**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**
**Universidad del Perú. Decana de América**
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

# Existencia y regularidad de la solución de una generalización de la ecuación de Schrödinger en espacios de Sobolev periódico

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**AUTOR**

Israel Patricio YAHUANA BRUNO

**ASESOR**

Dra. Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

**Referencia bibliográfica**

---

Yahuana, I. (2026). *Existencia y regularidad de la solución de una generalización de la ecuación de Schrödinger en espacios de Sobolev periódico*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

## Metadatos complementarios

| | |
|---|---|
| **Datos de autor** | |
| Nombres y apellidos | Israel Patricio Yahuana Bruno |
| Tipo de documento de identidad | DNI |
| Número de documento de identidad | 75672258 |
| URL de ORCID | https://orcid.org/0009-0009-9219-1927 |
| **Datos de asesor** | |
| Nombres y apellidos | Yolanda Silvia Santiago Ayala |
| Tipo de documento de identidad | DNI |
| Número de documento de identidad | 06445705 |
| URL de ORCID | https://orcid.org/0000-0003-2516-0871 |
| **Datos del jurado** | |
| **Presidente del jurado** | |
| Nombres y apellidos | Renato Mario Benazic Tomé |
| Tipo de documento | DNI |
| Número de documento de identidad | 06445668 |
| **Miembro del jurado 1** | |
| Nombres y apellidos | Teófanes Quispe Méndez |
| Tipo de documento | DNI |
| Número de documento de identidad | 06969492 |
| **Datos de investigación** | |
| Línea de investigación | A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional |

| | |
|---|---|
| Grupo de investigación | Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis y Aplicaciones - GEDAAp |
| Agencia de financiamiento | Sin financiamiento |
| Ubicación geográfica de la investigación | País: Perú<br>Departamento: Lima<br>Provincia: Lima<br>Distrito: Cercado de Lima<br>Latitud: -12.063897<br>Altitud: -77.064461 |
| Año o rango de años en que se realizó la investigación | 2023-2025 |
| URL de disciplinas OCDE | MATEMATICA PURA<br>https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00 |

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS**
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

## ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 horas del jueves 26 de marzo de 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Renato Mario Benazic Tomé (PRESIDENTE), Mg. Teófanes Quispe Méndez (MIEMBRO) y el Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "EXISTENCIA Y REGULARIDAD DE LA SOLUCIÓN DE UNA GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN ESPACIOS DE SOBOLEV PERIÓDICO", presentado por el señor Bachiller ISRAEL PATRICIO YAHUANA BRUNO, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ..... SOBRESALIENTE ..... con un calificativo promedio de ..... DIECIOCHO ..... (.18.).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Renato Mario Benazic Tomé, manifestó que el señor Bachiller ISRAEL PATRICIO YAHUANA BRUNO, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 17:05. horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Renato Mario Benazic Tomé
PRESIDENTE

Mg. Teófanes Quispe Méndez
MIEMBRO

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
MIEMBRO ASESOR

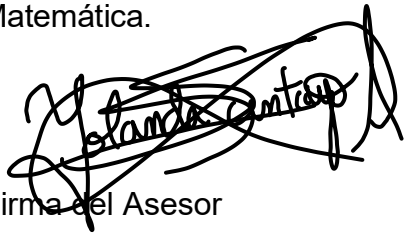
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

## Anexo 1

## CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N° 000139-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es **"Existencia y regularidad de la solución de una generalización de la ecuación de Schrödinger en espacios de Sobolev periódico"**, presentado por el bachiller Israel Patricio Yahuana Bruno para optar el título profesional de Licenciad**o** en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 17% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.



Lima, 26 de marzo de 2026

Firma del Asesor

Asesor: Yolanda Silvia Santiago Ayala

DNI: 06445705

# Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la sabiduría e inteligencia en todos estos años de estudio y el apoyo en acabar este trabajo.

Agradezco a mis padres, Patricio Yahuana Correa y Erica Marisela Bruno Vega, por su apoyo constante en mis estudios y ejemplo de vida.

Agradezco a mi tía, Margarita Yahuana Correa, por su apoyo en mis estudios, motivación y alegría que me inspiraron a seguir.

Agradezco a mi asesora, la Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala, por su tiempo, enseñanza, paciencia, observaciones y sugerencias en el trabajo de tesis.

# Índice general

**Resumen** **IV**

**Abstract** **V**

**Introducción** **VI**

**I Preliminares** **1**

1.1 La transformada de Fourier en $\mathscr{P}$ . . . . . 1

1.2 La transformada de Fourier en $\mathscr{P}'$ . . . . . 5

1.3 Espacios de Sobolev periódicos . . . . . 11

1.4 Semigrupos y grupos de operadores lineales acotados . . . . . 13

**II Ecuación de Schrödinger Homogénea en Espacios de Sobolev Periódicos** **15**

2.1 Ecuación de Schrödinger homogénea . . . . . 15

2.2 Grupo de operadores lineales acotados . . . . . 25

2.3 Diferenciabilidad versus condición inicial de la ecuación de Schrödinger homogénea . . . . . 34

2.4 Propiedad conservativa de la ecuación de Schrödinger homogénea . . . . . 36

**III Una Generalización de la Ecuación de Schrödinger Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico** **38**

3.1 Una Generalización de la ecuación de Schrödinger homogénea . . . . . 38

3.2 Grupo de operadores lineales acotados . . . . . 49

3.3 Diferenciabilidad versus condición inicial de una generalización de la ecuación de Schrödinger homogénea . . . . . 58

3.4 Propiedad conservativa de una generalización de la ecuación de Schrödinger homogénea . . . . . 59

**IV Ecuación de Schrödinger no Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico 62**

4.1 Solución particular de la ecuación de Schrödinger no homogénea . . . . . 62

4.2 Solución general de la ecuación de Schrödinger no homogénea . . . . . 69

**V Una Generalización de la Ecuación de Schrödinger no Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico 78**

5.1 Solución particular de una generalización de la ecuación de Schrödinger no homogénea . . . . . 78

5.2 Solución general de una generalización de la ecuación de Schrödinger no homogénea . . . . . 85

**Conclusiones 94**

**Bibliografía 95**

# Resumen

En el presente trabajo, estudiamos la existencia de una solución de una generalización de la ecuación de Schrödinger en espacios de Sobolev periódicos de orden s, usando el método de Fourier, y posteriormente con el uso de la teoría de grupos de clase $C_0$ mejoramos el resultado de existencia de solución obtenido. Analizamos la propiedad conservativa del sistema y la conexión entre la diferenciabilidad de la solución y el dato inicial del PVI. Finalmente, estudiamos el problema no homogéneo.

**Palabras clave:** Teoría de semigrupos y grupos, distribuciones periódicas, espacios de Sobolev periódicos, transformada de Fourier, ecuación de Schrödinger.

# Abstract

In the present work, we study the existence of a solution of a generalization of the Schrödinger equation in periodic Sobolev spaces of order $s$, using the Fourier method, and subsequently, with the use of the theory of groups of class $C_0$ we improve the obtained solution existence result. We analyze the conservative property of the system and the connection between the differentiability of the solution and the IVP initial data. Finally, we study the non-homogeneous problem.

**Keywords:** Semigroup and group theory, periodic distributions, periodic Sobolev spaces, Fourier transform, Schrödinger equation.

# Introducción

Los llamados espacios de Sobolev de regularidad $s$, denotados por $H^s_{per}$ tienen propiedades importantes, una de ella es la inmersión continua y densa entre espacios: para cada $r$ menor a $s$ se tiene una inmersión continua y densa de $H^s_{per}$ a $H^r_{per}$. Una distribución periódica $f$ pertenece al espacio de Sobolev, si la serie sobre $k \in \mathbb{Z}$ de $(1 + |k^2|)^s |\widehat{f}(k)|^2$ es convergente. Estos espacios son de gran utilidad en el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales. Mediante al uso de la generalización de la transformada de Fourier, las EDPs se transforman en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinales donde la solución es una serie que converge bajo condiciones especificas y debido a la particularidad de los espacios. Usaremos a estos espacios en el análisis de la ecuación de Schrödinger.

En la ecuación de Schrödinger se estudia la cualidad ondulativa de un partícula, esto es, que la partícula se puede ver como una onda y la onda como una partícula (hipótesis de Broglie), la ecuación de Schrödinger derivada de la famosa ecuación de la energía mecánica total de una partícula, donde se aplican la fórmula de Planck ($E = \hbar\omega$, donde $\omega$ es la frecuencia angular, $\hbar$ es la constante de planck y $E$ energía) y la fórmula de Louis de Broglie ($\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, donde $\mathbf{k}$ es el número de ondas y $\mathbf{p}$ cantidad de movimiento de una partícula), esto nos da una ecuación donde todos los datos ya son conocidos, excepto la energía potencial que dependerá de la posición en el espacio y el tiempo lo cual hará que la soluciones de la ecuación varíen dependiendo de está, para hallar una operador que me describa el comportamiento de esta onda se toma un operador que tenga la propiedad de la exponencial compleja, de esta manera se construye la famosa ecuación de Schrödinger, la cual es muy difícil de interpretar en la física, por ello, la interpretación que se toma es sobre la norma al cuadrado de la solución que nos da la probabilidad de que una partícula este en un punto fijo, esta ecuación no nos permite hacer una medición cuántica, para mas detalle ver [6]. En particular, la solución de la ecuación de Schrödinger homogénea es conservativa como se verá mas adelante.

Hemos organizado este trabajo de la siguiente forma. En el capítulo I, introduciremos definiciones y resultados que usaremos en el desarrollo de este trabajo. En el capítulo II, se estudiará la solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en espacios de Sobolev periódicos, también se analizará a un grupo de operadores lineales acotados, posteriormente, la conexión entre la diferenciabilidad y el dato inicial, y por último la propiedad conservativa de la ecuación de Schrödinger. En el capítulo III, estudiaremos la solución de una generalización de la ecuación de Schrödinger homogénea de $n$-esimo orden en espacios de Sobolev periódicos, además se examinará a un grupo de operadores lineales acotados, asimismo, el nexo entre la diferenciabilidad y dato inicial y, finalmente, la propiedad conservativa de la ecuación. En los capítulos IV y V se estudiarán la solución de la ecuación de Schrödinger no homogénea y la solución de una generalización de la ecuación de Schrödinger no homogénea de $n$-ésimo orden, respectivamente.

# Capítulo I

# Preliminares

En este capítulo, veremos la transformada de Fourier en $\mathscr{P}$ y en el dual de $\mathscr{P}$, e introduciremos definiciones y teoremas básicos de los espacios de Sobolev periódico, semigrupos y grupos de operadores acotados lineales para el estudio de la ecuación de Schrödinger en los espacios mencionados.

## 1.1. La transformada de Fourier en $\mathscr{P}$

Para un mayor entendimiento de la transformada de Fourier en $\mathscr{P}'$, veremos la transformada de fourier en $\mathscr{P}$ (definición y propiedades).

**Definición 1.1.** *Se llama $C^n_{per}([-\ell,\ell])$ al conjunto de funciones periódicas con periodo $2\ell$ de clase $C^n$, que podemos escribir como el siguiente conjunto*

$$C^n_{per}([-\ell,\ell]) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ de clase } C^n, f \text{ es periódicas de periodo } 2\ell\}.$$

*$C^n_{per}([-\ell,\ell])$ es un espacio de Banach con norma:*

$$\|f\|_{C^n_{per}} = \sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)}\|_\infty,$$

*donde $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\ell,\ell]} |f(x)|$.*

En el presente trabajo, $\ell$ tomará el valor de $\pi$, sin embargo, los resultados que obtendremos serían válido para cualquier $\ell$ real finito.

**Definición 1.2.** *Se llama $C^{\infty}_{per}$ al conjunto de funciones periódicas con periodo $2\pi$ de clase $C^{\infty}$, que podemos escribir como el siguiente conjunto*

$$C^{\infty}_{per} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ de clase } C^{\infty}, f \text{ es periódica de periodo } 2\pi\}.$$

**Notación 1.3.** *Escribiremos $\mathscr{P}$ por $C^{\infty}_{per}$ para tener una notación simple.*

**Definición 1.4.** *El espacio de sucesiones rápidamente decrecientes, que se denota por $\mathscr{L}(\mathbb{Z})$, es el conjunto de todas las sucesiones de valores complejos $\alpha := (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^j |a_k| < \infty, \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

**Teorema 1.5.** *Sea $\alpha := (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión tal que pertenece a $\mathscr{L}(\mathbb{Z})$. Entonces la serie*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \tag{1.2}$$

*converge absolutamente.*

*Demostración.* En efecto, sea $j \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k| \;=\; |a_0| + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} |a_k| \leq |a_0| + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^j |a_k| < \infty,$$

pues $|a_0|$ es finito y $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{L}(\mathbb{Z})$. Entonces, se tiene la serie (1.2) es absolutamente convergente. □

**Definición 1.6.** *Sea $f \in \mathscr{P}$, entonces $f$ es continua y periódica de periodo $2\pi$. La serie de Fourier de $f$ es*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k cos\,(kx) + b_k sin\,(kx)\right] \tag{1.3}$$

*donde,*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos\,(kx)\,dx \quad y \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin\,(kx)\,dx, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Podemos reformularemos la ecuación (1.3) en términos de la exponencial compleja. Para lograr esto, primero recordemos que

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), \tag{1.4}$$
$$e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx). \tag{1.5}$$

Por las expresiones (1.4) y (1.5) se obtiene que

$$cos(kx) = \frac{1}{2}\left[e^{ikx} + e^{-ikx}\right], \tag{1.6}$$
$$sin(kx) = \frac{i}{2}\left[e^{-ikx} - e^{ikx}\right]. \tag{1.7}$$

Utilizando las ecuaciones (1.6) y (1.7) se tiene que

$$a_k cos(kx) + b_k sin(kx) = \frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ikx}, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Podemos definir $c_k$ tal que $c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ si $k \geq 1$ y $c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}$ si $k \leq -1$.
Luego, la serie (1.3) se pueden reescribir en términos de $c_k$ y $e^{ikx}$. Es decir,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

i) Para $k \geq 1$

$$c_k = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{1.8}$$

ii) Para $k \leq -1$

$$c_k = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(-kx)dx + \frac{1}{\pi}i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(-kx)dx}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{1.9}$$

iii) Para $k = 0$

$$c_0 = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(0)x}dx. \tag{1.10}$$

Obteniendo por las igualdades (1.8), (1.9) y (1.10) que

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

La constante $c_k$ es muy importante, a partir de ella definimos a la transformada de Fourier.

**Definición 1.7.** *Sea $f \in \mathscr{P}$, la transformada de Fourier de $f$ es denotada por*

$$\mathscr{F}f = \widehat{f} := \left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{L}(\mathbb{Z})$$

*y está definida por*

$$\mathscr{F}f(k) = \widehat{f}(k) := c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Continuando con la transformada de Fourier veremos sus propiedades.

**Teorema 1.8.** *Sea $f, g \in \mathscr{P}$ y $a, b \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$\{af + bg\}^{\wedge} = a\widehat{f} + b\widehat{g}.$$

*Demostración.* En efecto, sea $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\{af + bg\}^{\wedge}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (af + bg)(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} (af)(x)e^{-ikx}dx + \int_{-\pi}^{\pi} (bg)(x)e^{-ikx}dx\right) \\
&= a\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi} fe^{-ikx}dx + b\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi} ge^{-ikx}dx \\
&= a\widehat{f}(k) + b\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\{af + bg\}^{\wedge}(k) = a\widehat{f}(k) + b\widehat{g}(k), \forall\, k \in \mathbb{Z};$$

esto es, $\{af + bg\}^{\wedge} = a\widehat{f} + b\widehat{g}$. □

**Teorema 1.9.** *Sea $f \in \mathscr{P}$, se cumple*

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n\widehat{f}(k).$$

*Demostración.* En efecto, para ello debemos recordar $e^{ikx}$ y $f$ son periódicas de periodo $2\pi$. En particular, tendríamos que $e^{-ik(-\pi)}f(-\pi) = e^{-ik(\pi)}f(\pi)$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx = \underbrace{e^{-ikx}f(x)|_{-\pi}^{\pi}}_{0} + ik\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = (ik)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \qquad (1.11)$$

Por inducción sobre $n$, tenemos

para $n = 1$

$$\begin{aligned} \left[f'\right]^{\wedge}(k) &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx \\ &= (ik)\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= (ik)\widehat{f}(k), \end{aligned}$$

para $n = j$

$$\left[f^{(j)}\right]^{\wedge}(k) = (ik)^j\widehat{f}(k) \qquad \text{(H.I.)}$$

y para $n = j + 1$

$$\begin{aligned} \widehat{f^{(j+1)}}(k) &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f^{(j+1)}(x)e^{-ikx}dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(f^{(j)}(x)\right)' e^{-ikx}dx \\ &= (ik)\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f^{(j)}(x)e^{-ikx}dx \\ &= (ik)\widehat{f^{(j)}}(k) \\ &= (ik)^{j+1}\widehat{f}(k). \end{aligned}$$

□

**Definición 1.10.** *Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{L}(\mathbb{Z})$, entonces la transformada inversa de Fourier denota por $\alpha^{\vee} : \mathscr{L}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathscr{P}$ se define por*

$$\alpha^{\vee} := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{ikx}.$$

## 1.2. La transformada de Fourier en $\mathscr{P}'$

Nos introduciremos en el espacio dual de $\mathscr{P}$, denotado por $\mathscr{P}'$, en este espacio definiremos las distribuciones periódicas, sus derivadas y algunas propiedades. También, se definirá la transformada de Fourier y la inversa de la transformada.

**Definición 1.11.** *Sea $T : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ funcional lineal en el espacio $\mathscr{P}$, es llamada distribución periódica si existe una sucesión $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}$ tal que*

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle := \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x)\varphi(x)dx, \ \ \forall \varphi \in \mathscr{P};$$

*el conjunto de todas las distribuciones periódicas será denotada por $\mathscr{P}'$.*

**Definición 1.12.** *Sea $f \in \mathscr{P}'$. Se define por $f'$ a $\langle f', \varphi\rangle := -\langle f, \varphi'\rangle$, $\forall\, \varphi \in \mathscr{P}$.*

Veremos a continuación una generalización de la derivada en $\mathscr{P}'$.

**Teorema 1.13.** *Sea $f \in \mathscr{P}'$. Entonces, $\langle f^{(j)}, \varphi\rangle = (-1)^j \langle f, \varphi^{(j)}\rangle$, $\forall \varphi \in \mathscr{P}$.*

*Demostración.* Por inducción sobre $j$. Sea $\varphi \in \mathscr{P}$.

Para $j = 1$

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle. \qquad \text{(Por Def. 1.12)}$$

Para $j = n$

$$\langle f^{(j)}, \varphi\rangle = (-1)^j \langle f, \varphi^{(j)}\rangle. \qquad \text{(H.I.)}$$

Para $j = n + 1$

$$\begin{aligned} \langle f^{(j+1)}, \varphi\rangle &= \langle (f^{(j)})', \varphi\rangle \\ &= (-1)\langle f^{(j)}, \varphi'\rangle \\ &= (-1)^{j+1}\langle f, \varphi^{(j+1)}\rangle. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.14.** *Sea $\Phi, \varphi \in \mathscr{P}$ y $j \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\varphi^{(j)}(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi^{(j)}(x)\varphi(x)dx.$$

*Demostración.* Para ello, debemos recordar $\Phi(x)$ y $\varphi^{(k)}(x)$ son periódicas de periodo $2\pi$. Luego, $\Phi(\pi)\varphi^{(k-1)}(\pi) = \Phi(-\pi)\varphi^{(k-1)}(-\pi)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\varphi^{(k)}(x)dx &= \underbrace{\Phi(x)\varphi^{(k-1)}(x)|_{-\pi}^{\pi}}_{0} + \int_{-\pi}^{\pi} \Phi^{(1)}(x)\varphi^{(k-1)}(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n^{(1)}(x)\varphi^{(k-1)}(x)dx. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Por inducción sobre $j$.

Para $j = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\varphi^{(1)}(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi^{(1)}(x)\varphi(x)dx.$$

Para $j = i$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\varphi^{(i)}(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi^{(i)}(x)\varphi(x)dx. \qquad \text{(H.I.)}$$

Para $j = i + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\varphi^{(i+1)}(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi^{(1)}(x)\varphi^{(i)}(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi^{(i+1)}(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

□

Nos preguntamos si la derivada j-ésima ($f^{(j)}$) pertenece a $\mathscr{P}'$. Lo cual veremos a continuación.

