Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Físicas
Escuela Profesional de Física

Equivalencia de los marcos de Einstein y Jordan en un contexto cosmológico

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Para optar el Grado Académico de Bachiller en Física

AUTOR

Luis Alberto LEÓN ANDONAYRE

ASESOR

Dr. Teófilo VARGAS AUCCALLA

Lima, Perú

2022



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

León, L. (2022). *Equivalencia de los marcos de Einstein y Jordan en un contexto cosmológico*. [Trabajo de investigación de bachiller, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Luis Alberto León Andonayre
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	70884399
URL de ORCID	
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Teófilo Vargas Auccalla
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06532544
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9833-3887
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Fulgencio Villegas Silva
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09202973
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	José Domingo Arbañil Vela
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41345341
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Carlos Javier Solano Salinas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445870

Datos de investigación	
Línea de investigación	A.2.1.2. Cosmología y Gravitación
Grupo de investigación	Grupo de Física Teórica - GFT
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación y Posgrado. Programa de Promoción de Tesis de Pregrado. B20130590a-PTPGRADO.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Calle: Av. República de Venezuela 34 Latitud: -12.059658618698705 Longitud: -77.08173807658837
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020 - 2021
URL de disciplinas OCDE	Física de partículas, Campos de la Física https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.03

Firmado digitalmente por SOLANO SALINAS Carlos Javier FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 24.08.2022 16:07:39 -05:00

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE BACHILLER EN FÍSICA

Siendo las 19:00 horas del viernes 12 de Agosto del 2022, en la Sala de Sesión Virtual de la Facultad de Ciencias Físicas, bajo la Presidencia del Dr. Fulgencio Villegas Silva (Presidente), Dr. José Domingo Arbañil Vela (Miembro), Dr. Teófilo Vargas Auccalla (Asesor) y, el Dr. Carlos Javier Solano Salinas (Suplente), se dio inicio a la Sesión virtual de Sustentación para el grado académico de bachiller en Física, mediante la Modalidad M1, del egresado:

LUIS ALBERTO LEÓN ANDONAYRE

Dando lectura al Resumen del Expediente, el Presidente del Jurado, invitó al egresado Luis Alberto León Andonayre a realizar una exposición del Trabajo de investigación titulado: "Equivalencia de los marcos de Einstein y Jordan en un contexto cosmológico".

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente, invitó al egresado y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado el Dr. Fulgencio Villegas Silva, invitó al candidato y al público a pasar a la Sala de Sesión, para dar lectura al resultado de la deliberación. Ha obtenido la calificación de:

Mención honrosa	18	dieciocho
.....	.....	.....
(MENCIÓN)	(NÚMERO)	(LETRAS)

Finalmente, el Presidente del Jurado, propone al consejo de la Facultad que se le declare Bachiller en Física al egresado Luis Alberto León Andonayre. Siendo las 20:28 Horas, se levanta la Sesión.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



Dr. Fulgencio Villegas Silva
PRESIDENTE



Dr. José Domingo Arbañil Vela
MIEMBRO



Dr. Teófilo Vargas Auccalla
ASESOR



Dr. Carlos Javier Solano Salinas
SUPLENTE

UNMSM
Firmado digitalmente por LOZANO BARTRA Whualkuer Enrique FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 25.08.2022 16:51:46 -05:00

Dr. Whualkuer Lozano Bartra
VICEDECANO ACADÉMICO - FCF

Datos de la plataforma virtual institucional del acto de sustentación:

Enlace:
https://us06web.zoom.us/j/88490458516?pwd=bGxGc3FON3BxVGY4ZVIneXFuaWdLUT09
Unirse a la reunión Zoom

ID de reunión: 884 9045 8516
Código de acceso: 271257

Grabación archivada en: https://www.facebook.com/FCFUNMSM/videos/622666572518507

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, Decana de América)

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
EP FÍSICA

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Teófilo Vargas Auccalla en mi condición de asesor acreditado con el Acuerdo Comité de Gestión N° 018–EPF–FCF–20 del trabajo de investigación, cuyo título es Equivalencia de los marcos de Einstein y Jordan en un contexto cosmológico, presentado por el estudiante Luis Alberto León Andonayre para optar el grado de Bachiller en Física.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 10 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado correspondiente.

Lima, 25 de junio de 2024

Dr. Teófilo Vargas Auccalla
DNI: 06532544

El mundo es lo que es y no lo que un hijo
de puta llamado Einstein dice que es.
«*Artefactos*», de Nicanor Parra
(Chile, 1914 – 2018)

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más sincera gratitud a mi asesor y coordinador del Grupo de Física Teórica, el Dr. Teófilo Vargas Auccalla, por su maravillosa guía, por el apoyo y sus consejos. De igual manera me siento muy agradecido con los demás miembros del GFT, especialmente: Andrés, Fernando, Cristian, Saneli, Martín, Jahaira, Jessé, Carlo y Neil, por su guía y soporte.

También, pero no menos importante, mi más sincero agradecimiento a mi familia por su tremendo apoyo y la esperanza que me han brindado. Sin esa esperanza, esto no habría sido posible.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por el financiamiento de este proyecto de investigación (código B20130590a) auspiciado por el Vicerrectorado de Investigación y Posgrado a través del Programa de Promoción de Trabajos de Investigación para Obtener el Grado Académico de Bachiller (Resolución Rectoral N° 015156–R–20).

Luis Alberto León Andonayre
Supercúmulo de Laniakea[1], Abril 2024

[1] Es el supercúmulo de galaxias que alberga a la Vía Láctea y alrededor de otras 100 000 galaxias más.

Resumen

En el presente trabajo de investigación se han estudiado los principales aspectos matemáticos necesarios para que una teoría de la gravedad con un campo escalar acoplado de manera no mínima al escalar de curvatura pueda ser expresada en términos de una teoría con un acoplamiento mínimo en el contexto de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo y demostrándose la equivalencia entre el marco de Jordan y el marco de Einstein.

Palabras clave: marco de Einstein, marco de Jordan, prototipo de Brans–Dicke, cosmología moderna.

Notación

Fórmulas

∂_μ	Derivada parcial $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$
∇_μ	Derivada covariante $\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A^\lambda$ $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda$
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
g	Determinante de $g_{\mu\nu}$
$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$	Símbolo de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right)$
$R^\lambda{}_{\mu\rho\nu}$	Tensor de Riemann $R^\lambda{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}$
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$
R	Escalar de Ricci $R = R^\mu{}_\mu$
$\Box\Phi$	D'Alembertiano (sobre Φ) $\Box\Phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right)$

Abreviaciones

BD	Brans–Dicke
FLRW	Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker
CMB	Fondo cósmico de microndas (CMB, por sus siglas en inglés)
EF	Marco de Einstein (EF, por su siglas en inglés)
JF	Marco de Jordan (JF, por su siglas en inglés)
DM	Materia oscura (DM, por su siglas en inglés)
DE	Energía oscura (DE, por su siglas en inglés)
SEC	Condición energética fuerte (SEC, por sus siglas en inglés)
GR	Relatividad General (GR, por sus siglas en inglés)

Índice general

Agradecimientos **ii**

Resumen **iii**

Notación **iv**

Índice general **v**

Introducción **vii**

1 Relatividad General **1**
1.1 Formulación variacional de la gravedad 1
1.2 Acción de Einstein–Hilbert 1
1.3 Tensor de energía–momento 5

2 Cosmología moderna **7**
2.1 Principio cosmológico 7
2.2 Ley de Hubble 7
2.3 Universo de Friedmann 7
2.4 Los problemas del Big Bang 11
2.5 Inflación cósmica 13

3 Teorías extendidas a la Relatividad General **16**
3.1 Teoría de Brans–Dicke 16
3.2 Teorías escalar–tensoriales 20
3.3 Inflación en el marco de Jordan 22

4 Sobre la equivalencia entre los marcos de Einstein y Jordan **24**
4.1 Transformaciones conformes 24
4.2 La equivalencia 25
4.3 Transformaciones conformes en cosmología 28

5 Conclusiones **30**

Apéndice **31**

A Espacio–tiempo de FLRW **32**
A.1 Tensor métrico 32
A.2 Símbolos de Christoffel 32
A.3 Tensor de Ricci 32

A.4 Escalar de curvatura de Ricci 33
A.5 Operador de D'Alembert 33

B Ecuación de estado **34**
B.1 Polvo cósmico 35
B.2 Radiación 35

C Transformaciones Conformes **36**
C.1 Tensor métrico 36
C.2 Símbolos de Christoffel 36
C.3 Tensor de curvatura de Riemann 37
C.4 Tensor de Ricci 37
C.5 Escalar de curvatura de Ricci 37
C.6 Operador de D'Alambert 37

Bibliografía **38**

Introducción

Teorías de gravedad

La Teoría de la Relatividad General es una teoría geométrica del espacio–tiempo que ha cambiado de nuestro pensamiento sobre la naturaleza de la interacción gravitatoria. Esta teoría propone que lo que percibimos como gravedad es una consecuencia de la curvatura del espacio–tiempo, la cual está sometida a la presencia de materia y energía en el mismo. Además de describir fenómenos como el avance del perihelio de Mercurio, el corrimiento gravitacional al rojo (redshift), existencia de las ondas gravitacionales y agujeros negros, por citar algunos, esta teoría también ha tenido éxito en describir el Universo observado en la actualidad, siendo la base de la cosmología moderna, dando luz a modelos que describen la dinámica actual del Universo, como Λ–CDM el cual, además de dar sustento teórico a la teoría del Big Bang y a los modelos inflacionarios. Pero a pesar de sus muchas virtudes, hay razones para sostener que la teoría de la relatividad general no sea la única teoría de gravitación. Es por ello, que se han propuesto muchas teorías alternativas a la gravedad de Einstein, siendo muchas descartadas por motivos de viabilidad.
Para que una teoría gravitacional sea viable [1] debe satisfacer un conjunto de criterios básicos [2]:

- **Completitud:** La teoría en consideración debe ser capaz de predecir a partir de los primeros principios el resultado de un experimento de interés.
- **Autoconsistencia:** La predicción de cada experimento debe ser única en la teoría; es decir, los resultados del mismo experimento calculados en dos métodos diferentes pero equivalentes siempre deben dar la misma respuesta.
  El sistema de ecuaciones matemáticas propuesto también debe ser consistente.
- **Reducible a la Relatividad Especial:** Las leyes de la física (no gravitacionales) en la teoría deberían reducir las leyes de la relatividad especial cuando consideramos que los efectos de la gravitación son despreciables en comparación con otros tipos de interacciones.
- **Válida en el límite newtoniano:** En el límite de campos gravitacionales débiles y movimiento no relativistas, la teoría bajo consideración debe reproducir las leyes de Newton.

Los anteriores criterios fundamentales se obtienen del marco conceptual desarrollado por Robert Dicke a partir del análisis de pruebas experimentales [1,

2]. Además de las restricciones matemáticas impuestas por los criterios anteriores, Dicke también planteó dos restricciones físicas:

- La gravedad debe estar asociada con uno o más campos de estructura tensorial.
- La ecuación de campo de la gravedad debe derivarse de una acción.

La teoría de la gravedad de Einstein satisface estas dos restricciones junto con (obviamente) los primeros criterios.

¿Qué es la teoría escalar–tensorial?

El elemento fundamental de la teoría de la Relatividad General es el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, debido a lo cual esta teoría se denomina teoría tensorial. Por otro lado, las llamadas teorías escalar–tensoriales contienen un tensor métrico junto con un campo escalar acoplado a él.
Este tipo de teoría fue propuesto por primera vez por Pascual Jordan [3], quien mostró que un campo escalar introducido podría describir una «constante gravitacional» variable en el tiempo, lo cual estaba en consonancia con el argumento de Paul Dirac de que la constante gravitacional G debería ser dependiente del tiempo [4]. Pero su teoría no implicaba la conservación del tensor de energía–momento y fue severamente criticada por esta y otras argumentaciones. Una reformulación posterior eliminó la mayoría de estas objeciones [5], pero la teoría aún así era incapaz de incorporar materia no relativista.
Brans y Dicke continuaron el trabajo de Jordan [6-8] y dieron una versión más completa de una teoría escalar–tensorial. La motivación para su trabajo fue la falta de evidencia experimental para el *Principio de Equivalencia Fuerte* (SPE, por su siglas en inglés) de la Relatividad General de Einstein. La teoría de Brans–Dicke, como llegó a conocerse, se construyó sin tener en cuenta al SPE y reemplazando la constante gravitacional G por un campo escalar. Era una generalización de la Relatividad General (en el límite en el que el parámetro adimensional de Brans–Dicke γ diverge, se reduce a la Relatividad General) y sus predicciones coincidían con los resultados experimentales existentes.
La existencia de una alternativa viable a la teoría de la Relatividad General se tradujo en más trabajos [9-12] y en desarrollos que permitieron una generalización de la teoría de Brans–Dicke [13]. En la actualidad la teoría de Brans–Dicke generalizada aparece de forma natural en la supergravedad, en las teorías de Kluza–Klein y en todas las acciones conocidas de la teoría de cuerdas a bajas energías [14, 15]; además de tener un papel central en el estudio de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo y distintos aspectos de la cosmología [16].

