times}(X)/f(x) = e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in X$.
Luego $1 = e^{h(x)}$ $\forall x \in X$ entonces $\exists \psi = \frac{1}{2\pi} g \in \mathcal{C}(X)/f(x) = e^{2\pi i \psi(x)}$ $\forall x \in X$,
es decir, $f \sim 1$ en X ■

II.1.43 Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim 1$ en X
2) $f \simeq 1$.

II.1.44 Proposición

Sean $f,g \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \simeq g$
2) $fh \simeq gh$ $\forall h \in \mathcal{F}(X)$.

II.1.45 Corolario

Sean $f,g \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \simeq g$
2) $\frac{1}{f} \simeq \frac{1}{g}$
3) $\frac{f}{g} \simeq 1$.

II.1.46 Corolario

Sea $f \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \simeq 1$
2) $\frac{1}{f} \simeq 1$.

II.1.47 Lema

Sean $f, g \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim g$ en X
2) $f \simeq g$.

Si $(h, f) \in \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{F}(Y)$, la composición $f \circ g \in \mathcal{F}(X)$ nos induce un homomorfismo $h_* : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ de la siguiente manera

$$h_*(g) = g \circ h \ \ \forall g \in \mathcal{F}(Y).$$

II.1.48 Proposición

1) h_* es un homomorfismo
2) $h_*(\mathcal{E}(Y)) \subset (\mathcal{E}(X))$
3) h_* induce el homomorfismo $h^* : \mathcal{B}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ dado por

$$h^*([g]) = [g \circ h] \ \ \forall g \in \mathcal{F}(Y).$$

II.1.49 Homomorfismo inducido de Bruschlinsky-Eilenberg

El homomorfismo

$$h^* : \mathcal{B}(Y) \to \mathcal{B}(X)$$

dado por $h^*([g]) = [g \circ h] \ \ \forall g \in \mathcal{F}(Y)$ en donde $h \in \mathcal{C}(X, Y)$, se llama homomorfismo inducido de grupos de Bruschlinsky-Eilenberg.

II.1.50 Teorema

1) $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ si $(\varphi \circ \psi) \in \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z)$
2) $(id_X)^* = id_X^*$ en donde $id_X^* = id_{\mathcal{B}(X)}$.

Existe un isomorfismo entre el grupo de Bruschlinsky y el grupo de Bruschlinsky-Eilenberg.

II.1.51 Teorema

$$\mathcal{B}_\times(X) \cong \mathcal{B}(X).$$

Demostración

Definamos $\varphi : \mathcal{B}_{\times}(X) \to \mathcal{B}(X), \psi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}_{\times}(X)$ por $\varphi\left([f]_{\times}\right) = \left[\frac{f}{|f|}\right]$ y $\psi([g]) = [g]_{\times}$, veamos que φ estan bien definida. En esfecto, Si $f \sim_{\times} h$ en X, $\exists \phi \in \mathcal{C}_{\times}(X) / f(x) = h(x) e^{\phi(x)}$ $\forall x \in X$ y pongamos $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, $|f(x)| = |g(x)| e^{\phi_1(x)}$ $\forall x \in X$.
Luego $\frac{f(x)}{|f(x)|} = \frac{g(x)}{|g(x)|} e^{i\phi_2(x)}$ $\forall x \in X$, defino $\sigma = \frac{1}{2\pi}\phi_2 \in \mathcal{C}(X)$ entonces $\frac{f}{|f|} \sim \frac{g}{|g|}$ en X.
Análogamente ψ estan bien definida, entonces $\varphi \circ \psi = id_X^*, \varphi \circ \psi = id_X^{\times}$.
Por lo tanto $\mathcal{B}_{\times}(X) \cong \mathcal{B}(X)$.

Definición

Diremos que $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ es un levantamiento de $f \in \mathcal{F}(X)$ si $f(x) = e^{2\pi i \varphi(x)}$ $\forall x \in X$.

II.1.52 Proposición

Sea $f \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:

1) $f \sim 1$ en X
2) f tiene levantamiento.

Demostración

Si $f \sim 1$ en X, $\exists \varphi \in \mathcal{C}(X) / f(x) = e^{2\pi i \varphi(x)}$ $\forall x \in X$ entonces $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ es un levantamiento de f.
Inversamente si f tiene levantamiento en $\mathcal{C}(X)$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}(X)$ / $f(x) = e^{2\pi i \varphi(x)}$ $\forall x \in X$ entonces $f \sim 1$ en X ■

II.1.53 Teorema

Sean X e Y espacios conexos, localmente conexos por caminos y $f \in \mathcal{F}(X \times Y)$. Sea $(a, b) \in X \times Y$ tal que $f_{|X \times \{b\}}$ y $f_{|\{a\} \times Y}$ tiene levantamiento en $\mathcal{C}(X)$ entonces f también tiene levantamiento.

Veáse ([17]; 2.27, 42).

II.1.54 Lema

Sean X e Y espacios conexos, localmente conexos por caminos y $f \in \mathcal{F}(X \times Y)$. Si $(a, b) \in X \times Y / f \sim 1$ en $X \times \{b\}$ y $f \sim 1$ en $\{a\} \times Y$ entonces $f \sim 1$ en $X \times Y$.

II.1.55 Teorema(Producto de grupos de Bruschlinsky-Eilenberg)

Si X e Y son espacios conexos, localmente conexos por caminos entonces $\mathcal{B}(X \times Y) \cong \mathcal{B}(X) \oplus \mathcal{B}(Y)$.

Demostración

Sea $(a,b) \in X \times Y$. Sean $i_b : X \times \{b\} \to X \times Y$, $i_a : \{a\} \times X \to X \times Y$ las inclusiones y $p_b : X \times Y \to X \times \{b\}$, $p_a : X \times Y \to \{a\} \times X$ las proyecciones. Luego $p_b \circ i_b (x,b) = p_b (x,b) = (x,b) = id_{X\times\{b\}} (x,b)$ y $p_a \circ i_a (a,y) = p_a (a,y) = (a,y) = id_{\{a\}\times X} (a,y)$ entonces $i_b^* \circ p_b^* = id^*_{X\times\{b\}}$ y $i_a^* \circ p_a^* = id^*_{\{a\}\times X}$.
Luego i_b^* y i_a^* son epimorfismos.
Definamos el epimorfismo $(i_b^*, i_a^*) : \mathcal{B}(X \times Y) \to \mathcal{B}(X \times \{b\}) \oplus \mathcal{B}(\{a\} \times Y)$ por $(i_b^*, i_a^*)([f]) = (i_b^*([f]), i_a^*([f])) = \left(\left[f_{|X\times\{b\}}\right], \left[f_{|\{a\}\times Y}\right]\right)$ en donde $f \in \mathcal{F}(X \times Y)$.
Veamos que (i_b^*, i_a^*) es un monomorfismo.

Sea $f \in \mathcal{F}(X \times Y)$ con $f \sim 1$ en $X\times\{b\}$ y $f \sim 1$ en $\{a\}\times Y$ entonces por el lema anterior $f \sim 1$ en $(X \times Y)$. Como $X \times \{b\} \approx X$ y $\{a\} \times Y \approx Y$ se sigue que $\mathcal{B}(X \times Y) \cong \mathcal{B}(X) \oplus \mathcal{B}(Y)$ ■

II.1.56 Corolario(Producto de grupos de Bruschlinsky)

Si X e Y son espacios conexos, localmente conexos por caminos entonces $\mathcal{B}_\times(X \times Y) \cong \mathcal{B}_\times(X) \oplus \mathcal{B}_\times(Y)$.

II.1.57 Teorema

Sea X un espacio conexo. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_\times(X) / e^{\varphi(x)} = e^{\psi(x)}$ $\forall x \in X$, $\exists k \in \mathbb{Z} / \varphi(x) = \psi(x) + 2\pi k i$ $\forall x \in X$.

Demostración

Si $e^{\varphi(x)} = e^{\psi(x)}$ $\forall x \in X$, $\exists k_x \in \mathbb{Z} / \varphi(x) = \psi(x) + 2\pi k_x i$ $\forall x \in X$.
Luego $(\varphi - \psi) : X \to 2\pi i\mathbb{Z}$ es continua y como X es conexo, entonces $(\varphi - \psi)$ debe ser constante ■

II.1.58 Teorema

Sean A, B subconjuntos abiertos o cerrados, $A \cap B$ conexo y $f \in \mathcal{F}_\times(A \cup B)$. Si $f \sim_\times 1$ en A y $f \sim_\times 1$ en B entonces $f \sim_\times 1$ en $A \cup B$.

Demostración

Si $f \sim_\times 1$ en A y $f \sim_\times 1$ en B, $\exists (\varphi, \psi) \in C_\times(A) \times C_\times(B) /$ $f(x) = e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in A$, $f(x) = e^{\psi(x)}$ $\forall x \in B$. Por consiguiente $e^{\varphi(x)} = e^{\psi(x)}$ $\forall x \in A \cap B$ y como $A \cap B$ es conexo, $\exists k \in \mathbb{Z} /$

$$\varphi(x) = \psi(x) + 2\pi k i \quad \forall x \in A \cap B.$$

Definamos $h : A \cup B \to \mathbb{C}$ por

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ \psi(x) + 2\pi k i & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es abierto en X ya que $f \in \mathcal{C}(A_n, Y)$.