**Teorema 1.15.** *Sea $f \in \mathscr{P}'$. Entonces $f^{(j)} \in \mathscr{P}'$, $\forall j \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Como $f \in \mathscr{P}'$, entonces por Definición 1.11 existe $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}$ tal que

$$\langle f, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x)\varphi(x)dx,$$

donde $\varphi \in \mathscr{P}$, en consecuencia, $\varphi^{(j)} \in \mathscr{P}$. Luego,

$$\langle f, \varphi^{(j)}\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x)\varphi^{(j)}(x)dx. \tag{1.13}$$

Por los Teoremas 1.13 y 1.14 así como la ecuación (1.13), se obtienen que

$$\begin{aligned}\langle f^{(j)}, \varphi\rangle &= (-1)^j \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x)\varphi^{(j)}(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left((-1)^j \Phi_n^{(j)}\right)(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Como $\Phi_n \in \mathscr{P}$, entonces $\Phi_n^{(j)} \in \mathscr{P}$. Hemos obtenido que $\exists \left((-1)^j \Phi_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}$ tal que

$$\langle f^{(j)}, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left((-1)^j \Phi_n^{(j)}\right)(x)\varphi(x)dx.$$

□

**Notación 1.16.** $\Phi_k(x) := e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nos hemos introducido en el espacio $\mathscr{P}'$, el espacio de las distribuciones periódicas, y vimos algunas nociones, a continuación definiremos la transformada de Fourier en $\mathscr{P}'$. Para ellos definiremos el espacio $\mathscr{L}'(\mathbb{Z})$.

**Definición 1.17.** *Sea una sucesión compleja $\alpha := (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ se dice que es de crecimiento lento si $\exists\, \lambda > 0$ y $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|\alpha_k| \leq \lambda |k|^n, \, \forall\, k \in \mathbb{Z} - \{0\};$$

*el conjunto de todas estas sucesiones se denotará por $\mathscr{L}'(\mathbb{Z})$.*

**Definición 1.18.** *La transformada de Fourier se denota por*

$$\widehat{\ }: \mathscr{P}' \to \mathscr{L}'(\mathbb{Z}),$$

*la cual a cada $f \in \mathscr{P}'$ le hace corresponder $\widehat{f} \in \mathscr{L}'(\mathbb{Z})$, donde $\widehat{f} = (f)^\wedge = \left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ con*

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\langle f, \Phi_{-k}\rangle, \; k \in \mathbb{Z}.$$

**Teorema 1.19.** *Sea $f, g \in \mathscr{P}'$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces,*

$$(f + \lambda g)^\wedge = \widehat{f} + \lambda \widehat{g}.$$

*Demostración.* En efecto, sea $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
(f + \lambda g)^\wedge(k) &= \frac{1}{2\pi}\langle f + \lambda g, \Phi_{-k}\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\langle f, \Phi_{-k}\rangle + \left(\frac{1}{2\pi}\right)\langle \lambda g, \Phi_{-k}\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\langle f, \Phi_{-k}\rangle + \lambda\left(\frac{1}{2\pi}\right)\langle g, \Phi_{-k}\rangle \\
&= \widehat{f}(k) + \lambda\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

Como $(f + \lambda g)^\wedge(k) = \widehat{f}(k) + \lambda\widehat{g}(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $(f + \lambda g)^\wedge = \widehat{f} + \lambda\widehat{g}$. □

**Teorema 1.20.** *Sea $f \in \mathscr{P}'$. Entonces*

$$\widehat{f^{(j)}}(k) = (ik)^j \widehat{f}(k),\ \forall\, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* En efecto, sea $k \in \mathbb{Z}$; por el Teorema 1.13, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{f^{(j)}}(k) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \langle f^{(j)}, \Phi_{-k} \rangle \\
&= (-1)^j \left(\frac{1}{2\pi}\right) \langle f, (e^{-ikx})^{(j)} \rangle \\
&= (-1)^j \left(\frac{1}{2\pi}\right) (-ik)^j \langle f, e^{-ikx} \rangle \\
&= (ik)^j \widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\widehat{f^{(j)}}(k) = (ik)^j \widehat{f}(k), \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

□

Se ha definido la transformada de Fourier en $\mathscr{P}'$, continuaremos definiendo la transformada inversa de Fourier.

**Definición 1.21.** *La transformada inversa de Fourier se denota $^\vee : \mathscr{L}'(\mathbb{Z}) \to \mathscr{P}'$, la cual a cada $\alpha \in \mathscr{L}'(\mathbb{Z})$ le hace corresponder $\alpha^\vee \in \mathscr{P}'$, donde*

$$\alpha^\vee := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi_k.$$

**Teorema 1.22.** *Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{L}'(\mathbb{Z})$, entonces $\alpha^\vee = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi_k$ es convergente.*

*Demostración.* Ver [2]. □

**Teorema 1.23.** *Sea $\alpha, \beta \in \mathscr{L}'(\mathbb{Z}), \lambda \in \mathbb{C}$, entonces $(\alpha + \lambda\beta)^\vee = \alpha^\vee + \lambda\beta^\vee$.*

*Demostración.* Como $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{L}'(\mathbb{Z})$ y por el Teorema 1.22, tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi_k < \infty \text{ y } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k \Phi_k < \infty.$$

Luego,

$$(\alpha+\lambda\beta)^{\vee}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\alpha_k+\lambda\beta_k)\,\Phi_k=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\alpha_k)\,\Phi_k+\lambda\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\beta_k)\,\Phi_k=\alpha^{\vee}+\lambda\beta^{\vee}.$$

□

**Teorema 1.24.** *Sea $r,k\in\mathbb{Z}$, entonces $\langle\Phi_k,\Phi_{-r}\rangle=2\pi\delta_{kr}$, donde $\delta_{kr}$ es el delta de Kronecker.*

*Demostración.* En efecto, consideramos dos casos

1. Si $k=r$, entonces

$$\langle\Phi_k,\Phi_{-r}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}e^{-irx}dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}e^{-ikx}dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi.$$

2. Si $k\neq r$, entonces

$$\begin{aligned}\langle\Phi_k,\Phi_{-r}\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}e^{i-rx}dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-r)x}dx\\ &= \frac{e^{i(k-r)\pi}-e^{i(k-r)(-\pi)}}{k-r}\\ &= \frac{e^{i(k-r)\pi}-e^{i(k-r)\pi}}{k-r}=0.\end{aligned}$$

Entonces, $\langle\Phi_k,\Phi_{-r}\rangle=2\pi\begin{cases}0,\ \text{si } k\neq r\\ 1,\ \text{si } k=r\end{cases}=2\pi\delta_{kr}.$ □

**Teorema 1.25.** *Sea $0\in\mathscr{P}'$, entonces $\widehat{0}(k)=0,\forall\,k\in\mathbb{R}$.*

*Demostración.* En efecto, sea $k$ entero, tenemos

$$\widehat{0}(k)=\frac{1}{2\pi}\langle 0,\Phi_k\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(0)e^{ikx}dx=\frac{1}{2\pi}(0)=0 \tag{1.14}$$

□

## 1.3. Espacios de Sobolev periódicos

Nos introducimos en los espacios de Sobolev periódicos con periodo $2\pi$ que son útiles en el análisis de las ecuaciones diferenciales parciales.

**Definición 1.26.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Sobolev $H^s_{per} := H^s_{per}([-\pi, \pi])$ es el conjunto de todas las funciones $f \in \mathscr{P}'$ tal que*

$$\|f\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 < \infty$$

*donde $s$ es el grado de regularidad de las funciones en el espacio de Sobolev periódicos.*

**Definición 1.27.** *Se denota $\ell^2_s(\mathbb{Z})$ el espacio de sucesiones $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ con*

$$\|\alpha\|^2_{\ell^2_s(\mathbb{Z})} := 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2$$

Veremos algunas propiedades de los espacios de Sobolev periódicos de periodo $2\pi$.

**Teorema 1.28.** *Sea $f \in H^s_{per}$ tal que $r \leq s$, entonces $f \in H^r_{per}$ y $\|f\|_{H^r_{per}} \leq \|f\|_{H^s_{per}}$.*

*Demostración.* En efecto, se tiene

$$0 \leq \frac{(1 + k^2)^r}{(1 + k^2)^s} \leq 1, \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{1.15}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^r_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^r |\hat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s \frac{(1 + |k|^2)^r}{(1 + |k|^2)^s} |\hat{f}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 \\
&= \|f\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|f\|_{H^r_{per}} \leq \|f\|_{H^s_{per}}$ y $f \in H^r_{per}$. □

**Teorema 1.29.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $j \in \mathbb{N}$. Sea $f \in H^s_{per}$. Entonces*

$$f^{(j)} \in H^{s-j}_{per} \text{ y } \|f^{(j)}\|_{H^{s-j}_{per}} \leq \|f\|_{H^s_{per}}.$$

*Demostración.* En efecto, por Teorema 1.20 tenemos

$$\begin{aligned}
\|f^{(j)}\|^2_{H^{s-j}_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-j} |(ik)^j \widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-j} (k)^{2j} |\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-j} (1+k^2)^{j} |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s} |\widehat{f}(k)|^2
\end{aligned}$$

Como $f \in H^s_{per}$, entonces $f^{(j)} \in H^{s-j}_{per}$ y $\|f^{(j)}\|_{H^{s-j}_{per}} \leq \|f\|_{H^s_{per}}$. □

**Teorema 1.30.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $j \in \mathbb{N}$. Si $f^{(j)} \in H^s_{per}$, entonces $f \in H^{s+j}_{per}$.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^{s+j}_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s} (1+k^2)^{j} |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \left( |\widehat{f}(0)|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (1+k^2)^{s} (1+k^2)^{j} |\widehat{f}(k)|^2 \right) \\
&\leq 2\pi |\widehat{f}(0)|^2 + 2\pi \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (1+k^2)^{s} (2k^2)^{j} |\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi |\widehat{f}(0)|^2 + 2^j \left( 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s} |(ik)^j \widehat{f}(k)|^2 \right) \\
&= 2\pi |\widehat{f}(0)|^2 + 2^j \|f^{(j)}\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Como $|\widehat{f}(0)|^2$ y $\|f^{(j)}\|^2_{H^s_{per}}$ son finitos, entonces $f \in H^{s+j}_{per}$. □

## 1.4. Semigrupos y grupos de operadores lineales acotados

Nos introduciremos a los semigrupos uniformemente continuos de operadores lineales acotados, además definiremos los grupos.

**Definición 1.31.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Una familia paramétrica denotada por $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ de operadores lineales acotados de $X$ es un semigrupo de operadores lineales acotados en $X$ si se cumple que*

*(i)* $T(0) = I$.

*(ii)* $T(t+s) = T(t)T(s)$.

**Definición 1.32.** *Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ un semigrupo de operadores lineales acotados es uniformemente acotado si $\|T(t) - I\| \to 0$ cuando $t \to 0^+$.*

**Definición 1.33.** *Sea $A$ el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$. Se define a $A$ por*

$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A) \text{ donde, } D(A) := \left\{ x \in X : \exists \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}.$$

**Definición 1.34.** *Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ un semigrupo de operadores lineales acotados en $X$, es un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados si $T(t)x \to x$, cuando $t \to 0^+$, para todo $x$ en $X$.*

**Definición 1.35.** *Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ un semigrupo de operadores lineales acotados se llama de clase $C_0$ o $C_0$ si es fuertemente continuo.*

**Teorema 1.36.** *Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ un semigrupo de clase $C_0$, entonces existen $w \geq 0, M \geq 1$ constantes tal que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{tw}, \forall\, 0 \leq t < +\infty.$$

*Demostración.* Ver [4]. □

**Definición 1.37.** *Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ semigrupo $C_0$. Se llama de contracción, si $M = 1$ y $w = 0$, es decir,*

$$\|T(t)\| \leq 1, \forall\, 0 \leq t < +\infty.$$

**Definición 1.38.** *Una familia de un parámetro* $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$*, de operadores lineales acotados en un espacio de Banach* $X$ *es un grupo* $C_0$ *de operadores acotados si cumple que*

*(i)* $T(0) = I$.

*(ii)* $T(t+s) = T(t)T(s), \forall\, t, s \in \mathbb{R}$.

*(iii)* $\lim_{t\to 0} T(t)x = x, \forall\, x \in X$.

**Definición 1.39.** *El generador infinitesimal* $A$ *del grupo* $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *se define por*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, x \in D(A) \text{ donde, } D(A) := \left\{ x \in X : \exists \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}.$$

# Capítulo II

# Ecuación de Schrödinger Homogénea en Espacios de Sobolev Periódicos

En este capítulo, veremos la solución del problema de Cauchy asociado a la ecuación de Schrödinger homogénea, su unicidad y la dependencia del dato inicial. Además, basándonos en la solución del problema, generamos un grupo de operadores lineales acotado. Luego, se estudiará la relación entre diferenciabilidad de la ecuación y la condición inicial del problema, y se analizará la propiedad conservativa.

## 2.1. Ecuación de Schrödinger homogénea

En esta sección, nos enfocaremos en la solución del problema de Cauchy asociado a la ecuación Schrödinger homogénea y su unicidad.

**Proposición 2.1.** *Sea $s$ real, $\phi \in H^s_{per}$, $\Phi_k \in \mathscr{P}'$ y definimos*

$$F(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k, \forall\, t \in \mathbb{R},$$

*entonces $F(t) \in H^s_{per}$ y $\|F(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}$, para todo $t$ real.*

*Demostración.* En efecto, sea $t$ real y $r$ entero; usando el Teorema 1.24 tenemos

$$\widehat{F(t)}(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\,\langle \Phi_k, \Phi_{-r}\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\delta_{kr} = e^{-ir^2t}\widehat{\phi}(r). \qquad (2.1)$$

Por la expresión (2.1) se tiene

$$\|F(t)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k) \right|^2 \tag{2.2}$$

y usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, en la ecuación (2.2), obtenemos

$$\|F(t)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}}. \tag{2.3}$$

Entonces, $\|F(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}$ por la expresión (2.3) y como $\phi \in H^s_{per}$, tenemos

$$\|F(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}} < \infty, \forall\, t \in \mathbb{R},$$

en consecuencia, $F(t) \in H^s_{per}$, para todo $t$ real. □

**Proposición 2.2.** *Sea $s$ real, $\phi \in H^s_{per}$ y $F(t)$ como se ha definido en la Proposición 2.1, entonces $F \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$.*

*Demostración.* En efecto, por la Proposición 2.1 tenemos que $F(t) \in H^s_{per}, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Ahora, tomando $t$ y $t_0$ reales con $t_0$ fijo, tenemos que

$$\|F(t) - F(t_0)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \left\{ e^{-ik^2t} - e^{-ik^2t_0} \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2. \tag{2.4}$$

Definimos

$$I_1(k,t) := (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2 \left| e^{-ik^2t} - e^{-ik^2t_0} \right|^2. \tag{2.5}$$

Como deseamos que el límite ingrese a la serie (2.4), entonces buscaremos que esta serie converga absolutamente. Como se tiene que

$$I_1(k,t) \leq (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2 \left\{ \left| e^{-ik^2t} \right| + \left| e^{-ik^2t_0} \right| \right\}^2 \tag{2.6}$$

y usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, en la expresión (2.6), tenemos

$$I_1(k,t) \leq (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2 \{2\}^2 = 4(1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2. \tag{2.7}$$

Ahora, por las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.7) obtenemos

$$\|F(t)-F(t_0)\|^2_{H^s_{per}} \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ 4(1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \right\} = 4\|\phi\|_{H^s_{per}} < \infty, \tag{2.8}$$

pues $\phi \in H^s_{per}$ y usando el criterio de Weierstrass la serie (2.4) converge absolutamente. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t_0} \|F(t)-F(t_0)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \lim_{t\to t_0} \left\{ e^{-ik^2t} - e^{-ik^2t_0} \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \{0\}\, \widehat{\phi}(k) \right|^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por la igualdad (2.9) consigue que

$$F \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}).$$

□

**Proposición 2.3.** *Sea $s$ real, $\phi \in H^s_{per}$ y $F(t)$ como se ha definido en la Proposición* 2,1*, entonces*

$$\left\| \frac{F(t+h)-F(t)}{h} - i\partial_x^2 F(t) \right\|_{H^{s-2}_{per}} \longrightarrow 0, \text{ cuando } h \longrightarrow 0. \tag{2.10}$$

*Demostración.* En efecto, usando los Teoremas 1.19 y 1.20 tenemos

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{F(t+h)-F(t)}{h} - i\partial_x^2 F(t) \right\}^{\wedge}(k) &= \frac{e^{-ik^2(t+h)}\widehat{\phi}(k) - e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)}{h} - i(ik)^2 e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k) \\ &= \left\{ e^{-ik^2t} \left[ \frac{e^{-ik^2h}-1}{h} + ik^2 \right] \right\} \widehat{\phi}(k). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Entonces, para todo $k$ entero, obtenemos

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{F(t+h)-F(t)}{h} - i\partial_x^2 F(t) \right\|_{H^{s-2}_{per}} \\ = \; & 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left| \left\{ e^{-ik^2t} \left[ \frac{e^{-ik^2h}-1}{h} + ik^2 \right] \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Luego, para que el límite ingrese a la serie (2.12), buscaremos la convergencia uniforme de la serie utilizando el criterio de Weierstrass. Previamente, haremos unos cálculos. Definimos

$$I_2(k,t,h) := e^{-ik^2t}\left[\frac{e^{-ik^2h}-1}{h}+ik^2\right], \tag{2.13}$$

$$I_3(k,h) := \frac{e^{-ik^2h}-1}{h}. \tag{2.14}$$

a) Probaremos que

$$\lim_{h\to 0} I_2(k,t,h) = 0. \tag{2.15}$$

En efecto, como $\lim_{h\to 0} I_3(k,h)$ es una indeterminada de tipo $0/0$, entonces aplicamos L'Hôpital y obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} I_3(k,h) &= \lim_{h\to 0}\frac{(-ik^2)e^{-ik^2h}}{1}\\ &= -ik^2.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Por la expresión (2.16), se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} I_2(k,t,h) &= e^{-ik^2t}\left[\lim_{h\to 0} I_3(k,h)+ik^2\right]\\ &= e^{-ik^2t}\left[-ik^2+ik^2\right]=0.\end{aligned}$$

b) Acotaremos $I_3(k,h)$, para todo $h\neq 0$. En efecto, para $h>0$, se tiene

$$|I_3(k,h)| = \left|\frac{1}{h}\int_0^h (-ik^2)e^{-ik^2s}ds\right| \leq \frac{1}{h}\int_0^h \left|(-ik^2)e^{-ik^2s}\right| ds. \tag{2.17}$$

Usando $|e^{i\theta}|=1$, para todo $\theta$ real, en expresión (2.17), obtenemos

$$|I_3(k,h)| \leq \frac{1}{h}\int_0^h \left|-ik^2\right| ds = \frac{1}{h}k^2(h) = k^2. \tag{2.18}$$

Ahora, para $h<0$, tenemos

$$|I_3(k,h)| = \left|-\frac{1}{h}\int_h^0 (-ik^2)e^{-ik^2s}ds\right| \leq -\frac{1}{h}\int_h^0 \left|(-ik^2)e^{-ik^2s}\right| ds. \tag{2.19}$$

Así, usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, en expresión (2.19), se tiene

$$|I_3(k,h)| \leq -\frac{1}{h}\int_h^0 \left|-ik^2\right| ds = -\frac{1}{h}k^2(-h) = k^2. \tag{2.20}$$

Luego, por las ecuaciones (2.18) y (2.20) concluimos que

$$|I_3(k,h)| \leq k^2, \forall\, h \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{2.21}$$

c) Acotaremos $|I_2(k,t,h)|^2$, para todo $h \neq 0$. En efecto, como $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, obtenemos

$$|I_2(k,t,h)|^2 = \left|I_3(k,h) + ik^2\right|^2 \leq \left\{|I_3(k,h)| + \left|ik^2\right|\right\}^2 \tag{2.22}$$

y usando la desigualdad (2.21) en la expresión (2.22) se tiene

$$|I_2(k,t,h)|^2 \leq \left\{k^2 + |ik^2|\right\}^2 = \left\{k^2 + k^2\right\}^2 = 4\left\{k^2\right\}^2 \leq 4\left\{1 + k^2\right\}^2. \tag{2.23}$$

