Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Descripción unificada de estructuras geométricas sobre variedades riemannianas

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Wilber CARRILLO FLORES

ASESOR

Dr. Alberto Mariano RIVERO ZAPATA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Carrillo, W. (2024). *Descripción unificada de estructuras geométricas sobre variedades riemannianas*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas/Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Hoja de Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Wilber Carrillo Flores
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	46066000
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0007-3644-4147
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alberto Mariano Rivero Zapata
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10094914
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0009-5277-1628
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43688114
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Josué Alonso Aguirre Enciso
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41341744
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Richard Javier Cubas Becerra
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	47661582
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.2. Topología y Geometría
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Jorge Basadre, 3er Piso.) País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Calle: Av. Germán Amézaga s/n, Ciudad Universitaria Latitud: -12.062106 Longitud: -77.036526
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Marzo 2018 – diciembre 2021

URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 18:00 horas del día viernes veintidós de marzo de dos mil veinticuatro, en el Aula 102 de la Facultad de Ciencias Matemáticas, se reunió el Jurado Evaluador de tesis, presidido por el Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas e integrado por los siguientes miembros: Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso (Jurado Informante), Dr. Richard Javier Cubas Becerra (Jurado Externo) y el Dr. Alberto Mariano Rivero Zapata como Miembro Asesor; para la sustentación de la tesis titulada: « DESCRIPCIÓN UNIFICADA DE ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS SOBRE VARIEDADES RIEMANNIANAS», presentada por el Señor Bachiller Wilber Carrillo Flores, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Bachiller **WILBER CARRILLO FLORES**, el calificativo de .14. (.CATORCE.).

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Magíster en Matemática Pura** al Bachiller **WILBER CARRILLO FLORES.**

Siendo las 19:15 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
PRESIDENTE

Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso
MIEMBRO

Dr. Richard Javier Cubas Becerra
MIEMBRO EXTERNO

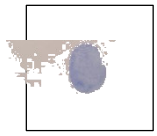
Dr. Alberto Mariano Rivero Zapata
ASESOR

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo **ALBERTO MARIANO RIVERO ZAPATA** en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 001792-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es **"DESCRIPCIÓN UNIFICADA DE ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS SOBRE VARIEDADES RIEMANNIANAS"**, presentado por el bachiller **WILBER CARRILLO FLORES** para optar el grado académico de Magíster en Matemática Pura **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de **10%** de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado correspondiente.





Firma del Asesor
DNI: 10094914
Nombres y apellidos del asesor: **ALBERTO MARIANO RIVERO ZAPATA**

Índice general

Introducción **1**

1. MARCO TEÓRICO **4**

1.1. ÁLGEBRAS DE DIVISIÓN NORMADAS $\mathbb{A}$: 4

1.2. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD Y LOS GRUPOS PIN Y ESPIN 6

1.2.1. Álgebras de Clifford 6

1.2.2. Los Grupos Pin y Spin 8

1.3. PRODUCTO VECTORIAL CRUZ (PVC) 10

1.4. GEOMETRÍA DE K*ä*HLER 12

1.5. GEOMETRÍA DE CALABI-YAU 18

1.6. GEOMETRÍA CUATERNIÓNICA 20

1.6.1. Geometría Hiperk*ä*hler 20

1.6.2. Geometría de K*ä*hler-Cuaterniónica 20

1.7. GEOMETRÍA-G_2 22

1.8. GEOMETRÍA-Spin(7) 23

1.9. GRUPOS DE HOLONOMÍA RIEMANNIANA 25

1.9.1. Grupo de Holonomía de una Conexión sobre un Fibrado Vectorial . . . 25

1.9.2. Grupo de Holonomía de una Conexión sobre un Fibrado Principal . . . 29

1.9.3. Holonomía y Curvatura 34

1.9.4. Clasificación de los Grupos de Holonomía Riemanniana 36

1.9.5. Clasificación de Berger 38

1.10. GRUPOS RIEMANNIANAS IRREDUCIBLES 39

1.10.1. U(n) 39

1.10.2. SU(n) . . . 39
1.10.3. Sp(n) . . . 40
1.10.4. Sp(n)Sp(1) . . . 40
1.10.5. G_2 . . . 41
1.10.6. Spin(7) . . . 42

2. RESULTADOS Y DISCUSIÓN **44**
2.1. Geometría del Producto Vectorial Cruz Real (PVC-$\mathbb{R}$) . . . 44
2.1.1. Variedades Riemannianas con PVC-$\mathbb{R}$ . . . 44
2.1.2. Instantones del Producto Vectorial Cruz (PVC) . . . 49
2.1.3. Branas del Producto Vectorial Cruz (PVC) . . . 54
2.2. Geometría del Producto Vectorial Cruz Complejo (PVC-$\mathbb{C}$) . . . 57
2.2.1. Variedades de K*ä*hler con (PVC-$\mathbb{C}$) . . . 57
2.2.2. Instantones para Producto Vectorial Cruz Complejo (PVC-$\mathbb{C}$) . . . 60
2.2.3. Branas de Dirichlet y Neumann para Producto Vectorial Cruz Complejo (PVC-$\mathbb{C}$) . . . 63
2.3. Geometría Riemanniana sobre Álgebras de División Normada . . . 66
2.3.1. $\mathbb{A}$-Variedades Riemannianas . . . 67
2.3.2. $\mathbb{A}$-Variedades Riemannianas Especiales . . . 70
2.3.3. Caracterizaciónes y Propiedades . . . 73

3. APLICACIÓNES **77**
3.1. Mecánica Hamiltoniana . . . 77
3.1.1. Sistemas hamiltonianos y mecánica . . . 77
3.2. Teoría de Cuerdas . . . 83
3.2.1. Teoría de cuerdas bosónicas . . . 87
3.2.2. Teoría de cuerdas fermiónicas o teoría de supercuerdas . . . 90
3.3. Unificación de las teorías de Supercuerdas . . . 99
3.3.1. Dualidades: . . . 99
3.3.2. Teoría M . . . 100

Conclusiones **107**

Bibliografía **108**

INTRODUCCIÓN

Este trabajo consiste en describir estructuras geométricas sobre variedades Riemannianas mediante un enfoque unificado utilizando las álgebras de división normada $\mathbb{A}$, producto vectorial cruz (PVC-$\mathbb{R}$) y producto vectorial cruz complejo (PVC-$\mathbb{C}$) ([1]).

Las álgebras de división normadas $\mathbb{A}$, el producto vectorial cruz (PVC-$\mathbb{R}$) y el producto vectorial cruz complejo (PVC-$\mathbb{C}$), conducirá a la unificación para describir estructuras geométricas lo cual mejorará nuestra comprensión entre las siguientes geometrías: la geometría de K*ä*hler, la geometría de Calabi-Yau, la geometría hiperk*ä*hler, la geometría de K*ä*hler-cuaterniónico, la geometría-Spin(7) y la geometría-G_2, lo cual permitirá descubrir enlaces ocultos entre estas geometrías y diferentes teorías físicas en las cuales se aplican, comprobando que la noción de variedad Riemanniana proporciona un marco adecuado para el estudio de estructuras geométricas ([2]).

Estructuras Geométricas:([4]) Una conexión afín sobre una variedad suave es una estructura geométrica que permite definir derivadas covariantes, torsión, curvatura, campos vectoriales paralelos, aceleración de una curva, geódesicas, transporte paralelo y holonomía. Una variedad afín es un par ordenado (M, ∇) donde M es una variedad suave y ∇ es una conexión afín sobre M. Una estructura casi-compleja sobre una variedad suave M es un endomorfismo de fibrados vectoriales I de esa manera $I^2 = -id$. Una variedad casi-compleja es un par ordenado (M, I) donde M es una variedad suave y I es una estructura casi compleja sobre M.

Una estructura simpléctica es una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ sobre M que es cerrada y no degenerada, es decir:

(i). $d\omega = 0$, es decir; ω es cerrada.

(ii). $\omega \wedge ... \wedge \omega$(n-factores) es nunca nula, es decir; ω es no degenerada.

Una variedad simpléctica es un par ordenado (M, ω) donde M es una variedad suave y ω es una

estructura simpléctica.

Una métrica Riemanniana sobre una variedad suave M es un campo 2-tensorial g sobre M tal que g_p es un producto interno sobre T_pM para todo $p \in M$. Una variedad Riemanniana es un par ordenado (M, g) donde M es una variedad suave y g es una métrica Riemanniana.

Estructura Geométrica sobre Variedades Riemannianas:([4]) Una métrica casi hermítica sobre una variedad casi-compleja (M^{2n}, I) es una métrica Riemanniana g sobre M que satisface la siguiente condición: para todo $u, v \in TM$ tal que $g(u, v) = g(Iu, Iv)$, es decir; g es compatible con I. Además la estructura casi-compleja J es integrable, es decir; el tensor de Nijenhuis de I es identicamente nulo, entonces se dice g es una métrica hermítica. Una variedad hermítica es una terna (M^{2n}, I, g) donde I es una estructura casi compleja integrable, M^{2n} es una variedad suave y g es una métrica hermítica.

Una métrica de K*ä*hler sobre una variedad casi compleja (M^{2n}, I) es una métrica hermítica g tal que I es paralelo, es decir; $\nabla I = 0$, donde ∇ es una conexión afín. Una variedad de K*ä*hler es una variedad hermítica (M^{2n}, I, g) donde g es una métrica de K*ä*hler sobre (M^{2n}, I).

Una variedad de Calabi-Yau es una variedad de K*ä*hler (M^{2n}, I, g) que admite una forma de volumén $\Omega \in \Omega^{n,0}(M)$ paralelo, es decir; $\nabla\Omega = 0$, donde ∇ es una conexión afín.

Finalmente se pueden definir las variedades con holonomía excepcionales G_2 y Spin(7).

El objetivo es el estudio de estructuras geométricas sobre variedades Riemannianas a través de un enfoque unificado, y como resultado encontrar nuevos resultados y nuevas relaciones entre las siguientes geometrías: la geometría de K*ä*hler, la geometría de Calabi-Yau, la geometría hiperk*ä*hler, la geometría de K*ä*hler-cuaterniónico, la geometría-Spin(7) y la geometría-G_2 ([1]).

En este trabajo se desarrolla los siguientes capítulos. En el capítulo 1, se dará un resumen de las álgebras de división normadas $\mathbb{A}$ y el producto vectorial cruz (PVC), luego se va estudiar la geometría de K*ä*hler, la geometría de Calabi-Yau, la geometría hiperk*ä*hler, la geometría de K*ä*hler-cuaterniónico y las excepcionales; la geometría-Spin(7), la geometría-G_2, además se va estudiar grupos de holonomía Riemanniana y grupos Riemannianas irreducibles. En el capítulo 2, se describirán las estructuras geométricas sobre variedades Riemannianas mediante un enfoque unificado utilizando las álgebras de división normada $\mathbb{A}$, producto vectorial cruz real

(PVC-$\mathbb{R}$) y producto vectorial cruz complejo (PVC-$\mathbb{C}$) y como resultado encontrar nuevos resultados y nuevas relaciones entre las siguientes geometrías: la geometría de K*ä*hler, la geometría de Calabi-Yau, la geometría hiperk*ä*hler, la geometría de K*ä*hler-cuaterniónico, la geometría-Spin(7) y la geometría-G_2. En el capítulo 3, observaremos algunas aplicaciones como: mecánica Hamiltoniana, teoría de cuerdas y unificación de las teorías de supercuerdas.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1. ÁLGEBRAS DE DIVISIÓN NORMADAS $\mathbb{A}$:

En este sección se estudian las álgebras de división normadas $\mathbb{A}$ sobre los números reales. Estas álgebras son: los reales ($\mathbb{R}$), los complejos ($\mathbb{C}$), los cuaterniones ($\mathbb{H}$), los octoniones ($\mathbb{O}$). En virtud del Teorema de Hurwitz, estas son las únicas álgebras de división normada. Se mostrará el proceso de Cayley-Dickson, el cual permite generar estas álgebras ([18]). Primero recordaremos algunos hechos básicos sobre las álgebras de división normadas $\mathbb{A}$.

Definición 1.1.1. *Una álgebra V sobre $\mathbb{R}$ es una **álgebra de división**, si V es una álgebra sin divisores del 0 o sea $xy = 0_V$ implica $x = 0_V$ ó $y = 0_V$ para todo $x, y \in V$.*

Definición 1.1.2. *Una **álgebra de división normada** $\mathbb{A}$ es una álgebra real de dimensión finita con unidad 1 y una norma $\|.\|$, que satisface la siguiente condición:*

$$\|x.y\| = \|x\|\|y\|$$

para todo $x, y \in \mathbb{A}$

Observación 1.1.1. *Notese que si $\mathbb{A}$ es una álgebra de división normada entonces también es una álgebra de división.*
***En efecto:** Si $x.y = 0$ se tiene que $0 = \|0\| = \|x.y\| = \|x\|\|y\|$ entonces $\|x\|\|y\| = 0$, lo cual implica que $x = 0$ ó $y = 0$.*

Ejemplo 1.1.1. *Los reales* ($\mathbb{R}$)*, los complejos* ($\mathbb{C}$)*, los cuaterniones* ($\mathbb{H}$)*, los octoniones* ($\mathbb{O}$)*, donde* $\mathbb{C}$ *es no real,* $\mathbb{H}$ *es no conmutativa y* $\mathbb{O}$ *es no asociativa.*

El Proceso de Cayley-Dickson

A primera vista, parece curioso que las álgebras de división normadas, tengan dimensión $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$. Sin embargo, esto no es una casualidad. El proceso de Cayley-Dickson nos permite generar una álgebra a partir de la otra, duplicando su dimensión. Esta construcción es una generalización de la manera como se construyen los números complejos como pares de números reales.

Definición 1.1.3. *Sea V una álgebra sobre $\mathbb{R}$. Se dice que V es una* ***$*$-álgebra*** *si existe una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, $* : V \longrightarrow V$ llamado conjugación tal que*

$$a^{**} = a, \qquad (ab)^* = b^* a^*$$

para todo $a, b \in V$.

Si $a^* = a$ para todo $a \in V$, diremos que el álgebra V es real.

Ejemplo 1.1.2. *Los reales $\mathbb{R}$ como los complejos $\mathbb{C}$, son* ***$*$-álgebra*** *bajo la conjugación compleja usual $x \longmapsto x^* = \bar{x}$ para todo $x \in \mathbb{C}$.*

El proceso de Cayley-Dickson consiste en generar una nueva álgebra V', a partir de V, de la siguiente forma. Los elementos en V' serán pares ordenados de elementos en V.

Definición 1.1.4. *Sea V una $*$-álgebra.* ***El proceso de Cayley-Dickson*** *consiste en construir a partir, de V, una $*$-álgebra $V \times V$, denotada por V' satisfaciendo:*
(1). adición: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
(2). producto por escalares: $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$

(3). multiplicación: $(a,b)(c,d) = (ac - d^*b, bc^* + da)$
para todo $a,b,c,d \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.3. $\mathbb{R}' = \mathbb{C}, \quad \mathbb{C}' = \mathbb{H} \quad y \quad \mathbb{H}' = \mathbb{O}$.

Utilizando el proceso de Cayley-Dickson se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.1.1. ***(Hurwitz)****([18]). Las únicas álgebras de división normadas sobre los números reales son:* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *y* $\mathbb{O}$.

El grupo G_2: El grupo de automorfismos de los octoniones $Aut(\mathbb{O})$, es un grupo de Lie de tipo G, de rango 2 con 14 parámetros, se le denota por G_2.

1.2. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD Y LOS GRUPOS PIN Y ESPIN

Para definir un álgebra de Clifford se necesita un espacio vectorial cuadrático, es decir un espacio vectorial con una forma bilineal simétrica no degenerada. También se definen los grupos Pin y Spin asociados a la álgebra de Clifford y se estudia la relación existente entre estos grupos ([17]).

1.2.1. Álgebras de Clifford

Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$ y $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica no degenerada sobre V, y $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, asociada a B definida por $Q(x) = B(x,x)$ para todo $x \in V$. El par ordenado (V,Q) es llamado espacio vectorial cuadrática.

Definición 1.2.1. *Dado* (V, Q) *un espacio vectorial cuadrática. Un par* $(Cl(V, Q), j)$ *es un* ***álgebra de Clifford*** *para* (V, Q)*, si verifica*

1. $Cl(V, Q)$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra asociativa con elemento identidad* 1.

2. $j : V \longrightarrow Cl(V, Q)$ *es una aplicación lineal tal que*

$$j(v)^2 = -Q(v)1$$

para todo $v \in V$.

3. *Si* A *es otra* $\mathbb{R}$*-álgebra asociativa con elemento identidad* 1 *y* $u : V \longrightarrow A$ *es una aplicación lineal entonces* $u(v)^2 = -Q(v)1_A$ *para cada* $v \in V$*, entonces hay un único homomorfismo de álgebras* $\tilde{U} : Cl(V, Q) \longrightarrow A$ *tal que*

$$u = \tilde{U} \circ j$$

Se denota por $Cl(n)$ *a la álgebra de Clifford* $Cl(V, Q)$*; donde* $V = \mathbb{R}^n$ *y* Q *es la forma cuadrática asociada al producto escalar usual de* $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.2.1. *([17]). Sean* $(Cl(V, Q), j)$ *un álgebra de Clifford para* (V, Q) *y* $u : V \longrightarrow Cl(V, Q)$ *una aplicación lineal definida por* $u(v) = -j(v)$ *para todo* $v \in V$*. Entonces existe un único homomorfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebra de* $\alpha : Cl(V, Q) \longrightarrow Cl(V, Q)$ *tal que*

$$\alpha \circ \alpha = id \quad y \quad \alpha(j(v)) = -j(v)$$

para todo $v \in V$.

Observación 1.2.1. *Sean los conjuntos* $Cl^0(V, Q) = \{x \in Cl(V, Q) : \alpha(x) = x\}$ *y* $Cl^1(V, Q) = \{x \in Cl(V, Q) : \alpha(x) = -x\}$ *denominados parte par y parte impar de* $Cl(V, Q)$ *respectivamente, se verifica*

$$Cl(V, Q) = Cl^0(V, Q) \oplus Cl^1(V, Q)$$

Definición 1.2.2. *El espacio vectorial complejo*

$$\Delta_n := \mathbb{C}^{2^k} = \mathbb{C}^2 \otimes ... \otimes \mathbb{C}^2$$

*para $n = 2k, 2k+1$, se denomina **espacio vectorial complejo de** n**-espinores**. Y los elementos de Δ_n se llaman espinores complejos de Dirac o simplemente espinores.*

Sea $Cl^c(n) \approx Cl(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ una álgebra de Clifford sobre $\mathbb{C}^n$. De ahora en adelante se denotará por k_n la representación del álgebra de Clifford $Cl^c(n)$ dada por
1. $k_n : Cl^c(n) \longrightarrow End(\Delta_n)$, Si $n = 2k$

2. $k_n : Cl^c(n) \longrightarrow End(\Delta_n) \oplus End(\Delta_n) \xrightarrow{pr_1} End(\Delta_n)$, Si $n = 2k+1$

1.2.2. Los Grupos Pin y Spin

Toda Álgebra de Clifford contiene dos grupos: grupo $Pin(V, Q)$ y grupo Spin(V,Q), que juegan un papel importante tanto en la geometría como en la física.

Definición 1.2.3. *Se define el **grupo multiplicativo de las unidades** de $Cl(V, Q)$, como*

$$Cl^*(V, Q) = \{\varphi \in Cl(V, Q) : \exists \varphi^{-1} \in Cl(V, Q) / \varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = 1\}$$

Definición 1.2.4. *Sea $Cl^*(V, Q)$ el grupo multiplicativo de las unidades de $Cl(V, Q)$. Este grupo actúa sobre $Cl(V, Q)$, es decir, existe un homomorfismo*

$$Ad : Cl^*(V, Q) \longrightarrow Aut(Cl(V, Q))$$

*llamado **representación adjunta**, dado por*

$$Ad_\varphi(x) = \varphi x \varphi^{-1}$$

para cada $\varphi \in Cl^*(V, Q)$ y $x \in Cl(V, Q)$

Definición 1.2.5. *Se define el subgrupo $P(V,Q) \subset Cl^*(V,Q)$ como el subgrupo generado multiplicativamente por los elementos $v \in V$ tal que $Q(v) \neq 0$*

Definición 1.2.6. *Se define el* ***grupo Pin(V,Q)*** *como el subgrupo de $P(V,Q)$ generado por los elementos $v \in V$ tal que $Q(v) = \pm 1$.*

Definición 1.2.7. *Se define el* ***grupo Spin(V,Q)****, como*

$$Spin(V,Q)=Pin(V,Q)\cap Cl^0(V,Q)$$

es decir, los elementos del grupo $S\,pin(V,Q)$ son aquellos elementos del grupo $Pin(V,Q)$, estan generados por productos en número par.

Definición 1.2.8. *Sea $Cl^*(V,Q)$ el grupo multiplicativo de las unidades de $Cl(V,Q)$. Este grupo actúa sobre $Cl(V,Q)$ como automorfismo del álgebra, es decir, existe un homomorfismo*

$$\widetilde{Ad} : Cl^*(V,Q) \longrightarrow Aut(Cl(V,Q))$$

llamado ***representación adjunta retorcida****, dado por*

$$\widetilde{Ad}_\varphi(x) = \alpha(\varphi)x\varphi^{-1}$$

para cada $\varphi \in Cl^*(V,Q)$ y $x \in Cl(V,Q)$

Observación 1.2.2. *Tenemos la igualdad, $\widetilde{Ad}_\varphi = Ad_\varphi$ para todos los elementos pares, es decir, $\varphi \in Cl^0(V,Q)$.*

Teorema 1.2.1. *([17]) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y Q una forma cuadrática no degenerada en V. Entonces existen las siguientes sucesiones exactas:*

$$0 \longrightarrow \{-1,1\} \longrightarrow S\,pin(V,Q) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} S\,O(V,Q) \longrightarrow 1$$

$$0 \longrightarrow \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\} \longrightarrow Pin(V,Q) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} O(V,Q) \longrightarrow 1$$

Teorema 1.2.2. *([17])*

1. *Para $n \geq 2$, Spin(V,Q) es un grupo conexo.*

2. *Si $V \cong \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ y Q es el producto interior usual, entonces Spin(V,Q) es simplemente conexo y $\tilde{Ad}_{\setminus Spin(V,Q)} : Spin(V,Q) \longrightarrow SO(V,Q)$ es el recubrimiento universal del grupo SO(V,Q).*

Definición 1.2.9. *El hecho de que $Spin(n) \subset Cl(n) \subset Cl^c(n) \overset{k_n}{\to} End(\Delta_n)$ permite definir la siguiente representación del grupo Spin(n)*

$$\phi_n = k_{n_{\setminus Spin(n)}} : Spin(n) \longrightarrow Aut(\Delta_n)$$

que se denomina la ***representación espinorial del grupo Spin(n).***

Lema 1.2.1. *([17])*

$$\tilde{Ad}^{-1}(SO(n)) = Spin(n)$$

Proposición 1.2.2. *([17]). La representación espinorial es una representación inyectiva del grupo Spin(n).*

1.3. PRODUCTO VECTORIAL CRUZ (PVC)

Definición 1.3.1. *Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ y sea $<,>$ una forma bilineal simétrica definida positiva en V. Un PVC r-ario es una transformación multilineal*

$$X : V^r \longrightarrow V \quad , \quad (1 \leqslant r \leqslant n)$$

$$(v_1, ..., v_r) \longmapsto v_1 \times ... \times v_r$$

satisfaciendo

- $< v_1 \times ... \times v_r, v_i >= 0 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r$
- $< v_1 \times ... \times v_r, v_1 \times ... \times v_r >= \det(< v_i, v_j >)$

para cualesquiera $v_1, ..., v_r \in V$.

Ejemplo 1.3.1. *Un PVC 1-ario es una estructura casi-compleja. Lo reciproco también es cierto.*

Teorema 1.3.1. ***(Eckmann, Whitehead, Brown-Gray).****([8]) Un producto vectorial cruz (PVC) existe en los siguientes casos (ver tabla 1.1):*

▹ $r = 1 \quad y \quad n$ *es par,*

▹ $r = n - 1 \quad y \quad n$ *es arbitrario,*

▹ $r = 2 \quad y \quad n = 3$ *ó* 7*,*

▹ $r = 3 \quad y \quad n = 4$ *ó* 8

Tabla 1.1:

r	1	$n-1$	2	3
$n = dimV$	$2m$	n	3 ó 7	4 ó 8
V	$\mathbb{C}^m$	$\mathbb{R}^n$	$Im\mathbb{O}$	$\mathbb{O}$

Teorema 1.3.2. *([8]) Dado V un espacio vectorial complejo con dimensión n. El producto vectorial cruz complejo (PVC-*$\mathbb{C}$*) existe en los siguientes casos (ver tabla 1.2):*

▹ $r = 1 \quad y \quad n$ *es par,*

▹ $r = n - 1 \quad y \quad n$ *es arbitrario*

Tabla 1.2:

r	1	$n-1$
$n = dimV$	$2m$	n
V	$\mathbb{H}^m$	$\mathbb{C}^n$

Definición 1.3.2. *Sea* $<,>$ *la forma bilineal simétrica definida positiva en un espacio Euclideano* $\mathbb{R}^m$*. Un PVC r-ario en* $\mathbb{R}^m$*, es una transformación multilineal*

$$\times : \mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(u_1, ..., u_r) \longmapsto u_1 \times ... \times u_r$$

satisfaciendo

(i) $< u_1 \times ... \times u_r, u_i >= 0 \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant r$

(ii) $< u_1 \times ... \times u_r, u_1 \times ... \times u_r >= \|u_1 \wedge ... \wedge u_r\|^2$

para cualesquiera $u_1, ..., u_r \in \mathbb{R}^m$*, donde* $\|.\|$ *es la norma inducida por* $\langle , \rangle$*.*

Definición 1.3.3. *La PVC-forma de grado* $r+1$ *asociada al PVC r-ario* $\times : \mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es la forma diferencial* $\beta \in \Omega^{r+1}(\mathbb{R}^m)$

$$\beta : \mathbb{R}^m \longrightarrow \wedge^{r+1}(T\mathbb{R}^m)$$

satisfaciendo

(i) $\beta_p(u_1, ..., u_r, u_{r+1}) =< u_1 \times ... \times u_r, u_{r+1} >$*, para cualesquiera* $u_1, ..., u_r \in \mathbb{R}^m$

(ii) $| \iota_{e_1 \wedge ... \wedge e_r}(\beta) |= 1$

para cualesquiera $p \in \mathbb{R}^m$ *y vectores ortonormales* $e_1, ..., e_r$ *en* $T_p\mathbb{R}^m$*.*

1.4. GEOMETRÍA DE KÄHLER

Ahora Vamos a combinar muchas de las construcciones que hemos ido estudiando como la métrica Riemanniana, una estructura casi compleja y una forma simpléctica, de forma que sean compatibles entre sí en un sentido natural. Las variedades de Kähler juegan un papel importante en la geometría compleja y Riemanniana ([4]).

Definición 1.4.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión par* $2n$*.* ***Una forma simpléctica*** *es una 2-forma* $\omega \in \Omega^2(M)$ *sobre M que es cerrada y no degenerada, es decir,*

a) ω *es no degenerada; es decir,* $\omega \wedge ... \wedge \omega \neq 0$*, en todo punto de M.*

b) ω *es cerrada; es decir, la derivada exterior de* ω *es identicamente nula* ($d\omega = 0$)*.*

Definición 1.4.2. *Una* ***variedad simpléctica*** *es un par ordenado* (M, ω)*, donde M es una variedad diferenciable de dimensión par* $2n$ *y* ω *es una forma simpléctica.*

Ejemplo 1.4.1. *El movimiento de la j-ésima partícula,* $1 \leq j \leq n$*, puede describirse mediante su posición* q_j *y su momento lineal* p_j*. Dado el sistema de coordenadas* $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$*. Definimos la 2-forma*

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j$$

Se tiene que $d\omega_0 = 0$ entonces ω_0 es cerrada, además $\omega_0 \wedge ... \wedge \omega_0 \neq 0$, en todo punto de $\mathbb{R}^{2n}$ por consiguiente ω_0 es no degenerada. Por lo tanto ω_0 es una forma simpléctica además $\left(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0\right)$ es una variedad simpléctica.