Por lo tanto $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ■

II.1.63 Teorema(Whyburn)

Sean $A_n \subset A_{n+1}^{\circ}$, $A_n \subset X$ conexo $\forall n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Si $\mathcal{B}_x(A_n) \cong 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{B}_x(X) \cong 1$.

Demostración

Si $f \in \mathcal{F}_x(X)$, $f_n = f_{|A_n} \in \mathcal{F}_x(A_n)$. Si $\mathcal{F}_x(A_n) = \mathcal{E}_x(A_n)$, $\exists \varphi_n /$ $f_n(x) = e^{\varphi_n(x)}$ $\forall x \in A_n$. Además $f_{n+1|A_n} = f_n$, entonces $e^{\varphi_{n+1}(x)} = e^{\varphi_n(x)}$ en A_n. Luego $\exists k_n \in \mathbb{Z} / \varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + 2\pi k_n i$ $\forall x \in A_n$.
Pongamos $\psi_{n+1} = \varphi_{n+1} - 2\pi k_n i$, $f_{n+1} = e^{\psi_{n+1}}$ y $\psi_{n+1|A_n} = f_n$. Defino $\psi : X \to \mathbb{C}$ por $\psi(x) = \psi_n(x)$ $\forall x \in A_n$, entonces $f(x) = e^{\psi_n(x)}$ $\forall x \in X$. Como $A_n \subset A_{n+1}^{\circ}$, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $\psi_{n+1|A_n} = \psi_n$ es continua, entonces $\psi \in \mathcal{C}_x(X)$.
Por lo tanto $f \in \mathcal{E}_x(X)$ ■

II.1.64 Ejemplo

Sea $\mathbb{R}^{\infty} = \{(x_1, x_2, ..., x_i, ...); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ...\}$, por el teorema de Whyburn tenemos que $\mathcal{B}_x(\mathbb{R}^{\infty}) \cong 1$.

Observación

Sea $G = \{z \in \mathbb{C}; z \neq -|z|\}$ entonces G no contiene el eje no positivo pues $z = xe^{i\pi}$; $x \geq 0$, $|z| = x$, y de aquí $-|z| = -x$, entonces $xe^{i\pi} = -|z|$.

II.1.65 Teorema

Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $f \in \mathcal{E}_x(A)$ entonces $\exists G \in \mathcal{V}_X(A) / f \in \mathcal{E}_x(G)$.

Demostración

Si $f \in \mathcal{E}_x(A)$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}_x(A) / f(x) = e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in A$. Como $\mathbb{C}$ es sólido, $\exists \psi \in \mathcal{C}_x(X) / \psi_{|A} = \varphi$. Luego $G = \left\{x \in X; \frac{f(x)}{e^{\psi(x)}} \neq -\left|\frac{f(x)}{e^{\psi(x)}}\right|\right\}$ es abierto y $G \supset A$; pues $f(x) = e^{\psi(x)}$ $\forall x \in A$. Se tiene que $\arg\left(\frac{f}{e^{\psi}}(x)\right) \neq \pi$ $\forall x \in G$, entonces por $(II.1.26)$, $\frac{f}{e^{\psi}} \in \mathcal{E}_x(G)$. Como $e^{\psi} \sim_x 1$ en G se sigue que $f \in \mathcal{E}_x(G)$ ■

II.1.66 Corolario

Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $f, g \in \mathcal{F}_x(X)$. Si $f \sim_x g$ en A entonces $\exists G \in \mathcal{V}_X(A) / f \sim_x g$ en G.

Demostración

Si $f \sim_{\times} g$ en A, $\frac{f}{g} \sim_{\times} 1$ en A y por el teorema anterior, $\exists G \in \mathcal{V}_X(A)$ / $\frac{f}{g} \sim_{\times} 1$ en G. Luego $f \sim_{\times} g$ en G ■

II.1.67 Teorema

Sea A, B dos subconjuntos cerrados de un espacio normal X y $f \in \mathcal{F}_{\times}(A)$.
Si $f \in \mathcal{E}_{\times}(A \cap B)$, $\exists g \in \mathcal{F}_{\times}(A \cup B) / g \in \mathcal{E}_{\times}(B)$ y $g_{|A} = f$.

Demostración

Si $f \in \mathcal{E}_{\times}(A \cap B)$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}_{\times}(A \cap B) / f(x) = e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in A \cap B$.
Como $\mathbb{C}$ es sólido, $\exists \psi \in \mathcal{C}_{\times}(B) / \psi_{|A \cap B} = \varphi$. Definamos $g : A \cup B \to \mathbb{C}^*$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \in A \\ e^{\psi(x)} & , \ x \in B \end{cases}$$

Entonces $g \in \mathcal{F}_{\times}(A \cup B)$ y $g \in \mathcal{E}_{\times}(B)$, $g_{|A} = f$ ■

II.1.68 Teorema

Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal X.
Si $f \in \mathcal{F}_{\times}(A)$, $\exists G \in \mathcal{V}_X(A)$ y $g \in \mathcal{F}_{\times}(G) / g_{|A} = f$.

Demostración

Sea $f \in \mathcal{F}_{\times}(A)$ y como $\mathbb{C}^*$ es sólido por vecindades, $\exists G \in \mathcal{V}_X(A)$ y $g \in \mathcal{F}_{\times}(G) / g_{|A} = f$, por $(I.2.26)$ ■

II.1.69 Teorema

Sea A un subconjunto cerrado de un espacio de normal X. Si
$f \in \mathcal{E}_{\times}(A)$, $\exists g \in \mathcal{E}_{\times}(X) / g_{|A} = f$.

Demostración

Si $f \in \mathcal{E}_{\times}(A)$, $\exists \psi \in \mathcal{C}_{\times}(A) / f(x) = e^{\psi(x)}$ $\forall x \in A$. Como $\mathbb{C}$ es sólido,
$\exists \varphi \in \mathcal{C}_{\times}(X) / g_{|A} = \psi$. Luego $g = e^{\varphi} \in \mathcal{E}_{\times}(X)$ y $g_{|A} = f$ ■

II.1.70 Definición

Definamos la función $\overline{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ por $\overline{e}(t) = e^{2\pi i t}$.
Por $([21]; 53-54)$, $\overline{e}$ es continua y sobreyectiva.
Además $\overline{e} : (\mathbb{R}, \cdot) \to (\mathbb{S}^1, +)$ es un homomorfismo de grupos y $\ker(\overline{e}) = \mathbb{Z}$.

II.1.71 Grado en $\mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$ y como $\overline{e} \in \mathcal{F}(\mathbb{I})$, $f \circ \overline{e} \in \mathcal{F}(\mathbb{I})$. Por $([3], 5.3, 194)$,

$\exists! \varphi \in C(\mathbb{I}) / f \circ \overline{e}(t) = \overline{e} \circ \varphi(t) \ \ \forall t \in \mathbb{I}$.
Luego $f \circ \overline{e}(0) = f \circ \overline{e}(1)$ entonces $e^{2\pi i g(0)} = e^{2\pi i g(1)}$, de esto se desprende que $g(1) - g(0) = k$ para algún k entero.
Al entero k se le llama grado de f y denotaremos $\deg(f)$.

II.1.72 Teorema

Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$. Entonces $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

Demostración

Sean $\varphi, \psi \in C(\mathbb{I}) / f \circ \overline{e} = \overline{e} \circ \varphi, g \circ \overline{e} = \overline{e} \circ \psi$. Luego
$(fg) \circ \overline{e} = (f \circ \overline{e})(g \circ \overline{e}) = (\overline{e} \circ \varphi)(\overline{e} \circ \psi) = \overline{e}(\varphi + \psi)$.
Como $\varphi, \psi \in C(\mathbb{I})$, $(\varphi + \psi) \in C(\mathbb{I})$ entonces

$$\deg(fg) = (\varphi + \psi)(1) - (\varphi + \psi)(0) = \varphi(1) + \psi(1) - \varphi(0) - \psi(0) = (\varphi(1) - \varphi(0)) + (\psi(1) - \psi(0)) = \deg(f) + \deg(g) \ \blacksquare$$

II.1.73 Corolario

Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$. Entonces:

1) $\deg(1) = 0$
2) $\deg\left(\frac{1}{f}\right) = -\deg(f)$
3) $\deg\left(\frac{f}{g}\right) = \deg(f) - \deg(g)$.

Demostración

(1) $\deg(1) = \deg(1 \cdot 1) = \deg(1) + \deg(1) = 0$. Luego $\deg(1) = 0$

(2) $0 = \deg(1) = \deg\left(f \cdot \frac{1}{f}\right) = \deg(f) + \deg\left(\frac{1}{f}\right)$. Luego

$$\deg\left(\frac{1}{f}\right) = -\deg(f).$$

(3)

$$\deg\left(\frac{f}{g}\right) = \deg\left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = \deg(f) + \deg\left(\frac{1}{g}\right) = \deg(f) - \deg(g)$$

Luego $\deg\left(\frac{f}{g}\right) = \deg(f) - \deg(g)$ $\blacksquare$

II.1.74 Teorema

$\deg(id^n_{\mathbb{S}^1}) = n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Demostración

Si $n \in \mathbb{Z}$, definamos $g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ por $g(t) = nt \ \forall t \in \mathbb{I}$.
Luego $g \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ y $(id^n \circ \overline{e})(t) = id^n(e^{2\pi nti}) = e^{2\pi nti} = (\overline{e} \circ g)(t) \ \forall t \in \mathbb{I}$, entonces

$$\deg(id^n_{\mathbb{S}^1}) = g(1) - g(0) = n - 0 = n \ \blacksquare$$

II.1.75 Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$. Si $f \sim g$ en $\mathbb{S}^1$ entonces $\deg(f) = \deg(g)$.