Ahora, por las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.23) tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - i\partial_x^2 F(t)\right\|_{H^{s-2}_{per}}^2 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}|\widehat{\phi}(k)|^2 \left[4(1+k^2)^2\right] \\ &= 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty,\end{aligned}$$

pues $\phi \in H^s_{per}$ y por el criterio de Weierstrass se obtiene la convergencia uniformemente de la serie (2.12). Entonces, el límite puede ingresar a la serie y usando las expresiones (2.12), (2.13) y (2.15) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left\|\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - i\partial_x^2 F(t)\right\|_{H^{s-2}_{per}}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}|\widehat{\phi}(k)|^2 \left|\lim_{h\to 0} I_2(k,t,h)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}|\widehat{\phi}(k)|^2 \,|0|^2 = 0.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Así, por ecuación (2.24) se prueba existe $\partial_t F(t)$ en $H^{s-2}_{per}$ y $\partial_t F(t) = i\partial_x^2 F(t)$. □

**Proposición 2.4.** *Sea $s$ real, $\phi \in H^s_{per}$ y $F(t)$ como se ha definido en la Proposición* 2,1*, entonces $F \in C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}_{per})$.*

*Demostración.* En efecto, considerando $t$ y $t_0$ reales con $t_0$ fijo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_t F(t) - \partial_t F(t_0)\|^2_{H^{s-2}_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left|\{\partial_t F(t)\}^\wedge(k) - \{\partial_t F(t_0)\}^\wedge(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left|(-ik^2)e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k) - (-ik^2)e^{-ik^2t_0}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left|(-ik^2)\left[e^{-ik^2t} - e^{-ik^2t_0}\right]\widehat{\phi}(k)\right|^2. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Para probar que el límite ingrese a la serie (2.25), necesitamos que esta serie convergencia uniforme, para ello, usaremos el criterio de Weierstrass. Definimos

$$I_4(k,t) := (1+k^2)^{s-2} \left|(-ik)^2\left[e^{-ik^2t} - e^{-ik^2t_0}\right]\widehat{\phi}(k)\right|^2. \qquad (2.26)$$

Como

$$\begin{aligned}
I_4(k,t) &= (1+k^2)^{s-2} \left|(-ik)^2\left[e^{-ik^2t} - e^{-ik^2t_0}\right]\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= (1+k^2)^{s-2}(k^2)^2 \left|\left[e^{-ik^2t} - e^{-ik^2t_0}\right]\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&\leq (1+k^2)^{s-2}(1+k^2)^2 \left\{\left|e^{-ik^2t}\right| + \left|e^{-ik^2t_0}\right|\right\}^2 |\widehat{\phi}(k)|^2. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Así, usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, en la expresión (2.27) se tiene

$$\begin{aligned}
I_4(k,t) &\leq (1+k^2)^{s-2}(1+k^2)^2 \{1+1\}^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= 4(1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Ahora, por las ecuaciones (2.25), (2.26) y (2.28), tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_t F(t) - \partial_t F(t_0)\|^2_{H^{s-2}_{per}} &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4(1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty,
\end{aligned}$$

pues $\phi \in H^s_{per}$ y por el criterio de Weierstrass tenemos que la serie (2.25) converge uniformemente. Entonces, por la expresión (2.25) y debido a que $|\cdot|$ es continuo, se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \|\partial_t F(t) - \partial_t F(t_0)\|^2_{H^{s-2}_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left|(-ik^2) \lim_{t\to t_0} \left[e^{-ik^2 t} - e^{-ik^2 t_0}\right] \widehat{\phi}(k)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left|(ik)^2 [0] \widehat{\phi}(k)\right|^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Por lo tanto, se tiene que $F \in C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}_{per})$. □

**Teorema 2.5.** *Sea $s$ real.*

$$\left| \begin{array}{l} u \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}_{per}) \\ \partial_t u - i\partial_x^2 u = 0 \in H^{s-2}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{array} \right. \tag{2.30}$$

*Entonces, existe una única solución $u \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}_{per})$ que satisface la ecuación diferencial* (2,30)*. Además, satisface:*

a) $u(t) \in H^r_{per}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$

b) $\|u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}.$

c) $\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$

d) $\|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$

*También, la solución $u(t)$ depende continuamente en $H^s_{per}$ de la condición inicial y, análogamente, $\partial_t u(t)$ depende continuamente en $H^{s-2}_{per}$ de la condición inicial. Por otro lado, satisface:*

a) $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_0(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.$

b) $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.$

*Demostración.* En efecto, por la ecuación diferencial parcial (2.30), tenemos

$$0 = \partial_t u(t) - i\partial_x^2 u(t).$$

Aplicando la transformada de Fourier, se obtiene

$$\widehat{0}(k) \;=\; \left(\partial_t u(t) - i\partial_x^2 u(t)\right)^{\wedge}(k), \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{2.31}$$

Luego, usando los Teoremas 1.19, 1.20 y 1.25 en la ecuación (2.31), se tiene

$$0 = \partial_t \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) + ik^2 \left[u(t)\right]^{\wedge}(k), \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{2.32}$$

Además, aplicando la transformada de Fourier a la condición inicial de (2.30), obtenemos

$$\left[u(0)\right]^{\wedge}(k) = \widehat{\phi}(k), \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{2.33}$$

Así, por las ecuaciones (2.32) y (2.33), tenemos el siguiente sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneo

$$(\Omega_k^2) \left| \begin{array}{ll} \left[u(t)\right]^{\wedge} \in C\left(\mathbb{R}, \ell_s^2(\mathbb{Z})\right) & \\ \partial_t \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) + ik^2 \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) = 0 & , \forall k \in \mathbb{Z}. \\ \left[u(0)\right]^{\wedge}(k) = \widehat{\phi}(k), \text{ donde } \widehat{\phi} \in \ell_s^2(\mathbb{Z}) & \end{array} \right.$$

Ahora, para cualquier $k$ entero, la ecuación diferencial en $(\Omega_k^2)$ depende solo de $t$. Entonces,

$$\begin{aligned} \partial_t \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) + ik^2 \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) &= 0 \\ e^{ik^2 t}\partial_t \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) + ik^2 e^{ik^2 t} \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) &= (0)e^{ik^2 t} \\ e^{ik^2 t}\partial_t \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) + \partial_t \left\{(e^{ik^2 t}\right\} \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) &= 0 \\ \partial_t \left[e^{ik^2 t} \left[u(t)\right]^{\wedge}(k)\right] &= 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Integrando la ecuación diferencial (2.34), tenemos

$$e^{ik^2 t} \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) = c \Longrightarrow \left[u(t)\right]^{\wedge}(k) = ce^{-ik^2 t}, \text{ c constante.} \tag{2.35}$$

Por las expresiones (2.33) y (2.35), obtenemos

$$ce^{-ik^2(0)} = \left[u(0)\right]^{\wedge}(k) = \widehat{\phi}(k) \Longrightarrow c = \widehat{\phi}(k). \tag{2.36}$$

Usando la expresión (2.36) en la ecuación (2.35), se tiene

$$[u(t)]^{\wedge}(k) = e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k),\ \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Así, se obtiene la siguiente solución

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [u(t)]^{\wedge}(k)\Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k. \tag{2.37}$$

Como $\phi$ pertenece a $H^s_{per}$ y dado que $u(t)$ coincide con $F(t)$, para todo $t$ real, podemos utilizar la Proposición 2.1 obteniendo que $u(t) \in H^s_{per}$ y $\|u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}$. Luego, usando el Teorema 1.28 tenemos que para todo $r$ menos que $s$, se cumple

$$\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}} < \infty, \tag{2.38}$$

pues $\phi$ pertenece a $H^s_{per}$, entonces $u(t) \in H^r_{per}$ y $\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}$, para todo $r$ menor que $s$. Además, por las Proposiciones 2.2, 2.3 y 2.4 se prueba que $u$ pertenece $C(\mathbb{R}, H^s_{per})$, que existe la $\partial_t u(t)$, que $\partial_t u(t) = i\partial_x^2 u(t)$ y que $u$ pertenece $C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}_{per})$. Considerando $t = 0$, tenemos

$$u(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(0)}\widehat{\phi}(k)\Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(k)\Phi_k = \phi.$$

Por lo tanto, $u$ es solución del problema de Cauchy (2.30).

Por otro lado, para probar la dependencia de la solución respecto de la condición inicial consideremos $u, u_0$ soluciones con condiciones iniciales $\phi, \psi \in H^s_{per}$, respectivamente. A continuación, usando el Teorema 1.19 y la ecuación (2.1) tenemos

$$\|u(t) - u_0(t)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k) - e^{-ik^2t}\widehat{\psi}(k) \right|^2. \tag{2.39}$$

Como $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, se tiene

$$\|u(t) - u_0(t)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) - \widehat{\psi}(k) \right|^2 = \|\phi - \psi\|^2_{H^s_{per}}. \tag{2.40}$$

De la expresión (2.40), se obtiene

$$\|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.41}$$

Debido la ecuación (2.41) conseguimos

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}. \tag{2.42}$$

Por lo tanto, si $\phi \longrightarrow \psi$ en $H^s_{per}$, entonces $u(t) \longrightarrow u_0(t)$ en $H^s_{per}$. Así, $u(t)$ depende continuamente en $H^s_{per}$ de la condición inicial y si consideremos $\phi = \psi$ en (2.42), obtenemos

$$0 \leq \|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi - \phi\|_{H^s_{per}} = 0. \tag{2.43}$$

De la expresión (2.43) se tiene $\|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} = 0$, para todo $t$ real, entonces $u \equiv u_0$, de esta forma conseguimos la unicidad de la solución de (2.30). Además, por el Teorema 1.28 y la ecuación (2.41), se llega a que

$$\|u(t) - u_0(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s. \tag{2.44}$$

De esta última expresión, tenemos

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_0(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \tag{2.45}$$

Análogamente, para probar la dependencia de la derivada de la solución respecto a la condición inicial consideramos $u, u_0$ soluciones con condiciones iniciales $\phi, \psi \in H^s_{per}$, respectivamente. Luego, usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|^2_{H^{s-2}_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}(k^2)^2 \left|\widehat{\phi}(k) - \widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}(1+k^2)^2 \left|\widehat{\phi}(k) - \widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&= \|\phi - \psi\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Por la ecuación (2.46), se llega a que

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{s-2}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.47}$$

Por la desigualdad (2.47), se obtiene

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{s-2}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}. \tag{2.48}$$

Por lo tanto, si $\phi \longrightarrow \psi$ en $H^s_{per}$, entonces $\partial_t u(t) \longrightarrow \partial_t u_0(t)$ en $H^{s-2}_{per}$. Así, $\partial_t u(t)$ depende continuamente en $H^{s-2}_{per}$ de la condición inicial y usando el Teorema 1.28 junto con la desigualdad (2.47), obtenemos

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s. \tag{2.49}$$

Por la desigualdad (2.49) llegamos a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \tag{2.50}$$

Además, usando la Proposición 2.3, el Teorema 1.29, la Proposición 2.1 y el Teorema 1.28, tenemos

$$\|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} = \|i\partial_x^2 u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} = \|u(t)\|_{H^r_{per}} = \|\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}.$$

□

**Corolario 2.6.** *La solución única de* (2,30) *es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2 t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k. \tag{2.51}$$

## 2.2. Grupo de operadores lineales acotados

En esta sección, estudiamos una familia de operadores inducido por la solución de la ecuación de Schrödinger homogénea. Nos enfocaremos en el análisis de esta familia y sus propiedades.

**Teorema 2.7.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores definida por*

$$T(t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k, \forall\, \phi \in H^s_{per} \tag{2.52}$$

*es un grupo $C_0$ en $H^s_{per}$.*

*Demostración.* Se probará paso a paso.

1) Sea $t$ real, probaremos que $T(t)$ es lineal. En efecto, sea $\phi, \psi \in H^s_{per}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, por el Teorema 1.19 tenemos

$$\begin{aligned} T(t)(\phi + \lambda\psi) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\left(\widehat{\phi}(k) + \lambda\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k + \lambda e^{-ik^2t}\widehat{\psi}(k)\Phi_k\right]. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Además, usando el Teorema 1.23 en la ecuación (2.53), obtenemos

$$\begin{aligned} T(t)(\phi + \lambda\psi) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k + \lambda\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\psi}(k)\Phi_k \\ &= T(t)\phi + \lambda T(t)\psi. \end{aligned} \tag{2.54}$$

2) Probaremos que $T(r+t) = T(r)\circ T(t)$, para todo $t, r$ real. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$, como

$$T(r+t)\phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(r+t)}\widehat{\phi}(k)\Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2r}e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k. \tag{2.55}$$

Definimos

$$\widehat{\psi}(k) := e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k) \tag{2.56}$$

y se tiene que

$$\psi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k = T(t)\phi. \tag{2.57}$$

Por las expresiones (2.55) y (2.56) llegamos a

$$T(r+t)\phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2 r}\left(\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k = T(r)\psi, \tag{2.58}$$

usando la igualdad (2.58) en la expresión (2.57), obtenemos que

$$T(r+t)\phi = [T(r)\circ T(t)]\,\phi, \forall\,\phi \in H^s_{per}. \tag{2.59}$$

Por lo tanto, se tiene

$$T(s+t) = T(s)\circ T(t).$$

3) Probaremos que $T(0) = I$. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$ como

$$T(0)\phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(0)}\widehat{\phi}(k)\Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(k)\Phi_k = \phi. \tag{2.60}$$

Así, se tiene $T(0)\phi = \phi, \forall\,\phi \in H^s_{per}$, entonces $T(0) = I$.

4) Probaremos que $\lim_{t\to 0} T(t)\phi = \phi$ en $H^s_{per}$. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$ y como

$$\|T(t)\phi - \phi\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\left(e^{-ik^2 t} - 1\right)\widehat{\phi}(k)\right|^2. \tag{2.61}$$

Para que el límite ingrese a la serie (2.61), necesitamos que esta serie converga uniformemente. Así, utilizaremos el criterio de Weierstrass para probar esta convergencia. Definimos

$$I_5(k,t,h) := (1+k^2)^s \left|\left(e^{-ik^2 t} - 1\right)\widehat{\phi}(k)\right|^2. \tag{2.62}$$

Como

$$I_5(k,t,h) \leq (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \left\{|e^{-ik^2 t}| + |1|\right\}^2 \tag{2.63}$$

y usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, en la desigualdad (2.63), tenemos

$$I_5(k,t,h) \leq (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 (1+1)^2 = 4(1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2. \tag{2.64}$$

Por las expresiones (2.61), (2.62) y (2.64), se obtiene

$$\begin{aligned}\|T(t)\phi-\phi\|^2_{H^s_{per}} &\leq 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}4(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2\\ &= 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}}<\infty,\end{aligned}$$

pues $\phi\in H^s_{per}$ y por el criterio de Weierstrass tenemos que la serie (2.61) converge uniformemente. Entonces, como el módulo $|\cdot|$ es continuo, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\|T(t)\phi-\phi\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\lim_{t\to 0}\left(e^{-ik^2t}-1\right)\widehat{\phi}(k)\right|^2\\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|(0)\,\widehat{\phi}(k)\right|^2=0. \qquad (2.65)\end{aligned}$$

Así, se obtiene que $\lim_{t\to 0}T(t)\phi=\phi$ en $H^s_{per}$, para todo $\phi\in H^s_{per}$.

Por lo tanto, $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es grupo de clase $C_0$ en $H^s_{per}$. □

**Teorema 2.8.** *Sea $s\in\mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como se ha definido en el Teorema 2,7 es unitario y*

$$\|T(t)\|=\|T(t)^*\|=1,\forall\, t\in\mathbb{R}. \qquad (2.66)$$

*Demostración.* Se probará paso a paso.

1) Probaremos que $\|T(t)\|=1$, para todo $t$ real. En efecto, sea $\phi\in H^s_{per}$, $t$ real y como $|e^{i\theta}|=1$, para todo $\theta$ real, se llega

$$\|T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2=\|\phi\|^2_{H^s_{per}}. \qquad (2.67)$$

Así, se tiene

$$\|T(t)\phi\|_{H^s_{per}}=\|\phi\|_{H^s_{per}},\forall\, t\in\mathbb{R}. \qquad (2.68)$$

Luego, usando la igualdad (2.68), para todo $t$ real, obtenemos

$$\|T(t)\|=\sup_{\|\phi\|=1}\|T(t)\phi\|_{H^s_{per}}=\sup_{\|\phi\|=1}\|\phi\|_{H^s_{per}}=1. \qquad (2.69)$$

2) Probaremos que es unitario. En efecto, por la ecuación (2.68) tenemos que $T(t)$ es una isometría y por el Teorema 2.7 obtenemos

$$T(t) \circ T(-t) = T(t-t) = T(0) = I, \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{2.70}$$

$$T(-t) \circ T(t) = T(-t+t) = T(0) = I, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.71}$$

Así, usando la ecuación (2.70) tenemos que $T(t)$ posee inversa por derecha, entonces $T(t)$ es sobreyectiva, y debido a las igualdades (2.70) y (2.71) tenemos que $T(t)$ es inyectivo, entonces $T(t)$ es biyectivo. Por lo que, se llega a

$$T(t)^{-1} = T(-t), \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.72}$$

Además, debido a que $T(t)$ es sobreyectivo e isometría, se tiene que $T(t)$ es unitario, es decir,

$$T(t)^* = T(t)^{-1}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.73}$$

3) Probaremos que $\|T(t)^*\| = 1, \forall\, t \in \mathbb{R}$. En efecto, por las igualdades (2.69), (2.72) y (2.73), tenemos

$$\|T(t)^*\| = \|T(-t)\| = 1, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

□

**Teorema 2.9.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como se ha definido en el Teorema 2,7 genera dos semi-grupos de contracción en $H^s_{per}$.*

*Demostración.* En efecto, definimos

$$T_1(t) := \quad T(t), \forall\, t \in [0, +\infty), \tag{2.74}$$

$$T_2(t) := \quad T(-t), \forall\, t \in [0, +\infty). \tag{2.75}$$

Probaremos que $T_1(t)$ es un semigrupo $C_0$ de contracción. En efecto,

1) Usando la igualdad (2.60), tenemos

$$I = T(0) = T_1(0). \tag{2.76}$$

2) Sea $r, t$ reales positivos y $\phi \in H^s_{per}$. Usando la expresión (2.59), se tiene

$$T_1(r+t)\phi = T(r+t)\phi = [T(r) \circ T(t)]\,\phi = [T_1(r) \circ T_2(t)]\,\phi. \tag{2.77}$$

Así, se concluye que

$$T_1(r+t) = [T_1(r) \circ T_1(t)]\,, \forall\, t, s \in [0, \infty). \tag{2.78}$$

3) Por la ecuación (2.65), tenemos

$$\lim_{t\to 0^+} T_1(t)\phi = \lim_{t\to 0^+} T(t)\phi = \lim_{t\to 0} T(t)\phi = \phi. \tag{2.79}$$

4) Debido la expresión (2.69), obtenemos

$$\|T_1(t)\| = \|T(t)\| = 1, \forall\, t \in [0, \infty). \tag{2.80}$$

Por lo tanto, $T_1(t)$ es un semigrupo $C_0$ de contracción. Análogamente, se prueba $T_2(t)$. □

**Teorema 2.10.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como se ha definido en el Teorema 2,7, entonces $T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$, para todo $\phi \in H^s_{per}$.*

*Demostración.* En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$; como

$$\|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |(e^{-ik^2(t+h)} - e^{-ik^2t})\widehat{\phi}(k)|^2 \tag{2.81}$$

y por la Proposición 2.2 se demostró que la serie (2.81) converge absolutamente, además el módulo $|\cdot|$ es continuo, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\lim_{h\to 0}(e^{-ik^2(t+h)} - e^{-ik^2t})\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$, para todo $\phi \in H^s_{per}$. □

**Teorema 2.11.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como se ha definido en el Teorema* 2,7*, entonces la aplicación : $\phi \to T(t)\phi$ es continua en $H^s_{per}$ y*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, \phi_1, \phi_2 \in H^s_{per} \tag{2.82}$$

*Demostración.* En efecto, sea $\phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}$, $t$ real. Usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, tenemos

$$\|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)|^2 = \|\phi_1 - \phi_2\|^2_{H^s_{per}}. \tag{2.83}$$

Por lo tanto, $T(t)\phi_1 \longrightarrow T(t)\phi_2$ en $H^s_{per}$, cuando $\phi_1 \longrightarrow \phi_2$ en $H^s_{per}$. Además, por la ecuación (2.83), obtenemos

$$\|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, \phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}. \tag{2.84}$$

En consecuencia, se tiene

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, \phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}. \tag{2.85}$$

□

A continuación, enunciaremos veremos que esta familia de operadores definida en la Proposición 2.7 es solución del problema de Cauchy (2.30).

**Teorema 2.12.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario $C_0$ definido en el Teorema* 2,7*.*

1) *$T(\cdot)\phi$ es la única solución de*

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}_{per}) \\ \partial_t u = A_2 u \in H^{s-2}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{cases} \tag{2.86}$$

*en el sentido que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_2 T(t)\phi \right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0, \text{ donde } A_2 := i\partial_x^2.$$

2) *Si* $\phi_1 \longrightarrow \phi_2$ *en* $H^s_{per}$, *entonces* $T(\cdot)\phi_1 \longrightarrow T(\cdot)\phi_2$ *en* $H^s_{per}$.