Ejemplo 1.4.2. *Generalizamos el ejemplo anterior al contexto de una variedad cualquiera. Dado X una variedad diferenciable de dimensión n, y sea $N = T^*X$ su fibrado cotangente. Sea (q, p) un elemento de M, donde $q \in X \;\; y \;\;\; p \in T_q^*X$ (el espacio cotangente en q), ahora elegimos un sistema de coordenadas $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ donde q_j son las coordenadas de q para $j = 1, ..., n \;\; y \;\;\; p = \sum_j p_j dq_j$.*
Definimos la forma simpléctica ω en N como

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j$$

Además definimos la 1-forma diferencial mediante

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j$$

luego tenemos $\omega = -d\alpha$.

Definición 1.4.3. *Dado M una variedad diferenciable de dimensión real $2n$. Un **atlas holomorfa** sobre M es un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ donde*
a) *U_i es un abierto en M y $M = \bigcup_{i \in I} U_i$*
b) *$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.*
c) *Siempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la función de transición*

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

es holomorfa.

Definición 1.4.4. *Una **variedad compleja** M de dimensión n, es una variedad diferenciable de dimensión real $2n$ provista de un atlas holomorfa.*

Ejemplo 1.4.3. *El espacio complejo n-dimensional $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Toda variedad compleja tiene dimensión par, visto como variedad diferenciable de dimensión real $2n$.*

Ejemplo 1.4.4. *Los abiertos de $\mathbb{C}^n$ son variedades complejas de dimensión n. Sea $\mathfrak{U} \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, luego consideramos $M = \mathfrak{U}$ y su homeomorfismo $Id : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$ sobre $\mathfrak{U}$; es decir, $z \longmapsto z = (z^1, ..., z^n)$. De este modo, para cada $z \in \mathfrak{U}$ se encontró un abierto conteniendo z, que viene a ser el mismo $\mathfrak{U}$, tal que $\{(\mathfrak{U}, Id_{\mathfrak{U}})\}$ es un atlas holomorfa sobre $\mathfrak{U}$.*

Ejemplo 1.4.5. *El espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, es el conjunto de rectas en $\mathbb{C}^{n+1}$ que pasan por el origen. El espacio proyectivo complejo se define como un cociente*

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\sim} = \left\{[u];\ u \in \mathbb{C}^{n+1}\right\}$$

donde $[u] = \left\{\lambda u,\ u \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\},\ \lambda \in \mathbb{C}^*\right\}$. Ahora veamos una idea intuitiva de la siguiente manera, dados $u, v \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, luego tenemos $u \sim v$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{C}^*$ tal que $u = \lambda v$, donde $\sim$ define una relación de equivalencia.

Definición 1.4.5. *Sea M una variedad suave de dimensión real 2n. Una estructura casi-compleja sobre M es un endomorfismo de fibrados vectoriales I*

$$I : TM \longrightarrow TM$$
$$X \longmapsto IX$$

tal que $I^2 = -id$, es decir, $I(IX) = -X$ para todo $X \in TM$.

Definición 1.4.6. *Una **variedad casi-compleja** es un par ordenado (M, I), donde M es una variedad suave y I es una estructura casi compleja sobre M.*

Proposición 1.4.1. *([4]) Toda variedad compleja M admite una estructura casi-compleja.*

Definición 1.4.7. *Sea (M, I) una variedad casi-compleja. El **tensor Nijenhuis** de I es el campo de tensores N_I de tipo (2,1) dado por*

$$N_I = [I, Iv] - I\,[Iu, v] - I\,[u, Iv] - [u, v]$$

para cualesquiera $u, v \in TM$. Se dice que I es integrable si $N_I = 0$.

Proposición 1.4.2. *([4]) El **tensor Nijenhuis** es un campo de tensores y para todo $X, Y \in TM$ se cumple:*

(i) Es antisimétrico.

(ii) $N_I = (X, IY) = -IN_I(X, Y)$

(iii) $N_I(IX, IY) = -N_I(X, Y)$

(iv) $N_I(X, IX) = 0$

Proposición 1.4.3. *([4]) Sea M una variedad compleja. Una estructura casi-compleja I es integrable si y solo si el tensor de Nijenhuis $N_I = 0$.*

Definición 1.4.8. *Sea (M^{2n}, I) una variedad casi compleja. Una métrica Riemanniana g sobre M que es compatible con I en el sentido*

$$g(u, v) = g(Iu, Iv)$$

*para todo $u, v \in TM$ se llama **métrica casi-hermítica**. Si I es integrable, entonces diremos que g es una **métrica hermítica**.*

Definición 1.4.9. *Una **variedad hemítica** es una terna (M^{2n}, I, g), donde M es una variedad suave y I es una estructura casi-compleja y g es una métrica hermítica.*

Definición 1.4.10. *Una **estructura simpléctica** sobre una variedad suave M de dimensión $2n$ es una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ sobre M que satisface las siguientes condiciones:*

(i). *$d\omega = 0$, es decir; ω es cerrada.*

(ii). *$\omega \wedge ... \wedge \omega$(n-factores) es nunca nula, es decir; ω es no degenerada.*

Definición 1.4.11. *Una **variedad simpléctica** es un par ordenado (M^{2n}, ω) donde M es una variedad suave y ω es una estructura simpléctica.*

Teorema 1.4.1. *([18]) Sea (M^{2n}, I, g) una variedad hermítica,*

(i) *El operador de Lefschetz,*

$$\begin{aligned} L : \bigwedge^{k} M &\longrightarrow \bigwedge^{k+2} M \\ \alpha &\longmapsto \omega \wedge \alpha \end{aligned}$$

es un operador de grado 2, donde ω es una estructura simpléctica.

(ii) *El operador $\star$ de Hodge,*

$$\star : \bigwedge^{k} M \longrightarrow \bigwedge^{n-k} M$$
$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, volM$$

es inducido por la métrica g y la orientación natural de una variedad compleja M, donde

$$volM = \frac{\omega^n}{n!}$$

(iii) *El operador dual de Lefschetz,*

$$\Lambda = \star^{-1} \circ L \circ \star : \bigwedge^{k} M \longrightarrow \bigwedge^{k-2} M$$

es un operador de grado -2.

Proposición 1.4.4. *([18]) Una métrica hermítica g está determinada por una estructura casi-compleja I y la forma simpléctica ω; es decir,*

$$g(u, v) = -\omega(u, Iv)$$

para todo $u, v \in TM$.

Teorema 1.4.2. ***(Conexión Riemanniana o Conexión de Levi-Civita).***([18]) *Sea (M, g) una variedad Riemanniana, existe una única conexión afín ∇ en M satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(a). *∇ es simétrica.*

(b). *∇ es compatible con una métrica Riemanniana g.*

Definición 1.4.12. *Una **métrica de Kähler** sobre una variedad casi-compleja (M^{2n}, I) es una métrica hermítica g tal que I es paralelo, es decir, $\nabla I = 0$, donde ∇ es una conexión afín.*

Definición 1.4.13. *Una **variedad de Kähler** es una variedad hermítica (M^{2n}, I, g), donde g es una métrica de Kähler sobre (M^{2n}, I).*

Ejemplo 1.4.6. *El espacio euclideano complejo $\mathbb{C}^n$ con la métrica hermitiana estándar es una variedad de Kähler, pues su forma simpléctica $\omega_0 = \frac{i}{2}\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$ es cerrado, es decir, $d\omega_0 = 0$.*

Ejemplo 1.4.7. *Sea $\mathbb{C}P^n$ el espacio proyectivo complejo. **La métrica de FUBINI-STUDY** ω_{FS}*

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}log\left(\sum_{l=0}^{n}\left|\frac{z_l}{z_i}\right|^2\right)$$

es una métrica de Kähler sobre $\mathbb{C}P^n$.

Ejemplo 1.4.8. *El toro complejo $\mathbb{C}^n/L$ es una variedad de Kähler. Un toro complejo se define como un cociente $M = \mathbb{C}^n/L$ de $\mathbb{C}^n$ por un subgrupo de la forma*

$$L = \left\{\alpha = \sum_i n_i\alpha_i : \ n_i \in \mathbb{Z}, \ i = 1, ..., 2n\right\} \subset \mathbb{C}^n$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_{2n} \in \mathbb{C}^n$ son linealmente independientes.

Ejemplo 1.4.9. *Toda superfície de Riemann es una variedad de Kähler. Si X es una superfície de Riemann entonces X es una variedad suave de dimensión real 2. Cualquiera que sea una métrica hermítica en X, $d\omega$ es una 3-forma entonces $d\omega = 0$, por tanto toda superfície de Riemann es una variedad de Kähler.*

Proposición 1.4.5. *([18]) Sea g una métrica de Kähler en una variedad compleja X. Entonces la restricción $g|_Y$ a cualquier subvariedad compleja $Y \subset X$ es Kähler.*

Ejemplo 1.4.10. *Toda variedad proyectiva (subvariedad compleja de $\mathbb{C}P^n$) es de Kähler. Sea ω_{FS} una métrica de Fubini-Study. Si X es una variedad proyectiva entonces $X \subseteq \mathbb{C}P^n$, luego restringiendo ω_{FS} tenemos $g = \omega_{FS}|_X$ entonces (X, g) es Kähler.*

Teorema 1.4.3. *(Descomposición de Hodge)([18]) Sea (M, g) una variedad de Kähler compacta. Entonces existe una descomposición*

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

con

$$H^{p,q}(M) = \overline{H^{q,p}}(M)$$

donde $H^k(M, \mathbb{C})$ *es la cohomología de deRham y* $H^{p,q}(M)$ *es la cohomología de Dolbeault.*

Proposición 1.4.6. *(Dualidad de Serre)([18]) Sea* (M, g) *una variedad de Kähler compacta entonces existe un isomorfismo*

$$H^{p,q}(M) \cong \left(H^{n-p,n-q}(M)\right)^*$$

1.5. GEOMETRÍA DE CALABI-YAU

En este capitulo vamos introducir el concepto de una variedad de Calabi-Yau. Las variedades de Calabi-Yau (en honor a Eugenio Calabi, de la Universidad de Pensilvania y Shing-Tung Yau, de Harvard, ambos matemáticos) son importantes en la teoría de supercuerdas, por ello los físicos teóricos dedican todos sus esfuerzos en comprender la variedad de Calabi-Yau, por lo cual una vez conocida la variedad de Calabi-Yau, se comprenderán los estados de vibración de esos estados de energía llamadas cuerdas ([3]).

Definición 1.5.1. *Sea* (M, g) *una variedad Riemanniana, con curvatura Riemanniana Rm. Entonces g es llamda plana si* $Rm = 0$*. La curvatura de Ricci de g es la traza sobre la primera y última variable de Rm*

$$Rc = tr(Rm)$$

además g es Ricci-plana si $Rc = 0$*.*

Definición 1.5.2. *Sea M una variedad de Kähler compacta. Una* ***variedad de Calabi-Yau*** *es un cuadruple* (M, J, g, Ω) *donde* (M, J) *es una variedad compleja compacta, g es una métrica de Kähler sobre M, con una forma de Kähler* ω *y* $\Omega \in \Omega^{n,0}(M)$ *una forma de volumen holomorfa paralela, es decir,*

$$\nabla\Omega = 0$$

$$v_M = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(2i)^{-n}\Omega \wedge \bar{\Omega}$$

donde $v_M = \dfrac{\omega^n}{n!}$ *y* n *es la dimensión complejo de* M.

Equivalentemente,

• Se puede probar que una variedad de Kähler compacta M es una variedad de Calabi-Yau si y solo si es Ricci-plana.

Ejemplo 1.5.1. *En 1 dimensión compleja: el toro* $T^2 = S^1 \times S^1$ *es una variedad de Calabi-Yau.*

Ejemplo 1.5.2. *En 2 dimensiónes complejas: el toro* $T^4 = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ *y la superficie* $K3$ *son variedades de Calabi-Yau.*

Ejemplo 1.5.3. *Cualquier variedad proyectiva hipersuperficie de grado* $n+2$ *en* $\mathbb{CP}^{n+1}$*, es una variedad de Calabi-Yau.*

Definición 1.5.3. *Una variedad de Kähler es llamada Ricci-plana si su curvatura de Ricci se anula.*

La curvatura de Ricci de una métrica de Kähler g es dado por

$$Rc_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log \det(g_{k\bar{l}})$$

Cada variedad de Calabi-Yau tiene curvatura de Ricci cero.

Proposición 1.5.1. *([3]) Sea* (M, J, g) *una variedad de Kähler compacta Ricci-plana y* Ω *es una* $(n, 0)$*-forma de volumen holomorfa en* M*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a). $\nabla\Omega = 0$

b). $d\Omega = 0$

c). $\bar{\partial} = 0$,

donde ∇ *es la conexión de Levi-Civita de* g.

Por lo tanto $H^{p,0}(M)$ *es isomorfo al espacio vectorial de* $(n, 0)$*-forma* Ω *sobre* M.

1.6. GEOMETRÍA CUATERNIÓNICA

Cuando pasamos de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ luego a $\mathbb{H}$, sus geometrías se vuelven cada vez mas rígidas, por ejemplo, la geometría hiperkähler y la geometría de Kähler-cuaterniónica, de las variedades hiperkähler y variedades de Kähler-cuaterniónica, de las cuales daremos nociones y propiedades elementales ([12]).

1.6.1. Geometría Hiperkähler

Definición 1.6.1. *Sea M una variedad suave de dimensión $4n$. Una* ***estructura casi-hiperkähler*** *sobre M es una terna (I, J, K), donde I, J y K son estructuras casi-complejas que cumplen*

$$IJ = -JI = K$$

.

Definición 1.6.2. *Una* ***variedad hiperkähler*** *es una $4n$-variedad suave provista de una estructura casi-hiperkähler (I, J, K). Se denota por (M, I, J, K).*

Definición 1.6.3. *Sea (M, I, J, K) una variedad hiperkähler. Una* ***estructura simpléctica holomorfica*** *sobre (M, I, J, K) es una forma paralela*

$$\Omega_J = \omega_I - i\omega_K \in \Omega_J^{2,0}(M)$$

1.6.2. Geometría de Kähler-Cuaterniónica

El tensor de curvatura de Weyl, llamado así por Hermann Weyl, es una medida de la curvatura del espacio-tiempo. Al igual que el tensor de curvatura de Riemann , el tensor de Weyl expresa la fuerza de marea que siente un cuerpo cuando se mueve a lo largo de una geodésica. El tensor de Weyl se diferencia del tensor de curvatura de Riemann en que no transmite información sobre cómo cambia el volumen del cuerpo, sino solo cómo la forma del cuerpo es distorsionada por la fuerza de marea. **El tensor de curvatura de Weyl** se puede obtener de la siguiente manera:

$$W = Rm - \frac{1}{n-2}(Rc - \frac{R}{n}g) \circ g - \frac{R}{2n(n-1)}g \circ g$$

donde n es la dimensión de la variedad, Rm es el tensor de curvatura de Riemann, Rc es el tensor de Ricci, R es la curvatura escalar y g es la métrica Riemanniana.

Definición 1.6.4. *Sea M una variedad diferenciable. Se dice que una métrica Riemanniana g en M es* ***Einstein*** *si existe* $\lambda \in C^\infty(M)$ *tal que*

$$Rc = \lambda g$$

donde Rc es el tensor de Ricci.

Definición 1.6.5. *Una variedad Riemanniana M, provista de una métrica de Einstein, es llamada* ***una variedad de Einstein****.*

Ejemplo 1.6.1. ***(a).*** *La n-esfera* $\mathbb{S}^n$*, con la métrica estandar, es una variedad de Einstein, con* $\lambda = n - 1$.

(b). *El espacio hiperbólico con la métrica canónica, es una variedad de Einstein, con* $\lambda = -(n-1)$.

Definición 1.6.6. *Una variedad de Kähler-Cuaterniónica de dimensión* $4m$ *es una* $4m$*-variedad Riemanniana orientada* (M, g) *(Sp(m)Sp(1)=SO(m)).*

Teorema 1.6.1. *([12]) Cuando* $m \geq 2$*, las* $4m$*-variedades de Kähler-Cuaterniónica* (M, g) *tiene una propiedad muy especial: La curvatura de Ricci Rc de* (M, g) *es igual a g o* $-g$ *y son llamados positivo y negativo respectivamente. Es decir, son variedades de Einsten.*

Como resultado, usualmente requerimos que las 4-variedades orientadas SO(4) tengan estas propiedades para llamarse K*ä*hler-Cuaterniónica de $\mathbb{H}$-dimensión 1, es decir, son 4-variedades de Einsten ASD.
La lista de los espacios simétricos Riemannianas compactos que son K*ä*hler-Cuaterniónica es la siguiente:

$$\frac{Sp(n)}{Sp(n-1)Sp(1)}, \quad \frac{U(n)}{U(n-2)U(2)}, \quad \frac{O(n)}{O(n-4)O(4)}, \quad \frac{G_2}{Sp(1)^2}$$

$$\frac{F_4}{Sp(3)Sp(1)}, \frac{E_6}{SU(6)Sp(1)}, \frac{E_7}{Spin(12)Sp(1)}, \frac{E_8}{E_7Sp(1)}$$

Observación 1.6.1. *Para cada grupo de Lie compacto simplemente conexo existe exactamente un espacio simétrico de Kähler-Cuaterniónica compacto asociado.*

1.7. GEOMETRÍA-G_2

Se introducen los conceptos básicos de la estructura G_2, desde un punto de vista geométrico riemanniano, primero en $\mathbb{R}^7$ y luego en 7-variedad Riemanniana orientada ([15]).

Definición 1.7.1. *Sea* $(x_1, ..., x_7)$ *coordenadas para* $\mathbb{R}^7$. *Definimos la* 3*-forma* φ_0 *en* $\mathbb{R}^7$ *por*

$$\varphi_0 = dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} - dx_{257} - dx_{347} - dx_{356}$$

donde dx_{ijk} *denota la* 3*-forma* $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$.

El subgrupo de $GL(7, \mathbb{R})$ que preserva la 3-forma φ_0, es el grupo de holonomía excepcional G_2.

Definición 1.7.2. *Sea la métrica Euclideana* $g_0 = dx_1^2 + ... + dx_7^2$ *en* $\mathbb{R}^7$. *Definimos la* 4*-forma* $*\varphi_0$, *el dual de Hodge de la* 3*-forma* φ_0 *con respecto a la métrica* g_0, *por*

$$*\varphi_0 = dx_{4567} + dx_{2367} + dx_{2345} + dx_{1357} - dx_{1346} - dx_{1256} - dx_{1247}$$

Definición 1.7.3. *Sea M una* 7*-variedad Riemanniana orientada. Una* G_2***-estructura*** *en M es un par* (φ, g), *donde* φ *es la* 3*-forma en M y g una métrica asociada.*

Definición 1.7.4. *Sea M una* 7*-variedad Riemanniana orientada,* (φ, g) *una* G_2*-estructura en M y sea* ∇ *la conexión de Levi-Civita de g, llamamos* $\nabla_g\varphi$ *la torsión de* (φ, g). *Si* $\nabla_g\varphi = 0$ *entonces* (φ, g) *es llamado libre de torsión.*

Definición 1.7.5. *Una G_2-**variedad** es un triple (M, φ, g), donde M es una 7-variedad Riemanniana orientada y (φ, g) es una G_2-estructura libre de torsión en M.*

Proposición 1.7.1. *([15]) Sea M una 7-variedad Riemanniana orientada y (φ, g) una G_2-estructura en M. Entonces cada fibrado de k-formas $\Lambda^k T^*M$ se divide ortogonalmente en componentes de la siguiente manera:*

- $\Lambda^1 T^*M = \Lambda^1_7$
- $\Lambda^2 T^*M = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}$
- $\Lambda^3 T^*M = \Lambda^3_1 \oplus \Lambda^3_7 \oplus \Lambda^3_{27}$

donde Λ^k_l es una representación irreducible de G_2 de dimensión l.
La estrella de Hodge $*$ de g da una isometría entre Λ^k_l y Λ^{7-k}_l. También tenemos $\Lambda^3_1 =< \varphi >$ y $\Lambda^4_1 =< *\varphi >$.

Ejemplo 1.7.1. *Sea (M, J, h, Ω) una Calabi-Yau de 2-foliaciones, donde h es la métrica de Kähler con una forma de Kähler ω y Ω es la 2-forma holomorfa. Sea (x_1, x_2, x_3) coordenadas en $\mathbb{R}^3$, definimos una métrica $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + h$ y una 3-forma φ en $M \times \mathbb{R}^3$ por*

$$\varphi = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge \omega + dx_2 \wedge Re\Omega - dx_3 \wedge Im\Omega$$

Entonces (φ, g) es una G_2-estructura libre de torsión en $M \times \mathbb{R}^3$ y

$$*\varphi = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega + dx_2 \wedge dx_3 \wedge \omega - dx_1 \wedge dx_3 \wedge Re\Omega - dx_1 \wedge dx_2 \wedge Im\Omega$$

Ejemplo 1.7.2. *Sea (M, J, h, Ω) una Calabi-Yau de 3-foliaciones, donde h es la métrica de Kähler con una forma de Kähler ω y Ω es la 3-forma holomorfa. Sea x una coordenada en $\mathbb{R}$. Definimos una métrica $g = dx^2 + h$ y una 3-forma φ en $M \times \mathbb{R}$ por $\varphi = dx \wedge \omega + Re\Omega$. Entonces (φ, g) es una G_2-estructura libre de torsión en $M \times \mathbb{R}$ y $*\varphi = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega - dx \wedge Im\Omega$*

1.8. GEOMETRÍA-Spin(7)

Se introducen los conceptos básicos de la estructura Spin(7), desde un punto de vista geométrico riemanniano, primero en $\mathbb{R}^8$ y luego en 8-variedad Riemanniana orientada ([15]).

Definición 1.8.1. *Sea* $(x_1, ..., x_8)$ *coordenadas para* $\mathbb{R}^8$. *Definimos la* 4*-forma* Ω_0 *en* $\mathbb{R}^8$ *por*

$\Omega_0 = dx_{1234} + dx_{1256} + dx_{1278} + dx_{1357} - dx_{1368} - dx_{1458} - dx_{1467} - dx_{2358} - dx_{2367} - dx_{2457} + dx_{2468} + dx_{3456} + dx_{3478} + dx_{5678}$

donde dx_{ijkl} *denota la* 4*-forma* $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l$.

El subgrupo de $GL(8, \mathbb{R})$ que preserva la Ω_0, es el grupo de holonomía Spin(7).
Sea la métrica Euclideana $g_0 = dx_1^2 + ... + dx_8^2$ en $\mathbb{R}^8$. Una 4-forma $*\Omega_0$, el dual de Hodge de la 4-forma Ω_0 con respecto a la métrica g_0, es igual a Ω_0 ($*\Omega_0 = \Omega_0$), es decir, Ω_0 es auto dual.

Definición 1.8.2. *Sea M una* 8*-variedad Riemanniana orientada. Una* ***Spin(7)-estructura*** *en M es un par* (Ω, g) *donde* Ω *es una* 4*-forma en M y g es una métrica asociada.*

Definición 1.8.3. *Sea M una* 8*-variedad Riemanniana orientada,* (Ω, g) *una Spin(7)-estructura en M y sea* ∇ *la conexión de Levi-Civita de g, llamamos* $\nabla_g \Omega$ *la torsión de* (Ω, g). *Si* $\nabla_g \Omega = 0$ *entonces* (Ω, g) *es llamado libre de torsión.*

Definición 1.8.4. *Una* ***variedad-Spin(7)*** *es un triple* (M, Ω, g)*, donde M es una* 8*-variedad Riemanniana orientada y* (Ω, g) *una estructura-Spin(7) libre de torsión en M.*

Proposición 1.8.1. *([15]) Sea M una* 8*-variedad Riemanniana orientada y* (Ω, g) *una estructura-Spin(7) en M. Entonces cada fibrado de k-formas* $\Lambda^k T^*M$ *se divide ortogonalmente en componentes de la siguiente manera:*

- $\Lambda^1 T^*M = \Lambda^1_8$
- $\Lambda^2 T^*M = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{21}$
- $\Lambda^3 T^*M = \Lambda^3_8 \oplus \Lambda^3_{48}$
- $\Lambda^4 T^*M = \Lambda^4_+ T^*M \oplus \Lambda^4_- T * M$
- $\Lambda^4_+ T^*M = \Lambda^4_1 \oplus \Lambda^4_7 \oplus \Lambda^4_{27}$
- $\Lambda^4_- T * M = \Lambda^4_{35}$

donde Λ^k_l es una representación irreducible de Spin(7) de dimensión l.
La estrella de Hodge $*$ de g da una isometría entre Λ^k_l y Λ^{8-k}_l. También tenemos $\Lambda^4_1 =< \Omega >$.

Ejemplo 1.8.1. *Sea (M, J, h, θ) una Calabi-Yau de 2-foliaciones, donde h es la métrica de Kähler con una forma de Kähler ω. Sea (x_1, x_2, x_3, x_4) coordenadas en $\mathbb{R}^4$, definimos una métrica $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4 + h$ y una 4-forma Ω en $M \times \mathbb{R}^4$ por*

$$\Omega = dx_{1234} + (dx_{12} + dx_{34}) \wedge \omega + (dx_{13} - dx_{24}) \wedge Re\theta - (dx_{14} - dx_{23}) \wedge Im\theta + \frac{1}{2}\omega \wedge \omega$$

Entonces (Ω, g) es una Spin(7)-estructura libre de torsión en $M \times \mathbb{R}^4$

Ejemplo 1.8.2. *Sea (M, J, h, θ) una Calabi-Yau de 3-foliaciones, donde h es la métrica de Kähler con una forma de Kähler ω. Sea (x_1, x_2) coordenadas en $\mathbb{R}^2$. Definimos una métrica $g = dx_1^2 + dx_2^2 + h$ y una 4-forma Ω en $M \times \mathbb{R}^2$ por $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \omega + dx_1 \wedge Re\theta - dx_2 \wedge Im\theta + \frac{1}{2}\omega \wedge \omega$. Entonces (Ω, g) es una Spin(7)-estructura libre de torsión en $M \times \mathbb{R}^2$.*

Ejemplo 1.8.3. *Sea (M, φ, h) una G_2-variedad. Sea x una coordenada en $\mathbb{R}$, definimos una métrica $g = dx^2 + h$ y una 4-forma Ω en $M \times \mathbb{R}$ por $\Omega = dx \wedge \varphi + *\varphi$. Entonces (Ω, g) es una Spin(7)-estructura libre de torsión en $M \times \mathbb{R}$.*

Ejemplo 1.8.4. *Sea (M, J, h, θ) una Calabi-Yau de 4-foliaciones, donde h es la métrica de Kähler con una forma de Kähler ω, definimos una métrica $g = h$ y una 4-forma Ω en M por $\Omega = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega + Re\theta$. Entonces (Ω, g) es una Spin(7)-estructura libre de torsión en M.*

1.9. GRUPOS DE HOLONOMÍA RIEMANNIANA

1.9.1. Grupo de Holonomía de una Conexión sobre un Fibrado Vectorial

En este sección definiremos un grupo de holonomia asociado a una conexión en un fibrado vectorial. Este grupo es definido a través de un transporte paralelo de vectores en curvas suaves

cerradas en un punto fijo ([16]).

Fibrados Vectoriales:

Definición 1.9.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Un* ***fibrado vectorial real*** *de rango k sobre M es una variedad diferenciable E con una aplicación sobreyectiva* $\pi : E \to M$ *satisfaciendo:*
1) *Para todo* $x \in M$*, la fibra* $E_x = \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^k$ *(isomorfismo lineal) es un espacio vectorial real.*
2) *E es localmente trivial: Para todo* $x \in M$*, existe una vecindad U de M y un difeomorfismo* $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ *(llamado trivialización local de E sobre U) tal que* $\pi_1 \circ \Phi = \pi/_{\pi^{-1}(U)}$*, donde* $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ *es una proyección en la primera coordenada y de modo que* $\Phi/_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$ *es un isomorfismo* $\mathbb{C}$*-lineal.*

Definición 1.9.2. *Sea M una variedad compleja. Un* ***fibrado vectorial complejo*** *de rango r sobre M es una variedad compleja E con una aplicación holomorfa* $\pi : E \to M$ *satisfaciendo:*
1) *Para todo* $x \in M$*, la fibra* $E_x = \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{C}^r$ *(isomorfismo lineal) es un espacio vectorial complejo.*
2) *E es localmente trivial: Para todo* $x \in M$*, existe un cubrimiento abierto* $\{U_i\}_i$ *de M y un biholomorfismo* $\psi : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r$ *(llamado trivialización local de E sobre* U_i*) tal que* $\pi_1 \circ \psi_i = \pi/_{\pi^{-1}(U_i)}$*, donde* $\pi_1 : U_i \times \mathbb{C}^r \to U_i$ *es una proyección en la primera coordenada y de modo que* $\Phi/_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{C}^r$ *es un isomorfismo* $\mathbb{C}$*-lineal.*

Secciones de E: Son aplicaciones continuas $\sigma : M \to E$ tales que

$$\pi \circ \sigma = Id$$

Notación: $\Gamma(E) = \{\sigma / \sigma$ es una sección suave de E$\}$

Ejemplo 1.9.1. $\Gamma(TM)$ *es el conjunto de todos los campos vectoriales suaves sobre M.*

$\Gamma(E)$ tiene estructura de $\mathfrak{F}$-módulo (en particular, $\mathbb{R}$-espacio vectorial), donde

$$\mathfrak{F} = C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R} / f \text{ es suave}\}$$

En general, no existe una forma natural de diferenciar las secciones de un fibrado vectorial. La razón es que, en general, no existe una forma natural de comparar las fibras en diferentes puntos de la base. Así, se introduce una derivada de forma axiomática en las secciones, la cual es llamada **conexión**. La definición precisa es la siguiente:

Definición 1.9.3. *Sea E un fibrado vectorial suave sobre M. Una **conexión** en E es una aplicación*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$
$$(X, s) \mapsto \nabla_X s$$

que satisface las siguientes condiciones:
(i). $\nabla_{X_1+X_2} s = \nabla_{X_1} s + \nabla_{X_2} s$ *(∇ es $C^\infty(M)$-lineal en la primera variable)*

(ii). $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$

(iii). $\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$ *($\mathbb{R}$-lineal en la segunda variable)*

(iv). $\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + X(f)s$
para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ y $s \in \Gamma(E)$.

