Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Estudio de las propiedades topológicas y algebraicas del espacio vectorial $\mathbb{R}^{2n^2}$

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Miguel Angel MATTA SILVESTRE

ASESOR

Dr. Carlos Alberto PEÑA MIRANDA

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Matta, M. (2026). *Estudio de las propiedades topológicas y algebraicas del espacio vectorial* $\mathbb{R}^{2n^2}$. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Miguel Angel Matta Silvestre
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	74123772
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0006-2864-2744
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10699143
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-4339-4615
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Alex Armando Cruz Huallpara
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	40949706
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Rodolfo José Gálvez Pérez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09459126
Datos de investigación	
Línea de investigación	Álgebra y topología

Grupo de investigación	Matemáticas Aplicadas -. Métodos Numéricos (METNUM)
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2025-2026
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela
S/N cuadra 34 Teléfono: 619-7000,
Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail:
eapmat@unmsm.edu.pe Lima - Perú

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 horas del martes 24 de febrero de 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Alex Armando Cruz Huallpara (PRESIDENTE), Mg. Rodolfo José Gálvez Pérez (MIEMBRO) y el Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y ALGEBRAICAS DEL ESPACIO VECTORIAL R^{2n^2}", presentado por el señor Bachiller MIGUEL ANGEL MATTA SILVESTRE, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ....Sobresaliente..... con un calificativo promedio de .....dieciocho..... (.18.).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Alex Armando Cruz Huallpara, manifestó que el señor Bachiller MIGUEL ANGEL MATTA SILVESTRE, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 16:40 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara
PRESIDENTE

Mg. Rodolfo José Gálvez Pérez
MIEMBRO

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. Carlos Alberto Peña Miranda en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N.º 001820-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es "**ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y ALGEBRAICAS DEL ESPACIO VECTORIAL** $\mathbb{R}^{2n^2}$**"**, presentado por el bachiller **MIGUEL ANGEL MATTA SILVESTRE** para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 10% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Lima, 28 de febrero de 2026

UNMSM
Firmado digitalmente por PEÑA MIRANDA Carlos Alberto FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 28.02.2026 23:06:10 -05:00

Firma del Asesor
Nombres y Apellidos del asesor: Carlos Alberto Peña Miranda
DNI: 10699143

Dedicatoria

Esta página va dedicada a mis amados padres, Lidia Silvestre y Efraín Matta, fuente silenciosa de mi fuerza y mis deseos de superación. Sus consejos y acciones me probaron que, con sacrificio, entrega y humildad, los anhelos pueden volverse una realidad.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia: a mi mama, Lidia Silvestre Santiago, por su amor incondicional y por ser un ejemplo de lucha y perseverancia. Gracias por creer siempre en mi. A mi papa, Efrain Matta Espinoza, un consejero de vida, gracias por siempre querer lo mejor para mi. A mi hermana, Ayelen Matta Silvestre, por ser una persona muy generosa y amable.

De igual modo, mi mas sincero reconocimiento a mi asesor de tesis, el Dr. Carlos Alberto Peña Miranda, por su guia paciente, sus valiosas observaciones y su constante apoyo a lo largo de este proceso. Gracias por compartir con tanta generosidad sus conocimientos y por el tiempo que me ha dedicado. Su guia ha sido fundamental en este trabajo; valoro profundamente su paciencia, exigencia y compromiso.

A los profesores de la facultad, cuyas clases, conversaciones y recomendaciones bibliograficas fueron los cimientos sobre los que se construyo este proyecto. Sus amplios conocimientos en matematicas me motivaron a seguir aprendiendo mas.

A mis amigos que conoci en la facultad, aquellos que me brindaron su tiempo y conocimiento. Ademas, a los de la base 17. Gracias, espartanos! Fueron un gran motivo para seguir adelante.

Muy agradecido con todos los que han sido parte de este proceso academico. Siempre los tendre presentes.

RESUMEN

ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y ALGEBRAICAS DEL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^{2n^2}$

MIGUEL ANGEL MATTA SILVESTRE

Asesor: Dr. Carlos Alberto Peña Miranda

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En esta tesis se estudian la estructura algebraica y topológica del espacio de matrices complejas. Se desarrolla el marco teórico de su estructura como espacio vectorial real, identificándolo con $\mathbb{R}^{2n^2}$ mediante el isomorfismo natural $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$. Se analizan propiedades topológicas de subconjuntos relevantes como los abiertos, cerrados y compactos y se examina la densidad de las matrices normales no degeneradas dentro del conjunto de matrices normales, destacando el papel de pequeñas perturbaciones espectrales. Los resultados obtenidos contribuyen a una mejor comprensión de la interacción entre las propiedades algebraicas y topológicas de las matrices complejas y evidencian la estrecha relación entre álgebra lineal, topología y análisis.

Palabras clave: Matrices hermitianas, determinante, norma de Frobenius, densidad de matrices.

ABSTRACT

STUDY OF THE TOPOLOGICAL AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF THE VECTOR SPACE $\mathbb{R}^{2n^2}$

MIGUEL ANGEL MATTA SILVESTRE

Advisor: Dr. Carlos Alberto Peña Miranda

Obtained Title: Degree in Mathematics

This thesis studies the algebraic and topological structure of the space of complex matrices. The theoretical framework of its structure as a real vector space is developed by identifying it with $\mathbb{R}^{2n^2}$ via the natural isomorphism $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$. Topological properties of relevant subsets, such as open, closed, and compact sets, are analyzed, and the density of nondegenerate normal matrices within the set of normal matrices is examined, highlighting the role of small spectral perturbations. The results obtained contribute to a better understanding of the interaction between the algebraic and topological properties of complex matrices and demonstrate the close relationship between linear algebra, topology, and analysis.

Keywords: Hermitian matrices, determinant, Frobenius norm, matrix density.

Índice general

Dedicatoria **i**

Agradecimientos **ii**

Resumen **iii**

Abstract **iv**

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

1.1. Espacios vectoriales 3

1.2. Subespacios vectoriales 4

1.3. Independencia lineal, base y dimensión 5

1.4. Espacios normados 6

2. El espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **7**

2.1. Definición de matriz y matriz cuadrada 7

2.2. El espacio vectorial $M_n(\mathbb{K})$ 11

2.3. Base canónica y dimensión 12

2.4. Subespacios de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 13

3. Estructura topológica del espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **18**

3.1. Espacio matricial y normas 18

3.2. Continuidad del determinante 21

3.3. Conjuntos abiertos, cerrados y compactos 26

4. Estructura algebraica del espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **30**

4.1. Diagonalización y valores propios 30
4.2. Densidad de matrices invertibles y de matrices normales no degeneradas . . 32
4.2.1. Densidad de matrices invertibles 32
4.2.2. Matrices normales no degeneradas 33

Conclusión **35**

Bibliografía **36**

Introducción

El estudio de las matrices normales constituye uno de los capítulos más ricos y estructurados del álgebra lineal y del análisis matricial. Definidas por la condición $ZZ^* = Z^*Z$, estas matrices incluyen familias fundamentales como las matrices hermitianas, unitarias y diagonales, y poseen propiedades espectrales particularmente estables: admiten una base ortonormal de autovectores y sus valores propios presentan un comportamiento bien condicionado. En consecuencia, el análisis espectral de estas matrices proporciona información esencial sobre sus propiedades algebraicas y geométricas, lo que motiva el estudio detallado de los subconjuntos que conforman el espacio de todas las matrices complejas.