3) *Si* $\phi \in H^s_{per}$, *entonces* $T(t)\phi \in H^r_{per}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s$ *y se cumplen que*

$$\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$$

4) *La aplicación:* $\phi \to A_2T(\cdot)\phi$ *es continua en* $H^{s-2}_{per}$ *y*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A_2T(t)\phi_1 - A_2T(t)\phi_2\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.$$

*Demostración.* Probaremos paso a paso cada uno de los ítems.

1) Probaremos que $T(\cdot)\phi$ es solución única de (2.86). En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$, como

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_2T(t)\phi \right\|^2_{H^{s-2}_{per}} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \left\{ e^{-ik^2t} \left[ \frac{e^{-ik^2h}-1}{h} + ik^2 \right] \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2. \end{aligned} \tag{2.87}$$

En la Proposición 2.3 se demostró que esta serie converge absolutamente y que

$$\lim_{h\to 0} e^{-ik^2t} \left[ \frac{e^{-ik^2h}-1}{h} + ik^2 \right] = 0. \tag{2.88}$$

Entonces, por la igualdad (2.88), se tiene

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_2T(t)\phi \right\|^2_{H^{s-2}_{per}} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \lim_{h\to 0} \left\{ e^{-ik^2t} \left[ \frac{e^{-ik^2h}-1}{h} + ik^2 \right] \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \{0\}\, \widehat{\phi}(k) \right|^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Además, si suponemos que existe otro grupo de operadores que es solución de (2.86) tendría la misma forma de $T(t)$, esto se debe al método usado para hallar la solución.

2) Probaremos que si $\phi_1 \longrightarrow \phi_2$ en $H^s_{per}$, entonces $T(\cdot)\phi_1 \longrightarrow T(\cdot)\phi_2$ en $H^s_{per}$. En efecto, por la igualdad (2.83), para todo $t$ real, se tiene que

$$T(t)\phi_1 \longrightarrow T(t)\phi_2 \text{ en } H^s_{per}, \text{ cuando } \phi_1 \longrightarrow \phi_2 \text{ en } H^s_{per}.$$

3) Probaremos que si $\phi \in H^s_{per}$, entonces $T(t)\phi \in H^r_{per}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s$ y se cumplen que

$$\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$$

En efecto, por el Teorema 1.28 y la ecuación (2.68), se tiene

$$\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|T(t)\phi\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}} < \infty, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s,$$

pues $\phi \in H^s_{per}$. Así, obtenemos que $T(t)\phi \in H^r_{per}, \forall\, r \leq s$ y

$$\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$$

4) Probaremos que la aplicación: $\phi \to A_2T(\cdot)\phi$ es continua en $H^{s-2}_{per}$ y

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A_2T(t)\phi_1 - A_2T(t)\phi_2\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.$$

En efecto, $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, tenemos

$$\begin{aligned}
\|A_2T(t)\phi_1 - A_2T(t)\phi_2\|^2_{H^{s-2}_{per}} &= 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}(k^2)^2 \left|\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}(1+k^2)^2 \left|\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s} \left|\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&= \|\phi_1 - \phi_2\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|A_2T(t)\phi_1 - A_2T(t)\phi_2\|_{H^{s-2}_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.90}$$

Debido al Teorema 1.28 y la desigualdad (2.90), se tiene

$$\|A_2T(t)\phi_1 - A_2T(t)\phi_2\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|A_2T(t)\phi_1 - A_2T(t)\phi_2\|_{H^{s-2}_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}},$$

para todo $t$ real y $r$ menor que $s$. Por lo tanto,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A_2T(t)\phi_1 - A_2T(t)\phi_2\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \tag{2.91}$$

□

## 2.3. Diferenciabilidad versus condición inicial de la ecuación de Schrödinger homogénea

Para enriquecer nuestro estudio, buscaremos un espacio de dimensión infinita donde se tenga una conexión de la diferenciabilidad y el dato inicial.

**Teorema 2.13.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. Tenemos que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u(t) \right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0, \forall\, t \in \mathbb{R}$$

*si y solo si $\phi \in H^s_{per}$.*

*Demostración.* En efecto,

($\Longleftarrow$) Por la Proposición 2.3 tenemos si $\phi \in H^s_{per}$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u(t) \right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

($\Longrightarrow$) Por hipótesis tenemos

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u(t) \right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0, \forall\, t \in \mathbb{R},$$

entonces existe $\partial_t u(t)$ en $H^{s-2}_{per}$ y se tiene

$$\partial_t u(t) = i\partial_x^2 u(t), \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.92}$$

Considerando $t = 0$, se obtiene

$$\partial_t u(0) = i\partial_x^2 u(0) = i\partial_x^2 \phi. \tag{2.93}$$

Como $\partial_t u(0) \in H^{s-2}_{per}$, entonces $\partial_x^2 \phi \in H^{s-2}_{per}$ y por el Teorema 1.30 se tiene que $\phi$ pertenece $H^s_{per}$.

□

Considerando $t = 0$, podemos enunciar el siguiente resultado.

**Corolario 2.14.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ fijo. Tenemos que*

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{u(h) - \phi}{h} - i\partial_x^2 \phi \right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0$$

*si y solo si $\phi \in H^s_{per}$.*

Podemos enunciar los anteriores resultados en términos del grupo unitario $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ que se ha definido en el Teorema 2.7.

**Teorema 2.15.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ fijo. Tenemos que*

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_2 T(t)\phi \right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0, \forall\, t \in \mathbb{R}$$

*si y solo si $\phi \in H^s_{per}$.*

**Corolario 2.16.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ fijo. Tenemos que*

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{T(h)\phi - \phi}{h} - A_2 \phi \right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0$$

*si y solo si $\phi \in H^s_{per}$.*

## 2.4. Propiedad conservativa de la ecuación de Schrödinger homogénea

**Teorema 2.17.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ fijo y $u$ solución de (2.30), entonces $\partial_t \|u(t)\|_{H^{s-2}_{per}} = 0$ y*

$$\|u(t)\|_{H^{s-2}_{per}} = \|\phi\|_{H^{s-2}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^{s}_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* En efecto, como $u$ es solución de (2.30) tenemos $u(t) \in H^s_{per}$ y $\partial_t u(t) \in H^{s-2}_{per}$. Además, por el Teorema 1.28 tenemos $u(t) \in H^{s-2}_{per}$, en consecuencia, están bien definidos $\langle u(t), \partial_t u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}}$ y $\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}}$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\partial_t \|u(t)\|^2_{H^{s-2}_{per}} &= \partial_t \langle u(t), u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}} \\
&= \langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}} + \langle u(t), \partial_t u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}} \\
&= \langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}} + \overline{\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle}_{H^{s-2}_{per}} \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}}\right). \qquad (2.94)
\end{aligned}$$

Como queremos que $\partial_t \|u(t)\|_{H^{s-2}_{per}} = 0$, entonces, debemos buscar que $\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}}$ sea imaginario. Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}} &= i\left\langle \partial_x^2 u(t), u(t)\right\rangle_{H^{s-2}_{per}} \\
&= i\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \widehat{\partial_x^2 u}(k) \cdot \overline{\widehat{u}(k)}\right). \qquad (2.95)
\end{aligned}$$

Para que la igualdad (2.95) tenga sentido, la serie debe ser convergente. Por el Teorema 1.20 y la ecuación (2.95), se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-2}_{per}} &= i\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} (ik)^2 \widehat{u}(k) \cdot \overline{\widehat{u}(k)}\right) \\
&= -i\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} k^2 \left|\widehat{u}(k)\right|^2\right). \qquad (2.96)
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} k^2 \left|\widehat{u}(k)\right|^2 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}(1+k^2)^2 \left|\widehat{u}(k)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s} \left|\widehat{u}(k)\right|^2 \\ &= \|u(t)\|^2_{H^s_{per}} < \infty, \end{aligned} \tag{2.97}$$

pues $\phi \in H^s_{per}$. Ahora, la serie (2.96) es convergente, además, por las expresiones (2.94) y (2.96), se tiene

$$\partial_t \|u(t)\|^2_{H^{s-2}_{per}} = 2 \text{ Re} \left( -i2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} k^2 \left|\widehat{u}(k)\right|^2 \right) = 0 \tag{2.98}$$

Entonces, por (2.98) obtenemos $\|u(t)\|^2_{H^{s-2}_{per}}$ es constante y

$$\|u(t)\|^2_{H^{s-2}_{per}} = \|u(0)\|^2_{H^{s-2}_{per}} = \|\phi\|^2_{H^{s-2}_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.99}$$

En consecuencia de la igualdad (2.99) y el Teorema 1.28, llegamos a que

$$\|u(t)\|_{H^{s-2}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}.$$

□

# Capítulo III

# Una Generalización de la Ecuación de Schrödinger Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico

En este capítulo, seguiremos un procedimiento similar aplicado al problema de Cauchy del capítulo anterior. Estudiaremos una generalización de la ecuación de Schrödinger homogénea de la siguiente forma: $\partial_t u - i\partial_x^n u = 0$, donde $n$ es par.

**Observación 3.1.** *Como $n$ es un número par, el resultado de la expresión $(ik)^n$ será $k^n$ o $-k^n$. Entonces, se tiene que $(ik)^n$ es un número real, para todo $k$ entero.*

## 3.1. Una Generalización de la ecuación de Schrödinger homogénea

En esta sección, se estudiará la solución de una generalización de ecuación de Schrödinger homogénea y sus propiedades.

**Proposición 3.2.** *Sea $s$ real, $n$ un número par, $\phi \in H^s_{per}$, $\Phi_k \in \mathscr{P}'$ y definimos*

$$F(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k, \forall\, t \in \mathbb{R},$$

*entonces $F(t) \in H^s_{per}$ y $\|F(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}$, para todo $t$ real.*

*Demostración.* En efecto, sea $t$ real y $r$ entero; usando el Teorema 1.24, tenemos

$$\widehat{F(t)}(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k) \left\langle \Phi_k, \Phi_{-r} \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)\delta_{kr} = e^{i(ir)^n t}\widehat{\phi}(r). \tag{3.1}$$

Luego, por la expresión (3.1), se tiene

$$\|F(t)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k) \right|^2 \tag{3.2}$$

y como $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, y usando la Observación 3.1 en la igualdad (3.2), obtenemos

$$\|F(t)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}}. \tag{3.3}$$

Entonces, $\|F(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}$ y como $\phi \in H^s_{per}$, tenemos

$$\|F(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}} < \infty, \forall\, t \in \mathbb{R},$$

en consecuencia, $F(t) \in H^s_{per}$, para todo $t$ real. □

**Proposición 3.3.** *Sea $s$ real, $n$ un número par, $\phi \in H^s_{per}$ y $F(t)$ como se ha definido en la Proposición* 3,2*, entonces $F \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$.*

*Demostración.* En efecto, por la Proposición 3.2 tenemos que $F(t) \in H^s_{per}, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Ahora, consideremos $t, t_0$ real con $t_0$ fijo y como

$$\|F(t) - F(t_0)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \left\{ e^{i(ik)^n t} - e^{i(ik)^n t_0} \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2. \tag{3.4}$$

Definimos

$$I_6(k,t) := (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2 \left| e^{i(ik)^n t} - e^{i(ik)^n t_0} \right|^2. \tag{3.5}$$

Como deseamos que el límite ingrese a la serie (3.4), entonces buscaremos que esta serie converga absolutamente. Además, se tiene

$$I_6(k,t) \leq (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2 \left\{ \left| e^{i(ik)^n t} \right| + \left| e^{i(ik)^n t_0} \right| \right\}^2. \tag{3.6}$$

Luego, usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, y la Observación 3.1 en la desigualdad (3.6), tenemos

$$I_6(k,t) \leq (1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \{2\}^2 = 4(1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2. \tag{3.7}$$

Ahora, por las expresiones (3.4), (3.5) y (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \|F(t) - F(t_0)\|^2_{H^s_{per}} &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ 4(1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \right\} \\ &= 4\|\phi\|_{H^s_{per}} < \infty, \end{aligned} \tag{3.8}$$

pues $\phi \in H^s_{per}$ y usando el criterio de Weierstrass la serie (3.4) converge absolutamente. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t_0} \|F(t) - F(t_0)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \lim_{t\to t_0} \left\{ e^{i(ik)^n t} - e^{i(ik)^n t_0} \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \{0\} \widehat{\phi}(k) \right|^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$F \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}).$$

□

**Proposición 3.4.** *Sea $s$ real, $n$ un número par, $\phi \in H^s_{per}$ y $F(t)$ como se ha definido en la Proposición* 3,2*, entonces*

$$\left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - i\partial_x^n F(t) \right\|_{H^{s-n}_{per}} \longrightarrow 0, \text{ cuando } h \longrightarrow 0. \tag{3.10}$$

*Demostración.* En efecto, usando los Teoremas 1.19 y 1.20 junto con la expresión (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - i\partial_x^n F(t) \right\}^{\wedge}(k) &= \frac{e^{i(ik)^n(t+h)}\widehat{\phi}(k) - e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)}{h} - i(ik)^n e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k) \\ &= \left\{ e^{i(ik)^n t} \left[ \frac{e^{i(ik)^n h} - 1}{h} - i(ik)^n \right] \right\} \widehat{\phi}(k). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Entonces, por la igualdad (3.11), para todo $k$ entero, obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{F(t+h)-F(t)}{h} - i\partial_x^n F(t) \right\|_{H_{per}^{s-n}} \\ = \; & 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} \left| \left\{ e^{i(ik)^n t} \left[ \frac{e^{i(ik)^n h}-1}{h} - i(ik)^n \right] \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2 . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Luego, para que el límite ingrese a la serie (3.12), buscaremos la convergencia uniforme de la serie utilizando el criterio de Weierstrass. Previamente, haremos unos cálculos. Definimos

$$I_7(k,t,h) := e^{i(ik)^n t} \left[ \frac{e^{i(ik)^n h}-1}{h} - i(ik)^n \right], \tag{3.13}$$

$$I_8(k,h) := \frac{e^{i(ik)^n h}-1}{h}. \tag{3.14}$$

a) Probaremos que

$$\lim_{h\to 0} I_7(k,t,h) = 0. \tag{3.15}$$

En efecto, como $\lim_{h\to 0} I_8(k,h)$ es una indeterminada de tipo $0/0$, entonces aplicamos L'Hôpital y obtenemos que

$$\lim_{h\to 0} I_8(k,h) = \lim_{h\to 0} \frac{(i(ik)^n)e^{i(ik)^n h}}{1} = i(ik)^n. \tag{3.16}$$

Luego, por la igualdad (3.16) se tiene que

$$\lim_{h\to 0} I_7(k,t,h) = e^{i(ik)^n t} \left[ \lim_{h\to 0} I_8(k,h) - i(ik)^n \right] = e^{i(ik)^n t} \left[ i(ik)^n - i(ik)^n \right] = 0.$$

b) Acotaremos $I_8(k,h)$, para todo $h \neq 0$. En efecto, para $h > 0$, se tiene

$$|I_8(k,h)| = \left| \frac{1}{h} \int_0^h [i(ik)^n] e^{i(ik)^n s} ds \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \left| [i(ik)^n] e^{i(ik)^n s} \right| ds. \tag{3.17}$$

También, usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, en la desigualdad (3.17), obtenemos

$$|I_8(k,h)| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |i(ik)^n| \, ds = \frac{1}{h} k^n(h) = k^n. \tag{3.18}$$

Ahora, para $h < 0$, tenemos

$$|I_8(k,h)| = \left| -\frac{1}{h}\int_h^0 [i(ik)^n] e^{i(ik)^n s} ds \right| \leq -\frac{1}{h}\int_h^0 \left| [i(ik)^n] e^{i(ik)^n s} \right| ds. \tag{3.19}$$

Asimismo, usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, en la epxresión (3.19), se tiene

$$|I_8(k,h)| \leq -\frac{1}{h}\int_h^0 |i(ik)^n| \, ds = -\frac{1}{h}k^n(-h) = k^n. \tag{3.20}$$

Luego, por las desigualdades (3.18) y (3.20) se tiene

$$|I_8(k,h)| \leq k^n, \forall\, h \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{3.21}$$

c) Acotaremos $|I_2(k,t,h)|^2$, para todo $h \neq 0$. En efecto, como $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, obtenemos

$$\begin{aligned} |I_7(k,t,h)|^2 &= |I_8(k,h) - i(ik)^n|^2 \\ &\leq \{|I_8(k,h)| + |i(ik)^n|\}^2 . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Asimismo, por la acotación en (3.21) se tiene en la desigualdad (3.22) que

$$\begin{aligned} |I_7(k,t,h)|^2 &\leq \{k^n + |i(ik)^n|\}^2 \\ &= \{k^n + k^n\}^2 \\ &= 4\left\{k^2\right\}^n \\ &\leq 4\left\{1 + k^2\right\}^n . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ahora, usando (3.12), (3.13) y (3.23) tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - i\partial_x^n F(t) \right\|^2_{H^{s-n}_{per}} &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} |\widehat{\phi}(k)|^2 \left[4(1+k^2)^n\right] \\ &= 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty, \end{aligned}$$

pues $\phi \in H^s_{per}$ y por el criterio de Weierstrass se obtiene la convergencia uniformemente de la serie (3.12).

Entonces, el límite puede ingresar a la serie y usando (3.12), (3.13) y (3.15) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left\|\frac{F(t+h)-F(t)}{h}-i\partial_x^n F(t)\right\|^2_{H^{s-n}_{per}} &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}|\widehat{\phi}(k)|^2\left|\lim_{h\to 0}I_7(k,t,h)\right|^2\\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}|\widehat{\phi}(k)|^2\,|0|^2=0. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

Así, se prueba existe $\partial_t F(t)$ en $H^{s-n}_{per}$ y $\partial_t F(t)=i\partial_x^n F(t)$. □

**Proposición 3.5.** *Sea $s$ real, $n$ un número par, $\phi\in H^s_{per}$ y $F(t)$ como se ha definido en la Proposición* 3,2*, entonces $F\in C^1(\mathbb{R},H^{s-2}_{per})$.*

*Demostración.* En efecto, consideremos $t,t_0$ reales con $t_0$ fijo, se obtiene

$$\begin{aligned}\|\partial_t F(t)-\partial_t F(t_0)\|^2_{H^{s-n}_{per}} &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}\left|\{\partial_t F(t)\}^\wedge(k)-\{\partial_t F(t_0)\}^\wedge(k)\right|^2\\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}\left|i(ik)^n e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)-i(ik)^n e^{i(ik)^n t_0}\widehat{\phi}(k)\right|^2\\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-n}\left|i(ik)^n\left[e^{i(ik)^n t}-e^{i(ik)^n t_0}\right]\widehat{\phi}(k)\right|^2. \qquad (3.25)\end{aligned}$$

Para probar que el límite ingrese a la serie (3.25), necesitamos que esta serie convergencia uniforme, para ello, usaremos el criterio de Weierstrass. Definimos

$$I_9(k,t):=(1+k^2)^{s-n}\left|i(ik)^n\left[e^{i(ik)^n t}-e^{i(ik)^n t_0}\right]\widehat{\phi}(k)\right|^2. \qquad (3.26)$$

Como

$$\begin{aligned}I_9(k,t) &= (1+k^2)^{s-n}(k^n)^2\left|\left[e^{i(ik)^n t}-e^{i(ik)^n t_0}\right]\widehat{\phi}(k)\right|^2\\ &\le (1+k^2)^{s-n}(1+k^2)^n\left\{\left|e^{i(ik)^n t}\right|+\left|e^{i(ik)^n t_0}\right|\right\}^2|\widehat{\phi}(k)|^2. \qquad (3.27)\end{aligned}$$

Luego, usando $|e^{i\theta}|=1$, para todo $\theta$ real, y la Observación 3.1 en la expresión (3.27), se tiene

$$\begin{aligned}I_9(k,t) &\le (1+k^2)^{s-n}(1+k^2)^n\{1+1\}^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\ &= 4(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2. \qquad (3.28)\end{aligned}$$