Definición 1.9.4. *Sea $\gamma : [0, 1] \to M$ una curva diferenciable. Se dice que $s(t) \in E_{\gamma(t)}$ son obtenidos por transporte paralelo a lo largo de γ. Denotemos*

$$P_\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(t)}$$

una aplicación de transporte paralelo definido por

$$P_\gamma(v_0) = s(t)$$

para todo $v_0 \in E_{\gamma(0)}$

Proposición 1.9.1. *([16]) Sea M una una variedad suave, E un fibrado vectorial sobre M y ∇ una conexión sobre E. Si $\gamma : [0, 1] \to M$ es una curva suave cerrada con $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, para cada $x \in M$. Entonces la aplicación del transporte paralelo $P_\gamma : E_x \to E_x$ es un isomorfismo*

lineal.

Definición 1.9.5. *Definimos el grupo de holonomía* $Hol_x(\nabla)$ *de* ∇ *por*

$$Hol_x(\nabla) = \left\{P_\gamma : \gamma(0) = \gamma(1) = x\right\} \subset GL(E_x)$$

Proposición 1.9.2. *([16]) Sea* $\gamma : [0,1] \to M$ *una curva suave en M con* $\gamma(0) = x \;\; y \;\; \gamma(1) = y$. *Sea la aplicación del transporte paralelo* $P_\gamma : E_x \to E_y$. *Si M es una variedad suave conexa entonces*

$$H_y(\nabla) = P_\gamma H_x(\nabla)(P_\gamma)^{-1} = \{P_\gamma \circ P_\alpha \circ (P_\gamma)^{-1} : \alpha \text{ una curva suave cerrada con punto base } x\}$$

Una curva suave cerrada γ con punto base x es llamada **homotopicamente nulo** si se puede deformar a la curva constante en x.

Definición 1.9.6. *Definimos el* ***grupo de holonomía restringida*** $Hol_x^0(\nabla)$ *de* ∇,

$$Hol_x^0(\nabla) = \left\{P_\gamma : \gamma \text{ una curva suave cerrada homotopicamente nulo con punto base } x\right\}$$

donde $Hol_x^0(\nabla) \subset GL(E_x)$.

Proposición 1.9.3. *([16]) Si M es una variedad suave, E un fibrado vectorial sobre M y* ∇ *una conexión sobre E, entonces* $Hol_x^0(\nabla)$ *es un subgrupo de Lie de* $GL(k,\mathbb{R})$. *Es la componente conexa de* $Hol_x(\nabla)$ *que contiene la identidad, y es un subgrupo normal de* $Hol_x(\nabla)$. *Existe un homomorfismo sobreyectivo* $\phi : \pi_1(M) \to Hol_x(\nabla)/Hol_x^0(\nabla)$ *dado por* $\phi([\gamma]) = P_\gamma.Hol_x^0(\nabla)$. *Así, si M es simplemente conexo, entonces* $Hol_x(\nabla) = Hol_x^0(\nabla)$

La álgebra de holonomía $\mathfrak{hol}(\nabla)$ de $Hol^0(\nabla)$, es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$, definida salvo la acción adjunta de $GL(k,\mathbb{R})$.

1.9.2. Grupo de Holonomía de una Conexión sobre un Fibrado Principal

Distribución Tangente:

Definición 1.9.7. *Sea M una variedad suave. Una elección del subespacio lineal k-dimensional $D_p \subset T_pM$ para cada punto $p \in M$, es llamada **distribución tangente** k-dimensional sobre M.*

Definición 1.9.8. *Sea M una variedad suave. Una **distribución se llama suave**, si la unión disjunta de todos estos subespacios lineales forma un subfibrado suave*

$$D = \bigsqcup_{p \in M} D_p \subset TM$$

Variedad Integral e Involutividad:

Definición 1.9.9. *Sea $D \subset TM$ una distribución suave. Una subvariedad inmersa $N \subset M$ es llamada **variedad integral** de D si $T_pN = D_p$ para cada punto $p \in N$.*

Definición 1.9.10. *Sea D una distribución tangente suave en M. Decimos que D es **involutiva** si para cualquier par de secciones locales suaves de D (i.e. campos vectoriales suaves X, Y definidos en un subconjunto abierto de M tal que $X_p, Y_p \in D_p$ para cada p), su corchete de Lie es también una sección local de D.*
*Decimos que D es **integrable** si cada punto de M está contenido en una variedad integral de D.*

Proposición 1.9.4. *([16]) Cada distribución integrable es involutiva.*

Involutividad y Formas Diferenciables:
Hay una forma alternativa de caracterizar la involutividad en términos de formas diferenciales.

En lugar de describir distribuciones tangentes localmente por medio de campos vectoriales suaves, también podemos describirlos por medio de 1-forma suave como muestra el siguiente lema.

Lema 1.9.1. *(Criterio de 1-forma para una distribución)([16]) Sea M una variedad suave de dimensión n y sea $D \subset TM$ una distribución de dimensión k. Entonces D es suave si y solo si cada punto $p \in M$ tiene una vecindad U en la que hay 1-formas suaves $\omega^1, ..., \omega^{n-k}$ tal que para cada $q \in U$,*

$$D_q = Ker\omega^1/_q \cap ... \cap Ker\omega^{n-k}/_q$$

En términos más generales, decimos que una p-forma $\omega \in \mathcal{A}^p(M)$ **anula** D si $\omega(X_1, ..., X_p) = 0$ para cualesquiera $X_1, ..., X_p$ son secciones locales de D.

Proposición 1.9.5. *(Criterio de 1-forma para una involutividad)([16]) Sea $D \subset TM$ una distribución suave. Entonces D es involutiva si y solo si la siguiente condición se cumple:*
Si η es cualquier 1-forma suave que annihilates a D en un subconjunto abierto $U \subset M$, entonces $d\eta$ también annihilates a D en U.

La álgebra graduada de formas diferenciales en una variedad suave M está definido como

$$\mathcal{A}^\star(M) = \mathcal{A}^0(M) \oplus ... \oplus \mathcal{A}^n(M)$$

Un **ideal** en $\mathcal{A}^\star(M)$ es un subespacio lineal $J \subset \mathcal{A}^\star(M)$ que está cerrado bajo producto cuña con elementos arbitrarios de $\mathcal{A}^\star(M)$, es decir, $\omega \in J$ implica que $\eta \wedge \omega \in J$ para cada $\eta \in \mathcal{A}^\star(M)$.
Sea $J^p(D) \subset \mathcal{A}^p(M)$ el espacio de formas suaves que anula a D, y sea $J(D) = J^0(D) \oplus ... \oplus J^n(D) \subset \mathcal{A}^\star(M)$.
Se dice que un ideal $J \subset \mathcal{A}^\star(M)$ es un **ideal diferencial** si $d(J) \subset J$, es decir, si $\omega \in J$ implica que $d\omega \in J$.

Proposición 1.9.6. *(Criterio ideal diferencial para la involutividad)([16]) Una distribución suave $D \subset TM$ es involutiva si y solo si J(D) es un ideal diferencial, para todo ideal J.*

El Teorema de Frobenius:

Decimos que una distribución $D \subset TM$ es **completamente integrable** si existe una carta plana para D en una vecindad de cada punto de M. Obviamente, cada distribución completamente integrable es integrable y por lo tanto involutiva. En resumén,

$$completamente\ integrable \Longrightarrow integrable \Longrightarrow involutiva$$

El teorema de Frobenius es uno de los teoremas centrales de la teoría de la variedad suave. Dice que las implicaciones anteriores en realidad son equivalentes:

$$completamente\ integrable \Longleftrightarrow integrable \Longleftrightarrow involutiva$$

Teorema 1.9.1. *(Frobenius). Cada distribución involutiva es completamente integrable.*

Fibrados Principales:

Definición 1.9.11. *Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Un* ***fibrado principal*** *sobre M con grupo estructural G es una variedad diferenciable P con las siguientes características:*

a) *G actúa por la derecha libremente sobre P*

$$R_g : G \to G$$

definido por

$$R_g(u) = ug$$

para cada $u \in G$.

b) *Existe una proyección suave de P sobre M,* $\pi : P \to M$ *y* $M \cong P/G$ *(M y P/G son difeomorfos).*

c) *P es localmente trivial: para cada* $p \in M$, *existe una vecindad U de p y un difeomorfismo* $\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ *tal que* $pr_1 \circ \Psi = \pi/_{\pi^{-1}(U)}$, *donde* $pr_1 : U \times G \to U$ *es una proyección en la primera coordenada.*

Denotemos por $V_p = ker(d\pi_p) \subset T_pP$ al espacio vertical. Como $V_p = T_p(\pi^{-1}(p))$ es el espacio tangente a la fibra, entonces existe un isomorfismo de álgebra de Lie $V_p \cong \mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ es la álgebra de Lie G.

Definición 1.9.12. *Sea (P, M, G, π) un fibrado principal. Una **conexión** en P es una distribución $D \subset TP$ tal que*

***1)** Para cada $p \in P$, la restricción de $\pi_* : D_p \to T_{\pi(p)}M$ es un isomorfismo.*

***2)** D es G-invariante: $(R_g)_* D_p = D_{pg}$, para cualesquiera $g \in G \;\; y \;\; p \in P$*

***3)** Para todo $p \in P$, $\quad T_P P = V_p \oplus D_p$*

Definición 1.9.13. *Sea M una variedad suave, P un fibrado principal sobre M con fibra G y D una conexión sobre P. Sea $\gamma : [0, 1] \to P$ una curva suave en P, entonces $\dot{\gamma}(0) \in T_{\gamma(0)}P$ es tangente a $\gamma([0, 1])$. Llamamos **curva horizontal** γ, si sus vectores tangentes son horizontales, es decir,*

$\dot{\gamma}(0) \in D_p, \quad donde \quad \gamma(0) = p$

Para cada $p, q \in P$, escribimos $p \sim q$ si existe una curva horizontal en P uniendo los puntos p a q, donde $\sim$ es la relación de equivalencia.

Definición 1.9.14. *Definimos el **grupo de holonomía** $Hol_p(P, D)$ de (P, D) por*

$$Hol_p(P, D) = \{g \in G : p \sim g.p\}$$

Definición 1.9.15. *Sea M una variedad suave, P un fibrado principal sobre M con fibra G y D una conexión sobre P. Definimos el **grupo de holonomía restringida** $Hol_p^0(P, D)$, como el conjunto de $g \in G$ para el cual existe una curva horizontal suave $\gamma : [0, 1] \to P$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = g.p \quad y \quad \pi \circ \gamma$ es homotopicamente nulo en M.*

Proposición 1.9.7. *([16]) Si M es una variedad suave, P un fibrado principal sobre M con fibra G y D una conexión sobre P, entonces $Hol_x^0(P, D)$ es un subgrupo de Lie de G. Es el*

componente conexo de $Hol_x(P,D)$ *que contiene la identidad, y es un subgrupo normal de* $Hol_x(P,D)$*. Existe un homomorfismo sobreyectivo* $\phi : \pi_1(M) \to Hol_x(P,D)/Hol_x^0(P,D)$ *dado por* $\phi([\gamma]) = P_\gamma.Hol_x^0(P,D)$*. Así, si M es simplemente conexo, entonces* $Hol_x(P,D) = Hol_x^0(P,D)$

Fibrado Vectorial asociado a un G-Fibrado Principal

Sea $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal y sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación de G. Mediante la acción derecha de G en $P \times V$ dada por

$$(p, v)g = (pg, \rho(g^{-1})v)$$

se construye un **fibrado vectorial asociado** con fibra típica V:

$$\rho(P) = \frac{P \times V}{G}$$

Una conexión D en P induce una conexión ∇ en $\rho(P)$.

Ejemplo 1.9.2. *Para* $\rho = Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$*,* $Ad(P)$ *es llamado el fibrado adjunto a P. La fibra típica es isomorfa a* $\mathfrak{g}$

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial de rango k. El fibrado de las bases $B(E)$ es un fibrado principal con fibra típica isomorfa a $GL(k)$; la fibra típica en $x \in M$ es el conjunto de las bases de E_x. Una conexión ∇ sobre E induce una conexión D sobre $B(E)$. Finalmente, compararemos los grupos de holonomía de una conexión en fibrados vectoriales y fibrados principales.

Proposición 1.9.8. *([16]) Sea M una variedad suave, P un fibrado principal sobre M con fibra G. Sea* $\rho : G \to GL(V)$ *una representación de G en un espacio vectorial V. Supongamos que* $E = \rho(P)$*, si* ∇ *es una conexión sobre E y D es una conexión sobre P. Entonces* $Hol(P,D)$ *y* $Hol(\nabla)$ *son subgrupos de G y* $GL(V)$ *respectivamente y* $\rho\,(Hol(P,D)) = Hol(\nabla)$*.*

Proposición 1.9.9. *([16]) Si* $\pi : E \to M$ *es un fibrado vectorial y* $B(E)$ *es el fibrado de las bases, entonces* $Hol(D) = Hol(\nabla)$*, donde D es una conexión sobre P y* ∇ *es una conexión sobre*

E.

Teorema 1.9.2. ***(Teorema de la reducción)****([16]) Sean* (P, M, G, π) *un fibrado principal y D una conexión sobre P. Si* $H \subset G$ *es el grupo de holonomía de D, entonces existe un subfibrado principal* P' *sobre M con grupo de estructura H y al restringirse la conexión D es una conexión* D' *sobre* P'.

Definición 1.9.16. *Sean* $\pi : E \to M$ *un fibrado vectorial de rango k, y G un subgrupo de Lie de* $GL(k)$. *Una G-estructura sobre E es una reducción del fibrado de bases* $B(E)$ *a un G-subfibrado principal.*

1.9.3. Holonomía y Curvatura

El grupo de holonomía de una conexión esta relacionada con la curvatura de una conexión, por lo cual es importante estudiar la curvatura Rm, curvatura de Ricci Rc y la curvatura escalar, además veremos un resultado importante (**teorema de Ambrose-Singer**) que relaciona el grupo de holonomia y la curvatura.([16]).

Definición 1.9.17. *Sea M una una variedad suave, E un fibrado vectorial sobre M y* ∇ *una conexión en E.* ***La curvatura*** *de* ∇ *es la aplicación*

$$Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

definido por

$$Rm(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *y* $s \in \Gamma(E)$, *donde Rm es* $C^\infty(M)$*-lineal en cada variable.*

Ejemplo 1.9.3. *En una curva plana* $\alpha \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}^2)$, *la curvatura es una función real de variable real que nos indica que tan lejos la curva deja de ser una recta. Así por ejemplo tenemos que la curvatura de la recta es cero.*

Definición 1.9.18. ***La curvatura de Ricci*** *es la traza sobre la primera y última variable de la curvatura Rm*

$$Rc = tr(Rm)$$

En coordenadas locales tenemos:

$$Rc_{ij} = Rm^{k}_{kij} = g^{kl}Rm_{kijl} = Rm^{l}_{ijl} = g^{lk}Rm_{kijl} = Rm^{k}_{ijk}$$

Definición 1.9.19. ***La curvatura escalar*** *es la traza con respecto a la métrica Riemanniana g de la curvatura de Ricci Rc*

$$S = tr_g(Rc)$$

En coordenadas locales tenemos:

$$S = Rc^{j}_{j} = Rm^{ji}_{ij}$$

Teorema 1.9.3. *(**Ambrose-Singer**)([16])*

a). *Sea M una una variedad suave, E un fibrado vectorial sobre M y ∇ una conexión en E. Entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{hol}_x(\nabla)$ de $Hol_x(\nabla)$ es generado por todos los elementos de la forma*

$$(P_\gamma)^{-1} \circ Rm(\nabla)(v,w) \circ P_\gamma \in \mathfrak{hol}_x(\nabla)$$

donde $x \in M$, $\gamma : [0,1] \to M$ es una curva suave por partes con $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $P_\gamma : E_x \to E_y$ es la aplicación del transporte paralelo, y $v, w \in T_yM$ además Rm es el tensor de curvatura $(3,1)$*-tensor.*

b). *Sea M una variedad suave, P un fibrado principal sobre M con fibra G y D una conexión en P. Para cada $p \in P$ definimos $Q = \{q \in P : p \sim q\}$. Entonces $\mathfrak{hol}_p(P,D)$ es un subespacio vectorial de una álgebra de Lie $\mathfrak{g} \in G$, generado por los elementos de la forma*

$$\pi^* \left(Rm(P,D)(v,w)\right)_q$$

para cada $q \in Q$ y $v, w \in \Gamma(TM)$, donde $\pi : P \times \mathfrak{g} \to ad(P)$ es la proyección.

Usando este teorema de la parte **b).** se puede probar la recíproca del teorema de la reducción.

Teorema 1.9.4. *([16]) Sea* (P, M, G, π) *un fibrado principal y H un subgrupo de Lie conexo de G. Si restringiendo P se obtiene un subfibrado con grupo de estructura H, entonces existe una conexión D sobre P tal que* $Hol(D) = H$.

Consecuencia: La cuestión de la existencia de conexiones con holonomía prescrita es equivalente a la cuestión de existencia de G-estructuras y depende de las características topológicas del fibrado.
Estas descripciónes de las álgebra de Lie $\mathfrak{hol}_x(\nabla)$ y $\mathfrak{hol}_p(P, D)$ de los grupos de holonomía $Hol_x(\nabla)$ y $Hol_p(P, D)$ respectivamente, son importantes para la clasificación de los grupos de holonomía.

Ejemplo 1.9.4. *Si M es una variedad Riemanniana orientada genérica, entonces* $Hol(\nabla) = SO(n)$.

Ejemplo 1.9.5. *Si M es una variedad Riemanniana, entonces* $Hol(\nabla) \subset O(n)$, *donde* ∇ *es una conexión de Levi-Civita. Una métrica Riemanniana en la base es equivalente a una* $O(n)$*-estructura.*

Ejemplo 1.9.6. *Si M es Kähleriana* $(n = 2m)$, *entonces* $Hol(\nabla) = U(m)$.

1.9.4. Clasificación de los Grupos de Holonomía Riemanniana

El grupo de holonomía $Hol(g)$ de una variedad Riemanniana (M, g) determina estructuras geométricas en M compatibles con g. De este modo la clasificación de Berger de los grupos de holonomía Riemanniana da una lista de estructuras geométricas compatibles con una métrica Riemanniana g. La mayoria de los grupos de holonomía en la lista de Berger son importantes en la teoria de cuerdas en física teórica ([16]).

Definición 1.9.20. *Se dice que* (M, g) *es* ***reducible*** *si es isométrica a una variedad producto* $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$. *M es* ***localmente reducible*** *si todo punto admite una vecindad reducible. M es* ***irreducible*** *si no es localmente reducible.*

Si H_1 y H_2 son grupos de holonomía de (M_1, g_1) y (M_2, g_2) respectivamente, entonces el grupo de holonomía de $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ es $H_1 \times H_2$.
La representación de holonomía tiene buen comportamiento en el caso en que M es completa y simplemente conexo.
Así, para poder clasificar todos los posibles grupos de holonomía Riemanniana, debemos asumir que (M, g) sea irreducible.

Proposición 1.9.10. *([16]) Si* (M, g) *es una variedad Riemanniana irreducible, entonces la inclusión* $Hol(M, g) \subset O(m)$ *define representaciones irreducibles en* $\mathbb{R}^m$.

Esta proposición se completa con el siguiente teorema que garantiza la existencia de una descomposición en factores irreducibles.

Teorema 1.9.5. ***(Descomposición de deRham)****([16]) Si* (M, g) *es una variedad Riemanniana simplemente conexa y completa, entonces existen* (M_j, g_j) *para* $j = 1, 2, ..., k$ *completas y simplemente conexas tales que la acción de* $Hol(g_j)$ *sobre* TM_j *es irreducible y* (M, g) *es isométrica a* $(M_1 \times M_2 \times ... \times M_k, g_1 \times g_2 \times ... \times g_k)$ *con* $Hol(g) = Hol(g_1) \times Hol(g_2) \times ... \times Hol(g_k)$.

En general, si la representación de holonomía es reducible, entonces la métrica es localmente reducible, y el grupo de holonomía es un producto.

Teorema 1.9.6. *([16])* $Hol^0(g)$ *es un subgrupo de Lie cerrado y conexa de* $SO(n)$. *Si* (M, g) *es compacta e irreducible, entonces* $Hol(g)$ *es un subgrupo de Lie compacto de* $O(n)$.

1.9.5. Clasificación de Berger

Si se excluyen los espacios simétricos, entonces sorprendentemente se pueden dar una lista finita de los grupos de holonomía Riemanniana.
Supongamos que g no es localmente simétrico, y nos hacemos una pregunta ¿ Que subgrupos de SO(n) pueden ser el grupo de holonomía de una métrica Riemanniana irreducible y no simétrica g en una variedad Riemanniana simplemente conexo M? ([16])
El siguiente teorema responde a la pregunta.

Teorema 1.9.7. ***(Berger)****([16]) Si (M, g) es una variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible de dimensión n y no es localmente simétrico, entonces $Hol(g)$ es uno de los siguientes subgrupos de SO(n):*
i) *$Hol(g)$=SO(n)*
ii) *$n = 2m$ con $m \geq 2$ y $Hol(g) = U(m)$ en SO(2m) (Kähler)*
iii) *$n = 2m$ con $m \geq 2$ y $Hol(g)$=SU(m) en SO(2m) (Calabi-Yau)*
iv) *$n = 4m$ con $m \geq 2$ y $Hol(g)$=Sp(m) en SO(4m) (HiperKähler)*
v) *$n = 4m$ con $m \geq 2$ y $Hol(g)$=Sp(m)Sp(1) en SO(4m) (Cuaterniónica-Kähler)*
vi) *$n = 7$ y $Hol(g) = G_2$ en SO(7)*
vii) *$n = 8$ y $Hol(g)$=Spin(7) en SO(8)*

La demostración original de Berger fue hecha a partir de un análisis caso a caso. La explicación geométrica de esta lista llegó con la siguiente versión del mismo teorema, probada por Simons.

Teorema 1.9.8. ***(Versión de Simons)****([16]) Si (M, g) es una variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible de dimensión n y no es localmente simétrico, entonces $Hol(g)$ actúa transitivamente sobre S^{n-1}.*

La lista de grupos de Lie que actúan transitivamente sobre esferas es conocida, y tiene a la lista de Berger como subconjunto.
La demostración de Simons es aún bastante trabajosa. una demostración más simple fue dada por Olmos en 2005. La idea general es mostrar que el espacio normal a una órbita de la acción de la holonomía es exponenciada en una subvariedad localmente simétrica. Si la acción no fuese

transitiva sobre la esfera, entonces se muestra que se puede generar varias de esas subvariedades, lo que eventualmente hace que M sea localmente simétrica.

1.10. GRUPOS RIEMANNIANAS IRREDUCIBLES

Está sección está dedicado al estudio de cada uno de los grupos de holonomía sobre la clasificación de Berger ([16]).

1.10.1. U(n)

Según la clasificación de Berger, las métricas riemannianas g en las variedades de dimensiones pares con $Hol(g) = U(n)$ son las métricas de K*ä*hler.

Las variedades de K*ä*hler son variedades Riemannianas con grupo de holonomía $U(n)$, $(Hol(g) = U(n))$.

Proposición 1.10.1. *([16]) Sea M una variedad compleja, J una estructura casi-compleja y g una métrica hermitiana con una forma de Kähler ω. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de g. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
i) *g es una métrica de Kähler.*
ii) $\nabla J = 0$
iii) $\nabla\omega = 0$
iv) *El grupo de holonomía de g* $(Hol(g) = U(n))$*, y J está asociado a la $U(n)$-estructura correspondiente.*

1.10.2. SU(n)

La métrica g con el grupo de holonomía S$U(n)$ son las métricas de Calabi-Yau.
Las variedades de Calabi-Yau son variedades Riemannianas con grupo de holonomía SU(n), $(Hol(g)$ =SU(n)).

Proposición 1.10.2. *([16]) Si* (M, J, g) *es una variedad de Kähler. Entonces* $Hol^0(g) \subseteq SU(n)$ *si y solo si g es Ricci-plana.*

Corolario 1.10.1. *([16]) Si* (M, J, g) *una variedad de Kähler compacta Ricci-plana. Entonces* $Hol(g) \subseteq SU(n)$ *si y solo si el fibrado canónical* $K_M = \bigwedge^{n,0} M$ *de M es trivial.*

1.10.3. Sp(n)

La métrica g con el grupo de holonomía $SU(n)$ son las métricas hiperKähler.

Las variedades hiperKähler son 4n-variedades Riemannianas con grupo de holonomía Sp(n), ($Hol(g)$ =Sp(n)).

Proposición 1.10.3. *([16]) Sea M una* $4m$*-variedad Riemanniana y* (I, J, K, g) *es una estructura casi-hiperkähler sobre M y sea* w_I, w_J, w_K *formas de Kähler. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. (I, J, K, g) *es una estructura hiperkähler sobre M,*

2. $dw_I = dw_J = dw_K = 0$*,*

3. $\nabla w_I = \nabla w_J = \nabla w_K = 0$*,*

4. $Hol(g) = Sp(n)$*.*

1.10.4. Sp(n)Sp(1)

Comenzamos está sección, recordando cuál es la acción de Sp(n)Sp(1) en $\mathbb{H}^n$. Sea Sp(n) el grupo de matrices $n \times n$ sobre los cuaterniones $\mathbb{H}$, podemos describir la acción de $(A, q) \in$ Sp(n)×Sp(1) por

$$(q^1 q^2 ... q^n) \longmapsto q(q^1 q^2 ... q^n)\bar{A}^t$$

Sea I_n la matrix identidad $n \times n$, entonces $(-I_n, -1) \in Sp(n) \times Sp(1)$ actúa trivialmente en $\mathbb{H}^n$, claramente esta acción empuja hacia abajo

$$Sp(n)Sp(1) = (Sp(n) \times Sp(1))/\{\pm(I_n, 1)\}$$

Como la multiplicación en $\mathbb{H}$ no es conmutativa, entonces multiplicar a la izquierda $(q^1q^2...q^n)$ por q no es lo mismo que multiplicar a la derecha por qI_n, por lo cual la acción Sp(1) no es parte de la acción Sp(n).

Una variedad de K*ä*hler-Cuaterniónica de dimensión $4n$, es una $4n$-variedad Riemanniana (M, g) con grupo de holonomía Sp(n)Sp(1), $(Hol(g) = \text{Sp(n)Sp(1)})$.

Proposición 1.10.4. *([16]) Cualquier variedad de Kähler-Cuaterniónica* (M, g) *es Einstein, y si g es Ricci-plana entonces* $Hol^0(g) \subseteq Sp(n)$.

1.10.5. G_2

Las métricas Riemannianas con holonomía excepcional G_2 de dimensión 7 son necesariamente Ricci-plana.

Una G_2-variedad es una 7-variedad Riemanniana (M, g) con grupo de holonomía G_2, $(Hol(g) = G_2)$.

