Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Teoría de pseudo-operadores lineales y sus resultados principales

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Javier Edgar ROMERO PACHECO

ASESOR

Dr. Alex Armando CRUZ HUALLPARA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Romero, J. (2024). *Teoría de pseudo-operadores lineales y sus resultados principales*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Javier Edgar Romero Pacheco
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	47663822
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0004-1080-2397
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alex Armando Cruz Huallpara
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40949706
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-5453-6885
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Víctor Hilario Tarazona Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09264893
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis funcional

Grupo de investigación	Matemática Aplicada - Métodos Numéricos (METNUM)
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:00 horas del sábado 28 de septiembre del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024): Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda (PRESIDENTE), Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (MIEMBRO) y el Dr. Alex Armando Cruz Huallpara (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**TEORÍA DE PSEUDO-OPERADORES LINEALES Y SUS RESULTADOS PRINCIPALES**", presentado por el señor **Bachiller JAVIER EDGAR ROMERO PACHECO**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación de bueno, con un calificativo promedio de dieciséis (16).

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller JAVIER EDGAR ROMERO PACHECO**, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 11:40 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda
PRESIDENTE

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
MIEMBRO

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Alex Armando Cruz Huallpara en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001327-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"TEORÍA DE PSEUDO-OPERADORES LINEALES Y SUS RESULTADOS PRINCIPALES",** presentado por el bachiller **Javier Edgar Romero Pacheco**, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 8% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuarcon los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor

DNI:40949706

Agradecimiento

Al finalizar este importante capítulo de mi vida, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han sido fundamentales en la realización de esta tesis.

En primer lugar, a mi familia, por ser mi pilar y mi fuente constante de apoyo y motivación. Su amor incondicional y su confianza en mis capacidades han sido esenciales para alcanzar este logro. A mis padres, por enseñarme la importancia de la perseverancia y el esfuerzo, y a mis hermanos, por estar siempre ahí para alentarme en los momentos de dificultad.

A mis profesores, quienes con su dedicación y pasión por la enseñanza me han guiado y proporcionado las herramientas necesarias para llegar hasta aquí. En especial, quiero agradecer a mi asesor de tesis, cuyo conocimiento y orientación han sido invaluables durante este proceso.

A mis amigos y colegas, quienes han sido una fuente inagotable de ánimo y camaradería. Sus palabras de aliento y su apoyo constante han hecho que los desafíos fueran más llevaderos y que los éxitos fueran aún más significativos.

A todos ustedes, mi gratitud eterna por haberme acompañado en este viaje académico. Sin su apoyo, este logro no habría sido posible.

Índice general

Introducción III

I Preliminares 1
- 1.1 Algunas nociones . . . 1
- 1.2 Pseudo-Operaciones . . . 3
- 1.3 Espacio pseudo-lineal . . . 10

II Estructura Métrica 12
- 2.1 Espacios métricos generalizados . . . 12
- 2.2 Espacios normales generalizados . . . 17
- 2.3 Espacios de Banach y Hilbert generalizados . . . 18

III Resultados Principales 20
- 3.1 Espacios L^p generalizados . . . 20
- 3.2 Operadores pseudo-lineales . . . 25
  - 3.2.1 Teorema de Representación de Riesz . . . 27
  - 3.2.2 El Lema de Lax-Milgram . . . 29

IV Conclusiones 33

Bibliografía 34

Resumen

La presente tesis explora la teoría de pseudo-operadores lineales y sus aplicaciones en el contexto de espacios pseudo-lineales con métricas generalizadas. Se dota de una estructura algebraica a los intervalos mediante pseudo-operaciones $\oplus$ y $\otimes$, lo cual permite la extensión de conceptos clásicos a marcos no lineales.

Se estudian los espacios métricos generalizados, donde la desigualdad triangular ahora está dada por $d_g(x,y) \leq_g d_g(x,z) \oplus d_g(z,y)$. Se exploran los espacios de Banach y Hilbert generalizados. Resultados como la desigualdad de Minkowski y Hölder son establecidas a nivel de las pseudo-operaciones.

Un foco central del trabajo es la generalización dos grandes teoremas. del Teorema de Lax-Milgram, que se demuestra en el contexto de espacios pseudo-lineales, proporcionando una base para resolver ecuaciones integrales y diferenciales no lineales. Se presentan aplicaciones a sistemas difusos y modelos basados en el conocimiento, explorando cómo las pseudo-operaciones pueden mejorar la modelación y resolución de problemas complejos.

El Teorema de Representación de Riesz también se extiende a estos nuevos marcos, demostrando que cualquier funcional pseudo-lineal continuo puede representarse mediante un producto interno generalizado. La tesis concluye que las estructuras pseudo-lineales y las métricas generalizadas no solo amplían la teoría matemática existente, sino que también ofrecen herramientas poderosas para futuras investigaciones en análisis funcional y aplicaciones prácticas.

Este trabajo proporciona una revisión exhaustiva de la literatura existente, el desarrollo de nuevas definiciones y propiedades, y la demostración de varios teoremas fundamentales, concluyendo con posibles direcciones para futuras investigaciones.

Palabras Clave: Pseudo-operadores, Espacios pseudo-lineales, Métricas generalizadas, Teorema de Lax-Milgram, Análisis funcional, Ecuaciones diferenciales no lineales, Sistemas difusos, Teorema de Representación de Riesz, Álgebra pseudo-lineal, Operadores de agregación, Integrales difusas, Ultradiscretización, Modelos basados en el conocimiento, Sistemas matemáticos generalizados, Espacios de Banach generalizados, Espacios de Hilbert generalizad

Introducción

Los números reales $\mathbb{R}$ han sido ampliamente estudiados y presentan dos propiedades esenciales. Primero, admiten una estructura de anillo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, más aún, constituye un cuerpo. En segundo lugar, $\mathbb{R}$ posee una topología natural, generada por la métrica inducida por el valor absoluto.

Sin embargo, al considerar un intervalo cualquiera (a, b), se conserva solo una de estas características: la topológica, mediante la topología inducida. No ocurre lo mismo con la estructura algebraica.

Podemos destacar que al alejarnos de las operaciones clásicas de suma y producto usual de $\mathbb{R}$, entonces es posible dotar a un intervalo $I := (a, b)$ de una estructura de anillo, A decir, $(I, \oplus, \otimes)$ es un anillo. Esto lo podemos ver en el trabajo de Mesiar y Rybárik [11] sobre pseudo-operaciones aritméticas.

Sea una aplicación biyectiva y continua $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, y definamos las operaciones $x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y))$ y $x \otimes y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$. En este contexto, tanto los aspectos algebraicos como topológicos son preservados. A estas operaciones las denominaremos pseudo-operaciones.

A la línea de estudio que surge por este cambio de perspectiva es llamada análisis real generalizado o el cálculo g, como podemos ver en los recientes trabajos [13–15].

En álgebra lineal, se estudian los espacios vectoriales de dimensión finita y las transformaciones lineales entre ellos. La noción de espacio vectorial constituye un pilar fundamental en la estructura de las matemáticas. Marková, en dos de sus trabajos [9, 10], examina una teoría análoga desde la perspectiva de las pseudo-operaciones.

La teoría de las pseudo-operaciones tiene aplicaciones en Sistemas Basados en el Conocimiento y Sistemas Difusos [18], [6], y además desempeña un papel relevante en el estudio de las integrales difusas [1], [7], [12]. Además hay un interés creciente en el área de la ultradiscretización [17],[8],[5]

Una extensión natural al álgebra lineal es el estudio de los espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita y operadores lineales entre estos, esta área es conocida

como análisis funcional. La comunidad matemática muestra un considerable interés por los espacios de Hilbert, Banach y Fréchet. Entre ellos, los espacios de Hilbert guardan una notable similitud con los espacios vectoriales de dimensión finita $\mathbb{R}^n$, en particular por la estructura asociada a la norma euclidiana. Vale la pena señalar que la mecánica cuántica, una teoría física, sus bases matemáticas son en el lenguaje de los espacios de Hilbert.

Una clase relevante de espacios de Banach, son lo bien conocidos espacios $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. En particular para $p = 2$ es un espacio de Hilbert. Esta clase de espacios contiene subespacios que son soluciones de algunas ecuaciones en derivadas parciales. Además tiene fuertes resultados como por ejemplo los teoremas de interpolación de operadores limitados.

Recientemente se obtuvieron principios de superposición pseudo-lineales para varias ecuaciones importantes, como la ecuación de Burger. Claramente esto tiene posibles aplicaciones a ecuaciones diferenciales parciales no lineales [4, 16].

En este trabajo se analizarán los resultados de Barnabás Bede y Donal O'Regan [3]. Para entrar en detalle, se introducen los espacios métricos generalizados, destacando los espacios de Hilbert y Banach generalizados, los cuales encuentran su motivación en los resultados de Marková.

Nos enfocamos en los espacios $L_g^p(\Omega)$, es decir, en los espacios L^p generalizados. Comenzaremos abordando las versiones generalizadas de las desigualdades de Minkowski y Hölder asociadas a $L_g^p(\Omega)$. Posteriormente, demostraremos que estos espacios son de Banach generalizados. Asimismo, como ocurre en el caso clásico cuando $p = 2$, el espacio $L_g^2(\Omega)$ resulta ser un espacio de Hilbert generalizado. Además, destacaremos la ley del paralelogramo en su forma generalizada.

Partiendo de las generalizaciones de ciertos espacios, es natural extender este enfoque a los operadores. Así, introducimos la noción de operadores pseudo-lineales, con particular interés en los operadores limitados (continuos). En este contexto, se extienden dos resultados clave. El primero es el Teorema de Representación de Riesz, que proporciona una caracterización de los funcionales continuos sobre espacios de Hilbert. El segundo es el lema de Lax-Milgram, el cual describe aplicaciones bilineales continuas y coercitivas también sobre espacios de Hilbert.

Capítulo I

Preliminares

En este capítulo, indicaremos algunos nociones conocidas del calculo. Introducimos y abordamos con mas profundidad las *pseudo-operaciones*, las cuales permiten establecer la noción de espacio pseudo-lineal.

Es importante destacar que nuestro contexto es real; esto significa que las pseudo-operaciones que definiremos están asociadas a mapas continuos biyectivos de varible real.

1.1. Algunas nociones

Definición 1.1. *Una función $f : A \to B$ es continua en un punto $c \in A$ si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$f(c)$ está definida,*
2. *$\lim_{x \to c} f(x)$ existe, y*
3. *$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.*

Observación 1.2. *La continuidad de una función, tal como se ha definido aquí, corresponde al caso de los números reales. Para casos más generales, como un espacio métrico o un espacio topológico, recomendamos al lector consultar algún libro de topología de su preferencia para obtener más detalles.*

Definición 1.3. *Una función $f : A \to B$ es biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva. Esto significa que:*

1. *f es inyectiva si para todos $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2)$ entonces $a_1 = a_2$.*
2. *f es sobreyectiva si para cada $b \in B$, existe al menos un $a \in A$ tal que $f(a) = b$.*

Recordemos algunas definiciones de estructuras algebraicas a tener en cuenta en este trabajo.