¿Sobre que trata este trabajo de investigación?

El objetivo del presente trabajo de investigación es estudiar bajo qué condiciones una acción escrita en términos de un campo escalar acoplado al escalar de

curvatura de manera no mínima, referida como marco de Jordan, puede ser reescrita en términos de una acción con acoplamiento mínimo, referida como marco de Einstien.

En el primer capítulo se presenta la Relatividad General de Einstein en D dimensiones bajo un enfoque variacional, obteniéndose las ecuaciones de campo correspondientes.

En el segundo capítulo se estudian los conceptos fundamentales de la cosmología moderna para abordar los problemas del Big Bang y como el paradigma de la inflación cósmica es capaz de resolverlos. Además, se presenta una breve descripción de la aproximación slow–roll.

En el tercer capitulo se estudian teorías extendidas a la Relatividad General: la teoría de Brans Dicke y una generalización de teorías escalar–tensoriales. También se presenta la aproximación slow–roll en el marco de Jordan.

En el cuarto capítulo se describen las transformaciones conformes y la condición necesaria para que una acción en el marco de Jordan pueda ser expresada correctamente en el marco de Einstein.

Se incluyen apéndices con fórmulas y derivaciones complementarias que son omitidos en el cuerpo central del presente trabajo.
Están organizados de la siguiente manera:

- Apéndice A: Fórmulas de elementos geométricos en el espacio–tiempo de FLRW
- Apéndice B: Derivación de la ecuación de estado y aproximaciones a la radiación y polvo cósmico
- Apéndice C: Transformaciones conformes sobre los elementos de geometría diferencial

Las expresiones matemáticas que se usan en el presente trabajo están consideradas para el caso de un espacio–tiempo D–dimensional ($D \geq 4$), donde solo una dimensión es *timelike*; es decir, la métrica tiene una *signature* $(-,+,+,+,...)$.

Capítulo 1

Relatividad General

En 1915, tras diez años de trabajo, Albert Einstein publicó la teoría de la Relatividad General, una teoría de la gravitación que es reducible a la relatividad especial como una solución particular de sus ecuaciones y que engloba a la gravitación newtoniana. Según esta teoría, la gravedad no es una fuerza sino una consecuencia de la curvatura del espacio–tiempo. Este cambio de paradigma condujo a nuevas predicciones [2] y cimentó las bases de disciplinas modernas como la astrofísica y la cosmología.
La dinámica de esta teoría está descrita por medio de la ecuación de campo de Einstein, una ecuación tensorial que relaciona la curvatura del espacio–tiempo con la presencia de materia en el mismo. En este capítulo se deducirán las ecuaciones de campo a partir de un principio variacional en el caso general de un espacio-tiempo de D–dimensiones.

1.1. Formulación variacional de la gravedad

Las ecuaciones de campo de la relatividad general fueron desarrolladas independientemente por Einstein y Hilbert a inicios del siglo XX. El camino de Einstein para su deducción siguió una aproximación heurística mientras que Hilbert desarrollo la teoría de la relatividad general a partir de un principio variacional.
Derivar las ecuaciones de campo de Einstein a partir de la minimización de una acción ofrece varias ventajas significativas. Primero, este enfoque facilita la integración de la Relatividad General con otras teorías de campo, como la teoría de Maxwell, que también se expresan en términos de una acción. Además, el uso de la acción permite la identificación de cargas conservadas mediante el estudio de las simetrías inherentes al sistema a través del teorema de Noether. Estas cargas conservadas son fundamentales para comprender la conservación de la energía, el momento angular y otras cantidades físicas importantes en la teoría.

1.2. Acción de Einstein–Hilbert

Para llegar a las ecuaciones que determinan las características de la geometría del espacio–tiempo, debemos determinar primero la acción del campo gravitatorio, llamada acción de Einstein–Hilbert (E–H). Puede ser demostrado [17, 18] que la acción S_{EH} es de la forma:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_D} \int \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^D x\, R\,, \tag{1.1}$$

donde R es el escalar de Ricci, G_D es la constante gravitacional en el espacio–tiempo de D dimensiones y g es el determinante de la métrica. Considerando además el término correspondiente a la acción de la materia S_m obtenemos la acción total, la cual puede ser escrita como

$$S = S_{EH} + S_m = \frac{1}{16\pi G_D}\int \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^D x\, R + \int \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^D x\,\mathcal{L}_\mathrm{M}\,. \tag{1.2}$$

El principio de mínima acción establece que la variación de esta acción respecto al inverso de la métrica es igual a cero, lo que conduce a la siguiente expresión:

$$\delta S = \int \mathrm{d}^D x \left[\frac{1}{16\pi G_D}\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{M})}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}$$
$$\delta S = \int \mathrm{d}^D x \left[\frac{1}{16\pi G_D}\left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{M})}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,.$$

Dado que esta ecuación debe ser válida para cualquier variación $\delta g^{\mu\nu}$,

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -16\pi G_D \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{M})}{\delta g^{\mu\nu}}\,,$$

La ecuación resultante es la ecuación de movimiento para el campo métrico. El lado derecho de esta ecuación es proporcional al tensor de energía-momento, definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{M})}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\mathrm{M} - 2\frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{1.3}$$

Para calcular el lado izquierdo de la ecuación se necesita hallar la variación del escalar de Ricci R y el determinante de la métrica.

1.2.1. Variación del tensor de Riemann

Como el tensor de Riemann depende sólo de los símbolos de Christoffell, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, se puede calcular la variación del tensor de Riemann como

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \delta\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\,.$$

Debido a que $\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}$ es la diferencia de dos símbolos de Christoffel, el resultado es un tensor[1], por lo que podemos calcular su derivada covariante como

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) = \partial_\lambda(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\rho_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma}\,.$$

La expresión para la variación del tensor de curvatura de Riemann es igual a la diferencia de dos de estos términos,

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu(\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma})\,.$$

[1]Los símbolos de Christoffel no son tensores porque no transforman como tensores pero su variación si se transforma como uno.

1.2.2. Variación del tensor de Ricci

Se puede obtener la variación del tensor de curvatura de Ricci simplemente contrayendo el primer y tercer índice de la variación del tensor de Riemann, lo que lleva a la identidad de Palatini,

$$\delta R_{\mu\nu} \equiv \delta R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}). \tag{1.4}$$

1.2.3. Variación del escalar de Ricci

El escalar de Ricci se define como

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,.$$

Su variación con respecto al inverso de la métrica $g^{\mu\nu}$ está dado por

$$\begin{aligned}\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}\right)\,.\end{aligned}$$

En la segunda línea se utiliza el resultado obtenido anteriormente para la variación del tensor de Ricci y la compatibilidad métrica de la derivada covariante, $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$. El último término, $\nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu})$, multiplicado por $\sqrt{-g}$ pasa a ser una derivada exacta, ya que para un vector A^μ

$$\sqrt{-g}A^a_{;a} = (\sqrt{-g}A^a)_{,a} \text{ or } \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu\left(\sqrt{-g}A^\mu\right)\,,$$

y así, por el teorema de Gauss, solamente se produce un término de frontera al integrar. Debido a que la variación de la métrica $\delta g^{\mu\nu}$ se anula en el infinito, este término de frontera no contribuye a la variación de la acción, por lo que obtenemos,

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}\,.$$

1.2.4. Variación del determinante

Usando la fórmula de Jacobi en la notación de Einstein

$$\delta g = \delta\det(g_{\mu\nu}) = g\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\,,$$

o, equivalentemente, se podría transformar a un sistema de coordenadas donde $g_{\mu\nu}$ sea diagonal y allí aplicar la regla de producto para derivar el producto de factores en la diagonal principal. Utilizando este enfoque, conseguimos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\,.$$

En la última igualdad utilizamos

$$g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\,,$$

que se sigue de la regla para derivar el inverso de una matriz,

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}(\delta g_{\alpha\beta})g^{\beta\nu}\,,$$

Por ello concluimos que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,.$$

1.2.5. Ecuaciones de campo de Einstein

Ahora que se ha calculado todas las variaciones necesarias, podemos reemplazarlas en la ecuación de movimiento para el campo métrico para obtener finalmente,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_D T_{\mu\nu}\,. \tag{1.5}$$

En el espacio vacío $T_{\mu\nu} = 0$, por lo que la ecuación del campo gravitacional se reduce a $R_{\mu\nu} = 0$. Esto no significa que el vacío del espacio–tiempo sea plano, porque se requeriría de una condición más fuerte dada por $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = 0$. Una propiedad fundamental del tensor de energía–momento es que su divergencia es nula[2]

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0\,. \tag{1.6}$$

En consecuencia, la divergencia del lado izquierdo de la ecuación (1.5) también debería ser cero. Esto es verificado debido a que el tensor de Riemann obedece la llamada *identidad de Bianchi*.

$$R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma;\lambda} + R^{\rho}{}_{\mu\sigma\lambda;\nu} + R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu;\sigma} = 0\,,$$

donde la derivada covariante está representada por el ;. Esta ecuación bajo dos contracciones con la métrica se reduce a

$$(2R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}R)_{;\nu} = 0\,,$$

que es llamada *identidad de Bianchi contraida*.
Entonces, la ecuación (1.6) está esencialmente contenida en las ecuaciones de campo (1.5). La ecuación (1.6) es la formulación de la ley de conservación de la energía y el momento en el ámbito de la relatividad general. Contiene las ecuaciones de movimiento del sistema que describe el $T_{\mu\nu}$ en particular. Esas ecuaciones de campo gravitacional también contienen las ecuaciones de materia que producen el campo. Para una determinación completa de la distribución y el movimiento de la materia es necesario agregarles la ecuación del estado de la materia, es decir, una relación entre la presión y la densidad de energía. Esto debe darse junto con las ecuaciones de campo.

[2]La acción de la materia es invariante bajo difeomorfismo. Para las acciones, $T_{\mu\nu}$ siempre se conserva.

1.3. Tensor de energía–momento

En esta sección presentamos algunos ejemplos de tensores de energía–momento para campos de materias particulares.

1.3.1. Campo escalar

La acción de campo escalar ϕ con un potencial $V(\phi)$ tiene la forma,

$$S_m = \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] . \tag{1.7}$$

Mientras, el tensor de energía–momento,

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \left(\frac{1}{2} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + V(\phi) \right) g_{\mu\nu} . \tag{1.8}$$

1.3.2. Campo electromagnético

La acción del campo electromagnético A_μ en función del tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ con un fuente $J_{\mu\nu}$ en un medio con permeabilidad magnético μ_0 tiene la forma,

$$S = \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right) .$$

Mientras, el tensor de energía–momento,

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} \left(-g^{\alpha\nu} F_{\nu\gamma} F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\gamma\nu} F^{\gamma\nu} \right) .$$

1.3.3. Fluido perfecto

También necesitaríamos un tensor de energía–momento para los cuerpos macroscópicos de tal forma que se pueda describir el modelo de un fluido perfecto.
El modelo fluido perfecto es en gran parte un modelo fenomenológico.[3] El tensor de energía–momento de un fluido perfecto está definido como

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{pmatrix} .$$

Es conveniente escribir el tensor de energía–momento de la siguiente manera

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} , \tag{1.9}$$

[3] De modo que los intentos de derivarlo de un principio de acción no son físicos.

donde ρ representa la densidad de energía, p la presión u_μ la velocidad del fluido y que satisface $u_\lambda u^\lambda = -1$.
En un sistema de referencia inercial comóvil con el fluido, también conocido como sistema de referencia propio, se cumple que $u^0 = 1, u^i = 0$.