Proposición 1.10.5. *([16]) Sea M una* 7*-variedad Riemanniana orientada y sea* (φ, g) *una* G_2*-estructura en M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1). (φ, g) *es libre de torsión.*

2). $Hol(g) = G_2$ *y* φ *es una* 3*-forma inducida.*

3). $\nabla\varphi = 0$ *en M, donde* ∇ *es la conexión de Levi-Civita de g.*

4). $d\varphi = d^*\varphi = 0$ *en M.*

5). $d\varphi = 0$ *y* $d(*\varphi) = 0$ *en M.*

Proposición 1.10.6. *([16]) Sea* (M, g) *una* 7*-variedad Riemanniana. Si* $Hol(g) \subseteq G_2$ *entonces g es Ricci-plana.*

Teorema 1.10.1. *([16]) Los únicos subgrupos de Lie de G_2, que pueden ser los grupos de holonomía de métricas Riemannianas en 7-variedades son:*
i). $\{1\}$
ii). *SU(2), actuando sobre $\mathbb{R}^7 \cong \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{C}^2$, trivialmente sobre $\mathbb{R}^3$ y como siempre en $\mathbb{C}^2$.*
iii). *SU(3), actuando sobre $\mathbb{R}^7 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}^3$, trivialmente sobre $\mathbb{R}$ y como siempre en $\mathbb{C}^3$.*
iv). *G_2, actuando sobre $\mathbb{R}^7$.*
Por lo tanto SU(2)$\subset$ SU(3)$\subset$ G_2 $\subset$ SO(7).

Estas inclusiones SU(2)$\subset$ G_2 y SU(3)$\subset$ G_2 implican que cada Calabi-Yau de 2-hojas ó 3-hojas con holonomía SU(2) ó SU(3) es siempre una G_2-variedad.

1.10.6. Spin(7)

Las métricas Riemannianas con holonomía excepcional Spin(7) de dimensión 8 son necesariamente Ricci-plana.

Una Spin(7)-variedad es una 8-variedad Riemanniana (M, g) con grupo de holonomía Spin(7), $(Hol(g) = \text{Spin}(7)$.

Proposición 1.10.7. *([16]) Sea M una 8-variedad Riemanniana orientada y (Ω, g) una Spin(7)-estructura en M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
i). *(Ω, g) es libre de torsión.*
ii). *$Hol(g)$ =Spin(7) y Ω es una 4-forma inducida.*
iii). *$\nabla\Omega = 0$ en M, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de g, y*
iv). *$d\Omega = 0$ en M.*

Proposición 1.10.8. *([16]) Sea (M, g) una 8-variedad Riemanniana. Si $Hol(g) \subseteq$ Spin(7) entonces g es Ricci-plana.*

Teorema 1.10.2. *([16]) Los únicos subgrupos de Lie de Spin(7), que pueden ser los grupos de holonomía de métricas Riemannianas en* 8*-variedades, son:*

i). $\{1\}$

ii). *SU(2), actuando sobre* $\mathbb{R}^8 \cong \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{C}^2$*, trivialmente sobre* $\mathbb{R}^4$ *y como siempre en* $\mathbb{C}^2$*.*

iii). *SU(2)×SU(2), actuando sobre* $\mathbb{R}^8 \cong \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$

iv). *SU(3), actuando sobre* $\mathbb{R}^8 \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{C}^3$*, trivialmente sobre* $\mathbb{R}^2$ *y como siempre en* $\mathbb{C}^3$*.*

v). G_2*, actuando sobre* $\mathbb{R}^8 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$ *trivialmente sobre* $\mathbb{R}$ *y como siempre en* $\mathbb{R}^7$*.*

vi). *Sp(2)*

vii). *SU(4) y*

viii). *Spin(7), actuando sobre* $\mathbb{R}^8$*.*

Por lo tanto SU(2)⊂ SU(3)⊂ $G_2 \subset$ *Spin(7).*

Capítulo 2

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capitulo se describen las estructuras geométricas sobre variedades Riemannianas mediante un enfoque unificado utilizando las álgebras de división normada $\mathbb{A}$, producto vectorial cruz real (PVC-$\mathbb{R}$) y producto vectorial cruz complejo (PVC-$\mathbb{C}$). Se incluyen las geometrías de K*ä*hler, la geometría de Calabi-Yau, la geometría hiperk*ä*hler, la geometría cuaterniónico-K*ä*hler, la geometría Spin(7) y la geometría-G_2 ([1]).

2.1. Geometría del Producto Vectorial Cruz Real (PVC-$\mathbb{R}$)

En esta sección estudiamos la geometría de variedades con producto vectorial cruz real (PVC-$\mathbb{R}$), además estudiamos instantones y branas en variedades con PVC-$\mathbb{R}$.

2.1.1. Variedades Riemannianas con PVC-$\mathbb{R}$

En esta subsección, revisamos las definiciónes de las propiedades básicas y clasificaciones de variedades con producto vectorial cruz real (PVC-$\mathbb{R}$). La lista de las variedades Riemannianas con estructuras PVC-$\mathbb{R}$ en sus fibrados tangentes son: variedades de Kähler, G_2-variedades y Spin(7)-variedades.

Definición 2.1.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana n-dimensional, un **PVC r-ario** es un mapeo suave,*

$$\chi : \wedge^r (TM) \longrightarrow TM \ , \ (1 \leqslant r \leqslant n)$$

$$(v_1, ..., v_r) \longmapsto \chi(v_1, ..., v_r) = v_1 \times ... \times v_r$$

satisfaciendo:

i) $\langle v_1 \times ... \times v_r, v_i \rangle = 0 \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$

ii) $\langle v_1 \times ... \times v_r, v_1 \times ... \times v_r \rangle = \|v_1 \wedge ... \wedge v_r\|^2$

$\forall x \in M$ *y para cualesquiera* $v_1, ..., v_r \in T_xM$*, donde* $\|.\|$ *es la norma inducida en* $\wedge^r(TM)$*.*

Por la definición universal, la construcción de $\wedge^r(TM)$ identificamos de mapeos alternados con el mapeo universal ([7] pag. 265).

La primera condición de la definición anterior es equivalente a que el siguiente tensor ϕ, es un tensor simétrico de grado $(r + 1)$, es decir, ϕ es una forma diferencial

$$\phi(v_1, ..., v_r, v_{r+1}) = g(v_1 \times ... \times v_r, v_{r+1})$$

Demostración:

Basta probar que $\forall v_1, ..., v_r, v_{r+1} \in T_xM : \phi(v_1, ..., v_r, v_{r+1}) = 0$.

Por la primera condición de la definición anterior tenemos

$\forall v_1, ..., v_r \in T_xM : g(v_1 \times ... \times v_r, v_i) = 0$, en particular $v_i = v_1 \times ... \times v_r$

$$g(v_1 \times ... \times v_r, v_1 \times ... \times v_r) = 0$$

entonces $v_1 \times ... \times v_r = 0$.

Ahora, para cualquier v_{r+1} en T_xM se tiene,

$$\begin{aligned} \phi(v_1, ..., v_r, v_{r+1}) &= g(v_1 \times ... \times v_r, v_{r+1}) \\ &= g(0, v_{r+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces para cualesquiera $v_1, ..., v_r, v_{r+1} \in T_xM : \phi(v_1, ..., v_r, v_{r+1}) = 0$. □

La clasificación del PVC r-ario en un espacio vectorial V, con un producto interno positiva definida g, se tiene en los siguientes casos:

(i) r=1:

El PVC 1-ario en V es equivalente a una estructura cuasi-compleja hermitiana en V.

Demostración:

(⇒) El PVC 1-ario en V es una transformación lineal

$$\chi : V \longrightarrow V$$

satisfaciendo

1) $< \chi u, v > + < u, \chi v >= 0$

2) $< \chi u, \chi v >=< u, v >$

para cada $u, v \in V$.

De las condiciones 1) y 2) se tiene que $\chi^2 = -1_V$, entonces χ es una estructura cuasi-compleja hermitiana en V.

(⇐) Si $J : V \longrightarrow V$ es una estructura cuasi-compleja hermitiana en V entonces tenemos $J^2 = -1_V$ y $< Ju, Jv >=< u, v >$ para cada $u, v \in V$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} < Ju, u > &=< J^2u, Ju > \\ &=< -u, Ju > \\ &= - < u, Ju > \end{aligned}$$

en consecuencia se tiene $< Ju, u > + < u, Ju >= 0$.

Entonces J es el PVC 1-ario en V.

Por lo tanto, el PVC 1-ario es equivalente a una estructura cuasi-compleja hermitiana en V. □

ii) r=n-1:

El PVC $(n-1)$-ario en un espacio de producto interno n-dimensional V es el operador estrella de Hodge $\star$ dado por g en $\wedge^{n-1}(V)$

$$\star : \wedge^{n-1}(V) \longrightarrow \wedge^1(V)$$

definido por

$$u \wedge \star v =< u, v > vol$$

para cada $u, v \in \wedge^{n-1}(V)$ y $vol = e_1\wedge, ..., \wedge e_n$, donde $e_1, ..., e_n$ es una base ortonormal de V.

iii) r=2:

El PVC 2-ario en un espacio vectorial 7-dimensional $\mathbb{R}^7$ es un producto cruz

$$\chi : \mathbb{R}^7 \otimes \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$$

definido por

$$u \times v = Im(uv)$$

para cada $u, v \in \mathbb{R}^7 = Im\mathbb{O}$ (conjunto de números octoniones imaginario)

iii) r=3:

El PVC 3-ario en un espacio vectorial 8-dimensional $\mathbb{R}^8$ es un producto cruz

$$\times : \mathbb{R}^8 \otimes \mathbb{R}^8 \otimes \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8$$

definido por

$$u \times v \times w = \frac{(u(\overline{v}w) - w(\overline{v}u))}{2}$$

para cada $u, v, w \in \mathbb{O}$

El $\mathbb{R}$-PVC también se puede caracterizar en términos de ϕ de la siguiente manera:

Definición 2.1.2. *Una PVC-forma de grado* $(r + 1)$ *es una forma diferencial* $\phi \in \Omega^{r+1}(M)$ *satisfaciendo*

$$| \iota_{e_1\wedge...\wedge e_r}(\phi) | = 1$$

para cada $p \in M$*, para cualesquiera vectores ortonormales* $e_1, ..., e_r$ *en* T_pM*.*

La clasificación del PVC-forma, se tiene en los siguientes casos:

(i) r=1:

Su correspondiente PVC-forma de grado 2, es una forma de Kähler $\phi \in \Omega^2(V)$ dado por

$$\phi(u, v) = g(Ju, v)$$

El ejemplo estandar es $V = \mathbb{C}^m$ con $\phi = dx^1 \wedge dy^1 + ... + dx^m \wedge dy^m$

(i) r=n-1:

Su correspondiente PVC-forma de grado n, es una forma de volumen inducida $\phi \in \Omega^n(V)$ dado por

$$\phi(v_1, ..., v_{n-1}, v_n) = g(v_1 \times ... \times v_{n-1}, v_n)$$

El ejemplo estandar es $V = \mathbb{R}^n$ con $\phi = dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$

(i) r=2:

Su correspondiente PVC-forma de grado 3 es una G_2-forma $\phi \in \Omega^3(\mathbb{R}^7)$ dado por

$$\phi(u, v, w) = g(u \times v, w)$$

Por ejemplo, para coordenadas $(x_1, ..., x_7) \in \mathbb{R}^7$ la correspondiente PVC-forma ϕ de grado 3 se puede escribir como

$$\phi = dx^{123} - dx^{167} + dx^{145} + dx^{257} + dx^{246} - dx^{356} + dx^{347}$$

donde $dx^{ijk} = dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$

iv) r=3:

Su correspondiente PVC-forma de grado 4 es una spin(7)-forma $\phi \in \Omega^4(\mathbb{R}^8)$ dado por

$$\phi(u, v, w, d) = g(u \times v \times w, d)$$

Por ejemplo, para coordenadas $(x_1, ..., x_8) \in \mathbb{R}^8$ la correspondiente PVC-forma ϕ de grado 4 se puede escribir como

$$\phi = -dx^{1234} - dx^{5678} - (dx^{21} + dx^{34})(dx^{65} + dx^{78}) - (dx^{31} + dx^{42})(dx^{75} + dx^{85}) - (dx^{41} + dx^{23})(dx^{85} + dx^{67})$$

donde $dx^{ijkl} = dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$.

Dado un PVC en una variedad Riemanniana M, es un PVC lineal en cada espacio tangente de M, imponemos ciertas condiciones de integrabilidad para su coherencia. Por ejemplo, el PVC 1-ario es una estructura cuasi-compleja hermitiana en M. Esto define una estructura simplectica o estructura de Kähler en M si su correspondiente PVC-forma es cerrado o paralela respectivamente.

Definición 2.1.3. *Sean M una variedad Riemanniana n-dimensional, χ el PVC r-ario y su correspondiente PVC-forma ϕ. Llamamos a χ un PVC cerrado (resp. paralela) si $d\phi = 0$ (resp. $\nabla\phi = 0$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita en M).*

La clasificación de variedades con PVC cerrrado/paralela es presentado en la siguiente tabla 2.1:

Tabla 2.1:

r	PVC cerrado	PVC paralela
1	Variedades cuasi-Kähler	Variedades Kähler
$n-1$	Variedades Riemanniana Orientada	Variedades Riemanniana Orientada
2	Variedades cuasi-G_2	Variedades G_2
3	Variedades spin(7)	Variedades spin(7)

En la siguiente subsección estudiamos subvariedades en M que son preservados por el $\mathbb{R}$-PVC.

2.1.2. Instantones del Producto Vectorial Cruz (PVC)

En esta subsección estudiamos instantones en variedades Riemannianas M con PVC. Desarrollamos la teoría de los instantones, que son subvariedades en M preservado por el PVC. Los instantones son siempre subvariedades minímos absolutas en M, por ejemplo son: subvariedades abiertas, curvas holomorfas, subvariedades asociativas y subvariedades de Cayley ([6]).

Definición 2.1.4. *Sean M una variedad Riemanniana y χ el PVC r-ario cerrado. Una subvariedad $(r+1)$-dimensional A es llamado un **instantón** si este es preservada por χ. Es decir, para*

cualesquiera $p \in M$ *y vectores tangentes* $u_1, ..., u_r \in T_pA$ *tenemos* $u_1 \times ... \times u_r \in T_pA$.

Cuando A es una curva holomorfa en una variedad cuasi-Kähler M, su fibrado normal $N_{A/M}$ tiene una estructura compleja natural cuyas secciones holomorfas describe deformaciones infinitesimales de A dentro de M.
La siguiente proposición generaliza dicha estructura en $N_{A/M}$ a cualquier estructura PVC.

Proposición 2.1.1. *Sea* (M, g) *una variedad Riemanniana con un PVC r-ario* χ *y* A *es un instantón en* M. *Entonces* χ *restringida da un mapeo de fibrado*

$$\wedge^{r-1}TA \otimes N_{A/M} \to N_{A/M}$$

donde $N_{A/M}$ *es un fibrado normal de* A *en* M.

Demostración:
Queremos probar, restringiendo χ, podemos dar un mapeo de fibrado
$\wedge^{r-1}TA \otimes N_{A/M} \to N_{A/M}$, para ello basta probar que $u_1 \times ... \times u_{r-1} \times v \in N_{A/M}$. Supongamos que A es un instantón en M. Sea $x \in A$ y vectores tangentes $u_1, ..., u_{r-1} \in T_xA$ y cualesquiera vector normal $v \in N_{A/M}$.
Para cualquier $u \in T_xA$ tenemos

$$\begin{aligned} g(u_1 \times ... \times u_{r-1} \times v, u) &= \phi(u_1, ..., u_{r-1}, v, u) \\ &= -\phi(u_1, ..., u_{r-1}, u, v) \\ &= -g(u_1 \times ... \times u_{r-1} \times u, v) \end{aligned}$$

Como A es un instantón en M entonces A es preservado por χ, por lo cual
$u_1 \times ... \times u_{r-1} \times u \in T_xA$.
Ahora restringiendo $\chi : \wedge^r(TM) \longrightarrow TM$ a un subconjunto $\wedge^r(TA) \subset \wedge^r(TM)$, tenemos la función

$$\chi_{/\wedge^r(TA)} : \wedge^r(TA) \longrightarrow TM$$

definida por

$$(\chi_{/\wedge^r(TA)})(u_1, ..., u_{r-1}, u) = \chi(u_1, ..., u_{r-1}, u)$$

satisfaciendo

$$g(u_1 \times ... \times u_{r-1} \times u, v) = 0$$

Ahora

$$g(u_1 \times ... \times u_{r-1} \times v, u) = -g(u_1 \times ... \times u_{r-1} \times u, v)$$
$$= 0$$

por consiguiente $g(u_1 \times ... \times u_{r-1} \times v, u) = 0$. Entonces $u_1 \times ... \times u_{r-1} \times v \in N_{A/M}$, esto implica que hay un mapeo de fibrado

$$\wedge^{r-1} TA \otimes N_{A/M} \to N_{A/M}$$

□

De hecho, el fibrado normal para un instantón es siempre un fibrado spinor retorcido sobre A y el mapeo de fibrado anterior es dado por la multiplicación de Clifford.
Un instantón en M siempre es una subvariedad mínima con un volumen mínimo absoluto. Esto seguirá de una caracterización equivalente de instantones, es decir, son aquellas subvariedades en M calibrados por ϕ.

Forma calibrada:

Definición 2.1.5. *Sea M una variedad Riemanniana. Una forma diferencial cerrada ψ de grado k en M es llamada una **forma calibrada** si satisface*

$$\psi(x)/_V \leq vol_V$$

para cada k-plano orientado V en T_xM, para todo punto $x \in M$ y vol_V es una forma de volumén en V para la métrica inducida.

Subvariedad calibrada:

Definición 2.1.6. *Una **subvariedad calibrada** A es una subvariedad, donde $\psi|_A$ es igual a una forma de volumén inducida en A*

$$\psi|_A = Vol_A$$

Una observación importante es la siguiente: cualquier otra subvariedad B, homóloga a A, satisface

$$Vol(B) \geq Vol(A) = \int_A [\psi]$$

y el signo de igualdad se cumple si y solo si B es también una subvariedad calibrada en M.
El siguiente lema muestra que los instantones son subvariedades calibradas.

Lema 2.1.1. *Sea M una variedad Riemanniana con un PVC r-ario χ y denotamos la PVC-forma correspondiente como ϕ. Entonces tenemos*
i) *ϕ es una forma calibrada.*
ii) *Una subvariedad $(r+1)$-dimensional A en M es calibrada por ϕ si y solo si es un instantón.*

Demostración:

i) Queremos probar que una forma diferencial cerrada ϕ es una forma calibrada.
Para todo $x \in M$ y para cualesquiera vectores tangentes ortonormales orientadas $e_1, e_2, ..., e_{r+1}$ en T_xM

$$\begin{aligned}\phi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) &= \langle \chi(e_1, e_2, ..., e_r), e_{r+1} \rangle \\ &\leq | \chi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) | \, | e_{r+1} | \\ &= \| e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_r \| \, | e_{r+1} | \\ &= 1\end{aligned}$$

Entonces $\phi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) \leq 1$. Por lo tanto ϕ es una forma calibrada.

ii) ($\Rightarrow$) Queremos probar que A es un instantón. Supongamos que una subvariedad $(r+1)$-dimensional A en M es calibrada por ϕ, i.e.

$$\phi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) = vol_A$$

Para todo punto $x \in A$ y para cualesquiera vectores tangentes ortonormales orientadas $e_1, e_2, ..., e_{r+1}$ en T_xA.

Ahora tenemos

$$\phi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) = vol_A$$

$$\phi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) = e_1 \wedge ... \wedge e_r$$

$$\phi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) = 1$$

$$g(\chi(e_1, e_2, ..., e_r), e_{r+1}) = 1$$

Entonces $\chi(e_1, e_2, ..., e_r) = e_{r+1}$. Por lo tanto $e_1, e_2, ..., e_{r+1}$ es preservado por χ.

($\Leftarrow$) Queremos probar que una subvariedad A es calibrada por ϕ.

Supongamos que A es un instantón, es decir, para cualesquiera vectores tangentes ortonormales orientadas $e_1, e_2, ..., e_{r+1}$ en T_xA, tenemos $e_1 \times e_2 \times ... \times e_{r+1} \in T_xA$.

Supongamos en particular $\chi(e_1, e_2, ..., e_r) = e_{r+1}$, luego tenemos

$$\begin{aligned}\phi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) &= g(\chi(e_1, e_2, ..., e_r), e_{r+1}) \\ &= 1\end{aligned}$$

Entonces $\phi(e_1, e_2, ..., e_{r+1}) = 1$. Por lo tanto una subvariedad A es calibrada por ϕ. □

Ejemplos de instantones:

(i) Los instantones en una variedad Riemanniana orientada n-dimensional (i.e. PVC forma de grado n) son subvariedades abiertos en M.

(ii) Los instantones en una variedad de K*ä*hler (i.e. PVC forma paralela de grado 2) son curvas holomorfas.

(iii) Los instantones en una G_2-variedad (i.e. PVC forma paralela de grado 3) son subvariedades asociativas.

(iv) Los instantones en una Spin(7)-variedad (i.e. PVC forma paralela de grado 4) son subvariedades de Cayley.

2.1.3. Branas del Producto Vectorial Cruz (PVC)

En esta subsección estudiamos branas en variedades Riemannianas M con PVC. Desarrollamos la teoría y algunas propiedades básicas de las branas, además mostraremos que una brana no existe en una Spin(7)-variedad y los ejemplos de branas son: hipersuperficies, subvariedades Lagrangianas y subvariedades coasociativas ([6]).

Definición 2.1.7. *Sea M una variedad n-dimensional con una PVC-forma cerrado ϕ de grado $(r+1)$. Una subvariedad C es llamada* ***brana*** *si*

(i) $\phi|_C = 0$

(ii) $dimC = \dfrac{(n+r-1)}{2}$

Observación sobre la dimensión de una brana:
Las branas tienen la mayor dimensión posible entre las subvariedades C que satisfacen $\phi|_C = 0$. Para ver esto, es suficiente considerar el caso lineal. Tomando cualquier subespacio lineal $(r-1)$-dimensional W en C, el producto interior de ϕ para cualquier base ortonormal de W determina una forma simpléctica en el complemento ortogonal de W en M, que denotamos como M/W. Además C/W es un subespacio isotrópico en M/W y por tanto $dimC/W \leq (dimM/W)/2$. El signo de igualdad se cumple exactamente cuando $dimC = (n+r-1)/2$.
En una variedad simpléctica, un disco holomorfo se intersecta perpendicularmente con una subvariedad Lagrangiana a lo largo de la frontera.
Tenemos el siguiente lema para la intersección de un instantón y branas a lo largo de la frontera del instantón en una variedad con una PVC-forma cerrada.

Lema 2.1.2. *Sea A un instantón en una variedad n-dimensional M con una PVC-forma cerrado ϕ de grado $(r+1)$. Supongamos que la frontera de A se encuentra en una brana C, entonces A intersecta a C perpendicularmente a lo largo de ∂A.*

Demostración:
Queremos probar que A intersecta a C perpendicularmente a lo largo de ∂A.
Supongamos que la frontera de A se encuentra en una brana C. Para cualquier $x \in \partial A \subset C$,

consideremos un vector tangente $u \in T_xA$ perpendicular a ∂A y un vector tangente $v \in T_xC$.
Supongamos que hay vectores tangentes $u_1, ..., u_r \in T_x(\partial A)$ entonces $u_1, ..., u_r \in T_xC$ tal que $u = u_1 \times ... \times u_r \in T_xA$ ya que $\phi/_A$ es la forma de volumén en A.
Entonces

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \langle u_1 \times ... \times u_r, v\rangle \\ &= \phi(u_1, ..., u_r, v) \\ &= 0\end{aligned}$$

Esto es porque $u_1, ..., u_r$ y v se encuentran en T_xC y $\phi/_C = 0$.
Por lo tanto u es perpendicular a v. □

Tengamos en cuenta que solo necesitamos la suposición $\phi/_C = 0$ en C en el lema anterior.

La condición $\phi/_C = 0$ también implica que $[\phi] \in H^{r+1}(M, C)$. Cualquier instantón A minimiza el volumén dentro de la clase de homología relativa $[A] \in H_{r+1}(M, C)$, y el volumén es igual al emparejamiento de $[\phi]$ y $[A]$.
Además cualquier subvariedad $(A', \partial A') \subset (M, C)$ con $[A'] = [A]$ y $vol(A' = vol(A))$ es también un instantón. Sin embargo, si $dimC < (n + r - 1)/2$, entonces encontramos instantones con fronteras en C.
La definición de branas depende solo de la PVC-forma cerrada ϕ en lugar de χ, la imagen de cualquier brana bajo un difeomorfismo ϕ-preservador $f \in Diff(M, \phi)$ es nuevamente una brana. Infinitesimalmente $v = df_t/dt_t = 0 \in Vect(M, \phi)$ satisface $L_v\phi = 0$. Esto implica que $i_v\phi$ es una forma cerrada, porque ϕ es cerrado.

Definición 2.1.8. *Sea ϕ una PVC-forma cerrada en M. Un campo vectorial ϕ-preservador $v \in Vect(M, \phi)$ es llamada un **campo vectorial ϕ-Hamiltoniana** si $i_v\phi$ es exacta, es decir,*

$$i_v\phi = d\eta$$

*para alguna forma diferencial η de grado r, que llamamos **forma diferencial ϕ-Hamiltoniana**.*

Ejemplos de branas:

(i) Las branas en una variedad Riemanniana orientada n-dimensional (i.e. PVC forma de grado

n) son hipersuperficies.

(ii) Las branas en una variedad de K*ä*hler (i.e PVC forma paralela de grado 2) son subvariedades Lagrangianas.

(iii) Las branas en una G_2-variedad (i.e PVC forma paralela de grado 3) son subvariedades coasociativas.

El siguiente resultado muestra que no hay branas en una Spin(7)-variedad.

Teorema 2.1.1. *Una brana no existe en una Spin(7)-variedad. Es decir, no hay subvariedades de dimensión* 5*, donde la forma de Cayley se anula.*

Demostración: Demostremos por contradicción.
Supongamos que C es cualquier subvariedad en una Spin(7)-variedad M donde la forma de Cayley desaparece. Esto implica que $\chi(e_i, e_j, e_k)$ (denotado como χ_{ijk}) es perpendicular a C para cualesquiera vectores tangentes ortonormales e_l en C.
Observe que estos vectores unitarios satisfacen

$$\chi_{ijp} \perp \chi_{ijq}$$

esto es porque

$$\| \chi(e_i, e_j, e_p + e_q) \| = \| e_p + e_q \|$$

lo que implica

$$\begin{aligned} g(\chi(e_i, e_j, e_p), \chi(e_i, e_j, e_q)) &= g(e_p, e_q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $g(\chi(e_i, e_j, e_p), \chi(e_i, e_j, e_q)) = 0$.
Si $dim C = 5$, i.e. C es una brana en M, entonces su fibrado normal tiene rango 3. Sin embargo, por la propiedad anterior $\chi_{123}, \chi_{124}, \chi_{134}$ y χ_{234} son 4 vectores ortonormales a C, lo cual es una contradicción. □

La teoría del PVC ofrece un enfoque unificado, para describir las geometrías de varios estructuras geometricas importantes en la geometría de K*ä*hler, geometría G_2 y geometría Spin(7). La siguiente tabla 2.2 resume todas estas estructuras geométricas.

Tabla 2.2:

Variedad M con PVC	PVC forma ϕ	Instantón A	Brana C
Variedad Orientada	forma de volumén	subvariedad abierta	hipersuperficies
Variedad de K*ä*hler	forma de K*ä*hler	curvas holomorfas	subvariedad Lagrangiana
G_2-variedad	G_2-forma	subvariedad asociativa	subvariedad coasociativa
Spin(7)-variedad	forma de Cayley	subvariedad de Cayley	N/A

2.2. Geometría del Producto Vectorial Cruz Complejo (PVC-$\mathbb{C}$)

En esta sección estudiamos la geometría de variedades con producto vectorial cruz complejo (PVC-$\mathbb{C}$), además estudiamos instantones y branas en variedades con (PVC-$\mathbb{C}$) ([6]).

2.2.1. Variedades de K*ä*hler con (PVC-$\mathbb{C}$)

En esta subsección, revisamos las definiciónes de las propiedades básicas y clasificaciones de variedades con producto vectorial cruz complejo(PVC-$\mathbb{C}$). La lista de variedades de K*ä*hler cerradas con un PVC-$\mathbb{C}$ son: variedades de Calabi-Yau y variedades hiperk*ä*hler ([6]).

