

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú, Decana de América

Facultad de Ciencias Físicas

Escuela Profesional de Física

Aceleración del universo con y sin energía oscura

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

AUTOR

Manuel Jesús Churampi Lavado

ASESOR

Dr. Fulgencio Villegas Silva

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Churampi, M. (2024). *Aceleración del universo con y sin energía oscura*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Manuel Jesús Churampi Lavado
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	75204297
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-7054-5928
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Fulgencio Villegas Silva
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09202973
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-2560-9352
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Rafael Edgardo Carlos Reyes
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06443628
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Teófilo Vargas Auccalla
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06532544
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Carlos Javier Solano Salinas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445870
Miembro del jurado 3	
Nombres y apellidos	
Tipo de documento	

Número de documento de identidad	
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.2.6.2. Cosmología y Gravitación
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Calle: Av. República de Venezuela Latitud: -12.05642315 Longitud: -77.08433269016213
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Octubre 2021 - febrero 2024
URL de disciplinas OCDE	Obligatorio. Física de partículas, Campos de la Física https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.03

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

Siendo las 17:00 horas del Martes 16 de julio de 2024, en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias Físicas (Auditorio 109), bajo la Presidencia del Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes (Presidente), Dr. Teófilo Vargas Auccalla (Miembro), Dr. Fulgencio Villegas Silva (Asesor) y Dr. Carlos Javier Solano Salinas (Miembro Suplente), se dió inicio a la Sesión Pública de Sustentación del Proyecto de Investigación para optar por el título de Licenciado en Física, del bachiller:

MANUEL JESÚS CHURAMPI LAVADO

Dando lectura al Resumen del Expediente, el Presidente del Jurado, invitó al bachiller Manuel Jesús Churampi Lavado a realizar una exposición del Trabajo de Tesis titulada: "Aceleración del universo con y sin energía oscura".

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente, invitó al bachiller y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado el Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes, invitó al candidato y al público a pasar a la Sala de Sesión, para dar lectura al resultado de la deliberación. Ha obtenido la calificación de:

18	dieciocho	Aprobado con honores
(NÚMERO)	(LETRAS)	(MENCIÓN)

Finalmente, el Presidente del Jurado, propone al consejo de la Facultad que se le declare Licenciado en Física al bachiller Manuel Jesús Churampi Lavado. Siendo las 18:30 horas, se levanta la sesión.

Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes
Presidente

Dr. Teófilo Vargas Auccalla
Miembro Titular

Dirección: Calle Germán Amézaga N.º 375 - Lima
Facultad de Ciencias Físicas
Apartado Postal: 14-0149 – Lima 14 Perú

Escuela Profesional de Física
6197000 Anexo 3805
E-mail eapfis@unmsm.edu.pe

Dr. Fulgencio Villegas Silva
Asesor

Dr. Carlos Javier Solano Salinas
Miembro Suplente

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, Decana de América)
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
EP FÍSICA

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Fulgencio Villegas Silva en mi condición de asesor acreditado por el Acuerdo Comité de Gestión N° 002-EPF-FCF-24 de la tesis de investigación, cuyo título es Aceleración del universo con y sin energía oscura presentado por el bachiller Manuel Jesús Churampi Lavado para optar el título de Licenciado en Física.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 13 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título correspondiente.

Firma del Asesor _____

DNI: 09202973

Nombres y apellidos del asesor: Fulgencio Villegas Silva



Dedicado a mi madre Gladys Lavado ...

Agradecimientos

Gracias a mi familia por su apoyo incondicional.

Gracias a mi asesor, Dr. Fulgencio Villegas, por su orientación y apoyo en la realización de esta tesis, y al profesor Dr. Teófilo Vargas por sus enseñanzas y consejos durante el pregrado ...

Resumen

Aceleración del universo con y sin energía oscura

En el presente trabajo de tesis se muestra el desarrollo histórico de la concepción sobre el funcionamiento del universo y su evolución, desde las ideas de un universo estático a uno en expansión acelerada como se conoce en la actualidad. Se desarrolla a detalle, a partir las ecuaciones de Einstein, la formulación del modelo ΛCDM, que es uno de los más importantes que se ha propuesto para explicar la expansión acelerada del universo, además se analiza las principales características que surgen de este modelo para la energía oscura como responsable de causar esta aceleración, y que según este modelo está asociada a la constante cosmológica (Λ). Se muestra la contrastación con las principales observaciones experimentales para determinar su validez encontrando que describe bastante bien al universo. Se llega también a la posible relación de la constante cosmológica con la energía del vacío y al problema de los órdenes de magnitud entre la densidad de energía asociada a Λ y al vacío.

Dada esta discordancia entre los órdenes de magnitud, se propone un modelo de un universo con viscosidad que puede explicar la aceleración del universo solo de las características planteadas para dicho modelo. De este modelo surgen múltiples predicciones según los valores que se le dé a las constantes ζ_0 y ζ_1, que surgen de la parametrización del término ζ de viscosidad asociada a la densidad de materia del universo, como $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$, donde H es el término de Hubble. Agrupamos todos estos casos en 12 grupos de los cuales, a través de las restricciones experimentales y teóricas, se pudo definir cual de ellos describe mejor al universo. Para esto, se resolvió las ecuaciones para encontrar la forma del factor de escala, el escalar de curvatura y la densidad de materia del universo, ya que estas expresiones nos dan información sobre la evolución del universo.

Se encontró también que este modelo con viscosidad se ajusta bastante bien a los datos experimentales. De esta forma, se demostró que se puede evitar el problema de los órdenes de magnitud con la densidad de energía del vacío y la coincidencia cosmológica.

Desarrollamos también los cálculos para hallar la edad del universo según ambos modelos. Finalmente se hace una comparación entre los dos modelos, según sus predicciones y su grado de ajuste a los datos experimentales.

Palabras clave: Cosmología, aceleración del universo, constante cosmológica, viscosidad volumétrica.

Abstract

Acceleration of the universe with and without dark energy

This thesis work shows the historical development of the conception of the functioning of the universe and its evolution, from the ideas of a static universe to one in accelerated expansion as it is known today. It develops in detail, from Einstein's equations, the formulation of the ΛCDM model, which is one of the most important models proposed to explain the accelerated expansion of the universe, and it also analyzes the main characteristics that arise from this model for the dark energy as responsible for causing this acceleration, and that according to this model is associated to the cosmological constant (Λ). The contrast with the main experimental observations is shown to determine its validity, finding that it describes the universe quite well. The possible relation of the cosmological constant with the vacuum energy and the problem of the orders of magnitude between the energy density associated with Λ and the vacuum are also discussed.

Given this discordance between the orders of magnitude, a model of a universe with viscosity is proposed that can explain the acceleration of the universe only from the characteristics proposed for that model. From this model, multiple predictions arise depending on the values given to the constants ζ_0 and ζ_1, which arise from the parameterization of the viscosity term ζ associated to the matter density of the universe, as $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$, where H is the Hubble term. We grouped all these cases into 12 groups from which, through experimental and theoretical constraints, we were able to define which of them best describes the universe. For this, we solved the equations to find the form of the scale factor, the curvature scalar and the matter density of the universe, since these expressions give us information about the evolution of the universe.

It was also found that this model with viscosity fits the experimental data quite well. Thus, it was shown that the orders of magnitude problem with vacuum energy density and cosmological coincidence can be avoided.

We also develop the calculations to find the age of the universe according to both models. Finally, a comparison is made between the two models, according to their predictions and their degree of fit to the experimental data.

Keywords: Cosmology, acceleration of the universe, cosmological constant, volumetric viscosity.

Índice general

Agradecimientos II

Índice general V

1. Introducción 1

2. Relatividad general y cosmología 4
2.1. Teoría de la relatividad general . . . 4
2.1.1. Implicaciones del principio de equivalencia y la localidad . . . 5
2.1.2. Ecuaciones de la relatividad general . . . 7
2.1.3. Acción de Einstein-Hilbert . . . 9
2.2. Cosmología . . . 11
2.3. Modelo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker . . . 12
2.3.1. Ecuación de conservación . . . 14
2.3.2. Forma de las ecuaciones de estado para los fluidos cosmológicos . . . 15
2.4. Relación entre el corrimiento al rojo gravitacional y el factor de escala . . . 15

3. Aceleración del universo con energía oscura 18
3.1. La constante cosmológica . . . 18
3.1.1. Orígenes . . . 18
3.1.2. Modelo ΛCDM . . . 18
3.1.3. Modificación de las ecuaciones de Friedmann con la constante cosmológica 19
3.1.4. Parámetros cosmológicos y la densidad crítica . . . 20
3.2. Pruebas de la existencia de una constante cosmológica positiva . . . 22
3.2.1. Calculo de la edad del universo . . . 22
3.2.2. Estudio del corrimiento al rojo en supernovas . . . 27
3.2.3. Determinación del valor de Ω_Λ . . . 27
3.3. Interpretación de la constante cosmológica como energía del vacío . . . 29

4. Aceleración del universo sin energía oscura 34
4.1. Fluidos con viscosidad en el contexto cosmológico . . . 34
4.1.1. Forma del tensor de energía-momento de un fluido con viscosidad volumétrica . . . 34

4.2. Modelo de un universo con viscosidad volumétrica 35
4.2.1. Evolución de factor de escala y la expansión del universo modelado con viscosidad volumétrica 41
4.2.2. Evolución del escalar de curvatura para un universo con viscosidad volumétrica 50
4.2.3. Evolución de la densidad del materia 52
4.2.4. Cálculos de la edad del universo 53
4.2.5. Comparación con el modelo ΛCDM 56

5. Conclusiones **57**

A. Desarrollo de las ecuaciones de Friedmann **59**

B. Desarrollo de las ecuaciones de Friedmann con constante cosmológica **63**

Bibliografía **65**

Capítulo 1

Introducción

Medir el universo para determinar que se está expandiendo, y definir si esta expansión es acelerada o desacelerada, no fue una tarea fácil. Para saber a que distancias se encuentran las galaxias, los astrónomos tuvieron que idear una serie de métodos que con el tiempo han logrado darnos la posibilidad de medir galaxias hasta de unos 400 Mpc [1], a estos métodos se le denomina "Escalera de distancias cósmicas".