Ahora, por (3.25), (3.26) y (3.28), tenemos

$$\|\partial_t F(t) - \partial_t F(t_0)\|^2_{H^{s-n}_{per}} \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4(1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 = 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty,$$

pues $\phi \in H^s_{per}$ y por el criterio de Weierstrass tenemos que la serie (3.25) converge uniformemente. Entonces, por la igualdad (3.25) y como $|\cdot|$ es continuo, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t_0} \|\partial_t F(t) - \partial_t F(t_0)\|^2_{H^{s-n}_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} \left| i(ik)^n \lim_{t\to t_0} \left[e^{i(ik)^n t} - e^{i(ik)^n t_0}\right] \widehat{\phi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left| (ik)^2[0]\widehat{\phi}(k) \right|^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Así, se tiene que $F \in C^1(\mathbb{R}, H^{s-n}_{per})$. □

**Teorema 3.6.** *Sea $s$ real y $n$ un número par.*

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-n}_{per}) \\ \partial_t u - i\partial^n_x u = 0 \in H^{s-n}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{cases} \tag{3.30}$$

*Entonces, existe una única solución $u \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-n}_{per})$ que satisface la ecuación diferencial en* (3,30)*. Además, satisface:*

a) $u(t) \in H^r_{per}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$

b) $\|u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}.$

c) $\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$

d) $\|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$

*También, la solución $u(t)$ depende continuamente en $H^s_{per}$ de la condición inicial y análogamente, $\partial_t u(t)$ depende continuamente en $H^{s-n}_{per}$ de la condición inicial. Por otro lado, satisface:*

a) $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_0(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.$

b) $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.$

*Demostración.* En efecto, aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación diferencial en (3.30), tenemos

$$\widehat{0}(k) \quad = \quad (\partial_t u(t) - i\partial_x^n u(t))^{\wedge}(k), \forall\, k \in \mathbb{Z}, \tag{3.31}$$

usando los Teoremas 1.19, 1.20 y 1.25 en la ecuación (3.31), se tiene

$$0 = \partial_t [u(t)]^{\wedge}(k) - i(ik)^n [u(t)]^{\wedge}(k), \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{3.32}$$

Además, aplicando la transformada de Fourier a la condición inicial en (3.30) obtenemos

$$[u(0)]^{\wedge}(k) = \widehat{\phi}(k), \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{3.33}$$

Así, por las ecuaciones (3.32) y (3.33), tenemos el siguiente sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneo

$$(\Omega_k^n) \left| \begin{array}{l} [u(t)]^{\wedge} \in C\left(\mathbb{R}, \ell_s^2(\mathbb{Z})\right) \\ \partial_t [u(t)]^{\wedge}(k) - i(ik)^n [u(t)]^{\wedge}(k) = 0 \quad , \forall k \in \mathbb{Z}. \\ [u(0)]^{\wedge}(k) = \widehat{\phi}(k), \text{ donde } \widehat{\phi} \in \ell_s^2(\mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

Ahora, para cualquier $k$ entero, la ecuación diferencial en $(\Omega_k^n)$ depende solo de $t$. Entonces,

$$\begin{aligned} \partial_t [u(t)]^{\wedge}(k) - i(ik)^n [u(t)]^{\wedge}(k) &= 0 \\ e^{-i(ik)^n t}\partial_t [u(t)]^{\wedge}(k) - i(ik)^n e^{-i(ik)^n t} [u(t)]^{\wedge}(k) &= (0)e^{-i(ik)^n t} \\ e^{-i(ik)^n t}\partial_t [u(t)]^{\wedge}(k) + \partial_t \left(e^{-i(ik)^n t}\right) [u(t)]^{\wedge}(k) &= 0 \\ \partial_t \left[e^{-i(ik)^n t} [u(t)]^{\wedge}(k)\right] &= 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Integrando la igualdad (3.34), tenemos

$$e^{-i(ik)^n t} [u(t)]^{\wedge}(k) = c \Longrightarrow [u(t)]^{\wedge}(k) \quad = \quad ce^{i(ik)^n t}, c \text{ constante.} \tag{3.35}$$

Por las igualdades (3.33) y (3.35), obtenemos

$$ce^{i(ik)^n (0)} = [u(0)]^{\wedge}(k) = \widehat{\phi}(k) \Longrightarrow c = \widehat{\phi}(k). \tag{3.36}$$

Reemplazando la igualdad (3.36) en la ecuación (3.35), se tiene

$$[u(t)]^{\wedge}(k) = e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k),\ \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Así, encontramos la siguiente solución

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [u(t)]^{\wedge}(k)\Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k. \tag{3.37}$$

Dado que $\phi \in H^s_{per}$, notamos que $u(t)$ es $F(t)$ definido en la Proposición 3.2, entonces, tenemos que $u(t) \in H^s_{per}$ y $\|u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}$. Además, usando el Teorema 1.28 tenemos que para todo $r$ menor que $s$, se tiene

$$\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|u(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}} < \infty, \tag{3.38}$$

pues $\phi \in H^s_{per}$, entonces $u(t) \in H^r_{per}$ y $\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}$, para todo $r$ menor que $s$. Además, por Proposición 3.3, 3.4 y 3.5 se prueba que $u \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$, que existencia $\partial_t u(t)$, que $\partial_t u(t) = i\partial_x^n u(t)$ y que $u \in C^1(\mathbb{R}, H^{s-n}_{per})$. Considerado $t = 0$, tenemos

$$u(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(0)}\widehat{\phi}(k)\Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(k)\Phi_k = \phi$$

Por lo tanto, $u$ pertenece a $C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-n}_{per})$ y es solución de (3.30).

Por otro lado, para probar la dependencia de la solución respecto de la condición inicial consideremos $u, u_0$ soluciones con condiciones iniciales $\phi, \psi \in H^s_{per}$, respectivamente. Luego, usando el Teorema 1.19 y la igualdad (3.1), tenemos

$$\|u(t) - u_0(t)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k) - e^{i(ik)^n t}\widehat{\psi}(k) \right|^2. \tag{3.39}$$

También, como $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, y la Observación 3.1, se tiene

$$\|u(t) - u_0(t)\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) - \widehat{\psi}(k) \right|^2 = \|\phi - \psi\|^2_{H^s_{per}}. \tag{3.40}$$

De la expresión (3.40), se obtiene

$$\|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.41}$$

En consecuencia,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}. \tag{3.42}$$

Por lo tanto, si $\phi \longrightarrow \psi$ en $H^s_{per}$, entonces $u(t) \longrightarrow u_0(t)$ en $H^s_{per}$. Así, $u(t)$ depende continuamente en $H^s_{per}$ de la condición inicial y considerando $\phi = \psi$ junto con la igualdad (3.42) obtenemos

$$0 \leq \|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} = \|\phi - \phi\|_{H^s_{per}} = 0. \tag{3.43}$$

Así, se tiene $\|u(t) - u_0(t)\|_{H^s_{per}} = 0$, para todo $t$ real, entonces $u \equiv u_0$, de esta forma conseguimos la unicidad de la solución de (3.30). Además, por el Teorema 1.28 y la expresión (3.41), obtenemos

$$\|u(t) - u_0(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s. \tag{3.44}$$

En consecuencia,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_0(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \tag{3.45}$$

Análogamente, para probar la dependencia de la derivada de la solución respecto a la condición inicial consideramos $u, u_0$ soluciones con condiciones iniciales $\phi, \psi \in H^s_{per}$, respectivamente. Luego, usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, y la Observación 3.1, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|^2_{H^{s-n}_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n}(k^2)^n \left|\widehat{\phi}(k) - \widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n}(1+k^2)^n \left|\widehat{\phi}(k) - \widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&= \|\phi - \psi\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

De esta manera, tenemos

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{s-n}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.47}$$

Además, por la desigualdad (3.47), se tiene

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{s-n}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}. \tag{3.48}$$

Por lo tanto, si $\phi \longrightarrow \psi$ en $H^s_{per}$, entonces $\partial_t u(t) \longrightarrow \partial_t u_0(t)$ en $H^{s-n}_{per}$. Así, $\partial_t u(t)$ depende continuamente en $H^{s-n}_{per}$ de la condición inicial. Debido al Teorema 1.28 y la desigualdad (3.47), obtenemos

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s. \tag{3.49}$$

En consecuencia,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\partial_t u(t) - \partial_t u_0(t)\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \tag{3.50}$$

Además, usando la Proposición 3.4, el Teorema 1.29, la Proposición 3.2 y el Teorema 1.28, tenemos

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &= \|i\partial_x^n u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} \\ &\leq \|u(t)\|_{H^r_{per}} \\ &= \|\phi\|_{H^r_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.7.** *La solución del problema de Cauchy* (3,37) *es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n} \widehat{\phi}(k)\Phi_k.$$

Hemos considerado $n$ un número par, lo cual nos lleva a tener casos particulares para la solución dependiendo de si $n$ es múltiplo de cuatro o no lo es. Lo cual enunciamos en los siguiente corolarios.

**Corolario 3.8.** *Considerando el problema de Cauchy* (3,37) *y n un número par múltiplo de cuatro. La solución obtenida es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^n} \widehat{\phi}(k)\Phi_k.$$

**Corolario 3.9.** *Considerando el problema de Cauchy* (3,37) *y n un número par no es múltiplo de cuatro. La solución obtenida es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^n} \widehat{\phi}(k)\Phi_k.$$

## 3.2. Grupo de operadores lineales acotados

En esta sección, estudiamos una familia de operadores inducido por la solución de una generalización de ecuación de Schrödinger homogénea que se vio en la sección anterior. Nos enfocaremos en el análisis de esta familia y sus propiedades.

**Teorema 3.10.** *Sea $s \in \mathbb{R}$, n un número par. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores definida por*

$$T(t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t} \widehat{\phi}(k)\Phi_k, \forall\, \phi \in H^s_{per} \tag{3.51}$$

*es un grupo $C_0$ en $H^s_{per}$.*

*Demostración.* Se probará paso a paso.

1) Sea $t$ real, probaremos que $T(t)$ es lineal. En efecto, sea $\phi, \psi \in H^s_{per}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, por el Teorema 1.19 tenemos

$$T(t)(\phi + \lambda\psi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ e^{i(ik)^n t} \widehat{\phi}(k)\Phi_k + \lambda e^{i(ik)^n t} \widehat{\psi}(k)\Phi_k \right]. \tag{3.52}$$

Luego, usando el Teorema 1.23 en la ecuación (3.52), obtenemos

$$T(t)(\phi + \lambda\psi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t} \widehat{\phi}(k)\Phi_k + \lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t} \widehat{\psi}(k)\Phi_k = T(t)\phi + \lambda T(t)\psi. \tag{3.53}$$

2) Probaremos que $T(r+t) = T(r) \circ T(t)$, para todo $t, r$ real. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$, como

$$T(r+t)\phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(r+t)}\widehat{\phi}(k)\Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n r}e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k. \tag{3.54}$$

Definimos

$$\widehat{\psi}(k) := e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k). \tag{3.55}$$

Luego, se obtiene que

$$\psi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k = T(t)\phi. \tag{3.56}$$

Por las igualdades (3.54) y (3.55) conseguimos

$$T(r+t)\phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n r}\left(\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k = T(r)\psi, \tag{3.57}$$

usando la ecuación (3.57) en la igualdad (3.56), obtenemos que

$$T(r+t)\phi = \left[T(r) \circ T(t)\right]\phi, \forall\, \phi \in H^s_{per} \tag{3.58}$$

Por lo tanto, se tiene $T(s+t) = T(s) \circ T(t)$.

3) Probaremos que $T(0) = I$. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$ como

$$T(0)\phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(0)}\widehat{\phi}(k)\Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(k)\Phi_k = \phi. \tag{3.59}$$

Así, se tiene $T(0)\phi = \phi, \forall\, \phi \in H^s_{per}$, entonces

$$T(0) = I.$$

4) Probaremos que $\lim_{t\to 0} T(t)\phi = \phi$ en $H^s_{per}$. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$ como

$$\|T(t)\phi - \phi\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\left(e^{i(ik)^n t} - 1\right)\widehat{\phi}(k)\right|^2 \tag{3.60}$$

y para que el límite ingrese a la serie, necesitamos que esta serie converga uniformemente. Así, se utilizará el criterio de Weierstrass para probar esta convergencia. Definimos

$$I_{10}(k,t,h) := (1+k^2)^s \left| \left(e^{i(ik)^n t} - 1\right) \widehat{\phi}(k) \right|^2. \tag{3.61}$$

Como

$$I_{10}(k,t,h) \leq (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \left\{ |e^{i(ik)^n t}| + |1| \right\}^2. \tag{3.62}$$

Luego, usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, y la Observación 3.1 en la igualdad (3.62), tenemos

$$\begin{aligned} I_{10}(k,t,h) &\leq (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 (1+1)^2 \\ &= 4(1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Además, por las expresiones (3.60), (3.61) y (3.63) se obtiene

$$\|T(t)\phi - \phi\|^2_{H^s_{per}} \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4(1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 = 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty,$$

pues $\phi \in H^s_{per}$ y por el criterio de Weierstrass tenemos que la serie (3.60) converge uniformemente. Entonces, como el módulo $|\cdot|$ es continuo, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \|T(t)\phi - \phi\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \lim_{t\to 0} \left(e^{i(ik)^n t} - 1\right) \widehat{\phi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| (0)\, \widehat{\phi}(k) \right|^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Obtenemos, por (3.64) que $\lim_{t\to 0} T(t)\phi = \phi$ en $H^s_{per}$, para todo $\phi \in H^s_{per}$.

Por lo tanto, $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es grupo de clase $C_0$ en $H^s_{per}$. □

**Teorema 3.11.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como se ha definido en el Teorema* 3,10 *es unitario y*

$$\|T(t)\| = \|T(t)^*\| = 1, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.65}$$

*Demostración.* Se probará paso a paso.

1) Probaremos que $\|T(t)\| = 1$, para todo $t$ real. En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$, $t$ real; como $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, y la Observación 3.1, se llega

$$\|T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}}.$$

Entonces,

$$\|T(t)\phi\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.66}$$

Luego, usando la igualdad (3.66), para todo $t$ real, obtenemos

$$\|T(t)\| = \sup_{\|\phi\|=1} \|T(t)\phi\|_{H^s_{per}} = \sup_{\|\phi\|=1} \|\phi\|_{H^s_{per}} = 1. \tag{3.67}$$

2) Probaremos que es unitario. En efecto, por la ecuación (3.66) tenemos que $T(t)$ es una isometría y por el Teorema 3.10, obtenemos

$$T(t) \circ T(-t) = T(t-t) = T(0) = I, \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{3.68}$$

$$T(-t) \circ T(t) = T(-t+t) = T(0) = I, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.69}$$

Así, por la igualdad (3.68) tenemos que $T(t)$ posee inversa por derecha, entonces $T(t)$ es sobreyectiva, y debido a las ecuaciones (3.68) y (3.69) tenemos que $T(t)$ es inyectivo, entonces $T(t)$ es biyectivo. Por lo que,

$$T(t)^{-1} = T(-t), \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.70}$$

Además, como $T(t)$ es sobreyectivo e isometría, se tiene que $T(t)$ es unitario, es decir,

$$T(t)^* = T(t)^{-1}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.71}$$

3) Probaremos que $\|T(t)^*\| = 1, \forall\, t \in \mathbb{R}$. En efecto, por las expresiones (3.67), (3.70) y (3.71) tenemos

$$\|T(t)^*\| = \|T(-t)\| = 1, \forall\, t \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

**Teorema 3.12.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como se ha definido en el Teorema* 3,10 *genera dos semigrupos de contracción en $H^s_{per}$.*

*Demostración.* En efecto, definimos

$$T_1(t) := T(t), \forall t \in [0, +\infty), \tag{3.72}$$

$$T_2(t) := T(-t), \forall t \in [0, +\infty). \tag{3.73}$$

Probaremos que $T_1(t)$ es un semigrupo $C_0$ de contracción. En efecto,

1) Usando la ecuación (3.59), tenemos

$$I = T(0) = T_1(0). \tag{3.74}$$

2) Sea $r, t$ reales positivos y $\phi \in H^s_{per}$. Por la igualdad (3.58), se tiene

$$T_1(r+t)\phi = T(r+t)\phi = [T(r) \circ T(t)]\,\phi = [T_1(r) \circ T_2(t)]\,\phi. \tag{3.75}$$

Luego, se obtiene que

$$T_1(r+t) = [T_1(r) \circ T_1(t)]\,, \forall\, t, s \in [0, \infty). \tag{3.76}$$

3) Por la expresión (3.63), tenemos

$$\lim_{t\to 0^+} T_1(t)\phi = \lim_{t\to 0^+} T(t)\phi = \lim_{t\to 0} T(t)\phi = \phi. \tag{3.77}$$

4) Debido a la igualdad (3.67), obtenemos

$$\|T_1(t)\| = \|T(t)\| = 1, \forall\, t \in [0, \infty). \tag{3.78}$$

Por lo tanto, $T_1(t)$ es un semigrupo $C_0$ de contracción. Análogamente, se prueba $T_2(t)$. □

**Teorema 3.13.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como se ha definido en el Teorema* 3,10*, entonces $T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$, para todo $\phi \in H^s_{per}$.*

*Demostración.* En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$; como

$$\|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |(e^{i(ik)^n(t+h)} - e^{i(ik)^n t})\widehat{\phi}(k)|^2 \quad (3.79)$$

y por la Proposición 3.3 se demostró que la serie (3.79) converge absolutamente, además el módulo $|\cdot|$ es continuo,entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\lim_{h\to 0}(e^{i(ik)^n(t+h)} - e^{i(ik)^n t})\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$, para todo $\phi \in H^s_{per}$. □

**Teorema 3.14.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. La familia paramétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como se ha definido en el Teorema* 3,10*, entonces la aplicación $: \phi \to T(t)\phi$ es continua en $H^s_{per}$ y*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, \phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}. \quad (3.80)$$

*Demostración.* En efecto, sea $\phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}$, $t$ real. Usando $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta$ real, y la Observación 3.1, tenemos

$$\|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)|^2 = \|\phi_1 - \phi_2\|^2_{H^s_{per}}. \quad (3.81)$$

Por lo tanto,

$$T(t)\phi_1 \longrightarrow T(t)\phi_2 \text{ en } H^s_{per}, \text{ cuando } \phi_1 \longrightarrow \phi_2 \text{ en } H^s_{per}. \quad (3.82)$$

Además, por la igualdad (3.81), obtenemos

$$\|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, \phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}. \quad (3.83)$$

En consecuencia, se tiene

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, \phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}.$$ □

A Continuación, veremos como la familia de operadores definida en el Teorema 3.10 es solución del problema de Cauchy (3.30).

**Teorema 3.15.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $n$ un número par. Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario $C_0$ definido en el Teorema* 3,10.

1) *$T(\cdot)\phi$ es la única solución de*

$$\left| \begin{array}{l} u \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-n}_{per}) \\ \partial_t u = A_n u \in H^{s-n}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{array} \right. \tag{3.84}$$

*en el sentido que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_n T(t)\phi \right\|_{H^{s-n}_{per}} = 0, \text{ donde } A_n := i\partial_x^n.$$

2) *Si $\phi_1 \longrightarrow \phi_2$ en $H^s_{per}$, entonces $T(\cdot)\phi_1 \longrightarrow T(\cdot)\phi_2$ en $H^s_{per}$.*

3) *Si $\phi \in H^s_{per}$, entonces $T(t)\phi \in H^r_{per}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s$ y se cumplen que*

$$\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}},$$

*para todo $t$ real y $r$ menor que $s$.*

4) *La aplicación: $\phi \to A_n T(\cdot)\phi$ es continua en $H^{s-n}_{per}$ y*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A_n T(t)\phi_1 - A_n T(t)\phi_2\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.$$

*Demostración.* Probaremos paso a paso cada uno de los ítems.

1) Probaremos que $T(\cdot)\phi$ es solución única de (3.84). En efecto, sea $\phi \in H^s_{per}$, como

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_n T(t)\phi \right\|^2_{H^{s-n}_{per}} \\ = \; & 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \left\{ e^{i(ik)^n t} \left[ \frac{e^{i(ik)^n h} - 1}{h} - i(ik)^n \right] \right\} \widehat{\phi}(k) \right|^2 \end{aligned} \tag{3.85}$$

y por la Proposición 3.4 se demostró que esta serie converge absolutamente y que

$$\lim_{h\to 0} e^{i(ik)^n t}\left[\frac{e^{i(ik)^n h}-1}{h} - i(ik)^n\right] = 0. \tag{3.86}$$

Entonces, por la igualdad (3.86), se tiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_n T(t)\phi\right\|^2_{H^{s-n}_{per}} \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\lim_{h\to 0}\left\{e^{i(ik)^n t}\left[\frac{e^{i(ik)^n h}-1}{h} - i(ik)^n\right]\right\}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\{0\}\,\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Además, si suponemos que existe otro grupo de operadores que es solución de (3.84) tendría la misma forma de $T(t)$, esto se debe al método usado para hallar la solución.