Demostración

Sea $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{I}) / g \circ \overline{e} = \overline{e} \circ \psi$ y $\deg(g) = \psi(1) - \psi(0)$. Si $f \sim g$ en $\mathbb{S}^1$, $\exists h \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) / f = g(\overline{e} \circ h)$. Luego $f \circ \overline{e} = (g(\overline{e} \circ h)) \circ \overline{e} = (g \circ \overline{e})(\overline{e} \circ h \circ \overline{e}) = (\overline{e} \circ \psi)(\overline{e} \circ h \circ \overline{e}) = \overline{e}(\psi)\overline{e}(h \circ \overline{e}) = \overline{e}(\psi + (h \circ \overline{e}))$ y como $\psi, (h \circ \overline{e}) \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$, $(\psi + (h \circ \overline{e})) \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ entonces $\deg(f) = (\psi + (h \circ \overline{e}))(1) - (\psi + (h \circ \overline{e}))(0) = \psi(1) + (h \circ \overline{e})(1) - \psi(0) - (h \circ \overline{e})(0) = \psi(1) - \psi(0) = \deg(g)$ $\blacksquare$

II.1.76 Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$. Son equivalentes:

1) $f \sim 1$ en $\mathbb{S}^1$
2) $\deg(f) = 0$.

Demostración

Si $f \sim 1$ en $\mathbb{S}^1$, entonces $\deg(f) = \deg(1) = 0$.
Inversamente si $\deg(f) = 0$ y por $([17]; 2.22, 34 - 35), (II.1.52)$ se tiene que $f \sim 1$ en $\mathbb{S}^1$ $\blacksquare$

II.1.77 Teorema

Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$. Son equivalentes:

1) $f \sim g$ en $\mathbb{S}^1$
2) $\deg(f) = \deg(g)$.

Demostración

Si $\deg(f) = \deg(g) \Rightarrow \deg\left(\frac{f}{g}\right) = \deg(f) - \deg(g) = 0$
entonces $\frac{f}{g} \sim 1$ en $\mathbb{S}^1 \Rightarrow f \sim g$ en $\mathbb{S}^1$ $\blacksquare$

El grado define un isomorfismo de grupos $grad : \mathcal{B}(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$ dado por $grad(f) = \deg(f) \ \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$.

II.1.78 Teorema

$grad : \mathcal{B}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Luego $h \in \mathcal{C}_{\times}(A \cup B)$ y $f(x) = e^{h(x)}$ $\forall x \in A \cup B$, entonces $f \in \mathcal{E}_{\times}(A \cup B)$, es decir, $f \sim_{\times} 1$ en $A \cup B$ ■

II.1.59 Corolario

Sean A, B subconjuntos abiertos o cerrados tal que $A \cap B$ es conexo. Si $\mathcal{B}_{\times}(A) \cong 1 \cong \mathcal{B}_{\times}(B)$ entonces $\mathcal{B}_{\times}(A \cup B) \cong 1$.

Demostración

Si $f \in \mathcal{F}_{\times}(A \cup B)$, $f \in \mathcal{F}_{\times}(A) = \mathcal{E}_{\times}(A)$, $f \in \mathcal{F}_{\times}(B) = \mathcal{E}_{\times}(B)$ y por el teorema anterior se tiene que $f \in \mathcal{E}_{\times}(A \cup B)$ ■

II.1.60 Proposición

$\mathcal{B}_{\times}(\mathbb{S}^n) \cong 1$ $\forall n > 1$.

Demostración

Para $n > 0$, tenemos que $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n_+ \cup \mathbb{S}^n_-, \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{S}^n_-$ es conexo y $\mathcal{B}_{\times}\left(\mathbb{S}^n_+\right) \cong 1 \cong \mathcal{B}_{\times}\left(\mathbb{S}^n_-\right)$ entonces $\mathcal{B}_{\times}(\mathbb{S}^n) \cong 1$ ■

Para $n \geq 2$, sean $\mathbb{S}^{n_j}$ esferas y sea $p \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathbb{S}^{n_j}$. En $X = \bigcup_{j=1}^{k} \mathbb{S}^{n_j}$ definamos la relación $\sim$ como sigue: $x \sim p$ si $x = p$, entonces $\sim$ es de equivalencia.
El espacio cociente

$$\bigvee_{j=1}^{k} \mathbb{S}_j^{n_j} = \frac{X}{\sim}$$

se llama espacio Bouquet(ramillete).

II.1.61 Corolario

$$\mathcal{B}_{\times}\left(\bigvee_{j=1}^{k} \mathbb{S}_j^{n_j}\right) \cong 1 \quad \forall n \geq 2.$$

II.1.62 Proposición

Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Si $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$; $A_n \subset A^{\circ}_{n+1}$ y $f \in \mathcal{C}(A_n, Y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Demostración

Si $B \subset Y$ es abierto, entonces

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap X = f^{-1}(B) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{\circ}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B) \cap A^{\circ}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}_{|A^{\circ}_n}(B)$$

Demostración

Por $(II.1.77)$, el *grad* esta bien definido y de $(II.1.72)$, el *grad* es un homomorfismo. De $(II.1.74)$ el *grad* es suryectivo y por $(II.1.77)$ el *grad* es monomorfismo ■

II.1.79 Corolario

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$, $\exists k \in \mathbb{Z}/f \sim id_{\mathbb{S}^1}^k$ en $\mathbb{S}^1$.

Demostración

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$ y por $(II.1.78)$, $\exists n = \deg(f) \in \mathbb{Z}$. Luego por $(II.1.74)$,

$$\deg(f) = n = \deg(id_{\mathbb{S}^1}^n)$$

entonces por $(II.1.77)$ se tiene que $\exists k \in \mathbb{Z}/f \sim id_{\mathbb{S}^1}^k$ en $\mathbb{S}^1$ ■

II.2 Una caracterización de los espacios unicoherentes

Sea X un espacio conexo. Se dice que X es unicoherente si para cada par de cerrados conexos A, B tal que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.

II.2.1 Ejemplos

Los intervalos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ son unicoherentes.

II.2.2 Teorema

$\mathbb{S}^1$ no es unicoherente.

Demostración

Como $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1_+ \cup \mathbb{S}^1_-$ y $\mathbb{S}^1_+ \cap \mathbb{S}^1_-$ no es conexo, $\mathbb{S}^1$ no es unicoherente ■

II.2.3 Teorema

La unicoherencia es invariante bajo homeomorfismo.

II.2.4 Teorema

Sea X conexo. Si X es normal y $B_x(X) \cong 1$ entonces X es unicoherente.

Demostración

Asumamos que X no es unicoherente. Sean A, B cerrados conexos no vacíos tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo. Como $A \cap B$ no es conexo, tenemos que $A \cap B = P \cup Q; P, Q$ son cerrados disjuntos no vacíos. Por el corolario de Urysohn, $\exists (\varphi, \psi) \in C(A, [0, \pi i]) \times C(B, [\pi i, 2\pi i]) / \varphi(P) = \{0\}, \varphi(Q) = \{\pi i\}$ y $\psi(P) = \{2\pi i\}$, $\psi(Q) = \{\pi i\}$. De esta manera podemos definir $f : X \to \mathbb{C}^*$ por

$f(x) = e^{\varphi(x)}\ \forall x \in A$ y $f(x) = e^{\psi(x)}\ \forall x \in B$. Luego $f \in \mathcal{F}_{\times}(X) = \mathcal{E}_{\times}(X)$, $\exists h \in \mathcal{C}_{\times}(X) / f(x) = e^{h(x)}\ \forall x \in X$ y como A, B son conexos y por $(II.1.57)$, $\exists k, j \in \mathbb{Z} / h(x) = \varphi(x) + 2\pi k i\ \forall x \in A$ y $h(x) = \psi(x) + 2\pi j i\ \forall x \in B$. Entonces $\varphi(x) + 2\pi k i = \psi(x) + 2\pi j i\ \forall x \in A \cap B = P \cup Q$.
Para Q, $\pi i + 2\pi k i = \pi i + 2\pi j i$ luego $k = j$ y para P, $2\pi k i = \pi i + 2\pi j i$ y como $k = j$, $\pi i = 0$ esto es una contradición ■

II.2.5 Corolario

$\mathbb{R}^n, \mathbb{I}^n$ y $\mathbb{S}^n\ (n > 1)$ son unicoherentes.

II.2.6 Corolario

$\mathbb{S}^1$ no es contractible.