Para determinar los escalones más bajos de distancias se usan métodos geométricos como el paralelaje, donde se aprovecha la rotación terrestre. En el siguiente nivel, para hacer mediciones de distancias más lejanas se usan las variables cefeidas, que son estrellas de masa superior a tres veces el sol, que se encuentran en un estado inestable de su evolución en donde su brillo, su color y el tamaño de su atmosfera varían con un periodo regular, y se conoce una relación entre este periodo y su brillo intrínseco (luminosidad) [2]. Entonces de esta forma es posible saber su brillo intrínseco aunque se encuentre en galaxias alejadas, luego con la observación de su brillo aparente es posible saber la distancias a la que se encuentran. Con este método es posible medir cefeidas hasta uno 30 Mpc [3]. Por otro lado, la velocidad con que las galaxias se alejan es un tanto más sencillo de medir, y se hace a través del cambio de frecuencias de la luz emitida y recibida proveniente de las galaxias, llamado corrimiento al rojo.

Es así como, en 1929 en base a observaciones de cefeidas, Edwin Hubble encontró que las galaxias se alejaban a una velocidad proporcional a su distancia [4]

$$v = Hr$$

.

Donde H es llamada la constante de Hubble, demostrando así que el universo se expande. El valor de dicha constante presentada en el trabajo de Hubble fue de unos $500\frac{Km}{s}$/Mpc [5].

Dado este descubrimiento se dejaron atrás las ideas de un universo estático, y se puso atención a los modelos de un universo dinámico en el tiempo. Unos años antes, Alexander Friedmann en 1920, propuso una familia de soluciones de las ecuaciones de la Teoría de la relatividad de Einstein para universo homogéneo e isotrópico [6], dichas soluciones describían un universo dinámico con la posibilidad de una expansión global. Por su parte el astrónomo y sacerdote George Lemaitre encuentra también una familia de soluciones para la relatividad general equivalentes a las de Friedmann [7]. Según estos modelos la edad del universo debía ser aproximadamente igual a la inversa de la constante de Hubble y daba como resultado unos 2 mil millones de años, edad que no era coherente dado que las edades de la tierra y varias estrellas determinadas por los astrónomos superaban por mucho esta cifra.
Se hicieron muchas correcciones del valor de la constante de Hubble a lo largo de los años, tanto antes como después de la muerte de Hubble, hasta llegar a valores de entre 50 y 100 $\frac{Km}{s}$/Mpc [8] de parte de grupos de investigadores que cada vez hacían mediciones más sofisticadas. En 1990, se lanzó el telescopio espacial Hubble, motivado en parte por medir con mas precisión el valor de dicha constante. Ya sin los efectos de la atmosfera terrestre, el telescopio espacial era capaz de medir cefeidas a unos 20 Mpc en el cúmulo de virgo, es decir permitió hacer medidas que eran hasta 10 veces mayores que cualquiera de los telescopios terrestres [9].

Además del uso de las cefeidas, para extender la distancia de medidas se estudiaron otros métodos que usaban las relaciones entre las propiedades de las galaxias como, la relación de Tully-Fisher entre velocidad de rotación de las galaxias espirales y su luminosidad, y la relación análoga para galaxias elípticas, ya que mientras más brillante sea una galaxias elíptica tendrá una mayor dispersión de velocidades orbitales [8], estos métodos permiten hacer medidas de hasta 150 Mpc.
Trabajando en diversos métodos de mediciones, luego de casi 10 años de trabajo un grupo de astrónomos del llamado Key proyect presentó en el 2001 la mejor de sus estimaciones de la constante de Hubble, $H_o = 72 \pm 8\frac{Km}{s}$/Mpc, consiguiendo así una estimación de la constante con una incertidumbre solo del 10 % [10].
Uno de los indicadores de distancia que también se desarrollaron por aquellos años, y que superaba el alcance de los 150 Mpc, era el uso del brillo máximo de las supernovas. Las supernovas son la fase final de la vida de una estrella o de un sistema de estrellas binarias, esta fase final produce una explosión que hace que la estrella genere un brillo mayor al de su galaxia por un breve tiempo. En particular las supernovas usadas mayormente para medir distancia son las del tipo Ia [11], que se producen en un sistema binario de estrellas cuando una de las estrellas, una vez alcanzada la fase de enana blanca supera el límite de Chandrasekhar, a causa de que

la otra estrella que se encuentra en la fase de gigante roja pierde sus capas externas atraídas por la intensa fuerza gravitacional de la enana blanca. El intenso brillo de las supernovas y el estudio de como disminuye con el tiempo permite calcular la luminosidad y el brillo relativo con bastante precisión, lo que a su vez permite determinar distancias con bastante precisión. Sin embargo, la detección de supernovas no es una tarea sencilla, y se requiere de estudios previos. Fueron dos grupos de astrónomos, alrededor de 1994, que se propusieron estudiar las supernovas para las mediciones de la ley de Hubble a grandes distancias. El Supernova Cosmology Proyect (SCP), liderado por Saul Permutter [12], y el grupo competidor High-z Supernova Search Team (HZT), liderado por Brian Schmaidt y en el que también participaba Adam Riess[13].

Ambos grupos usaron una versión un poco modificada del diagrama propuesto por Hubble, donde se relacionaba magnitud -desplazamiento z, sobre este diagrama los diferentes modelos para el universo predicen diferentes relaciones entre magnitud y z, fueron las observaciones las que debieron determinar cual es el correcto, las diferentes predicciones entre los distintos modelos se hacen mayores a medida que z supera el valor de 0.3 . En 1998, ambos grupos midieron suficientes supernovas como para poder presentar sus resultados. Los dos equipos esperaban encontrar una tendencia a la desaceleración en las velocidades de recesión de las galaxias más lejanas, como lo predicho tomando en cuenta la atracción gravitacional por parte de la materia del universo. Pero los resultados fueron contrarios a estas consideraciones, ya que las galaxias más lejanas, es decir con más z, tenían una magnitud mayor (un brillo menor). El hecho de que las galaxias más lejanas tenían un brillo menor, solo podría ser consecuencia de que estaban más lejos de lo esperado, y por consecuencia la única forma de explicar esto era concluir que la expansión del universo era acelerada. Posterior a estas publicaciones se hicieron más estudios que comprobaron estos resultados [1].

Este nuevo descubrimiento significó un radical cambio en las nociones sobre el universo, y al causante de esta expansión acelerada del universo se le denominó energía oscura, y tras de esta energía oscura se han postulado una serie de modelos que tratan de explicar su naturaleza.

Capítulo 2

Relatividad general y cosmología

2.1. Teoría de la relatividad general

Tras el éxito de la relatividad especial para dar solución al problema de la incompatibilidad de la teoría electromagnética con la relatividad clásica, y de demostrar que no existe un tiempo ni un espacio absoluto. Albert Einstein buscaba generalizar su teoría de la relatividad especial e incluir la gravedad en ella, dado que la gravedad newtoniana no se ajustaba a los principios de la relatividad especial [14].

Es así como, despues varios años de trabajo intelectual, en 1915 postuló la relatividad general [15] como una teoría de la gravedad que era compatible con la relatividad especial. Los principios que condujeron a Einstein a la formulación de la relatividad general fueron:

- Principio de equivalencia:
  Inicialmente, nos dice que todos los cuerpos experimentarán igual aceleración al caer en el mismo campo gravitacional, a partir de donde se deduce su forma más general como [16]:

  > Todos los observadores que se encuentren en caída libre dentro de un campo gravitacional serán localmente equivalentes a un observador inercial.

  Llamado principio de equivalencia de Einstein, este principio nos indica que en regiones suficientemente pequeñas un observador no podrá distinguir si se encuentra en un sistema inercial o en caída libre. Como sucede en el experimento mental donde se considera una persona dentro de un ascensor en caída libre dentro del cual, si es suficientemente pequeño, no podrá distinguir con ningún experimento si se encuentra en un sistema inercial o en caída libre en un campo gravitacional.
  Otra forma alternativa de escribir el principio de equivalencia de Einstein es :

> Un observador que se encuentre en reposo dentro de un campo gravitacional, será localmente equivalente a otro observador que se encuentre con una aceleración a=-g y en ausencia de campo gravitacional.

Que lo llamaremos enunciado alternativo del principio de equivalencia de Einstein.

- Principio de Mach:
  Nos dice que para cualquier objeto su inercia local es causada por toda la distribución de materia contenida en el universo. Que en un contexto de gravedad como deformación del espacio tiempo, le dio las primeras ideas sobre que los objetos materiales podrían ser los responsables de esta curvatura o deformación [17].

- Principio de correspondencia:
  Establece que debe haber una consistencia entre las distintas teorías. La relatividad general se debe reducir a la relatividad especial cuando no existan fuentes de campo gravitacional que curven el espacio, también la relatividad general nos debe dar la teoría Newtoniana de la gravedad para el límite de bajas velocidad y campos gravitacionales bajos en intensidad [16].

- Principio de covariancia:
  Nos dicen que las leyes que describen a un sistema tienen que ser las mismas para cualquier observador localmente inercial [18].
  Lo que motivó a Einstein a escribir sus ecuaciones en forma tensorial.

2.1.1. Implicaciones del principio de equivalencia y la localidad

Si consideramos que un observador dentro de un ascensor en caída libre emite un rayo de luz en sentido perpendicular a la dirección de su caída (Figura 2.1), según el principio de equivalencia de Einstein en su primera versión, el observador en caída libre es localmente inercial y verá la trayectoria de la luz en línea recta, pero desde la perspectiva de un observador en reposo en el campo gravitacional verá al primer observador cayendo y la luz curvarse. Lo mismo se puede deducir del enunciado alternativo del principio de equivalencia de Einstein, en donde desde el punto de vista de un observador acelerado, la luz es percibida con una trayectoria curva, entonces la misma curvatura será percibida por un observador en reposo en un campo gravitacional al ser ambos equivalentes..

También se puede demostrar usando el principio de equivalencia que la luz emitida pierde energía al salir de un campo gravitacional, y que gana energía al entrar. Esta perdida o ganancia de energía se puede deducir que es debido a la existencia de una no uniformidad del tiempo en la región de un campo gravitacional al considerarse como valido este principio. Es decir, se puede probar que el tiempo transcurre más lento mientras más cerca se encuentre el observador de la

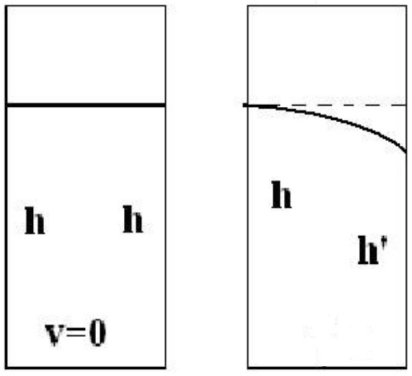

FIGURA 2.1: Curvatura de la luz [16]. La parte izquierda muestra la trayectoria recta de la luz vista desde la perspectiva del observador en caída libre, mientras que en la parte derecha se muestra la perspectiva del observador en reposo en el campo gravitacional que verá la luz curvarse dentro del ascensor en caida libre.

fuente del campo.