2) Probaremos que si $\phi_1 \longrightarrow \phi_2$ en $H^s_{per}$, entonces $T(\cdot)\phi_1 \longrightarrow T(\cdot)\phi_2$ en $H^s_{per}$. En efecto, por la expresión (3.82), para todo $t$ real, se tiene que

$$T(t)\phi_1 \longrightarrow T(t)\phi_2 \text{ en } H^s_{per}, \text{ cuando } \phi_1 \longrightarrow \phi_2 \text{ en } H^s_{per}.$$

3) Probaremos que si $\phi \in H^s_{per}$, entonces $T(t)\phi \in H^r_{per}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s$ y se cumplen que

$$\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$$

En efecto, por el Teorema 1.28 y la igualdad (3.66), se tiene

$$\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|T(t)\phi\|_{H^s_{per}} = \|\phi\|_{H^s_{per}} < \infty, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s,$$

pues $\phi \in H^s_{per}$. Así, obtenemos que $T(t)\phi \in H^r_{per}, \forall\, r \leq s$ y

$$\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, r \leq s.$$

4) Probaremos que la aplicación: $\phi \to A_n T(\cdot)\phi$ es continua en $H^{s-n}_{per}$ y

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A_n T(t)\phi_1 - A_n T(t)\phi_2\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.$$

En efecto, $|e^{i\theta}| = 1$ para todo $\theta$ real, y la Observación 3.1, tenemos

$$\begin{aligned}
\|A_n T(t)\phi_1 - A_n T(t)\phi_2\|^2_{H^{s-n}_{per}} &= 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n}(k^n)^2 \left|\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n}(1+k^2)^n \left|\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s} \left|\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&= \|\phi_1 - \phi_2\|^2_{H^s_{per}}. \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|A_n T(t)\phi_1 - A_n T(t)\phi_2\|_{H^{s-n}_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \qquad (3.89)$$

Debido al Teorema 1.28 y la desigualdad (3.89), se tiene

$$\|A_n T(t)\phi_1 - A_n T(t)\phi_2\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|A_n T(t)\phi_1 - A_n T(t)\phi_2\|_{H^{s-n}_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}},$$

para todo $t$ real y $r \leq s$. Por lo tanto,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A_n T(t)\phi_1 - A_n T(t)\phi_2\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \quad \square \qquad (3.90)$$

$\square$

**Corolario 3.16.** *Considerando $n \in \mathbb{N}$ par múltiplo de cuatro. Definimos la siguiente familia*

$$T(t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k$$

**Corolario 3.17.** *Considerando $n \in \mathbb{N}$ par no múltiplo de cuatro. Definimos la siguiente*

*familia*

$$T(t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k$$

Las familias de operadores definidas en el Corolario 3.16 y Corolario 3.17 son casos partículas de la familia definida en el Teorema 3.10. Por ende, cumplen con todos los teoremas vistos anteriormente en esta sección.

## 3.3. Diferenciabilidad versus condición inicial de una generalización de la ecuación de Schrödinger homogénea

**Teorema 3.18.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $n$ un número par. Tenemos que*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - i\partial_x^n u(t)\right\|_{H^{s-n}_{per}} = 0, \forall\, t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \phi \in H^s_{per}.$$

*Demostración.* En efecto,

($\Longleftarrow$) Por la prueba hecha en la Proposición 3.4 tenemos si $\phi \in H^s_{per}$, entonces

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - i\partial_x^n u(t)\right\|_{H^{s-n}_{per}} = 0, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

($\Longrightarrow$) Por hipótesis tenemos

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - i\partial_x^n u(t)\right\|_{H^{s-n}_{per}} = 0, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $\partial_t u(t) = i\partial_t^n u(t), \forall\, t \in \mathbb{R}$ en $H^{s-n}_{per}$. Considerando $t = 0$, se obtiene

$$\partial_t u(0) = i\partial_x^n u(0) = i\partial_x^n \phi.$$

Como $\partial_t u(0) \in H^{s-n}_{per}$, entonces $\partial_x^n \phi \in H^{s-n}_{per}$ y por el Teorema 1.30 tenemos que $\phi$ pertenece a $H^s_{per}$.

□

Considerando $t = 0$, podemos enunciar el siguiente resultado.

**Corolario 3.19.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $n$ un número par y fijados. Tenemos que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(h) - \phi}{h} - i\partial_x^n \phi \right\|_{H^{s-n}_{per}} = 0,$$

*si y solo si $\phi \in H^s_{per}$.*

Podemos enunciar los anteriores resultados en términos del grupo unitario $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ que se definió en el Teorema 3.10.

**Teorema 3.20.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $n$ un número par y fijados. Tenemos que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_n T(t)\phi \right\|_{H^{s-n}_{per}} = 0, \forall\, t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \phi \in H^s_{per}.$$

**Corolario 3.21.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $n$ un número par y fijados. Tenemos que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{T(h)\phi - \phi}{h} - A_n \phi \right\|_{H^{s-n}_{per}} = 0 \Longleftrightarrow \phi \in H^s_{per}$$

Además, el Teorema 3.20 y el Corolario 3.21 son valido para las familias definidas en los Corolarios 3.16 y 3.17 debido a que estas familias son casos particulares de la familia definida en el Teorema 3.10.

## 3.4. Propiedad conservativa de una generalización de la ecuación de Schrödinger homogénea

**Teorema 3.22.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $n$ un número par. Sea $u$ solución de* (3,30)*, entonces*

$$\begin{aligned} \partial_t \|u(t)\|_{H^{s-n}_{per}} &= 0, \forall\, t \in \mathbb{R}, \\ \|u(t)\|_{H^{s-n}_{per}} = \|\phi\|_{H^{s-n}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Demostración.* En efecto, como $u$ es solución de (3,30) tenemos $u(t) \in H^s_{per}$ y $\partial_t u(t) \in H^{s-n}_{per}$. Además, por el Teorema 1.28 tenemos $u(t) \in H^{s-n}_{per}$, en consecuencia, están bien definidos $\langle u(t), \partial_t u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}}$ y $\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}}$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\partial_t \|u(t)\|^2_{H^{s-n}_{per}} &= \partial_t \langle u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}} \\
&= \langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}} + \langle u(t), \partial_t u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}} \\
&= \langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}} + \overline{\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle}_{H^{s-n}_{per}} \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}}\right). \qquad (3.91)
\end{aligned}$$

Como queremos que $\partial_t \|u(t)\|_{H^{s-n}_{per}} = 0$, entonces, debemos buscar que $\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}}$ sea imaginario. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}} &= \langle i\partial^n_x u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}} \\
&= i\langle \partial^n_x u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}} \\
&= i\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} \widehat{\partial^n_x u}(k) \cdot \overline{\widehat{u(k)}}\right) \qquad (3.92)
\end{aligned}$$

Para que la igualdad (3.92) tenga sentido, la serie debe ser convergente. Luego, usando el Teorema 1.20 en la expresión (3.92), se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{H^{s-n}_{per}} &= i\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} (ik)^n \widehat{u}(k) \cdot \overline{\widehat{u(k)}}\right) \\
&= -i\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} k^n \left|\widehat{u}(k)\right|^n\right). \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

Además, dado que

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} k^n \left|\widehat{u}(k)\right|^2 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} (1+k^2)^n \left|\widehat{u}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{u}(k)\right|^2 \\
&= \|u(t)\|^2_{H^s_{per}} < \infty,
\end{aligned}$$

pues $\phi \in H^s_{per}$. Entonces, la serie (3.92) es convergente, luego, por las igualdades (3.91) y (3.93), se tiene

$$\partial_t \|u(t)\|^2_{H^{s-n}_{per}} = 2 \text{ Re} \left( -i2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-n} k^n \left|\widehat{u}(k)\right|^2 \right) = 0. \tag{3.94}$$

Entonces, obtenemos $\|u(t)\|^2_{H^{s-n}_{per}}$ es constante y

$$\|u(t)\|_{H^{s-n}_{per}} = \|u(0)\|_{H^{s-n}_{per}} = \|\phi\|_{H^{s-n}_{per}}, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.95}$$

También usando la igualdad (3.95) junto con el Teorema 1.28, tenemos

$$\|u(t)\|_{H^{s-n}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}}.$$

□

# Capítulo IV

# Ecuación de Schrödinger no Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico

En este capítulo, obtendremos la solución particular y general de la ecuación de Schrödinger no homogénea. Estudiaremos la dependencia continua de la solución general del dato inicial y termino no homogéneo y, además, su unicidad.

## 4.1. Solución particular de la ecuación de Schrödinger no homogénea

En el capítulo II se estudió la solución de la ecuación de Schrödinger homogénea. A continuación, veremos la solución particular de la ecuación no homogénea, pero antes de ello veremos un teorema.

**Teorema 4.1.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $\kappa > 0$ fijos. Sea $G \in C\left([0,\kappa], H^s_{per}\right)$ y $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario de clase $C_0$ en $H^s_{per}$ que se definió en el Teorema 2.7. Entonces,*

$$\partial_t T(t-\xi)G(\xi) = i\partial_x^2 T(t-\xi)G(\xi)$$

*para $\xi \in [0,t]$ y $t \in [0,\kappa]$.*

*Demostración.* En efecto, sea $\varphi \in \mathscr{P}$. Por el Teorema 1.13, se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle i\partial_x^2 T(t-\xi)G(\xi), \varphi \right\rangle &= i(-1)^2 \left\langle T(t-\xi)G(\xi), \varphi^{(2)} \right\rangle \\ &= i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(t-\xi)} \widehat{G}(k,\xi) \left\langle \Phi_k, \varphi^{(2)} \right\rangle \\ &= i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(t-\xi)} \widehat{G}(k,\xi) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \varphi^{(2)}(x) dx \right]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Usando Teorema 1.14 en (4.1), obtenemos

$$\begin{aligned} & i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(t-\xi)} \widehat{G}(k,\xi) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \varphi^{(2)}(x) dx \right] \\ = \; & i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(t-\xi)} \widehat{G}(k,\xi) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{ikx}\right)^{(2)} \varphi(x) dx \right] \\ = \; & i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(t-\xi)} \widehat{G}(k,\xi) \left[ (ik)^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \varphi(x) dx \right] \\ = \; & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ -ik^2 e^{-ik^2(t-\xi)} \right] \widehat{G}(k,\xi) \left\langle \Phi_k, \varphi \right\rangle \\ = \; & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\langle \partial_t \left[ e^{-ik^2(t-\xi)} \right] \widehat{G}(k,\xi) \Phi_k, \varphi \right\rangle \\ = \; & \left\langle \partial_t \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(t-\xi)} \widehat{G}(k,\xi) \Phi_k \right], \varphi \right\rangle \\ = \; & \left\langle \partial_t T(t-\xi)G(\xi), \varphi \right\rangle. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Entonces,

$$\left\langle i\partial_x^2 T(t-\xi)G(\xi), \varphi \right\rangle = \left\langle \partial_t T(t-\xi)G(\xi), \varphi \right\rangle, \forall\, \varphi \in \mathscr{P}.$$

Por lo tanto,

$$i\partial_x^2 T(t-\xi)G(\xi) = \partial_t T(t-\xi)G(\xi).$$

□

**Teorema 4.2.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $\kappa > 0$ y fijados. Sea $G \in C([0,\kappa], H^s_{per})$, $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario de clase $C_0$ en $H^s_{per}$ que se definió en el Teorema 2.7 y definimos*

$$u_p(t) := \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi.$$

*Entonces, $u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s$ y*

$$i\partial_x^2 u_p(t) = \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi.$$

*Así, se tiene que*

$$\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^2 u_p(t)$$

*con respecto a la norma de $H^{r-2}_{per}$, para todo $r \leq s$. Además,*

$$\begin{vmatrix} u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-2}_{per}) \\ \partial_t u_p(t) - i\partial_x^2 u_p(t) = G(t) \in H^{s-2}_{per} \\ u_p(0) = 0 \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

*con la primera derivada dado por*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u_p(t+h) - u_p(t)}{h} - G(t) - i\partial_x^2 u_p(t) \right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0.$$

*Demostración.* Probaremos paso a paso el teorema.

- Probaremos que $u_p(t)$ existe en $H^s_{per}$ para todo $t \in [0,\kappa]$.
  Por el Teorema 2.10 tenemos que

  $$T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}), \forall\, \phi \in H^s_{per}.$$

  Como $G(\xi) \in H^s_{per}, \forall\, \xi \in [0,\kappa]$, entonces $T(t-\xi)G(\xi)$ es continuo en $H^s_{per}, \forall\, \xi \in [0,t]$ con $t \in [0,\kappa]$. Luego, existe

  $$u_p(t) = \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \in H^s_{per}, \forall\, t \in [0,\kappa].$$

- Probaremos que $u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per})$.
  Sea $t, t_0 \in [0,\kappa]$ tal que $t < t_0$ y $\xi \in (t, t_0)$.

$$\begin{aligned}
& \|u_p(t) - u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} \\
= & \left\| \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi - \int_0^{t_0} T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^s_{per}} \\
= & \left\| \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi - \left[ \int_0^t T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi + \int_t^{t_0} T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi \right] \right\|_{H^s_{per}} \\
= & \left\| \int_0^t \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi)d\xi - \int_t^{t_0} T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^s_{per}} \\
\leq & \left\| \int_0^t \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi)d\xi \right\|_{H^s_{per}} + \left\| \int_t^{t_0} T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^s_{per}} \\
\leq & \int_0^t \left\| \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi) \right\|_{H^s_{per}} d\xi + \int_t^{t_0} \|T(t_0-\xi)G(\xi)\|_{H^s_{per}} d\xi.
\end{aligned}$$

  Definimos

$$\begin{aligned}
J_1(t) &:= \int_0^t \left\| \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi) \right\|_{H^s_{per}} d\xi, \\
J_2(t) &:= \int_t^{t_0} \|T(t_0-\xi)G(\xi)\|_{H^s_{per}} d\xi.
\end{aligned}$$

  Como queremos que para todo $\varepsilon > 0$ se tenga que $\|u_p(t) - u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} < \varepsilon$, cuando $|t - t_0| < \delta$, para algún $\delta > 0$ , entonces se pretenderá que

$$J_1(t) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } J_2(t) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre que } |t - t_0| < \delta.$$

  - Para $J_1(t)$
    Vimos que $T(t-\xi)G(\xi)$ es continuo en $H^s_{per}, \forall\, \xi \in [0,t]$ con $t \in [0,\kappa]$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t - t_0| < \delta$, lo que implica que $|(t-\xi) - (t_0-\xi)| < \delta$, entonces $\left\| \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi) \right\|_{H^s_{per}} < \frac{\varepsilon}{2\kappa}$. Ahora,

$$J_1(t) = \int_0^t \left\| \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi) \right\|_{H^s_{per}} d\xi < \int_0^t \frac{\varepsilon}{2\kappa} d\xi = \frac{\varepsilon}{2\kappa} t \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.4)$$

- Para $J_2(t)$
  Por (2.68), tenemos que $\|T(t_0-\xi)G(\xi)\|_{H^s_{per}} = \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}$.
  Consideremos $\delta < \frac{\varepsilon}{2\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}}$, entonces

$$\begin{aligned} J_2(t) &= \int_t^{t_0} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}\, d\xi \\ &\leq \sup_{\xi\in[t,t_0]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} \int_t^{t_0} d\xi \\ &\leq \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} (t_0-t) \\ &< \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}\, \delta \\ &< \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} \left[\frac{\varepsilon}{2\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}}\right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

  Por (4.4) y (4.5), tenemos $\|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} \leq J_1(t)+J_2(t) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, cuando $|t-t_0|<\delta$. Así, obtenemos que $u_p \in C\left([0,\kappa], H^s_{per}\right)$.

- Probaremos que $u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}), \forall\, r \leq s$.
  Sea $t, t_0$ pertenece $[0,\kappa]$ tal que $t < t_0, \xi \in (t,t_0)$. Por el Teorema 1.28, tenemos que

$$\|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^r_{per}} \leq \|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s$$

  y tomando límite

$$0 \leq \lim_{t\to t_0} \|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^r_{per}} \leq \lim_{t\to t_0} \|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} = 0, \forall\, r \leq s.$$

  Por lo tanto, se probó que $u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}), \forall\, r \leq s$.

- Probaremos que $i\partial_x^2 u_p(t) = \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi$.
  Por el Teorema 4.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t T(t-\xi)G(\xi) &= i\partial_x^2 T(t-\xi)G(\xi) \\ \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi &= \int_0^t i\partial_x^2 T(t-\xi)G(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Como el operador $\partial_x^2$ es cerrado, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^t i\partial_x^2 T(t-\xi)G(\xi)d\xi &= i\partial_x^2\int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \\ &= i\partial_x^2 u_p(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

De (4.6) y (4.7) tenemos $i\partial_x^2 u_p(t) = \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi$.

- Por probar que $\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^2 u_p(t)$ en $H^{s-2}_{per}$.
  Por la versión generalizada al cálculo diferencial en espacios de Banach (en particular, en $H^{s-2}_{per}$), tenemos

$$\begin{aligned}\partial_t u_p(t) &= \partial_t\left[\int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi\right] \\ &= T(t-t)G(t)\cdot(1) - T(t-0)G(0)\cdot(0) + \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \\ &= G(t) + i\partial_x^2 u_p(t). \end{aligned} \tag{4.8}$$

  En consecuencia, $\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^2 u_p(t)$ en $H^{s-2}_{per}$.

- Por probar que $\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^2 u_p(t)$ en $H^{r-2}_{per}, \forall r \leq s$.
  Por (4.8), tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h} - G(t) - i\partial_x^2 u_p(t)\right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0.$$

  Por el Teorema 1.28 y tomando límite, tenemos que para todo $r \leq s$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h\to 0}\left\|\frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h} - G(t) - i\partial_x^2 u_p(t)\right\|_{H^{r-2}_{per}} \\ &\leq \lim_{h\to 0}\left\|\frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h} - G(t) - i\partial_x^2 u_p(t)\right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0. \end{aligned}$$

  Así obtenemos

$$\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^2 u_p(t)$$

  en $H^{r-2}_{per}$, para todo $r \leq s$.

- Probaremos que $\partial_t u_p \in C([0,\kappa], H^{s-2}_{per})$.
  Sea $t, t_0 \in [0,\kappa]$, tal que $t < t_0$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{s-2}_{per}} &= \left\|G(t) + i\partial_x^2 u_p(t) - \left[G(t_0) + i\partial_x^2 u_p(t_0)\right]\right\|_{H^{s-2}_{per}} \\ &\leq \|G(t) - G(t_0)\|_{H^{s-2}_{per}} + \|i\partial_x^2 u_p(t) - i\partial_x^2 u_p(t_0)\|_{H^{s-2}_{per}}. \quad (4.9)\end{aligned}$$

  Usando los Teorema 1.28 y Teorema 1.29 en (4.9), se tiene

$$\begin{aligned}&\|G(t) - G(t_0)\|_{H^{s-2}_{per}} + \|i\partial_x^2 u_p(t) - i\partial_x^2 u_p(t_0)\|_{H^{s-2}_{per}} \\ &\leq \|G(t) - G(t_0)\|_{H^{s}_{per}} + \|u_p(t) - u_p(t_0)\|_{H^{s}_{per}}. \quad (4.10)\end{aligned}$$

  Como $G, u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per})$ y por (4.10), se llega a que

$$\begin{aligned}0 &\leq \lim_{t\to t_0} \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{s-2}_{per}} \\ &\leq \lim_{t\to t_0} \|G(t) - G(t_0)\|_{H^s_{per}} + \lim_{t\to t_0} \|u_p(t) - u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} = 0.\end{aligned}$$

  Así, obtenemos que $\partial_t u_p \in C([0,\kappa], H^{s-2}_{per})$.

- Probaremos que $\partial_t u_p \in C([0,\kappa], H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s$.
  Sea $t, t_0 \in [0,\kappa]$ tal que $t < t_0$. Por el Teorema 1.28, tenemos que

$$\|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{s-2}_{per}}, \forall\, r \leq s$$

  y tomando límite, para todo $r \leq s$, obtenemos

$$0 \leq \lim_{t\to t_0} \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \lim_{t\to t_0} \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{s-2}_{per}} = 0.$$

  Así, tenemos que $\partial_t u_p \in C([0,\kappa], H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s$.

- Probaremos que $u_p(0) = 0$

$$u_p(0) = \int_0^0 T(-\xi)G(\xi)d\xi = 0.$$

□

## 4.2. Solución general de la ecuación de Schrödinger no homogénea

Hemos visto la solución particular en teorema anterior de la ecuación de Schrödinger no homogénea. Ahora, veremos la solución general y algunas de sus propiedades.