Demostración

Si es contractible, $\mathcal{B}_{\times}(\mathbb{S}^1) \cong 1$. Por $(II.2.4)$, $\mathbb{S}^1$ es unicoherente, esto contradice a $(II.2.2)$ ■

II.2.7 Teorema

$id_{\mathbb{S}^1} \notin \mathcal{E}_{\times}(\mathbb{S}^1)$.

Demostración

Si $id_{\mathbb{S}^1} \sim_{\times} 1$ en $\mathbb{S}^1$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}_{\times}(\mathbb{S}^1) / z = e^{\varphi(z)}\ \forall z \in \mathbb{S}^1$. Sea $f \in \mathcal{F}_{\times}(\mathbb{S}^1)$, $f(z) = id_{\mathbb{S}^1}(f(z)) = e^{\varphi(f(z))} = e^{(\varphi \circ f)(z)}\ \forall z \in \mathbb{S}^1$ entonces $\exists \psi = (\varphi \circ f) \in \mathcal{C}_{\times}(\mathbb{S}^1) /$ $f(z) = e^{\psi(z)}\ \forall z \in \mathbb{S}^1$, es decir, $f \in \mathcal{E}_{\times}(\mathbb{S}^1)$ entonces $\mathcal{B}_{\times}(\mathbb{S}^1) \cong 1$. Por $(II.2.4)$, $\mathbb{S}^1$ es unicoherente, esto contradice a $(II.2.2)$ ■

II.2.8 Proposición

X es unicoherente si X es sólido binormal.

Demostración

Si X es sólido binormal, X es contractible por $(I.2.11)$ entonces por $(II.1.23)$ $B_{\times}(X) \cong 1$.
Por la solidez y la paracompacidad de X, X es conexo y normal entonces X es unicoherente por $(I.2.4)$ ■

II.2.9 Corolario

X es unicoherente si X es sólido, localmente conexo por camino cerrado de un paracompacto Y.

Demostración

Sea X cerrado de un paracompacto Y, entonces X es paracompacto. Ahora X es paracompacto y sólido entonces por $(I.2.22)$, $X \times \mathbb{I}$ es contráctil de donde $B_{\times}(X \times \mathbb{I}) \cong 1$.
Como $X, \mathbb{I}$ son conexos por caminos y por la propiedad del producto de grupos de Bruschlinsky tenemos que $B_{\times}(X) \cong 1$ ya que $B_{\times}(\mathbb{I}) \cong 1$.
Ahora X es conexo, normal y $B_{\times}(X) \cong 1$, X es unicoherente ■

II.2.10 Corolario

X es unicoherente si X es sólido paracompacto.

Demostración

Si X es sólido paracompacto y por $(I.2.17)$, $X \times \mathbb{I}$ es paracompacto y por $(I.2.21^{*})$, $X \times \mathbb{I}$ es binormal. Ahora por $(I.2.11)$, X es contráctil y por $(II.1.23)$, $B_{\times}(X) \cong 1$ entonces se sigue de $(I.3.4)$ que X es unicoherente ■

II.2.11 Proposición

Sea X conexo y localmente conexo. Si X es unicoherente entonces $\mathcal{B}_{\times}(X) \cong 1$.
Veáse $([18]; 2.27, 42)$.

II.2.12 Teorema

Sea X un espacio normal, conexo y localmente conexo. Son equivalentes:
1) X es unicoherente
2) $\mathcal{B}_{\times}(X) \cong 1$.

II.2.13 Corolario

La unión $A \cup B$ de dos subconjuntos cerrados o abiertos, localmente conexos, unicoherentes es un subconjunto unicoherente; en donde $A \cap B$ es conexo y $A \cup B$ es normal.

Demostración

Por el teorema anterior, $\mathcal{B}_{\times}(A) \cong 1 \cong \mathcal{B}_{\times}(B)$ y por $(II.1.59)$, $\mathcal{B}_{\times}(A \cup B) \cong 1$.
Se sigue del teorema anterior que $A \cup B$ es unicoherente ■

II.2.14 Corolario

Todo retracto A de un espacio normal X, localmente conexo y unicoherente, es unicoherente.

Demostración

Sea $r \in \mathcal{C}(X, A)$ la retracción, $r^{\times} : \mathcal{B}_{\times}(A) \to \mathcal{B}_{\times}(X)$. Como $r_{|A} = id_A$, $r^{\times}$ es

monomorfismo. Del teorema anterior $\mathcal{B}_x(X) \cong 1$; además A es conexo, localmente conexo y normal por ser retracción entonces r^x es epimorfismo, luego $\mathcal{B}_x(A) \cong 1$. Por la retracción, A es cerrado y por el teorema anterior, A es unicoherente ■

II.2.15 Teorema

El producto cartesiano de dos espacios localmente conexos, localmente conexo por caminos, normales y unicoherentes es unicoherente.

Demostración

Sean X e Y dos espacios localmente conexos, localmente conexo por caminos, normales y unicoherentes. Por el teorema anterior, $\mathcal{B}_x(X) \cong 1 \cong \mathcal{B}_x(Y)$ y por la propiedad producto de grupos de Bruschlinsky se tiene que $\mathcal{B}_x(X \times Y) \cong 1$. Se sigue del teorema anterior que $X \times Y$ es unicoherente ■

II.2.16 Teorema

Sean X e Y normales, localmente conexo y conexos. Si $X \simeq Y$ y X es unicoherente, Y es unicoherente.

Demostración

Si $X \simeq Y$ y por $(II.1.21)$, $\mathcal{B}_x(X) \cong \mathcal{B}_x(Y)$. Por $(II.2.12)$, $\mathcal{B}_x(X) \cong 1$ entonces $\mathcal{B}_x(Y) \cong 1$ y por $(II.2.12)$ se sigue que Y es unicoherente ■

II.2.17 Teorema

$\mathbb{C}^*$ no es unicoherente.

Demostración

Por $(I.1.11)$, $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{S}^1$ y si $\mathbb{C}^*$ es unicoherente, entonces $\mathbb{S}^1$ es unicoherente lo cual contradice a $(II.2.2)$ ■

II.2.18 Corolario

$id_{\mathbb{C}^*} \notin \mathcal{E}_x(\mathbb{C}^*)$.

Demostración

Si $id_{\mathbb{C}^*} \sim_x 1$ en $\mathbb{C}^*$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}_x(\mathbb{C}^*)/z = e^{\varphi(z)}\ \forall z \in \mathbb{C}^*$. Sea $f \in \mathcal{F}_x(\mathbb{C}^*)$ $f(z) = id_{\mathbb{C}^*}(f(z)) = e^{\varphi(f(z))} = e^{(\varphi \circ f)(z)}\ \forall z \in \mathbb{C}^*$ entonces $\exists \psi = (\varphi \circ f) \in \mathcal{C}_x(\mathbb{C}^*)/$ $f(z) = e^{\psi(z)}\ \forall z \in \mathbb{C}^*$, es decir, $f \in \mathcal{E}_x(\mathbb{C}^*)$ entonces $\mathcal{B}_x(\mathbb{C}^*) \cong 1$. Por $(II.2.4)$, $\mathbb{C}^*$ es unicoherente, esto contradice al teorema anterior ■

Capítulo III

Teoremas Fundamentales de Eilenberg

III.1 Teorema Fundamentales de Eilenberg(Primera y segunda forma)
Una transformación fraccionaria(bilineal) es una transformación de la forma $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $cz\neq -d\ \forall z\in\mathbb{C}$ donde $ad\neq bc; a,b,c,d\in\mathbb{C}$.

III.1.1 Proposición
f es un homeomorfismo.

Denotemos la compactificación unipuntual de $\mathbb{C}$ por $\mathbb{C}^\infty$, es decir, $\mathbb{C}^\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ y adoptamos las reglas formales
$\frac{z}{0}=\infty$, $\frac{z}{\infty}=0\ \forall z\neq 0$ en $\mathbb{C}$ y $\infty-z=\infty\ \forall z\in\mathbb{C}$.
A $\mathbb{C}^\infty$ también se le llama el plano $\mathbb{C}$ ampliado con el punto infinito(llamado plano de Gauss); topológicamente $\mathbb{C}^\infty$ no difiere de la superficie trimensional $\mathbb{S}^2$.

III.1.2 Observación
1) $A\subset\mathbb{C}^\infty$ es cerrado $\Leftrightarrow A=F; F\subset\mathbb{C}$ es compacto o $A=F\cup\{\infty\}$; F es cerrado
2) $A\subset\mathbb{C}^\infty$ es abierto $\Leftrightarrow A=F; F\subset\mathbb{C}$ es abierto o $\mathbb{C}^\infty-A\subset\mathbb{C}$ es compacto
3) $\mathbb{C}^\infty\approx\mathbb{S}^2$.

III.1.3 Proposición
Sea $f:\mathbb{C}^\infty\to\mathbb{C}^\infty$ tal que

$$f(z)=\begin{cases}\frac{az+b}{cz+d} & \text{si}\quad d\neq -cz\ \forall z\in\mathbb{C}\\ \frac{a}{c} & \text{si}\quad z=\infty\\ \infty & \text{si}\quad z=\frac{-d}{c}\end{cases}$$

en donde $ad\neq bc; a,b,c,d\in\mathbb{C}$. Entonces f es un homeomorfismo.