La presente investigación tiene por objeto el análisis riguroso de dichos conjuntos, enfocándose en propiedades topológicas como la caracterización de conjuntos abiertos, cerrados y compactos, así como en la densidad de matrices invertibles y matrices normales no degeneradas dentro del espacio de todas las matrices complejas. A lo largo del trabajo se presentan demostraciones detalladas y ejemplos que contribuyen a clarificar los argumentos teóricos y facilitar su comprensión.

Dado que el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2n^2}$ constituye el objeto formal del estudio, se trabajará a lo largo del texto con su realización concreta como el espacio de matrices complejas $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Esta identificación permite describir de manera explícita sus propiedades algebraicas y topológicas mediante la estructura matricial. El isomorfismo correspondiente será demostrado en el Capítulo 3.

El trabajo se divide en cuatro capítulos. El primer capítulo aborda los conceptos preliminares sobre espacios vectoriales. En el segundo capítulo se presentan resultados fundamentales relativos a matrices cuadradas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Los capítulos tercero y cuarto

estudian la estructura algebraica y topológica del espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, considerado como espacio vectorial real isomorfo a $\mathbb{R}^{2n^2}$. Finalmente, se presentan las conclusiones de la tesis y la bibliografía.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales de álgebra lineal que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Se definen los espacios vectoriales y subespacios, se estudian las nociones de independencia lineal, bases y dimensión, y se introducen los espacios normados, que permitirán trabajar con métricas y distancias en espacios vectoriales. Estos conceptos constituyen la base teórica necesaria para el desarrollo de los resultados posteriores.

1.1. Espacios vectoriales

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de escalares, como por ejemplo $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$. A continuación se da la definición formal de espacio vectorial.

Definición 1.1 (**Espacio vectorial**). *Un espacio vectorial es un conjunto V no vacío, cuyos elementos se llaman vectores, definido sobre un cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Se definen dos operaciones: suma de vectores y multiplicación por escalares. Estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas para todo $u, v, w \in V$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:*

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. *Existe un vector* $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$

5. *Para cada* $u \in V$*, existe* $-u \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$

6. $\alpha u \in V$

7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

9. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

10. $1 \cdot u = u$

Ejemplo 1.1. En $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, cualquier recta o plano que pase por el origen es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Por ejemplo:

$$\mathscr{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 4y = 0\}, \quad \mathscr{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}.$$

1.2. Subespacios vectoriales

Definición 1.2 (**Subespacio vectorial**)**.** *Un subconjunto no vacío* $W \subset V$*, donde* V *es un espacio vectorial, se llama* ***subespacio vectorial*** *si* W *es un espacio vectorial con las operaciones heredadas de* V*.*

Observación 1.1. Un subespacio distinto de $\emptyset$ y V se llama **subespacio propio**.

Teorema 1.1 (**Caracterización de subespacios**)**.** *Sea* V *un espacio vectorial y* $W \subset V$ *un subconjunto no vacío. Entonces* W *es un subespacio de* V *si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $0 \in W$ *(el vector cero pertenece a* W*).*

2. *Para todo* $u, v \in W$*, se tiene* $u + v \in W$ *(cerradura bajo suma).*

3. *Para todo* $u \in W$ *y todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*, se tiene* $\alpha u \in W$ *(cerradura bajo multiplicación escalar).*

Ejemplo 1.2. El conjunto

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$$

no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, ya que no contiene el vector cero.

Ejemplo 1.3. Sea W el conjunto de matrices simétricas $n \times n$. Entonces W es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$. Para $A, B \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B \in W, \quad (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A \in W.$$

1.3. Independencia lineal, base y dimensión

Definición 1.3 (**Dependencia lineal**). *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Los vectores $u_1, \ldots, u_n \in V$ se dicen* ***linealmente dependientes*** *si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, no todos cero, tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0.$$

Definición 1.4 (**Independencia lineal**). *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Los vectores $u_1, \ldots, u_n \in V$ se dicen* ***linealmente independientes*** *si*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Observación 1.2.

1. Si $0 \in \{u_1, \ldots, u_n\}$, el conjunto es linealmente dependiente.
2. Cualquier vector no nulo es linealmente independiente.

Definición 1.5 (**Base**). *Una base de V es un conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ que:*

1. *Genera V.*
2. *Es linealmente independiente.*

Ejemplo 1.4. Sea

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

el conjunto de matrices simétricas de 2×2. Todo $X \in W$ se puede escribir como

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de W.

Definición 1.6 (**Dimensión**). *Si V tiene una base finita, su* ***dimensión*** *es el número de vectores de cualquiera de sus bases, denotada* $\dim V$.

Ejemplo 1.5. Consideremos el espacio de matrices 2×2 con entradas reales, denotado por $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Una base de este espacio puede ser

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, la dimensión de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es

$$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4.$$

1.4. Espacios normados

Definición 1.7 (**Espacio normado**). *Un* ***espacio normado*** *es un par $(V, \|\cdot\|)$ donde V es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una función que cumple:*

1. $\|v\| \geq 0$ *y* $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Ejemplo 1.6 (**Normas en $\mathbb{R}^n$**).

1. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ (norma euclidiana)
2. $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ (norma 1)
3. $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ (norma sup)

Definición 1.8 (**Espacio métrico asociado**). *Todo espacio normado $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ puede considerarse un espacio métrico con*

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Capítulo 2

El espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

En este capítulo se presentan las definiciones y resultados fundamentales relacionados con las matrices cuadradas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (reales) o $\mathbb{C}$ (complejos). El objetivo es establecer la estructura de espacio vectorial del conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que será utilizada en el desarrollo posterior del trabajo.

2.1. Definición de matriz y matriz cuadrada

Definición 2.1. *Una* matriz *sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un arreglo rectangular formado por elementos de $\mathbb{K}$ organizados en m filas y n columnas:*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Se dice que A tiene orden $m \times n$.

Definición 2.2. *Una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se denomina* cuadrada *si el número de filas es igual al número de columnas, es decir, $m = n$. En tal caso, se dice que la matriz tiene* orden n. *El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n con entradas en $\mathbb{K}$ se denota por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 2 & -4 \\ 0 & 2-i & -3 & -1 \\ -4 & i & 3+i & -i \\ 2-2i & 0 & 6 & i \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 4, con entradas en $\mathbb{C}$.