Capítulo 2

Cosmología moderna

La cosmología es la rama del conocimiento que estudia el Universo como un todo. En su estado inicial la cosmología apenas existía como disciplina científica. No fue sino hasta la formulación de la Relatividad General que empezó su desarrollo formal; siendo en la actualidad la cosmología del *Big Bang* y el paradigma de la inflación cósmica la descripción más aceptada del Universo.

2.1. Principio cosmológico

La piedra angular de la cosmología moderna es la idea de que el lugar que ocupamos en el Universo no es de ninguna manera especial. Esto es respaldado en las evidencias observacionales que muestran que el universo, a muy grandes escalas, es homogéneo e isotrópico [19].
La homogeneidad del Universo implica que en cualquier punto del espacio observaríamos la misma distribución material a nuestro alrededor, mientras que la isotropía hace referencia al hecho de que el Universo manifiesta las mismas propiedades y características independientemente de la dirección en que se hagan las observaciones[1].

2.2. Ley de Hubble

En 1920 Edwin Hubble observó que las galaxias más distantes se alejaban de la Tierra a más rapidez que las galaxias más cercanas [20]. A partir de sus observaciones, describió la relación entre la velocidad de recesión y la distancia de una galaxia mediante la ecuación

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{l}\,. \tag{2.1}$$

Esta ecuación es conocida como la ley de Hubble. En ella l representa la distancia física a la que se encuentra la galaxia y la constante representada por el parámetro H_0 es conocida como la *constante de Hubble*[2,3] en el instante t_0 (el presente).

2.3. Universo de Friedmann

La métrica que describe un espacio–tiempo D–dimensional homogéneo e isotrópico es llamado espacio–tiempo de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

[1] La homogeneidad no implica isotropía, ni la isotropía implica homogeneidad

[2] Este nombre puede ser confuso. Aunque ciertamente es constante en el espacio debido al principio cosmológico, no hay ningún motivo por el cual deba ser constante a lo largo del tiempo.

[3] Puede ser más conveniente llamarlo *párametro de Hubble*.

(FLRW) [21] y de manera general está definido por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\,(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_{D-2}^2\right),$$

donde $a(t)$ es llamado el *factor de escala cósmico* y k es una constante que toma los valores de -1, 0, o 1 dependiendo si la solución corresponde a un universo abierto, plano, o cerrado.
El parámetro de Hubble es, en términos del factor de escala cósmico,

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}.$$

2.3.1. Ecuaciones de Campo

Las Ecuaciones de Campo de Einstein (1.5) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_D\left[T_{\mu\nu} - \frac{T}{(D-2)}g_{\mu\nu}\right] = 8\pi G_D S_{\mu\nu},$$

donde T es traza de $T_{\mu\nu}$. También se puede definir un tensor $S_{\mu\nu}$ que representa la fuente.
Si asumimos que el universo posee un tensor de energía–momento de la forma de fluido ideal, entonces

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho\,, \\ T_{ij} &= p g_{ij}\,, \\ T &= (D-1)p - \rho. \end{aligned}$$

De igual manera, para $S_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} S_{00} &= \frac{1}{(D-2)}\left[(D-3)\rho + (D-1)p\right]\,, \\ S_{ij} &= \left(\frac{\rho - p}{D-2}\right) g_{ij}. \end{aligned}$$

Usando la componente S_{00} y la componente temporal del tensor de Ricci en el espacio–tiempo de FLRW que se da en el apéndice (A.2a) se obtiene la ecuación,

$$(D-1)(D-2)\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G_D[(D-3)\rho + (D-1)p]\,, \tag{2.2}$$

o en términos del parámetro de Hubble,

$$(D-1)(D-2)(\dot{H} + H^2) = -8\pi G_D[(D-3)\rho + (D-1)p]\,.$$

Esta ecuación es conocida como *ecuación de la aceleración* [22].
A partir de las otras componente del tensor de Ricci (A.2b) y junto a la ecuación anterior se puede obtener la ecuación,

$$(D-1)(D-2)\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = 16\pi G_D \rho\,, \tag{2.3}$$

conocida como *ecuación de Friedmann* [22].

2.3.2. Ecuación de continuidad

Es útil contar con una ecuación de la evolución temporal de la densidad de masa. Esta puede ser obtenida del hecho de que el tensor de energía–momento es covariantemente conservado

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \partial_\mu T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu{}_\lambda = 0\,.$$

Para $\nu = 0$, se tiene

$$\partial_t T^t{}_t + \Gamma^\mu_{\mu t} T^t{}_t - \Gamma^\lambda_{\mu t} T^\mu{}_\lambda = 0\,.$$

Usando los símbolos de Christoffel dados en el apéndice (A.1) la ecuación resultante es

$$\dot{\rho} + (D-1)(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0\,, \tag{2.4}$$

mientras el resto de componentes son cero.

2.3.3. La ecuación de estado

En general, la densidad de energía incluirá contribuciones de distintos componentes. En cosmología, el aspecto importante es cómo evoluciona ρ a medida que el universo se expande.
A menudo, los componentes individuales (con subíndice i) tienen ecuaciones muy simples de estado de la forma

$$p_i = \omega_i \rho_i,$$

con ω_i constante.
Introduciendo la ecuación de estado en la ecuación de continuidad (2.4), encontramos que la densidad de energía tiene una dependencia de la ley de potencia en el factor de escala

$$\rho_i \propto a^{-n_i},$$

donde el exponente n_i está relacionado con la ecuación de estado de la siguiente manera

$$n_i = (D-1)(1+\omega_i).$$

El ejemplo más simple de una componente de este tipo es un conjunto de partículas masivas con velocidades relativas insignificantes, conocidas en cosmología como *polvo cósmico*. Para este caso, se cumple

$$p_{dust} = 0\,,$$
$$\rho_{dust} = a^{-(D-1)}.$$

Mientras que para partículas con velocidades relativistas, conocidas en cosmología como *radiación*,[4] se cumple

$$p_{rad} = \frac{\rho}{(D-1)}\,,$$
$$\rho_{rad} = a^{-D}.$$

[4]En el apéndice B se detalla la derivación de la ecuación de estado para el polvo cósmico y la radiación.

Una constante cosmológica (Λ) que es equivalente a la energía del vacío no cambiaría a medida que el universo se expande, por lo que podríamos considerar que

$$\rho_\Lambda \propto a^0.$$

Esto implica una presión negativa cuando la energía del vacío es positiva.

2.3.3.1. Restricciones de energía

Los rangos de valores de ρ_i permitidos dependerán obviamente de la teoría de los campos de materia incluidos [23]. Aún así, si deseamos hacer alguna declaración al respecto, podríamos mirar las condiciones energéticas, especialmente la *Condición Energética Dominante* (DEC, por sus siglas en inglés).
DEC establece que $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ y $J^\nu = T^\nu_\mu l^\mu$ no son *spacelike* para cualquier vector nulo l_μ. Esto implica que el flujo de energía no es más rápido que la velocidad de la luz.
Para un fluido perfecto $T_{\mu\nu}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \rho + p \geq 0 \text{ y} \\ |\rho| \geq |p|. \end{aligned}$$

En términos del parámetro ω de la ecuación de estado implica que

$$\begin{aligned} \rho \geq 0 \text{ y } |\omega| \leq 1, \\ o\,,\ \rho \leq 0 \text{ y } \omega = -1. \end{aligned}$$

Por lo que una densidad de energía negativa solo es permitida en la forma de constante cosmológica.

Otra condición energética que aplica restricciones sobre el modelo cosmológico es la *Condición Energética Fuerte* (SEC, por sus siglas en inglés) que establece,

$$\left[T_{\mu\nu} - \frac{T}{(D-2)} g_{\mu\nu}\right] v^\mu v^\nu \geq 0,$$

para cualquier vector v^μ *timelike*. Esto puede ser visto en la ecuación (2.2), que de ser cierta esta condición energética implicaría que el universo siempre desacelera.

2.3.4. Radio de Hubble

Para una distancia de separación l_H lo suficientemente grande, la ley de Hubble (2.1) predice que la rapidez de separación entre dos objetos puede hacerse igual a la rapidez de la luz. La distancia,

$$l_H = \frac{1}{H}\,, \tag{2.5}$$

se conoce como *radio de Hubble*.
Si un rayo luminoso fuese emitido a una distancia $l > l_H$ en dirección a la Tierra, tendría que propagarse a través de un espacio que se expande a una tasa mayor que la velocidad de la luz. Por lo tanto, en el momento de la emisión, el rayo no se acerca a la Tierra; en cambio, se aleja debido a la expansión del Universo. Es por este motivo que el radio de Hubble determina qué puntos del Universo pueden interactuar con la Tierra en el presente.
Debido a la dependencia temporal del radio de Hubble, podemos definir un horizonte que se denomina *horizonte de Hubble*. Considere la distancia recorrida por un fotón,

$$\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}a(t)} \equiv \mathrm{d}\eta\,, \tag{2.6}$$

donde η se conoce como *tiempo conforme* y da una idea de la *distancia comóvil* recorrida por un fotón. Se llama comóvil ya que no escala con la expansión. De la misma manera,

$$\frac{1}{\mathcal{H}} \equiv \frac{1}{aH}\,, \tag{2.7}$$

es llamado *radio comóvil de Hubble*.
Podemos ver la relación entre el radio comóvil de hubble y el horizonte comóvil reescribiendo la ecuación (2.6)

$$r = \int \frac{dt}{a} \times \frac{\dot{a}}{\dot{a}} = \int \frac{\mathrm{d}\ln a}{aH}\,.$$

Si el horizonte comóvil es infinito, entonces es posible que la luz viaje indefinidamente de un punto a otro sin importar qué tan alejados estén dichos puntos. Por el contrario, si el horizonte comóvil es finito, existe una máxima distancia comóvil que la luz puede recorrer, lo que implica que existirían regiones del Universo que permanecerían desconectadas para siempre.
El carácter finito o infinito del horizonte de eventos depende de la evolución del factor de escala cósmico.

2.4. Los problemas del Big Bang

El modelo del Big Bang hace un trabajo increíble al explicar el universo que vemos hoy a partir de un plasma muy caliente y denso en los inicios del universo. Sin embargo, hay hechos importantes que no logra explicar.

2.4.1. El problema del horizonte (o de la homogeneidad)

De acuerdo a la teoría del Big Bang, todo el universo observable actual proviene de una región que en los primeros instantes del Universo tenía un tamaño infinitesimal. En cierto instante t_i posterior a la singularidad inicial, todo el universo observable debería estar contenido en una región de radio l_i la cual se relaciona con el radio actual del universo observable mediante la relación

$$\frac{l_i}{a_i} = \frac{l_0}{a_0}\,,$$

donde a_i representa el factor de escala en el instante t_i y l_0 el radio del universo observable en el presente. Asumiendo que en el universo temprano la radiación dominaba sobre el resto de componentes, es posible estimar una expresión para l_i utilizando la relación entre el factor de escala cósmico y la temperatura T en el Universo de Friedmann dominado por radiación [24], $a \approx 1/T$ con lo cual la ecuación anterior toma la forma

$$l_i = \frac{T_0}{T_i} t_0 \,, \tag{2.8}$$

donde $T_0 \approx 2,73K$ representa la temperatura actual del Universo determinada a partir del CMB [25]. Los estudios del CMB y de las estructuras a grandes escalas demuestran que el universo observable es altamente homogéneo. Si se asume que las inhomogeneidades no podrían ser eliminadas por la expansión del Universo, la región de la cual proviene el Universo observable en el instante t_i también debió ser altamente homogénea. Es posible asumir la homogeneidad del origen del Universo como parte de las condiciones iniciales; sin embargo, no existe ningún motivo físico fundamental que justifique que esto sea así.

2.4.2. El problema de la planitud

La ecuación de Friedmann (2.3) puede reescribirse como

$$1 - \frac{\rho}{\rho_c} = -(aH)^{-2} k \,,$$

lo cual permite definir un útil parámetro ρ_c,

$$\rho_c = \frac{(D-1)(D-2)}{16\pi G_D} H^2 \,,$$

que representa la densidad a la cual el Universo sería plano y la expresión $\frac{\rho}{\rho_c}$ se denomina *parámetro de densidad*, la cual suele ser representada por $\Omega(a)$. El parámetro de densidad nos dice cuál de las tres geometrías FLRW describe nuestro Universo. Mediciones reciente del CMB [26] son consistentes con una geometría plana; es decir, $\Omega(a(t_0)) \approx 1$.
Si se analiza la ecuación (2.4.2) se puede observar que a medida que el radio comóvil de Hubble crece con la expansión del universo, el parámetro de densidad $\Omega(a)$ también lo hace, alejándose del valor de la unidad. Dando como resultado que la única manera que el universo actual sea plano es que también haya sido perfectamente plano en sus inicios. Este problema es conocido como el *problema de la planitud*.