Definición
Sean $a\neq b$ en $\mathbb{C}^\infty$, se define la función de Möbius(fracción lineal) $m_{a,b}:\mathbb{C}^\infty\to\mathbb{C}^\infty$ por

$$m_{a,b}(z) = \begin{cases} \frac{z-a}{z-b} & \text{si} \quad a \neq \infty \neq b \\ z-a & \text{si} \quad b = \infty \\ \frac{1}{z-b} & \text{si} \quad a = \infty \end{cases}$$

III.1.4 Proposición

Entonces $m_{a,b}$ es homeomorfismo que lleva a, b en $0, \infty$.

Demostración

De la proposición anterior, $m_{a,b}$ es homeomorfismo, veamos que $m_{a,b}$ lleva a, b en $0, \propto$

Si $a \neq \infty \neq b$:

$m_{a,b}(a) = \frac{a-a}{a-b} = \frac{0}{a-b} = 0$ pues $a \neq b$ y $m_{a,b}(b) = \frac{a-b}{b-b} = \frac{a-b}{0} = \infty$ pues $a \neq b$.

Si $a = \infty$:

$m_{a,b}(\infty) = \frac{1}{\infty - b} = 0$ y $m_{a,b}(b) = \frac{1}{b-b} = \frac{1}{0} = \infty$.

Si $b = \infty$:

$m_{a,b}(a) = a - a = 0$ y $m_{a,b}(\infty) = \infty - a = \infty$ ■

Definición

Decimos que el conjunto A (abierto o cerrado) es un corte del espacio $\mathbb{C}^\infty$ (o bien: que separa o corta este espacio) si el conjunto $\mathbb{C}^\infty - A$ no es conexo. Los puntos p y q de $\mathbb{C}^\infty$ se dicen separados por A si estos pertenecen a componentes distintos de $\mathbb{C}^\infty - A$; se dice también que A corta(o separa) a $\mathbb{C}^\infty$ entre p y q.

III.1.5 Teorema(Fundamental de Eilenberg(primera forma))

Sea $M \subset \mathbb{C}^*$ compacto. Son equivalentes:

1) $id_M \in \mathcal{E}_\times(M)$
2) M no separa $0, \infty$ en $\mathbb{C}^\infty$.

Para esto consúltase ([1]; 3, 258).

III.1.6 Teorema(Fundamental de Eilenberg(segunda forma))

Sea $M \subset \mathbb{C}^\infty$ compacto y $a \neq b$ en $\mathbb{C}^\infty - M$. Son equivalentes:

1) $m_{a,b} \in \mathcal{E}_\times(M)$
2) M no separa a, b en $\mathbb{C}^\infty$.

Demostración

Por hipótisis, $M \subset \mathbb{C}^\infty$ compacto y $a, b \notin M$, luego $m_{a,b}(M) \subset \mathbb{C}^*$ es compacto y $0 = m_{a,b}(a)$, $\infty = m_{a,b}(b) \notin m_{a,b}(M)$.

Si $m_{a,b} \in \mathcal{E}_\times(M)$

entonces $\exists \varphi \in \mathcal{C}_\times(M) / m_{a,b}(m) = e^{\varphi(m)} \ \forall m \in M$

entonces $m_{a,b}(m) = e^{\varphi o m_{a,b}^{-1} o m_{a,b}(m)} \ \forall m \in M$

entonces $id_{m_{a,b}(M)} \in \mathcal{E}_{\times}(m_{a,b}(M))$ y por la primera forma del teorema fundamental de Eilenberg $m_{a,b}(M)$ no separa $0, \infty$ en $\mathbb{C}^{\infty}$. Luego $M = m_{a,b}^{-1}(m_{a,b}(M))$ no separa $a = m_{a,b}^{-1}(0), b = m_{a,b}^{-1}(\infty)$ en $\mathbb{C}^{\infty}$.

En forma análoga se demuestra la otra implicación ■

III.1.7 Corolario

$\mathbb{S}^1$ separa a $0, \infty$ en $\mathbb{C}^{\infty}$.

Demostración

Por $(II.2.7)$, $id_{\mathbb{S}^1} \notin \mathcal{E}_{\times}(\mathbb{S}^1)$ y por la segunda forma del teorema fundamental de Eilenberg se tiene que $\mathbb{S}^1$ separa a $0, \infty$ en $\mathbb{C}^{\infty}$.

III.2 Teorema de la dualidad de Alexander

Definición

Diremos que las funciones $f_0, f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}_{\times}(X)$ son linealmente independiente si $\prod_{i=0}^{n} f_i^{p_i} \sim_{\times} 1$ en X (p_i enteros) implica que $p_0 = p_1 = ... = p_n = 0$.

Diremos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\times}(X)$ es una base de $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_{\times}(X)$ si las funciones de $\mathcal{F}$ son linealmente independiente y para cada $f \in \mathcal{H}$, existe una sucesión finita $f_0, f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}_{\times}(X)$ y un sistema de número enteros $p_0, p_1, ..., p_n / f \sim_{\times} \prod_{i=0}^{n} f_i^{p_i}$ en X.

III.2.1 Lema

Sea $X \subset \mathbb{S}^n$ cerrado y de cada componente de $\mathbb{S}^n - X$ saquémoslo sólo un punto y el conjunto de estos puntos denotemos por F. Si $f \in C(X, \mathbb{S}^{n-1})$, $\forall Y \subset F$ finito, $\exists g \in C(\mathbb{S}^n - Y, \mathbb{S}^{n-1}) / g_{|X} = f$.

Para esto consúltase $([5]; 4.3, 344)$.

Observación

De $([5]; 4.3, 344)$ se obtiene que para todo F, no necesariamente para un conjunto finito

III.2.2 Teorema de la dualidad de Alexander

Sea X un espacio compacto en $\mathbb{C}^{\infty}$, y de cada componente de $\mathbb{C}^{\infty} - X$ elíjase precisamente un punto. Denotemos estos puntos por $x_0, x_1, x_2, ...$ entonces las clases de equivalencia de las funciones de Möbius $m_{x_1,x_0}, m_{x_2,x_0}, ..., m_{x_n,x_0}, ...$ en X forman una base para $\mathcal{B}_{\times}(X)$.

Demostración

Primero veamos que las clases de equivalencias de las funciones de Möbius $m_{x_i,x_0} \in \mathcal{F}_\times(X)$, $i = 1,2,...$ son linealmente independiente.
Probaremos por inducción sobre n.
Para $n = 1$:
Si $m^{p_1}_{x_1,x_0} \in \mathcal{E}_\times(X)$, veamos que $p_1 = 0$. Supongamos que $p_1 \neq 0$ y por $(II.1.32)$, $m_{x_i,x_0} \in \mathcal{E}_\times(X)$ y por la segunda forma del teorema fundamental de Eilenberg, X no separa a x_0, x_1 en $\mathbb{C}^\infty$ es decir, que x_0, x_1 pertenecen a una misma componente de $\mathbb{C}^\infty - X$ lo cual se contradice con la hipótisis, entonces $p_1 = 0$.
Admitamos válido para $n-1$ y supongamos que $\prod_{i=1}^{n} m^{p_i}_{x_i,x_0} \in \mathcal{E}_\times(X)$, veamos que $p_i = 0; i = 1,2,...,n$. En efecto, de $(II.1.66)$ y de la definición de la función de Möbius, $\exists G \subset \mathbb{C}^\infty$ abierto; $G \supset X$ con $x_i \notin G$; $i = 1,2,...,n$ y $\prod_{i=1}^{n} m^{p_i}_{x_i,x_0} \in \mathcal{E}_\times(G)$.
Denotemos por C_i las componentes de $\mathbb{C}^\infty - G$ que contiene a x_i $(i = 0,1,2,...,n)$ y K_1 un segmento rectilíneo que une C_0 con uno de los continuos $C_1, C_2, ..., C_n$ (digamos con C_n) sin tener puntos comunes con los otros $(K_1 \cap C_i = \emptyset$ para $i = 1,2,...,n-1)$. Como $\mathbb{C}^\infty - G$ es compacto, resulta que $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ son las componentes de $(\mathbb{C}^\infty - G) \cup K_1$.
Ya que $K_1 \cap C_0 \neq \emptyset$ y $K_1 \cap C_n \neq \emptyset$, entonces $G - K_1$ no separa a x_0, x_n en $\mathbb{C}^\infty$ y por la segunda forma del teorema fundamental de Eilenberg, $m^{p_i}_{x_i,x_0} \in \mathcal{E}_\times(G - K_1)$. Por $(II.1.7)$ y $(II.1.9)$, se tiene que $\prod_{i=1}^{n-1} m^{p_i}_{x_i,x_0} \in \mathcal{E}_\times(G - K_1)$, entonces por hipótisis inductiva, tenemos que $p_i = 0; i = 1,2,...,n-1$. El caso general sereduce al caso $n = 1$.
Ahora sea $f \in \mathcal{F}_\times(X)$, veamos que $f \sim_\times \prod_{i=1}^{n} m^{p_i}_{x_i,x_0}$. En efecto, como $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^\infty - X$, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que cada pareja (x_1, x_{k_1}) y (x_2, x_{k_2}) se encuentra en una componente de $\mathbb{C}^\infty - X$, es decir X no separa x_1, x_{k_1} y x_2, x_{k_2} en $\mathbb{C}^\infty$ y por la segunda forma del teorema fundamental de Eilenberg, $m_{x_1,k_1}, m_{x_2,k_2} \in \mathcal{E}(X)$.
Se sigue de la función de Möbius que
$m_{x_1,x_2} = m_{x_1,x_{k_1}} m_{x_{k_1},x_0} m_{x_0,x_{k_2}} m_{x_{k_2},x_2} \sim_\times m_{x_{k_1},x_0} m_{x_0,x_{k_2}} \sim_\times m^{-1}_{x_0,x_{k_1}} m_{x_0,x_{k_2}}$ en X es decir,

$$(1) \qquad m_{x_1,x_2} \sim_\times m^{-1}_{x_0,x_{k_1}} m_{x_0,x_{k_2}} \text{ en } X$$