A continuación se presentan algunos tipos importantes de matrices cuadradas, tanto reales como complejas.

Matriz nula

Se llama *matriz nula* (o *matriz cero*) a toda matriz cuyas entradas son todas iguales a cero. Si la matriz es de tamaño $m \times n$, se denota por $0_{m\times n}$.

Matriz diagonal

Se llama *matriz diagonal* a toda matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal principal son todos cero. Se denota comúnmente como

$$D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Por ejemplo, la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal.

Matriz identidad

Se llama *matriz identidad* de orden n, denotada I_n, a la matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1, y todas las demás entradas son cero.

Matriz triangular

Se denomina *matriz triangular* a toda matriz cuadrada que tiene ceros por encima o por debajo de la diagonal principal.

- **Triangular superior**: todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son cero.

- **Triangular inferior**: todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son cero.

Por ejemplo, la matriz

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

es triangular inferior.

Matriz simétrica

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *simétrica* si

$$A^t = A \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji} \text{ para todo } i, j.$$

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

es simétrica.

Matriz ortogonal

Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *ortogonal* si cumple

$$A^t A = A A^t = I_n.$$

En este caso, la inversa de A coincide con su traspuesta, es decir, $A^{-1} = A^t$.

Matriz invertible

Se denomina *matriz invertible* a toda matriz cuadrada A para la cual existe una matriz A^{-1} satisfaciendo

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n.$$

De manera equivalente, A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

Matriz transpuesta

La transpuesta de una matriz A se denota A^t y se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = (A)_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m.$$

Matriz transpuesta conjugada

Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la transpuesta conjugada A^* se obtiene como

$$A^* = \overline{A^t}.$$

Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 3-i & 4i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} i & 3-i \\ 2 & 4i \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} -i & 3+i \\ 2 & -4i \end{pmatrix}.$$

Matrices normales

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es *normal* si

$$AA^* = A^*A.$$

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 2+3i & 1 \end{pmatrix}$$

es normal pues

$$AA^* = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} = A^*A.$$

Matrices unitarias

Se dice que una matriz $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es *unitaria* si cumple

$$U^*U = UU^* = I_n.$$

Por ejemplo, la matriz

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es unitaria.

Matrices hermitianas

Se denomina *matriz hermitiana* a toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que satisface

$$A^* = A \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

Por ejemplo,

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{pmatrix}$$

es hermitiana.

Matrices anti-hermitianas

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es *anti-hermitiana* si

$$A^* = -A.$$

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

es una matriz anti-hermitiana.

Matrices no singulares

A es *no singular* si $\det(A) \neq 0$. Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3i & 4-i \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 5 - 3i \neq 0.$$

Matrices unimodulares

A es *unimodular* si $\det(A) = 1$.

2.2. El espacio vectorial $M_n(\mathbb{K})$

Se define $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ como el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se definen las operaciones:

- **Suma:** $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

- **Multiplicación por escalar:** $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Teorema 2.1. *Con las operaciones definidas anteriormente, el conjunto* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *satisface los axiomas de espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

Demostración. Se verifica que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es cerrado bajo suma y multiplicación por escalares, que la suma es asociativa y conmutativa, que existe la matriz nula y la inversa aditiva, y que se cumplen las propiedades distributivas y la compatibilidad con escalares. Por lo tanto, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. □

2.3. Base canónica y dimensión

Para cada par (i, j) con $1 \leq i, j \leq n$, se define la matriz E_{ij} como aquella cuya entrada (i, j) es igual a 1 y las demás entradas son cero.

Proposición 2.1. *El conjunto*

$$\mathcal{B} = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\},$$

donde E_{ij} *tiene un* 1 *en la posición* (i, j) *y ceros en las demás entradas, constituye una* base *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Demostración. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se puede expresar de manera única como combinación lineal de las matrices E_{ij}:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

Además, los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes, ya que ninguna combinación lineal no trivial de estas matrices puede dar la matriz cero. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ forma una base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

Corolario 2.2. *La dimensión del espacio vectorial* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *sobre* $\mathbb{C}$ *es*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2.$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{B} = \{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Por la proposición 2.1, $\mathcal{B}$ genera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

Como $\mathcal{B}$ cumple ambas condiciones, es una base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dado que los índices i, j recorren $1, \ldots, n$, el conjunto $\mathcal{B}$ contiene n^2 elementos, y por lo tanto

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2.$$

□

Observación 2.1. Si consideramos $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, cada entrada compleja $a_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$ aporta dos dimensiones reales. En consecuencia, una base real de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puede construirse como

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{E_{ij},\ iE_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\},$$

y se tiene que

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = 2n^2.$$

2.4. Subespacios de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Algunos ejemplos importantes de subespacios de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son:

- El conjunto de matrices simétricas.
- El conjunto de matrices diagonales.
- El conjunto de matrices triangulares superiores.
- El conjunto de matrices con traza cero.

Cada uno de estos conjuntos es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalares, por lo que constituyen subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Definición 2.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos el* conjunto conmutante *de A como*

$$C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : AB = BA\}.$$

Proposición 2.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces, la dimensión del centralizador de A, denotado* $\dim C(A)$*, satisface*

$$\dim C(A) \geq n.$$

Además, se tiene igualdad $\dim C(A) = n$ *si y solo si A es* no degenerada*, es decir, todos sus valores propios son distintos.*

Teorema 2.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz no degenerada. Entonces, una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conmuta con A si y solo si existe un polinomio $p(t)$ de grado a lo sumo $n-1$ tal que*

$$B = p(A).$$

Demostración. (i) Supongamos que $B = p(A)$, donde

$$p(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1}, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Multiplicando por A a la derecha:

$$p(A)A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{i+1} = a_0 A + a_1 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^n.$$

Multiplicando por A a la izquierda:

$$Ap(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A A^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{i+1} = a_0 A + a_1 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^n.$$

Por lo tanto, $AB = BA$.

(ii) Supongamos que $AB = BA$. Por el teorema de Cayley-Hamilton,

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

De esto se deduce que cualquier potencia A^k con $k \geq n$ se puede expresar como combinación lineal de $I, A, \ldots, A^{n-1}$. Como A es no degenerada, el conjunto $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$ es linealmente independiente y genera el álgebra de matrices polinomiales de A. Por lo tanto, cualquier matriz B que conmuta con A puede escribirse como

$$B = p(A)$$

para algún polinomio $p(t)$ de grado a lo sumo $n-1$. □

Ejemplo 2.1. *Sea $n = 3$ y consideremos la matriz diagonal*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

donde los valores propios son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$. Como todos son distintos, A es no degenerada.