Por lo que, a partir del principio de equivalencia de Einstein, se demuestra que en presencia de un campo gravitacional existe una deformación del espacio y del tiempo. De este modo, el espacio-tiempo ya no puede ser descrito solo por la geometría plana de Minkowsky.

Debemos recordar también que la validez de este principio solo es local. De esta localidad se deduce que, a diferencia de la relatividad especial, en esta nueva teoría de la relatividad general no se puede establecer sistemas de referencias que cubran todo el espacio-tiempo sino solo sistemas de referencia locales, que se extienden solo alrededor de un punto. Esto lo podemos ver en el ejemplo del observador en caída libre, para el cual solo localmente será valida la geometría de Minkowsky y la relatividad especial, es decir solo podrá establecer un sistema de coordenadas planas en una región pequeña alrededor de él, no podrá establecer un sistema de coordenadas que cubran todo el espacio.

Es por esto que, en relatividad general, el espacio-tiempo es representado por una variedad diferencial de 4 dimensiones M con una métrica que no es constante pero que si deberá tener la misma signatura de Minkowsky, porque deberá reducirse a la relatividad especial en ausencia de curvatura. Esta variedad diferencial tiene las mismas propiedades de localidad que las descritas a partir del principio de equivalencia [18].

2.1.2. Ecuaciones de la relatividad general

Como lo hemos remarcado, los efectos de un campo gravitacional se pueden ver como una curvatura del espacio-tiempo; asimismo, si según la teoría newtoniana el campo gravitacional es generado por la materia es de esperarse, en esta nueva forma de describir la gravedad, que la curvatura del espacio-tiempo debe ser generada por la materia, pero también por la energía, dado que según la relatividad especial la materia es una forma de energía y viceversa.
El siguiente paso seria encontrar las ecuaciones que describan como la materia y energía curvan el espacio-tiempo.

Por el principio de correspondencia sabemos que estas nuevas ecuaciones deberán dar como caso particular las ecuaciones de la gravedad newtoniana. Estas ecuaciones de Newton pueden ser escritas en la forma [19]

$$\nabla^2\phi(t,X) = 4\pi G\rho(t,X), \tag{2.1}$$

donde la parte derecha vemos que se encuentra la información de la distribución de materia en la densidad $\rho(t,X)$, mientras que en la parte izquierda está el potencial gravitacional como la incógnita del problema, además de el laplaciano aplicado al potencial, donde dentro del laplaciano se encuentra la información geométrica, esto es la métrica usada para la definición del mismo.

Entonces, podemos concluir que las nuevas ecuaciones de la relatividad general deberán tener la estructura

$$\text{(Geometría del espacio tiempo)} \propto \text{(Distribución de materia energia)}.$$

Luego, de acuerdo con el principio de covarianza, estas ecuaciones deben tener la misma forma para todos los observadores, entonces deberán ser escritas en forma tensorial.

Se puede demostrar que la distribución de materia energía puede ser escrita de forma tensorial en $T^{\mu v}$, un tensor simétrico que deberá cumplir con [17]

$$\nabla_v T^{\mu v} = 0, \tag{2.2}$$

para que sea válida la conservación de la energía.

Por el lado izquierdo de las ecuaciones de esta nueva teoría, se debe tener un tensor que guarde las misma propiedades de T y que contenga información puramente geométrica, tal que [16] [20]

$$G_{\mu v} = KT_{\mu v}. \tag{2.3}$$

El tensor $G_{\mu v}$, tendrá que:

1. Ser simétrico, igual que $T_{\mu v}$.
2. Tener información puramente geométrica, es decir debe ser función de solo la métrica y sus derivadas.
3. Cumplir con la relación de $\nabla_v G^{\mu v} = 0$, ya que $\nabla_v T^{\mu v} = 0$.
4. Deberá ser a lo más lineal en las componentes del tensor de Riemann, para que se obtenga como máximo una ecuación de segundo grado diferencial en la reducción a la gravedad de Newton.
5. Ser de orden dos, para coincidir o ser proporcional a $\mathbf{T}$.

Se puede probar que el tensor simétrico de orden dos más general que se puede escribir a partir de la métrica y que siga siendo lineal en las componentes del tensor de Riemann es [16]

$$G_{\mu v} = aR_{\mu v} + bg_{\mu v}R + cg_{\mu v}, \tag{2.4}$$

donde $R_{\mu v}$ es el llamado tensor de Ricci, R el escalar de curvatura, con a y b como constantes.

Si aplicamos $\nabla_v G^{\mu v} = 0$, se obtiene que $b = -a/2$. Después, al aplicar la condición de que para ausencia de fuentes de gravitacionales se debe reducir a la geometría plana ($G_{\mu v} = 0$), se llega a que $c = 0$, entonces

$$G_{\mu v} = R_{\mu v} - \frac{1}{2}g_{\mu v}R, \tag{2.5}$$

donde $G_{\mu v}$ es el tensor de Einstein. De aquí, reemplazando en (2.3), nos da

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2}g_{\mu v}R = KT_{\mu v}. \tag{2.6}$$

Para encontrar el valor de K, del principio de correspondencia, la ecuación (2.6) se debe reducir a (2.1) para campos gravitacionales de baja intensidad y velocidades pequeñas, a partir de esto se encuentra que $K = 8\pi G$, reemplazando en (2.6), se obtiene

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = 8\pi G T_{\mu v}. \tag{2.7}$$

Que son las ecuaciones de Einstein que describirán la interacción gravitacional, como deformación del espacio-tiempo, en esta nueva teoría.

2.1.3. Acción de Einstein-Hilbert

Las ecuaciones de la relatividad general también pueden ser obtenidas del principio variacional, la forma de la acción que nos da las ecuaciones de campo de Einstein sin materia ni energía es [21]

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} R. \tag{2.8}$$

Llamada acción de Einstein-Hilbert, donde R es el escalar de curvatura y g el determinante del tensor métrico. Haciendo la variación de la acción

$$\delta S_H = \delta \int d^4x \sqrt{-g} R, \tag{2.9}$$

$$\delta S_H = \int d^4x \left[\delta\sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta R \right], \tag{2.10}$$

sabemos que

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \tag{2.11}$$

reemplazando en (2.10)

$$\delta S_H = \int d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} R \delta g_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} \delta R \right]. \tag{2.12}$$

Desarrollando la variación de R

$$\delta R = \delta(g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}, \tag{2.13}$$

sabemos por la identidad de Palatini que [18]

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\lambda \left(\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right) + \nabla_\beta \left(\partial \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}\right), \tag{2.14}$$

reemplazando en (2.13)

$$\delta R = \delta(g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \left[\nabla_\lambda \left(\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right) + \nabla_\beta \left(\partial \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}\right)\right], \tag{2.15}$$

agrupando la derivada covariante con un cambio de indices, nos queda

$$\delta R = \delta(g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + \nabla_a \left(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^a_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}\right), \tag{2.16}$$

$$\delta R = \delta(g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + \nabla_a \left(J^a\right), \tag{2.17}$$

donde $J^a = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^a_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}$, reemplazando en (2.12)

$$\delta S_H = \int d^4x \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} R \delta g_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} \left[\delta(g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + \nabla_a \left(J^a\right)\right] \right\}, \tag{2.18}$$

$$\delta S_H = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} R \delta g_{\alpha\beta} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta(g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_a \left(J^a\right), \tag{2.19}$$

usando la identidad

$$g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \tag{2.20}$$

$$\delta S_H = \int d^4x - \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta(g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_a \left(J^a\right), \tag{2.21}$$

$$\delta S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R\right] + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_a \left(J^a\right), \tag{2.22}$$

si se considera una variedad cerrada, es decir sin fronteras

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_a \left(J^a\right) = 0, \tag{2.23}$$

entonces

$$\delta S_H = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\mu v} - \frac{1}{2}g_{\mu v}R\right], \tag{2.24}$$

igualando la variación a cero, encontramos

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2}g_{\mu v}R = 0, \tag{2.25}$$

que son las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Si se quiere obtener las ecuaciones completas de la relatividad general se debe considerar la acción

$$S = S_H + S_M = \frac{1}{2K}\int d^4x\sqrt{-g}R + L_M. \tag{2.26}$$

Donde L_M es el lagrangiano de la energía materia y se relaciona con el tensor de energía momento por [21]

$$T^{\mu v} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial L_M}{\partial g^{\mu v}}. \tag{2.27}$$

La relatividad general es una nueva forma de describir la interacción gravitacional, ya no como una fuerza, sino como una deformación o curvatura del espacio tiempo producida por la presencia de masa o energía. Dentro de las consecuencias de la relatividad general tenemos la deflexión de los rayos de luz, la dilatación gravitacional del tiempo, el corrimiento al rojo gravitacional, y las predicciones que se han podido corroborar en los últimos años como lo son la existencia de agujeros negros y ondas gravitacionales [19].

2.2. Cosmología

El término cosmología proviene de la palabra en griego, *kósmos*, que se refiere al conjunto de todo lo creado, y la palabra *logos* que quiere decir tratado.
Se puede definir como la ciencia que estudia al universo tomando una perspectiva global, considerado a los planetas, estrellas y galaxias como partículas de las que en parte está constituido el universo, para poder establecer sus características a gran escala. La cosmología se encarga de abordar temas como el inicio del universo, su evolución, funcionamiento y las leyes que rigen al universo.

A estas grandes escalas, la interacción que domina la dinámica en el universo es la gravedad. Por lo que la relatividad general de Einstein es la herramienta principal de los estudios en cosmología. De hecho, solo hasta el sigo XX se pudo dar una distinción más precisa entre cosmología y filosofía a partir de la implementación de las ecuaciones de la relatividad en el estudio del universo y el descubrimiento de la expansión del mismo [22].

A lo largo de las siguientes secciones mostraremos detalladamente la aplicación de la relatividad general en la cosmología según el modelo de Friedmann-Lemaitre-Roberson-Walker y en el capítulo 3 el modelo según Einstein, para en base a estos dos poder formular el modelo CDM, que es uno de los más aceptados en cosmología para la descripción del universo y sus componentes.