Definición 2.2.1. *Sea* (M, g, J) *una variedad compleja hermitiana de dimensión complejo n. Un*

producto vectorial cruz complejo (ℂ-PVC) r-ario es una forma holomórfica ϕ de grado $(r+1)$ *($\phi \in \Omega^{r+1,0}(M)$) satisfaciendo*

$$| \iota_{e_1 \wedge \ldots \wedge e_r}(\phi) | = 2^{\frac{(r+1)}{2}}$$

para cualesquiera vectores tangentes ortonormales $e_1, ..., e_r$ en $T_x^{1,0}M$, para cada $x \in M$.

Ejemplo 2.2.1. *Variedad de Calabi-Yau (i.e variedad con ℂ-PVC (n-1)-ario)*

(i) r=n-1:

El ℂ-PVC $(n-1)$-ario en una variedad de Kähler cerrada (M, g, J) es una forma de volumén holomórfica $\Omega \in \Omega^{n,0}(M)$ tal que

$$\Omega \wedge \bar{\Omega} = C_n \omega^n$$

donde $C_n = \dfrac{(2i)^n (-1)^{\frac{n(-n-1)}{2}}}{n!}$

En particular Ω es una forma de volumén complejo paralela en M y por lo tanto el grupo de holonomía de M es SU(n) ($Hol(g)$ =SU(n)) i.e. es una variedad de Calabi-Yau.

Ejemplo 2.2.2. *Variedad hiperkähler (i.e. variedad con ℂ-PVC 1-ario)*

(ii) r=1:

El ℂ-PVC 1-ario en una variedad de Kähler cerrado (M, g, J) es equivalente a una estructura hiperkähler.

Definición 2.2.2. *Sea (M, g, J) una variedad compleja hermitiana de dimensión complejo n. Un ℂ-PVC es llamado cerrado (resp. paralela) si ϕ es una forma cerrada (resp. forma paralela con respecto a la conexión Levi Civita ∇).*

(i) r=n-1:

• El ejemplo estandar es $V = \mathbb{C}^n$:

Una forma de volumén complejo lineal ϕ en $\mathbb{C}^n$ es un elemento en $\bigwedge^{n,0}(\mathbb{C}^n)$ con $\phi \wedge \bar{\phi}$ igual a la forma de volumén Riemanniana en $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, se da de la siguiente manera:

$$\phi = dz^1 \wedge dz^2 \wedge ... \wedge dz^n$$

para coordenadas complejas $z^1, z^2, ..., z^n$ en V.

(i) r=1:

• El ejemplo estandar es $V = \mathbb{C}^{2m}$:
Una forma simpléctica complejo ϕ en $\mathbb{C}^{2m}$ es un elemento en $\bigwedge^{2,0}(\mathbb{C}^{2n})$, se da de la siguiente manera:

$$\phi = dz^1 \wedge dz^2 + ... + dz^{2m-1} \wedge dz^{2m}$$

para coordenadas complejas $z^1, z^2, ..., z^{2m-1}, z^{2m}$ en V.

Lema 2.2.1. *Supongamos que M es una variedad de Kähler cerrada. Entonces cada forma holomórfica es una forma diferencial cerrada.*

Demostración:
Supongamos que ψ es cualquier forma holomorfa de grado k en M, es decir; $\psi \in \Omega^{k,0}(M)$ y $\bar{\partial}\psi = 0$. Queremos mostrar que ψ es una forma diferencial cerrado ($\partial\psi = 0$) de grado k+1, es decir; $\partial\psi = 0 \in \Omega^{k+1,0}(M)$.
Por la relación bilineal de Riemann, el emparejamiento

$$\int \eta_1 \wedge \bar{\eta}_2 \wedge \omega^{n-k-1}$$

es definido en $\eta_i \in \Omega^{k+1,0}(M)$, es decir;

$$\int_M |\partial\psi|^2 \, \omega^n = C \int_M \partial\psi \wedge \overline{\partial\psi} \wedge \omega^{n-k-1}$$

donde $\eta_1 = \partial\psi, \quad \bar{\eta_2} = \overline{\partial\psi}$.

Usando integración por partes en una variedad cerrada y holomorfismo de ψ, tenemos

$$\int_M |\partial\psi|^2 \, \omega^n = -C \int_M \partial\bar{\partial}\psi \wedge \overline{\psi} \wedge \omega^{n-k-1} = 0$$

donde $\bar{\partial}\psi = 0$.

Esto implica que $\partial\psi = 0$, es decir; ψ es una forma cerrada en M.

□

El siguiente resultado muestra que no hay otro producto vectorial cruz complejo ($\mathbb{C}$-PVC), además de la forma de volumén holomórfica y la forma simpléctica holomórfica como se discutió anteriormente. En particular, no existe una $\mathbb{C}$-PVC para variedad G_2 y variedad Spin(7).

En un espacio vectorial complejo V de dimensión complejo n, hay un $\mathbb{C}$-PVC r-ario si y solo si

(i). $r = 1$ **y** $n = 2m$

(ii). $r = n - 1$ **y** n **es arbitrario.**

La correspondiente $\mathbb{C}$-PVC forma es una forma simpléctica holomófica y una forma de volumén holomórfica respectivamente.

A partir de este resultado y los ejemplos de $\mathbb{C}$-PVC podemos concluir el siguiente resultado (**Clasificación de $\mathbb{C}$-PVC**), **supongamos que M es una variedad de K*ä*hler cerrada de dimensión complejo n, con un $\mathbb{C}$-PVC r-ario. Entonces**

(i). $r = 1$ **y** M **es una variedad hiperk*ä*hler ó**

(ii). $r = n - 1$ **y** M **es una variedad de Calabi-Yau.**

2.2.2. Instantones para Producto Vectorial Cruz Complejo (PVC-$\mathbb{C}$)

En esta subsección estudiamos instantones en variedades de K*ä*hler M con PVC-$\mathbb{C}$ forma cerrada $\phi \in \Omega^{r+1,0}(M)$. Recuerde que un instantón, en el caso real, es una subvariedad A de dimensión

$(r+1)$ preservado por χ, o equivalentemente A es calibrado por una PVC-forma. En el caso complejo, la parte real y imaginaria de una PVC-forma compleja son siempre formas calibradas y son llamadas subvariedades calibradas. Los ejemplos de instantones son: subvariedades Lagrangianas especiales con un ángulo de fase θ y curvas I-holomórficas ([6]).

Teorema 2.2.1. *Sea ϕ una $\mathbb{C}$-PVC forma cerrada de grado $(r+1)$ en una variedad de Kähler M entonces*

(i). *$Re(e^{i\theta}\phi)$ es una forma calibrada para cada número real θ, y*

(ii). *Una subvariedad A de dimensión $(r+1)$ en M es calibrada por $Re(e^{i\theta}\phi)$ solo si*

$$Im(e^{i\theta})/_A = \omega/_A = 0$$

Demostración:

(i). Es suficiente verificar el caso lineal, es decir, cuando $M = \mathbb{C}^n$ con la estructura compleja estandar J.
Consideremos vectores ortonormales orientados $a_1, ..., a_{r+1}$ en $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ y denotemos $\xi = a_1 \wedge ... \wedge a_{r+1}$, entonces

$$\begin{aligned}\left\{Re(e^{i\theta}\phi)(\xi)\right\}^2 + \left\{Im(e^{i\theta})(\xi)\right\}^2 &= \left|(e^{i\theta}\phi)(\xi)\right|^2 \\ &= \left|e^{i\theta}\phi(\xi)\right|^2 \\ &= \left|e^{i\theta}\right|^2 |\phi(\xi)|^2 \\ &= 1^2\,|\phi(\xi)|^2 \\ &= |\phi(\xi)|^2\end{aligned}$$

Entonces $\left\{Re(e^{i\theta}\phi)(\xi)\right\}^2 + \left\{Im(e^{i\theta})(\xi)\right\}^2 = |\phi(\xi)|^2$
Como ϕ es de tipo $(r+1, 0)$ i.e $(\phi \in \Omega^{r+1,0})$ tenemos

$$|\phi(\xi)|^2 = 2^{-(r+1)}\,|\phi(\xi \otimes \mathbb{C})|^2$$

donde $\xi \otimes \mathbb{C} = \tilde{a}_1 \wedge ... \wedge \tilde{a}_{r+1}$, con $\tilde{a}_i = (a_i - \sqrt{-1}Ja_i)/\sqrt{2}$. Esto es porque $dz_i(\tilde{a}_k) = \sqrt{2}dz_i(a_k)$. Si denotamos el vector dual de cualquier forma η como $\eta^{\#}$, entonces

$$
\begin{aligned}
2^{-(r+1)}\,|\phi(\xi\otimes\mathbb{C})|^2 &= 2^{-(r+1)}\,|\phi(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_{r+1})|^2\\
&= 2^{-(r+1)}\left|\left\langle (i_{\tilde{a}_1\wedge...\wedge\tilde{a}_r}\phi)^{\#},\tilde{a}_{r+1}\right\rangle\right|\\
&\leq 2^{-(r+1)}\left|(i_{\tilde{a}_1\wedge...\wedge\tilde{a}_r}\phi)^{\#}\right|\,|\tilde{a}_{r+1}|\\
&= 2^{-(r+1)}\left|i_{\tilde{a}_1\wedge...\wedge\tilde{a}_r}\phi\right|\,1\\
&= 2^{-(r+1)},2^{\frac{(r+1)}{2}}\\
&= 2^{-\frac{(r+1)}{2}}\\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

Entonces $2^{-(r+1)}\,|\phi(\xi\otimes\mathbb{C})|^2 \leq 1$. Porque ϕ es una $\mathbb{C}$-PVC forma y $\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_{r+1}$ son elementos en $T^{1,0}M$ de longitud 1.

$$
\begin{aligned}
\left|Re(e^{i\theta}\phi)(\xi)\right| &\leq \left\{Re(e^{i\theta}\phi)(\xi)\right\}^2+\left\{Im(e^{i\theta})(\xi)\right\}^2\\
&= |\phi(\xi)|^2\\
&= 2^{-(r+1)}\,|\phi(\xi\otimes\mathbb{C})|^2\\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

Por tanto $\left|Re(e^{i\theta}\phi)(\xi)\right| \leq 1$. □

Los signos de igualdad se mantienen si

(i). $\left|Im(e^{i\theta}\phi)(\xi)\right| = 0$
(ii). $(i_{\tilde{a}_1\wedge...\wedge\tilde{a}_r}\phi)^{\#} = \tilde{a}_{r+1}$
(iii). $\left|i_{\tilde{a}_1\wedge...\wedge\tilde{a}_r}\phi\right| = 2^{r+1}$
ya que $a_1,...,a_{r+1}$ son vectores ortonormales orientados.

Observamos que cuando ϕ es una forma de volumén holomórfica de una variedad de Calabi-Yau entonces una subvariedad A en M es calibrada por $Re(e^{i\theta}\phi)$ si y solo si satisface $Im(e^{i\theta})/_A = \omega/_A = 0$, y se llama una subvariedad Lagrangiana especial con un ángulo de fase θ.

Definición 2.2.3. *Sea M una variedad de Kähler cerrada con una $\mathbb{C}$-PVC r-ario ϕ, Una subvariedad A de dimensión $(r+1)$ es llamada un **instantón** con un ángulo de fase $\theta \in \mathbb{R}$ si es calibrada por $Re(e^{i\theta}\phi)$, i.e*

$$Re(e^{i\theta}\phi)/_A = vol_A$$

Equivalentemente, $Im(e^{i\theta})/_A = 0 \quad y \quad \left|i_{e_1\wedge\ldots\wedge e_{r+1}}(\phi/_A)\right| = 1$ para cualesquiera vectores tangentes ortonormales $e_1, ..., e_{r+1}$ en A.

Recuerde que el volumén de una subvariedad calibrada es un invariante topológico. En este caso, para la clase fundamental $[A] \in H_{r+1}(A, \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad \left[Re(e^{i\theta}\phi)\right] \in H^{r+1}(M, \mathbb{R})$,

$$vol(A) = \int_A Re(e^{i\theta}\phi) = [A]\left[Re(e^{i\theta}\phi)\right]$$

Usando el resultado de la clasificación de $\mathbb{C}$-PVC en el teorema 2,3, ϕ debe ser una forma de volumén holomórfica en una variedad de Calabi-Yau o una forma simpléctica holomórfica en una variedad hiperkähler. En el primer caso los instantones se denominan subvariedades Lagrangianas especiales. En el ultimo caso,

$$Re(e^{i\theta}(\omega_I - i\omega_K)) = \cos\theta\omega_I + \sin\theta\omega_K = \omega_{\cos\theta I + \sin\theta K}$$

entonces los instantones son curvas J_θ-holomórficas, donde $J_\theta = \cos\theta I + \sin\theta K$.

2.2.3. Branas de Dirichlet y Neumann para Producto Vectorial Cruz Complejo (PVC-$\mathbb{C}$)

En este capítulo estudiamos Dirichlet y Neumann Branas en una variedad compleja Hermitiana M con PVC-$\mathbb{C}$. Para PVC-$\mathbb{C}$ hay dos tipos de branas correspondiente a los problemas de valor frontera de tipo Dirichlet y tipo Neumann, llamamos D-branas y N-branas respectivamente. Los ejemplos de Dirichlet y Neumann branas son: hipersuperficies complejos, subvariedades Lagrangianas J-holomórficas, subvariedades Lagrangianas especiales con un ángulo de fase $\theta = \pi/2$ y subvariedades Lagrangianas K-holomórficas ([6]).

Definición 2.2.4. *Sea M una variedad compleja Hermitiana de dimensión compleja n con una (PVC-$\mathbb{C}$) r-ario $\phi \in \Omega^{r+1,0}(M)$,*

(i). *Una subvariedad C es llamada brana de Neumann (N-brana) si $dim(C) = n + r - 1$ y*

$$\phi/_C = 0$$

(ii). *Una subvariedad C es llamada brana de Dirichlet (D-brana) con un ángulo de fase $\theta \in \mathbb{R}$ si*

$$\omega/_C = 0 \ , \ Re(e^{i\theta}\phi)/_C = 0$$

Las branas se definen en variedades complejos Hermitianas, por simplicidad nos centraremos en las branas en una variedad de Kähler cerrado.
Como en el caso real, N-branas son subvariedades en M con la mayor dimensión en la que ϕ se anula. Además N-branas son subvariedades complejos en M, debido a la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Sea M una variedad de Kähler cerrado de dimensión n con una PVC-$\mathbb{C}$ r-ario ϕ. Asumimos que S es una subvariedad en M tal que $\phi/_S = 0$, entonces $dimS \leq n+r-1$. Cuando se tiene el signo de igualdad, i.e. S es una N-brana, entonces es una subvariedad compleja en M.*

Demostración:
Es suficiente verificar el caso lineal, es decir; $T_xS, \ x \in S$ (el espacio tangente a S en p). Consideremos un vector tangente $a \in T_xS$ y $\tilde{a} = \dfrac{(a - \sqrt{-1}Ja)}{\sqrt{2}}$
Por definición 2.2.1 un producto vectorial cruz complejo ($\mathbb{C}$-PVC) r-ario es una forma holomórfica ϕ de grado $(r + 1)$ $\left(\phi \in \Omega^{r+1,0}(M)\right)$, además tenemos $\iota_{\tilde{a}}\phi = \sqrt{2}\iota_a\phi$. Consideremos vectores tangentes $b_1, ..., b_r$ en T_xS, luego tenemos por definición del producto interior

$$\sqrt{2}\iota_a\phi(b_1, ..., b_r) = \iota_{\tilde{a}}\phi(b_1, ..., b_r)$$
$$\sqrt{2}\phi(a, b_1, ..., b_r) = \phi(\tilde{a}, b_1, ..., b_r)$$

Si $\phi(a, b_1, ..., b_r) = 0$ entonces $\phi(Ja, b_1, ..., b_r) = 0$, es decir; $\phi/_S = 0$, por lo cual implica que $\phi/_{S+JS} = 0$. Si S tiene la dimensión máxima, entonces T_xS es un subespacio lineal complejo.

En ese caso, como en el entorno real, tenemos $dim_{\mathbb{C}}S = \frac{(n+r-1)}{2} \leq n+r-1$, por tanto $dimS \leq n+r-1$ □

La siguiente clasificación de instantones y branas para el PVC-$\mathbb{C}$ se presenta con la clasificación de PVC-$\mathbb{C}$ en una variedad de K*ä*hler cerrado.

Instantones y Branas en variedades de Calabi-Yau: (PVC - $\mathbb{C}$) $(n-1)$-ario

Una variedad de K*ä*hler cerrado de dimensión complejo n con una (PVC-$\mathbb{R}$) $(n-1)$-ario ϕ es una variedad de Calabi-Yau.

Un instantón en una variedad de Calabi-Yau es una subvariedad Lagrangiana especial con un ángulo de fase θ, ya que está calibrada por $Re(e^{i\theta}\phi)$. Como en la proposición anterior, una N-brana en una variedad de Calabi-Yau es una hipersuperficie compleja, y una D-brana es una subvariedad Lagrangiana especial con un ángulo de fase $\theta - \pi/2$, porque está calibrada por $Re(e^{i(\theta-\pi/2)}\phi) = Im(e^{i\theta}\phi)$.

Instantones y Branas en variedades hiperk*ä*hler: (PVC - $\mathbb{C}$) 1-ario

Una variedad de K*ä*hler cerrado de dimensión complejo $2n$ con una forma de K*ä*hler ω_J y una $\mathbb{C}$-PVC $(n-1)$-ario ϕ es una variedad hiperk*ä*hler.

Denotemos $\phi = \omega_I - \sqrt{-1}\omega_K$ y I, J y K son las estructuras complejas correspondientes a las formas de K*ä*hler ω_I, ω_J y ω_K respectivamente. Además, poniendo $e^{i\theta}\phi$ en lugar de ϕ, se puede observar que $Re(e^{i\theta}\phi)$ es otra forma de K*ä*hler con una estructura compleja $J_\theta = \cos\theta I + \operatorname{sen}\theta K$. Ahora, un instantón en una variedad hiperk*ä*hler es una curva J_θ-holomórfica, ya que está calibrada por $Re(e^{i\theta}\phi)$, esto es preservado por J_θ. Una N-brana en una variedad hiperk*ä*hler es una subvariedad de dimensión real $2n$ donde ϕ se anula, como en la proposición anterior, es equivalente a una subvariedad Lagrangiana J-compleja la cual es una subvariedad compleja preservado por una estructura compleja J con dimensión compleja n.

Una D-brana es una subvariedad de dimensión real $2n$ donde ω y $Re(e^{i\theta}\phi)$ se anula. Se puede mostrar que una D-brana es preservada por $J_{\theta+\pi/2}$, la estructura casi compleja correspondiente a $-Im(e^{i\theta}\phi)$, ya que $e^{i\theta}\phi = \omega_{J_\theta} - \sqrt{-1}\omega_{J_{\theta+\pi/2}}$. Entonces una D-brana es equivalente a una subvariedad Lagrangiana $J_{\theta+\pi/2}$-compleja.

La teoría del $\mathbb{C}$-PVC ofrece un enfoque unificado, para describir las geometrías de varios estructuras geometricas importantes en la geometría de Calabi-Yau y geometría hiperk*ähler*. La siguiente tabla 2.3 resume todas estas estructuras geométricas.

Tabla 2.3:

Variedad M con $\mathbb{C}$-PVC	Variedad de Calabi-Yau	Variedad hiperk*ä*hler
Instantones	Lagrangiana especial $\theta = 0$	curvas I-holomórfica
N-branas	hipersuperficie compleja	Lagrangiana J-compleja
D-branas	Lagrangiana especial $\theta = \pi/2$	Lagrangiana K-compleja

Para variedades K*ä*hler-cuaterniónica no existe una estructura $\mathbb{H}$-PVC bien definida debido a la no conmutatividad de $\mathbb{H}$, tenemos la siguiente tabla 2.4

Tabla 2.4:

$\mathbb{A}$-PVC		r=n-1	r=1	r=2	r=3
$\mathbb{R}$-PVC	O(n)	SO(n)	U(n)	G_2	Spin(7)
$\mathbb{C}$-PVC	U(n)	SU(n)	Sp(n)		
$\mathbb{H}$-PVC	Sp(n)Sp(1)				

2.3. Geometría Riemanniana sobre Álgebras de División Normada

En esta sección definimos variedades Riemannianas sobre álgebras de división normada $\mathbb{A}$. Como veremos, todos los grupos de holonomía posibles surgen naturalmente de variedades Riemannianas definidas sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$; a menos que sean espacios simétricos locales. Cada espacio tangente de una variedad Riemanniana ciertamente tiene una norma. Si también tiene una estructura $\mathbb{A}$-módulo entonces reducirá el grupo de holonomía de M. Por ejemplo, una variedad Riemanniana con una estructura $\mathbb{C}$-módulo paralelo en sus espacios tangentes, es una variedad de Kähler.

Podemos ofrecer una forma unificada de describir estructuras geométricas sobre variedades Riemannianas M y sus geometrías. Nos ayuda a descubrir nuevos enlaces entre diferentes tipos de geometrías y obtener nuevos resultados.
Primero definimos los isomorfimos retorcidos $G_{\mathbb{A}}(n)$ y isomorfismos retorcidos especiales $H_{\mathbb{A}}(n)$, luego definiremos las $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas y $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas especiales ([2]).

2.3.1. $\mathbb{A}$-Variedades Riemannianas

En esta subsección primero definimos los isomorfimos retorcidos $G_{\mathbb{A}}(n)$, luego definiremos las $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas que son: variedad Riemanniana, variedad de Kähler, variedad de Kähler Cuaterniónico y Variedad-Spin(7) ([2]).

Definición 2.3.1. *Supongamos que V es un $\mathbb{A}$-modulo normado de rango n. Una isometría $\mathbb{R}$-lineal ϕ es llamada **isomorfismo retorcido** si existe $\theta \in SO(\mathbb{A})$ tal que*

$$\phi(vx) = \phi(v)\theta(x)$$

para cualesquiera $v \in V$ y $x \in \mathbb{A}$.

Cuando $\mathbb{A}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entonces θ es necesariamente la identidad.
La siguiente proposición identifica al grupo de isomorfismos retorcidos para cada $\mathbb{A}$. Recordemos que cuando $\mathbb{A} = \mathbb{O}$, asumimos que V tiene una dimensión 1.

Proposición 2.3.1. *Las álgebras normadas $\mathbb{A}$ y sus correspondientes grupos de isomorfismos retorcidos $G_{\mathbb{A}}(n)$. Se dan en la siguiente tabla 2.5:*

Tabla 2.5:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
$G_{\mathbb{A}}(n)$	$O(n)$	$U(n)$	Sp(n)Sp(1)	Spin(7)

Demostración:
En el caso $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, la afirmación es trivial porque $SO(\mathbb{R})$ es el grupo trivial entonces

$G_{\mathbb{A}}(n) = O(n)$.

En el caso $\mathbb{A} = \mathbb{C}$, tenemos $\theta \in SO(\mathbb{C}) = U(1)$ esto quiere decir, existe $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ satisfaciendo $\theta(x) = zx$ para cada $x \in \mathbb{C}$. El requerimiento $\phi(vx) = \phi(v)zx$ para $x = 1$ implica que $z = 1$. Esto quiere decir que ϕ es un complejo lineal y por lo tanto

$$G_{\mathbb{A}}(n) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n) = U(n)$$

.

En el caso $\mathbb{A} = \mathbb{H}$, tenemos $\theta \in SO(\mathbb{H}) = Sp(1)Sp(1)$ esto quiere decir $\theta(x) = \alpha x \beta$ para cada cuaterniones unitarios $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$. El requerimiento $\phi(vx) = \phi(v)\alpha x \beta$ para $x = 1$ implica que $\alpha\beta = 1 \in SO(4)$, esto quiere decir, $\beta = \alpha^{-1}$. Si definimos un homomorfismo lineal A por

$$A(v) = \phi(v)\alpha$$

para cada $v \in \mathbb{H}^n$, entonces $A(vx) = A(v)x$ para cada $x \in \mathbb{H}$, esto quiere decir, $A \in GL(n, \mathbb{H}) \cap O(4n)Sp(n)$. De esto tenemos $\phi \in Sp(n)Sp(1) = G_{\mathbb{H}}(n)$

En el caso $\mathbb{A} = \mathbb{O}$, nos limitaremos al caso unidimensional entonces $G_{\mathbb{O}}(1)$ es el grupo de holonomía excepcional Spin(7). □

Comenzamos con la definición de **$\mathbb{A}$-variedades Riemannianas.**

Definición 2.3.2. *Una variedad Riemanniana (M, g) se llama **$\mathbb{A}$-variedad Riemanniana** o simplemente una $\mathbb{A}$-variedad, si el grupo de holonomía de una conexión Levi-Civita es un subgrupo de $G_{\mathbb{A}}(n) \subset O(m)$ con $m = dimM = ndim\mathbb{A}$. Se dan en la siguiente tabla 2.6:*

Tabla 2.6:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{A}$-variedad Riemanniana
$\mathbb{R}$	$O(n)$ (Variedad Riemanniana)
$\mathbb{C}$	$U(n)$ (Variedad de Kähler)
$\mathbb{H}$	Sp(n)Sp(1) (Variedad de Kähler Cuaterniónico)
$\mathbb{O}$	Spin(7) (Variedad-Spin(7))

Las $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas para $\mathbb{A} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ tienen grupos de holonomía dentro de O(n), U(n), Sp(n)Sp(1) y Spin(7) respectivamente y estas variedades son llamadas variedades

Riemannianas, variedades de Kähler, variedades de Kähler cuaterniónico y variedades Spin(7) respectivamente.

A continuación presentamos la noción de una $\mathbb{A}$-orientación para $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas. Para una variedad Riemanniana real M, su orientación es una forma de volumén paralelo en M. Equivalentemente el grupo de holonomía de M está dentro de SO(m)$\subset$ O(m).

La orientabilidad requiere la noción del determinante. El determinante define una acción natural de O(m) en $\wedge^m\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ y SO(m) es el subgrupo de isotropía para cualquier elemento distinto de cero en $\mathbb{R}$

$$det_{\mathbb{A}} : O(m) \to \mathbb{R}$$

donde el $det_{\mathbb{H}}$ no se puede definir debido a la no conmutatividad de $\mathbb{H}$.

En general, existe una representación natural real de $G_{\mathbb{A}}(n)$ en $\mathbb{A}$

$$\lambda_{\mathbb{A}} : G_{\mathbb{A}}(n) \to O(\mathbb{A})$$

excepto en el caso cuaterniónico donde la acción solo se define proyectivamente. Note que $G_{\mathbb{A}}(n)$ siempre actúa de forma transitiva en la esfera unitaria en $\mathbb{A}$.

Definición 2.3.3. *Para cualquier $g \in G_{\mathbb{A}}(n)$ y $x \in \mathbb{A}$, definimos:*

(1) $\lambda_{\mathbb{R}}(g)(x) = xdet_{\mathbb{R}}(g) \in \mathbb{R}$

(2) $\lambda_{\mathbb{C}}(g)(x) = xdet_{\mathbb{C}}(g) \in \mathbb{C}$

(3) $\lambda_{\mathbb{H}}(g)(x) = x\beta \in \mathbb{H}$ *con* $g = (\alpha, \beta) \in Sp(n)Sp(1)$

(4) $\lambda_{\mathbb{O}}(g)(x) = g.x \in \mathbb{O}$ *a travez* $Spin(7) \subset SO(8)$

En los casos, complejos $\mathbb{C}$ y cuaterniones $\mathbb{H}$, el $det_{\mathbb{A}}$ corresponde a la proyección al segundo componente en U(n) $\cong$ SU(n)$\times$ U(1)/ $\mathbb{Z}_n$ y Sp(n)Sp(1)$\cong$ Sp(n) $\times$ Sp(1)/$\mathbb{Z}_2$ respectivamente. En el caso octonión $\mathbb{O}$, es simplemente el producto octonión porque solo consideramos el caso unidimensional.

• Cuando $\mathbb{A} = \mathbb{C}$,

$det_{\mathbb{C}}$ puede interpretarse como una descomposición

$$G_{\mathbb{C}}(n) = U(n) \to SU(n) \times U(1)/\mathbb{Z}_n$$
$$A \mapsto (A.(det_{\mathbb{C}}A)^{-1/n}, (det_{\mathbb{C}}A)^{1/n})$$

y la proyección al segundo factor $(det_{\mathbb{C}}A)^{1/n} \in U(1)/\mathbb{Z}_n$ puede reinterpretarse como un elemento en $U(1)$.