Las matrices que conmutan con A deben ser diagonales:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Buscamos un polinomio $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 a_2 t^2$ tal que $p(A) = B$:

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 = \begin{pmatrix} \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2 \end{pmatrix} = B.$$

El sistema resultante

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = b_{11} \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 = b_{22} \\ \alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2 = b_{33} \end{cases}$$

tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}, \quad \det = 6 \neq 0,$$

por lo que existe solución única para cualquier $b_{11}, b_{22}, b_{33} \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.4 (Lancaster & Tismenetsky, 1985)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una matriz normal.*
2. *A es diagonalizable mediante una transformación unitaria; es decir, existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal Λ tales que*

$$A = U\Lambda U^*.$$

Demostración. (i) **Si A es normal, entonces A es unitariamente diagonalizable.**

Por el teorema de Schur, para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ existe una matriz unitaria U tal que

$$U^* A U = T,$$

donde T es triangular superior. Como A es normal, se cumple

$$AA^* = A^* A \implies TT^* = T^* T.$$

Pero una matriz triangular superior que es normal debe ser diagonal. Por lo tanto,

$$T = \Lambda \quad \text{diagonal}, \quad \text{y así } A = U\Lambda U^*.$$

(ii) **Si A es unitariamente diagonalizable, entonces A es normal.**

Supongamos que

$$A = U\Lambda U^*,$$

donde U es unitaria y Λ es diagonal. Entonces

$$AA^* = U\Lambda U^* U\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^* U^*, \quad A^*A = U\Lambda^* U^* U\Lambda U^* = U\Lambda^*\Lambda U^*.$$

Como Λ es diagonal, $\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$, por lo que $AA^* = A^*A$. Por lo tanto, A es normal. □

Ejemplo 2.2. *Sea la matriz hermitiana*

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

Primero, verificamos que $H^* = H$, confirmando que es hermitiana.

Calculamos los valores propios resolviendo

$$\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1-i \\ 1+i & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - (1-i)(1+i) = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Por lo tanto,

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1.$$

Los vectores propios correspondientes son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ortonormalizando, obtenemos

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Construimos la matriz unitaria

$$U = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2], \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, se verifica que

$$U^*U = I_2 \quad y \quad U\Lambda U^* = H,$$

confirmando que H es diagonalizable mediante una matriz unitaria.

Capítulo 3

Estructura topológica del espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

En este capítulo se analiza la estructura topológica del espacio de matrices complejas $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, identificado con el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{2n^2}$. Se estudian normas matriciales, en particular la norma de Frobenius, y se establecen propiedades básicas de continuidad y compacidad. Asimismo, se examinan conjuntos matriciales relevantes como $\mathcal{GL}_n$, $\mathcal{SL}_n$, $\mathcal{O}_n$ y $\mathcal{U}_n$, sentando las bases topológicas necesarias para los resultados posteriores.

3.1. Espacio matricial y normas

Proposición 3.1 (Producto interno canónico en el espacio de matrices)**.** *Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. La función*

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A^*B), \quad A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}),$$

define un producto interno en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Demostración. Verificamos que la aplicación

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A^*B)$$

define un producto interno en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Linealidad en la segunda variable: Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\langle A, B_1 + \alpha B_2\rangle = \operatorname{tr}(A^*(B_1 + \alpha B_2)) = \operatorname{tr}(A^*B_1) + \alpha \operatorname{tr}(A^*B_2) = \langle A, B_1\rangle + \alpha\langle A, B_2\rangle.$$

Conjugada simetría:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B) = \overline{\operatorname{tr}(B^*A)} = \overline{\langle B, A\rangle}.$$

Positividad definida:

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \geq 0,$$

y se tiene $\langle A, A\rangle = 0$ si y solo si $A = 0$.

Por lo tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. □

Definición 3.1 (Norma de Frobenius, Trefethen & Bau, 2022)**.** *Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la norma de Frobenius se define como:*

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)} = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^*)}.$$

Esta norma está inducida por el producto interno canónico $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^*A)$.

Teorema 3.1. *La norma de Frobenius en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una norma matricial. Es decir, satisface las propiedades de norma:*

1. ***Positividad:*** *$\|A\|_F \geq 0$ y $\|A\|_F = 0 \iff A = 0$.*
2. ***Homogeneidad:*** *$\|\alpha A\|_F = |\alpha| \, \|A\|_F$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.*
3. ***Desigualdad triangular:*** *$\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$ para toda $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Positividad:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geq 0,$$

y $\|A\|_F = 0$ si y solo si $a_{ij} = 0$ para todo i, j, es decir, $A = 0$.

Homogeneidad: Para $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\|\alpha A\|_F^2 = \sum_{i,j} |\alpha a_{ij}|^2 = |\alpha|^2 \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = |\alpha|^2 \|A\|_F^2,$$

de donde $\|\alpha A\|_F = |\alpha| \, \|A\|_F$.

Desigualdad triangular: Como la norma de Frobenius está inducida por el producto interno canónico, se sigue de la desigualdad de Cauchy–Schwarz que

$$\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F.$$

Por lo tanto, $\|\cdot\|_F$ es una norma en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. □

Definición 3.2. *Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Se dice que $\|\cdot\|$ es* unitariamente invariante *si, para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, se verifica*

$$\|UAV\| = \|A\| \quad \forall\, U \in \mathbb{C}^{m\times m},\, V \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ unitarias.}$$

Es decir, la norma no cambia al multiplicar A por matrices unitarias por la izquierda o por la derecha.

Proposición 3.2 (Propiedades de la norma de Frobenius)**.** *La norma de Frobenius $\|\cdot\|_F$ satisface:*

1. *Es unitariamente invariante: $\|A\|_F = \|UA\|_F = \|AV\|_F = \|UAV\|_F$ para matrices unitarias U, V.*

2. *Relación con el valor propio máximo:*

$$\sqrt{\lambda_{\text{máx}}(A^*A)} \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\sqrt{\lambda_{\text{máx}}(A^*A)}.$$

Demostración. (1) Invariancia unitaria. Sea U, V matrices unitarias. Entonces,

$$\|UAV\|_F^2 = \operatorname{tr}((UAV)^*(UAV)) = \operatorname{tr}(V^*A^*U^*UAV) = \operatorname{tr}(V^*A^*AV).$$

Usando la invariancia cíclica de la traza,

$$\operatorname{tr}(V^*A^*AV) = \operatorname{tr}(A^*A),$$

por lo que $\|UAV\|_F = \|A\|_F$.