2.4.3. El problema de los monopolos

La historia del universo ha pasado por diferentes fases de transición, por lo que se podría esperar ver algún efectos de los *defectos topológicos* [27]. Por ejemplo, la *Gran Teoría Unificadora* (GUT) predice, por lo menos, 10^{-3} *monopolo*$/m^3$.

Un número muy grande si se toma en cuenta la densidad bariónica $\rho_b \approx 10^{-1}$ $nucleon/m^3$. El problema es que estas predicciones deben estar limitadas a ser menores a 10^{-30} por nucleón.

2.5. Inflación cósmica

El paradigma que viene a resolver todos los problemas anteriores se llama inflación. Es más un paradigma que una teoría, ya que es un conjunto de supuestos muy generales.

2.5.1. Resolviendo el problema del horizonte

Si se asume la existencia de un campo que no satisface la SEC y que el factor de escala $a \propto t^p$, con $p > 1$. El tiempo conforme tendría la forma

$$\eta = \int \frac{dt}{a} \propto -t^{-(p-1)} .$$

A medida que $t \longrightarrow 0$, $\eta \longrightarrow -\infty$. Esto significa que el horizonte cómovil en los inicios del universo era mucho mayor y, por lo tanto, una distancia que estaba fuera del horizonte antes del big bang si podría haber estado dentro del horizonte en un tiempo anterior durante el periodo inflacionario.
Con este nuevo paradigma nace la pregunta sobre cuánto debió haberse expandido el universo para que las condiciones iniciales permitan que el Big Bang suceda. Esto puede ser respondido a partir del cálculo de la proporción entre los radios cómoviles de Hubble durante el presente, el inicio y el final de la inflación cósmica; es decir,

$$\frac{l_0}{l_i} = \frac{a_i H_i}{a_f H_f} \frac{a_f H_f}{a_0 H_0} ,$$

donde los subíndices i, f y 0 se refieren al inicio de la inflación, al final de la inflación y al presente, respectivamente. Aproximando, $a_f H_f / a_0 H_0 \approx 10^{28}$, entonces,

$$\frac{a_f}{a_i} > 10^{28} \frac{H_i}{H_f} .$$

Si asumimos que la tasa de expansión fue constante en el tiempo, se puede encontrar que la proporción entre el factor del escalar entre el final e inicio de la inflación es,

$$\frac{a_f}{a_i} > e^{64} .$$

Esto significa que la expansión acelerada duró 64 veces la constante de Hubble, puesto que para ese caso $a \propto e^{Ht}$, suele ser llamado como 64 *e–folds*. El número total de e–folds también se define como el logaritmo del factor de expansión contado hacia atrás en el tiempo desde el fin del periodo inflacionario; es decir,

$$N(t) = \ln \frac{a_f}{a(t)} = \int_t^{t_f} \mathrm{d}t \, H(t) . \tag{2.9}$$

2.5.2. Resolviendo el problema de la planitud

A través de la misma regla se encuentra que,

$$\Omega_i - 1 = (\Omega_0 - 1)\left(\frac{l_i}{l_f}\frac{l_f}{l_0}\right)^2 ,$$

lo cual implica que

$$\Omega_i - 1 \gg (\Omega_0 - 1)\,.$$

De esta manera, si el universo no fuese plano al inicio de la inflación, la expansión acelerada haría que Ω tienda a 1, explicando porque el universo actual es plano.

2.5.3. Resolviendo el problema de los monopolos

La inflación cósmica también afectaría a la densidad de monopolos reduciendo drásticamente los valores teóricos.

2.5.4. Inflatón

La época inflacionaria corresponde a una etapa temprana del Universo en la que aún no existía la materia, ni la radiación, por lo que este debía estar compuesto por alguna especie de fluido exótico. Esto no podría ser debido a una constante cosmológica puesto que la máxima simetría del espacio–tiempo dS no permite definir correctamente lo que es un observador. Además, por si sola la constante cosmológica no podría permitir una transición de la época inflacionaria a la del Universo de Friedmann.
Por otro lado, un campo escalar podría preservar la homogeneidad e isotropía a la vez que violara la SEC. Tal vez la inflación pudo ser debida a algo más; sin embargo, un campo escalar preserva la esencia de este paradigma. Este campo escalar es llamado *Inflatón*.
Un campo escalar que satisface la homogeneidad e isotropía solo depende del tiempo; es decir $\phi = \phi(t)$, este puede ser descrito como un fluido con una densidad y presión dados por [28],

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\,,$$
$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\,,$$

donde $V(\phi)$ es el potencial. Y la ecuación de estado,

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}\,.$$

Mientras, la ecuación de Klein–Gordon,

$$\Box\phi - V' = 0\,, \tag{2.10}$$

se reduce a

$$\ddot{\phi} + (D-1)H\dot{\phi} + V' = 0\,. \tag{2.11}$$

La ecuación de la aceleración (2.3), se reduce a,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G_D}{(D-1)}\left[\frac{2}{(D-2)}V(\phi) - \dot{\phi}^2\right],$$

y para que el inflatón produzca la inflación ($\ddot{a} > 0$) es necesario que $V(\phi) > \frac{(D-2)}{2}\dot{\phi}^2$.

2.5.4.1. Aproximación slow–roll

La aproximación slow–roll consiste en asumir que el inflatón evoluciona mucho más lento que la taza de cambio del parámetro de Hubble, $|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}| \ll H^2|\phi|$, y que la energía cinética del inflatón es menor a la energía potencial, $\dot{\phi}^2 \ll V$. La aplicación de estas aproximaciones sobre la ecuación de Friedmann y la ecuación de Klein–Gordon,

$$(D-1)(D-2)H^2 \approx 16\pi G_D V\,,$$
$$(D-1)H\dot{\phi} + V' \approx 0\,.$$

Despejando ϕ de la última ecuación,

$$\dot{\phi} \approx -\frac{1}{(D-1)}\frac{V'}{H}\,,$$

y sustituyendo en la condición necesaria para la inflación, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, nos permite definir el parámetro,

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_{(D)}^{(D-2)}}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1\,. \tag{2.12}$$

Donde se ha introducido la *masa de Planck reducida* [5] $M_{(D)}$.
Alternativamente, se puede usar el parámetro,

$$\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \epsilon_V\,. \tag{2.13}$$

Similarmente, $\ddot{\phi} \ll V'$, permite definir otro parámetro,

$$\eta_V \equiv M_{(D)}^{(D-2)}\frac{V''}{V} \ll 1\,. \tag{2.14}$$

La aproximación slow–roll es válida cuando las condiciones $\epsilon_V \ll 1$ y $\eta_V \ll 1$ están satisfechas por el potencial. La inflación se detendrá cuando $\epsilon_V \approx \eta_V \approx 1$. El hecho de que la inflación debe terminar y dar lugar al Big Bang se conoce como una *graceful exit*.

[5] El exponente $(D-2)$ viene de un análisis dimensional de la parametrización que se hace en la sección 4.2.

Capítulo 3

Teorías extendidas a la Relatividad General

A pesar del éxito ampliamente reconocido de la Relatividad General de Einstein, se han propuesto desde sus inicios teorías alternativas por una razón u otra. Entre ellos, nos centramos especialmente en las teorías escalar–tensoriales.
En el presente capítulo se describirán las características que surgen al modificar la acción de Einstein–Hilbert al introducir un campo escalar acoplado no mínimamente al escalar de curvatura de Ricci.

3.1. Teoría de Brans–Dicke

La teoría de la gravedad de Jordan–Fierz–Brans–Dicke, comúnmente conocida como teoría de Brans–Dicke (BD), es el prototipo de las teorías gravitacionales alternativas a la Relatividad General [29].
La acción que describe esta clase de teorías está dada por:

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-g} \left(\Phi R - \frac{\gamma}{\Phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - V(\Phi) \right) ,$$

donde γ es un parámetro adimensional. La acción total será:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-g} \left(\Phi R - \frac{\gamma}{\Phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - V(\Phi) \right) + S_m \, , \tag{3.1}$$

donde el término S_m es la parte de la acción que describe la materia ordinaria; es decir, cualquier forma de materia diferente del campo escalar Φ. El factor Φ en el término $\frac{\gamma}{\Phi}$ se introduce para hacer γ adimensional.

En la acción (3.1) la materia no está directamente acoplada a Φ, en el sentido de que la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_M$ de S_m no depende de Φ[1] pero Φ está directamente acoplada al escalar de Ricci. El campo gravitacional se describe mediante el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y por el campo escalar Φ, que junto con las variables de materia describen la dinámica del espacio-tiempo.

La motivación original para la introducción de la teoría de BD fue la búsqueda de una teoría que contuviera el principio de Mach, que no está total o explícitamente incorporado en la Relatividad General de Einstein [6].

[1] También llamado, mínimamente acoplado a la materia.

3.1.1. Variación del escalar de Ricci (con variaciones en la frontera)

En el capítulo 1 al momento de calcular la variación del escalar de Ricci, en la ecuación (1.4), se despreció la variación del tensor del Ricci debido a que solo contiene términos de variaciones en el borde. Sin embargo, bajo este enfoque de teorías escalar–tensorial no es justificable despreciar dichos términos.
Ahora calculamos la variación del escalar de Ricci en el presente caso:

$$\begin{aligned}\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\left[\nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu})\right] \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}\right).\end{aligned}$$

La variación del símbolo de Christoffel

$$\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} = -\frac{1}{2}\left[g_{\mu\beta}\nabla_\nu(\delta g^{\sigma\beta}) + g_{\nu\beta}\nabla_\mu(\delta g^{\sigma\beta}) - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})\right] .$$

Con ello, los términos dentro de la derivada covariante puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}\right) &= \nabla_\sigma\left(-\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu}) + g_{\mu\beta}\nabla^\sigma(\delta g^{\mu\beta})\right) \\ &= -\nabla_\mu\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu}) + g_{\mu\nu}\Box(\delta g^{\mu\nu}) \\ &= \left(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación del escalar de Ricci puede ser expresada como

$$\delta R = \left(R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)\delta g^{\mu\nu} . \tag{3.2}$$

3.1.2. Variación con respecto a la métrica

Variando la acción (3.1) con respecto a $g_{\mu\nu}$ y usando la ecuación (3.2) para obtener las ecuaciones de campo

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^D x\left[\Phi\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\gamma}{\Phi}\frac{\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi)}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\delta(\sqrt{-g}V(\Phi))}{\delta g^{\mu\nu}} + \right. \\ &\quad \left.\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^D x\left[\Phi\left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) - \frac{\gamma}{\Phi}\left(\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi\frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi}{\sqrt{-g}}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) - V(\Phi)\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} \\ &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^D x\left[\left(R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\Phi - \frac{\gamma}{\Phi}\left(\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2}\times\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}V(\Phi)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,.\end{aligned}$$

donde el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ se define de la misma forma que en la ecuación (1.3)

$$\delta S = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^D x \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right)\Phi + g_{\mu\nu}\Box\Phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - \frac{\gamma}{\Phi}\left(\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2}\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}V(\Phi)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,.$$

Entonces, las ecuaciones de campo son (compare con [30])

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi}T_{\mu\nu} + \frac{\gamma}{\Phi^2}\left(\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2}\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{\Phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi\right) - \frac{V(\Phi)}{2\Phi}g_{\mu\nu}\,. \tag{3.3}$$

3.1.3. Variación con respecto al campo Φ

Variando la acción (3.1) con respecto al campo Φ

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[R\frac{\delta\Phi}{\delta\Phi} - \frac{\delta}{\delta\Phi}\left(\frac{\gamma}{\Phi}\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi\right) - \frac{\delta V(\Phi)}{\delta\Phi} + \frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\delta\Phi}\right]\delta\Phi \\ &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[R - \gamma\frac{\delta}{\delta\Phi}\left(\frac{1}{\Phi}\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi\right) - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\Phi}\right]\delta\Phi\,.\end{aligned}$$