Probaremos por inducción sobre n.
Si $n = -1$ o $n = 0$, y del lema, $\exists \psi \in \mathcal{F}_\times(\mathbb{C}^\infty)$ o $\exists \psi \in \mathcal{F}_\times(\mathbb{C}^\infty - \{x_n\})$ $/\psi_{|X} = f$ Entonces $f \in \mathcal{E}_\times(X)$.
Supongamos por un instante que $x_0 = \infty$, $x_n = 0$ y denotemos $Y = \mathbb{C}^\infty - \bigcup_{i=0}^{n} \{x_i\}$.
Del lema anterior, $\exists \psi \in \mathcal{F}_\times(Y)$ $/\psi_{|X} = f$ y como $\mathbb{C}^\infty$ es normal y X es cerrado en $\mathbb{C}^\infty$, se tiene que X es normal y $x_n \notin X$, por eso $\exists t \in \mathbb{R}^+/$

$$(D = \{z \in \mathbb{C}; |\, z \,| \leq t\}) \cap X = \emptyset \text{ y } x_i \notin D \ \forall i = 1,2,3,...,n-1.$$

Defino $h:\mathbb{S}^1 \to D-\{x_n\}$ por

$$h(z)=tz \ \forall z \in \mathbb{S}^1$$

h es continua. Ya que $D-\{x_n\} \subset Y$ y $\psi \in \mathcal{F}_\times(Y)$, $g=\psi \circ h \in \mathcal{F}_\times(\mathbb{S}^1)$.
Luego por $(II.1.79)$ y $(II.1.51)$, $\exists p_n \in \mathbb{Z}/gid_{\mathbb{S}^1}^{p_n} \in \mathcal{E}_\times(\mathbb{S}^1)$.
Luego para $w \in \mathbb{S}^1$, $g(w)w^{p_n}=\psi(tw)w^{p_n}$ y haciendo $z=tw; w \in \mathbb{S}^1$,
$w=\frac{z}{|z|}$, $z \in (Fr(D))$. Entonces $\psi id_{|Fr(D)}^{p_n} \in \mathcal{E}_\times(Fr(D))$.
Pongamos $\varphi(z)=\psi(z)z^n \ \forall z \in Y-D^\circ$ y como $\varphi_{|Fr(D)}=\psi id_{Fr(D)}^n \in \mathcal{E}_\times(Fr(D))$
y $(Y-D^\circ)\cup\{x_n\}, Fr(D)$ son cerrado en $Y\cup\{x_n\}$
(pues $(Y-D^\circ)\cup\{x_n\}=(Y\cup\{x_n\})\cap[(\mathbb{C}^\infty-D^\circ)\cup\{x_n\}]$) y
$(\mathbb{C}^\infty-D^\circ)\cup\{x_n\}$ cerrado en $\mathbb{C}^\infty$, $Fr(D)\subset Y-D^\circ$.
Entonces de $(II.1.67)$, $\exists r \in \mathcal{F}_\times((Y-D^\circ)\cup\{x_n\})/$

$$r_{|X}=\varphi \text{ y } r \in \mathcal{E}_\times((Y-D^\circ)\cup\{x_n\}).$$

Por otra parte, $X\cap D^\circ = X\cap(D-Fr(D)) \subset X\cap D=\emptyset$ y $Y\supset X$,
luego $X\subset Y-D^\circ$. Entonces $r\in\mathcal{E}_\times(X)$, luego $\forall z\in X$, $r(z)=\varphi(z)=\psi(z)z^n$
$=f(z)z^n$ entonces $f\sim_\times z^{-n}$ en X. De la definición de la función de Möbius y
$x_n=0, x_0=\infty$ se tiene que $m_{x_n,x_0}(z)=z-x_n=z-0=z$.
Por lo tanto $f\sim_\times m_{x_n,x_0}^{-n}$ en X. De (1) se termina que $f\sim_\times \prod_{i=1}^{n} m_{x_i,x_0}^{p_i}$ ■

III.2.3 Corolario(De la Dualidad de Alexander)

Sea $X\subset\mathbb{C}$ compacto y elíjase exactamente un punto de cada componente acotado de $\mathbb{C}-X$, denotándose por $a_1,a_2,a_3,....,a_n,...$ Entonces las clases de equivalencias de las traslaciones

$$z-a_1, z-a_2, z-a_3, ..., z-a_n, ...$$

en X forman una base para $\mathcal{B}_\times(X)$.

Demostración

Si X es compacto en el plano $\mathbb{C}$, podemos tomar $x_0=0, x_1=\infty$ y por el teorema de la dualidad de Alexander, se tiene que las clases de equivalencias de las traslaciones

$$z-a_1, z-a_2, z-a_3, ..., z-a_n, ...$$

en X forman una base para $\mathcal{B}_\times(X)$.

Capítulo IV

Aplicaciones

IV.1 Teorema de la Curva de Jordan

Un subconjunto A de $\mathbb{C}^\infty$ se dice que es un arco simple si $A \approx \mathbb{I}$.

IV.1.1 Proposición

$\mathcal{B}_\times(A) \cong 1$ si A es un arco simple $\mathbb{C}^\infty$.

IV.1.2 Proposición

Si $A \subset \mathbb{C}^\infty$ es un compacto que no separa a $\mathbb{C}^\infty$, entonces $\mathcal{B}_\times(A) \cong 1$.

Demostración

Sea $A \subset \mathbb{C}^\infty$ compacto que no separa a $\mathbb{C}^\infty$. Ya que $A \subset \mathbb{C}^\infty$ es compacto, entonces por el teorema de la dualidad de Alexander las clases de equivalencia de las funciones de Möbius $m_{a_1,a_0}, m_{a_2,a_0}, m_{a_3,a_0}, ..., m_{a_n,a_o}, ...$ donde $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ son los elementos de cada componentes de $\mathbb{C}^\infty - A$, forman una base de $\mathcal{B}_\times(A)$. Comc A no separa a $\mathbb{C}^\infty$, entonces por el teorema fundamental de Eilenberg(segunda forma) $m_{a_1,a_0}, m_{a_2,a_0}, m_{a_3,a_0}, ..., m_{a_n,a_o}, ...$ pertenecen a $\mathcal{E}_\times(A)$.
Por lo tanto $\mathcal{B}_\times(A) \cong 1$ ■

IV.1.3 Corolario

Si $A \subset \mathbb{C}^\infty$ es un arco simple en $\mathbb{C}^\infty$, entonces A no separa a $\mathbb{C}^\infty$.

Demostración

Sea $A \subset \mathbb{C}^\infty$ un arco simple, veamos que A no separa a $\mathbb{C}^\infty$. En efecto, tenemos que $A \subset \mathbb{C}^\infty$ compacto, entonces por el teorema dela dualidad de Alexander las clases de equivalencia de las funciones de Möbius $m_{a_1a_0}, m_{a_2,a_0}, m_{a_3,a_0}, ...$ donde $a_0, a_1, a_2, ...$ son los elementos de cada componentes de $\mathbb{C}^\infty - A$, forman una base de $\mathcal{B}_\times(A)$. Ya que A es un arco simple en $\mathbb{C}^\infty$, $\mathcal{B}_\times(A) \cong 1$, es decir $\mathcal{F}_\times(A) = \mathcal{E}_\times(A)$. Luego $m_{a_1,a_0}, m_{a_2,a_0}, m_{a_3,a_0}, ...$ pertenecen a $\mathcal{E}_\times(A)$, entonces por el teorema fundamental

de Eilenberg, A no separa a $\mathbb{C}^\infty$ ■

IV.1.4 Teorema

Si A, B son compactos y conexos en $\mathbb{C}^\infty$ ninguno de los cuales separa a $\mathbb{C}^\infty$ y $A \cap B$ tiene n componentes, entonces $\mathbb{C}^\infty - (A \cup B)$ tiene n componentes.