(2) Relación con el valor propio máximo. Como A^*A es hermítica y semidefinida positiva, existe una base ortonormal de autovectores con valores propios no negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Entonces,

$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

En particular,

$$\lambda_{\text{máx}}(A^*A) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq n\,\lambda_{\text{máx}}(A^*A),$$

lo que implica

$$\sqrt{\lambda_{\text{máx}}(A^*A)} \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\sqrt{\lambda_{\text{máx}}(A^*A)}.$$

□

Definición 3.3 (Norma inducida o del supremo)**.** *Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se define la norma inducida como*

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Proposición 3.3. *Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se cumplen:*

$$\|A\| \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|,$$

lo que muestra que las normas de Frobenius e inducida son equivalentes.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Por definición de la norma inducida,

$$\|A\|^2 = \lambda_{\text{máx}}(A^*A).$$

Usando el resultado anterior,

$$\|A\|^2 \leq \|A\|_F^2 \leq n\,\|A\|^2.$$

Tomando raíces cuadradas se obtiene

$$\|A\| \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|,$$

lo que demuestra que ambas normas son equivalentes. □

3.2. Continuidad del determinante

Proposición 3.4. *El espacio vectorial complejo $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{2n^2}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con $a_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$, donde $x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n^2}, \qquad \phi(A) = (x_{11}, y_{11}, x_{12}, y_{12}, \ldots, x_{nn}, y_{nn}).$$

Linealidad: Para mostrar que ϕ es lineal, debemos probar dos propiedades:

1. Suma de matrices: Para $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con $B = (b_{ij}) = (\tilde{x}_{ij} + i\tilde{y}_{ij})$,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = ((x_{ij} + \tilde{x}_{ij}) + i(y_{ij} + \tilde{y}_{ij})).$$

Aplicando ϕ, obtenemos

$$\phi(A + B) = (x_{11} + \tilde{x}_{11},\, y_{11} + \tilde{y}_{11},\, \ldots,\, x_{nn} + \tilde{x}_{nn},\, y_{nn} + \tilde{y}_{nn}).$$

Por otro lado,

$$\phi(A) + \phi(B) = (x_{11}, y_{11}, \ldots, x_{nn}, y_{nn}) + (\tilde{x}_{11}, \tilde{y}_{11}, \ldots, \tilde{x}_{nn}, \tilde{y}_{nn}),$$

lo que da exactamente el mismo vector componente por componente. Por lo tanto, $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$.

2. Multiplicación escalar: Para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) = (\lambda x_{ij} + i\lambda y_{ij}).$$

Entonces

$$\phi(\lambda A) = (\lambda x_{11}, \lambda y_{11}, \ldots, \lambda x_{nn}, \lambda y_{nn}) = \lambda(x_{11}, y_{11}, \ldots, x_{nn}, y_{nn}) = \lambda\phi(A).$$

Como se cumplen ambas propiedades, ϕ es lineal.

Inyectividad: Consideremos dos matrices arbitrarias $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$A = (a_{ij}) = (x_{ij} + iy_{ij}), \qquad B = (b_{ij}) = (\tilde{x}_{ij} + i\tilde{y}_{ij}).$$

Supongamos que $\phi(A) = \phi(B)$, es decir,

$$(x_{11}, y_{11}, \ldots, x_{nn}, y_{nn}) = (\tilde{x}_{11}, \tilde{y}_{11}, \ldots, \tilde{x}_{nn}, \tilde{y}_{nn}).$$

Como los vectores son iguales componente a componente, se tiene que $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$ y $y_{ij} = \tilde{y}_{ij}$ para todo i, j, y por lo tanto $A = B$. Esto prueba la inyectividad de ϕ.

Sobreyectividad: Dado $v = (u_{11}, v_{11}, \ldots, u_{nn}, v_{nn}) \in \mathbb{R}^{2n^2}$, definimos

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad a_{ij} = u_{ij} + iv_{ij}.$$

Entonces $\phi(A) = v$.

Como ϕ es lineal, inyectiva y sobreyectiva, se concluye que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{2n^2}$ como espacio vectorial real. □

Definición 3.4 (Dieser & Lasser, 2021)**.** *Sea el espacio* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *con* $n \geq 1$*. Entonces se define*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}, \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

La función determinante es única en $\mathbb{K}^{n\times n}$*.*

Ejemplo 3.1. *Calculemos el determinante de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 3$*, el grupo de permutaciones* S_3 *tiene 6 elementos:*

$$\sigma_1 = (1,2,3), \quad \sigma_2 = (1,3,2), \quad \sigma_3 = (2,1,3), \quad \sigma_4 = (2,3,1), \quad \sigma_5 = (3,1,2), \quad \sigma_6 = (3,2,1),$$

con signos correspondientes

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = +1,\ \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1,\ \ldots,\ \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1.$$

Por definición,

$$\begin{aligned} \det A &= (+1)\, a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)\, a_{11}a_{32}a_{23} + (-1)\, a_{21}a_{12}a_{33} + (+1)\, a_{21}a_{32}a_{13} \\ &\quad + (+1)\, a_{31}a_{12}a_{23} + (-1)\, a_{31}a_{22}a_{13} \\ &= 0 - 24 + 0 + 0 + 40 - 15 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Lema 3.2. *Sea* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Si* $\|B - A\|_F \leq 1$ *entonces*

$$|\det B - \det A| \leq M \|B - A\|_F,$$

donde

$$M = n! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \|A\|_F^m$$

y $\binom{n}{m}$ *es la combinación de* n *en* m*.*

Demostración. Sea $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definimos

$$H := B - A,$$

de modo que $B = A + H$.

Por la definición del determinante,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n}, \quad \det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{\sigma(1),1} \cdots B_{\sigma(n),n},$$

donde S_n es el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$.

Entonces, restando,

$$\det B - \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \Big(B_{\sigma(1),1} \cdots B_{\sigma(n),n} - A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n} \Big).$$

Aplicando la desigualdad triangular, obtenemos

$$|\det B - \det A| \leq \sum_{\sigma \in S_n} \Big| B_{\sigma(1),1} \cdots B_{\sigma(n),n} - A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n} \Big|.$$

Ahora reemplazamos $B = A + H$:

$$\Big| B_{\sigma(1),1} \cdots B_{\sigma(n),n} - A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n} \Big| = \Big| (A_{\sigma(1),1} + H_{\sigma(1),1}) \cdots (A_{\sigma(n),n} + H_{\sigma(n),n}) - A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n} \Big|.$$

Definimos para cada $m = 0, \ldots, n-1$ el conjunto

$$I_m := \{(i_1, \ldots, i_n) \mid i_j \in \{0, 1\},\ i_1 + \cdots + i_n = m\}.$$

Cada término de la expansión del producto

$$\prod_{i=1}^{n} (A_{\sigma(i),i} + H_{\sigma(i),i}) - \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i),i}$$

puede escribirse como

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i \in I_m} (H_{\sigma(1),1}^{1-i_1} A_{\sigma(1),1}^{i_1}) \cdots (H_{\sigma(n),n}^{1-i_n} A_{\sigma(n),n}^{i_n}).$$

Cada $i \in I_m$ indica qué factores provienen de A y cuáles de H. Como restamos $A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n}$, el término $m = n$ desaparece, y los restantes corresponden a $m = 0, \ldots, n-1$. - Por ejemplo, $i = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ significa que tomamos $A_{\sigma(1),1}$ y los demás factores de H.