• Cuando $\mathbb{A} = \mathbb{H}$,

$det_{\mathbb{C}}$ puede interpretarse como una descomposición

$$G_{\mathbb{H}}(n) = Sp(n)Sp(1) \to Sp(n) \times Sp(1)/\mathbb{Z}_2$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \beta$$

Este factor $\mathbb{Z}_2$ identificará subvariedades Lagrangianas especiales en cualquier variedad hiperkähler, es decir, subvariedades Lagrangianas complejos.

2.3.2. $\mathbb{A}$-Variedades Riemannianas Especiales

En esta subsección primero definimos los isomorfimos retorcidos especiales $H_{\mathbb{A}}(n)$, luego definiremos las $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas especiales que son: variedad Riemanniana orientada, variedad de Calabi-Yau, variedad hiperkähler y Variedad-G_2 ([2]).

Definición 2.3.4. *Un isomorfismo retorcido $g \in G_{\mathbb{A}}(n)$ es llamado **especial**, si $\lambda_{\mathbb{A}}(g)$ fija $1 \in \mathbb{A}$. Es decir, g es un elemento en el subgrupo de isotropía de 1 en $G_{\mathbb{A}}(n)$, denotado $H_{\mathbb{A}}(n)$.*

No es dificil identificar estos grupos cuando $\mathbb{A} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$. En el caso octonión $\mathbb{O}$, es un resultado clásico que $H_{\mathbb{O}}(1)$ es G_2. Así tenemos el siguiente resultado.

Las álgebras normadas $\mathbb{A}$ y sus correspondientes grupos de isomorfismos retorcidos especiales $H_{\mathbb{A}}(n)$ se dan en la siguiente tabla 2.7:

Tabla 2.7:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
$H_{\mathbb{A}}(n)$	$SO(n)$	$SU(n)$	$sp(n)$	G_2

Observación: Un isomorfismo de un $\mathbb{A}$-espacio lineal normado es el mismo que

i) un isomorfismo retorcido cuando $\mathbb{A}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

ii) un isomorfismo retorcido especial cuando $\mathbb{A}$ es $\mathbb{H}$ ó $\mathbb{O}$.

A continuación definimos las $\mathbb{A}$**-Variedades Riemannianas Especiales.**

Definición 2.3.5. *Una $\mathbb{A}$-variedad Riemanniana se llama **especial** si el grupo de holonomía de una conexión Levi-Civita esta dentro de $H_{\mathbb{A}}(n)$ con $m = dimM = ndim\mathbb{A}$. Se dan en la siguiente tabla 2.8:*

Tabla 2.8:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{A}$-variedad Riemanniana Especial
$\mathbb{R}$	SO(n) (Variedad Riemanniana Orientada)
$\mathbb{C}$	SU(n) (Variedad de Calabi-Yau)
$\mathbb{H}$	Sp(n) (Variedad de hiperkähler)
$\mathbb{O}$	$G_2(n)$ (Variedad-G_2)

Observación: Las $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas Especiales (con $\mathbb{A} \neq \mathbb{R}$) son: las variedades de Calabi-Yau, las variedades hiperkähler y la Variedad-G_2. Estas variedades son los objetos centrales de interés en la teoría de cuerdas, la teoría del campo conforme y la teoría M en física.

Hay otra caracterización de $\mathbb{A}$-variedad Riemanniana especial. Usando la representación $\lambda_{\mathbb{A}}(n)$ de $G_{\mathbb{A}}(n)$, obtenemos un fibrado vectorial $\mathbb{A}_M$ sobre cualquier $\mathbb{A}$-variedad Riemanniana M.

$$\mathbb{A} \to \mathbb{A}_M \to M$$

Entonces M es especial si y solo si hay una sección paralela para M.

• En el caso real, tenemos $\mathbb{R}_M = \wedge^n TM$.

• En el caso complejo, tenemos $\mathbb{C}_M = \wedge^n TM^{(1,0)}$, el fibrado lineal canónical de M.

• En el caso cuaterniónico, la proyección de su grupo de holonomía Sp(n)Sp(1) a su primer y segundo factor están bien definidas hasta ±. Supongamos que M es spin, $\omega_2(M) = 0$, entonces esta ambigüedad ± puede ser levantado y obtenemos un Sp(n)-fibrado V y un Sp(1)-fibrado S sobre M a través de la representación estándar de Sp(n) y Sp(1) respectivamente. La inclusión de Sp(n)Sp(1) en SO(4n) da el isomorfismo

$$TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \otimes_{\mathbb{C}} S$$

Tenemos $\mathbb{H}_M = S$. Cuando $\omega_2(M) \neq 0$, entonces V y S solo existen localmente.

• En el caso octonión, tenemos $\mathbb{O}_M = TM$.

La lista de los posibles grupos de holonomía para todas las $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas (especiales) y sus respectivos variedades se dará en la siguiente tabla 2.9:

Tabla 2.9:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{A}$-variedad Riemanniana	$\mathbb{A}$-variedad Riemanniana especial
$\mathbb{R}$	O(n) (Variedad Riemanniana)	SO(n) (Variedad Riemanniana Orientada)
$\mathbb{C}$	U(n) (Variedad de Kähler)	SU(n) (Variedad de Calabi-Yau)
$\mathbb{H}$	Sp(n)Sp(1) (Variedad de Kähler-Cuaterniónico	Sp(n) (Variedad Hiperkähler)
$\mathbb{O}$	Spin(7) (Variedad-Spin(7)	$G_2(n)$ (Variedad-G_2)

Esta lista proporciona todos los posibles grupos de holonomía de una variedad Riemanniana irreducible M localmente no simétrico, según la clasificación de Berger. Para expresar esto de manera diferente las variedades Riemannianas con varios grupos de holonomía se clasifican en términos de las álgebras de división normadas $\mathbb{A}$ y su $\mathbb{A}$-orientación, por ejemplo tenemos:

(1) $\mathbb{C}$-variedad (i.e. es una variedad de Kähler),

(2) $\mathbb{C}$-variedad especial (i.e.es una variedad de Calabi-Yau),

(3) $\mathbb{H}$-variedad (i.e. es una variedad de Kähler cuaterniónico),

(4) $\mathbb{H}$-variedad especial (i.e. es una variedad hiperkähler),

(5) $\mathbb{O}$-variedad (i.e. es una variedad-Spin(7)),

(6) $\mathbb{O}$-variedad especial (i.e. es una variedad-G_2).

2.3.3. Caracterizaciónes y Propiedades

Describimos brevemente estás $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas (especiales) y introducimos ciertas formas diferenciales. En el caso real, las $\mathbb{R}$-variedades Riemannianas (especiales) son variedades Riemannianas (orientadas). La orientabilidad de M nos permite determinar una raiz cuadrada $\sqrt{det(g_{ij})}$ y obtenemos una forma de volumén v_M. Otras $\mathbb{A}$-variedades Riemannianas (especiales) también admiten caracterizaciones en términos de la existencia de ciertas formas paralelas no degeneradas ([2]).

(1) $\mathbb{C}$-variedad Riemanniana (i.e. es una variedad de Kähler), Hol(g)= U(n).

La conexión de Levi-Civita ∇ conserva una estructura casi-compleja J, i.e.

$$J^2 = -1 \;\; y \;\; \nabla J = 0$$

Alternativamente, podemos usar una forma de Kähler ω,

$$\omega(u, v) = g(Ju, v) \;\; y \;\; \nabla\omega = 0$$

para caracterizar una variedad de Kähler. Es decir, una métrica hermitiana en una variedad compleja M es una métrica de Kähler si y solo si $d\omega = 0$. Una variedad compleja M, provista de una métrica de Kähler, es llamada una variedad de Kähler. Por ejemplo, el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ es una variedad de Kähler con la métrica de FUBINI-STUDY.

(2) $\mathbb{C}$-variedad Riemanniana especial (i.e. es una variedad de Calabi-Yau), Hol(g)= SU(n).

Por definición, se trata de una variedad de Kähler con una sección paralela del fibrado lineal canónico $K_M = \wedge^n TM^{(1,0)}$, i.e. es una forma de volumén holomórfico paralela $\Omega \in \Omega^{(n,0)}(M)$. Por el teorema de Yau, tal estructura siempre existe en cualquier variedad de Kähler compacto con el fibrado lineal canónico K_M. Una hipersuperficie suave de grado d en $\mathbb{CP}^{n+1}$ admite una métrica de Calabi-Yau si y solo si $d = n + 2$. Por ejemplo, cuando $n = 2$, tenemos una superficie cuártica en $\mathbb{CP}^3$, que es una superficie K3.

(3) $\mathbb{H}$-variedad Riemanniana especial (i.e. es una variedad hiperkähler), Hol(g)= Sp(n).

Sp(n) es el grupo de automorfismo del espacio vectorial cuaterniónico $\mathbb{H}^n$. Una estructura casi-hiperkähler es una terna (I, J, K), donde I, J y K son estructuras casi-complejas que cumplen

$$IJ = -JI = K$$

Estas estructuras complejas hermitianas definen tres formas de Kähler diferentes ω_I, ω_J y ω_K en M respectivamente, además satisfacen $d\omega_I = d\omega_J = d\omega_K = 0$. Si fijamos uno de ellos, osea J, entonces $\Omega_J = \omega_I - i\omega_K$, que es una forma simpléctica holomórfico paralela en M. Usando el teorema de Yau, cada variedad de Kähler compacto con una forma simpléctico holomórfico admite una estructura hiperkähler.
Cuando $dimM = 4$. i.e. $n = 1$, las variedades de Kähler son iguales a las variedades de Calabi-Yau debido a que Sp(1)=SU(2). Si M es compacto, entonces es un toro plano de dimensión 4 o una superficie K3.

(4) $\mathbb{H}$-variedad Riemanniana (i.e. es una variedad de Kähler-cuaterniónico, Hol(g)= Sp(n)Sp(1).

Tal variedad es similar a una variedad hiperkähler, sin embargo, las estructuras complejas I, J y K solo pueden definirse localmente. Además las 4-formas $\theta = \omega_I^2 + \omega_J^2 + \omega_K^2$ están bien definidas y son paralelas. Por ejemplo tenemos los espacios proyectivos cuaterniónicos $\mathbb{HP}^n$.

(5) $\mathbb{O}$-variedad Riemanniana especial (i.e. es una variedad-G_2), Hol(g)= G_2.

$G_2 = H_{\mathbb{O}}(1)$ estabiliza $1 \in \mathbb{O}$, en realidad es un subgrupo de SO(Im$\mathbb{O}$)=SO(7). Tradicionalmente, una variedad - G_2 es una variedad de dimensión 7. Sin embargo, su cubrimiento universal es una variedad Riemanniana producto $M \times \mathbb{R}$, donde M es una variedad-G_2 de dimensión 7. El producto vectorial cruz en $\mathbb{O}$, definido como

$$x \times y = Imxy$$

induce una estructura producto $\times$ en cualquier variedad-G_2 porque G_2 es el grupo de automor-

fismo de la álgebra normada $\mathbb{O}$. Esto determina una 3-forma paralela Ω_{G_2},

$$\Omega_{G_2}(x, y, z) = \langle x, y \times z \rangle \ y \ \nabla\Omega = 0$$

en cualquier variedad-G_2.

(6) $\mathbb{O}$-variedad Riemanniana (i.e. es una variedad-Spin(7)), Hol(g)= Spin(7).

Dado que Spin(7)=$G_{\mathbb{O}}(1)$, en realidad es un subgrupo de SO($\mathbb{O}$)=SO(8). Tradicionalmente, una variedad-Spin(7) es una variedad de dimensión 8. Gray muestra que una variedad de dimensión 8 tiene un grupo de holonomía Spin(7) si y solo si admite una 4-forma auto dual Θ ($\Theta = \star\Theta$), donde $\Theta = \Omega_{G_2} \wedge dx^0 - \Theta_{G_2}$.

Observación: En una variedad real (resp. complejo), hay muchas funciones diferenciables (resp. holomorficos) locales que se utilizan para describir las geometrías de estas variedades. Sin embargo en una $\mathbb{H}$-(ó $\mathbb{O}$-) variedad, hay muy pocas funciones de este tipo. Por ejemplo, Gray muestra que cada mapeo cuaterniónico es totalmente geodésica. En particular, no hay subvariedades cuaterniónicos en $\mathbb{HP}^N$ que no sean subespacios lineales.

La lista de las diversas formas paralelas en una $\mathbb{A}$-variedad Riemanniana (especial), en el caso Euclideano se dará en la siguientes tablas 2.10 y 2.11:

Tabla 2.10:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{A}$-variedad Riemanniana	Formas paralelas
$\mathbb{C}$	variedad de Kähler	En $\mathbb{C}^n$: $\omega = \frac{i}{2}(dz^1 d\bar{z}^1 + ... + dz^n d\bar{z}^n)$
$\mathbb{H}$	variedad de Kähler-cuaterniónico	En $\mathbb{H}^n$: $\theta = \omega_I^2 + \omega_J^2 + \omega_K^2$
$\mathbb{O}$	variedad-Spin(7)	En $\mathbb{R}^8$: $\Theta = \Omega_{G_2} \wedge dx^0 - \Theta_{G_2}$

Tabla 2.11:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{A}$-variedad Riemanniana especial	Formas paralelas
$\mathbb{R}$	variedad Riemanniana orientada	En $\mathbb{R}^n$: $v_M = dx^1 dx^2 ... dx^n$
$\mathbb{C}$	Variedad de Calabi-Yau	En $\mathbb{C}^n$: $\Omega = dz^1 \wedge ... \wedge dz^n$
$\mathbb{H}$	Variedad hiperkähler	En $\mathbb{H}^n$: $\omega_J = \frac{i}{2}(dz^1 d\bar{z}^1 + ... + dz^{2n} d\bar{z}^{2n})$
$\mathbb{O}$	Variedad-G_2	En $\mathbb{R}^7$: $\Theta_{G_2} = *\Omega_{G_2}$

Capítulo 3

APLICACIÓNES

3.1. Mecánica Hamiltoniana

En la Mecánica Clásica, las estructuras naturales sobre los espacios de fases son estructuras simplécticas. La Geometría simpléctica se utiliza para reformular las eccuaciones de movimiento de Newton, según el formalismo Hamiltoniano. También se utiliza para reinterpretar la formulación Lagrangiana. La Geometría Simpléctica Moderna incorpora curvas holomórficas para corregir cuánticamente la Geometría Simpléctica Clásica. La formulación Hamiltoniana se fundamenta en estructuras simplécticas y de Poisson, y la formulación Lagrangiana se fundamenta en principios variacionales.

3.1.1. Sistemas hamiltonianos y mecánica

La mecánica es posible estudiarla desde dos formalismos distintos, el hamiltoniano o el lagrangiano. El primero se fundamenta en estructuras simplécticas y de Poisson, mientras que el segundo en principios variacionales. Veamos más precisamente la relación entre la geometría simpléctica y mecánica.

Definición 3.1.1. *Se dice que un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ es **simpléctico** si su flujo $\{\phi_t\}$ es un simplectomorfismo para todo t, es decir,*

$$\phi_t^* \omega = \omega$$

Proposición 3.1.1. *([19]) Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Las siguientes*

propiedades son equivalentes:

(i). *X es simpléctica*

(ii). $\mathcal{L}_X\omega = 0$

(iii). *$i_X\omega$ es cerrada*

(iv). *para todo $x \in M$, existe $U \subset M$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que*

$$i_X\omega = df$$

Teorema 3.1.1. ***(Fórmula Mágica de Cartan)****([19]) Sea X un campo de vectores y α una k-forma en una variedad M. Entonces*

$$\mathcal{L}_X\alpha = di_X\alpha + i_Xd\alpha$$

Definición 3.1.2. *Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en M. Un campo de vectores $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ se dice que es* ***hamiltoniano*** *con función de energía H si*

$$i_{X_H}\omega = dH$$

A la terna (M, ω, X_H) se le denomina **sistema hamiltoniano**.

Proposición 3.1.2. *([19]) Sea (M, ω, X_H) un sistema hamiltoniano y $\{\phi_t\}$ el flujo de X_H. Entonces, $\phi_t^*\omega = \omega$ para todo t, esto es, X_H es un campo simpléctico.*

Definición 3.1.3. *Sean (M, ω) una variedad simpéctica y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores en (M, ω). Se dice que X es* ***localmente hamiltoniano*** *si, para todo $x \in M$, existe un entorno abierto $U \subset M$ de x tal que $X_{/U}$ es hamiltoniano.*

Proposición 3.1.3. *([19]) Un campo de vectores X es localmente hamiltoniano si y sólo si es simpléctico.*

Nótese que todo campo hamiltoniano es localmente hamiltoniano (su flujo preserva la forma simpléctica), sin embargo, existen campos localmente hamiltonianos que no son hamiltonianos como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.1. *Sea el toro* $T^2 = S^1 \times S^1$. *Tomamos* $\Theta \in \Omega^1(S^1)$ *tal que, para todo* $p \in S^1$ *tenemos* $\Theta(p) \neq 0$. *Elegimos* $\left\{X(p) \subseteq T_pS^1\right\}$ *una base dual de* $\{\Theta(p)\} \subseteq T_p^*S^1$. *Por tanto, X es un campo de vectores de* S^1 *tal que* $X(p) \neq 0$ *para todo* $p \in S^1$ *y* $\Theta(X) = 1$.

Sea $\bar{X} = (X, 0)$ un campo de vectores en T^2 con $X \in \mathfrak{X}(S^1)$ tal que $\Theta(X) = 1$. Mostraremos que $\bar{X}$ es simpléctico y el campo de vectores de T^2 no es hamiltoniano.

Primero construimos una forma simpléctica ω en $T^2 = S^1 \times S^1$ con $\omega = pr_1^*\Theta \wedge pr_2^*\Theta$ donde pr_i^* es el pull-back de la proyección $pr_i : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1$ además ω es cerrada y dado que $\{\Theta(p)\}$ es una base y ω es no degenerada.

Luego por teorema 3.1.1 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\bar{X}}\omega &= i_{\bar{X}}d\omega + di_{\bar{X}}\omega \\
&= d\left(i_{(X,0)}(pr_1^*\Theta \wedge pr_2^*\Theta)\right) \\
&= d\left(\Theta(Tpr_1(X,0))pr_2^*\Theta - \Theta(Tpr_2(X,0))pr_1^*\Theta\right) \\
&= d(pr_2^*\Theta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{L}_{\bar{X}}\omega = 0$ luego por proposición 3.1.1 tenemos que $\bar{X}$ es simpléctico.

Sin embargo, $\bar{X}$ no es hamiltoniano. Probemos por contradicción, supongamos lo contrario, entonces existe una función $H \in C^\infty(T^2)$ satisfaciendo $i_{\bar{X}}\omega = dH$. Por la compacidad de T^2 existe un punto $p \in T^2$ tal que $dH(p) = 0$, pero esto implica que $X(p) = 0$ por lo cual es una contradicción pues $X(p) \neq 0$. Por lo tanto, el campo de vectores $\bar{X}$ de T^2 no es hamiltoniano.

Mostraremos ahora cuáles son las ecuaciones diferenciales de las curvas integrales de un campo hamiltoniano.

Sea (M, ω, X_H) un sistema hamiltoniano y $\left(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n\right)$ coordenadas canónicas de ω. Dada la función de energía H y usando que $\omega = \sum_{i=i}^n dq^i \wedge dp_i$, el campo hamiltoniano tiene la forma

$$X_H = \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

Definición 3.1.4. ***(conservación de la energía)*** *Sea* $(M\omega, X_H)$ *un sistema hamiltoniano. Entonces, la energía H se mantiene constante a lo largo de las trayectorias*

$$(H \circ \sigma) = cte$$

donde σ *es una curva integral del campo hamiltoniano.*

Presentamos un ejemplo de sistemas hamiltonianos en el que se muestran las ecuaciones del movimiento de las partículas en el espacio bajo el influjo de un potencial.

Ejemplo 3.1.2. *Sea* $(T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n})$ *un sistema hamiltoniano y* $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ *coordenadas canónicas de* ω*. Si* $H = T + V$ *es la energía(la suma de la energía cinética y potencial del sistema).*

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n}(p_i)^2 + V(q^1, ..., q^n)$$

el campo hamiltoniano viene dado por

$$X_H = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{m}\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

Si $\sigma(t) = (q^i(t), p_i(t))$ *es una curva integral del campo, las ecuaciones de Hamilton quedan*

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{p_i}{m} \\ \dot{p}_i = \frac{-\partial V}{\partial q^i} \end{cases}$$

sustituyendo $m\dot{q}^i = \dot{p}_i$ *y denotando* $F_i = \frac{-\partial V}{\partial q^i}$*, las ecuaciones se reducen a la segunda ley de Newton*

$$m\ddot{q}^i = F_i$$

Supersimetría y Sigma Modelos

La supersimetría (SUSY) es una hipotética simetría fundamental de la naturaleza que, en cierto sentido, unifica los dos tipos de campos conocidos: Bosónicos (correspondientes a representaciones tensoriales) y Fermiónicos (correspondientes a representaciones espinoriales). Se usa el nombre espinor o fermión para un campo cuántico fermiónico; matemáticamente, un espinor es una sección de un fibrado espín.

La SUSY postula que a cada partícula del Modelo Estándar (ME) le corresponde una compañera SUSY, que tiene espín opuesto, es decir, por cada fermión añade un bosón, y por cada

bosón añade un fermión, de manera que el número de partículas predicho por la teoría SUSY es el doble que el del ME.

Las transformaciones SUSY son generadas por operadores fermiónicos Q que intercambian estados fermiónicos y bosónicos . Una teoría de campos se dice que es supersimétrica si es invariante bajo la acción de las correspondientes transformaciones SUSY. Una teoría con SUSY se caracteriza por el número N de generadores fermiónicos. Si consideramos un único generador fermiónico Q, estamos con una teoría SUSY $N = 1$; si consideramos $N > 1$ operadores fermiónicos Q, tenemos una teoría con SUSY N-extendida, que dará lugar a N supercompañeros de cada partícula del ME. En dimensión $d = 4$, la condición de que no es posible espín > 2 implica que $N < 9$.

La supergravedad (SUGRA), Teoría de la Gravedad SUSY $N = 8$, es el principal candidato para una **teoría del todo** (teoría unitaria del universo).

La siguiente tabla 3.1 describe la relación entre SUSY N y la geometría de la variedad objetivo d-dimensional :

Tabla 3.1:

d=	6	4	2	Geometría
N=	1	2	4	Hiperkähler
N=		1	2	Kähler
N=			1	Riemanniana

Cuando se considera $d = 2$ o $d = 6$, se tiene la posibilidad adicional de tener supersimetría izquierda y derecha: las $N(p, q)$ SUSY de Hull y Witten.

Un **Sigma Modelo** es un sistema físico que está descrito por un Lagrangiano de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g_{ij}(\phi) \partial\phi^i \partial\phi^j$$

donde g_{ij} es la métrica Riemanniana de la variedad objetivo T. El sigma modelo describe un campo escalar ϕ^i que toma valores en la variedad objetivo T.

ϕ es un mapeo diferenciable de un espacio de Minkowski (u otro espacio) M en la variedad objetivo T. Los campos escalares ϕ^i parametrizan el sigma modelo. La métrica g_{ij} puede tener muchas restricciones impuestas por las supersimetrías. En particular, el grupo de isometrías de T se transporta a la simetría global del Lagrangiano. Los sigma modelos no lineales proveen un enlace entre SUSY y la geometría compleja.

La estrecha relación entre sigma modelos supersimétricos y geometría compleja fue descubierta por Zumino (en Supersymmetry and Kahler Manifolds 1979) quien demostró que en modelos $d = 4$ con SUSY $N = 1$ el espacio objetivo debe tener geometía de k*ä*hler. Alvarez-gaumé y Freedman (en Geometrical Structure and Ultraviolet Finiteness in the Supersymmetric Sigma Model 1981) demostraron que para modelos $d = 4$ con SUSY $N = 2$ la geometría del espacio objetivo debe ser hiperk*ä*hler.

La geometría del espacio objetivo depende del número N SUSY y de la dimensión del dominio . Para sigma modelos con dominio bidimensional existen muchas peculiaridades . En este caso , la geometría del espacio objetivo puede tener torsión total y generaliza las geometrías de k*ä*hler e hiperk*ä*hler . Esto ha conducido a nuevos e interesantes resultados en la geometría generalizada.

Ahora consideremos un sigma modelo en la Teoría Conforme de Campos . Dado f en $Map(M, N)$ su diferencial df determina una sección del fibrado tensorial $T^*M \otimes f^*TN$ también denotada df. La integral

$$\int_M |df|^2 \, dv_{g_M}$$

es llamada la Energia Armónica , se denota por $E(f)$ y sólo depende de la estructura conforme de M.

El sigma modelo considera a $E(f)$ como el funcional acción sobre el espacio de mapeos (o campos bosónicos) $Map(M, N)$ y esto da una teoría conforme de campos. Si conectamos campos bosónicos con campos fermiónicos , que son espinores de M torcidos por f^*TN entonces existe SUSY $N = 1$ entre bosones y fermiones . Cuando la variedad N es de k*ä*hler (resp. hiperk*ä*hler) podemos adicionar más campos fermiónicos y obtener un sigma modelo con SUSY $N = 2$ (resp. $N = 4$).

3.2. Teoría de Cuerdas

La comprensión de las leyes fundamentales de la naturaleza permanecerá incompleta mientras no se unifiquen rigurosamente la Relatividad General (RG) y la Mecánica Cuántica (MC) . Hasta 1980 estas teorías se desarrollaron independientemente cada una con sus propios conceptos observables y tipos de cálculos estraordinariamente diferentes. Con la finalidad de unificar la RG y la MC surgió la Mecánica Cuántica Relativista llamada Teoría Cuántica de Campos (TCC). En esta teoría se requiere que dos campos definidos en puntos del espacio-tiempo con una separación espacial conmuten (o anticonmuten si son fermiónicos) y se presentan problemas debido a la presencia de infinitos incontrolables.

La teoría de Cuerdas o Teoría Cordal (TC) pretende superar las dificultades de la TCC y preveer una consistente teoría cuántica de la gravedad , aunque aún no se tiene una comprensión detallada de cómo se logrará esto . Sin embargo la TC contiene verdades profundas que se van descubrienddo gradualmente . En esta remarcable y fascinante teoría está emergiendo un cuadro consistente que va tratando con éxito los retos que se presentan , direccionando las dificultades para llegar a una rigurosa unificación de la RG y la MC. La TC surgió en la década de los 60s como un intento para comprender la fuerza nuclear fuerte . La idea básica en la descripción cordal de la interacción fuerte es que partículas específicas corresponden a modos de oscilación específicos (o estados cuánticos) de la cuerda . En la década siguiente la TC se convirtió en una teoría adecuada para un propósito más ambicioso : la construcción de una teoría cuántica que unifique la descripción de la gravedad y las otras fuerzas fundamentales de la naturaleza . En principio tiene el potencial para proveer una comprensión completa de la física de partículas y la cosmología. La primera característica general de la TC y talvez la más importante es que incorpora naturalmente a la RG presentándola exactamente en la propuesta por Einstein . Esto es significativo porque la RG está surgiendo en el marco de una consistente teoría cuántica.

La TCC no conduce a la existencia de la gravedad , mientras que en la TC es necesaria su existencia. Otra característica general de la TC es la aparición de las teorías de calibre de Yang-Mills las cuales comprenden al Modelo Estándar (ME). La tercera característica general de la TC es que su consistencia requiere de la Supersimetría (SUSY) la cual relaciona bosones y fermiones. La versión SUSY de la TC es llamada Teoría de Supercuerdas (TSC). La SUSY del espacio-tiempo es una de las principales predicciones de la TSC que podría ser confirmado

experimentalmente a energías accesibles ([20]).

En la física de partículas, el concepto de simetría, es muy importante en la descripción de las 4 fuerzas fundamentales: gravedad, electromagnetismo, fuerzas nucleares débil y fuerte. La simetría son de 2 tipos: simetría espacio temporal y simetría interna, la primera es descrita por grupos de Lorentz y grupo de Poincare; mientras que la segunda es descrita por grupos de simetría interna como: grupos unitarios U(1) y SU(2). La teoría de cuerdas en el ámbito científico y social tiene mucha relevancia y se muestra como la solución a muchos problemas. La teoría de cuerdas se basa de que las partículas fundamentales que conforman el mundo real están constituidas por unos diminutos filamentos que se denominan cuerdas. Estas cuerdas vibran, como por ejemplo las cuerdas de una guitarra. La teoría de cuerdas es un modelo de la física teórica, asume que las partículas fundamentales como también sus interacciones son vibraciones de objetos unidimensionales más pequeñas llamadas cuerdas. Algunas de las características de una cuerda son: la cuerda posee tensión, la cuerda no posee estructura interna, la cuerda puede ser clásica o cuántica y la cuerda puede ser abierta o cerrada. Además la longitud de una cuerda es $l_s \cong 10^{-33} cm$.