La variación del segundo término de la acción

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{1}{\Phi}\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi\right) &= -\frac{\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi}{\Phi^2}\delta\Phi + \frac{1}{\Phi}\delta\left(\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi\right) \\ &= -\frac{\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi}{\Phi^2}\delta\Phi + \frac{\nabla^\lambda(\delta\Phi)\nabla_\lambda\Phi}{\Phi} + \frac{\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda(\delta\Phi)}{\Phi} \\ &= -\frac{\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi}{\Phi^2}\delta\Phi + 2\frac{\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda(\delta\Phi)}{\Phi}\,.\end{aligned}$$

Si consideramos un vector A^λ, tal que $\nabla_\lambda A^\lambda \equiv \nabla_\lambda\left(\frac{\nabla^\lambda\Phi}{\Phi}\delta\Phi\right)$,

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda\left(\frac{\nabla^\lambda\Phi}{\Phi}\delta\Phi\right) &= \left(\frac{\Phi\nabla_\lambda\nabla^\lambda\Phi - \nabla_\lambda\Phi\nabla^\lambda\Phi}{\Phi^2}\right)\delta\Phi + \frac{\nabla^\lambda\Phi}{\Phi}\nabla_\lambda(\delta\Phi) \\ &= \frac{\Box\Phi}{\Phi}\delta\Phi - \frac{\nabla_\lambda\Phi\nabla^\lambda\Phi}{\Phi^2}\delta\Phi + \frac{\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda(\delta\Phi)}{\Phi}\,,\end{aligned}$$

usando el teorema de Gauss y considerando que en la frontera la variación $\delta\Phi$ es nula, podemos demostrar la siguiente identidad:

$$\frac{\Box\Phi}{\Phi}\delta\Phi = \frac{\nabla_\lambda\Phi\nabla^\lambda\Phi}{\Phi^2}\delta\Phi - \frac{\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda(\delta\Phi)}{\Phi}\,.$$

Esta identidad nos permite escribir la variación de la acción de la siguiente manera

$$\delta S = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[R - \gamma\left(\frac{\nabla_\lambda\Phi\nabla^\lambda\Phi}{\Phi^2} - \frac{2\Box\Phi}{\Phi}\right) - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\Phi}\right]\delta\Phi\,.$$

Entonces, la ecuación de Klein–Gordon en la teoría de BD es

$$\frac{2\gamma}{\Phi}\Box\Phi - \frac{\gamma}{\Phi^2}\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi + R - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\Phi} = 0\,. \tag{3.4}$$

Tomando la traza de $R_{\mu\nu}$ en la ecuación (3.3),

$$R = -\frac{16\pi}{(D-2)\Phi}T + \frac{\gamma}{\Phi^2}\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi + \frac{2(D-1)\Box\Phi}{(D-2)\Phi} + \frac{D}{(D-2)}\frac{V(\Phi)}{\Phi}\,.$$

Usando este resultado se puede eliminar R de la ecuación (3.4) y obtener la ecuación de onda

$$\Box\Phi = \frac{1}{(D-2)\gamma + (D-1)}\left[8\pi T + \frac{(D-2)}{2}\Phi\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\Phi} - \frac{D}{2}V\right]\,. \tag{3.5}$$

Como se observa en la ecuación (3.5), el escalar Φ tiene materia no conforme; es decir, materia con traza $T \neq 0$ como fuente, pero el escalar no está directamente acoplado a $T_{\mu\nu}$, o $\mathcal{L}_M$. El campo Φ actúa sobre la materia ordinaria solo a través del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de la manera descrita por la ecuación (3.3).
La forma de la acción (3.1), y las ecuaciones de campo de BD (3.3) sugieren que el campo Φ juega el papel de la inversa del acoplamiento gravitacional,

$$G_{ef}(\Phi) = \frac{1}{\Phi}\,,$$

la cual ahora se convierte en una función definida sobre el espacio–tiempo. Por este motivo, se suele elegir el rango de valores $\Phi > 0$ correspondiente a la gravedad atractiva. El parámetro de BD, γ, en la acción (3.1) es un parámetro libre de la teoría: desde el punto de vista teórico, un valor de γ del orden de la unidad (fuerza de acoplamiento gravitacional) sería natural, y aparece en el límite de bajas energías de las teorías de cuerdas. Sin embargo, los valores de γ de este orden están excluidos por las pruebas disponibles de las teorías gravitacionales en la aproximación de campo débil, para un campo sin masa y para un campo escalar ligero[2] Φ.

3.1.4. Reducción a la Relatividad General de Einstein

En el límite $\gamma \longrightarrow \infty$ del parámetro de BD, la teoría se vuelve indistinguible de la Relatividad General de Einstein [31-33]. En particular, para valores grandes de $\gamma \geq 10^3$, la teoría hace que las predicciones para todas las situaciones gravitacionales difieran de los valores de GR en la mayoría de los casos mediante correcciones de $\mathcal{O}(1/\gamma)$ [28].

[2]Un campo escalar ligero es uno que tiene un rango mayor que el tamaño del Sistema Solar o del laboratorio utilizado para probar la gravedad.

3.2. Teorías escalar–tensoriales

Si la acción de Brans-Dicke es reescalada de tal manera que el campo $\phi \longrightarrow \Phi^2/8\gamma$, entonces la acción (3.1) toma la forma

$$S = \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\phi^2}{8\gamma} \right) R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_m \,.$$

Esto nos permite demostrar que la acción de BD está incluido en un conjunto genérico de acciones con campos acoplados a la curvatura [34] que son descritas en el marco de Jordan por la acción

$$\begin{aligned} S &= S_{JF} + S_m \\ S &= \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-g} \left[f(\phi) R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_m \,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2.1. Variación con respecto a la métrica

Variando la acción (3.6) con respecto a $g_{\mu\nu}$ y usando la ecuación (3.2) para obtener las ecuaciones de campo

$$\begin{aligned} \delta S = & \int \mathrm{d}^D x \left[f(\phi) \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi)}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\delta(\sqrt{-g} V(\phi))}{\delta g^{\mu\nu}} + \right. \\ & \left. \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ = & \int \mathrm{d}^D x \left[f(\phi) \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) - \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi}{\sqrt{-g}} \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) - V(\phi) \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \\ = & \int \mathrm{d}^D x \left[\left(R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Box - \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) f(\phi) - \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right) + \frac{1}{2} V(\phi) g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \,, \end{aligned}$$

donde el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ se define también de la misma forma que en la ecuación (1.3)

$$\begin{aligned} \delta S = & \int \mathrm{d}^D x \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) f(\phi) + g_{\mu\nu} \Box f(\phi) - \nabla_\mu \nabla_\nu f(\phi) - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} V(\phi) g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \,. \end{aligned}$$

Entonces, las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = & \frac{1}{2f(\phi)} T_{\mu\nu} + \frac{1}{2f(\phi)} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi g_{\mu\nu} \right) \\ & + \frac{1}{f(\phi)} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu f(\phi) - g_{\mu\nu} \Box f(\phi) \right) - \frac{V(\phi)}{2f(\phi)} g_{\mu\nu} \,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2.2. Variación con respecto al campo ϕ

Variando la acción (3.1) con respecto al campo ϕ

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[R\frac{\delta f(\phi)}{\delta\phi} - \frac{\delta}{\delta\phi}\left(\frac{1}{2}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi\right) - \frac{\delta V(\phi)}{\delta\phi} + \frac{\delta\mathcal{L}_\mathrm{M}}{\delta\phi}\right]\delta\phi \\ &= \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[R\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi} - \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\left(\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi\right) - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\right]\delta\phi\,.\end{aligned}$$

La variación del segundo término de la acción

$$\begin{aligned}\delta\left(\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi\right) &= \nabla^\lambda(\delta\phi)\nabla_\lambda\phi + \nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda(\delta\phi) \\ &= 2\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda(\delta\phi).\end{aligned}$$

Si consideramos un vector B^λ, tal que $\nabla_\lambda B^\lambda \equiv \nabla_\lambda(\nabla^\lambda\phi\delta\phi)$,

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda(\nabla^\lambda\phi\delta\phi) &= \nabla_\lambda(\nabla^\lambda\phi)\delta\phi + \nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda(\delta\phi) \\ &= \Box\phi\delta\phi + \nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda(\delta\phi).\end{aligned}$$

Usando el teorema de Gauss y considerando que en la frontera la variación $\delta\phi$ es nula, podemos demostrar la siguiente identidad:

$$\Box\phi\delta\phi = -\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda(\delta\phi).$$

Esta identidad nos permite escribir la variación de la acción de la siguiente manera

$$\delta S = \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[R\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi} + \Box\phi - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\right]\delta\phi\,.$$

Entonces, la ecuación de Klein–Gordon en la teoría escalar–tensorial es

$$\Box\phi + Rf' - V' = 0\,. \tag{3.8}$$

Tomando ahora la traza de $R_{\mu\nu}$ en la ecuación (3.7),

$$R = \frac{-T}{(D-2)f(\phi)} + \frac{\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi}{2f(\phi)} + \frac{2(D-1)}{(D-2)}\frac{\Box f(\phi)}{f(\phi)} + \frac{D}{(D-2)}\frac{V(\phi)}{f(\phi)}\,. \tag{3.9}$$

Usando este resultado se puede eliminar R de la ecuación (3.8) y obtener la ecuación de onda

$$\Box\phi = \frac{1}{(D-2)f}\left[T - \frac{(D-2)}{2}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi - 2(D-1)\Box f - DV\right]f' + V'\,. \tag{3.10}$$

Similarmente al caso de BD, en la ecuación (3.10), el campo escalar ϕ tiene materia no conforme como fuente, pero el campo ϕ no está directamente acoplado a $T_{\mu\nu}$, o $\mathcal{L}_M$. Y de igual manera, el campo ϕ actúa sobre la materia ordinaria solo a través del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de la manera descrita por la ecuación (3.7).

3.3. Inflación en el marco de Jordan

Para estudiar la inflación en el marco de Jordan, consideramos una era muy temprana dominada por el vacío ($T_{00} = T_{ij} = T = 0$). Por lo que la acción (3.6) se reduce a,

$$S = \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-g} \left[f(\phi) R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] .$$

Si consideramos la solución de FLRW, en donde también se cumple,

$$\begin{aligned} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi = & -\dot{\phi}^2 , \\ \Box f = & -\left[\ddot{f} + (D-1) H \dot{f} \right] , \\ \nabla_i \nabla_j f = & -H \dot{f} a^2 \hat{g}_{ij} . \end{aligned}$$

Las ecuaciones de campo (3.7) en el marco de Jordan se escriben como,

$$(D-1)(D-2) f H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V - 2(D-1) H \dot{f} , \tag{3.11a}$$

$$2(D-2) f \dot{H} = -\dot{\phi}^2 - 2\ddot{f} + 2H\dot{f} . \tag{3.11b}$$

Y la ecuación de onda (3.8),

$$\ddot{\phi} + (D-1) H \dot{\phi} - (D-1)(D H^2 + 2\dot{H}) f' + V' = 0 .$$

Adicionalmente, la ecuación de estado durante la inflación

$$\omega = -1 - \frac{(D-2)}{(D-1)} \frac{\dot{H}}{H^2} ,$$

con la definiciones de densidad y presión,[3]

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}{2} H^2 \\ p_\phi &= -(D-2) \left[\dot{H} + \frac{(D-1)}{2} H^2 \right] M_{(\mathrm{D})}^{D-2} , \end{aligned}$$

para el campo escalar ϕ.

3.3.1. Aproximación slow–roll (JF)

Los supuestos que se vieron en la sección 2.5.4 para un campo mínimamente acoplado, pueden ser generalizadas a las teorías escalar–tensoriales con un acoplamiento $f(\phi)$ [35]. Estas condiciones se expresan de la forma,

$$|\ddot{f}| \ll H|\dot{f}| \ll H^2 |f| ,$$

[3] Considerando un tensor de energía–momento $T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi G_D} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right)$.

$$\dot{\phi}^2 \ll V\,.$$

La aplicación de estás condiciones sobre (3.11), conlleva a las siguientes aproximaciones,

$$(D-1)(D-2)fH^2 \approx V\,,$$
$$(D-1)H\dot{\phi} \approx \frac{D}{(D-2)}\frac{f'}{f}V - V'\,.$$

Lo cual nos permite definir los parámetros,

$$\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}\,,\ \eta_H \equiv \frac{\dot{\epsilon}_H}{H\epsilon_H}\,,\ \epsilon_f \equiv \frac{\dot{f}}{Hf}\,,\ \text{y}\ \eta_f \equiv \frac{\dot{\epsilon}_f}{H\epsilon_f}\,.$$

La inflación slow–roll en el marco de Jordan es válida cuando las condiciones $\epsilon_H \ll 1$, $\eta_H \ll 1$, $\epsilon_f \ll 1$ y $\eta_f \ll 1$ están satisfechas por el potencial hasta que la violación de estas condiciones marque el final del período inflacionario.