**Teorema 4.3.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $\kappa > 0$ y fijados. Sea $G \in C([0,\kappa], H^s_{per})$ y tenemos*

$$\begin{cases} u \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-2}_{per}) \\ \partial_t u(t) - i\partial_x^2 u(t) = G(t) \in H^{s-2}_{per} \\ u(0) = \phi, \ \ con\ \phi \in H^s_{per} \end{cases} \tag{4.11}$$

*Entonces,*

1. *existe una única solución de (4.11),*
2. $u \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-2}_{per})$,
3. $u \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s$,
4. *probaremos que $u(0) = \phi$,*
5. *probaremos que $u$ cumple que $\partial_t u(t) - i\partial_x^2 u(t) = G(t)$ en $H^{s-2}_{per}$.*

*Demostración.* Efectuaremos paso a paso la demostración.

1. Probaremos que existe una única solución de (4.11).
   Supongamos que existe la solución, por (4.11) tenemos que

   $$\partial_t u(t) - i\partial_x^2 u(t) = G(t)$$

   y aplicamos la transformada de Fourier

   $$\begin{aligned} \partial_t \widehat{u}(k,t) - i\widehat{\partial_x^2 u}(k,t) &= \widehat{G}(k,t) \\ \partial_t \widehat{u}(k,t) - i(ik)^2 \widehat{u}(k,t) &= \widehat{G}(k,t) \\ \partial_t \widehat{u}(k,t) + ik^2 \widehat{u}(k,t) &= \widehat{G}(k,t). \end{aligned}$$

Se obtiene el siguiente sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneo.

$$\begin{cases} \widehat{u} \in C\left([0,\kappa], \ell_s^2(\mathbb{Z})\right) \\ \partial_t \widehat{u}(k,t) + ik^2 \widehat{u}(k,t) = \widehat{G}(k,t) \quad , \forall k \in \mathbb{Z}. \\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{\phi}(k), \text{ donde } \widehat{\phi} \in \ell_s^2(\mathbb{Z}) \end{cases} \tag{4.12}$$

Tomando un $k$ fijo, la ecuación diferencial depende solo de $t$, entonces multiplicamos $e^{ik^2t}$ a la ecuación (4.12), obteniendo

$$\begin{aligned} e^{ik^2t}\partial_t \widehat{u}(k,t) + e^{ik^2t} ik^2 \widehat{u}(k,t) &= e^{ik^2t}\widehat{G}(k,t) \\ e^{ik^2t}\partial_t\left(\widehat{u}(k,t)\right) + \partial_t\left(e^{ik^2t}\right)\widehat{u}(k,t) &= e^{ik^2t}\widehat{G}(k,t) \\ \partial_t\left(e^{ik^2t}\widehat{u}(k,t)\right) &= e^{ik^2t}\widehat{G}(k,t). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Integrando (4.13) de 0 a $t$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^t \partial_\xi\left(e^{ik^2\xi}\widehat{u}(k,\xi)\right) d\xi &= \int_0^t e^{ik^2\xi}\widehat{G}(k,\xi)d\xi \\ e^{ik^2t}\widehat{u}(k,t) - e^{ik^20}\widehat{u}(k,0) &= \int_0^t e^{ik^2\xi}\widehat{G}(k,\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Como $e^{ik^2(0)}\widehat{u}(k,0) = \widehat{u}(k,0) = \widehat{\phi}(k)$ y despejando $\widehat{u}(k,t)$, obtenemos

$$\widehat{u}(k,t) = e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k) + e^{-ik^2t}\int_0^t e^{ik^2\xi}\widehat{G}(k,\xi)d\xi.$$

Luego, el candidato a solución de (4.11) es

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k) + e^{-ik^2t}\int_0^t e^{ik^2\xi}\widehat{G}(k,\xi)d\xi\right]\Phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k + \int_0^t\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\Phi_k\right]d\xi \\ &= T(t)\phi + \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Esta solución es única debido a la forma en que se obtuvo, si suponemos que existe otra solución, tendría la misma forma que la que hemos hallado.
Ahora, definimos

$$u_h(t) := T(t)\phi \text{ y } u_p(t) := \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi.$$

Notemos que $u_h$ es la solución homogénea y $u_p$ es la solución particular de (4.12) vistos en los Teorema 2.5 y Teorema 4.2, respectivamente.

2. Probaremos que $u \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-2}_{per})$.
Por el Teorema 2.5, tenemos $u_h \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}_{per})$ y como $[0,\kappa] \subset \mathbb{R}$, entonces

$$u_h \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-2}_{per}).$$

Además, por el Teorema 4.2, se tiene $u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-2}_{per})$. Por lo tanto,

$$u = u_h + u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-2}_{per}).$$

3. Probaremos que $u \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s$.
Por el Teorema 2.5, tenemos $u_h \in C(\mathbb{R}, H^r_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s$ y como $[0,\kappa] \subset \mathbb{R}$, entonces

$$u_h \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s.$$

Además, por el Teorema 4.2, tenemos $u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s$. Por lo tanto,

$$u = u_h + u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-2}_{per}), \forall\, r \leq s$$

4. Probaremos que $u(0) = \phi$

$$\begin{aligned} u(0) &= u_h(0) + u_p(0) \\ &= T(0)\phi + \int_0^0 T(0-\xi)G(\xi)d\xi \\ &= \phi. \end{aligned}$$

5. Probaremos que $\partial_t u(t) = i\partial_x^2 u(t) + G(t)$
   Como existen $\partial_t u(t)$ y $\partial_x^2 u(t)$ en $H_{per}^{s-2}$ y $G(t) \in H_{per}^s$ para todo $t \in [0,\kappa]$ y por el Teorema 1.28 tenemos que $G(t) \in H_{per}^{s-2}, \forall\, t \in [0,\kappa]$, entonces en $H_{per}^{s-2}$

   $$\partial_t u(t) = i\partial_x^2 u_h(t) + \left[i\partial_x^2 u_p(t) + G(t)\right] = i\partial_x^2 \left[u_h(t) + u_p(t)\right] + G(t) = i\partial_x^2 u(t) + G(t).$$

□

**Corolario 4.4.** *La única solución de (4.11) es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2 t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2(t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\Phi_k d\xi.$$

Así. se hallo la solución general, a continuación, veremos unas propiedades que tiene la solución con respecto la condición inicial y el término no homogéneo.

**Teorema 4.5.** *Sea $\kappa > 0$ fijo y $u$ es solución de (4.11). Entonces,*

1. *se cumple*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H_{per}^r} &\leq \|\phi\|_{H_{per}^s} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H_{per}^s}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u(t)\|_{H_{per}^r} &\leq \|\phi\|_{H_{per}^s} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H_{per}^s}, \forall\, r \leq s, \end{aligned}$$

2. *y también*

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{H_{per}^{r-2}} &\leq \|\phi\|_{H_{per}^s} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H_{per}^s}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u(t)\|_{H_{per}^{r-2}} &\leq \|\phi\|_{H_{per}^s} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H_{per}^s}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

*Demostración.* Probaremos cada uno de los ítems.

1) Probaremos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H_{per}^r} &\leq \|\phi\|_{H_{per}^s} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H_{per}^s}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u(t)\|_{H_{per}^r} &\leq \|\phi\|_{H_{per}^s} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H_{per}^s}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

Sea $r \leq s$ y $t \in [0, \kappa]$, entonces

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^r_{per}} &= \left\| T(t)\phi + \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^r_{per}} \\ &\leq \|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} + \left\| \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^r_{per}} \\ &\leq \|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} + \int_0^t \|T(t-\xi)G(\xi)\|_{H^r_{per}} d\xi. \end{aligned}$$

Usando el Teorema 1.28 y por (2.68), se tiene

$$\begin{aligned} & \|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} + \int_0^t \|T(t-\xi)G(\xi)\|_{H^r_{per}} d\xi \\ \leq\ & \|\phi\|_{H^s_{per}} + \int_0^t \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} d\xi \\ \leq\ & \|\phi\|_{H^s_{per}} + \int_0^t \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} d\xi \\ \leq\ & \|\phi\|_{H^s_{per}} + \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} \kappa. \end{aligned}$$

Luego, hemos obtenido que

$$\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0, \kappa]. \tag{4.15}$$

Demostrando así que

$$\sup_{t\in[0,\kappa]} \|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \tag{4.16}$$

2) Probaremos que

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0, \kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

Sea $r \leq s$ y $t \in [0, \kappa]$, se tiene

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &= \left\|i\partial_x^2 u(t) + G(t)\right\|_{H^{r-2}_{per}} \\ &= \left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_{H^{r-2}_{per}} + \|G(t)\|_{H^{r-2}_{per}}. \end{aligned}$$

Usando el Teorema 1.29 y Teorema 1.28, llegamos a que

$$\begin{aligned} \left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_{H^{r-2}_{per}} + \|G(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|u(t)\|_{H^{r}_{per}} + \|G(t)\|_{H^{s}_{per}} \\ &\leq \|u(t)\|_{H^{r}_{per}} + \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^{s}_{per}}. \end{aligned}$$

Por (4.15), tenemos

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{H^{r}_{per}} + \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^{s}_{per}} \\ \leq & \left\{ \|\phi\|_{H^{s}_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^{s}_{per}} \right\} + \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^{s}_{per}} \\ = & \|\phi\|_{H^{s}_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^{s}_{per}}. \end{aligned}$$

Luego, hemos obtenido que

$$\|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^{s}_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^{s}_{per}}, \tag{4.17}$$

para todo $r \leq s$ y $t \in [0, \kappa]$. Por lo tanto,

$$\sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^{s}_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^{s}_{per}} \forall\, r \leq s. \tag{4.18}$$

□

Una consecuencia del teorema anterior es la relación de dos soluciones de dos problemas de Cauchy de la ecuación de Schrödinger con respecto a sus condiciones iniciales y términos no homogéneo diferentes, lo cual enunciamos en el siguiente corolario.

**Corolario 4.6.** *Sea $\kappa > 0$ y $s \in \mathbb{R}$ y fijados. Sea $\phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}$, $G_1, G_2 \in C([0,\kappa], H^s_{per})$ y $u_1, u_2$ las soluciones respectivas de (4.11) con condición inicial $\phi_1, \phi_2$ y con término no*

*homogéneo $G_1, G_2$, respectivamente. Entonces,*

1. *se cumple, para todo $r \leq s$ y $t \in [0, \kappa]$, se obtiene*

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}} \end{aligned}$$

2. *y, también, para todo $r \leq s$ y $t \in [0, \kappa]$, se tiene*

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Probaremos cada uno de los ítems.

1. Probaremos que para todo $r \leq s$ y $t \in [0, \kappa]$, tenemos

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

   Definimos $u(t) := u_1(t) - u_2(t)$, entonces

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1(0) - u_2(0) \\ &= \phi_1 - \phi_2 \end{aligned}$$

   y además,

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - i\partial_x^2 u(t) &= \partial_t \left[u_1(t) - u_2(t)\right] - i\partial_x^2 \left[u_1(t) - u_2(t)\right] \\ &= \partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t) - i\partial_x^2 u_1(t) + i\partial_x^2 u_2(t) \\ &= \left[\partial_t u_1(t) - i\partial_x^2 u_1(t)\right] - \left[\partial_t u_2(t) - i\partial_x^2 u_2(t)\right] \\ &= G_1(t) - G_2(t). \end{aligned}$$

   Así, obtenemos que $u$ es solución de (4.11) con condición inicial $\phi = \phi_1 - \phi_2$ y con término no homogéneo $G = G_1 - G_2$.

Luego, por el Teorema 4.5, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

Así, para todo $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$, se tiene

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

2. Probaremos que para todo $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

Definimos $u$ como en el inciso 1, entonces, por el Teorema 4.5, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

□

A continuación, veremos la dependencia de la solución respecto a la condición inicial y el término no homogéneo. Lo cual se enunciará en el siguiente corolario.

**Corolario 4.7.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $\kappa > 0$ y fijados. La ecuación diferencial (4.11) posee una única solución.*

*Demostración.* Sea $u_1, u_2$ solución de la ecuación diferencial parcial (4.11) con la misma condición inicial $\phi \in H^s_{per}$ y mismo término no homogéneo $G \in C([0,\kappa], H^s_{per})$, entonces por el Corolario 4.6, tenemos para todo $r \leq s$

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi - \phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi) - G(\xi)\|_{H^s_{per}} \\ &= \|0\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|0\|_{H^s_{per}} \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Luego, $\sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} = 0$, para todo $r \leq s$. Considerando $r = s$, entonces

$$\sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s_{per}} = 0.$$

Por lo tanto, $u_1 = u_2$ en $H^s_{per}$, es decir, la ecuación diferencial (4.11) posee única solución. □

# Capítulo V

# Una Generalización de la Ecuación de Schrödinger no Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico

En este capítulo, veremos la solución de una generalización de ecuación de Schrödinger no homogénea, siguiendo la estructura del capítulo anterior se mostrarán las propiedades de la solución del Problema de Cauchy asociado a esta EDP.

## 5.1. Solución particular de una generalización de la ecuación de Schrödinger no homogénea

Hemos visto en el capítulo III la solución única de una generalización ecuación de Schrödinger homogénea. A continuación, veremos la solución particular para la ecuación no homogénea, pero antes de ello veremos un teorema que nos ayudará en la demostración de la solución particular.

**Teorema 5.1.** *Sea $s \in \mathbb{R}$, $n$ un número par y $\kappa > 0$ y fijados. $G \in C\left([0,\kappa], H^s_{per}\right)$ y $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario de clase $C_0$ en $H^s_{per}$ que se definió en el Teorema 3.10. Entonces,*

$$\partial_t T(t-\xi)G(\xi) = i\partial_x^n T(t-\xi)G(\xi)$$

*para $\xi \in [0,t]$ y $t \in [0,\kappa]$.*

*Demostración.* En efecto, sea $\varphi \in \mathscr{P}$. Usando el Teorema 1.13, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle i\partial_x^n T(t-\xi)G(\xi), \varphi\rangle &= i(-1)^n \left\langle T(t-\xi)G(\xi), \varphi^{(n)}\right\rangle \\
&= i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\left\langle \Phi_k, \varphi^{(n)}\right\rangle \\
&= i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\varphi^{(n)}(x)dx\right].
\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.14, se tiene

$$\begin{aligned}
& i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\varphi^{(n)}(x)dx\right] \\
= \; & i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{ikx}\right)^{(n)}\varphi(x)dx\right] \\
= \; & i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\left[(ik)^n\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\varphi(x)dx\right] \\
= \; & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[(ik)^n e^{i(ik)^n(t-\xi)}\right]\widehat{G}(k,\xi)\left\langle \Phi_k, \varphi\right\rangle \\
= \; & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\langle \partial_t\left[e^{i(ik)^n(t-\xi)}\right]\widehat{G}(k,\xi)\Phi_k, \varphi\right\rangle \\
= \; & \left\langle \partial_t\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n(t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\Phi_k\right], \varphi\right\rangle \\
= \; & \left\langle \partial_t T(t-\xi)G(\xi), \varphi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\langle i\partial_x^n T(t-\xi)G(\xi), \varphi\rangle = \left\langle \partial_t T(t-\xi)G(\xi), \varphi\right\rangle, \forall\, \varphi \in \mathscr{P}.$$

Por lo tanto,

$$i\partial_x^n T(t-\xi)G(\xi) = \partial_t T(t-\xi)G(\xi).$$

□

**Teorema 5.2.** *Sea $s \in \mathbb{R}$, $n$ un número par y $\kappa > 0$ y fijados. Sea $G \in C([0,\kappa], H^s_{per})$, $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario de clase $C_0$ en $H^s_{per}$ que se definió en el Teorema 3.10 y definimos*

$$u_p(t) := \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi.$$

*Entonces, $u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s$ y*

$$i\partial_x^n u_p(t) = \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi.$$

*Así, se tiene que*

$$\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^n u_p(t)$$

*con respecto a la norma de $H^{r-n}_{per}$, para todo $r \leq s$. Además,*

$$\begin{cases} u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-n}_{per}) \\ \partial_t u_p(t) - i\partial_x^n u_p(t) = G(t) \in H^{s-n}_{per} \\ u_p(0) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

*con la primera derivada dado por*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u_p(t+h) - u_p(t)}{h} - G(t) - i\partial_x^n u_p(t) \right\|_{H^{s-n}_{per}} = 0.$$

*Demostración.* Probaremos paso a paso el teorema.

- Probaremos que $u_p(t)$ existe en $H^s_{per}$ para todo $t \in [0,\kappa]$.
  Por el Teorema 3.13 tenemos que

  $$T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}), \forall\, \phi \in H^s_{per}.$$

  Como $G(\xi) \in H^s_{per}, \forall\, \xi \in [0,\kappa]$, entonces $T(t-\xi)G(\xi)$ es continuo en $H^s_{per}, \forall\, \xi \in [0,t]$ con $t \in [0,\kappa]$. Luego existe

  $$u_p(t) = \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \in H^s_{per}, \forall\, t \in [0,\kappa].$$

- Probaremos que $u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per})$.
  Sea $t, t_0 \in [0,\kappa]$ tal que $t < t_0$ y $\xi \in (t, t_0)$.

$$\begin{aligned}
& \|u_p(t) - u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} \\
= & \left\| \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi - \int_0^{t_0} T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^s_{per}} \\
= & \left\| \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi - \left[ \int_0^t T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi + \int_t^{t_0} T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi \right] \right\|_{H^s_{per}} \\
= & \left\| \int_0^t \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi)d\xi - \int_t^{t_0} T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^s_{per}} \\
\leq & \left\| \int_0^t \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi)d\xi \right\|_{H^s_{per}} + \left\| \int_t^{t_0} T(t_0-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^s_{per}} \\
\leq & \int_0^t \left\| \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi) \right\|_{H^s_{per}} d\xi + \int_t^{t_0} \|T(t_0-\xi)G(\xi)\|_{H^s_{per}} d\xi.
\end{aligned}$$

  Definimos

$$\begin{aligned}
J_3(t) &:= \int_0^t \left\| \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi) \right\|_{H^s_{per}} d\xi, \\
J_4(t) &:= \int_t^{t_0} \|T(t_0-\xi)G(\xi)\|_{H^s_{per}} d\xi.
\end{aligned}$$

  Como queremos que para todo $\varepsilon > 0$ se tenga que $\|u_p(t) - u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} < \varepsilon$, cuando $|t - t_0| < \delta$, para algún $\delta > 0$ , entonces pretendemos que

$$J_3(t) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } J_4(t) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre que } |t - t_0| < \delta.$$

  - Para $J_3(t)$
    Vimos que $T(t-\xi)G(\xi)$ es continuo en $H^s_{per}$, para todo $\xi \in [0,t]$ con $t \in [0,\kappa]$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t - t_0| < \delta$, lo que implica que $|(t-\xi) - (t_0-\xi)| < \delta$, entonces $\left\| \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi) \right\|_{H^s_{per}} < \frac{\varepsilon}{2\kappa}$. Ahora,

$$J_3(t) = \int_0^t \left\| \left[T(t-\xi) - T(t_0-\xi)\right] G(\xi) \right\|_{H^s_{per}} d\xi < \int_0^t \frac{\varepsilon}{2\kappa} d\xi = \frac{\varepsilon}{2\kappa} t \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.2)$$

- Para $J_4(t)$
  Por (3.66), tenemos que $\|T(t_0-\xi)G(\xi)\|_{H^s_{per}} = \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}$.
  Consideremos $\delta < \frac{\varepsilon}{2\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}}$, entonces

$$\begin{aligned} J_4(t) &= \int_t^{t_0} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}\, d\xi \\ &\leq \sup_{\xi\in[t,t_0]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} \int_t^{t_0} d\xi \\ &\leq \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} (t_0-t) \\ &< \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}\, \delta \\ &< \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} \left[\frac{\varepsilon}{2\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}}\right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

  Por (5.2) y (5.3) tenemos $\|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} \leq J_1(t)+J_2(t) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, cuando $|t-t_0|<\delta$. Así, obtenemos que $u_p \in C\left([0,\kappa], H^s_{per}\right)$.

- Probaremos que $u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}), \forall\, r \leq s$.
  Sea $t, t_0$ pertenece $[0,\kappa]$ tal que $t < t_0, \xi \in (t,t_0)$. Por el Teorema 1.28, tenemos que

$$\|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^r_{per}} \leq \|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s$$

  y tomando límite

$$0 \leq \lim_{t\to t_0} \|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^r_{per}} \leq \lim_{t\to t_0} \|u_p(t)-u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} = 0, \forall\, r \leq s.$$

  Así, probamos que $u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}), \forall\, r \leq s$.