Además nos hacemos una pregunta, ¿por qué es tan prometedora esta teoría? Pues esta teoría soluciona algunos de los problemas más importantes de la física teórica. Además tenemos los principales motivos de la teoría de cuerdas:

(1). Teoría del todo: La teoría de cuerdas ha sido la primera teoría matematicamente compacto que permitio la coenxistencia de la mecanica cuantica(MC) y la relatividad general(RG).

(2). Teoría de la unificación: Accede la unificación del electromagnetismo y interacciones nucleares fuerte y nuclear débil.

(3). La Tensión de la cuerda: Reduce la cifra de parametros fundamentales del modelo estándar, el cual requiere la determinación experimental de 25 constantes fundamentales. En la teoría de cuerdas sólo se necesita la determinación de un único parámetro.

(4). Al realizar estudios a distancias extremadamente cortas, como la longitud de Planck, resuelve el problema de los infinitos que se plantea en la teoría cuántica de la gravedad. Es un desarrollo perturbativo que las cuerdas no son partículas puntuales, sino que su componente mínima tiene una longitud finita a la vez impide la aparición del infinito, distinta de cero. Además, surge una nueva palabra resultante de la supersimetría y del crecimiento perturbativo del

universo, que compensa el resultado obtenido.

Problema de la teoría de cuerdas: La teoría de las cuerdas plantea problemas importantes que aún no se han resuelto. El mayor de ellos es que es imposible demostrar que la teoría es incorrecta porque se necesitaría una enorme cantidad de energía para atestiguar las cuerdas, energía que no es posible crear con el nivel tecnológico actual.

El gran número de estados de vacío que existen actualmente, que es de aproximadamente 10^{500} , la mala predicción de la constante cosmológica, que está muchos órdenes de magnitud por encima de los resultados experimentales y el requisito de fijar el espacio-tiempo de fondo para poder hacer predicciones, son otros problemas muy significativos de la teoría que merece la pena mencionar. Por todo ello, puede decirse que la teoría de cuerdas es un modelo matemático complejo que debe resolver algunos problemas y, desde la perspectiva de la física teórica, es una teoría muy prometedora.

Nacimientos y evolución de la teoría cuerdas

Todo empezó en 1968, cuando Gabriele Veneziano, un físico teórico italiano, quiso comprender la interacción nuclear fuerte. En su búsqueda por comprender la interacción nuclear fuerte, Veneziano descubrió que una ecuación matemática de Leonhard Euler, escrita 200 años antes, mostraba que la función beta era válida si se tenía en cuenta la amplitud Benetiana, una amplitud de dispersión adecuada.

$$B(z,h) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(h)}{\Gamma(z+h)}$$

intentó representar el comportamiento de algunas partículas que interaccionan fuertemente cuando se daba una amplitud de dispersión adecuada, también conocida como amplitud Veneziano de dispersión.

Las numerosas características de la fuerza nuclear fuerte podían describirse gracias a esta función. Sin embargo, en otros aspectos, la observación de Veneziano fallaba porque no existía y porque la fórmula funcionaba pero se desconocía el motivo. Holger Nielsen (Instituto Niels Bohr), Leonard Susskind (Universidad de Stanford) y Yoichiro Nambu (Universidad de Chicago) contribuyeron a esclarecer la cuestión en 1970. Las numerosas características de la fuerza nuclear fuerte podían describirse gracias a esta función.

Demostraron que, si una partícula elemental se representara como un modelo de partículas ele-

mentales, tratándolas como pequeñas cuerdas vibrantes, sus interacciones se explicarían completamente por la función beta de Euler. Además, si eran lo suficientemente pequeñas, podrían seguir pareciendo partículas puntuales, lo que sería coherente con los resultados de los experimentos si eran lo suficientemente pequeñas ([19]). Esta hipótesis, que estaba prosperando, empezó rápidamente a perder partidarios por dos razones principales:

(a). Cómo ha evolucionado la cromodinámica cuántica: Muchos científicos perdieron interés por la teoría de cuerdas a raíz del crecimiento de este campo de la física y su exitosa explicación de la fuerza nuclear fuerte.

(b). La aparición de incoherencias en la teoría de cuerdas: Producen más problemas de los que resuelven haciendo pruebas de ratificación. Pocos científicos seguían trabajando en ella a mediados de la década de 1970. en ella. La elegancia matemática de la teoría de cuerdas fascinó a dos físicos teóricos, John Schwarz y Joel Scherk. Siguieron trabajando en el tema porque la elegancia matemática de la teoría de cuerdas les convenció de que era una teoría física sólida porque incluía configuraciones que compartían las características de los gluones y otros tipos de partículas. Como partículas mensajeras, que parecían insignificantes en las mediciones experimentales de la fuerza nuclear fuerte, también se incluyeron en la teoría de cuerdas. observaciones de la fuerza nuclear fuerte realizadas mediante experimentos. Schwarz y Scherk, sin embargo, lograron descubrir en 1974 que estas partículas, de espín 2, encajan perfectamente con la partícula hipotética mediadora de la conexión gravitatoria: el gravitón. Dado que la teoría de cuerdas no es simplemente una teoría que describe la interacción nuclear fuerte, sino también una teoría cuántica que incorpora la gravedad, plantearon la hipótesis de que los problemas con la teoría de cuerdas se debían a una restricción en su ámbito de aplicación. sin embargo, una teoría cuántica que incorpora la gravedad. A pesar de la importancia del descubrimiento, recibió poca atención por parte de la comunidad científica. Había intentado conciliar la gravitación y la física cuántica en numerosas ocasiones, pero no creía que una teoría que parecía plagada de problemas pudiera hacerlo. También surgieron numerosos problemas matemáticos en la teoría, lo que dio lugar a más teorías, que a su vez provocaron aún más rechazo.

John Schwarz y Michael Green en 1984, tras 12 años de arduas investigaciones demostraron que la teoría resultante puede dar cuenta de las cuatro fuerzas de la naturaleza: la fuerza nuclear fuerte, la fuerza nuclear débil, la fuerza electromagnética y la fuerza gravitatoria. Con ello co-

menzó oficialmente la primera revolución de la teoría de cuerdas.

3.2.1. Teoría de cuerdas bosónicas

La teoría de cuerdas bosónica, se creó en la década de 1960. Es la forma original de la teoría de cuerdas. Explica el comportamiento de las cuerdas abiertas y cerrada. La ausencia de fermiones, la existencia de taquiones y el número de dimensiones son los tres mayores problemas de la teoría. Aunque mantiene características inquietantes como la ausencia de fermiones, predice la existencia de taquiones. Las únicas partículas que tiene son bosones (de ahí su nombre). Según los cálculos realizados por los físicos, la teoría de cuerdas bosónica necesita 26 dimensiones espacio-tiempo, 25 de las cuales están relacionadas con el espacio y 1 con el tiempo.
Dado que la teoría sólo puede describir bosones y, en consecuencia, no los contiene, se le da la etiqueta de teoría de cuerdas bosónica. La materia ordinaria, que está formada por fermiones no se incluye en la teoría. Pero cualquier introducción a la teoría de cuerdas nos permite comprender el comportamiento de las cuerdas bosónicas y es técnicamente más sencilla, cualquier introducción a la teoría de cuerdas suele comenzar con el estudio de la teoría de cuerdas bosónicas. Además, a medida que se desarrolla la teoría, se revela una partícula con una velocidad mayor que la velocidad de la luz y, en consecuencia, una hipotética masa en reposo mayor que la velocidad de la luz y, en consecuencia, la relatividad sugiere una masa en reposo ficticia. Ha habido intentos infructuosos de excluir de la hipótesis esta partícula, conocida como **Taquión**. Por último, para que esta teoría sea consistente cuánticamente y desaparezcan los estados de norma negativa que se forman a lo largo de su desarrollo, es crucial tener en cuenta que el espacio-tiempo de fondo tiene 26 dimensiones: 25 dimensiones de espacio y 1 dimensión de tiempo ([21]).

Tipos de cuerdas: Dado que las cuerdas tienen dimensión en contraposición a los puntos, podemos manipular sus puntos para crear dos tipos diferentes de cuerdas: abiertas y cerradas.

(a). Cuerdas abiertas: Una cuerda abierta es una cuerda moviéndose libremente, además tiene a sus extremos moviéndose con la velocidad de la luz, y es topológicamente idéntica a un inter-

valo de línea (figura 3.1).

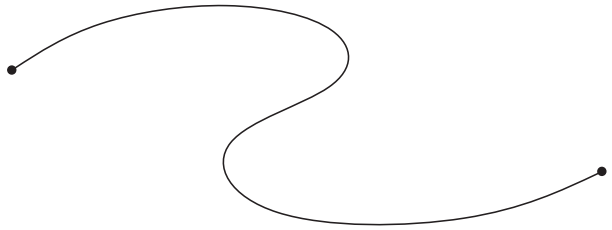


Figura 3.1: Cuerda abierta

(b). Cuerdas cerradas: Cuando una cuerda no tiene extremos, se denomina cuerda cerrada y es topológicamente idéntica a un círculo. Cualquier teoría de cuerdas siempre tendrá cuerdas cerradas.(figura 3.2)

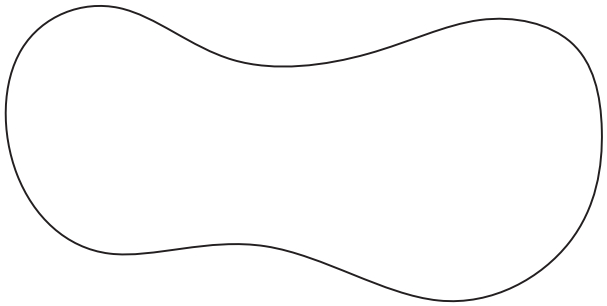


Figura 3.2: Cuerda cerrada

Como ya he mencionado, las cuerdas pueden ser cerradas o abiertas, y su interacción implica dividirlas y unirlas. Una cuerda abierta puede unirse para producir una cuerda cerrada, una cuerda abierta puede cortarse para formar una cuerda cerrada, una cuerda cerrada puede doblarse y dividirse en dos, y una cuerda abierta puede doblarse y dividirse en dos cuerdas cerradas y dos cuerdas abiertas.La interacción fundamental en la teoría de cuerdas es cuando dos cuerdas se combinan para formar una o cuando una cuerda se divide en dos, así es como interactúan. Todas las interacciones resultan de la misma unión y desunión de cuerdas.

Podríamos hacer que la cuerda vibrara del mismo modo que lo hace una cuerda de guitarra, es decir, con ondas que se desplazan por ella. En las cuerdas cerradas, dividimos estas vibraciones en dos categorías en función de la dirección en la que se mueven las ondas. Vistas desde la

parte frontal del movimiento de la cuerda, las vibraciones de la derecha se mueven en el sentido contrario a las agujas del reloj, y las de la izquierda en el sentido de las agujas del reloj. (ver figura 3.3).

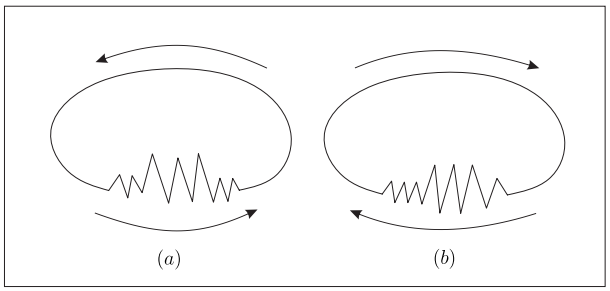


Figura 3.3: Las oscilaciones de una cuerda cerrada a derecha e izquierda son independientes entre sí y no interactúan.

Esta clasificación no se aplica a las cuerdas abiertas porque sus puntas reflejan las ondas que se aproximan, cambiando la dirección de propagación una vez que una onda alcanza una de las puntas. En sentido estricto, esto da lugar a una superposición de ambas ondas (una onda estacionaria). (ver figura 3.4).

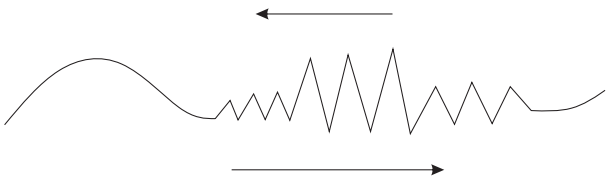


Figura 3.4: Las oscilaciones cerca del extremo de la cuerda rebotan y cambian de rumbo, haciendo que los dos tipos de oscilaciones se mezclen, por lo que esto no ocurre con la cuerda abierta.

Podemos ver la orientación de las cuerdas de la siguiente manera. Se puede comprobar la orientación de las cuerdas cerradas (véase la figura 3.5) colocando una hormiga en el borde de la hoja del mundo y haciendo que empiece a caminar. Si la hormiga vuelve al punto de partida después de dar una vuelta, es probable que la cuerda esté orientada; si no, la hormiga deberá dar dos vueltas para llegar al punto de partida. para volver al principio.

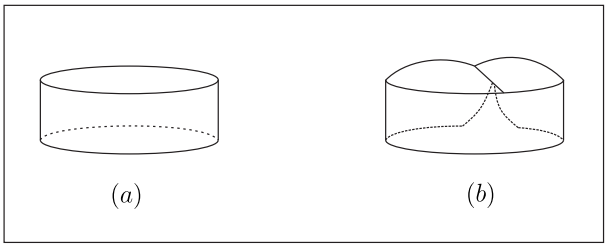


Figura 3.5: divididas en dos grupos: (a) bandas cerradas con hojas de mundo alineadas y (b) bandas cerradas sin alinear. Antes de unir los bordes del papel, el caso (b) es la banda de papel de media vuelta conocida como banda M*ö*bius en matemáticas.

Cuando asignamos cargas a cuerdas abiertas, determinamos su orientación a través de sus puntas (sin carga significa carga cero). Estas cargas no son eléctricas, pero tienen cualidades similares a las de las cargas eléctricas. También nos permiten incluir simetrías adicionales en la teoría, como la simetría del color, que rige cómo interactúan los quarks entre sí. Como resultado, si las cargas son iguales, diremos que la cuerda no está orientada (no podemos decir dónde están sus puntas), y si difieren, diremos que está orientada. (ver figura 3.6).

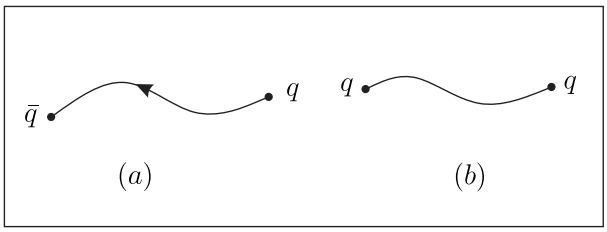


Figura 3.6: Las cuerdas abiertas se dividen en dos categorías: (a) orientadas y (b) no orientadas, donde la carga opuesta a q se denota por $\bar{q}$.

3.2.2. Teoría de cuerdas fermiónicas o teoría de supercuerdas

Teoría de supercuerdas: La teoría de supercuerdas (TSC) resuelve el problema del taquión, particulas con masa imaginaria y el problema de los espinores, los fermiones, particulas que toman valores en algún fibrado espinorial, aparecen conectados con los bosones, osea las representaciones tensoriales se realiza con supersimetría (SUSY). Con el fin de preservar la simetría de Lorentz la teoría de supercuerdas se debe trabajar en 10 dimensiones. La teoría de supercuerdas es una teoría difícil, se prefiere trabajar con una aproximación sofisticada: SUGRA osea la

teoría de supergravedad. Los principios físicos proporcionan ecuaciones diferenciales, llamadas ecuaciones de movimientos, cuyas soluciones describen el comportamiento de los campos. El problema de encontrar soluciones de vacío realistas en la teoría de supercuerdas se reduce al de encontrar soluciones de vacío realistas en la teoría de SUGRA. En SUGRA clásica, no cuantica, se dan 3 condiciones para una solución

(i). La solución del vacío debe tener una geometría local $M \times K$, donde M es el espacio-tiempo de Minkowski (4-dimensional) y K es una variedad compacta (6-dimensional). Matemáticamente se requiere que la geometría del espacio-tiempo este determinada por un fibrado $\hat{M}$, donde $\hat{M}$ es 10-dimensional, M es el espacio-tiempo (4-dimensional) y las fibras son variedades compactas (6-dimensional).

(ii). El contenido de partículas debe reconstruir el contenido de partículas del modo estandar (ME), esto da ciertas restrincciones sobre algunos números topológicos de la variedad compacta K.

(iii). La solución del vacio debe conducir a la supersimetría (SUSY), lo cual significa que no toda la supesimetría debe ser quebrado por la solución. Sin embargo es posible (realmente preferible) que la SUSY sea quebrada parcialmente, pero no completamente, sino de tal manera que al nivel en que la teoría SUGRA clásica tenga su regimén de validez y así la naturaleza admite SUSY. Tengamos en cuenta que la SUSY no es realista pues la naturaleza no es supersimetrica.

Ahora podremos mostrar porque las variedades de Calabi-Yau aparecen en la física, combinando las ecuaciones del movimiento y las ecuaciones que dicen una solución es supersimetrica se llega a las siguientes conclusiones:

(a). La variedad compacta K debe ser Ricci-plana.

(b). La variedad compacta K debe admitir una sección global η nunca nula, de un fibrado espín tal que $\nabla\eta = 0$ (covariantemente constante), donde ∇ es la conexión sobre el fibrado espín asociado a la conexión de Levi-Civita sobre el fibrado tangente.

Si existe un espinor covariantemente constante entonces este es invariante bajo el grupo de holonomía, por lo tanto el grupo de holonomía debe ser un subgrupo de SO(6) tal que la representación espinorial se descomponga en dos partes uno de los cuales debe contener a la representación trivial. El recubrimiento doble de SO(6) es SU(4) y la representación espinorial

de SO(6) corresponde a la representación vectorial 4-dimensiones de SU(4). Luego el mayor subgrupo de SU(4) que admite un campo vectorial constante es SU(3), el grupo pequeño de la representación vectorial de SU(4). Además a partir del espinor covariantemente constante, se debe construir con (1,1)-tensorial con cuadrado -1 y que es covariantemente constante. Como resultado, K es 6-variedad compacta con una estructura compleja, osea una variedad de K*ä*hler cuya holonomia se encuentra en SU(3). En conclusión K es una variedad de Calabi-Yau.

La llegada de la teoría de cuerdas, que prevé un espacio-tiempo de 10 dimensiones, causó un enorme entusiasmo en la comunidad de los físicos durante la década de 1980. Shing-Tung-Yau era un experto en los espacios o variedades de Calabi-Yau y ya había establecido la hipótesis de Calabi a mediados de los años setenta. En términos de física, la conjetura de Calabi postula la posibilidad de regiones compactas con supersimetría que, a pesar de carecer de materia, podrían contener gravedad. Dado que tanto la curvatura del espacio como el origen de la gravedad están determinados por la materia, según la teoría clásica de la relatividad, parece lógico que la gravedad sea nula en el vacío. Sin embargo, Yau demostró que tales espacios eran factibles y que puede haber infinitos tras muchas peripecias. Son los que actualmente se denominan variedades de Clabi-Yau.

La teoría de supercuerdas tiene la capacidad de predecir la dimensión del espacio-tiempo en el cual existen. La teoría de supercuerdas solo es consistente en un espacio tiempo 10-dimensional en algunos casos 11-dimensional. Se considera que solo observan 4-dimensiones en el espacio-tiempo porque 6 ó 7 dimensiones están compactificadas sobre un espacio interno cuyo tamaño es muy pequeño para ser detectado experimentalmente. Los primeros espacios internos que se considerarán para compactificar los 6-dimensiones extras, fueron las variedades de Calabi-Yau. Estas variedades no tienen isometrías, y parte de su rol es quebrar simetría en lugar de hacerlas ([20]).

(a). La primera revolución de las supercuerdas: Comenzo en 1984 con el descubrimiento de que la consistencia mecánica-cuántica en una teoría 10-dimensional con SUSY $N = 1$ requiere, una simetría de calibre de Yan-Millss local basada en el grupo de Lie SO(32) ó en el grupo de Lee $E_8 \times E_8$. Esto dio origen a dos teorías de las supercuerdas: la teoría heterótica SO(32) y la teoría heterótica $E_8 \times E_8$. Más adelante surgieron otras 3 teorías de las supercuerdas: la teoría de cuerdas de tipo I, teoría de cuerdas de tipo IIA y la teoría de cuerdas IIB. La teoría de cuerdas

exhibe varias propiedades sorprendentes, una de ellas, llamada T-dualidad, implica que en varios casos dos geometrías diferentes para las dimensiones extras son fisicamente equivalentes. También hay ejemplos más elegantes de equivalencias de dualidad. Por ejemplo, la teoría de supercuerdas tipo IIA compactificada sobre una variedad de Calabi-Yau es identica a la teoría de supercuerdas de tipo IIB compactificada sobre una variedad de Calabi-Yau "espejo "([19]).

(b). La segunda revolución de las supercuerdas: Otra clase de la dualidad, llamada S-dualidad, se descubrió como parte de la segunda revolución de las supercuerdas a mediados de la decada de los 90. Los dos ejemplos básicos relacionan la teoría de cuerdas tipo I y la teoría de cuerdas heterótica SO(32); por otro lado la teoría de cuerdas de tipo IIB es S-dualidad. Otra gran sorpresa de la teoría de supercuerdas es un nuevo tipo de teoría en 11-dimensiones: la teoría M. A bajas energías es aproximada por la teoría clásica de campos, llamada supergravedad (SUGRA) 11-dimensional. La relación entre la teoría M y los dos ejemplos básicos anteriores, junto con las dualidades T y S, implican que las 5 teorías de supercuerdas estan conectadas por una telearaña de dualidad; se pueden considerar como diferentes versiones de una única teoría ([19]).

Las teorías de cuerdas fermiónicas tienen grados de libertad tanto bosónicos como fermiónicos, lo que soluciona el fallo de la teoría bosónica porque pueden contener la materia de nuestro universo. Las otras dos cuestiones fundamentales también se resuelven o mejoran en su versión bosónica.

(a). Exclusión del Taquión. El taquión no está presente en las teorías de cuerdas fermiónicas..

(b). Una reducción significativa de las dimensiones. Las teorías de cuerdas bosónicas requerían un número preciso de 26 dimensiones espacio-tiempo para lograr la coherencia física (es decir, sin estados de norma negativa). Las teorías fermiónicas reducen el número de dimensiones de 26 a 10, que es mucho más realista, al incluir la supersimetría.

Aunque cabría esperar que los avances en las teorías de cuerdas fermiónicas fomentaran nuevos estudios en el área, no fue así debido a su abundancia. No estaba claro por qué había hasta cinco teorías matemáticamente sólidas que trataban de explicar el Universo, ya que se suponía que una teoría del todo era singular.

El descubrimiento de cinco teorías de cuerdas distintas y matemáticamente coherentes que pretendían explicar el mundo alarmó a los físicos teóricos. Las cinco teorías de cuerdas se propu-

Tipos	Tipo I	Tipo II A	Tipo II B	Heterótica SO(32)	Heterótica $E_8 \times E_8$
tipo de cuerda	Abierto y cerrado	Cerrado	Cerrado	Cerrado	Cerrado
Supersimetría	N=1	N=2	N=2	N=1	N=1

Tabla 3.2: Las 5 teorías de supercuerdas

sieron durante la llamada segunda revolución de las supercuerdas, en la década de 1990.

La teoría de supercuerdas es un esquema teórico para explicar todas las partículas y fuerzas fundamentales de la naturaleza (fuerza nuclear fuerte, fuerza nuclear débil, fuerza electromagnética y la fuerza gravitacional) en una sola teoría, que modela las partículas y campos físicos como vibraciones de delgadas cuerdas supersimétricas, las cuales se mueven en un espacio-tiempo de más de cuatro dimensiones, más exactamente, el espacio-tiempo de 10 dimensiones que requieren las teorías de supercuerdas. La supersimetría permite la formulación matemáticamente coherente de las supercuerdas de cinco maneras diferentes. Las cinco teorías fermiónicas existentes se da en la siguiente tabla 3.2:

(1). Teoría de cuerdas de tipo I: Tiene cuerdas abiertas y cuerdas cerradas, no orientadas, que se mueven en un espacio-tiempo de 10 dimensiones. Es la única teoría de cuerdas con hoja de universo no orientable, lo que significa que las cuerdas abiertas y cerradas son no orientables. Además es la única teoría en donde las cuerdas cerradas pueden romperse para originar cuerdas abiertas.

Interacciones naturales como la gravedad y un grupo de campos gauge bastante comparables a los del mundo real están ahí, junto con cosas ordinarias. Además, presentan una quiralidad definida, que denota una ruptura de la simetría izquierda-derecha o paridad. Esta última es crucial, ya que la conservación de la paridad no se observa en la interacción nuclear débil y, en consecuencia, no puede ser preservada por una teoría del universo. Presenta un nivel de supersimetría $N = 1$, lo que le ha valido el apelativo de tipo I.

(2). Teoría de cuerdas de tipo II A: Presenta cierta supersimetría, $N = 2$, y se denomina tipo

II por este motivo. La teoría contendrá cuerdas abiertas y orientadas si se incluyen en ella las branas. Podemos añadir simetrías adicionales a estas teorías utilizando las puntas de las cuerdas abiertas, que están presentes.
Aunque el gravitón está presente, no contiene las partículas mediadoras que son visibles en nuestro mundo. Las partículas de materia fermiónica están presentes, pero no son capaces de transportar cargas porque los portadores de fuerza típicos están ausentes. Esta hipótesis no suscita mucho interés porque se mantiene la paridad.

(3). Teoría de cuerdas de tipo II B: En un espacio-tiempo de 10 dimensiones, propaga cuerdas cerradas y orientadas. Presenta cierta supersimetría, $N = 2$, y se denomina tipo II por este motivo. La teoría contendrá cuerdas abiertas y orientadas si se incluyen en ella las branas.

La teoría de cuerdas bosónica, que tiene 26 dimensiones y es una combinación de la teoría de cuerdas de tipo I, y las teorías heteróticas. Se tienen en cuenta 16 de estas dimensiones, y aluden a grados de libertad que aparecen como campos gauge. Las dos teorías heteróticas actuales resultan del hecho de que sólo hay dos soluciones que lo permiten. Según estas teorías, las excitaciones de la cuerda cerrada se asemejan a pequeñas ondas que se desplazan alrededor de la cuerda en un sentido o en otro. Dependiendo de la dirección del desplazamiento, se dice que estas ondas se desplazan hacia la izquierda o hacia la derecha. Normalmente se generan combinaciones de ondas comunes en una dirección y ondas supersimétricas en la otra porque, a pesar de propagarse por la misma cuerda, no interactúan entre sí.
(4). Teoría de cuerdas heterótica SO(32): *(Grupo ortogonal especial de rotaciones en 32 dimensiones interiores, abreviado como SO(32).).* Una de las dos teorías de cuerdas heteróticas es la teoría de cuerdas heteróticas SO(32), también conocida como cuerda HO. En un espacio-tiempo de 10 dimensiones, propaga cuerdas cerradas y orientadas. Presenta supersimetría en un grado $N = 1$. Se aplican reglas diferentes a las partículas levógiras (aquellas cuyo espín y movimiento están en la misma dirección) y a las partículas dextrógiras (aquellas cuyo espín y movimiento están en la dirección opuesta). Las cuerdas pueden tener supersimetría en el sector dextrógiro pero no en el levógiro, o viceversa.

(5). Teoría de cuerdas heterótica $E_8 \times E_8$**:** *($E_8 \times E_8$= grupo formado por la multiplicación de dos grupos E_8, donde E_8 es un grupo de Lie simple y excepcional).* Una de las dos teorías de cuerdas heteróticas es la teoría $E_8 \times E_8$. En un espacio-tiempo de 10 dimensiones, propaga cuerdas cerradas y orientadas. Presenta supersimetría en un grado $N = 1$. Se aplican reglas diferentes a las partículas levógiras (aquellas cuyo espín y movimiento están en la misma dirección) y a las partículas dextrógiras (aquellas cuyo espín y movimiento están en la dirección opuesta). Las cuerdas pueden tener supersimetría en el sector dextrógiro pero no en el levógiro, o viceversa.

Supersimetría: Las propiedades de los fermiones, que son las partículas materiales como el electrón, y los bosones, que son las partículas mediadoras de las interacciones, o los mensajeros de las interacciones, pueden relacionarse mediante una simetría teórica conocida como supersimetría. Según esta teoría, cada bosón tendría un fermión supersimétrico, y viceversa. La abreviatura inglesa SUSY también se utiliza para referirse a la supersimetría.