2.3. Modelo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker

En el campo de la física teórica se han propuesto varios modelos, que han buscado interpretar las observaciones experimentales y entender el funcionamiento y evolución del universo. Uno de los modelos más importantes, es el propuesto por Friedmann, y de forma independiente por Lemaitre, donde se considera al universo como homogéneo e isotrópico a gran escala [7].
El considerar al universo como homogéneo e isotrópico, se denomina principio cosmológico [23], y se sustenta fuertemente en la enorme isotropía que se observa en la radiación de fondo, cuya temperatura es de aproximadamente 2.7 k y sus flutuaciones son del orden de $10^{-4}k$ [24]. Una de las más importantes consecuencias de este principio es que no se puede definir un centro del universo, ni orillas y que tampoco podemos considerarnos estar en un lugar privilegiado dentro del universo.
Dentro de este modelo, la isotropía del universo significa que tendrá las mismas características en cualquier dirección, y que sea homogéneo nos dice que tiene las mismas características y naturaleza en cualquier punto que se observe. Las propiedades de homogeneidad e isotropía solo son espaciales, ya que como sabemos el universo si evoluciona en el tiempo.

El universo, como lo vimos anteriormente, desde el punto de vista de la relatividad general, es un espacio-tiempo que es considerado matemáticamente como una variedad M con una métrica asociada g [18]. Dentro de todas las métricas que puedan proponerse para describir la geometría del universo, solo la métrica de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) es compatible con el principio cosmológico. La métrica de FLRW se expresa en coordenadas esféricas como [19]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1+kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]. \tag{2.28}$$

Donde la geometría del universo viene representada por el coeficiente constante k, que puede tomar los valores de $k = -1$ para una geometría hiperbólica, $k = 0$ para una geometría plana, y $k = 1$ para una geometría esférica. La función $a(t)$ es el factor de escala que representa la distancia entre dos puntos que aumenta comforme el universo se expande y que por tanto nos da información sobre la evolución de la expansión del universo para cualquier tiempo t.
Dentro de este contexto, el big ban se dio cuando $a(t) = 0$, donde la densidad de masa-energía ρ y el escalar de curvatura R tienden a ser singulares [1], apartir de este instante a(t) comienza a crecer, es decir el espacio se comienza a expandir. Para el tiempo actual se considera $a(t_o) = 1$. En adelante usaremos es sufijo "o" para indicar cantidades evaluadas o medidas en el tiempo actual.

En este modelo, se representa al universo como constituido por fluidos comológicos, es decir se toma cada una de sus componentes como fluidos cosmológicos. Bajo este contexto, por ejemplo, las estrellas y galaxias son tomadas como partículas del fluido cosmológico de materia bariónica. En la física, las propiedades de los fluidos estan contenidas en el tensor de energía-momento. Para el modelo de FLRW se consideran fluidos ideales cuyas propiedades, medidas por un observador comovil, dependen solo de su densidad ρ y presión p. Estos fluidos ideales tienen la propiedad de ser homogéneos e isotrópicos, lo cual coincide con las propiedades globales del universo, además de tener también un presión isotrópica. El tensor de energía momento para estos fluidos perfectos toma la forma de [19]

$$T^{\mu v} = (\rho + p)\, u^{\mu} u^{v} - p g^{\mu v}. \tag{2.29}$$

Donde u^{μ} representa la cuadrivelocidad normalizada del observador comovil con el fluido, y es

$$u^{\mu} = (1, 0, 0, 0). \tag{2.30}$$

Al aplicar la métrica de FLRW (2.28) junto con el tensor de energía momento correspondiente a fluidos ideales (2.29) a las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = 8\pi G T_{\mu v}. \tag{2.31}$$

Obtenemos como resultado las ecuaciones de Friedmann (ver Anexo A)

[1] Es decir, $\rho \to \infty$ y $R \to \infty$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \tag{2.32}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right). \tag{2.33}$$

En el análisis de la segunda ecuación de Friedman, si solo se considera un universo compuesto por radiación y materia, se espera una tendencia a la desaceleración en la expansión, dado que la presión y la densidad son positivas para la materia y la radiación.
Para que un componente del universo genere una expansión acelerada deberá cumplir con [25]

$$\rho + 3p < 0, \tag{2.34}$$

que se denomina violación de la condición de energía fuerte.

2.3.1. Ecuación de conservación

Según lo visto en la sección 2.1, el tensor de materia-energía deberá cumplir con [26]

$$\nabla_\mu T^\mu_v = 0, \tag{2.35}$$

de donde tomando la componente temporal

$$\nabla_\mu T^\mu_0 = 0. \tag{2.36}$$

Podemos obtener una ecuación de conservación material

$$\partial_\mu T^u_0 + \Gamma^0_{\mu\lambda} T^\lambda_0 - \Gamma^k_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0. \tag{2.37}$$

Que evaluando para T^μ_v correspondiente a un fluido ideal, solo nos quedan las componentes diagonales y reemplazando los símbolos de Cristophel distintos de cero de la métrica de FLRW. Nos queda

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + p\right) = 0. \tag{2.38}$$

lo que deberá cumplirse para cada una de las componentes del universo tomadas como fluidos perfectos.

2.3.2. Forma de las ecuaciones de estado para los fluidos cosmológicos

Aunque las ecuaciones de estado suelen ser complejas, y que comumente relacionan entropía, densidad, presión, y otros parámetros. Experimentalmente se ha calculado que para fluidos cosmológicos las ecuaciones de estado solo relacionan presión y densidad [27]

$$\rho = wp. \tag{2.39}$$

Para la materia, tanto bariónica como oscura, se ha encontrado que su presión es aproximadamente cero. La constante w depende del fluido estudiado. Los valores de w son

Componente	w
materia ordinaria y oscura	0
Radiación electromagnética	1/3
Constante cosmológica	-1

CUADRO 2.1: Diferentes valores de w para cada componente del universo en el modelo de ΛCDM [28].

2.4. Relación entre el corrimiento al rojo gravitacional y el factor de escala

Debido a la expansión del universo, la luz proveniente de objetos lejanos sufre un corriemiento al rojo, el cual hemos llamado corrimiento al rojo gravitacional, para diferenciarlo de corrimiento al rojo provocado por las velocidades intrísecas[2] de los objetos [29].

Consideremos un objeto luminoso con coordenadas comóviles $(r = r_d, \theta = 0, \phi = 0)$, y un receptor ubicado en $(r = 0, \theta = 0, \phi = 0)$. Para encontrar una relación entre el corrimiento al rojo gravitacional y el factor de escala, suponemos que el objeto luminoso emite dos fotones en t_e y $t_e + \delta t_e$, como una frecuencia f_e. Y que el receptor los detecta en t_o y $t_o + \delta t_o$ con una frecuencia f_o.
Como los fotones viajan a la velocidad de la luz, su trayectoria será descrita por

[2] Se refiere a las velocidades propias de la dinámica de las galaxias, que son independientes de la expansión.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1+kr^2}\right] = 0, \tag{2.40}$$

$$dt^2 = a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1+kr^2}\right], \tag{2.41}$$

$$\frac{dt}{a(t)} = +\left[\frac{dr^2}{1+kr^2}\right]^{1/2}. \tag{2.42}$$

Elegimos + debido a que el fotón viaja al futuro.
Para el primer fotón recibido en t_o y emitido en t_e la distancia comóvil será

$$r_d = \int_{r_d}^{0} \frac{dr}{\sqrt{1-Rr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \tag{2.43}$$

Para el segundo foton, emitido en $t_e + \delta t_e$ y recibido en $t_o + \delta t_o$, y tomando en cuenta que la distancia es la misma debido a que se esta considerando coordenadas comóviles

$$r_d = \int_{r_d}^{0} \frac{dr}{\sqrt{1-Rr^2}} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \tag{2.44}$$

Igualando ambas ecuaciones, tenemos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \tag{2.45}$$

$$\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \tag{2.46}$$

$$\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \tag{2.47}$$

Como δt_o y δt_e son muy pequeños en comparación con el tiempo que le tomara al foton recorren la distancia entre la fuente y receptor, podemos tomar $a(t_e + \delta t_e) \approx a(t_e)$ y $a(t_o + \delta t_o) \approx a(t_o)$, es decir a(t) será constante en $[t_o, t_o + \delta t_o]$ y $[t_e, t_e + \delta t_e]$

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} dt = \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} dt, \tag{2.48}$$

$$\frac{1}{a\left(t_e\right)}\delta t_e = \frac{1}{a\left(t_o\right)}\delta t_o. \tag{2.49}$$

Si tomamos δt_e como el periodo de emicion de fotones, y δt_o como el periodo medido por el receptor, entonces

$$\frac{a\left(t_o\right)}{a\left(t_e\right)} = \frac{f_e}{f_0}. \tag{2.50}$$

Donde f_e y f_o son las frecuencias emitidas y recibidas.
También sabemos que el corrimiento al rojo z puede ser escrito como

$$z = \frac{f_e - f_0}{f_o} = \frac{f_e}{f_o} - 1. \tag{2.51}$$

Reemplazando (2.50)

$$z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1 \tag{2.52}$$

Tomando t_o como el tiempo actual

$$z + 1 = \frac{1}{a(t)}. \tag{2.53}$$

Donde podemos hacer $t_e = t$, con t igual a un tiempo general, sin perder validez.

Capítulo 3

Aceleración del universo con energía oscura

3.1. La constante cosmológica

3.1.1. Orígenes

En 1917, Einstein buscaba aplicar sus ecuaciones de campo a la descripción del universo. Dado que según las observaciones hasta ese momento se consideraba que el universo era estático, modeló al universo como homogéneo e isotrópico y añadió a sus ecuaciones un término que compensara la atracción gravitacional de la materia, evitara el colapso y permita soluciones estáticas [30] [31] [32]

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R + \Lambda g_{\mu v} = 8\pi G T_{\mu v}. \tag{3.1}$$

(Con Λ con unidades de m^{-2} [33]). A este término actualmente se le denomina constante cosmológica. Como se vio en la sección 2.1, el término de la derecha de la ecuación (3.1) corresponde a la forma más general de un tensor simétrico de orden dos construido a partir de la métrica. Aunque el universo estático de Einstein no era correcto en contraste con el posterior descubrimiento de la expansión del universo, la constante cosmológica sigue siendo estudiada en relación a la aceleración en la expansión del universo.

3.1.2. Modelo ΛCDM

Este modelo propone que el universo está conformado por materia bariónica, materia oscura fría, radiación, y energía oscura representada por la contribución de la constante cosmológica en las

ecuaciones de Einstein [25]. Actualmente es el modelo más aceptado por la comunidad científica.

Materia bariónica: La materia que conforma los planetas, galaxias, etc. Y que según el modelo no ejerce presión, lo cual viene respaldado por los cálculos experimentales de la presión de la materia bariónica que es aproximadamente cero [34].

Materia oscura fría: Según este modelo, la materia oscura se comporta como polvo cósmico, que forma un fluido cosmológico sin presión al igual que la materia bariónica [33].

Radiación: Solo representa el 0.005 % del contenido total en el universo. Mayoritariamente en forma de radiación cósmica de fondo [24].

Energía oscura: Tiene el mismo comportamiento de la constante cosmológica [35] [30].