Aplicando la desigualdad triangular de nuevo:

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i \in I_m} (H_{\sigma(1),1}^{1-i_1} A_{\sigma(1),1}^{i_1}) \cdots (H_{\sigma(n),n}^{1-i_n} A_{\sigma(n),n}^{i_n}) \right| \leq \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i \in I_m} \left| H_{\sigma(1),1}^{1-i_1} \cdots H_{\sigma(n),n}^{1-i_n} \right| \left| A_{\sigma(1),1}^{i_1} \cdots A_{\sigma(n),n}^{i_n} \right|.$$

Usando la norma de Frobenius, $|H_{ij}| \leq \|H\|_F$ y $|A_{ij}| \leq \|A\|_F$, obtenemos

$$\left|H^{1-i_1}_{\sigma(1),1} \cdots H^{1-i_n}_{\sigma(n),n}\right| \left|A^{i_1}_{\sigma(1),1} \cdots A^{i_n}_{\sigma(n),n}\right| \leq \|H\|_F^{n-m} \|A\|_F^m.$$

Como $|I_m| = \binom{n}{m}$ y $|S_n| = n!$, se sigue

$$|\det B - \det A| \leq \sum_{m=0}^{n-1} n! \binom{n}{m} \|H\|_F^{n-m} \|A\|_F^m.$$

Factorizamos $\|H\|_F$:

$$|\det B - \det A| \leq \|H\|_F \sum_{m=0}^{n-1} n! \binom{n}{m} \|H\|_F^{n-m-1} \|A\|_F^m.$$

Finalmente, como $\|H\|_F \leq 1$, tenemos $\|H\|_F^{n-m-1} \leq 1$ y por lo tanto

$$|\det B - \det A| \leq \underbrace{n! \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \|A\|_F^m}_{M} \|B - A\|_F.$$

Esto completa la demostración. □

Proposición 3.5. *El determinante* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *es una función continua.*

Demostración. Sea $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. y $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|B - A\|_F < \delta \implies |\det(B) - \det(A)| < \varepsilon.$$

Como el determinante es un polinomio de grado n en n^2 variables, el lema anterior garantiza la existencia de una constante $M > 0$ tal que

$$|\det(B) - \det(A)| \leq M \|B - A\|_F, \quad \text{si } \|B - A\|_F \leq 1.$$

Tomemos entonces

$$\delta := \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{M}\right\}.$$

Si $\|B - A\|_F < \delta$, se cumple automáticamente

$$|\det(B) - \det(A)| \leq M \|B - A\|_F < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, Por lo tanto, $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ es continua. □

3.3. Conjuntos abiertos, cerrados y compactos

Proposición 3.6. *El conjunto*

$$\mathcal{GL}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

es un subconjunto ***abierto****, y*

$$\mathcal{SL}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

es un subconjunto ***cerrado****.*

Demostración. Por la proposición 3.5, la función determinante

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es **continua**.

1. Para $\mathcal{GL}_n$: Recordemos que

   $$\mathcal{GL}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) - \det^{-1}(\{0\}).$$

   Como det es continua y $\{0\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado, su preimagen $\det^{-1}(\{0\})$ es cerrada. Por lo tanto, el complemento

   $$\mathcal{GL}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) - \det^{-1}(\{0\})$$

   es **abierto** en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Para $\mathcal{SL}_n$: Por definición,

   $$\mathcal{SL}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\} = \det^{-1}(\{1\}) \subset \mathcal{GL}_n.$$

   Como $\{1\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado y det es continua, la preimagen $\det^{-1}(\{1\})$ es **cerrada** en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

De esta manera, hemos demostrado que $\mathcal{GL}_n$ es abierto y $\mathcal{SL}_n$ es cerrado.

□

Corolario 3.3. *$\mathcal{GL}_n$ y $\mathcal{SL}_n$ no son compactos si $n \geq 2$.*

Demostración. Primero demostraremos que $\mathcal{GL}_n$ no es compacto para $n \geq 2$.

Bastará probar que $\mathcal{GL}_n$ no es acotado. Recordemos que

$$\mathcal{GL}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}.$$

Para una matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, consideremos la sucesión de matrices diagonales

$$A_k = \operatorname{diag}(k, 1, 1, \ldots, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Claramente, $A_k \in \mathcal{GL}_n$ ya que

$$\det(A_k) = k \neq 0.$$

Usando la norma de Frobenius,

$$\|A_k\|_F = \sqrt{k^2 + 1^2 + \cdots + 1^2} = \sqrt{k^2 + (n-1)} \geq k.$$

Luego, al hacer $k \to \infty$ se tiene $\|A_k\|_F \to \infty$, por lo que $\mathcal{GL}_n$ contiene una sucesión no acotada. Por lo tanto, $\mathcal{GL}_n$ no es compacto.

De manera análoga, probemos que $\mathcal{SL}_n$ no es compacto.

Consideremos la sucesión

$$B_k = \operatorname{diag}\Big(k, \frac{1}{k}, 1, \ldots, 1\Big), \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Se verifica que $B_k \in \mathcal{SL}_n$, ya que

$$\det(B_k) = k \cdot \frac{1}{k} \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1.$$

Aplicando la norma de Frobenius:

$$\|B_k\|_F = \sqrt{k^2 + \frac{1}{k^2} + 1 + \cdots + 1} \geq k.$$

Cuando $k \to \infty$, $\|B_k\|_F \to \infty$, por lo que $\mathcal{SL}_n$ contiene una sucesión no acotada y, por tanto, no es compacto. □

Corolario 3.4. *El conjunto de matrices ortogonales*

$$\mathcal{O} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^t A = A A^t = I\}$$

es ***compacto****.*

Demostración. Sea

$$A = [A_1\, A_2\, \cdots\, A_n] \in \mathcal{O},$$

donde cada A_j es una columna de A. Como A es ortogonal, sus columnas forman un conjunto ortonormal:

$$\|A_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Usando la norma de Frobenius, obtenemos

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} \|A_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} 1 = n,$$

por lo que

$$\|A\|_F = \sqrt{n}.$$

De esta manera, todo $A \in \mathcal{O}$ pertenece a la bola cerrada de radio $\sqrt{n}$ centrada en 0, es decir,

$$\mathcal{O} \subset \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \|A\|_F \leq \sqrt{n}\}.$$

Esto muestra que $\mathcal{O}$ es **acotado**.

Para demostrar que $\mathcal{O}$ es **cerrado**, consideremos $A \in \overline{\mathcal{O}}$. Entonces existe una sucesión $(A_k) \subset \mathcal{O}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A.$$

Como $A_k \in \mathcal{O}$, se cumple

$$A_k^t A_k = I \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tomando límites y usando la continuidad de la transposición y la multiplicación de matrices, obtenemos

$$A^t A = \lim_{k\to\infty} (A_k^t A_k) = I.$$

De manera similar, $AA^t = I$, por lo que $A \in \mathcal{O}$ y esto demuestra que $\mathcal{O}$ es cerrado.