Definición 1.4. *Un conjunto F con dos operaciones, suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$, se llama un **campo** si cumple las siguientes propiedades:*

1. ***Cerradura**: Para todo $a, b \in F$, $a + b \in F$.*
2. ***Asociatividad**: Para todo $a, b, c \in F$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.*
3. ***Elemento Neutro Aditivo**: Existe un elemento $0 \in F$ tal que para todo $a \in F$, $a + 0 = a$.*
4. ***Elemento Inverso Aditivo**: Para todo $a \in F$, existe un elemento $-a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$.*
5. ***Conmutatividad**: Para todo $a, b \in F$, $a + b = b + a$.*
6. ***Cerradura**: Para todo $a, b \in F$, $a \cdot b \in F$.*
7. ***Asociatividad**: Para todo $a, b, c \in F$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*
8. ***Elemento Neutro Multiplicativo**: Existe un elemento $1 \in F$ tal que para todo $a \in F$, $a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$.*
9. ***Elemento Inverso Multiplicativo**: Para todo $a \in F$, $a \neq 0$, existe un elemento $a^{-1} \in F$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.*
10. ***Conmutatividad**: Para todo $a, b \in F$, $a \cdot b = b \cdot a$.*
11. ***Distributividad**: Para todo $a, b, c \in F$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.*

1.2. Pseudo-Operaciones

Para tener una notación clara, $[a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ representa un intervalo dentro de la recta real extendida, el cual puede ser acotado o no acotado, es decir $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

En esta sección abordamos dos tipos de mapas continuos biyectivos como es mostrado en el siguiente cuadro.

Caso	**Forma de g**
Caso 1	$g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ g continua y biyectiva
Caso 2	$g : [a,b] \to [0,\infty]$ g continua y biyectiva

Para ambos casos, podemos asociar las siguientes operaciones, es decir, para x, y en $[a,b]$:

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)) \tag{1.1}$$

$$x \otimes y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)) \tag{1.2}$$

donde $+$ y $\cdot$ es la suma y producto usual en el conjunto de los números reales.

Observación 2.5. *Podemos notar que $\oplus \equiv +$ y $\otimes \equiv \cdot$ si y solamente si g es el mapa identidad.*

Es importante notar que las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ están bien definidas siempre que g sea un mapa biyectivo. Además, si $x, y \in [a,b]$, entonces $x \oplus y$ y $x \otimes y$ pertenecen a $[a,b]$, lo que garantiza la cerradura bajo estas operaciones. Con esto en mente, es natural preguntarse si se conserva alguna propiedad algebraica para el caso 1.

Ejemplo 2.6. *Sea $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ un mapa continuo biyectivo con 1.1 y 1.2 asociados sobre (a,b). Para $x, y, z \in (a,b)$, entonces*

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= g^{-1}(g(x \oplus y) + g(z)) \\
&= g^{-1}(g(x) + g(y) + g(z)) \\
&= g^{-1}(g(x) + g(y \oplus z)) \\
&= x \oplus (y \oplus z)
\end{aligned}$$

El ejemplo anterior nos asegura la asociatividad de la operación $\oplus$. Otras propiedades pueden ser verificadas de forma similar. La prueba de la siguiente afirmación se consigue con cierta facilidad al observar que el elemento neutro para las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ es $\mathbf{0} = g^{-1}(0) \in (a,b)$ y $\mathbf{1} = g^{-1}(1) \in (a,b)$, respectivamente.

Proposición 2.7. *Para el Caso 1, la estructura $((a,b), \oplus, \otimes)$ es un campo isomorfo al campo de los números reales.*

Demostración. Aquí verificamos que $\oplus, \otimes$ conmutan y además $\otimes$ satisface la asociatividad.

$$\begin{array}{rcl} x \oplus y & = & g^{-1}(g(x)+g(y)) \\ & = & g^{-1}(g(y)+g(x)) \\ & = & y \oplus x \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{rcl} x \otimes y & = & g^{-1}(g(x)\cdot g(y)) \\ & = & g^{-1}(g(y)\cdot g(x)) \\ & = & y \otimes x \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{rcl} (x \otimes y) \otimes z & = & \\ g^{-1}((g(x)\cdot g(y))\cdot g(z)) & = & \\ g^{-1}(g(x)\cdot (g(y)\cdot g(z))) & = & \\ = x \otimes (y \otimes z) & & \end{array} \right.$$

Las otras propiedas se pueden verificar de forma similar. Para la noción de isomorfo recae en el hecho que g es biyectiva. □

Observación 2.8. *Decimos que g es generador de las pseudo-operaciones $\otimes$ y $\oplus$.*

Veamos algunos ejemplos de campos con estas pseudo-operaciones para el caso 1.

Ejemplo 2.9. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x|x|^{a-1}$, $a > 0$. Ciertamente, g es continua, biyectiva y puede ser re-escrita como:*

$$g(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^a.$$

Donde sgn *representa la bien conocida función signo. Aquí, $g(0) = 0$ y la función inversa de g está dada por $g^{-1}(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^{1/a}$. Ahora determinemos $x \otimes y$ e $x \oplus y$.*

Para $x = 0$ o $y = 0$ está claro. Consideremos x, y no nulos:

$$\begin{aligned} x \otimes y &= g^{-1}(g(x) \cdot g(y)) \\ &= g^{-1}(\operatorname{sgn}(x)|x|^a \cdot \operatorname{sgn}(y)|y|^a) \\ &= g^{-1}(\operatorname{sgn}(xy)|xy|^a) \\ &= \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(xy)|xy|^a)|\operatorname{sgn}(xy)|xy|^a|^{1/a} \\ &= \operatorname{sgn}(xy)|xy| \\ &= x \cdot y. \end{aligned}$$

Procedemos a determinar la forma explícita de $x \oplus y$ para x, y no nulos.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= g^{-1}(g(x) + g(y)) \\ &= g^{-1}(\operatorname{sgn}(x)|x|^a + \operatorname{sgn}(y)|y|^a) \end{aligned}$$

No es difícil verificar que $\operatorname{sgn}(x+y) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x)|x|^a + \operatorname{sgn}(y)|y|^a)$. *Así, tenemos:*

$$x \oplus y = \operatorname{sgn}(x+y)\,|\operatorname{sgn}(x)|x|^a + \operatorname{sgn}(y)|y|^a|^{1/a}$$

Ejemplo 2.10. *En la teoría de conjuntos difusos, tenemos el ejemplo típico de uninorma y una norma absorbente. Es decir, sea $g : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por*

$$g(x) = \ln \frac{x^\alpha}{1 - x^\alpha}, \quad \alpha > 0,\ x \in (0,1), \quad y \quad g(0) = -\infty \quad , \quad g(1) = \infty.$$

Ciertamente, nuestra función g así definida es continua, biyectiva La función inversa de g está dada por:

$$g^{-1}(y) = \left(\frac{e^y}{1 + e^y}\right)^{1/\alpha}$$

para cada $y \in \mathbb{R}$. A seguir, $x \oplus y$ e $x \otimes y$.

Lo siguiente es abordar la pseudo-operación $\oplus$, en ese sentido consideremos x, y números reales y determinemos $g(x) + g(y)$ tal como sigue a continuación

$$\begin{aligned} g(x)+g(y) &= \ln\left(\frac{x^\alpha}{1-x^\alpha}\right)+\ln\left(\frac{y^\alpha}{1-y^\alpha}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x^\alpha}{1-x^\alpha}\cdot\frac{y^\alpha}{1-y^\alpha}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x^\alpha y^\alpha}{(1-x^\alpha)(1-y^\alpha)}\right) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} x\oplus y &= g^{-1}\left(\ln\left(\frac{x^\alpha y^\alpha}{(1-x^\alpha)(1-y^\alpha)}\right)\right) \\ &= \left(\frac{e^{\ln\left(\frac{x^\alpha y^\alpha}{(1-x^\alpha)(1-y^\alpha)}\right)}}{1+e^{\ln\left(\frac{x^\alpha y^\alpha}{(1-x^\alpha)(1-y^\alpha)}\right)}}\right)^{1/\alpha} \\ &= \left(\frac{\frac{x^\alpha y^\alpha}{(1-x^\alpha)(1-y^\alpha)}}{1+\frac{x^\alpha y^\alpha}{(1-x^\alpha)(1-y^\alpha)}}\right)^{1/\alpha} \\ &= \left(\frac{x^\alpha y^\alpha}{(1-x^\alpha)(1-y^\alpha)+x^\alpha y^\alpha}\right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

De forma similar abordamos la otra pseudo-operación,

$$g(x)\cdot g(y)=\ln\left(\frac{x^\alpha}{1-x^\alpha}\right)\cdot\ln\left(\frac{y^\alpha}{1-y^\alpha}\right)$$

con lo cual se obtiene que

$$x\otimes y=g^{-1}\left(\ln\left(\frac{x^\alpha}{1-x^\alpha}\right)\cdot\ln\left(\frac{y^\alpha}{1-y^\alpha}\right)\right)$$

En el ejemplo anterior, para la pseudo-operación $\otimes$, lo dejamos expresado mediante la función inversa de g, pues es muy amplia su expresión.

Ejemplo 2.11. *Sea $\alpha\neq 0$ y consider la función continua $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\sinh\alpha x$.*

Recordemos que $\sinh(y)=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$, donde $\sinh^{-1}(y)=\log(y+\sqrt{y^2+1})$ corres-

ponde con su función inversa. Entonces las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ están dadas por:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= g^{-1}(g(x) + g(y)) \\ &= g^{-1}(\sinh(\alpha x) + \sinh(\alpha y)) \end{aligned}$$

Para deteminar $x \otimes y$,

$$\begin{aligned} x \otimes y &= g^{-1}(g(x) \cdot g(y)) \\ &= g^{-1}(\sinh(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha y)) \end{aligned}$$

Proposición 2.12. *Para el caso 2 con $g : (a, b) \to (0, \infty)$, la estructura $((a, b), \otimes)$ forma un grupo conmutativo.*

Demostración. Ciertamente el conjunto (a, b) cerrado bajo la operación $\otimes$. Cabe señar que para cada elemento en $x \in (a, b)$ tenemos que,

$$x \otimes \mathbf{1} = g^{-1}(g(x) \cdot g(\mathbf{1})) = g^{-1}(g(x)) = x.$$

De la misma forma se verifica que $x^{-1} = g^{-1}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$, es decir,

$$\begin{aligned} x \otimes x^{-1} &= g^{-1}(g(x) \cdot g(x^{-1})) \\ &= g^{-1}(g(x) \cdot \frac{1}{g(x)}) \\ &= g^{-1}(1) \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

La conmutatividad es heredada de la conmutatividad del producto usual sobre $(0, \infty)$.