3.1.3. Modificación de las ecuaciones de Friedmann con la constante cosmológica

Al resolver las ecuaciones de campo de Einstein con la inclusión de la constante cosmológica para la métrica de FLRW, obtenemos (ver Anexo B)

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{a^2}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda, \tag{3.3}$$

que son las llamadas ecuaciones de Friedmann con constante cosmológica distinta de cero. En la ecuación (3.2) podemos ver claramente el efecto de la constante cosmológica, para $\Lambda < 0$ el universo presentaría una desaceleración que finalmente acabaría en un colapso (Big-Crush), mientras que una $\Lambda > 0$ generará una aceleración, que en cuanto la contribución de la constante cosmológica domine sobre la materia y radiación [1] provocará una aceleración resultante en la expansión del universo [36] [37].

Se define una densidad de energía correspondiente a Λ [27]

[1] Como veremos más adelante, de las estimaciones experimentales se llega a encontrar que la contribución de energía oscura, asociada a Λ, domina sobre la materia y energía en la actualidad, representando casi un 70 % del contenido total del universo.

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \tag{3.4}$$

de donde podemos definir el parámetro de densidad asociado a Λ como [28]

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{(\Lambda/8\pi G)}{(3H^2/8\pi G)} \tag{3.5}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \tag{3.6}$$

3.1.4. Parámetros cosmológicos y la densidad crítica

De la primera ecuación de Friedmann con constante cosmológica (3.2), usando la relación $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}8\pi G\rho_\Lambda - \frac{k}{a^2}, \tag{3.7}$$

podemos escribir

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_T - \frac{kc^2}{a^2}, \tag{3.8}$$

donde $\rho_T = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ (ρ_m es la suma de la densidad de materia bariónica y oscura) .

La ecuación (3.8) es una forma compacta de escribir la primera ecuación de Friedmann con constante cosmológica, incluyendo la contribución de Λ dentro de ρ_T.
Si tomamos $k = 0$ en (3.8)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_T, \tag{3.9}$$

despejando el término de densidad

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{3.10}$$

donde ρ_c es la llamda densidad crítica, y es un valor de la densidad del universo, dado un valor de H, para el cual la geometría del univero es plana ($k = 0$).

En función de la densidad crítica, se define el parámetro de densidad total por [38]

$$\Omega_T = \frac{\rho_T}{\rho_c} = \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_r}{\rho_c} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \tag{3.11}$$

$$\Omega_T = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda, \tag{3.12}$$

se definen

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_m, \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_r, \quad \Omega_\Lambda = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_\Lambda, \tag{3.13}$$

como el parámetro de densidad de la materia, la radiación y la constante cosmológica, respectivamente.

Se define también el parámetro de desaceleración por [37]

$$q = -\frac{\ddot{a}\, a}{\dot{a}^2}. \tag{3.14}$$

Relación entre $\Omega_\Lambda, \Omega_m, \Omega_r$

Partiendo de

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{a^2}. \tag{3.15}$$

de las ecuaciones (3.13), podemos despejar

$$\rho_m = \frac{3H^2\Omega_m}{8\pi G}, \quad \rho_r = \frac{3H^2\Omega_r}{8\pi G}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2},$$

reemplazando en (3.15)

$$\dot{a}^2 = H^2\Omega_m a^2 + H^2\Omega_r a^2 - K + H^2\Omega_\Lambda a^2, \tag{3.16}$$

despejando k

$$k = H^2\Omega_m a^2 + H^2\Omega_r a^2 + H^2\Omega_\Lambda a^2 - \dot{a}^2, \tag{3.17}$$

reemplazando $\dot{a}^2 = H^2a^2$

$$k = H^2a^2\left[\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1\right] = H^2a^2\left[\Omega_T - 1\right], \tag{3.18}$$

del estudio de la radiación cósmica de microondas, sabemos que la curvatura del universo es plana [24], es decir k = 0, por lo que:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = \Omega_T = 1. \tag{3.19}$$

3.2. Pruebas de la existencia de una constante cosmológica positiva

3.2.1. Calculo de la edad del universo

Relación entre las densidades en un tiempo t y en el tiempo actual

Reemplazando la ecuación de estado (2.39) para un fluido cosmológico en la ecuación de conservación de materia (2.38)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \omega\rho\right) = 0, \tag{3.20}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{3da}{a}\left(1 + w\right) = 0, \tag{3.21}$$

$$\int_\rho^{\rho_o} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_a^1 \frac{3da}{a}\left(1 + \omega\right), \tag{3.22}$$

$$\ln\rho_0 - \ln\rho = \ln 1 - \ln a^{-3(1+w)}, \tag{3.23}$$

$$\rho = \left(\rho_0\right) a^{-3(1+w)}, \tag{3.24}$$

reemplazando w, para los diferentes tipos de densidades (cuadro 2.1), tenemos

$$\rho_m = (\rho_{mo})\, a^{-3}, \tag{3.25}$$

$$\rho_r = (\rho_{ro})\, a^{-4}, \tag{3.26}$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda o}. \tag{3.27}$$

Para calcular la edad del universo necesitamos escribir las ecuaciones de su evolución en términos de cantidades conocidas y que se puedan calcular experimentalmente, partiendo nuevamente de la primera ecuación de Friedmann, esta vez incluyendo la contribución de la constante cosmológica dentro de una densidad total (3.8), ρ_T, considerando $k = 0$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_T, \tag{3.28}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda\right], \tag{3.29}$$

reemplazando las ecuaciones (3.25) (3.26) (3.27)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{mo}a^{-3} + \rho_{ro}a^{-4} + \rho_{\Lambda o}\right], \tag{3.30}$$

a partir de las ecuaciones (3.13), evaluando los valores en el tiempo actual tenemos

$$\Omega_{mo} = \frac{8\pi G}{3H_o^2}\rho_{mo}, \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H_o^2}\rho_{ro}, \quad \Omega_{\Lambda o} = \frac{8\pi G}{3H_o^2}\rho_{\Lambda o}, \tag{3.31}$$

reemplazando en (3.30)

$$H^2 = H_0^2\left[\Omega_{mo}a^{-3} + \Omega_{ro}a^{-4} + \Omega_{\Lambda o}\right], \tag{3.32}$$

por otro lado sabemos tambien que $1/a = (1+z)$, con lo que tambien podemos obtener $\dot{a}=$

$-z/(1+z)^2$, y multiplicando tenemos $\dot{a}/a = -\dot{z}/(1+z)$, reemplazando y elevando a la 1/2 la ecuación (3.32) obtenemos

$$H = -\frac{\dot{z}}{(1+z)} = H_0 \left[\Omega_{mo} a^{-3} + \Omega_{ro} a^{-4} + \Omega_{\Lambda o}\right]^{1/2}, \tag{3.33}$$

$$dt = \frac{-dz}{H_0(1+z)\left[\Omega_{mo}(1+z)^3 + \Omega_{ro}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda o}\right]^{1/2}}, \tag{3.34}$$

sin perder mucha generalidad podemos hacer $\Omega_{ro} \approx 0$, ya que $\Omega_{ro} = 10^{-5}$, muy pequeño al compararse con $\Omega_{\Lambda o}$ y Ω_{mo} [39]

$$dt = \frac{-dz}{H_0(1+z)\left[\Omega_{mo}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda o}\right]^{1/2}}, \tag{3.35}$$

para calcular la edad del universo consideramos los siguientes límites $z \to \infty$ para el inicio del universo, y z = 0 para el tiempo actual, dado que para el tiempo actual se considera $a\,(t_o) = 1$, entonces

$$t = \lim_{z_o \to \infty} -\frac{1}{H_o} \int_{z_o}^{0} \frac{dz}{(1+z)\left[\Omega_{mo}(1+z)^{-3} + \Omega_{\Lambda o}\right]^{1/2}}, \tag{3.36}$$

usamos el cambio de variable, $(1+z) = \left(\frac{\Omega_{\Lambda o}}{\Omega_{mo}}\right)^{1/3} \operatorname{sinh}^{2/3}\theta$, $dz = \frac{2}{3}\left(\frac{\Omega_{\Lambda o}}{\Omega_{mo}}\right)^{1/3} \operatorname{sinh}^{-1/3}\theta \cosh\theta$, para resolver la integral nos da

$$t = -\frac{2}{3H_o} \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{\cosh\theta d\theta}{\operatorname{senh}\theta\left\{\Omega_{\Lambda o}\left(\operatorname{senh}^2 + 1\right)\right\}^{1/2}}, \tag{3.37}$$

$$t = -\frac{2}{3H_o} \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{\cosh\theta d\theta}{\operatorname{senh}\theta\{\Omega_{\Lambda o}\}^{1/2}\cosh\theta}, \tag{3.38}$$

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{mo}}} \int_{\theta_o}^{\theta} \operatorname{senh}^{-1}\theta d\theta, \tag{3.39}$$

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{mo}}} \ln(\tanh\frac{\theta}{2}|_{\theta_o}^{\theta}, \tag{3.40}$$

para encontrar los límites de integración, recordemos que $\operatorname{senh}\theta = \left\{(1+z)\left(\frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{\Lambda o}}\right)^{1/3}\right\}^{3/2}$ entonces $\theta = \operatorname{arc\,senh}\left\{(1+z)\left(\frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{\Lambda o}}\right)^{1/3}\right\}^{3/2}$, donde si z = 0 entonces $\theta = \operatorname{arc\,senh}\left(\left(\frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{\Lambda o}}\right)^{1/3}\right)^{3/2}$, y si $z \to \infty$ entonces $\theta \to \infty$

$$t = \lim_{\theta_o \to \infty} \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{mo}}} \ln\left[\tanh\frac{\theta}{2}\Big|_{\theta_o}^{\operatorname{arc\,senh}\left(\left(\frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{\Lambda o}}\right)^{1/2}\right)}\right], \tag{3.41}$$

$$t = -\frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{mo}}} \ln\left(\tanh\frac{\operatorname{arc\,senh}\left(\left(\frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{\Lambda o}}\right)^{1/2}\right)}{2}\right), \tag{3.42}$$

que tomando los valores de $\Omega_{m0} = 0{,}315$, $\Omega_{\Lambda o} = 0{,}685$ y $H_o = 67{,}3$ [38], nos da

$$t = 13,8 \cdot 10^9 \quad \textit{años.} \tag{3.43}$$

Este resultado es consistente con la edad del universo calculada a partir de otros métodos, como por ejemplo la radiación cósmica de fondo, a partir de donde se estima una edad del universo de 13.7 mil millones de años [38].