Como $\mathcal{O}$ es acotado y cerrado en el espacio normado finito $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, concluimos que $\mathcal{O}$ es **compacto**. □

Corolario 3.5. *El conjunto de matrices unitarias*

$$\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : U^*U = UU^* = I\}$$

es ***compacto****.*

Demostración. Sea

$$U = [U_1\, U_2\, \cdots\, U_n] \in \mathcal{U}_n,$$

donde U_j denota la j-ésima columna de U. Como U es unitaria, sus columnas forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{C}^n$; en particular,

$$\|U_j\|_2^2 = U_j^* U_j = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Usando la norma de Frobenius, se tiene

$$\|U\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |u_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|U_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

Por lo tanto,

$$\|U\|_F = \sqrt{n}.$$

Esto muestra que

$$\mathcal{U}_n \subset \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \|U\|_F \leq \sqrt{n}\},$$

y, en consecuencia, $\mathcal{U}_n$ es un conjunto acotado.

Para ver que $\mathcal{U}_n$ es cerrado, sea $U \in \overline{\mathcal{U}_n}$. Entonces existe una sucesión $(U_k) \subset \mathcal{U}_n$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} U_k = U$$

con respecto a la norma de Frobenius.

Como U_k es unitaria para todo k, se cumple

$$U_k^* U_k = I \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La conjugación transpuesta y la multiplicación de matrices son aplicaciones continuas en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, por lo que al tomar límites se obtiene

$$U^* U = \lim_{k\to\infty} U_k^* U_k = I.$$

De manera análoga, $UU^* = I$, y por lo tanto $U \in \mathcal{U}_n$. Esto demuestra que $\mathcal{U}_n$ es cerrado.

Como $\mathcal{U}_n$ es cerrado y acotado en el espacio normado de dimensión finita $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$, concluimos que $\mathcal{U}_n$ es **compacto**. □

Capítulo 4

Estructura algebraica del espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Este capítulo estudia las propiedades algebraicas fundamentales del espacio de matrices complejas cuadradas $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, haciendo especial énfasis en diagonalización, valores propios y la densidad de matrices invertibles, usando la norma de Frobenius como referencia.

4.1. Diagonalización y valores propios

Proposición 4.1 (Perturbación de valores propios)**.** *Sean $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Entonces existe una colección de escalares $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$ tal que $|d_i| < \alpha$ y $t_1 + d_1, \ldots, t_n + d_n$ son todos distintos.*

Demostración. Para $n = 1$: basta tomar $d_1 = 0$. Entonces $|d_1| = 0 < \alpha$ y $t_1 + d_1$ es distinto de los demás de manera trivial.

Para $n = 2$, considerando la bola de radio α centrada en 0, $B_\alpha(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \alpha\}$, se tiene

$$B_\alpha(0) - \{t_1 - t_2\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existe $d_2 \in B_\alpha(0) - \{t_1 - t_2\}$ tal que $|d_2| < \alpha$ y $t_1 + d_1 \neq t_2 + d_2$, con $d_1 = 0$.

Paso inductivo: Supongamos que para $n = k$ existe un conjunto de desplazamientos

$$d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{C}, \quad |d_i| < \alpha$$

tal que los $t_i + d_i$ son todos distintos. Para $n = k + 1$, consideramos la bola $B_\alpha(0)$ y excluimos todos los números

$$(t_{k+1} - (t_i + d_i)) \quad \text{para } i = 1, \ldots, k.$$

Como se eliminan solo k puntos de un conjunto infinito, sigue habiendo infinitos elementos disponibles en la bola. Elegimos

$$d_{k+1} \in B_\alpha(0) - \{t_{k+1} - (t_1 + d_1), \ldots, t_{k+1} - (t_k + d_k)\}.$$

Así, todos los $t_i + d_i$, $i = 1, \ldots, k+1$, son distintos y $|d_{k+1}| < \alpha$. Por inducción, se cumple para todo $n \geq 1$. □

Ejemplo 4.1. *Sean*

$$t_1 = 3 + 2i, \quad t_2 = 3 + 2i, \quad t_3 = 3 + 2i, \quad t_4 = 1 - i.$$

Tomamos $\varepsilon = 0.1$ *y definimos los desplazamientos*

$$d_1 = 0.1 + 0.1i, \quad d_2 = 0.2 + 0.2i, \quad d_3 = 0 + 0.3i, \quad d_4 = 0.4 + 0.4i.$$

Considerando $\alpha > \max\{|d_k|\}$, *se cumple* $|d_k| < \alpha$ *para todo* k. *Los valores perturbados son*

$$t_1 + d_1 = 3.1 + 2.1i,$$
$$t_2 + d_2 = 3.2 + 2.2i,$$
$$t_3 + d_3 = 3 + 2.3i,$$
$$t_4 + d_4 = 1.4 - 0.6i,$$

los cuales son todos distintos, como afirmaba la proposición.

Teorema 4.1 (Triangularización de Schur)**.** *Toda matriz compleja cuadrada A es unitariamente similar a una matriz triangular superior, es decir, existe una matriz unitaria U tal que $T = U^*AU$, donde T es triangular superior.*

Demostración. Este teorema es clásico y puede consultarse en (Horn & Johnson, 2025). □

Teorema 4.2 (Diagonalización aproximada)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe una matriz $A_\varepsilon \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que tiene n valores propios distintos (es diagonalizable) y además*

$$\|A - A_\varepsilon\|_F < \varepsilon.$$

Demostración. Por el teorema de Schur, existe una matriz unitaria U y una matriz triangular superior T con $U^*AU = T$, cuyos elementos diagonales $t_1, \ldots, t_n$ son los valores propios de A.

Aplicando la proposición 4.1 con $\alpha = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{n}}$, existe $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$ con $|d_i| \leq \alpha$ y $t_i + d_i$ todos distintos. Definimos $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ y $A_\varepsilon := U(T + D)U^*$.

Como $T + D$ es diagonalizable y la norma de Frobenius es invariante bajo transformaciones unitarias:

$$\|A - A_\varepsilon\|_F = \|UDU^*\|_F = \|D\|_F \leq \sqrt{\sum |d_i|^2} \leq \varepsilon.$$

Esto prueba el teorema. □

Ejemplo 4.2. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 3 \\ 0 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix}, \quad D_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon/4, \varepsilon/2, 3\varepsilon/4),$$

entonces $A_\varepsilon = A + D_\varepsilon$ es diagonalizable y

$$\|A - A_\varepsilon\|_F = \varepsilon\sqrt{7/8} < \varepsilon.$$

4.2. Densidad de matrices invertibles y de matrices normales no degeneradas

En esta sección se estudia la densidad de dos subconjuntos importantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: las matrices invertibles, $\mathcal{GL}_n$, y las matrices normales cuya parte hermitiana es no degenerada, $\mathcal{N}_n$. Se demuestra que ambos conjuntos son densos en los respectivos espacios, usando perturbaciones de valores propios y la norma de Frobenius como referencia.