Compactificación: Como hemos visto anteriormente, las teorías fermiónicas son las teorías de cuerdas en las que están de acuerdo la mayoría de los científicos, sin embargo, éstas tenían 10 dimensiones, lo cual es extraño teniendo en cuenta que sólo se han encontrado 4 dimensiones (3 espaciales y 1 temporal). ¿Dónde están las otras seis dimensiones del espacio? Una extensión del concepto de Kaluza, la respuesta a esta cuestión implica enrollar una dimensión hasta que sea tan pequeña que resulte invisible. El concepto de Kaluza implica enrollar una dimensión hasta que sea tan pequeña que no pueda verse. Una cuerda de alta tensión instalada en una torre podría servir como ilustración para ayudar a entender esto. Desde lejos, parece unidimensional, pero si usted fuera una hormiga y la pisara directamente, podría ver que en realidad es un cilindro. De acuerdo con esta noción, se ha propuesto que 6 dimensiones espaciales constituyen una variedad compacto, cuyo tamaño es tan pequeño que el ser humano es incapaz de detectar inmediatamente su existencia con las investigaciones existentes. Hay requisitos particulares que deben cumplirse cuando se enrollan estas dimensiones, como ajustarse a una solución para el vacío de las ecuaciones de Einsteiny tiene que cumplir requisitos específicos, entre ellos ser una solución para el vacío de las ecuaciones de Einstein. La opción más popular es pensar en una variedad de Calabi-Yau. Esto se consigue compactando más dimensiones. El tamaño de estas dimensiones adicionales es finito, como en el caso de un tubo infinitamente largo, que sería un

espacio de dos dimensiones (ignoremos su grosor, por lo que es una superficie), con una dimensión infinita (su longitud) y la otra, limitada (su circunferencia, que se compacta). y la otra, de longitud finita (su circunferencia, que se compacta). Por razones físicas, las dimensiones compactadas son también muy pequeñas, de modo que las pruebas actuales no las han visto. Por ejemplo, si la circunferencia de nuestro tubo fuera muy pequeña, la veríamos esencialmente como una línea y perdería su oquedad.

Según la teoría de supercuerdas, el universo tiene 10 dimensiones, que representamos matemáticamente como M^{9+1} (notación que destaca más claramente el hecho de que hay nueve dimensiones espaciales y una para el tiempo). Debemos confinar las 6 dimensiones adicionales que se encuentran en las supercuerdas a un espacio compactado, que denotamos como M^{3+1} y X^6, respectivamente, porque nuestro universo observable sólo tiene 4 dimensiones. En consecuencia, expresamos nuestra sugerencia como

$$M^{9+1} = M^{3+1} \times X^6$$

([19]) Este espacio-tiempo M^{9+1} se representa gráficamente en la figura 3.7. La noción de M^{9+1} es que hay un espacio compactado X^6 en cada punto del espacio-tiempo observable M^{3+1}; como resultado, si nos encontráramos en el punto P del diagrama, observaríamos que sólo estamos en la superficie de una esfera S^6. Puesto que cada punto tiene su propia esfera, la esfera de Q es una esfera diferente.

Las variedades de Calabi-Yau son una de las alternativas a la esfera S^6 para el espacio X^6 y son matemáticamente sólidas dentro de la formulación teórica.

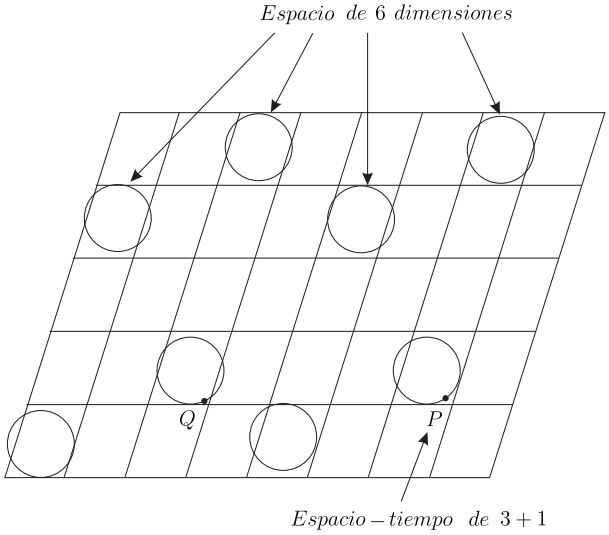


Figura 3.7: un gráfico que representa un espacio-tiempo 9+1.

Teoria de supercuerdas en una variedad de Calabi-Yau: Las variedades de Calabi-Yau cobraron mucha importancia en la década de 1980. Este tipo es un espacio único que, en aplicaciones de la teoría de supercuerdas, suele considerarse de seis dimensiones. Las variedades de Calabi-Yau, que son variedades Riemannianas con el grupo de holonomía SU(n) (Hol(g)⊆ SU(n)), son significativas en la teoría de supercuerdas por sus intrigantes características.
Las variedades Calabi-Yau, llamadas así por los matemáticos Eugenio Calabi, de la Universidad de Pensilvania, y Shing-Tung Yau, de Harvard. Proporcionan las representaciones matemáticas de posibles dimensiones espaciales adicionales y están relacionadas con la teoría de supercuerdas. Las variedades de Calabi-Yau tienen agujeros en forma de rosquilla, que también pueden contener múltiples dimensiones adicionales (Figura 3.8). Estos agujeros son cruciales para la condición oscilatoria de las partículas elementales en su energía mínima (teóricamente cuerdas). La variedad Calabi-Yau que resulta de las matemáticas extremadamente difíciles a las que conduce la teoría es actualmente el centro de atención de todos los físicos teóricos que apoyan la teoría de cuerdas. Se cree que los estados vibracionales de esos estados energéticos conocidos como cuerdas se comprenderán una vez conocida la variedad de Calabi-Yau.([19]).

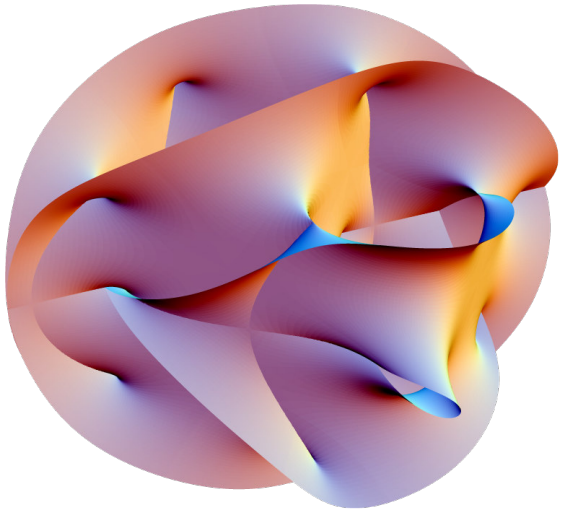


Figura 3.8: Variedad de Calabi-Yau de dimensión 6.

3.3. Unificación de las teorías de Supercuerdas

3.3.1. Dualidades:

En física se denomina dualidad a la conexión entre dos elementos que parecen diferentes pero en realidad son equivalentes. Ya hemos hablado de las diversas teorías de cuerdas que existen en la actualidad, así como de la cuestión de que haya cinco explicaciones igualmente viables de todo. Resulta que, en determinadas circunstancias, empiezan a surgir concordancias entre varias de estas teorías aparentemente separadas.

Durante un tiempo, la presencia de cinco teorías de supercuerdas decepcionó a los físicos teóricos porque no había ninguna norma matemática o física que permitiera determinar qué teoría era la más adecuada para describir la naturaleza. El descubrimiento de las dualidades dio nueva vida a las supercuerdas y las reactivó. Las dualidades son operaciones matemáticas que revelan las partes constituyentes (funciones, operadores, etc) de dos teorías aparentemente no relacionadas. Cada componente de una de las teorías tiene un compañero en la otra, haciendo de esta identificación una correspondencia uno a uno. Como resultado, declaramos que las teorías son iguales. En la teoría de supercuerdas, clasificamos dos tipos de dualidades: dualidades T y dua-

lidades S ([19]).

Dualidades T: Vinculan teorías con diversas geometrías espaciales compactadas sin alterar las constantes de acoplamiento, es decir, las teorías exhiben la misma intensidad en sus interacciones bajo dualidad. Supongamos, por ejemplo, que existe una dimensión compacta y cerrada entre las diez dimensiones del espacio-tiempo. En este caso, las cuerdas, a diferencia de las partículas, pueden enrollarse en la dimensión compacta; mientras que las partículas puntuales sólo pueden dar vueltas alrededor de la dimensión compacta, las cuerdas también pueden enrollarse en las dimensiones compactas. Resulta que una cuerda en bucle alrededor de un círculo de radio R es idéntica a una cuerda que gira alrededor de un círculo con el radio inverso, lo cual es una propiedad intrigante de la dualidad T. Otra comparación es entre la teoría de cuerdas heterótica SO(32) y la heterótica $E_8 \times E_8$, así como entre la teoría de cuerdas de tipo II A y la de tipo II B. Las grandes distancias en la teoría de Cuerdas son comparables a las pequeñas distancias, lo que significa que hay una distancia mínima por debajo de la cual las cosas suceden de la misma manera que por encima de esa distancia. Esto es radicalmente distinto de cómo la teoría de partículas ve la geometría del espacio-tiempo. La dualidad T es una característica especialmente intrigante de la Teoría de Cuerdas.

Dualidades S: Son las que conectan una teoría de supercuerdas débilmente acoplada (cuyos constituyentes físicos primarios son las cuerdas) con otra constante de acoplamiento fuerte (cuyas entidades físicas dominantes son las branas). Esta dualidad S establece una equivalencia entre las teorías fuertemente acopladas, es decir, en las que la interacción es muy fuerte, y las teorías débilmente acopladas. El acoplamiento en la teoría mide la fuerza de la conexión. Los radios de las dimensiones compactadas no se ven alterados por estas dualidades. Tenemos el SO(32) heterótico con la teoría de tipo I, por ejemplo, así como la teoría de tipo II-B consigo misma.

3.3.2. Teoría M

Como las teorías de supercuerdas son 10-dimensional y la teoría M es 11-dimensional es necesario para conectarlos con la geometría del espacio-tiempo 4-dimensional ([19]). Existen 2

enfoques principales:

Compactificación de Kaluza-Klein: Este enfoque tiene una larga historia aqui las dimensiones extras forman una variedad compacta de tamaño l_c. Tales dimensiones son esencialmente invisibles para observaciones realizadas a energía $E \ll 1/l_c$. Sin embargo los detalles de su topología tiene una profunda influencia sobre el espectro y las simetrías que se presentan a energías bajas en la teoría efectiva 4-dimensional. Las geometrías prometedoras para estas dimensiones extras es la geometría de las variedades de Calabi-Yau, sin embargo también son importantes otras variedades de holonomia especial. Mientras que las variedades de Calabi-Yau compactas son las mas directas son las más directas, los desarrollos modernos en la teoría de cuerdas no perturbativa muestran que las variedades de Calabi-Yau no compactas también son importantes. Un ejemplo de la variedad de Calabi-Yau compacta es el conifolio.

Una segunda opción para tratar con las dimensiones extras es el escenario del mundo de las branas. En este enfoque las 4-dimensiones de nuestra experiencia habitual se identifican con un defecto embebido en un espacio-tiempo de dimensión alta. Este defecto es tipicamente una colección de branas insidentes o intersectantes el hecho básico que hace este enfoque es la observación de que los campos calibri de Yang-Mills, como aquellos del modelo estandar, estan asociados con los modos cero de cuerdas abiertas y por lo tanto ellos coenciden en el volumén del mundo de las D-branas. Si cualquiera de las 5 teorías de supercuerdas 10-dimensional se compactifica a 4-dimensiones sobre un 6-toro entonces la teoría resultante esta muy lejos de ser fenomenologicamente aceptable porque la supersimetría no es quebrada. Esto significa que existe $N = 4$ ó $N = 8$ supersimetría en 4-dimensiones, dependiendo de que la teoría 10-dimensional se compactifica , una posibilidad fenomenologicamente muy atractiva es utilizar orbifolios, variedades de Calabi-Yau y variedades de holonomía excepcional.

La compactificación sobre estos espacios conduce a vacios con menos supersimetría con 4-dimensiones. Con el fin de hacer contacto con la fenomenologia de partículas, existe varias propiedades de la teoría $D = 4$ que serían adecuadas:

• El grupo calibre de Yang-Mills SU(3)×SU(2)×U(1), que también es el grupo calibre del modelo estandar.

• Una clase interesante de extensiones supersimetrica $D = 4$ del modelo estandar tiene supersimetría $N = 1$ a energía alta, esta supersimetría ddebe ser quebrada a alguna escala, que podría

ser tan baja como TeV (telavoliano) para hacer contacto con la física observada a energías bajas. La supersimetría $N = 1$ impone restricciones sobtre la teoría que facilitan los calculos. Mas aun estas restricciones no son tan fuertes como para que la teoría resulte no realista como ocurre en modelos con supersimetría $N \geq 2$.

A energía suficientemente alta, la supersimetría de dimensión 10 ó 11 debe ser manifiesta. El objetivo es haber si a energías que son bajas comparados con la escala de compactificación donde existe una teoría 4-dimensional efectiva debe ser con supersimetría $N = 1$. Una pequeña porción de evidencia para esto es que la supersimetría asegura que los 3 acoplamientos de calibre del modelo estandar quedan unificados en aproximadamente 10^{16} GeV lo cual sugiere la gran unificación supersimetrica a este nivel de energía.

Las teorías supersimetricas son mas faciles de resolver que sus contrapartes no supersimetricas. Las restricciones impuestos por la supersimetría conduce a ecuaciones de primer orden que son más faciles de resolver que las ecuaciones del movimiento de segundo orden.

Si la cuerda heterótica 10-dimensional que compactifica sobre una variedad interna M, sería deseable saber cuando esto da supersimetría $N = 1$ en 4-dimensiones. Dado un cierto conjunto de suposiciones se puede probar que la variedad interna debe ser la variedad de Calabi-Yau de dimensión 3 compleja.

La compactificación sobre un 3-folio de Calabi-Yau quiebra 3/4 de la supersimetría original por consiguiente la compactificación de Calabi-Yau de la cuerda heterótica resulta con supersimetría $N = 1$ en 4-dimensiones, mientras que para supercuerdas de tipo II resulta $N = 2$.

Simetría de Espejo: Las compactificaciones sobre variedades de Calabi-Yau tiene una propiedad interesante que esta relacionada a la T-dualidad, que es una característica de las compactificaciones toroidales. Ciertas compactificaciones toroidales tienen también otra propiedad remarcable: La invariancia bajo hipercambio de forma y tamaño del toro. Este es el ejemplo más simple de simetría conocida como simetría de espejo, que es una propiedad de la variedad de Calabi-Yau mas general. Esta propiedad implica que 2-variedades de Calabi-Yau y distintas, que tipicamente tiene topología diferente puede ser fisicamente equivalentes. Mas precisamente, la teoría de supercuerdas de tipo II-A compactificada sobre una variedad de Calabi-Yau M es equivalente a la teoría de supercuerdas de tipo II-B compactificada sobre la variedad de Calabi-

Yau espejo W.

Variedades de holonomia Excepcionales: Los ejemplos más importantes son las variedades de holonomia G_2 y Spin(7). Las variedades G_2 son 7-dimensionales y quiebran 7/8 de supersimetría, mientras las variedades Spin(7) son 8-dimensionales y quiebran 15/16 de la supersimetría. Los 4-folios de Calabi-Yau que son también 8-dimensionales, y quiebran 7/8 de supersimetría.

Orbifolios: Son espacios de compactificación matematicamente simples, algunas veces es conveniente conocer de forma explicita la métrica del espacio interno, la cual no es conocida para casi todas las variedades de Calabi-Yau incluidas las variedades 4-dimensionales K3. Los orbifolios incluyen ciertos limites singulares de variedad de Calabi-Yau para los cuales la métrica se conocen explicitamente. Supongamos que X es una variedad suave con un grupo de isometría G. Podemos considerar el espacio cociente X/G. Un punto en este espacio cociente corresponde a una orbita de puntos en X formada por un punto y todos sus imagenes baja la acción del grupo de isometrías. Si los elementos de los grupos matriciales dejan invariantes a puntos de X, entonces el espacio cociente tiene singularidades. En los puntos no singulares , el orbifolio X/G es localmente indistinguible de la variedad original X. Por lo tanto es natural inducir estructuras locales tales con la métrica, a regiones no similares del orbifolio . Se asume que la acción del grupo sobre el orbifolio actua solamente sobre dimensiones espaciales. Si se tiene en cuenta la dimensión temporal puede resultar nuevos fenomenos tales como curvas cerradas temporales.

Teoría M sobre 4-folios de Calabi-Yau: Esto corresponde al caso $n = 4$, esta variedad estan caracterizadas en términos de 3 números de Hodge independientes $h^{1,1}, h^{1,3}, h^{1,2}$. El diamante de Hodge toma la siguiente forma

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
0 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 0 \\
1 & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{3,1} & 1 \\
0 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 0 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

Además se tiene la siguiente relación entre los números de Hodge

$$h^{2,2} = 2\left(22 + 2h^{1,1} + 2h^{1,3} - h^{1,2}\right)$$

por lo tanto solamente 3 de los números de Hodge pueden variar independientemente.
El número de Euler resulta ser

$$\chi = \sum_{p=0}^{8}(-1)^p b_p = 6\left(8 + h^{1,1} + h^{3,1} - h^{2,1}\right)$$

Número de Hodge de un n-folio de Clabi-Yau: Los números de Betti son números topológicos fundamentales asociados a una variedad. El número de Betti b_p es la dimensión del p-ésimo del grupo de cohomología de Rham de la variedad M, es decir, la dimensión de $H^p(M)$. Cuando la variedad tiene una métrica, los números de Betti cuentan el número de p-formas armónicas linealmente independientes sobre la variedad. Para variedades de K*ä*hler los números de Betti se pueden descomponer en términos de los números de Hodge $h^{p,q}$

$$b_k = \sum_{p=0}^{k} h^{p,k-p}$$

El diamante de Hodge: Un n-folio de Calabi-Yau se caracteriza por los valores de los números de Hodge. Para esta caracterización no es completa porque en algunos casos variedades de Calabi-Yau que no son equivalentes tienen los mismos números de Hodge. Existen simetría y dualidades que relacionan diferentes números de Hodge de tal manera que solo subconjuntos

pequeños de estos números es independiente. Los números de Hodge de un n-folio de Calabi-Yau satisface la siguiente relación

$$h^{p,0} = h^{n-p,0}$$

esto resulta del hecho de los espacios $H^p(M)$ y $H^{n-p}(M)$ son isomorfos. Además la conjugación completa da la siguiente relación

$$h^{p,q} = h^{q,p}$$

y la dualidad de Poincare da la siguiente relación

$$h^{p,q} = h^{n-q,n-p}$$

cualquier variedad compleja conexa de K*ä*hler tienen $h^{0,0} = 1$ que corresponde a las funciones constantes. Una variedad simplemente conexa tiene grupo fundamental trivial y por lo tanto su primer grupo de homología es trivial dando como resultado las siguientes igualdades.

$$h^{1,0} = h^{0,1} = 0$$

En el caso importante $n = 3$, la descripción cohomológica completa de variedades de Calabi-Yau solo requiere especificar $h^{1,1}$ y $h^{2,1}$. El conjunto completo del número de Hodge se puede mostrar en diamantes de Hodge como se muestra enseguida

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & h^{3,3} & & & & \\
 & h^{3,2} & & h^{2,3} & & & \\
h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & & \\
 & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} & \\
h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & & \\
 & h^{1,0} & & h^{0,1} & & & \\
 & & h^{0,0} & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 0 & & 0 & & & \\
0 & & h^{1,1} & & 0 & & \\
 & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 & \\
0 & & h^{1,1} & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & & \\
 & & 1 & & & &
\end{array}$$

Usando las relaciones anteriores se tiene la siguiente ecuación caracteristica para 3-folios de Calabi-Yau

$$\chi = \sum_{p=0}^{6} (-1)^p b_p = 2\left(h^{1,1} - h^{2,1}\right)$$

Como modificación biparamétrica de la Geometría Clásica, puede considerarse que la Teoría-M controla tanto la suma a través de topologías de superficie de Riemann como la generalización de puntos a bucles. La teoría de fibrados vectoriales, la teoría K y la geometría no conmutativa deben tenerse en cuenta en la formulación matemática final de la teoría M.

La matemática de la teoría M podria ser, hasta ahora la más compleja y profunda en la física, pues pretende unificar 3 grandes ramas de la física teórica:

(1). Relatividad General: la gravedad es una característica geométrica del espacio-tiempo pseudo-riemanniano.

(2). La Teoría de Calibración: Utiliza la teoría K y los teoremas de índice para describir cómo interactúan las partículas elementales a través de conexiones en fibrados vectoriales.

(3). La Teoría de Cuerdas: Abarca el examen de los objetos extendidos como generalizaciones orgánicas de partículas puntuales. Matemáticamente es el estudio de los espacios de lazos.

La mecánica cuántica y la supersimetría, dos componentes adicionales pero esenciales, son los que están permitiendo esta unificación porcentual. La comprensión de la teoría de cuerdas se ha basado en gran medida en la mecánica cuántica, que expresa la realidad física en términos de álgebras de operadores que actúan sobre espacios de Hilbert. Los complejos de Rham y la topología algebraica están estrechamente relacionados con la supersimetría, que unifica la materia y las interacciones. De alguna manera, la Supersimetría ha sido lo único que ha hecho concebibles muchos de los fascinantes enlaces de la teoría de cuerdas. Los matemáticos no deberían sorprenderse de que haya una serie de índices entre estables "topológicosçon respecto a las perturbaciones que, dentro de unos límites razonables, puedan calcularse de forma fiable desde un punto de vista físico. La supersimetría es posiblemente la predicción más fiable de la teoría de cuerdas.

Estas diferentes teorías de supercuerdas parecían tener más en común de lo que se preveía inicialmente debido a las dualidades. El revolucionario concepto de Edward Witten a mediados de los años 90 sacudió a la comunidad de físicos teóricos. La revolucionaria propuesta de **teoría M** de Witten revolucionó el campo de la física teórica. Como segunda revolución de la teoría de cuerdas, se suele hacer referencia a ella y a las que la precedieron como la segunda revolución de la física teórica. Witten propuso que las cinco teorías que ya existían eran en realidad una porción de una sola teoría, a la que denominó teoría-M. Su formulación requeriría una di-

mensión adicional a las teorías anteriores. Por lo tanto, sugerimos la teoría M como la mamá de todas ellas. La figura 4.9 ilustra cómo todas las teorías de supercuerdas estarían conectadas entre sí y conformarían la teoría M, una teoría superior. figurativamente, como una entidad de la que somos conscientes de seis puntos, de ahí la analogía con el cuento de los seis ciegos que intentaron describir un elefante tocándolo con las manos. Intenten describir un elefante; la descripción variará en función de la parte que estén describiendo. Uno de ellos lo identificará por sus orejas, otro por su trompa y el tercero por sus colmillos. Cada uno de ellos acabará llegando a la conclusión de que están hablando de algo distinto mientras que, en realidad, han visto algo diferente: porciones específicas de un elefante. Sacamos la conclusión de que el espacio-tiempo de la teoría M debe tener un tamaño de once dimensiones basándonos en el comportamiento de la teoría de supercuerdas a nivel de acoplamiento fuerte, pero la formulación precisa de esta teoría sigue siendo una cuestión activa y sin resolver en física.

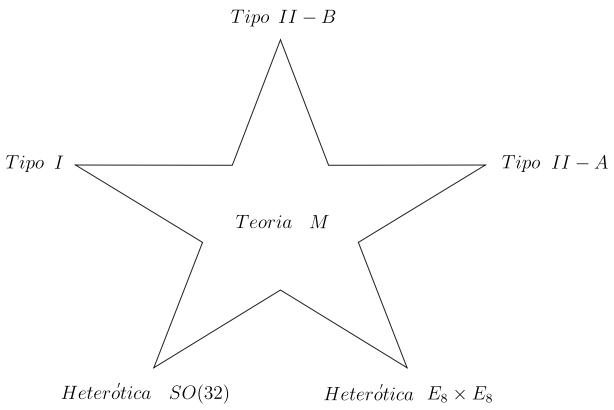


Figura 3.9: El diagrama demuestra cómo todas las teorías de cuerdas fermiónicas estarían conectadas entre sí y conformarían la teoría M, una teoría superior.

Conclusiones

• Las álgebras de división normadas $\mathbb{A}$ y el producto vectorial cruz (PVC) conducirá a la unificación para describir estructuras geométricas lo cual mejorará nuestra comprensión de cada geometría individual y permitirá descubrir enlaces ocultos entre diferentes geometrías y diferentes teorías físicas en las cuales se aplican, comprobando que la noción de variedad Riemanniana proporciona un marco adecuado para el estudio de estructuras geométricas.

• Los posibles grupos de holonomía se pueden describir en términos de álgebras de división normadas $\mathbb{A} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$.

• El estudio de estructuras geométricas sobre variedades Riemannianas a través de un enfoque unificado, encontramos nuevos resultados y nuevas relaciones entre las siguientes geometrías: las geometrías de Kahler, la geometría de Calabi-Yau, la geometría hiperkahler, la geometría cuaterniónico-Kahler, la geometría spin(7) y la geometría-G2.

• Las variedades de Calabi-Yau de dimensión real 6 surge en la teoría de supercuerdas como espacios internos, es decir, escribiendo espacio-tiempo de 10 dimensiones como productos de variedades de Calabi-Yau con $\mathbb{R}^{3,1}$ $\left(\mathbb{R}^{9,1} = \mathbb{R}^{3,1} \times X^6\right)$.

• Las variedades Riemannianas de dimensión 7 con holonomía G_2 surge en la teoría M.

• Las supercuerdas son en la actualidad la mejor propuesta teórica para unificar las teorías cuánticas de campo (QFT) con la relatividad general (GR).

Referencias Bibliográficas

[1] Naichung Conan Leung (2011). *Geometric Structures on Riemannian Manifolds*.

[2] Naichung Conan Leung (2002). *Riemannian Geometry over Different Normed Division Algebras*.

[3] Dennis (2008). *Calabi Yau manifolds for dummies*.

[4] Gonzalo Alonso Álvarez. *De los grupos de Lie a los instantones gravitacionales*.

[5] Joseph C. Varilly (2011). *Los grupos clasicos y su clasificación*. Escuela de Matematica, Universidad de Costa Rica.

[6] Jae-Hyouk Lee and Naichung Conan Leung (2008). *Instantons and Branes in Manifolds with Vector Cross Products*.

[7] John M. Lee (1997). *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. First edition. New York. Springer.

[8] R.B. Brow and A. Gray (1967). *Vector Cross Products*.

[9] R. Bryant (1982). *Submanifolds and special structures on the octonians*.

[10] A. Gray (1969). *Vector Cross Products on Manifolds*.

[11] R. Harvey and B. Lawson (1982). *Calibrated geometries*.

[12] N. Hitchin (1992). *Hyper-Kähler manifolds*. Seminaire Bourbaki.

[13] J.H. Lee and N.C Leung (2009). *Geometric Structures on G_2 and Spin (7)-manifolds*.

[14] Johann Jeiver Suarez Motato (2011). *El Teorema de Holonomía de Berger*. Universidad del Valle, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Maestría en Ciencias-Matemáticas. Santiago de Cali.

[15] Dominic Joyce(2000). *Compact Riemannian Manifolds with Exceptional Holonomy*.

[16] S. Salomon (2011). *Riemannian geometry and holonomy groups*. Pitman Research Notes in Math. Longman.

[17] Javier Seoane Bascoy (2011). *Espinores de Killing y Operador de Dirac en Variedades de Riemann: la Variedad de Berger* B^7. Universidade de Santiago de Compostela.

[18] Jean Pierre Veiro Granados (2005). *Las Álgebras de División Normadas en las Teorias Supersimetricas*. Universidad Simón Bolívar, Decanato de Estudios de Posgrado, Maestría en Matemáticas.

[19] Katrin Becker, Melanie Becker and John H. Schwarz (2007). *String Theory and M-Theory*. Cambridge University Press. New York.

[20] Herbert Morales. *La teoría de supercuerdas*. Escuela de Física Universidad de Costa Rica San José, Costa Rica.

[21] Nelson Hernández. *Introducción a la Teoría de Cuerdas Bosonicas* . Universidad de la Laguna.