Veamos ahora el mismo calculo para un modelo de FLRW sin constante cosmológica

Partiendo de la primera ecuación de Friedmann (2.32), con $k = 0$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m + \rho_r\right), \tag{3.44}$$

reeemplazando los valores de ρ_m y ρ_r de las ecuaciones (3.25) y (3.26)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_{mo}}{a^3} + \frac{\rho_{ro}}{a^4}\right), \tag{3.45}$$

$$H^2 = H_0^2\left(\Omega_{mo}a^{-3} - \Omega_{ro}a^{-4}\right), \tag{3.46}$$

sacando la raiz cuadrada y reemplazando nuevamente $\frac{1}{a} = (1+z)$, $H = \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{z}}{(1+z)}$

$$-\frac{\dot{z}}{(1+z)} = H_0 \left[\Omega_{mo}(1+z)^3 + \Omega_{ro}(1+z)^4\right]^{1/2}, \tag{3.47}$$

$$dt = \frac{-dz}{H_0(1+z)\left[\Omega_{mo}(1+z)^3 + \Omega_{ro}(1+z)^4\right]^{1/2}}, \tag{3.48}$$

haciendo $\Omega_{ro} \approx 0$, nos da

$$dt = \frac{-dz}{H_0(1+z)\left[\Omega_{mo}(1+z)^3\right]^{1/2}}, \tag{3.49}$$

con las mismas consideraciones del calculo anterior, los limites sería

$$t = -\frac{1}{H_0(\Omega_{mo})^{1/2}} \lim_{z_o \to \infty} \int_{z_o}^{0} \frac{dz}{(1+z)^{5/2}}, \tag{3.50}$$

$$t = -\frac{2}{3H_0(\Omega_{mo})^{1/2}}, \tag{3.51}$$

de la ecuación (3.19), $\Omega_T = 1$, como se ha considerado solo la contribución de la materia

$$\Omega_{mo} = 1, \tag{3.52}$$

entonces

$$t = -\frac{2}{3H_0}, \tag{3.53}$$

evaluando para $H_0 = 67{,}3\ \frac{km}{s}/Mpc$

$$t = 9,681 \cdot 10^9 \quad años, \tag{3.54}$$

una edad del universo menor a los 10 mil millones de año sabemos que es inconsistente con los estudios de las edades de la estrellas y galaxias más antiguas en el universo que sobrepasan esta cantidad [40].

Por lo tanto, como hemos podido ver la contribución de la constante cosmológica es necesaria para un cálculo coherente y preciso de la edad del universo a través de las ecuaciones de Friedmann y los datos experimentales de los parámetros cosmológicos.

3.2.2. Estudio del corrimiento al rojo en supernovas

Como hemos mencionado anteriormente, los estudios realizados por los grupos HZT y SCP demostraron que las supernovas de más alto z (corrimiento al rojo gravitacional) estaban a una mayor distancia de lo esperado, lo que indicaba una expansión acelerada del universo. Y la única forma hallada de interpretar estos resultados, por ambos grupos de investigación, fue usando un modelo con una constante cosmológica diferente de cero, que actuara como mecanismo de aceleración, haciendo que las galaxias más lejanas tuvieran un mayor velocidad de recesión.
En la Figura 3.1 se muestra los resultados obtenidos por el SCP, de 42 supernovas en círculos de color rojo, complementados con los valores para supernovas de bajo z provenientes de los estudios de otros grupos experimentales. Se muestran también curvas correspondientes a distintos modelos teóricos en el diagrama de z versus distancia modular. Donde podemos ver claramente que solo un modelo teórico con constante cosmológica puede ajustarse a los datos experimentales.

El estudio de supernovas de alto z, no solo nos permite corroborar la aceleración del universo, sino también obtener información sobre la historia de la expansión del universo, dado que un estudio de supernovas de alto z a grandes distancias también significa ver más atrás en el tiempo. Los resultados de los estudios experimentales de supernovas de casi una década permitieron conocer la historia de la expansión del universo de los últimos 10 mil millones de años. Según estos estudios la aceleración del universo solo es de hace unos seis o siete millones de años, y anterior a esto, el universo estaba en una expansión desacelerada [1].

Esta desaceleración y posterior aceleración solo es posible explicarla si se considera la contribución de una constante cosmológica positiva, asociada a una repulsión cosmológica. Dado que la contribución de esta es proporcional al volumen en cada punto. Cuando el universo era más compacto al inicio, la materia dominaba por encima de la constante cosmológica, y posteriormente con el aumento del volumen provocado por la expansión hizo que la constante cosmológica dominara por encima de la materia, terminando así en la aceleración actual.

3.2.3. Determinación del valor de Ω_Λ

Para obtener este resultado es necesario tomar en cuenta distintos fenómenos que se relacionan con la expansión del universo, como lo son

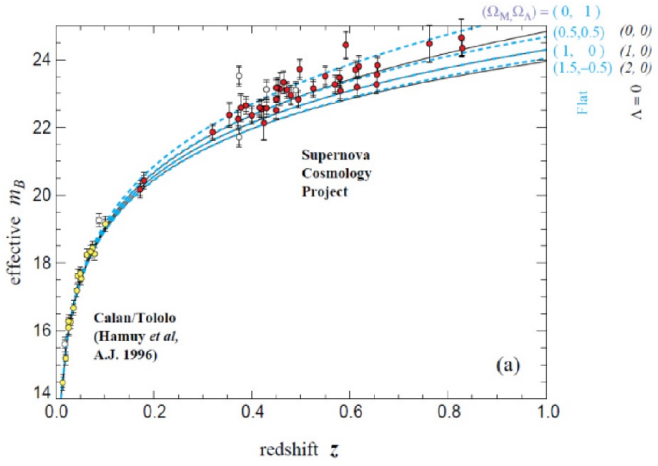

FIGURA 3.1: Gráfica de z vs distancia modular [1]

.

Las anisotropías del fondo cósmico de radiación

Algunos de los sucesos más importantes de la historia del universo, sucedieron en el universo temprano, uno de ellos fue la recombinación que es la formación de átomos como consecuencia de la disminución de temperatura cuando el universo tenía aproximadamente 400 mil años [41]. Durante estos instantes de la recombinación también sucedió el desacople de los fotones que antes se encontraban en interacción con la materia, a partir de este instante los fotones fueron liberados y comenzaron a viajar a través del universo, y son lo que ahora llamamos radiación del fondo cósmico de microondas (CMB), detectada por primera vez en 1965 [42].

La radiación del fondo cósmico de microondas es una fuente que nos permite estudiar las condiciones del universo en sus periodos más tempranos, y aunque tiene una homogeneidad espectral y espacial bastante marcada, presenta también unas inhomogeneidades muy pequeñas (del orden de una parte en mil) que son consecuencia de las fluctuaciones presentes en el universo, de temperatura y densidad, al momento del desacople de lo fotones. Solo con satélites de alta precisión es posible medir estas inhomogeneidades o anisotropías en el CMB.

Oscilaciones acústicas de bariones BOA

Como se mencionó anteriormente, el universo en sus inicios antes de la recombinación estaba formado por un plasma de núcleos de bariones, electrones y fotones. Durante este periodo se daban oscilaciones de densidad en el plasma primordial producto la lucha entre la gravedad generada por la matería bariónica y la presión de radiación [43]. Estas oscilaciones generaron las anisotropías en el CMB e influyeron en la distribución de la materia, lo que puede corroborarse en la separación promedio de las galaxias.

Los métodos observacionales de estos fenómenos, junto con los datos de SNIa, nos dan un rango de valores para Ω_M y Ω_Λ. Y aunque de forma independiente no nos garantizan un valor preciso,

la combinación de estos resultados si nos dan una muy buena aproximación de los valores. En la figura 3.3 se muestra las bandas de posibilidad de cada método de estudio experimental, la intersección de estos nos da valores más precisos [44]

$$\Omega_m = 0{,}3 \quad , \quad \Omega_\Lambda = 0{,}7. \tag{3.55}$$

La suma de estos valores es nuevamente uno, lo que nos vuelve a garantizar que asumir una geometría plana para el universo es una muy buena aproximación.

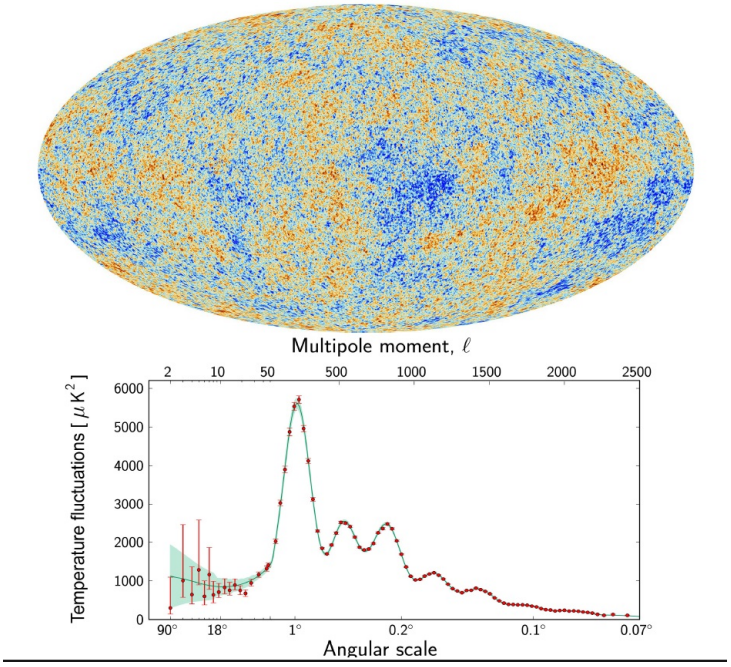

FIGURA 3.2: Se muestra el estudio de estas anisotropías del CMB con el satélite Planck. Además de un mapa proyectado a dos dimensiones de las distribuciones de estas inhomogeneidades en el espacio en toda dirección, similar a proyectar la superficie esférica de la tierra en un mapa. Nuevamente, de color verde se muestra la curva de un modelo teórico de un universo con la presencia de energía oscura [1].

3.3. Interpretación de la constante cosmológica como energía del vacío

Una de las interpretaciones de la constante cosmológica en la ecuaciones de Friedmann, es la propuesta inicialmente por Lemaitre [31], que consideró que Λ esta relacionada con la energía del vacío.