Capítulo 4

Sobre la equivalencia entre los marcos de Einstein y Jordan

Al introducir un campo escalar en la acción como reemplazo de la constante gravitacional de la forma expresada en (3.6), generamos un acoplamiento entre el campo escalar y el escalar de Ricci. Si deseamos expresar la acción de la gravitación de tal manera que se pueda expresar sin dicho acoplamiento, necesitamos aplicar una transformación conforme de la métrica.
En este capítulo se examina bajo qué condiciones los términos gravitacional y cinético en un lagrangiano pueden ser transformados a una forma canónica cuando un campo escalar tiene un acoplamiento no mínimo.

4.1. Transformaciones conformes

Dado un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{ab})$, donde $\mathcal{M}$ es una variedad D–dimensional suave y g_{ab} una métrica *lorentziana* en $\mathcal{M}$, se define una *transformación conforme* como la transformación de la métrica,

$$\widetilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)\,, \tag{4.1}$$

donde Ω es una función suave[1] denominada factor conforme. Suponemos que Ω es real y, por lo tanto, Ω^2 está definido positivamente. Las transformaciones conformes permiten encoger o estirar las distancias entre dos puntos del espacio–tiempo que son descritos por el mismo sistema de coordenadas en $\mathcal{M}$, pero conservando los ángulos entre los vectores[2] lo que conduce a una conservación de la estructura causal[23].
Es importante aclarar que las transformaciones de coordenadas $x^\mu \longrightarrow \widetilde{x}^\mu$ solo cambian el sistema coordenado y, por lo tanto, no alteran la geometría del espacio–tiempo, siendo de este modo completamente diferentes de las transformaciones conformes [23]. Esto es crucial dado que las transformaciones conformes conducen a una física diferente[29]. Debido a que esto suele estar relacionado con un acoplamiento diferente de un campo físico a la gravedad, se habla de diferentes marcos en los que se estudia la física[3].
En el apéndice C se proporciona una derivación detallada de las reglas de transformación para una transformación conforme. Sin embargo, es apropiado mostrar las fórmulas relevantes que se utilizarán más adelante.
Dada una transformación conforme expresada por (4.1) en un espacio–tiempo

[1] No diverge en ningún punto del espacio–tiempo.
[2] En particular los vectores nulos que definen los conos de luz.
[3] Revisar [36] para una enfoque ligeramente diferente.

D–dimensional, el determinante de la métrica $g = det(g_{\mu\nu})$ se transforma como

$$\sqrt{-\widetilde{g}} = \Omega^D \sqrt{-g}\,.$$

Y el escalar de Ricci, el cual está expresado en términos de la métrica y sus primeras y segundas derivadas, se transforma como,

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\Omega^2}\left\{R - \frac{1}{\Omega}\left[2(D-1)\Box\Omega\right] - \frac{1}{\Omega^2}\left[(D-1)(D-4)\nabla_\lambda\Omega\nabla^\lambda\Omega\right]\right\}. \qquad (4.2)$$

4.2. La equivalencia

En esta sección se demostrará la equivalencia que existe entre el marco de Jordan,[4]

$$S_{JF} = \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[f(\phi)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right], \qquad (4.3)$$

y el marco de Einstein,

$$S_{EF} = \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}\left[\frac{\widetilde{R}}{16\pi G_D} - \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}_\mu\hat{\phi}\widetilde{\nabla}_\nu\hat{\phi} - \hat{V}(\hat{\phi})\right], \qquad (4.4)$$

por medio de una transformación conforme.
Consideraremos que $f(\phi)$ está definida positivamente y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es adimensional. Entonces en D dimensiones, los tiempos y longitudes tienen dimensiones de $[\mathrm{M}]^{-1}$; además, el elemento de volumen en la integral (4.3), $\mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}$ posee dimensiones de $[\mathrm{M}]^D$ y el escalar de Ricci dimensiones $[\mathrm{M}]^2$. Debido a esto, para que el integrando permanezca adimensional, el término cinético del campo escalar ϕ debe tener dimensiones $[\mathrm{M}]^{\frac{D-2}{2}}$. Es posible parametrizar también

$$\frac{1}{8\pi G_D} \equiv M_{(\mathrm{D})}^{D-2}.$$

La ecuación (4.2) puede ser reescrita como

$$R = \Omega^2\widetilde{R} + 2(D-1)\frac{\Box\Omega}{\Omega} - (D-1)(D-4)\frac{\nabla_\lambda\Omega\nabla^\lambda\Omega}{\Omega^2}. \qquad (4.5)$$

[4]Una demostración para el caso $D = 4$ puede verse en [37].

Usando la ecuación (4.5) y aplicando la transformación conforme (4.1) sobre el primer término de la acción (4.3), esta se vuelve

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}f(\phi)R = & \int \mathrm{d}^D x\,\frac{\sqrt{-\widetilde{g}}}{\Omega^D}f(\phi)\left[\Omega^2\widetilde{R}+2(D-1)\frac{\Box\Omega}{\Omega}-(D-1)(D-4)\times\right.\\ & \left.\frac{\nabla_\lambda\Omega\nabla^\lambda\Omega}{\Omega^2}\right]\\ = & \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}\left[\left(\frac{f(\phi)}{\Omega^{D-2}}\right)\widetilde{R}+2(D-1)f(\phi)\frac{\Box\Omega}{\Omega^{D+1}}-\right.\\ & \left.(D-1)(D-4)f(\phi)\frac{\nabla_\lambda\Omega\nabla^\lambda\Omega}{\Omega^{D+2}}\right]. \qquad (4.6)\end{aligned}$$

El primer término del lado derecho se convierte en

$$\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}\left(\frac{f(\phi)}{\Omega^{D-2}}\right)\widetilde{R}\,.$$

Para obtener la acción gravitacional en el marco de Einstein, el término $f(\phi)/\Omega^{D-2}$ se debe reducir a $M_{(\mathrm{D})}^{D-2}/2$. Para ello identificamos

$$\Omega^{D-2}(x)=\frac{2}{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}f(\phi(x))\,. \qquad (4.7)$$

Podemos integrar el segundo término en el lado derecho de la ecuación (4.6) por partes[5]. Usando las ecuaciones (4.1), (C.8) y (4.7) encontramos que

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}f(\phi)\frac{2(D-1)}{\Omega^{D+1}}\Box\Omega = & -\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}(D-1)(D-3)M_{(\mathrm{D})}^{D-2}\times\\ & \frac{1}{\Omega^2}\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}_\mu\Omega\widetilde{\nabla}_\nu\Omega\,. \qquad (4.8)\end{aligned}$$

Es importante resaltar que x^μ no se ve afectado por la transformación conforme, de modo que $\widetilde{\partial}_\mu=\partial_\mu$. Debido a que las derivadas covariantes en (4.8) actúan solo sobre funciones escalares, tenemos que $\nabla_\mu\Omega=\partial_\mu\Omega$ y $\widetilde{\nabla}_\mu\Omega=\nabla_\mu\Omega$.
El último término en el lado derecho de la ecuación (4.6) es,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}(D-1)(D-4)\left(\frac{f(\phi)}{\Omega^{D+2}}\right)\nabla_\lambda\Omega\nabla^\lambda\Omega = & \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}(D-1)\times\\ & (D-4)M_{(\mathrm{D})}^{D-2}\frac{1}{\Omega^2}\nabla_\lambda\Omega\nabla^\lambda\Omega\,, \qquad (4.9)\end{aligned}$$

donde se usó nuevamente las ecuaciones (4.1) y (4.7).
Combinando las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.9) se encuentra

$$\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}f(\phi)R = \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}\frac{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}{2}\left[\widetilde{R}-(D-1)(D-2)\times\right.$$

[5]Nótese que el operador $\Box$ que actúa sobre Ω está definido en términos de la métrica original $g_{\mu\nu}$ en lugar de la métrica transformada $\widetilde{g}_{\mu\nu}$.

$$\frac{1}{\Omega^2}\widetilde{\nabla}_\lambda\Omega\widetilde{\nabla}^\lambda\Omega\Big] .$$

Considerando cómo los términos cinéticos y potenciales del campo escalar en la acción se transforman bajo $g_{\mu\nu} \longrightarrow \widetilde{g}_{\mu\nu}$,

$$\int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] = \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega^{D-2}}\widetilde{g}^{\mu\nu}\times \widetilde{\nabla}_\mu\phi\widetilde{\nabla}_\nu\phi - \hat{V}(\phi)\right] .$$

donde se ha introducido un potencial transformado

$$\hat{V} = \frac{V}{\Omega^D}.$$

La acción completa la ecuación (4.3) se puede escribir

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{JF}} &= \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-g}\left[f(\phi)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] \\ &= \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}\left[\frac{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}{2}\widetilde{R} - (D-1)(D-2)\frac{1}{\Omega^2}\widetilde{\nabla}_\lambda\Omega\widetilde{\nabla}^\lambda\Omega - \frac{1}{2}\frac{1}{\Omega^{D-2}}\widetilde{g}^{\mu\nu}\times \right. \\ &\quad \left. \widetilde{\nabla}_\mu\phi\widetilde{\nabla}_\nu\phi - \hat{V}(\phi)\right] . \end{aligned}$$

Al sustituir $f(\phi)$ por Ω usando la ecuación (4.7), la acción en el nuevo marco transformado se convierte en

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{JF}} = \int \mathrm{d}^D x\,\sqrt{-\widetilde{g}}\Bigg[&\frac{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}{2}\widetilde{R} - \frac{1}{2}\frac{(D-1)}{(D-2)}\frac{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}{f^2}\widetilde{\nabla}_\lambda f\widetilde{\nabla}^\lambda f \\ &-\frac{1}{4f}M_{(\mathrm{D})}^{D-2}\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}_\mu\phi\widetilde{\nabla}_\nu\phi - \hat{V}(\phi)\Bigg] . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Podemos cambiar la escala del campo, $\phi \longrightarrow \hat{\phi}$, de modo que el nuevo campo escalar en el marco transformado tenga el término cinético canónico en la acción de la ecuación (4.10). Con tal propósito definimos $\hat{\phi}$ tal que

$$-\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}_\mu\hat{\phi}\widetilde{\nabla}_\nu\hat{\phi} = -\frac{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}{4f}\widetilde{g}^{\mu\nu}\left[\widetilde{\nabla}_\mu\phi\widetilde{\nabla}_\nu\phi + \frac{2(D-1)}{(D-2)}\frac{1}{f}\widetilde{\nabla}_\mu f\widetilde{\nabla}_\nu f\right] . \tag{4.11}$$

Podemos asumir una transformación uno a uno entre $\hat{\phi}$ y ϕ. En particular, asumimos que $\hat{\phi} \equiv \hat{\phi}(\phi)$, o

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi} = F(\phi),$$

donde,

$$F(\phi) = \sqrt{\frac{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}{2f^2}}\sqrt{f(\phi) + \frac{2(D-1)}{(D-2)}\left[\frac{\mathrm{d}f(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right]^2} . \tag{4.12}$$

En términos del campo reescalado, la acción de la ecuación (3.6) se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} S_{\rm JF} &= \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-g} \left[f(\phi) R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] \\ &= \int \mathrm{d}^D x \sqrt{-\widetilde{g}} \left[\frac{M_{(\mathrm{D})}^{D-2}}{2} \widetilde{R} - \frac{1}{2} \widetilde{g}^{\mu\nu} \widetilde{\nabla}_\mu \hat{\phi} \widetilde{\nabla}_\nu \hat{\phi} - \hat{V}(\hat{\phi}) \right] \\ &= S_{\rm EF} \,, \end{aligned}$$

La acción en la segunda línea ahora tiene la forma canónica de Einstein–Hilbert tanto para el término gravitacional como para el término cinético canónico. Puesto a que solo estamos considerando modelos en los que $f(\phi)$ es positivo definido y real, la combinación en el lado derecho de la ecuación (4.12) siempre es distinto de cero [38]. En estas condiciones, los modelos con un solo campo escalar no acoplado mínimamente pueden relacionarse, mediante transformación conforme y un reescalado de campo, con un modelo equivalente que involucre gravedad ordinaria y un campo escalar mínimamente acoplado. Debido a todo esto, dada una transformación conforme, estos modelos son equivalentes a la gravedad de Einstein con una constante cosmológica [39].