4.2.1. Densidad de matrices invertibles

Corolario 4.3. *El conjunto*

$$\mathcal{GL}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$$

es denso en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema anterior, existe A_ε diagonalizable con $\|A - A_\varepsilon\|_F \leq \varepsilon/2$. Perturbando ligeramente los valores propios de A_ε para que sean no nulos, obtenemos $\tilde{A}_\varepsilon \in \mathcal{GL}_n$ con

$$\|A - \tilde{A}_\varepsilon\|_F \leq \|A - A_\varepsilon\|_F + \|A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon\|_F < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\mathcal{GL}_n$ es denso. □

4.2.2. Matrices normales no degeneradas

Sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ el conjunto de matrices normales de orden n, y sea

$$\mathcal{N}_n = \{Z \in \mathcal{N} : \text{la parte hermitiana de } Z \text{ es no degenerada}\}.$$

Teorema 4.4. *El conjunto $\mathcal{N}_n$ de matrices normales cuya parte hermitiana es no degenerada es un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea $Z \in \mathcal{N}$ y escribamos

$$Z = H + iK, \qquad H = \frac{Z + Z^*}{2}, \qquad K = \frac{Z - Z^*}{2i},$$

donde H y K son matrices hermitianas que conmutan entre sí. Denotemos por $\lambda_1(H) \geq \cdots \geq \lambda_n(H)$ los valores propios reales de H, ordenados de manera decreciente, y definamos

$$\gamma(Z) = \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j(H) - \lambda_{j+1}(H)).$$

Como los valores propios de matrices hermitianas dependen continuamente de la matriz y la expresión anterior es simétrica en ellos, la función γ es continua. Además, $\gamma(Z) = 0$ si y solo si H posee al menos dos valores propios iguales, es decir, si y solo si H es degenerada. Por tanto,

$$\mathcal{N}_n = \{Z \in \mathcal{N} : \gamma(Z) \neq 0\}.$$

Al ser γ continua, el conjunto $\gamma^{-1}(0)$ es cerrado en $\mathcal{N}$, y en consecuencia $\mathcal{N}_n$ es abierto.

Ahora probemos que $\mathcal{N}_n$ es denso en $\mathcal{N}$. Sea $Z \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_n$, de modo que su parte hermitiana H tiene algún valor propio con multiplicidad mayor que uno. Por el teorema espectral para matrices hermitianas (Horn & Johnson, 2012), toda matriz hermitiana $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable mediante una matriz unitaria; es decir, existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal real $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tal que

$$H = U\Lambda U^*.$$

Como Z es normal, H y K conmutan y, por tanto, son simultáneamente diagonalizables. Así, existe una matriz diagonal real M tal que $K = UMU^*$. Perturbando ligeramente los valores propios repetidos de Λ obtenemos una matriz diagonal Λ_ε con todos sus valores propios distintos, de manera que $\Lambda_\varepsilon \to \Lambda$ cuando $\varepsilon \to 0$. Definimos

$$H_\varepsilon = U\Lambda_\varepsilon U^*, \qquad Z_\varepsilon = H_\varepsilon + iK.$$

Entonces H_ε es hermitiana no degenerada y, dado que Λ_ε es diagonal en la misma base espectral, conmuta con M, por lo que H_ε conmuta con K. En consecuencia, Z_ε es normal y pertenece a $\mathcal{N}_n$.

Finalmente,

$$\|Z_\varepsilon - Z\| = \|H_\varepsilon - H\| = \|U(\Lambda_\varepsilon - \Lambda)U^*\| = \|\Lambda_\varepsilon - \Lambda\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Por lo tanto, todo elemento de $\mathcal{N}$ es límite de una sucesión en $\mathcal{N}_n$, lo que demuestra que $\mathcal{N}_n$ es denso en $\mathcal{N}$. □

Ejemplo 4.3. Consideremos la matriz normal $Z \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_2$ cuya parte hermitiana es degenerada:

$$Z = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2+3i \end{pmatrix}.$$

Perturbando ligeramente la parte hermitiana, obtenemos una matriz $Z_\varepsilon \in \mathcal{N}_2$:

$$Z_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2+\varepsilon+3i \end{pmatrix}, \quad Z_\varepsilon \to Z \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$

Este ejemplo ilustra cómo una matriz en $\mathcal{N} - \mathcal{N}_2$ puede aproximarse por matrices en $\mathcal{N}_2$, demostrando la densidad de $\mathcal{N}_2$.

Conclusión

En el presente trabajo se analizó la estructura geométrica y topológica de distintos subconjuntos del espacio de matrices complejas, con especial énfasis en las matrices normales y hermitianas. Se destacó la continuidad del determinante como una propiedad clave y se estableció la importancia de las perturbaciones espectrales pequeñas como herramienta fundamental para aproximar cualquier matriz por una diagonalizable con valores propios distintos.

Asimismo, se demostró la densidad del conjunto de matrices invertibles en $M_n(\mathbb{C})$ y se probó que el conjunto de matrices normales no degeneradas es un subconjunto abierto y denso dentro del conjunto de matrices normales en la topología inducida por $\mathbb{R}^{2n^2}$. Todo ello se estudió considerando la identificación natural $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$, lo que permitió analizar las propiedades algebraicas y topológicas del espacio vectorial real a través de la estructura matricial.

El desarrollo de demostraciones detalladas y ejemplos numéricos permitió clarificar conceptos abstractos relacionados con la estructura algebraica y topológica de los conjuntos estudiados, fortaleciendo la comprensión del marco teórico. En conjunto, los resultados obtenidos evidencian la estrecha relación entre el análisis de las estructuras topológicas y algebraicas, proporcionando una base sólida para futuras investigaciones en teoría espectral, análisis matricial y densidad de matrices.

Bibliografía

Aitken, A. C. (2017). *Determinants and matrices*. Read Books Ltd.

Baker, A. (2003). *Matrix groups: An introduction to Lie group theory*. Springer Science & Business Media.

Banica, T. (2025). *Advanced linear algebra*. arXiv:2506.18666.

Chavez, V. C. (2007). *Algebra lineal*. Editorial Moshera.

Gupta, V. P., & Mishra, M. M. (2018). On the topology of certain matrix groups. *Mathematics Student*, 87, 61–71.

Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2012). *Matrix analysis*. Cambridge University Press.

Gómez Plata, A. R., Cala Vitery, F. E., & Ramos Caro, J. F. (2007). Matrices normales y la topología de $\mathbb{R}^{2n^2}$. Universidad Militar Nueva Granada / Universidad Industrial de Santander.

Plata, A. R. G. (2008). Uso de la descomposición Toeplitz en la estratificación de matrices. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 17(1), 5–12.