Como lo hemos podido ver, además de generar un efecto contrario a la gravedad, la densidad de energía asociada a Λ es constante en el tiempo según las ecuaciones (3.4) y (3.27), diferente a lo que sucede con las densidades de materia y energía que si depende del tiempo, y puede

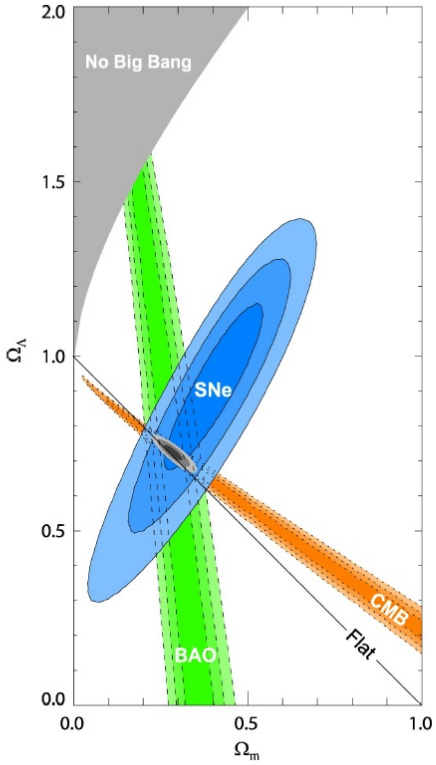

FIGURA 3.3: Se muestra aquí las bandas de probabilidad de las estimaciones echas por en base a los estudios de las Supernovas tipo Ia, las anisotropias del fondo cósmico de radiación y las oscilaciones acústicas de bariones [1].

ser escritas en función del factor de escala en (3.25) y (3.26). Por lo que podemos concluir que la densidad de energía de la constante cosmológica debería tener una naturaleza distinta a la radiación y materia.

Para ver esta interpretación de ρ_Λ como densidad de energía del vacío, podríamos modelar el vacío cuántico como un campo escalar φ. Cuya acción estaría dada por

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{uv}\partial_u\varphi\partial_v\varphi - V(\varphi)\right]. \tag{3.56}$$

De donde podemos obtener su tensor de energía-momento

$$T_{uv} = \frac{1}{2}\partial_u\varphi\partial_v\varphi + \frac{1}{2}\left[g^{\rho\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi\right]g_{uv} - v(\varphi). \tag{3.57}$$

Pero como sabemos dicho campo escalar deberá tener la mínima energía posible, por lo que no podría tener energía cinética asociada, es decir $\partial_u\varphi = 0$. Con lo que

$$T^{v}_{uv} = V\left(\varphi_o\right) g_{uv}, \tag{3.58}$$

donde el superíndice v signica "vacío"

Con φ_o como el valor del campo que hace mínimo a $V\left(\varphi\right)$. Sabemos por otra parte que en general la densidad local de la energía se puede definir como [34]

$$\rho = U^u U^v T^{v}_{uv}. \tag{3.59}$$

Reemplazando (3.58)

$$\rho_v = V\left(\varphi_o\right) U^u U^v g_{uv} = V\left(\varphi_o\right). \tag{3.60}$$

Entonces podemos escribir

$$T^{v}_{uv} = -\rho_v g_{uv}. \tag{3.61}$$

Y recordando que para un fluido perfecto el tensor de energía momento es [19]
$T^{\mu v} = \left(\rho + p\right) u^\mu u^v - p g^{\mu v}$. Comparando llegamos a

$$\rho_v = -p_v. \tag{3.62}$$

De lo que podemos concluir que el vacío cuántico puede ser considerado como un fluido perfecto con ecuación de estado $\rho_v = -p_v$, y que tiene las mismas características de la constante cosmológica.

Para ver su relación en las ecuaciones de Einstein, partimos de

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = 8\pi G(T^{o}_{\mu v} + T^{v}_{\mu v}), \tag{3.63}$$

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = 8\pi G(T^{o}_{\mu v} - \rho_v g_{uv}), \tag{3.64}$$

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R + 8\pi G \rho_v g_{uv} = 8\pi G T^o_{\mu v}, \tag{3.65}$$

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R + \Lambda g_{uv} = 8\pi G T^o_{\mu v}, \tag{3.66}$$

donde $\Lambda = 8\pi G \rho_v$, entonces $\rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi G}$, que es la definición para la densidad de energía, correspondiente a la contribución de Λ.

Para poder tener un valor aproximado de la energía del vacío, se puede representar el vacío cuántico como un conjunto de un número infinito de osciladores armónicos que se mueven en un potencial $V(x) = \frac{1}{2} w^2 x^2$. Con algunas consideraciones de corte de energía máxima, se evita que esta distribución de una energía infinita y se puede llegar a [45] [46]

$$\rho_v \sim \hbar k^4_{max}. \tag{3.67}$$

Tomando este corte de energía según los límites de energía superior a los cuales la teoría cuántica es válida aún, nos da [27]

$$\rho_v \sim 10^{110} erg/cm^3. \tag{3.68}$$

Comparando este resultado con el obtenido experimentalmente para Λ [27]

$$\rho_\Lambda \sim 10^{-10} erg/cm^3, \tag{3.69}$$

que nos indica una gran diferencia en los ordenes de magnitud. Se puede calcular también separadamente cada una de las contribuciones al vacío de las distintas teorías cuánticas. Pero aún por separado también superan por mucho a ρ_Λ.

Como hemos podido ver, existen una considerable diferencia entre los valores teóricos para la densidad de energía del vacío y el valor medido experimentalmente de la densidad de energía de la constante cosmológica, considerada como la correspondiente a la energía oscura por el modelo ΛCDM.
Este es uno de los varios puntos de confrontación entre la relatividad general y la teoría cuántica de campos, de aquí se podría considerar que alguna o ambas teorías podrían estar mal en alguna parte, y requieran una revisión.

Sin embargo, debemos tomar en cuenta algunas consideraciones, como el hecho de que la densidad de energía del vacío solo ha podido ser calculada en una aproximación teórica, y aun no ha podido ser medida de forma experimental [34], y de ser correctos sus cálculos teóricos, como se mencionó anteriormente la densidad de energía del vacío es la suma de distintas contribuciones de campos cuánticos y no existe una restricción para pensar que estas se sumen con diferentes signos, dándonos un valor del orden de ρ_Λ [27].

Recordemos también, que esta confrontación, entre relatividad general y teoría cuántica de campos, se dio del hecho de asumir la identificación entre la constante cosmológica y la energía del vacío, visto en los desarrollos a partir de (3.56), cuando no necesariamente tendrían que estar vinculadas.
Es importante también mencionar que la medida de ρ_Λ se ha realizado asumiendo el modelo ΛCDM, que aunque se ajusta acorde a los datos experimentales, existen otros modelos que también lo hacen, pero como era de esperarse también tienen sus propios puntos en contra, así como lo tiene ΛCDM.

En el siguiente capítulo mostraremos otro modelo para explicar la aceleración del universo basado en la generalización de los fluidos perfectos. Que nos permitirá ver que de las propiedades de viscosidad que podria tener la materia presente en el universo, si se estudia como un fluido cosmológico, puede explicarse la aceleración del universo.

Capítulo 4

Aceleración del universo sin energía oscura

4.1. Fluidos con viscosidad en el contexto cosmológico

Los fluidos con viscosidad son aplicados a la cosmología desde hace varios años [47], incluso antes de que se descubriera que el universo se expande aceleradamente, en particular se aplicaron para modelos de inflación en los primeros instantes del universo [48]. En nuestro contexto, estos fluidos imperfectos pueden utilizarse para modelar un universo con expansión acelerada, sustentado en el hecho de que pueden explicar dicha aceleración naturalmente de las características del modelo.

Para un fluido cosmológico, se genera una viscosidad volumétrica al expandirse o contraerse de manera rápida, de tal forma que no se le permita tener el tiempo necesario al sistema para regresar a su equilibrio termodinámico local, de lo que se genera una presión que tiende a restablecer al sistema a su estado de equilibrio.

4.1.1. Forma del tensor de energía-momento de un fluido con viscosidad volumétrica

Los fluidos imperfectos son la generalización de los fluidos perfectos, y su tensor de energía-momento en general contiene términos de viscosidad de corte, volumétrica y transferencia de calor, pero se reduce considerablemente si se impone isotropía y homogeneidad en el contexto cosmológico, tomando la forma de [34]

$$T^{im}_{\mu v} = \rho U_\mu U_v + P^*(g_{\mu v} + U_\mu U_v), \tag{4.1}$$

donde $P^* = p - 3\zeta H$[1] y ζ es el término de viscosidad volumétrica. Podemos notar que la forma del tensor de energía momento es muy similar al correspondiente a un fluido perfecto con la diferencia de que aquí hay una presión efectiva que es la suma de una presión termodinámica p y una presión viscosa dada por $-3\zeta H$, que es la responsable de regresar al sistema a su equilibrio termodinámico.
Es importante señalar también, que solo el término de viscosidad volumétrica es compatible con la homogeneidad e isotropía. El término ζ en general solo podrá depender de el tiempo si se quiere seguir respetando la homogeneidad espacial. Además se puede demostrar de la construcción de tensor de energía momento, que para que se cumpla la segunda ley de la termodinámica en el fluido, se deberá cumplir que

$$\zeta \geq 0. \tag{4.2}$$

4.2. Modelo de un universo con viscosidad volumétrica

Para este modelo se propone un universo homogéneo e isotrópico con una componente dominante descrita por un fluido de materia sin presión con viscosidad volumétrica, que incluye la materia bariónica y la materia oscura. Además, se considera una geometría plana para el universo, sustentada en las observaciones experimentales.