4.3. Transformaciones conformes en cosmología

La cosmología estándar del Big Bang basada en la Relatividad General es una descripción muy exitosa del universo que observamos [26], aunque las soluciones cosmológicas presentadas también se han estudiado en el marco de teorías alternativas de la gravedad [28]. Sin embargo, la necesidad de resolver los problemas del horizonte, la planitud, los monopolos, y de encontrar un mecanismo viable para la generación de fluctuaciones de densidad que evolucionan hacia las estructuras que vemos hoy (galaxias, cúmulos, supercúmulos y *voids*) motivó la investigación más allá del modelo del Big Bang y condujo al paradigma de la inflación cósmica [40-42].

Si bien no existe un modelo de inflación universalmente aceptado se han propuesto varios escenarios basados en la Relatividad General y en teorías alternativas de la gravedad. Dado que muchas de las teorías alternativas utilizadas implican una transformación conforme hacia un nuevo marco, es natural que resurja en cosmología el problema de si al marco de Jordan, o el de Einstein, se le debe considerar el marco físico [43]. A veces, los dos marcos se tratan implícitamente como si ambos fueran simultáneamente físicos, y parte de los resultados se presentan en el marco de Jordan y otra parte de los resultados en el marco de Einstein, aunque la cuestión sobre la equivalencia si se considerasen fenómenos cuánticos sigue siendo un tema de debate en cosmología [44]. Un problema importante proviene de la definición del número de e–folds (2.9) ya que es una cantidad claramente dependiente del marco. Usando el formalismo de parametrización invariante [45], se puede probar que tanto el número de e–folds en el marco de Jordan, como el marco de Einstein, pueden escribirse en

términos de cantidades invariantes y que la diferencia es una invariante en sí misma; por tanto, la cuestión se convierte en una elección entre dos invariantes diferentes [46]; sin embargo, la ambigüedad sobre a cual se le debe considerar el marco físico aún permanece [47]. También se han reportado fuertes indicios de que dicha equivalencia puede ser válida en la escala cuántica mediante otros enfoques [48]

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo de investigación se ha presentado un estudio de la teoría de Brans–Dicke y se ha realizado la demostración de la equivalencia entre el marco de Jordan y el marco de Einstein por medio de una transformación conforme y un reescalamiento del campo escalar.

En el primer capítulo se comenzó examinando la teoría de la Relatividad General de Einstein bajo la formulación variacional, con lo cual, a partir de la acción de Einstein–Hilbert, se obtuvo las Ecuaciones de Campo de Einstein en D–dimensiones (1.5), mostrándose tres ejemplos del tensor de energía–momento: campo escalar, campo electromagnético y el fluido perfecto.

En el siguiente capítulo se presentó una revisión de los fundamentos de la cosmología moderna, en un espacio–tiempo D–dimensional, para abordar los problemas del Big Bang y se mostró cómo el paradigma de la inflación cósmica resuelve dichos problemas. También se presentó una breve descripción de la inflación slow–roll.

En el tercer capítulo se presentaron las principales características de la teoría escalar–tensorial, revisando primero el prototipo de Brans–Dicke, reescribiendo luego la acción de Brans–Dicke e incluyéndola como un caso particular de las teorías escalar–tensoriales (3.6). También se mostró las ecuaciones y parámetros de la aproximación slow–roll en el marco de Jordan considerando D–dimensiones.

En el último capítulo, se abordaron las transformaciones conformes para mostrar que la acción en el marco de Jordan puede ser reducida a la forma canónica de Einstein–Hilbert, como se demostró en la sección 4.2.

De esta manera, se concluye que es válido estudiar una teoría con un campo acoplado de manera no mínima a la gravedad en términos de otra teoría con un campo mínimamente acoplado, siempre y cuando se satisfaga entre las teorías la condición (4.12).

Por otro lado, si se consideran fenómenos cuánticos la equivalencia no es necesariamente válida; sin embargo existen enfoques para los cuales abordar este problema, como se menciona en la sección 4.3.

Apéndice

Apéndice A

Espacio–tiempo de FLRW

A.1. Tensor métrico

La métrica puede ser elegida de la forma

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1\,, \\ g_{it} &= 0\,, \\ g_{ij} &= a(t)^2 \hat{g}_{ij}\,. \end{aligned}$$

Donde t es una coordenada de tiempo cósmico, mientras i y j son las coordenadas espaciales y $\hat{g}_{ij}$ es el tensor métrico de la hipersuperficie $(D-1)$–dimensional.

A.2. Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma^t_{ij} = a\dot{a}\hat{g}_{ij}\,, \tag{A.1a}$$

$$\Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}\,, \tag{A.1b}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \hat{\Gamma}^k_{ij}\,, \tag{A.1c}$$

donde $\hat{\Gamma}^k_{ij}$ son los símbolos de Christoffel de la hipersuperficie $(D-1)$–dimensional.

A.3. Tensor de Ricci

De igual manera, las componentes no nulas del tensor de Ricci,

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -(D-1)\frac{\ddot{a}}{a}\,, \\ R_{ij} &= \hat{R}_{ij} + \left[a\ddot{a} + (D-2)\dot{a}^2\right]\hat{g}_{ij}\,, \end{aligned}$$

donde $\hat{R}_{ij}$ es el tensor de Ricci de la hipersuperficie $(D-1)$–dimensional, que es un espacio máximamente simétrico [49]. Para tales espacios, los tensores de Riemman y de Ricci toman formas simplificadas que se pueden escribir como,-

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\sigma\nu} &= k(g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\lambda\nu}), \\ R_{\mu\nu} &= g^{\lambda\sigma}R_{\lambda\mu\sigma\nu} \\ &= k(D-1)g_{\mu\nu}\,. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$R_{tt} = -(D-1)\frac{\ddot{a}}{a}\,, \tag{A.2a}$$

$$R_{ij} = \left[a\ddot{a} + (D-2)\dot{a}^2 + k(D-2)\right]\hat{g}_{ij}\,., \tag{A.2b}$$

A.4. Escalar de curvatura de Ricci

Para el escalar de Ricci,

$$R = (D-1)\left[2\frac{\ddot{a}}{a} + (D-2)\frac{\dot{a}^2}{a^2} + (D-2)\frac{k}{a^2}\right]\,.$$

Para el caso del espacio–tiempo plano ($k = 0$), las ecuaciones se reducen a [50],

$$R_{tt} = -(D-1)\frac{\ddot{a}}{a}\,, \tag{A.3a}$$

$$R_{ij} = \left[a\ddot{a} + (D-2)\dot{a}^2\right]\hat{g}_{ij}\,, \tag{A.3b}$$

$$R = (D-1)\left[2\frac{\ddot{a}}{a} + (D-2)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right]\,. \tag{A.3c}$$

A.5. Operador de D'Alembert

Para el operador de D'Alembert sobre la función $f(\phi)$,

$$\begin{aligned}\Box f(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu f(\phi)\right)\\ &= -\left[\ddot{f} + (D-1)H\dot{f}\right]\,.\end{aligned}$$

Apéndice B

Ecuación de estado

Consideremos un recipiente, en una hipersuperficie $(D-1)$–dimensional, que encierra un gas perfecto tal que una de sus superficies es perpendicular a uno de los ejes: x_1.
La velocidad de una molécula de gas en el espacio está dada por

$$v^2 = v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + ... + v_{x_{D-1}}^2 \,,$$

donde v_{x_i} son las componentes en las direcciones respectivas. Llamemos $v_{x_i} = u$, el cambio en u se produce por reflexión sobre la superficie perpendicular a x_1. El cambio de momento después de la reflexión para una molécula de masa m es $2mu$. Si hay n_u moléculas que golpean por área unitaria de impacto de la superficie por unidad de tiempo, el cambio total de impulso por unidad de área por unidad de tiempo, es decir, la presión promedio es

$$p = 2mun_u$$

Si n_{u_i} partículas se mueven con velocidades u_i donde solo consideramos partículas que se mueven en el eje x_1, entonces la presión viene dada por

$$p = 2m \sum n_{u_i} u_i^2 = 2m \times \frac{1}{2} n\overline{u^2} \,,$$

donde $\overline{u^2}$ es la velocidad cuadrática media en la dirección x_1, dada por

$$\overline{u^2} = \frac{\sum n_{u_i} u_i^2}{\sum n_{u_i}} = \frac{\sum n_{u_i} u_i^2}{n/2} \,.$$

Tenga en cuenta que el factor de $\frac{1}{2}$ es debido a que solo se consideran las moléculas a lo largo del eje x_1, por lo que la presión a lo largo de este eje viene dada por

$$p_{x_1} = mn\overline{u^2} \,,$$

que será la misma que la presión a lo largo de los otros ejes, por lo tanto, la presión en general

$$p = \frac{1}{(D-1)} mn\overline{v^2} \,,$$

donde $\overline{v_{x_1}^2} = \overline{v_{x_2}^2} = ... = \overline{v_{x_{D-1}}^2} = \frac{1}{(D-1)}\overline{v^2}$. Siendo $\overline{v^2}$ la media cuadrática de la velocidad total.
Por lo tanto, la ecuación de estado [22] se escribe como

$$p = \frac{1}{(D-1)} \overline{v^2} \rho_m \,,$$

donde $\rho_m = mn$ es la densidad de masa del gas.

B.1. Polvo cósmico

Para partículas no relativista [50], $\overline{v^2} \ll 1$, o $\overline{v^2} \approx 0$. Por lo que

$$p_{dust} = 0\,.$$

B.2. Radiación

Para partículas relativistas [50], la densidad de energía (ρ) es la densidad de masa (ρ_m) y $\overline{v^2} = 1$

$$p_{rad} = \frac{1}{(D-1)}\rho\,.$$

Apéndice C

Transformaciones Conformes

C.1. Tensor métrico

En una transformación conforme, la métrica tansforma como,

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \tag{C.1}$$

tal que para una variedad D–dimensional se cumpla que,

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} = D.$$

O de manera equivalente,

$$\begin{cases} g^{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x) \widetilde{g}^{\mu\nu} \\ g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \widetilde{g}_{\mu\nu}. \end{cases}$$

Lo cual implica implica,

$$\begin{cases} \widetilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x) g^{\mu\nu} \\ \widetilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}. \end{cases}$$

C.2. Símbolos de Christoffel

Aplicando la transformación métrica sobre los Símbolos de Christoffel [51],

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Omega^{-2} g^{\lambda\rho} \left[\partial_\mu \left(\Omega^2 g_{\rho\nu} \right) + \partial_\nu \left(\Omega^2 g_{\rho\mu} \right) - \partial_\rho \left(\Omega^2 g_{\mu\nu} \right) \right] \\ &= \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{\Omega} \left(\delta^\lambda_\nu \nabla_\mu \Omega + \delta^\lambda_\mu \nabla_\nu \Omega - g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \Omega \right). \end{aligned} \tag{C.2}$$

De igual manera, aplicando la trasformación conforme sobre la derivada de los símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \widetilde{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\sigma} &= \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} + \partial_\mu \left[\frac{1}{\Omega} \left(\delta^\rho_\sigma \nabla_\nu \Omega + \delta^\rho_\nu \nabla_\sigma \Omega - g_{\nu\sigma} \nabla^\rho \Omega \right) \right] \\ &= \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} + \frac{1}{\Omega} \left(\delta^\rho_\sigma \partial_\mu \nabla_\nu \Omega + \delta^\rho_\nu \partial_\mu \nabla_\sigma \Omega - \nabla^\rho \Omega \partial_\mu g_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} \partial_\mu \nabla^\rho \Omega \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Omega^2} \left(\delta^\rho_\sigma \nabla_\nu \Omega \nabla_\mu \Omega + \delta^\rho_\nu \nabla_\sigma \Omega \nabla_\mu \Omega - g_{\nu\sigma} \nabla^\rho \Omega \nabla_\mu \Omega \right). \end{aligned} \tag{C.3}$$