□

Observación 2.13. *Para el caso 2, la estructura $([a, b], \oplus)$ es un monoide conmutativo, ademas ningun elemento tiene un opuesto speudo-aditivo. Además, la estructura $([a, b], \oplus, \otimes)$ es un semianillo conmutativo.*

Observación 2.14. *Recordemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado, y ese orden induce un orden sobre cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$. En el caso donde g es creciente, implica que g conserva el orden. Caso contrario, es decir, cuando g es no creciente, el orden se invierte. En otras palabras, si g es no decreciente entonces $\mathbf{0} = a$, si g es no creciente entonces $\mathbf{0} = b$.*

Anteriormente abordamos algunos ejemplos correspondientes al caso 1. A seguir, varios ejemplos del caso 2.

Ejemplo 2.15. *Sea $g : \overline{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ definida por*

$$g(x) = e^{\alpha x}, \quad \alpha \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \quad \text{si } \alpha > 0 \text{ definimos} \quad g(-\infty) = 0 \text{ e } g(\infty) = \infty,$$

mientras que si $\alpha < 0$, entonces $g(\infty) = 0$ y $g(-\infty) = \infty$. Así, sin mucha dificultad se puede deducir la forma explícita de $\oplus$ y $\otimes$. Para $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \frac{1}{\alpha} \ln(e^{\alpha x} + e^{\alpha y}) \\ x \otimes y &= x + y. \end{aligned}$$

Observación 2.16. *La complejidad de la expresión de las pseudo-operaciones depende claramente de la forma de la función elegida, g. En algunos casos, como los que se han considerado, es posible obtener una forma explícita debido a que se conoce la función inversa de g. Sin embargo, en otros casos, como el ejemplo 6.12, las expresiones de las pseudo-operaciones se deben expresar en términos de g^{-1} sin poder simplificarlas más allá de eso.*

Muchas funciones continuas biyectivas relevantes no admiten una función inversa conocida y, además, bajo dichas funciones, las pseudo-operaciones se reducen a ser expresadas únicamente como composiciones de ciertas funciones. Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 2.17. *Sea $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función continua y biyectiva dada por:*

$$g(x) := \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

Podemos destacar que g es estrictamente creciente pues $g'(x) = e^{x^2} > 0$ *para cada* $x > 0$. *Para determinar las respectivas pseudo-operaciones, por ejemplo,* $x \otimes y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$. *Claramente no es posible determinar de forma explícita. Esto también ocurre para la otra pseudo-operación.*

Ejemplo 2.18. *Otro ejemplo típico es una* t*-norma Arquimediana o* t*-conorma, que tiene un generador. Por ejemplo, consideramos* $g : [0,1] \to [0,\infty]$ *definida por*

$$g(x) = \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda^x - 1} \quad si\ \lambda > 0,\ \lambda \neq 1 \quad y \quad g(x) = -\ln x\ si\ \lambda = 1.$$

Se sabe (ver [5]) que g es un generador aditivo de un elemento estricto de la familia de t*-normas de Frank. Entonces*

$$g^{-1}(x) = \frac{\ln(e^x + \lambda - 1) - x}{1\lambda} \quad si\ \lambda \neq 1 \quad y \quad g^{-1}(x) = e^{-x} \quad si\ \lambda = 1$$

y las pseudo-operaciones son

$$x \oplus y = \log_\lambda(1 + \frac{(\lambda^x - 1)(\lambda^y - 1)}{\lambda - 1}), \quad si\ \lambda \neq 1$$

$$x \oplus y = x \cdot y,$$

en otro caso,

$$x \otimes y = \log_\lambda(\lambda - 1 + e^{\ln_\lambda \frac{\lambda-1}{y-1} \ln_\lambda \frac{\lambda-1}{y-1}} - \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda^x - 1} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda^y - 1}) \quad si\ \lambda \neq 1$$

$$x \otimes y = x^{-1\mathrm{ny}}.$$

La expresión de la pseudo-multiplicación no muestra mucho pero la pseudo-suma es interesante, siendo un elemento estricto en la familia de normas triangulares de Frank.

En el resto del artículo consideraremos que $\otimes$ tiene una prioridad mayor que $\oplus$. Además, si se evita la confusión, la composición $g \circ f$ se denotará como gf. A lo largo del artículo se aplican las convenciones habituales relacionadas con las operaciones con $\pm\infty$, por

ejemplo, $0 \cdot \infty$ no está definido, etc.

1.3. Espacio pseudo-lineal

En esta sección definimos el concepto de espacio pseudo-lineal, basado en el modelo de una estructura lineal. Adoptamos una versión ligeramente más débil para un álgebra pseudo-lineal tal como se propuso inicialmente en [9].

Definición 3.19. *Sea V un conjunto y $\oplus$ una operación en V. Sea $([a,b],\oplus,\otimes)$ la estructura algebraica como en el caso 1 o caso 2. V es un espacio pseudo-lineal con respecto a la pseudo-operación externa $\otimes$ si:*

(i) es un espacio lineal en el sentido clásico sobre el campo $((a,b),\oplus,\otimes)$ o

(ii) $(V,\oplus)$ es un monoide conmutativo (semigrupo conmutativo unitario) tal que

(a) $(\alpha\oplus\beta)\otimes x = \alpha\otimes x\oplus\beta\otimes x$,

(b) $\alpha\otimes(x\oplus y) = \alpha\otimes x\oplus\alpha\otimes y$,

(c) $\alpha\otimes(\beta\otimes x) = (\alpha\otimes\beta)\otimes y$,

(d) $\mathbf{1}\otimes x = x$ para todo $\alpha,\beta\in[a,b]$, $x\in V$.

Observamos que el espacio pseudo-lineal definido en (ii) no es un módulo, es solo un semimódulo sobre el semianillo unitario $([a,b],\oplus,\otimes)$, ya que $(V,\oplus)$ no es necesariamente un grupo abeliano.
Ahora veamos algunos ejemplos de espacios pseudo-lineal.

Ejemplo 3.20. *Consideramos $g:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ como en el caso 1. El conjunto $[a,b]^n$ puede dotarse de la pseudo-suma*

$$x\oplus y = g^{-1}(g(x)+g(y)),$$

donde $g(x)$ se calcula por componentes. Definimos la operación externa $\otimes$ por componentes. Entonces $[a,b]^n$ es un espacio pseudo-lineal (es incluso un espacio lineal clásico).

Ejemplo 3.21. *Consideramos $g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ como en el Caso 1. El conjunto $[a,b]^X$ (siendo X un conjunto arbitrario) es un espacio pseudo-lineal. Definimos como de costumbre $(f_1 \oplus f_2)(x) = f_1(x) \oplus f_2(x)$ y la operación externa $(\alpha \otimes f_1)(x) = \alpha f_1(x)$, para cualquier $x \in X$. donde $f_1, f_2 \in [a,b]^X$ y $\alpha \in [a,b]$. Además, se puede considerar de manera similar $([a,b]^n)^\chi$ con operaciones definidas de la manera habitual.*

Ejemplo 3.22. *Consideramos $g : [a,b] \to [0,\infty]$ como en el Caso 2. El conjunto $[a,b]^n$ puede dotarse de la pseudo-suma*

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)),$$

donde $g(x)$ se calcula por componentes. Definimos la operación externa $\otimes$ por componentes. Entonces $[a,b]^n$ es un espacio pseudo-lineal según la definición (3.19), (ii).

Ejemplo 3.23. *Consideramos $g : [a,b] \to [0,\infty]$ y el conjunto $[a,b]^X$ (siendo X un conjunto arbitrario). Definimos como de costumbre $(f_1 \oplus f_2)(x) = f_1(x) \oplus f_2(x)$ y la operación externa $(\alpha \otimes f_1)(x) = \alpha \otimes f_1(x)$, para cualquier $x \in X$ donde $f_1, f_2 \in [a,b]^X$ y $\alpha \in [a,b]$. Entonces $[a,b]^X$ es un espacio pseudo-lineal según la definición (3.19), (ii). Además, se puede considerar de manera similar $([(a,b]^n)^\chi$ con operaciones definidas de la manera habitual.*

Ejemplo 3.24. *Un subconjunto $U \subseteq V$ se dice que es un subespacio si es cerrado con respecto a las operaciones internas y externas $\oplus$ y $\otimes$. Entonces observamos que U es un espacio pseudo-lineal por sí mismo.*

Observación 3.25. *Sea U un subespacio de un espacio pseudo-lineal como en uno de los ejemplos 3.20 o 3.21 considerados anteriormente. Entonces podemos considerar $g(U)$ como un espacio lineal con respecto a las operaciones clásicas. Entonces observamos que g es un isomorfismo con el espacio lineal $g(U)$.*

Observación 3.26. *Sea U un subespacio de un espacio pseudo-lineal como en uno de los ejemplos anteriores, 3.22 o 3.23. Entonces podemos considerar $g(U)$ como un cono positivo en un espacio lineal w.r.t. las operaciones clásicas. Entonces g es un isomorfismo de semimódulos.*

Capítulo II

Estructura Métrica

Un espacio métrico es un caso particular de un espacio topológico. Para entrar en detalle, en los números reales existe una topología natural que se puede asociar a una métrica, correspondiente con el valor absoluto, es decir, $d(x, y) = |x - y|$ para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$.

Es importante destacar que la noción de métrica no se limita a los números reales. En general, cualquier conjunto no vacío X puede ser dotado de una métrica, por ejemplo, la métrica discreta. Aquí $d(x, y)$ es 0 si $x = y$ y 1 si $x \neq y$.

Recordemos la definición de un espacio métrico. Decimos que (X, d) es un espacio métrico donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to [0, \infty)$ es una función que satisface las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cada $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).
3. $d(x, y) = d(y, x)$ para cada $x, y \in X$ (simetría).

Aunque anteriormente mencionamos la conexión entre las nociones de espacio métrico y espacio topológico, no profundizaremos en esos detalles aquí, y remitimos al lector al libro de Munkres para una discusión exhaustiva (citar).

En este capítulo, se introducen y estudian ciertos espacios desde la perspectiva de una métrica generalizada, con una clara motivación basada en el capítulo anterior.

2.1. Espacios métricos generalizados

Se mencionó que los números reales forman un campo ordenado con una topología metrizable; por lo tanto, es natural introducir una relación de orden envolviendo las

pseudo-operaciones sobre $[a,b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 1.1. *Dada una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, y dos elementos $x, y \in [a,b]$, definimos la relación de orden $\leq_g$ como:*

$$x \leq_g y \quad si \quad g(x) \leq g(y),$$

donde la segunda desigualdad se entiende en el sentido clásico.