Demostración

Sean A, B compactos y conexos en $\mathbb{C}^\infty$ ninguno de los cuales separa a $\mathbb{C}^\infty$ y por $(IV.1.2)$, $\mathcal{B}_x(A) \cong 1 \cong \mathcal{B}_x(B)$. Ya que $\mathbb{C}^\infty$ es normal y $A \cup B$ es cerrado en $\mathbb{C}^\infty$, tenemos que $A \cup B$ es normal, luego A, B son cerrados conexos en el subespacio $A \cup B$ de $\mathbb{C}^\infty, \mathcal{B}_x(A) \cong 1 \cong \mathcal{B}_x(B)$ y si $A \cap B$ tiene n componentes entonces por $([18]; 2.35, 43)$ tenemos que $\mathcal{B}_x(A \cup B) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}$. Luego cada base de $\mathcal{B}_x(A \cup B)$ tiene $n-1$ elementos y por el teorema de la dualidad de Alexander, las clases de equivalencias de las funciones de Möbius $m_{a_1 a_0}, m_{a_2, a_0}, m_{a_3, a_0}, \ldots$ donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son los elementos de cada componentes de $\mathbb{C}^\infty - (A \cup B)$, forman una base de $\mathcal{B}_x(A \cup B)$.
Por lo tanto $\mathbb{C}^\infty - (A \cup B)$ tiene n componentes ■

Un subconjunto J de $\mathbb{C}^\infty$ se dice que es una curva cerrada simple si $J \approx \mathbb{S}^1$.

IV.1.5 Teorema de la Curva de Jordan

Si J es una curva cerrada simple en $\mathbb{C}^\infty$, entonces $\mathbb{C}^\infty - J$ tiene precisamente dos componentes y ambos componentes tiene como frontera J.

Demostración

Sean A, B dos arcos simples en $\mathbb{C}^\infty$ tales que $J = A \cup B$, $A \cap B = \{a, b\}$ y por el corolario anterior A ni B separan a $\mathbb{C}^\infty$. Ya que $A \cap B = \{a, b\}$ tiene dos componentes y por el teorema anterior $\mathbb{C}^\infty - J$ tiene dos componentes. Sean R, S las componentes de $\mathbb{C}^\infty - J$,

$$Fr(J) = Fr(\mathbb{C}^\infty - J) = Fr(R \cup S) \supset \overline{R} \cap (\mathbb{C}^\infty - (R \cup S)) = Fr(R)$$

pues R y S son abiertos por ser $\mathbb{C}^\infty$ localmente conexo, tenemos que probar que $Fr(R) = J = Fr(S)$. Supóngamose, al contrario, que $Fr(R) \not\subseteq J$. Esto implica $Fr(R) \subset A \not\subseteq J$, donde A es un arco simple. Pero ahora, $\mathbb{C}^\infty - A = R \cup [S \cup (J - A)]$ y R, $S \cup (J - A)$ son conjunto separados, entonces A separa a $\mathbb{C}^\infty$, esto contradice a que A no separa a $\mathbb{C}^\infty$. Por lo tanto $Fr(R) = J = Fr(S)$ ■

IV.2 Teorema Fundamental del Algebra

IV.2.1 Teorema

Todo polinomio complejo no constante tiene una raiz en $\mathbb{C}$.

Demostración

Podemos tomar un polinomio mónico pues podemos dividir el coeficiente mayor

Sea $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ un polinomio complejo no constante. Obsérvase que para $z \neq 0$, $|z^{-n} f(z) - 1| \leq |a_1| |z|^{-1} + ... + |a_n| |z|^{-n}$. Escogemos $r > 0 / |a_1| r^{-1} + |a_2| r^{-2} + ... + |a_n| r^{-n} < 1$, entonces

$$|z^{-n} f(z) - 1| < 1 \text{ si } |z| \geq r \qquad (*)$$

Si f no tiene ningún cero(es decir, ninguna raiz), definamos $g : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ por $g(x) = -\frac{f(rx)}{|f(rx)|}$ $\forall x \in \mathbb{D}^2$, luego g es continua y como $\mathcal{B}(\mathbb{D}^2) \cong 1$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{D}^2) /$ $g(x) = e^{2\pi i \varphi(x)}$ $\forall x \in \mathbb{D}^2$. Definamos $h : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ por $h(x) = e^{\frac{2\pi i \varphi(x)}{n}}$ $\forall x \in \mathbb{D}^2$, h es continua. Por el teorema de Brouwer del punto fijo, $\exists x_0 \in \mathbb{D}^2 / h(x_0) = x_0$, es decir, $x_0 = e^{\frac{2\pi i \varphi(x_0)}{n}}$ entonces $|x_0| = 1$ y $x_0^n = e^{2\pi i \varphi(x_0)} = \frac{f(rx_0)}{|f(rx_0)|}$. Pongamos $z = rx_0$, $|z| = r$ y $\frac{z^n}{|z^n|} = -\frac{f(z)}{|f(z)|}$ a sí $z^{-n} f(z) = -|z^{-n}| |f(z)| \in (-\infty, 0)$, esto es una contradición con $(*)$ ■

IV.3 Unicoherencias en $\mathbb{C}P^n$, $n-$espacio proyectivo complejo y $\mathbb{R}P^n$, $n-$espacio proyectivo real

IV.3.1 Proposición

$\mathbb{C}P^n$ es un espacio unicoherente.

Demostración

De $([8]; III.E.14, 339)$, $\mathbb{C}P^n$ es localmente conexo por caminos y por $([21]; 83)$, $\mathbb{C}P^n$ es simplemente conexo. Ahora si $f \in \mathcal{F}_x(\mathbb{C}P^n)$ y como la función exponencial compleja $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es un recubridor, entonces por $([11]; 21.3, 179)$ o también $([21]; 155)$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}_x(\mathbb{C}P^n) / f(x) = e^{\varphi(x)}$ $\forall x \in \mathbb{C}P^n$ y de aquí $f \in \mathcal{E}_x(\mathbb{C}P^n)$. Se concluye de $(II.2.4)$ que $\mathbb{C}P^n$ es un espacios unicoherente ■

IV.3.2 Proposición

$\mathbb{R}P^n$ es un espacio unicoherente($n \geq 2$).

Demostración

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}P^n)$ y por $([21]; 3, 180)$, f es homotópico a una constante y por $(II.1.16)$, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}P^n)$.
Se concluye de $(II.2.4)$ que $\mathbb{R}P^n$ es un espacios unicoherente ■

Ahora tendremos algunos espacios unicoherentes que son:

1) $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$
2) $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$; $(n \geq 2, m \geq 2)$
3) $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{C}P^m$; $(m \geq 2)$
4) $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}P^m$; $(m \geq 2)$.

IV.4 $\mathbb{R}P^n$, n–espacio proyectivo real no es un espacio sólido

IV.4.1 Proposición

$\mathbb{R}P^n$, n–espacio proyectivo real no es un espacio sólido.

Demostración

Si $\mathbb{R}P^n$ es sólido y por $(I.2.24)$, se tiene que $\mathbb{R}P^n$ es contráctil, entonces $\mathbb{R}P^n$ es simplemente conexa lo cual es una contradición con $\mathbb{R}P^n$ que no es simplemente conexa.

Fin

Apéndice

Definición

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de cerrados en un espacio X. Se dice que la colección es discreta si $\forall x\in X, \exists V_x\in \mathcal{V}_X(x)/V_x\cap \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=\emptyset$ o $\exists!\alpha\in I/V_x\cap A_\alpha\neq\emptyset$.

Proposición

Con las hipótisis de la definición anterior, cualquier subcolección es cerrado.

Demostración

Sea $\{A_{\alpha_\delta}\}_{\delta\in L\subset I}$ una subcolección de $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Sea $x\notin \bigcup_{\delta\in L\subset I} A_{\alpha_\delta}$ y como $x\in X$, por definición, $\exists V_x\in\mathcal{V}_X(x)/V_x\cap\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\emptyset$ o $\exists!\alpha_0\in I/V_x\cap A_{\alpha_0}\neq\emptyset$.

Si $V_x\cap\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\emptyset$, $V_x\cap\bigcup_{\delta\in L\subset I}A_{\alpha_\delta}=\emptyset$ pues $\bigcup_{\delta\in L\subset I}A_{\alpha_\delta}\subset\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$.

Por consiguiente $x\notin\overline{\bigcup_{\delta\in L\subset I}A_{\alpha_\delta}}$.

Si $V_x\cap A_{\alpha_0}\neq\emptyset$, $X-A_\alpha\in\mathcal{V}_X(x)$ abierto pues $x\notin A_{\alpha_\delta}$ y A_{α_δ}es cerrado $\forall\delta\in L$.

Si $\alpha_0\in L$, $(V_x-A_{\alpha_0})\cap\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\emptyset$ pues $\bigcup_{\delta\in L\subset I}A_{\alpha_\delta}\subset\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ y $X-A_\alpha\in\mathcal{V}_X(x)$.

Por definición, $V_x\cap A_{\alpha_\delta}=\emptyset$ $\forall\delta\in L$, entonces $V_x\cap\bigcup_{\delta\in L\subset I}A_{\alpha_\delta}=\emptyset$.

Por consiguiente $x\notin\overline{\bigcup_{\delta\in L\subset I}A_{\alpha_\delta}}$ ■

Corolario(Phragmén-Brouwer)

Sea $\{A_{\alpha_\delta}\}_{\delta\in L\subset I}$ una colección disjunta de cerrados de un espacio X conexo, localmente conexo y unicoherente. Si $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ separa p,q entonces algún A_α separa p,q.