Similarmente, sobre el producto de dos símbolos de Christoffel,

$$\widetilde{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\lambda} \widetilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\sigma} = \left[\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} + \frac{1}{\Omega} \left(\delta^\rho_\lambda \nabla_\mu \Omega + \delta^\rho_\mu \nabla_\lambda \Omega - g_{\mu\lambda} \nabla^\rho \Omega \right) \right] \left[\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} + \frac{1}{\Omega} \left(\delta^\lambda_\sigma \nabla_\nu \Omega \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\ \delta^{\lambda}_{\nu}\nabla_{\sigma}\Omega - g_{\nu\sigma}\nabla^{\lambda}\Omega)\big] \\
&= \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} + \frac{1}{\Omega}\left(\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\nabla_{\nu}\Omega + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\Omega - g_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\nabla^{\lambda}\Omega + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}\right. \\
&\quad \left.\times\nabla_{\mu}\Omega + \delta^{\rho}_{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\nabla_{\lambda}\Omega - g_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\nabla^{\rho}\Omega\right) + \frac{1}{\Omega^2}\left(\delta^{\rho}_{\sigma}\nabla_{\mu}\Omega\nabla_{\nu}\Omega + \right. \\
&\quad \left.\delta^{\rho}_{\nu}\nabla_{\mu}\Omega\nabla_{\sigma}\Omega + 2\delta^{\rho}_{\mu}\nabla_{\sigma}\Omega\nabla_{\nu}\Omega - g_{\nu\sigma}\delta^{\rho}_{\mu}\nabla_{\lambda}\Omega\nabla^{\lambda}\Omega - g_{\mu\sigma}\nabla_{\nu}\Omega\nabla^{\rho}\Omega\right. \\
&\quad \left.-g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\Omega\nabla^{\rho}\Omega\right). \qquad \text{(C.4)}
\end{aligned}
$$

C.3. Tensor de curvatura de Riemann

Usando C.3 y C.4 sobre la definición del tensor de Riemann [51] y simplificando,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} &+ \frac{1}{\Omega}\left[\delta^{\rho}_{\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\sigma}\Omega - \delta^{\rho}_{\mu}\nabla_{\nu}\nabla_{\sigma}\Omega - g_{\nu\sigma}\nabla_{\mu}\nabla^{\rho}\Omega + g_{\mu\sigma}\nabla_{\nu}\nabla^{\rho}\Omega\right] \\
&+ \frac{2}{\Omega^2}\left[\left(g_{\nu\sigma}\nabla_{\mu}\Omega - g_{\mu\sigma}\nabla_{\nu}\Omega\right)\nabla^{\rho}\Omega + \delta^{\rho}_{\mu}\nabla_{\sigma}\Omega\nabla_{\nu}\Omega - \delta^{\rho}_{\nu}\nabla_{\sigma}\Omega\nabla_{\mu}\Omega\right] \\
&+ \frac{1}{\Omega^2}\left[\left(\delta^{\rho}_{\nu}g_{\mu\sigma} - \delta^{\rho}_{\mu}g_{\nu\sigma}\right)\nabla_{\lambda}\Omega\nabla^{\lambda}\Omega\right] \qquad \text{(C.5)}
\end{aligned}
$$

C.4. Tensor de Ricci

Calculando la traza del tensor de Riemann [51],

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}_{\sigma\nu} = R_{\sigma\nu} - \frac{1}{\Omega}\left[(D-2)\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}\Omega + g_{\sigma\nu}\Box\Omega\right] - \frac{1}{\Omega^2}\left[2(D-2)\nabla_{\sigma}\Omega\nabla_{\nu}\Omega - (D-3)\times\right. \\
\left. g_{\sigma\nu}\nabla_{\lambda}\Omega\nabla^{\lambda}\Omega\right]. \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

C.5. Escalar de curvatura de Ricci

Calculando la traza del tensor de Ricci [51],

$$
\widetilde{R} = \frac{1}{\Omega^2}\left\{R - \frac{1}{\Omega}\left[2(D-1)\Box\Omega\right] - \frac{1}{\Omega^2}\left[(D-1)(D-4)\nabla_{\lambda}\Omega\nabla^{\lambda}\Omega\right]\right\}. \qquad \text{(C.7)}
$$

C.6. Operador de D'Alambert

Aplicando la la transformación métrica sobre el operador de D'Alambert [51],

$$
\widetilde{\Box}\Phi = \frac{1}{\Omega^2}\left[\Box\Phi + (D-2)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\Omega\partial_{\nu}\Phi\right]. \qquad \text{(C.8)}
$$

Bibliografía

[1] Dicke, R. «Republication of: The theoretical significance of experimental relativity». En: *General Relativity and Gravitation* vol. 51, n.º 5 (2019), págs. 1-31.

[2] d'Inverno, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. New York: Oxford University Press, 1992.

[3] Jordan, P. «Formation of the Stars and Development of the Universe». En: *Nature* vol. 164, n.º 4172 (1949), págs. 637-640.

[4] Dirac, P. A. M. «The Cosmological Constants». En: *Nature* vol. 139, n.º 3512 (1937), págs. 323-323.

[5] Jordan, P. «Zur empirischen kosmologie». En: *Zeitschrift für Physik* vol. 157 (1959), págs. 112-121.

[6] Brans, C. y Dicke, R. H. «Mach's principle and a relativistic theory of gravitation». En: *Physical Review* vol. 124 (1961), págs. 925-935.

[7] Dicke, R. H. «Experimental tests of Mach's principle». En: *Physical Review Letters* vol. 7, n.º 9 (1961), págs. 359-360.

[8] Dicke, R. H. «Mach's principle and invariance under transformation of units». En: *Physical Review* vol. 125, n.º 6 (1962), pág. 2163.

[9] Bergmann, P. G. «Comments on the Scalar–Tensor Theory». En: *International Journal of Theoretical Physics* vol. 1, n.º 1 (1968), págs. 25-36.

[10] Wagoner, R. V. «Scalar–tensor theory and gravitational waves». En: *Physical Review D* vol. 1, n.º 12 (1970), pág. 3209.

[11] Nordtvedt Jr, K. «Post–Newtonian Metric for a General Class of Scalar–Tensor Gravitational Theories and Observational Consequences». En: *The Astrophysical Journal* vol. 161 (1970), pág. 1059.

[12] Bekenstein, J. D. «Are particle rest masses variable? Theory and constraints from solar system experiments». En: *Physical Review D* vol. 15, n.º 6 (1977), pág. 1458.

[13] Felice, A. D. y Tsujikawa, S. «Generalized Brans-Dicke theories». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* vol. 2010, n.º 07 (jul. de 2010), págs. 024-024.

[14] Appelquist, T., Chodos, A. y Freund, P. G. O. *Modern Kaluza–Klein Theories*. Vol. 65. Addison-Wesley, 1987.

[15] Rainer, M. y Zhuk, A. «Tensor–multiscalar theories from multidimensional cosmology». En: *Physical Review D* vol. 54 (10 nov. de 1996), págs. 6186-6192.

[16] Bekenstein, J. D. y Meisels, A. «General Relativity without General Relativity». En: *Physical Review D* vol. 18, n.º 12 (1978), pág. 4378.

[17] Landau, L. D. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2. Elsevier, 2013.

[18] Thorne, K. S., Misner, C. W. y Wheeler, J. A. *Gravitation*. Freeman San Francisco, 2000.

[19] Aghanim, N. y col. «Planck 2018 results-V. CMB power spectra and likelihoods». En: *Astronomy & Astrophysics* vol. 641 (2020), A5.

[20] Hubble, E. «A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* vol. 15, n.º 3 (1929), págs. 168-173.

[21] Friedmann, A. «Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes». En: *Zeitschrift für Physik* vol. 21, n.º 1 (1924), págs. 326-332.

[22] Tanisman, A. C. y col. «D–dimensional cosmology via thermodynamics». En: *The European Physical Journal Plus* vol. 134, n.º 7 (2019), pág. 325.

[23] Hawking, S. y Ellis, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space–Time*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1973.

[24] Liddle, A. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.

[25] Akrami, Y. y col. «Planck 2018 results-X. Constraints on inflation». En: *Astronomy & Astrophysics* vol. 641 (2020), A10.

[26] Aghanim, N. y col. «Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters». En: *Astronomy & Astrophysics* vol. 641 (2020), A6.

[27] Vilenkin, A. y Shellard, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 1994.

[28] Faraoni, V. *Cosmology in scalar–tensor gravity*. Vol. 139. Springer Science y Business Media, 2004.

[29] Fujii, Y. y Maeda, K. *The scalar–tensor theory of gravitation*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[30] Horbatsch, M. W. «Neutron stars and black holes in scalar–tensor gravity». Tesis doct. McMaster University, 2012.

[31] Faraoni, V. «The $\omega \longrightarrow \infty$ limit of Brans-Dicke theory». En: *Physics Letters A* vol. 245, n.º 1-2 (1998), págs. 26-30.

[32] Walker, T. P. y col. «Primordial nucleosynthesis redux». En: *The Astrophysical Journal* vol. 376 (1991), págs. 51-69.

[33] Will, C. M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. 2.ª ed. Cambridge University Press, 2018.

[34] Dyer, E. e Hinterbichler, K. «Boundary terms, variational principles, and higher derivative modified gravity». En: *Physical Review D* vol. 79, n.º 2 (2009), pág. 024028.

[35] Torres, D. F. «Slow roll inflation in nonminimally coupled theories: hyperextended gravity approach». En: *Physics Letters A* vol. 225, n.º 1 (1997), págs. 13-17.

[36] Faraoni, V. «Negative Energy and Stability in Scalar–Tensor Gravity». En: *Physical Review D* vol. 70, n.º 8 (2004), 081501(4).

[37] Postma, M. y Volponi, M. «Equivalence of the Einstein and Jordan frames». En: *Physical Review D* vol. 90 (10 2014), pág. 103516.

[38] Kaiser, D. I. «Conformal transformations with multiple scalar fields». En: *Physical Review D* vol. 81, n.º 8 (2010), pág. 084044.

[39] Shapiro, I. L. «On the conformal transformation and duality in gravity». En: *Classical and Quantum Gravity* vol. 14, n.º 2 (1997), pág. 391.

[40] Linde, A. *Particle physics and inflationary cosmology*. 1.ª ed. Vol. 5. Contemporary Concepts in Physics. CRC press, 1990.

[41] Kolb, E. W. y Turner, M. S. *The Early Universe*. CRC press, 2018.

[42] Liddle, A. R. y Lyth, D. H. «The cold dark matter density perturbation». En: *Physics Reports* vol. 231, n.º 1-2 (1993), págs. 1-105.

[43] Faraoni, V. y Gunzig, E. «Einstein frame or Jordan frame?» En: *International Journal of Theoretical Physics* vol. 38, n.º 1 (1999), págs. 217-225.

[44] Kamenshchik, A. Y. y Steinwachs, C. F. «Question of quantum equivalence between Jordan frame and Einstein frame». En: *Physical Review D* vol. 91, n.º 8 (2015), pág. 084033.

[45] Järv, L. y col. «Frame-Independent Classification of Single–Field Inflationary Models». En: *Physical Review Letters* vol. 118 (15 abr. de 2017), pág. 151302.

[46] Karam, A., Pappas, T. y Tamvakis, K. «Frame-dependence of higher-order inflationary observables in scalar–tensor theories». En: *Physical Review D* vol. 96 (6 sep. de 2017), pág. 064036.

[47] Racioppi, A. y Vasar, M. *On the number of e-folds in the Jordan and Einstein frames*. 2021. arXiv: 2111.09677 [gr-qc].

[48] Ohta, N. «Quantum equivalence of $f(R)$ gravity and scalar–tensor theories in the Jordan and Einstein frames». En: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* vol. 2018, n.º 3 (2018), 033B02.

[49] Weinberg, S. «Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity». En: *American Journal of Physics* vol. 41, n.º 4 (1973), págs. 598-599.

[50] Bagchi, A. *Scalar–tensor theory for gravity in D dimensions*. Anna University, 2009.

[51] Dabrowski, M. P., Garecki, J. y Blaschke, D. B. «Conformal transformations and conformal invariance in gravitation». En: *Annalen der Physik* vol. 18, n.º 1 (2009), págs. 13-32.