Podemos notar que lo relevante aquí es la preservación del orden. Para entrar en contexto, si g es creciente, entonces la relación de orden $\leq_g$ coincide con el orden canónico sobre $\mathbb{R}$. Por otro lado, si la función g es decreciente, entonces $x \leq_g y$ es equivalente a $x \geq y$.

En los números reales, es bien conocido que:

$$\begin{aligned} [0,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\}, \\ (-\infty,0] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}. \end{aligned}$$

Motivados por estas dos igualdades de conjuntos, es posible considerar $([a,b], \oplus, \otimes)$ bajo el orden asociado a la función generadora g, es decir:

$$[a,b]_+ = \{x \in [a,b] : \quad 0 \leq_g x\} = \{x \in [a,b] : \quad g(x) \geq 0\}.$$

Definición 1.2. *Sea X un conjunto cualquiera. Decimos que una función $d : X \times X \to [a,b]_+$ es una g-distancia si satisface las siguientes propiedades:*

(i) $0 \leq_g d(x,y)$ *para todo* $x, y \in X$ *y* $d(x,y) = 0$ *si y solo si* $x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ *para todo* $x, y \in X$.

(iii) $d(x,y) \leq_g d(x,z) \oplus d(z,y)$ *para todo* $x, y, z \in X$.

Un espacio normado bien estudiado es $\mathbb{R}^n$. Cabe señalar que cualquier par de normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, a pesar de ello, no es posible afirmar lo mismo para cualquier par de métricas en general.

Para una estructura como $[a,b]^n$, es posible generar g-distancias de una forma simple, claramente apoyándonos en alguna norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}^n$, en ese espíritu, consideremos, $\overline{x} := (x_i)_{i=1}^n$ y $\overline{y} := (y_i)_{i=1}^n$ en $[a,b]^n$. Sea $d : X \times X \to [a,b]_+$ dada por

$$d((x_i)_i, (y_i)_i) := g^{-1}\|g(x_i)_i - g(y_i)_i\|.$$

La simetría, es decir, $d(\overline{x},\overline{y}) = d(\overline{y},\overline{x})$, es inmediata, al igual que la primera condición de g-distancia. Para verificar la desigualdad triangular, consideremos $\overline{x},\overline{y}$ y $\overline{z}$ en $[a,b]^n$, entonces

$$\begin{aligned} g(d(\overline{x},\overline{y})) &= \|(g(x_i))_i - (g(y_i))_i\| \\ &\leq \|(g(x_i))_i - (g(z_i))_i\| + \|(g(z_i))_i - (g(y_i))_i\| \\ &\leq g(d(\overline{x},\overline{z})) + g(d(\overline{z},\overline{y})) \\ &\leq g\left(d(\overline{x},\overline{z}) \oplus d(\overline{z},\overline{y})\right) \\ d(\overline{x},\overline{y}) &\leq_g d(\overline{x},\overline{z}) \oplus d(\overline{z},\overline{y}) \end{aligned}$$

Este hecho nos asegura que la aplicación d antes definida es basicamente una g-distancia. Podemos notar que la norma envuelta puede ser escogida de forma arbitraria.

Una noción relevante dentro del área de la topología corresponde con el estudio de secuencias y más aún la noción de convergencia. Así, sabiendo que existen g-distancias, la siguiente definición generaliza la convergencia. De hecho, si el lector no recuerda la definición de convergencia sobre un espacio métrico, puede pensar en el caso particular $g = \mathrm{Id}$ usado en la siguiente definición.

Definición 1.3. *Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq [a,b]$ converge hacia $x \in [a,b]$ si*

$$\forall \varepsilon >_g \mathbf{0} \quad \text{existe } N(\varepsilon) \geq 0 \quad \text{tal que } d(x_n,x) <_g \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

El lector puede recordar que existe un clase importante de secuencias en un espacio métrico, un tipo de secuencias con las cuales determinar la completitud de un espacio métrico. Evidentemente, estamos refiriendonos a las secuencias de Cauchy. Que de haber olvidado que son, el lector puede reflexionar sobre el caso particular, $g = \mathrm{Id}$, en la siguiente definición.

Definición 1.4. *Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq [a,b]$ es fundamental si*

$$\forall \varepsilon >_g \mathbf{0} \quad \text{existe } N(\varepsilon) \geq 0 \quad \text{tal que } d(x_n,x_{n+p}) <_g \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon),\ p \geq 1.$$

Definición 1.5. *Un espacio métrico generalizado es completo si cualquier sucesión fundamental converge a algún punto del mismo espacio métrico generalizado.*

El espacio normado $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es bien sabido que es un espacio métrico completo. En

este punto tenemos la motivación e ingredientes para determinar si el espacio métrico generalizado $([a,b]^n, d)$ admite completitud.

Proposición 1.6. *$([a,b]^m, d)$ es un espacio métrico generalizado completo.*

Demostración. Consideremos una sucesión fundamental $(x_n)_{n\geq 0}$ contenida en $[a,b]^m$. Para cada $\varepsilon >_g \mathbf{0}$ existe $N(\varepsilon) > 0$ tal que

$$d(x_n, x_{n+p}) = g^{-1}\|\overline{g}(x_n) - \overline{g}(x_{n+p})\| <_g \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\epsilon),\ p \geq 1.$$

La anterior desigualdad implica que $\|\overline{g}(x_n) - \overline{g}(x_{n+p})\| < g(\varepsilon)$.

Como una consecuencia, la sucesión $(\overline{g}(x_n))_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^m$ y dado que $(\mathrm{R}^m, \|\cdot\|)$ es completo, entonces existe $y \in \mathrm{R}^m$ tal que $\overline{g}(x_n) \to y \in \mathbb{R}^m$.

Podemos notar que,

$$d(x_n, \overline{g}^{-1}(y)) = g^{-1}(\|g(x_n) - y\|) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0}$$

□

Observación 1.7. *Para determinar si un conjunto cerrado en un espacio métrico tipicamente es usando secuencias, esta misma forma de abordar se puede usar para espacios métricos generalizados.*

A continuación, estudiamos la continuidad en el contexto pseudo-lineal.

Definición 1.8. *Sea $X \subseteq [a,b]^{\mathrm{n}}$. Decimos que la función $f : X \to [a,b]^{\mathrm{m}}$ es g-continua en $x_0 \in X$ si es continua en la métrica generalizada d (sobre X y $[a,b]^{\mathrm{m}}$ respectivamente), es decir,*

$$\forall \varepsilon >_g \mathbf{0},\ \exists \delta >_g \mathbf{0} \text{ tal que } d(f(x), f(x_0)) <_g \varepsilon \quad \text{siempre que } d(x, x_0) <_g \delta.$$

Si f es g-continua en todo $x_0 \in X$ entonces decimos que es g-continua en X.

Definición 1.9. *Definimos el módulo generalizado de continuidad como*

$$\omega_g(f, \delta) = \sup_g \{d(f(x), f(y)) : d(x,y) <_g \delta\},$$

Notese que si g es creciente en entonces sup_g es el supremo usual y si g es decreciente entonces sup_g el ínfimo en el sentido usual.

Proposición 1.10. *Sea $f\colon X \to [a,b]^{\mathrm{n}}$ una función. Entonces, f es g-continua si y solo si f es continua en el sentido usual.*

Demostración. Notamos que

$$\begin{aligned}\omega_g(f,\delta) &= \sup_g\{g^{-1}\|\mathrm{g}f(x)-gf(y)\|: \quad g^{-1}\|g(x)-g(y)\|<_g \delta\}\\ &= \sup_g\{g^{-1}\|\mathrm{g}f(x)-gf(y)\|: \quad \|g(x)-g(y)\|<g(\delta)\}\\ &= g^{-1}(\sup\{\|\mathrm{g}f(x)-gf(y)\|: \quad \|g(x)-g(y)\|<g(\delta)\})\end{aligned}$$

donde el último supremo es el usual. Sea $u=g(x)$ y $v=g(y)$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_g(f,\delta) &= g^{-1}(\sup\{\|\mathrm{g}fg^{-1}(u)-gfg^{-1}(v)\|: \quad \|u-v\|<g(\delta)\})\\ &= g^{-1}(\omega(\mathrm{g}fg^{-1},g(\delta))),\end{aligned}$$

donde $\omega(h,\cdot)$ denota el módulo de continuidad usual. Ahora, si f es continua, entonces gfg^{-1} es continua y si $\delta\to\mathbf{0}$ entonces $g(\delta)\to 0$, es decir, $\omega_g(f,\delta)\to\mathbf{0}$ y así f es g-continua.

Reciprocamente, si f es g-continua, entonces $\omega_g(f,\delta)\to\mathbf{0}$ cuando $\delta\to\mathbf{0}$, es decir, $g^{-1}(\omega(\mathrm{g}fg^{-1},g(\delta)))\to\mathbf{0}$ cuando $g(\delta)\to 0$ y obtenemos $\omega(\mathrm{g}fg^{-1},g(\delta))\to 0$ para $g(\delta)\to 0$, lo que implica que $\mathrm{g}fg^{-1}$ es continua. Dado que g es continua, obtenemos que f es continua en el sentido usual. □

Ahora denotemos por $\mathrm{C}(X,[a,b])$ el espacio de funciones continuas en el sentido usual con $X\subseteq\mathbb{R}$ siendo un conjunto compacto en el sentido usual. Entonces la g-distancia uniforme puede definirse como sigue:

$$D(f_1,f_2)=\sup_{x\in X} d(f_1(x),f_2(x)),$$

donde d es una g-distancia. Si f_1,f_2 son continuas, entonces el supremo existe. Es fácil verificar que $\mathrm{C}(X,[a,b])$ es un espacio métrico generalizado completo.

Observación 1.11. *Es fácil ver que* $\mathrm{C}(X,[a,b])$ *es un espacio pseudo-lineal con las operaciones*

$$(f_1\oplus f_2)(x)=f_1(x)\oplus f_2(x) \quad \textit{para todo } x\in X$$

$$(\alpha\otimes f)(x)=\alpha\otimes f(x), \quad \textit{para todo } \alpha\in \mathrm{I} \textit{ y todo } x\in X.$$

2.2. Espacios normales generalizados

A continuación, introducimos el concepto de espacio normado pseudo-lineal. Primero necesitamos una versión pseudo-lineal de la función de valor absoluto.

Definición 2.12. *Sea $x \in [a,b]^n$, entonces la función valor g-absoluto está definido*

$$|x|_g = g^{-1}|g(x)|.$$

Aquí se entiende que $g(x)$ es por componentes.