- Probaremos que $i\partial_x^n u_p(t) = \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi$.
  Por el Teorema 5.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t T(t-\xi)G(\xi) &= i\partial_x^n T(t-\xi)G(\xi) \\ \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi &= \int_0^t i\partial_x^n T(t-\xi)G(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{5.4}$$

Como el operador $\partial_x^n$ es cerrado, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^t i\partial_x^n T(t-\xi)G(\xi)d\xi &= i\partial_x^n \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \\ &= i\partial_x^n u_p(t) \end{aligned} \tag{5.5}$$

De (5.4) y (5.5) tenemos $i\partial_x^n u_p(t) = \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi$.

- Por probar que $\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^n u_p(t)$ en $H_{per}^{s-n}$.
  Por la versión generalizada al cálculo diferencial en espacios de Banach (en particular, en $H_{per}^{s-n}$), tenemos

$$\begin{aligned}\partial_t u_p(t) &= \partial_t \left[\int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi\right] \\ &= T(t-t)G(t)\cdot(1) - T(t-0)G(0)\cdot(0) + \int_0^t \partial_t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \\ &= G(t) + i\partial_x^n u_p(t). \end{aligned} \tag{5.6}$$

  Por lo tanto, se tiene que $\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^n u_p(t)$ en $H_{per}^{s-n}$.

- Por probar que $\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^n u_p(t)$ en $H_{per}^{r-n}, \forall r \leq s$.
  Por (5.6), tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h} - G(t) - i\partial_x^n u_p(t) \right\|_{H_{per}^{s-n}} = 0.$$

  Por el Teorema 1.28 y tomando límite, tenemos que para todo $r \leq s$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h\to 0} \left\| \frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h} - G(t) - i\partial_x^n u_p(t) \right\|_{H_{per}^{r-n}} \\ &\leq \lim_{h\to 0} \left\| \frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h} - G(t) - i\partial_x^n u_p(t) \right\|_{H_{per}^{s-n}} = 0. \end{aligned}$$

  Así obtenemos

$$\partial_t u_p(t) = G(t) + i\partial_x^n u_p(t)$$

  en $H_{per}^{r-n}$, para todo $r \leq s$.

- Probaremos que $\partial_t u_p \in C([0,\kappa], H^{s-n}_{per})$.
  Sea $t, t_0 \in [0,\kappa]$ tal que $t < t_0$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{s-n}_{per}} &= \|G(t) + i\partial_x^n u_p(t) - [G(t_0) + i\partial_x^n u_p(t_0)]\|_{H^{s-n}_{per}} \\ &\leq \|G(t) - G(t_0)\|_{H^{s-n}_{per}} + \|\partial_x^n \left[u_p(t) - u_p(t_0)\right]\|_{H^{s-n}_{per}}. \quad (5.7)\end{aligned}$$

  Usando el Teorema 1.28 y Teorema 1.29 en (5.7), se tiene

$$\begin{aligned}&\|G(t) - G(t_0)\|_{H^{s-n}_{per}} + \|\partial_x^n \left[u_p(t) - u_p(t_0)\right]\|_{H^{s-n}_{per}} \\ \leq\ &\|G(t) - G(t_0)\|_{H^{s}_{per}} + \|u_p(t) - u_p(t_0)\|_{H^{s}_{per}}. \quad (5.8)\end{aligned}$$

  Como $G, u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per})$ y por (5.8), se llega a que

$$\begin{aligned}0 \ &\leq \ \lim_{t\to t_0} \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{s-n}_{per}} \\ &\leq \ \lim_{t\to t_0} \|G(t) - G(t_0)\|_{H^s_{per}} + \lim_{t\to t_0} \|u_p(t) - u_p(t_0)\|_{H^s_{per}} = 0.\end{aligned}$$

  Así, obtenemos que $\partial_t u_p \in C([0,\kappa], H^{s-n}_{per})$.

- Probaremos que $\partial_t u_p \in C([0,\kappa], H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s$.
  Sea $t, t_0 \in [0,\kappa]$, tal que $t < t_0, \xi \in (t, t_0)$. Por el Teorema 1.28, tenemos que

$$\|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{s-n}_{per}}, \forall\, r \leq s$$

  y tomando límite, para todo $r \leq s$, obtenemos

$$0 \leq \lim_{t\to t_0} \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \lim_{t\to t_0} \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t_0)\|_{H^{s-n}_{per}} = 0.$$

  Así, tenemos que $\partial_t u_p \in C([0,\kappa], H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s$.

- Probaremos que $u_p(0) = 0$

$$u_p(0) = \int_0^0 T(-\xi) G(\xi) d\xi = 0.$$

□

## 5.2. Solución general de una generalización de la ecuación de Schrödinger no homogénea

En esta sección, se verá la solución general de una generalizada ecuación de Schrödinger y algunas propiedades con respecto a la condición inicial y su parte no homogénea.

**Teorema 5.3.** *Sea $\kappa > 0$, $n$ un número par y $s \in \mathbb{R}$ y fijados. $G \in C([0,\kappa], H^s_{per})$ y tenemos*

$$\begin{cases} u \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-n}_{per}) \\ \partial_t u(t) - i\partial_x^n u(t) = G(t) \in H^{s-n}_{per} \\ u(0) = \phi, \ \ con\ \phi \in H^s_{per} \end{cases} \tag{5.9}$$

*Entonces,*

1. *existe una única solución de (5.9),*
2. $u \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-n}_{per})$,
3. $u \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s$,
4. *probaremos que $u(0) = \phi$,*
5. *probaremos que $u$ cumple que $\partial_t u(t) - i\partial_x^n u(t) = G(t)$ en $H^{s-n}_{per}$.*

*Demostración.* Demostraremos paso a paso el teorema.

1. Probaremos que existe una única solución de (5.9).
   Supongamos que existe la solución, por (5.9) tenemos que

   $$\partial_t u(t) - i\partial_x^n u(t) = G(t)$$

   y aplicamos la transformada de Fourier

   $$\begin{aligned} \partial_t \widehat{u}(k,t) - i\widehat{\partial_x^n u}(k,t) &= \widehat{G}(k,t) \\ \partial_t \widehat{u}(k,t) - i(ik)^n \widehat{u}(k,t) &= \widehat{G}(k,t). \end{aligned}$$

Hemos obtenido el siguiente sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneo.

$$\begin{cases} \widehat{u} \in C\left([0,\kappa], \ell_s^2(\mathbb{Z})\right) \\ \partial_t \widehat{u}(k,t) - i(ik)^n \widehat{u}(k,t) = \widehat{G}(k,t) \ , \forall k \in \mathbb{Z}. \\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{\phi}(k), \text{ donde } \widehat{\phi} \in \ell_s^2(\mathbb{Z}) \end{cases} \tag{5.10}$$

Tomando un $k$ fijo, la ecuación diferencial solo de $t$, entonces multiplicamos $e^{-i(ik)^n t}$ a la ecuación (5.10) tenemos

$$\begin{aligned} e^{-i(ik)^n t}\partial_t \widehat{u}(k,t) - e^{-i(ik)^n t} i(ik)^n \widehat{u}(k,t) &= e^{-i(ik)^n t}\widehat{G}(k,t) \\ e^{-i(ik)^n t}\partial_t \left[\widehat{u}(k,t)\right] + \partial_t \left[e^{-i(ik)^n t}\right] \widehat{u}(k,t) &= e^{-i(ik)^n t}\widehat{G}(k,t) \\ \partial_t \left[e^{-i(ik)^n t}\widehat{u}(k,t)\right] &= e^{-i(ik)^n t}\widehat{G}(k,t). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Integrando (5.11) de 0 a $t$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^t \partial_\xi \left(e^{-i(ik)^n \xi}\widehat{u}(k,\xi)\right) d\xi &= \int_0^t e^{-i(ik)^n \xi}\widehat{G}(k,\xi)d\xi \\ e^{-i(ik)^n t}\widehat{u}(k,t) - e^{-i(ik)^n 0}\widehat{u}(k,0) &= \int_0^t e^{-i(ik)^n \xi}\widehat{G}(k,\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Como $e^{-i(ik)^n(0)}\widehat{u}(k,0) = \widehat{u}(k,0) = \widehat{\phi}(k)$ y despejando $\widehat{u}(k,t)$, se llega a que

$$\widehat{u}(k,t) = e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k) + e^{i(ik)^n t}\int_0^t e^{-i(ik)^n \xi}\widehat{G}(k,\xi)d\xi.$$

Luego, el candidato a solución de (5.9) es

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k) + e^{i(ik)^n t}\int_0^t e^{-i(ik)^n \xi}\widehat{G}(k,\xi)d\xi\right]\Phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k + \int_0^t \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n (t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\Phi_k\right] d\xi \\ &= T(t)\phi + \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Esta solución es única debido a la forma en que se obtuvo, si suponemos que existe otra solución, tendría la misma forma que la que hemos hallado.
Definimos

$$u_h(t) := T(t)\phi \text{ y } u_p(t) := \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi.$$

Notemos que $u_h$ es la solución homogénea y $u_p$ es la solución particular de (5.10) vistos en los Teorema 3.6 y Teorema 5.2, respectivamente,

2. Probaremos que $u \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-n}_{per})$.
Por el Teorema 3.6 tenemos $u_h \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-n}_{per})$ y como $[0,\kappa] \subset \mathbb{R}$, entonces

$$u_h \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-n}_{per}).$$

Además, por el Teorema 5.2, se tiene $u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-n}_{per})$. Por lo tanto,

$$u = u_h + u_p \in C([0,\kappa], H^s_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{s-n}_{per}).$$

3. Probaremos que $u \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s$.
Por el Teorema 3.6 tenemos $u_h \in C(\mathbb{R}, H^r_{per}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s$ y como $[0,\kappa] \subset \mathbb{R}$, entonces

$$u_h \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s.$$

Además, por el Teorema 5.2, tenemos $u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s$. Por lo tanto,

$$u = u_h + u_p \in C([0,\kappa], H^r_{per}) \cap C^1([0,\kappa], H^{r-n}_{per}), \forall\, r \leq s.$$

4. Probaremos que $u(0) = \phi$

$$\begin{aligned} u(0) &= u_h(0) + u_p(0) \\ &= T(0)\phi + \int_0^0 T(0-\xi)G(\xi)d\xi \\ &= \phi. \end{aligned}$$

5. Probaremos que $\partial_t u(t) = i\partial_x^n u(t) + G(t)$
   Como existen $\partial_t u(t)$ y $\partial_x^n u(t)$ en $H_{per}^{s-n}$ y $G(t) \in H_{per}^s$, para todo $t \in [0,\kappa]$ y por el Teorema 1.28, tenemos que $G(t) \in H_{per}^{s-n}, \forall\, t \in [0,\kappa]$, entonces en $H_{per}^{s-n}$

   $$\partial_t u(t) = i\partial_x^n u_h(t) + [i\partial_x^n u_p(t) + G(t)] = i\partial_x^n \left[u_h(t) + u_p(t)\right] + G(t) = i\partial_x^n u(t) + G(t).$$

□

**Corolario 5.4.** *La única solución de (5.9) es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(ik)^n (t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\Phi_k d\xi.$$

Considerando $n$ un número par múltiplo de cuatro o no múltiplo de cuatro, obtenemos dos casos particulares que enunciamos a continuación.

**Corolario 5.5.** *La única solución de (5.9) y n par múltiplo de cuatro. La solución es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^n (t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\Phi_k d\xi.$$

**Corolario 5.6.** *La única solución de (5.9) y n par no múltiplo de cuatro. La solución es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^n t}\widehat{\phi}(k)\Phi_k + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^n (t-\xi)}\widehat{G}(k,\xi)\Phi_k d\xi.$$

A continuación, veremos algunas propiedades de la solución general con respecto a la condición inicial y el término no homogéneo.

**Teorema 5.7.** *Sea $s \in \mathbb{R}$, $n$ un número par y $\kappa > 0$ y fijados. Sea $u$ la solución de (5.9). Entonces,*

1. *se cumple*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H_{per}^r} &\leq \|\phi\|_{H_{per}^s} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H_{per}^s}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u(t)\|_{H_{per}^r} &\leq \|\phi\|_{H_{per}^s} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H_{per}^s}, \forall\, r \leq s, \end{aligned}$$

2. *y también*

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-2}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

*Demostración.* Probaremos cada uno de los ítems.

1) Probaremos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

Sea $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$, se tiene

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^r_{per}} &= \left\| T(t)\phi + \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^r_{per}} \\ &\leq \|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} + \left\| \int_0^t T(t-\xi)G(\xi)d\xi \right\|_{H^r_{per}} \\ &\leq \|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} + \int_0^t \|T(t-\xi)G(\xi)\|_{H^r_{per}}\, d\xi. \end{aligned}$$

Usando el Teorema 1.28 y por (3.66), se tiene

$$\begin{aligned} & \|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} + \int_0^t \|T(t-\xi)G(\xi)\|_{H^r_{per}}\, d\xi \\ \leq\ & \|T(t)\phi\|_{H^s_{per}} + \int_0^t \|T(t-\xi)G(\xi)\|_{H^s_{per}}\, d\xi \\ =\ & \|\phi\|_{H^s_{per}} + \int_0^t \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}\, d\xi \\ \leq\ & \|\phi\|_{H^s_{per}} + \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}} \kappa. \end{aligned}$$

Luego, hemos obtenido que

$$\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa]. \tag{5.13}$$

Demostrando así que

$$\sup_{t\in[0,\kappa]}\|u(t)\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \tag{5.14}$$

2) Probaremos que

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa)\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa],\\
\sup_{t\in[0,\kappa]}\|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa)\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s.
\end{aligned}$$

Sea $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &= \|i\partial_x^n u(t) + G(t)\|_{H^{r-n}_{per}}\\
&\leq \|i\partial_x^n u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} + \|G(t)\|_{H^{r-n}_{per}}\\
&= \|\partial_x^n u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} + \|G(t)\|_{H^{r-n}_{per}}\,.
\end{aligned}$$

Usando el Teorema 1.29 y Teorema 1.28, llegamos a que

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^n u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} + \|G(t)\|_{H^{r-n}_{per}}\\
\leq\ &\|u(t)\|_{H^r_{per}} + \|G(t)\|_{H^s_{per}}\\
\leq\ &\|u(t)\|_{H^r_{per}} + \sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Por (4.15), tenemos

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{H^r_{per}} + \sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}\\
\leq\ &\left\{\|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}\right\} + \sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}\\
=\ &\|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa)\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Luego, hemos obtenido que

$$\|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa)\sup_{\xi\in[0,\kappa]}\|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, t \in [0,\kappa]. \tag{5.15}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} \leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \tag{5.16}$$

□

Una consecuencia del teorema anterior es la relación de dos soluciones de dos problemas de Cauchy de la ecuación de Schrödinger con respecto a sus condiciones iniciales y términos no homogéneo diferentes, lo cual enunciamos en el siguiente corolario.

**Corolario 5.8.** *Sea $s \in \mathbb{R}$, $n$ un número par y $\kappa > 0$ y fijados. Sea $\phi_1, \phi_2 \in H^s_{per}$, $G_1, G_2$ pertenece $C([0,\kappa], H^s_{per})$ y $u_1, u_2$ las soluciones respectivas de (5.9) con condición inicial $\phi_1, \phi_2$ y con término no homogéneo $G_1, G_2$, respectivamente. Entonces,*

1. *se cumple, para todo $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$, se obtiene*

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}} \end{aligned}$$

2. *y, también, para todo $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$, se tiene*

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Probaremos cada uno de los ítems.

1. Probaremos que para todo $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$, tenemos

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

Definimos $u(t) := u_1(t) - u_2(t)$, entonces

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1(0) - u_2(0) \\ &= \phi_1 - \phi_2 \end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - i\partial_x^n u(t) &= \partial_t \left[u_1(t) - u_2(t)\right] - i\partial_x^n \left[u_1(t) - u_2(t)\right] \\ &= \left[\partial_t u_1(t) - i\partial_x^n u_1(t)\right] - \left[\partial_t u_2(t) - i\partial_x^n u_2(t)\right] \\ &= G_1(t) - G_2(t). \end{aligned}$$

Así, obtenemos que una $u$ es solución de (5.9) con condición inicial $\phi = \phi_1 - \phi_2$ y con término no homogéneo $G = G_1 - G_2$. Luego, por el Teorema 5.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

Así, para todo $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$, se tiene

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

2. Probaremos que para todo $r \leq s$ y $t \in [0,\kappa]$

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

Definimos $u$ como en el inciso 1, entonces por el Teorema 5.7, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s, \forall\, t \in [0,\kappa], \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi)\|_{H^s_{per}}, \forall\, r \leq s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $r \leq s$ y $t \in [0, \kappa]$

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}, \\ \sup_{t\in[0,\kappa]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^{r-n}_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} + (1+\kappa) \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G_1(\xi) - G_2(\xi)\|_{H^s_{per}}. \end{aligned}$$

□

A continuación, veremos la dependencia de la solución respecto a la condición inicial y el término no homogéneo. Lo cual se enunciará en el siguiente corolario.

**Corolario 5.9.** *Sea $s \in \mathbb{R}$, $n$ un número par y $\kappa > 0$ y fijados. La ecuación diferencial (5.9) posee una única solución.*

*Demostración.* Sea $u_1, u_2$ solución de la ecuación diferencial parcial (5.9) con la misma condición inicial $\phi \in H^s_{per}$ y mismo término no homogéneo $G \in C([0,\kappa], H^s_{per})$, entonces por el Corolario 5.8 tenemos para todo $r \leq s$

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi - \phi\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|G(\xi) - G(\xi)\|_{H^s_{per}} \\ &= \|0\|_{H^s_{per}} + \kappa \sup_{\xi\in[0,\kappa]} \|0\|_{H^s_{per}} \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Luego, $\sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^r_{per}} = 0$, para todo $r \leq s$. Considerando $r = s$, entonces

$$\sup_{t\in[0,\kappa]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s_{per}} = 0.$$

Por lo tanto, $u_1 = u_2$ en $H^s_{per}$, es decir, la ecuación diferencial (5.9) posee única solución. □

# Conclusiones

En este trabajo se analizaron y obtuvieron los siguientes resultados:

1.- Se estudio la existencia de solución de la ecuación de Schrödinger homogénea, se obtuvo como resultado la existencia, unicidad, regularidad de la solución y la dependencia continua de la solución respecto la condición inicial. De la prueba de la existencia de solución obtenemos un grupo de operadores lineales acotados y luego, concluimos este primer análisis matemático obteniendo la propiedad conservativa. A su vez se hizo el estudio del nexo entre diferenciabilidad y dato inicial.

2.- En base a los resultados obtenidos, descritos en el ítem previo, propuso estudiar la existencia de solución de la generalización de la ecuación de Schrödinger de n - ésimo orden, obteniendo como resultados la existencia, regularidad y dependencia continua de la solución respecto de las condiciones iniciales. Análogamente, de la demostración de la existencia de solución obtenemos un grupo de operadores lineales acotados y concluimos con este segundo análisis matemático obteniendo la propiedad conservativa de esta EDP de orden $n$. Similarmente se estudió el nexo entre la diferenciabilidad y dato inicial para este caso.

3.- Se estudio la existencia de solución de la ecuación de Schrödinger no homogénea. Aquí, se analizo la existencia, regularidad de una solución particular y tomando los resultados de los estudios del caso homogéneo se probó la existencia y unicidad de la solución local del problema no homogéneo.

4.- Finalmente, considerando la técnica usada en el ítem 3 se obtuvo los resultados para una generalización de la ecuación de Schrödinger no homogénea de orden $n$.

# Bibliografía


[1] Ayala, Y. S. S., y Romero, S. C. R. (2021). *Existence and regularity of the solution of non homogeneous Schrödinger equation in periodic Sobolev spaces.* Selecciones matematicas, 8(1), 37-51. https://doi.org/10.17268/sel.mat.2021.01.04

[2] Iorio, R. J., y Iorio, V. M. (2001). *Fourier analysis and partial differential equations.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[3] Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley y Sons.

[4] Pazy, A. (2012). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations (Applied Mathematical Sciences, 44).* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

[5] Santiago Ayala, Y. S. (2022). *Existence and Continuous Dependence of the Local Solution of Non Homogeneous Third Order Equation and Generalizations.* Transactions on Engineering and Computing Sciences, 10(5), 43-56. https://doi.org/10.14738/tmlai.105.13171

[6] Courteille, Ph. W. (2025). *Quantum Mechanics for Atomic and Molecular Physics, Quantum and Atom Optics*. Universidade de São Paulo, Instituto de Física de São Carlos. https://www.ifsc.usp.br/~strontium/Publication/Scripts/QuantumMechanicsScript.pdf