Demostración

Se sigue del teorema de Phragmén-Brouwer y de la proposición anterior ■

Teorema(Fundamental de Eilenberg(primera forma))

Sea $M\subset\mathbb{C}^*$ compacto. Son equivalentes:

p) $id_M\in\mathcal{E}_\times(M)$

q) M no separa $0,\infty$ en $\mathbb{C}^\infty$.

Demostración

Sea $id_M\in\mathcal{E}_\times(M)$, veamos que M no separa $0,\infty$ en $\mathbb{C}^\infty$, es decir: si C es un círculo que contiene a M en su interior, entonces M separa $0,C$ en $\mathbb{C}$. En efecto, $\exists\varphi\in\mathcal{C}_\times(M)/z=e^{\varphi(z)}$ $\forall z\in M$.

Veamos que φ y $e_{|\varphi(M)}$ son homeomorfismo inverso:

$e\circ\varphi(z)=e^{\varphi(z)}=z=id_M(z), \varphi\circ e(\varphi(z))=\varphi\left(e^{\varphi(z)}\right)=\varphi(z)=id_{\varphi(M)}(\varphi(z))$.

Por lo tanto $\varphi = e^{-1}_{|M}$, o sea $\varphi(M) = e^{-1}(M)$.
a) Veamos que $\varphi(M)$ es la reunión de la colección discreta disjunta de compactos $N_k = \varphi(M) + 2\pi ki = \{\varphi(m) + 2\pi ki; m \in M\}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
1) Veamos que $\varphi(M) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} N_k$; $\{N_k\}_{K\in\mathbb{Z}}$ es la colección disjunta de compactos, $N_k = \varphi(M) + 2\pi ki = \{\varphi(m) + 2\pi ki; m \in M\}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
Sea $z \in \varphi(M) = e^{-1}(M)$, $e(z - 2\pi ki) = e(z) \in M$. Luego $z - 2\pi ki \in e^{-1}(M) = \varphi(M)$, $z \in \varphi(M) + 2\pi ki = N_k$. Por lo tanto $z \in \bigcup_k N_k$.
Inversamente, sea $z \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} N_k$, $\exists k_0 \in \mathbb{Z}/N_{k_0} = \varphi(M) + 2\pi k_0 i, z - 2\pi k_0 i \in \varphi(M) = e^{-1}(M)$. Luego $e(z) = e(z - 2\pi k_0 i) \in M, z \in e^{-1}(M) = \varphi(M)$.
Por lo tanto $z \in \varphi(M)$.
2) Veamos que $N_k \cap N_t = \emptyset$.
Si $z \in N_k \cap N_t, z \in N_k = \varphi(M) + 2\pi ki$ y $N_t = \varphi(M) + 2\pi ti$, $z = \varphi(m) + 2\pi ki = \varphi(n) + 2\pi ti; n, m \in M$. Entonces $m = e(\varphi(m)) = e(\varphi(n)) = n$, y de ahí que $m = n$. Entonces $k = t$.
3) Veamos que $\{N_k\}_{K\in\mathbb{Z}}$ es la colección discreta de compactos:
Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces $z \in \mathbb{C} - e^{-1}(M)$ o $z \in e^{-1}(M)$.
i) Si $z \in \mathbb{C} - e^{-1}(M)$, entonces $\mathbb{C} - e^{-1}(M) \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(z)$ es abierto pues $e^{-1}(M) = \varphi(M)$ es cerrado ya que $M \subset \mathbb{C}^*$ es compacto(por hipótisis). Entonces $[\mathbb{C} - e^{-1}(M)] \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} N_k = [\mathbb{C} - e^{-1}(M)] \cap e^{-1}(M) = \emptyset$.
ii) De (2), $N_{k_0} \cap N_{k_0+j} = \emptyset$, entonces por la normalidad de $\mathbb{C}$, $\exists G_{k_0}$, G_{k_0+j} abiertos en $\mathbb{C}/G_{k_0} \supset N_{k_0}, G_{k_0+1} \supset N_{k_0+1}$ y $G_{k_0} \cap G_{k_0+j} = \emptyset$. Entonces, $\exists G_{k_0} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(z)$ / $G_{k_0} \cap N_k = \emptyset$ y $G_{k_0} \cap G_{k_0+j} = \emptyset$.
Por otra parte, como $M \subset \mathbb{C}^*$ es compacto, M es cerrado y por la regularidad de $\mathbb{C}$, $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(0)/M \cap V_0 = \emptyset$. Por esta razón, sean $b > a$ en $\mathbb{R}^+/M$ quede entre los círculos $C_a = \{e^{a+iy} \in \mathbb{C}; y \in \mathbb{R}\}$, $C_b = \{e^{b+iy} \in \mathbb{C}; y \in \mathbb{R}\}$ de radio e^a, e^b y centro en el origen.
Sean $L_a = e^{-1}(C_a) = \{a + iy \in \mathbb{C}; y \in \mathbb{R}\}$, $L_b = e^{-1}(C_b) = \{b + iy \in \mathbb{C}; y \in \mathbb{R}\}$ son rectas definidas para $z = a, z = b$ respectivamente. Por la compacidad de $N_k \subset \mathbb{C}$, N_k no separa a L_a, L_b y por el corolario de Phragmén-Brouwer, $e^{-1}(M) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} N_k$ no separa a L_a y L_b.
Entonces existe un camino γ en $\mathbb{C} - e^{-1}(M)$ que une L_a y L_b. Luego $e \circ \gamma$ es un camino en $\mathbb{C}^* - M$ que une C_a y C_b. Se sigue que M no separa a $0, C_a$ en $\mathbb{C}$. Por lo tanto M no separa a $0, \infty$ en $\mathbb{C}^\infty$.
Inversamente,
$\mathfrak{q}) \to \mathfrak{p})$:
si M no separa $0, \infty$ en $\mathbb{C}^\infty$ entonces $\exists a \in \mathbb{C}^*$ y $\exists \alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^\infty)/\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = a$ y $M \subset \{x + iy \in \mathbb{C}; x < |a| = b\}$.
Defino una homotopía $h : M \times \mathbb{I} \to M$ por
$h(x,t) = z - |\alpha(t)|$ entonces $id_M \simeq m_{b,\infty}$ y $m_{b,\infty}(M) \subset \{x + iy \in \mathbb{C}; x < 0\} \subset \mathbb{V}^0$ y por $(II.1.25)$, $m_{b,\infty} \in \mathcal{E}_{\times}(M)$ y de $(II.1.12)$ se sigue que $id_M \in \mathcal{E}_{\times}(M)$. ■

Referencias Bibliograficas de acuerdo a la cita en el texto

[1] Kuratowsky, k, Introduction to Set Theory and Topology, New Yourk, Pergamon, 1961

[2] Adalberto García Máynez, Introducción a la Topología de conjuntos, México, Trillas, 1971

[3] Hu S.T., Elements of General Topology, Holden Day, 1964

[4] Kelley J.L., Topología General, Argentina, Eudeba, 1962

[5] Dugundi J, Topology, Allyn and Bacon, 1966

[6] Hocking J.G. y Young, G.S., Topology, Addison-Wesley, 1961

[7] Buskes-Van Rooij, Topology Space: From Distance to Neighburhood, Spring-Verlag, New York, 1997

[8] Rafael Ãyala Gomez, Elemento de topología, Addison-Wesley-España 1997

[9] Steven A. Gaal, Poin Set topology, Academic Press, New York, 1964

[10] Pennisi, L.L, Elements of Complex Variables, Holt Renehart and Wiston, NuevaYork, 1963

[11] C. Kosniowsky, Topología Algebráica, España Reverté, 1992

[12] Hu S.T, Introduction to General Topology, Holden Day, 1966

[13] Hu S.T, Homotopy Theory, Academic Press, New York, 1959

[14] R.A. Ricabarra, A.R, Larotonda, Notas de Topología Algebraica

[15] S. Eilenberg, Transformation continues en circonférence

en la topologie du plan, Fund., Math., 1936 vol 26 pp 61-112

[16] John H.V. Hunt, Topología del plano, Notas mimeografiadas

CIEA del I.N.P., México, 1980

[17] Euclides P. Moreno J, Teorema de la Curva de Jordan, Tesis, UNMSM Lima, 1980

[18] Hugo De la Cruz Torres, Espacios Unicoherentes, Tesis, UNMSM, Lima, 1988

[19] A.H Stone, Incidence relations in unicoherent space, Amer. Soc.65 Math., 1949, 427-30

[20] J. Dieudonné, Fundamentos de Análisis Moderno, Edit Reverté, S.A., 1974-1976

[21] Lima Elon Lages, Grupo Fundamental e Espacos de Recobrimento, Impa-Brasil, 1993

[22] Hu S.T, Homology Theory, Holden Day, 1966

[23] J. Margalef Roig, Topología ****, Edit., Alhanbra, España, 1980

[24] S. Eilenberg, Sur les espaces multicohérents I, Fund., Math., 1936 vol 27 pp 153-190

[25] S. Eilenberg, Sur les espaces multicohérents II, Fund., Math., 1936 vol 29 pp 101-122

[26] W. Olano, Unicoherencias en espacios Sólidos, Notas de Topología, por publicar

[27] John B. Conway, Funtions of One Complex Varible I, Second Edition, Springer, 1991