Definición 2.13. *Dado un espacio pseudo-lineal V sobre el campo $([a,b], \oplus, \otimes)$, una norma generalizada (o g-norma) es una función $\|\cdot\|_g : V \to [a,b]_+$ tal que*

(i) $\|v\|_g \geq_g \mathbf{0}, \forall v \in V$ *y* $\|v\|_g = \mathbf{0}$ *si y solo si* $v = \mathbf{0}$*;*

(ii) $\|c \otimes v\|_g = |c|_g \otimes \|v\|_g, \forall c \in [a,b]$ *y* $v \in V$*;*

(iii) $\|v \oplus \omega\|_g \leq_g \|v\|_g \oplus \|w\|_g, \forall v, w \in V$.

Definición 2.14. *Dado un espacio pseudo-lineal V y una norma generalizada $\|\cdot\|_g$ en V, decimos que V es un espacio normado generalizado.*

Ejemplo 2.15. *En $[a,b]^n$ definimos $\|x\|_g = \mathrm{d}(x, \mathbf{0}) = g^{-1}(\|g(x)\|)$, donde $\|g(x)\|$ se entiende en el sentido clásico. Se comprueba que $\|x\|_g$ es una g-norma. Además, tenemos $d(x,y) = \||x \ominus y|_g\|_g = \||y \ominus x|_g\|_g$, donde $|x \ominus y|_g = g^{-1}|g(x) - g(y)|$, con el valor absoluto tomado componente por componente.*

Ejemplo 2.16. *Para $f \in \mathrm{C}(X, [a,b]^{\mathrm{m}})$, donde $X \subseteq [a,b]^{\mathrm{n}}$ es compacto, definimos $\|f\|_g = \sup_g\{\|f(x)\|_g : x \in X\}$. Se compueba que $\mathrm{C}(X, [a,b]^m)$ es un espacio normado generalizado y*

$$D(\mathrm{f}_1, f_2) = \||f_1 \ominus f_2|_g\|_g,$$

donde $(|f_1 \ominus f_2|_g)(x) = g^{-1}\|\mathrm{g}f_1(x) - \mathrm{g}f_2(x)\|$.

La norma induce la estructura de métrica en ambos casos de estos ejemplos. La notación $|x \ominus y|_g$ se introduce para evitar el problema de que es posible que $g(x) - g(y)$ no tenga todas las componentes positivas en el Caso 2, (**??**), de las pseudo-operaciones consideradas.

Observación 2.17. *En ambos ejemplos (2.15) y (2.16), tenemos que $g(U)$ es un espacio normado o un cono positivo en un espacio normado, esto depende del Caso 1 (**??**) o del Caso 2 (**??**) de las pseudo-operaciones consideradas. La norma en $g(U)$ en ambos casos es $\|g(x)\|$ para $x \in U$.*

2.3. Espacios de Banach y Hilbert generalizados

Definimos y estudiamos una generalización del concepto de un espacio de Banach al contexto pseudo-lineal.

Definición 3.18. *Sea **B** un espacio normado generalizado. Si **B** es un espacio normado generalizado completo, entonces decimos que es un espacio g-Banach.*

Ejemplo 3.19. *Se comprueba que $[a,b]^{\mathrm{n}}$ es un espacio de Banach generalizado. Asímismo, si $X \subset \mathbb{R}$ es compacto, entonces el espacio $C(X,[a,b]^{\mathrm{m}})$ es un espacio de Banach. En efecto, si consideramos una sucesión fundamental $(f_n)_n$ en la g-distancia uniforme, entonces para todo $\varepsilon >_g \mathbf{0}$ existe $N(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$g^{-1}\|\mathrm{g}f_n(x) - gf_{\mathrm{n}+p}(x)\| <_g \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in X$$

entonces

$$\|gf_{\mathrm{n}}(x) - gf_{n+p}(x)\| < g(\varepsilon), \quad \text{para todo } x \in X$$

es decir, $(gf_{\mathrm{n}})_n$ es una sucesión fundamental en el sentido clásico, luego converge uniformemente, $(gf_{\mathrm{n}} \to h)$. Tomamos $f = g \circ h^{-1}$ y tenemos

$$D(f_n, f) = \sup_g\{g^{-1}\|\mathrm{g}f(x)_n - h(x)\| : x \in X\} \to 0,$$

es decir, $(f_n)_n$ converge en la g-distancia uniforme.

Definición 3.20. *Sea H un espacio pseudo-lineal sobre $[a,b]$. Una función $(\cdot,\cdot)_g : H \times H \to [a,b]$ es un producto interior generalizado (g-producto interior) si satisface:*

(i) $(x,y)_g = (y,x)_g$ *para todo* $x, y \in H$,

(ii) $(\alpha \otimes x \oplus \beta \otimes y, z)_g = \alpha \otimes (x,z)_g \oplus \beta \otimes (y,z)_g$ *para todo* $\alpha, \beta \in [a,b]$ *y todo* $x, y, z \in H$.

(iii) $(x,x)_g \geq_g \mathbf{0}$ *para todo* $x \in H$, *y* $(x,x)_g = \mathbf{0}$ *si y solo si* $x = \mathbf{0}$.

Observación 3.21. *Basándonos en cualquier* g*-producto interior, podemos definir una* g*-norma de la siguiente manera*

$$\|x\|_g = \sqrt{(x,x)_g}^{\otimes},$$

donde $\sqrt{x}^{\otimes} = \mathrm{g}^{-1}\sqrt{\mathrm{g}(x)}$*, siendo la segunda raíz cuadrada la usual.*

Definición 3.22. *Sea* H *un espacio pseudo-lineal. Decimos que* H *es un espacio de Hilbert generalizado (*g*-espacio de Hilbert) si es un espacio normado generalizado completo con la* g*-norma* $\|x\|_g = \sqrt{(x,x)_g}^{\otimes}$ *(es decir, es un espacio de Banach generalizado con la* g*-norma inducida por un* g*-producto interior).*

Usaremos la notación $\bigoplus_{k=1}^{n} a_k = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_{\mathrm{n}}$, con $a_1, a_2, \ldots a_n \in [a,b]$.

Ejemplo 3.23. *Consideramos* $[a,b]^n$ *y tomamos*

$$(x,y)_g = \bigoplus_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_k)$ *y* $y = (y_1, \ldots, y_k)$*. Entonces* $(x,y)_g$ *es un* g*-producto interior en* $[a,b]^{\mathrm{n}}$*. Además, por cálculo directo tenemos*

$$(x,y)_g = \bigoplus_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k = g^{-1}\sum_{k=1}^{n} g(x_{\mathrm{k}})g(y_k) = g^{-1}(g(x), g(y)),$$

donde $(g(x), g(y))$ *es el producto interior usual en* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *y* $g(x) = (\mathrm{g}(x_1), \ldots, \mathrm{g}(x_k))$*. Luego, por los ejemplos anteriores podemos notar que* $[a,b]^n$ *es un espacio de Hilbert generalizado.*

En todos los conceptos y discusiones de esta sección hasta ahora, si tenemos las pseudo-operaciones definidas como en el Caso 1 (**??**), las estructuras algebraicas son isomórficas a la estructura de campo clásica de los reales y recordemos que el isomorfismo no se mantiene para el Caso 2 (**??**) con sus pseudo-operaciones. De hecho, en el Caso (**??**) tenemos que no es isomórfo al campo clásico de los números reales. Además, desde el punto de vista topológico, incluso en el Caso 1 (**??**), el concepto de espacio métrico generalizado es diferente del concepto de espacio métrico usual, por lo que, incluso en el Caso 1 (**??**), tenemos una generalización de las teorías existentes. El Caso 2 (**??**) es claramente diferente e incluso no puede ser isomórfo o isométrico a otras estructuras lineales clásicas.

Capítulo III

Resultados Principales

3.1. Espacios L^p generalizados

Entre los clásicos espacios de Banach podemos distinguir los espacios $L^p(Y,\mu)$ donde $p \in [1,\infty)$ y el par (Y,μ) es un espacio de medida con μ una medida $\sigma-$finita. En un caso particular, para una medida de conteo sobre un conjunto numerable se tiene el espacio ℓ^p de secuencias. Recordemos que en el siguiente conjunto se establece una relación de equivalencia $\sim$,

$$\mathcal{L}^p(Y,\mu) := \{f : Y \to \mathbb{R} : \text{tal que } f \text{ es medible con } \int_Y |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Nuestro espacio es determinado por el cociente $L^p(Y,\mu) := \mathcal{L}(Y,\mu)/\sim$. Para más detalle de la construcción y propiedades de este espacio referimos al lector el libro (citar Folland).

Definición 1.1. *Sea Ω un espacio de medida y $f : \Omega \to [a,b]$ una función medible en el sentido usual de Lebesgue. Definimos el pseudo-integral o g-integral de la siguiente manera*

$$\int_\Omega^g f(x)dx = g^{-1}(\int_\Omega gf(x)dx),$$

donde la integral en el lado derecho es una integral de Lebesgue usual.

La pseudo-integral, fue introducida y estudiada por Endre Pap [14]. En el caso particular de $g = \mathrm{Id}$, corresponde con la bien conocida integral de Lebesgue.

Ciertamente los productos están bien definidos, por ejemplo, para $a \otimes a$, $a \otimes a \otimes a$, etc. No es natural establecer en la potencia algún número real positivo cualquiera.

Entre tanto, es posible para los números reales no negativos. Teniendo esto en mente, usamos la siguiente notación:

$$|f(x)|_g^{\otimes p} = (g^{-1}|\mathrm{g}f(x)|)^{\otimes \mathrm{p}} = \mathrm{g}^{-1}(|\mathrm{gf}(x)|^p)$$

Definición 1.2. *Sea $0 < p < \infty$. Definimos*

$$L_g^{\mathrm{p}}(\Omega) = \{f : \quad g\left(\int_\Omega^g |f(x)|_g^{\otimes \mathrm{p}} dx\right) < \infty\},$$

En el mismo sentido que caso clásico, dos funciones g, h en $L_g^p(\Omega)$ son iguales si y solo si $h = g$ en casi todo punto.

Proposición 1.3. *Sea el espacio $L_g^p(\Omega)$ generalizado, tenemos que se satisfacen*

$$\int_\Omega^g |f(x)|_g^{\otimes p} dx = g^{-1}\int_\Omega |\mathrm{g}f(x)|^p dx \quad y$$

$$L_g^{\mathrm{p}}(\Omega) = g^{-1}(L^{\mathrm{p}}(\Omega))$$

donde el espacios $L^{\mathrm{p}}(\Omega)$ es un espacio clásico.

Demostración. Se sigue de forma inmediata. □

Los espacios $L_g^p(\Omega)$ generalizados y los espacios $L^p(\Omega)$ clásicos tienen una estructura algebraica y métrica diferentes con la clara dependencia de la aplicación g.
Respecto al caso $\mathrm{p} = \infty$, es definido con el mismo espíritu que el clásico $L^\infty(\Omega)$, a decir:

$$L_g^\infty(\Omega) = \{f : \mathrm{esssup}_{x\in X} g(|f(x)|_g) < \infty\},$$

donde $\mathrm{esssup}_{x\in X}|f(x)|_g = \mathrm{esssup}_{x\in X} g^{-1}|\mathrm{g}f(x)|$.

Definición 1.4. *Sea $p \in [0, \infty)$. Definimos la norma generalizada en $L_g^{\mathrm{p}}(\Omega)$*

$$\|f\|_{\mathrm{L}_g^p(\Omega)} = (\int_\Omega^g |\mathrm{f}(x)|_g^{\otimes p} dx)^{\otimes \frac{1}{p}}.$$

Cabe señalar que la norma generalizada en $L_g^p(\Omega)$ puede ser expresada mediante la norma en $L^p(\Omega)$ y al inversa de g, para ser más precisos:

$$\|f\|_{\mathrm{L}_g^p(\Omega)} = g^{-1}(\|gf\|_{L^p(\Omega)})$$

En los espacios clásicos $L^p(\Omega)$, podemos distinguir algunas desigualdes relevantes, por ejemplo, Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz.

Teorema 1.5 (Desigualdad de Minkowski para L_g^p generalizado)**.** *Sea* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces para* f_1, f_2 *en* $L^p(\Omega)$ *se tiene que*

$$\|f_1 \oplus f_2\|_{L_g^p(\Omega)} \leq_g \|f_1\|_{L_g^p(\Omega)} \oplus \|f_2\|_{L_g^p(\Omega)}.$$

Demostración. En orden a mostrar a esta afirmación consideremos f_1, f_2 en $L^p(\Omega)$, así

$$\begin{aligned} \|f_1 \oplus f_2\|_{L_g^p(\Omega)} &= g^{-1}\|g(f_1 \oplus f_2)\|_{L^p(\Omega)} = g^{-1}\|gf_1 + gf_2\|_{L^p(\Omega)}, \\ g\left(\|f_1 \oplus f_2\|_{L_g^p(\Omega)}\right) &= \|gf_1 + gf_2\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Se tiene que $\|gf_1 + gf_2\|_{L^p(\Omega)} \leq \|gf_1\|_{L^p(\Omega)} + \|gf_2\|_{L^p(\Omega)}$ por la desigualdad de Minkowski clásica. De esta forma,

$$\begin{aligned} g\left(\|f_1 \oplus f_2\|_{L_g^p(\Omega)}\right) &\leq \|gf_1\|_{L^p(\Omega)} + \|gf_2\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq g(\|f_1\|_{L_g^p(\Omega)}) + g(\|f_2\|_{L_g^p(\Omega)}) \\ &\leq g(\|f_1\|_{L_g^p(\Omega)} \oplus \|f_2\|_{L_g^p(\Omega)}) \end{aligned}$$

Por tanto, $\|f_1 \oplus f_2\|_{L_g^p(\Omega)} \leq_g \|f_1\|_{L_g^p(\Omega)} \oplus \|f_2\|_{L_g^p(\Omega)}$. □

Teorema 1.6 (Desigualdad de Hölder para L_g^p generalizado)**.** *Sea* $1 \leq p, q \leq \infty$ *con* $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Entonces, para* $f_1 \in L_g^p(\Omega)$ *y* $f_2 \in L_g^q(\Omega)$ *se tiene que:*

$$\|f_1 \otimes f_2\|_{L_g^1(\Omega)} \leq_g \|f_1\|_{L_g^p(\Omega)} \otimes \|f_2\|_{L_g^q(\Omega)}.$$

Demostración. Al igual que en la prueba del teorema anterior, nos apoyaremos en la versión clásica de desigualdad, en este caso la de Hölder. Veamos,

$$\begin{aligned} g(\|f_1 \otimes f_2\|_{L_g^1(\Omega)}) &= \|g(f_1 \otimes f_2)\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \|gf_1 \cdot gf_2\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

De acuerdo con la desigualdad de Hölder clásica, $\|gf_1 \cdot gf_2\|_{L^1(\Omega)} \leq \|gf_1\|_{L^p(\Omega)} \cdot$

$\|gf_2\|_{L^q(\Omega)}$. Con lo cual,

$$\begin{aligned} g(\|f_1 \otimes f_2\|_{L^1_g(\Omega)}) &\leq \|gf_1\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|gf_2\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq g(\|f_1\|_{L^p_g(\Omega)}) \cdot g(\|f_1\|_{L^p_g(\Omega)}) \\ &\leq g(\|f_1\|_{L^p_g(\Omega)} \otimes \|f_2\|_{L^q_g(\Omega)}). \end{aligned}$$

De esta última desigualdad, $\|f_1 \otimes f_2\|_{L^1_g(\Omega)} \leq_g \|f_1\|_{L^p_g(\Omega)} \otimes \|f_2\|_{L^q_g(\Omega)}$. □

Como una consecuencia de la desigualdad de Hölder para $L^p_g(\Omega)$ cuando $p = 2 = q$, se obtiene la bien conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema 1.7 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz para $L^2_g(\Omega)$ generalizado)**.** *Tenemos*

$$\int_\Omega^g |f_1(x) \otimes f_2(x)|_g dx \leq_g \|f_1\|_{L^2_g(\Omega)} \otimes \|f_2\|_{L^2_g(\Omega)}$$

En este punto, podemos observar que $(L^p_g(\Omega), \|\cdot\|_{L^p_g(\Omega)})$ es un espacio g-normado. A continuación, se demostrará que estos espacios también son completos, tal como lo establece la siguiente afirmación.

Corolario 1.8. *Para $1 \leq p \leq \infty$ los espacios $L^p_g(\Omega)$ son espacios de Banach generalizados.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una secuencia fundamental en $L^p_g(\Omega)$. Para cada $\epsilon >_g 0$, existe N tal que para $n, m \geq N$:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{L^p_g(\Omega)} &<_g \epsilon \\ \|gf_n - gf_m\|_{L^p(\Omega)} &< g(\epsilon) \end{aligned}$$

Como una consecuencia, $\{gf_n\}_n$ es una secuencia de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Desde que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach, existe $f \in L^p(\Omega)$ para el cual,

$$\|gf_n - f\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Claramente $g^{-1}f \in L^p_g(\Omega)$. Por otro lado,

$$g(\|f_n - g^{-1}f\|_{L^p_g(\Omega)}) = \|gf_n - f\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = g(\mathbf{0})$$

En este sentido, $\{f_n\}_n$ converge a $g^{-1}f$. Esto concluye la prueba. □

Corolario 1.9. *El espacio $L_g^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert generalizado. El g-producto interno es dado por:*

$$(f_1, f_2)_{L_g^2(\Omega)} = \int_\Omega^g f_1(x) \otimes f_2(x)dx = g^{-1}(gf_1, gf_2)_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Sean f_1, f_2 dos funciones en $L_g^2(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega^g f_1(x) \otimes f_2(x)dx &= g^{-1}\left(\int_\Omega g(f_1(x) \otimes f_2(x))dx\right) \\ &= g^{-1}\left(\int_\Omega gf_1(x).gf_2(x)dx\right)\end{aligned}$$

Esta última igualdad no permite concluir que $(f_1, f_2)_{L_g^2(\Omega)} = g^{-1}(gf_1, gf_2)_{L^2(\Omega)}$ □

Una interesante propiedad válida en los espacios de Hilbert corresponde con la ley de paralelogramo. Para presentar la versión asociada al espacio $L_g^2(\Omega)$, es necesario definir: $\|u \ominus v\|_{L_g^2(\Omega)} := g^{-1}\|gu - gv\|_{L^2(\Omega)}$, cabe señarlar que esta nueva pseudo-operación está bien definida en ambos casos 1 y 2 pues $\|gu - gv\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$, con lo cual está en el dominio de g^{-1} en ambas casos.

Teorema 1.10. *La ley del paralelogramo se cumple en el espacio de Hilbert generalizado $L_g^2(\Omega)$, es decir:*

$$\|u \ominus v\|^2_{L_g^2(\Omega)} \oplus \|u \oplus v\|^2_{L_g^2(\Omega)} = g^{-1}(2) \otimes (\|u\|^2_{L_g^2(\Omega)} \oplus \|u\|^2_{L_g^2(\Omega)}), \quad \forall u, v \in H.$$

Demostración. Sean u, v funciones en $L_g^2(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned}u \oplus v &\in L_g^2(\Omega) \\ u \ominus v &\in L_g^2(\Omega).\end{aligned}$$

Ahora estableceremos algunas iguales, veamos

$$\begin{aligned}g(\|u \ominus v\|^2_{L_g^2(\Omega)}) &= g(\|u \ominus v\|_{L_g^2(\Omega)} \otimes \|u \ominus v\|_{L_g^2(\Omega)}) \\ &= g(\|u \ominus v\|_{L_g^2(\Omega)})g(\|u \ominus v\|_{L_g^2(\Omega)}) \\ &= \|gu - gv\|^2_{L_g^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

De forma similar se consigue que, $g(\|u \oplus v\|^2_{L_g^2(\Omega)}) = \|gu + gv\|^2_{L_g^2(\Omega)}$.

Ahora estamos en condiciones para mostrar la ley del paralelogramo generalizado. Comenzamos con la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} g(\|u \ominus v\|^2_{L^2_g(\Omega)} \oplus \|u \oplus v\|^2_{L^2_g(\Omega)}) &= g(\|u \ominus v\|^2_{L^2_g(\Omega)}) + g(\|u \oplus v\|^2_{L^2_g(\Omega)}) \\ &= \|gu - gv\|^2_{L^2(\Omega)} + \|gu + gv\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Podemos usar la ley del paralelogramo clásica en la expresión de la derecha, es decir,

$$\|gu - gv\|^2_{L^2(\Omega)} + \|gu + gv\|^2_{L^2(\Omega)} = 2(\|gu\|^2_{L^2(\Omega)} + \|gv\|^2_{L^2(\Omega)})$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} g(\|u \ominus v\|^2_{L^2_g(\Omega)} \oplus \|u \oplus v\|^2_{L^2_g(\Omega)}) &= 2(\|gu\|^2_{L^2(\Omega)} + \|gv\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ &= 2(g(\|u\|^2_{L^2_g(\Omega))} + g(\|v\|^2_{L^2_g(\Omega)}) \\ &= 2(g(\|u\|^2_{L^2_g(\Omega))} \oplus \|v\|^2_{L^2_g(\Omega)})) \\ &= g(g^{-1}(2) \otimes (\|u\|^2_{L^2_g(\Omega))} \oplus \|v\|2_{L^2_g(\Omega)})) \end{aligned}$$

Por tanto, $\|u \ominus v\|^2_{L^2_g(\Omega)} \oplus \|u \oplus v\|^2_{L^2_g(\Omega)} = g^{-1}(2) \otimes (\|u\|^2_{L^2_g(\Omega))} \oplus \|v\|^2_{L^2_g(\Omega)})$ □

3.2. Operadores pseudo-lineales

El estudio de los operadores lineales continuos entre espacios Banach, Hilbert o Fréchet es una gran área de las matemáticas. Tiene implicaciones en áreas tales como ecuaciones diferenciales parciales, análisis armónico, teoría de las probabilidades, teorías de números, entre otras.
Sean U y V dos espacios pseudo-lineales sobre $([a,b], \oplus, \otimes)$.

Definición 2.11. *Sea $P : U \to V$ una aplicación. Decimos que P es un operador pseudo-lineal si para cualquier $\alpha, \beta \in [a,b]$ y $u, v \in U$ tenemos que:*

$$P(\alpha \otimes u \oplus \beta \otimes v) = \alpha \otimes P(u) \oplus \beta \otimes P(v)$$

En lo que resta del capítulo, se considerarán subespacios pseudo-lineales $U \subseteq [a,b]^X$. Es importante señalar que la Proposición 2.12 está relacionada con la estructura de los subespacios considerados, garantizando que sea posible la composición de las funcio-

nes $g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ (o $g : [a,b] \to [0,\infty]$) con $u \in U \subseteq [a,b]^X$.

Proposición 2.12. *Sea U y V subespacios pseudo-lineales del espacio de funciones $[a,b]^X$. Un operador $P : U \to V$ es pseudo-lineal si y solo si la composición $gPg^{-1} : g(U) \to g(V)$ es lineal.*

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos consider g según el caso 1. Así, para $u \in U$, entonces $g(u) \in \overline{R}^X$, para lo cual, $g(u)(x) = g(u(x))$ para cada $x \in X$.

La condición de pseudo-linealidad la podemos entender como la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} P(\alpha \otimes u \oplus \beta \otimes v) &= \alpha \otimes P(u) \oplus \beta \otimes P(v) \\ Pg^{-1}(g(\alpha)g(u) + g(\beta)g(v)) &= g^{-1}(g(\alpha)gP(u) + g(\beta)gP(v)), \end{aligned}$$

aplicando g a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$gPg^{-1}(g(\alpha)g(u) + g(\beta)g(v)) = g(\alpha)gP(u) + g(\beta)gP(v).$$

Para distinguir la linealidad, hacemos: $u' = g(u)$, $v' = g(v)$, $\alpha' = g(\alpha)$ y $\beta' = g(\beta)$. Con este cambio:

$$gPg^{-1}(\alpha' u' + \beta' v') = \alpha' \cdot gPg^{-1}(u') + \beta' \cdot gPg^{-1}(v').$$

Esto nos asegura que gPg^{-1} es un operador lineal.

La misma conclusión es válida para el Caso 2, considerando que la construcción y propiedades de las pseudo-operaciones son análogas. □

Observación 2.13. *Decimos que un operador pseudo-lineal es continuo si es continuo respecto a las distancias generalizadas. Además, si $V = [a,b]$ decimos que P es un funcional pseudo-lineal.*

Definición 2.14. *Un operador pseudo-lineal $P : U \to [a,b]$ con $U \subset [a,b]^X$ espacio g-Banach, se dice que es una forma pseudo-lineal.*

Por la proposición anterior obtenemos que si P es una forma pseudo-lineal entonces $gPg^{-1} : g(U) \to g([a,b])$ ($= \overline{\mathbb{R}}$ o $= [0,\infty]$) es una forma pseudo-lineal.

Proposición 2.15. *Una forma pseudo-lineal es g-continua si y solo si es g-acotada, es decir, si existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|P(\nu)|_g \leq_g C \otimes \|\nu\|_g \quad \text{para todo } \nu \in U.$$

Demostración. Se puede comprobar que P es g-continua si y solo si gPg^{-1} es una forma lineal continua en el sentido usual. La condición de acotamiento es equivalente a

$$g^{-1}|gP(\nu)| \leq_g g^{-1}(g(C)g(\|\nu\|_g)),$$

es decir,

$$|gP(\nu)| \leq g(C)g(g^{-1}\|g(\nu)\|_{g(U)}),$$

lo cual es equivalente a

$$|gP(\nu)| \leq g(C)\|g(\nu)\|_{g(U)},$$

donde $\|g(\nu)\|_{g(U)}$ es la norma en el espacio de Banach clásico $g(U)$. Luego, para $\nu' \in g(U)$ consideramos ν tal que $g(\nu) = \nu'$ o $\nu = g^{-1}(\nu')$ y sea $C' = g(C)$. Entonces

$$|gPg^{-1}(\nu')| \leq g(C)\|\nu'\|_{g(U)},$$

lo cual significa que gPg^{-1} es un funcional lineal acotado. Esto es equivalente a que gPg^{-1} sea continuo, lo que implica que P es g-continuo. □

3.2.1. Teorema de Representación de Riesz

Los espacios de Hilbert admiten una geometría que de cierta forma es análoga a la del espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana, esto queda evidenciado con el teorema de Pitágoras para cualquier colección finita de vectores ortogonales en estos espacios. Esto incluso se puede llevar a una colección numerable con la condición que sea una serie absolutemente convergente.

Un resultado relevante dentro del estudio de operadores sobre espacios de Hilbert es el bien conocido Teorema de Representación de Riesz. Veamos un ejemplo en dimensión finita,

Ejemplo 2.16. *Consideremos un funcional $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = 3x + 2y + z$.*

Claramente podemos re-escribir nuestro funcional como un producto interno asociado al vector $(3, 2, 1)$, es decir, $T(x, y, z) = \langle (x, y, z), (3, 2, 1) \rangle$

En espacios de dimensión finita es posible observar tal comportamiento. Con ese mismo espíritu, es natural preguntarse si para espacios de Hilbert en general vale esta propiedad. Cabe señalar que se tiene una respuesta afirmativa y corresponde con el bien conocido Teorema de Representación de Riesz, el cual establece una correspondencia entre los funcionales lineales continuos y los elementos del propio espacio de Hilbert.

Teorema 2.17. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T : H \to \mathbb{K}$ un funcional continuo. Existe $y \in H$ tal que:*

$$T(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Más aún, $\|T\| = \|y\|$.

Una consecuencia de este teorema, es que los espacios de Hilbert son espacios reflexivos. Tiene aplicaciones directas en diversas áreas de las matemáticas y la física, incluyendo la teoría espectral y la formulación de problemas variacionales.

Teorema 2.18 (Teorema de Representación de Riesz para $L^2_g(\Omega)$)**.** *Cualquier funcional pseudo-lineal continuo $P : H \to [a, b]$ con $H \subset L^2_g(\Omega)$ un espacio de Hilbert generalizado, puede ser representado de manera única como sigue:*

$$gPg^{-1}(v') = (u', v')_{\widetilde{H}}, \text{ para todo } v' \in \widetilde{H}$$

para algún $u' \in \widetilde{H}$, donde $\widetilde{H}$ es la completitud del espacio lineal generado por $g(H)$ en $L^2(\Omega)$. Además, si $u' \in g(H)$ entonces existe un único $u = g^{-1}(u') \in H$ tal que

$$P(v) = (u, v)_g, \quad \text{para todo } v \in H.$$

Observación 2.19. *Si g es del caso 1, entonces $g(H)$ es un espacio de Hilbert. Por otro lado, si g corresponde con el caso 2, entonces $g(H)$ es un cono positivo de un espacio de Hilbert debido a la restricción $g(u)(x) \in [0, \infty]$.*

Demostración. Vamos a considerar g correspondiente al caso 1. En este sentido, nos apoyaremos en la versión clásica del Teorema de Representación de Riesz antes enunciado. En order a mostrar ello, notar que el funcional dado por gPg^{-1} es continuo sobre el espacio de Hilbert $g(H)$ por la Proposición 2.12 y la Proposición 2.15.

Por el Teorema 2.17, existe un único vector $u' \in g(H)$ tal que para todo $v' \in g(H)$, con lo cual para $gu = u'$ y $v' = g(v)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} gPg^{-1}(v') &= \langle u', v' \rangle_{g(H)} \\ P(v) &= g^{-1}\langle gu, gv \rangle_{g(H)} \\ P(v) &= \langle u, v \rangle_g. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba para el caso 1. Lo siguiente es considerar la función g correspondiente al caso 2, aquí $g(H)$ es un cono positivo de un espacio de Hilbert. Sea $\widetilde{H} := \overline{\text{span}\{g(H)\}} \subset L^2(\Omega)$. Ciertamente, el espacio $\widetilde{H}$ es un espacio de Hilbert. Consideremos además $\widetilde{P}$ la extensión (por linealidad) de gPg^{-1}, es decir, $\widetilde{P} : \widetilde{H} \to \overline{\mathbb{R}}$, es un operador lineal y $\widetilde{P}(v) = gPg^{-1}(v), \forall v \in g(H)$. De la misma forma que en el caso 1, por el Teorema 2.17 respecto a $(\widetilde{H}, \widetilde{P})$, existe un único $u' \in \widetilde{H}$ tal que

$$\widetilde{P}(v') = \langle u', v' \rangle_{\widetilde{H}} \quad \text{para todo } v' \in \widetilde{H}.$$

Si $u' \in g(H)$ se sigue con el caso 1.

Para determinar la unicidad. Supongamos que existe un u_1 con $P(v) = \langle u_1, v \rangle_g$. Entonces, por pseudo-linealidad se sigue que

$$\| \langle u, v \rangle_g \ominus \langle u_1, v \rangle_g \|_g = \langle \| u \ominus u_1 \|_g, v \rangle_g$$

para cualquier $v \in H$. Entonces $\| u \ominus u_1 \|_g = \mathbf{0}$ y $u = u_1$. □

3.2.2. El Lema de Lax-Milgram

El lema de Lax-Milgram es un resultado fundamental en la teoría de ecuaciones en espacios de Hilbert. Su gran utilidad recae en la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones integrales y problemas de contorno.

Consideremos un espacio de Hilbert H y un funcional lineal $f \in H'$, donde H' denota el espacio dual de H. Sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.

1. A es continua o acotada si existe $C > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq C\|u\|_H \|v\|_H \; \forall u, v \in H$.
2. A es Coercitiva si existe $\alpha > 0$ tal que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \; \forall u \in H$.

Teniendo estas nociones en mente, estamos con las condiciones de enunciar dicho lema.

Lema 2.20 (Lema de Lax-Milgram)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coercitiva. Entonces, para cada $f \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que*

$$A(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Este teorema caracteriza las formas bilineales continuas y coercitivas mediante elementos del dual del espacio de Hilbert dado. Es posible observar una cierta analogía con el Teorema de Representación de Riesz.

Para concluir este capítulo, extendemos el teorema anterior al espacio $L^2_g(\Omega)$ y a una aplicación pseudo-bilineal. Para entrar en contexto veamos la siguiente definición.

Definición 2.21. *Sea $H \subset L^2_g(\Omega)$ un espacio* g*-Hilbert sobre $[a, b]$ con pseudo-operaciones como en el Caso 1 o Caso 2. Una aplicación $A : \mathrm{H} \times H \to [a, b]$ es una pseudo-forma bilineal si es pseudo-lineal en ambos de sus argumentos.*

Definición 2.22. *Una pseudo-forma bilineal A es:*

1. ***Acotada** si existe $c_1 >_g \mathbf{0}$ tal que*

$$|A(u, v)|_g \leq_g c_1 \otimes \|u\|_g \otimes \|v\|_g \quad \textit{para todo } v \in H.$$

2. ***Coercitiva** si existe $c_2 >_g \mathbf{0}$ tal que*

$$A(v, v) \geq_g c_2 \otimes \|v\|_g^{\otimes 2} \quad \textit{para todo } u, v \in H.$$

Teorema 2.23 (Lema de Lax-Milgram para $L^2_g(\Omega)$)**.** *Sea $H \subset L^2_g(\Omega)$ un espacio g-Hilbert y $A : H \times H \to [a, b]$ pseudo-bilineal, acotado y coercitivo. Sea $F : H \to [a, b]$ un operador pseudo-lineal continuo. Entonces existe un único $u' \in \widetilde{H}$ tal que*

$$gAg^{-1}(u', v') = gFg^{-1}(v'), \quad \textit{para todo } v' \in \widetilde{H}$$

donde $\widetilde{H}$ es la completitud del subespacio generado por $g(\mathrm{H})$ en $L^2(\Omega)$. Además, si adicionalmente $u' \in g(H)$, entonces existe un único $u = \mathrm{g}^{-1}(u') \in \mathrm{H}$ tal que

$$A(u, v)_g = F(v), \quad \textit{para todo } v \in H.$$

Observación 2.24. *El subespacio $\widetilde{H}$ mantiene la misma estructura que el subespacio correspodiente al Teorema de Representación de Riesz. Es decir, dependiendo de si la aplicación g es*

del caso 1 o 2 será necesario usar el subespacio generado $g(\mathrm{H})$ pues es un cono dentro de un espacio de Hilbert.

Demostración. Sea A una aplicación pseudo-bilineal acotada y coercitiva. La propiedad de acotada queda expresada en la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |A(u,v)|_g &\leq_g c_1 \otimes \|u\|_g \otimes \|v\|_g \\ g^{-1}|gA(u,v)| &\leq_g g^{-1}(g(C_1)\|gu\|\|gv\|) \\ |gA(u,v)| &\leq g(c_1)\|gu\|\|gv\| \end{aligned}$$

Aquí hacemos el siguiente cambio, $gu = u'$ e $gv = v'$ en $g(H)$. De esta forma:

$$|gAg^{-1}(u',v')| \leq g(c_1)\|u'\|\|v'\| \tag{3.1}$$

Dependiendo del caso correspondiente al mapa g, $g(H)$ es un espacio de Hilbert o un cono dentro de un espacio de Hilbert. En cualquier caso, de la misma forma que el prueba del Teorema de Representación de Riesz, podemos extender la bilineal del cono $g(H)$ para $\widetilde{H} := \overline{\mathrm{span}(g(H))}$ con lo cual la aplicación dada por gAg^{-1} es bilineal acotada.

Para abordar la condición de coercitividad, es decir,

$$A(v,v) \geq_g c_2 \otimes \|v\|_g^{\otimes 2}, \text{ para cada } v \in H$$

Podemos re-escribirlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} gA(v,v) &\geq gg^{-1}(g(c_2)g\|v\|_g^{\otimes 2}) \\ gA(v,v) &\geq g(c_2)g\left(\|v\|_g \otimes \|v\|_g\right) \\ gA(v,v) &\geq g(c_2)\|gv\|_{\widetilde{H}}^2 \end{aligned}$$

Considerar $v' = g(v)$ y $c_2' = g(c_2)$. Entonces,

$$gAg^{-1}(v',v') \geq c_2'\|v'\|_{\widetilde{H}}^2. \tag{3.2}$$

De la desigualdad 3.1 y 3.2, el operador gAg^{-1} es acotada y coercitiva. El Lema clásico de Lax-Milgram aplicado a la bilineal gAg^{-1} y algún funcional gFg^{-1} nos asegura que existe un único $u' \in \widetilde{H}$ tal que $gAg^{-1}(u',v') = gFg^{-1}(v'), \forall v' \in \widetilde{H}$. Además, si $u' \in g(H)$ entonces $u = g^{-1}(u') \in H$ y para cualquier $v \in H$ tenemos $A(u,v)_g = F(v)$. □

Ejemplo 2.25. *Consideremos la siguiente ecuación integral:*

$$\int_{[0,1]}^{g} u(|x-t|) \otimes v(t)\, dt = f(x) \otimes v(x), \quad \text{para todo } v \in L^2_g([0,1]) \tag{3.3}$$

en la cual u es una función incógnita. Notar que la aplicación dada por

$$A(u,v) = \int_{[0,1]}^{g} u(|x-t|) \otimes v(t)\, dt$$

define un operador pseudo-bilineal, además notar que $f \otimes v$ actúa como un operador pseudo-lineal.

Como una consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

$$|A(u,v)|_g \leq_g \|u\|_{L^2_g([0,1])} \otimes \|v\|_{L^2_g([0,1])}.$$

En otras palabras, A es acotada.

Lo siguiente a realizar, es determinar si la aplicación A es coercitiva. Supongamos que vale la siguiente desigualdad:

$$c_2 = \inf_{x,v} \frac{\int_0^1 gv(|x-\mathrm{t}|)gv(t)\, dt}{\|gv\|^2_{L^2}} > 0,$$

La aplicación A sobre los elementos de la diagonal, es decir, sobre (v,v):

$$A(v,v) = \int_{[0,1]}^{g} v(|x-t|) \otimes v(t)\, dt \geq_g c_2 \otimes \int_{[0,1]}^{g} v(t) \otimes v(t)\, d\mathrm{t},$$

Esto implica que A es coercitiva.

Del lema de Lax-Milgram, se puede concluir que existe una única solución $u' \in \widetilde{H}$ para la ecuación $gag^{-1}(u',v') = gFg^{-1}(v')$. Además, si $u' \in g(L^2_g([0,1]))$, entonces $u = g^{-1}(u') \in L^2_g([0,1])$ resulta ser una solución de (3.3).

Capítulo IV

Conclusiones

La teoría de operadores lineales continuos es una grande área de las matemáticas. Admite una amplia comunidad con interés, la cual aporta avances de forma contínua y la cual cuenta con grandes problemas abiertos.

Recientemente, la idea de dotar a los intervalos con pseudo-operaciones les brinda una estructura algebraica distinguible generando una perspectiva nueva e intrigante. Esto es recogido en los aportes de Endre Pap respecto al pseudo-análisis.

Resultados relevantes del análsis funcional son extendidos, a decir, el Teorema de Representación de Riesz y el Lema de Lax-Milgram. Los cuales son bien conocidos y usados por sus impliaciones en teoría de operadores y ecuaciones integral, etc.

Teniendo en mente las técnicas abordadas e implicaciones. Como un trabajo futuro se pretende generalizar destados teoremas del análisis funcional, a decir, los teoremas de interpolación y ciertas desigualdades en los espacios $L_g^p(\Omega)$.

Bibliografía

[1] H. Agahi, Y. Ouyang, R. Mesiar, E. Pap, Mirjana S˘trboja, Hölder and Minkowski type inequalities for pseudo-integral, Applied Mathematics and Computation 217 (2011) 8630–8639.

[2] I. Batyrshin, O. Kaynak, I. Rudas, Fuzzy modeling based on generalized conjunction operations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10 (5) (2002) 678–683.

[3] B. Bede, D. O'Regan. The theory of pseudo-linear operators. Knowledge-Based Systems, 38 (2013) 19-26.

[4] B. Bede, H. Nobuhara, M. Dankova, A. Di Nola, Approximation by pseudo-linear operators, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 804–820.

[5] S. Isojima, B. Grammaticos, A. Ramani, J. Satsuma, Ultradiscretization without positivity, Journal of Physics A: Mathematical and General 39 (2006) 3663– 3672.

[6] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families, Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 411–438.

[7] E.P. Klement, R. Mesiar, On the axiomatization of some classes of discrete universal integrals, Knowledge-Based Systems 28 (2012) 13–18.

[8] W. Kunishima, A. Nishiyama, H. Tanaka, T. Tokihiro, Differential equations for creating complex cellular automaton patterns, Journal of the Physical Society of Japan 73 (2004) 2033.

[9] A. Marková, Some remarks on the pseudo-linear algebra, Tatra Mountains Mathematical Publication 6 (1995) 123–130.

[10] A. Marková, Pseudo-linear algebra, International Journal of Fuzzy Mathematics 4 (1996) 79–84.

[11] R. Mesiar, Rybárik, Pseudo-arithmetical operations. Tatra Mt Math Publ, 2, (1993) 185-192.

[12] F. Modave, V. Kreinovich, Fuzzy Measures and Integrals as Aggregation Operators: Solving the Commensurability Problem, NAFIPS, 2002.

[13] E. Pap, g-Calculus, University of Novi Sad, Review of Research Faculty of Science, Mathematics Series 23 (1993) 145–150.

[14] E. Pap, Pseudo-additive measures and their applications, in: E. Pap (Ed.), Handbook of Measure Theory, Elsevier Science, B.V., 2002.

[15] E. Pap, Applications of the generated pseudo-analysis to nonlinear partial differential equations, Contemporary Mathematics 377 (2005) 239–259.

[16] E. Pap, Generalized real analysis and its applications, International Journal of Approximate Reasoning 47 (2008) 368–386.

[17] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, Physical Review Letters 76 (1996) 3247–3250.

[18] Meimei Xia, Zeshui Xu, Bin Zhu, Some issues on intuitionistic fuzzy aggregation operators based on Archimedean t-conorm and t-norm, Knowledge-Based Systems 31 (2012) 78–88.

[19] R. Yager, A. Rybalov, Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 80 (1996) 111–120.

[20] Pazy A. (1983). *Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences Vol. 44, Springer-Verlag, New York, 282 pags.