Se tomará el coeficiente de viscosidad volumétrica como $\zeta = \zeta_0 + H\zeta_1$, se hará un análisis y clasificación de las predicciones del modelo para los distintos valores de ζ_0 y ζ_1, tomando en cuenta la evolución del factor de escala, el escalar de curvatura y la densidad de materia.
Para el desarrollo de la ecuaciones se considerará nuevamente la métrica de FLRW, dado que seguimos describiendo un universo que cumple el principio cosmológico

Ecuaciones de Friedmann para un fluido cosmológico imperfecto
Considerando nuevamente las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = 8\pi G T_{\mu v},$$

donde ahora consideraremos que $T_{\mu v}$ es el tensor de energía-momento para un fluido imperfecto y que tiene la forma

[1] H sigue siendo el parámetro de Hubble, que en general depende del tiempo.

$$T_{\mu v}^{im} = \rho U_\mu U_v + P^*(g_{\mu v} + U_\mu U_v), \quad P^* = p - 3\zeta H, \tag{4.3}$$

cuyas componente diagonales son

$$T_{00}^{im} = \rho_m, \tag{4.4}$$

$$T_{11}^{im} = P^* g_{11}, \tag{4.5}$$

$$T_{22}^{im} = P^* g_{22}, \tag{4.6}$$

$$T_{33}^{im} = P^* g_{33}, \tag{4.7}$$

las componentes del tensor de Einstein que son diferentes de cero para la métrica de FLRW son

$$G_{00} = \frac{3}{a^2}\left(\dot{a}^2 + k\right), \tag{4.8}$$

$$G_{11} = \frac{2a\ a + \dot{a}^2 + k}{-(1 - kr^2)}, \tag{4.9}$$

$$G_{22} = -r^2(2a\ \ddot{a} + \dot{a}^2 + k), \tag{4.10}$$

$$G_{33} = -r^2(2a\ \ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\,\mathrm{sen}^2\,\theta. \tag{4.11}$$

Para la componente $\mu = v = 0$ de la ecuación (4.2), tomando k=0

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi G T_{00}^{im}, \tag{4.12}$$

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G \rho_m, \tag{4.13}$$

$$\frac{3}{a^2}\left(\dot{a}^2 + k\right) = 8\pi G\rho_m, \tag{4.14}$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\rho_m. \tag{4.15}$$

Para la componente $\mu = v = 1$ de (4.2)

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = 8\pi G T_{11}^{im}, \tag{4.16}$$

$$2a\,\ddot{a} + \dot{a}^2 = 8\pi G P^* g_{11}, \tag{4.17}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3P^*\right), \tag{4.18}$$

pero sabemos que $P^* = p - 3\zeta H$ con $p = 0$ [2]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(\rho - 9\zeta H\right), \tag{4.19}$$

sabemos que deberá cumplir con la ecuación de conservación (2.38)

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho_m + P_m^*\right) = 0, \tag{4.20}$$

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho_m - 3\zeta H\right) = 0, \tag{4.21}$$

usaremos la parametrización $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$. De esta forma buscaremos reescribir $\rho_m - 3\zeta H$

$$\rho_m - 3\zeta H = \rho_m - 3(\zeta_0 + \zeta_1 H)H = \rho_m - \zeta_0 H - \zeta_1 H^2, \tag{4.22}$$

reemplazando H de la ecuación (4.15)

[2] Como lo mencionamos anteriormente, resulta presión p igual a cero al asumir que la materia, tanto oscura como bariónica, se comportan como polvo cosmológico.

$$\rho_m - 3\zeta H = \rho_m - \zeta_0 \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_m\right)^{1/2} - \zeta_1 \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_m\right), \tag{4.23}$$

$$\rho_m - 3\zeta H = \rho_m - \zeta_0 \left(24\pi G\rho_m\right)^{1/2} - \zeta_1 24\pi G\frac{\rho_m}{3}, \tag{4.24}$$

$$\rho_m - 3\zeta H = \rho_m - \left(\frac{24\pi G}{H_o}\right)\zeta_0 \left(\frac{H_o}{24\pi G}\right)\left(24\pi G\rho_m\right)^{1/2} - \zeta_1 24\pi G\frac{\rho_m}{3}, \tag{4.25}$$

definimos $\tilde{\zeta}_0 = \left(\frac{24\pi G}{H_o}\right)\zeta_0$ y $\tilde{\zeta}_1 = (24\pi G)\,\zeta_1$, con lo que tenemos

$$\rho_m - 3\zeta H = \rho_m - \tilde{\zeta}_0 \frac{H_0}{(24\pi G)^{1/2}}(\rho_m)^{1/2} - \tilde{\zeta}_1\frac{\rho_m}{3}, \tag{4.26}$$

$$\rho_m - 3\zeta H = \rho_m \left(1 + \frac{\tilde{\zeta}_1}{3}\right) - \frac{\tilde{\zeta}_0 H_0}{(24\pi G)^{1/2}}(\rho_m)^{1/2}, \tag{4.27}$$

reemplazando en la ecuación de conservación (4.21)

$$\dot{\rho} + 3H\left[\rho_m\left(1 + \frac{\tilde{\zeta}_1}{3}\right) - \frac{\tilde{\zeta}_0 H_0}{(24\pi G)^{1/2}}(\rho_m)^{1/2}\right] = 0, \tag{4.28}$$

de la ecuación (4.15) sabemos que $\rho_m = \rho_m(a)$, por lo que

$$\frac{d\rho_m}{dt} = \frac{d\rho_m}{da}\,\dot{a}, \tag{4.29}$$

entonces

$$\frac{d\rho_m}{da}\,\dot{a} + \frac{3\,\dot{a}}{a}\left[\rho_m\left(1 + \frac{\tilde{\zeta}_1}{3}\right) - \frac{\tilde{\zeta}_0 H_0}{(24\pi G)^{1/2}}(\rho_m)^{1/2}\right] = 0, \tag{4.30}$$

$$\frac{d\rho_m}{da} + \frac{\rho_m}{a}(3 - \tilde{\zeta}_1) - \frac{\tilde{\zeta}_0 H_0}{(24\pi G)^{1/2}}(\rho_m)^{1/2} = 0, \tag{4.31}$$

dividiendo por $\rho^o_{crit} = 3H_0^2/8\pi G$, que llamaremos densidad crítica en el tiempo actual

$$\frac{1}{\rho^o_{crit}}\frac{d\rho_m}{da}+\frac{\rho_m}{\rho^o_{crit}}\frac{1}{a}(3-\tilde{\zeta}_1)-\frac{\tilde{\zeta}_0 H_0}{(24\pi G)^{1/2}}(\rho_m)^{1/2}\frac{8\pi G}{3H_0^2}=0, \tag{4.32}$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_m}{da}a+\tilde{\Omega}_m(3-\tilde{\zeta}_1)-\tilde{\zeta}_0\tilde{\Omega}_m^{1/2}=0, \tag{4.33}$$

donde $\tilde{\Omega}_m=\rho_m/\rho^o_{crit}$, sabemos también $(1+z)=1/a$. entonces

$$\frac{d\tilde{\Omega}_m}{da}=-\frac{d\tilde{\Omega}_m}{dz}\frac{1}{a^2}, \tag{4.34}$$

reemplazando en (4.33)

$$\frac{d\tilde{\Omega}_m}{da}(1+z)+\tilde{\Omega}_m(\tilde{\zeta}_1-3)+\tilde{\zeta}_0\tilde{\Omega}_m^{1/2}=0, \tag{4.35}$$

cuya solución, para $\tilde{\zeta}_1\neq 3$ es

$$\tilde{\Omega}_m(z)=\left[\left(1+\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right)(1+z)^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2}+\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]^2, \tag{4.36}$$

donde se ha considerado que $\tilde{\Omega}_m(z)$.

Ahora, de la ecuación (4.15) dividiendo por ρ^o_{crit}, obtenemos

$$\frac{H^2}{\rho^o_{crit}}=\frac{8\pi G}{3}\tilde{\Omega}_m, \tag{4.37}$$

$$H=H_o\left(\tilde{\Omega}_m\right)^{1/2}, \tag{4.38}$$

reemplazando (4.36)

$$H(z)=H_o\left[\left(1-\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right)(1+z)^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2}+\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right], \tag{4.39}$$

$$H(a)=H_o\left[\left(1-\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right)a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2}+\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right], \tag{4.40}$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_o\left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right) a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right], \quad \tilde{\zeta}_1 \neq 3, \tag{4.41}$$

definiendo $\gamma = \tilde{\zeta}_0/3 - \tilde{\zeta}_1$ y $\beta = \tilde{\zeta}_1 - 3$ y reemplazando en (4.41)

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_o\left[(1-\gamma)\, a^{(\beta)/2} + \gamma\right], \quad \tilde{\zeta}_1 \neq 3, \tag{4.42}$$

integrando desde el tiempo actual t_o a un tiempo t

$$\int_{t_o}^{t} H_o = H_o(t - t_o) = \int_1^a \frac{da'}{a'\left[(1+\gamma)\,(a')^{\beta/2} + \gamma\right]}, \tag{4.43}$$

$$H_o(t - t_o) = -\frac{2}{\gamma\beta}\ln\left[1 - \gamma\frac{\gamma}{a^{\beta/2}}\right], \tag{4.44}$$

$$\left[1 - \gamma\frac{\gamma}{a^{\beta/2}}\right] = e^{\frac{H_o}{2}(t-t_0)}, \tag{4.45}$$

reemplazando γ y β

$$a(t) = \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3-\tilde{\zeta}_1)\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t-t_o)\right)}{\tilde{\zeta}_0}\right]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}, \quad \tilde{\zeta}_0 \neq 0, \quad \tilde{\zeta}_1 \neq 3. \tag{4.46}$$

La expresión (4.46) nos da la forma de a(t) para este modelo, luego si queremos estudiar la velocidad y la aceleración de la expansión podemos derivar respecto de $x = H_o(t - t_o)$

$$\frac{da\,(t)}{dx} = e^{\frac{\tilde{\zeta}_0 x}{2}}\left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3-\tilde{\zeta}_1)\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t-t_o)\right)}{\tilde{\zeta}_0}\right]^{\tilde{\zeta}_1 - 1/(3-\tilde{\zeta}_1)}, \tag{4.47}$$

$$\frac{d^2a\,(t)}{dx^2} = \frac{e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}{2}\left(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + 2e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}\right)\left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3-\tilde{\zeta}_1)\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t-t_o)\right)}{\tilde{\zeta}_0}\right]^{2\left(\tilde{\zeta}_1 - 2\right)/(3-\tilde{\zeta}_1)}. \tag{4.48}$$

4.2.1. Evolución de factor de escala y la expansión del universo modelado con viscosidad volumétrica

La evolución del factor de escala depende de los valores que pueden tomar las constantes $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, los cuales no están restrigidas por la teoría.

Para valores que cumplen $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$

Aplicando esta condición a (4.46)

$$a(t) = \left[\frac{(3 - \tilde{\zeta}_1) \exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2} (t - t_o) \right)}{\tilde{\zeta}_0} \right]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)} \tag{4.49}$$

$$a(t) = \left[\frac{(3 - \tilde{\zeta}_1) \exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2} (t - t_o) \right)}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right]^{2/\tilde{\zeta}_0} \tag{4.50}$$

$$a(t) = e^{H_o(t-t_o)} \tag{4.51}$$

Se encuentra que este caso nos da un universo como el planteado en el modelo de Sitter, que presenta una expansión acelerada sin un final, se muestra el comportamiento del factor de escala en la figura 4.3.

Para valores de $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$

Encontramos, según la ecuación (4.46), que para estos valores el universo tuvo un Big-Bang [3] y seguidamente se expande desaceleramente sin detenerse. En $t \to \infty$, a(t) llega a su máximo valor

$$a_{max} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3 - \tilde{\zeta}_1) \exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2} (t - t_o) \right)}{\tilde{\zeta}_0} \right]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}, \tag{4.52}$$

$$a_{max} = \left(\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3}{\tilde{\zeta}_0} \right)^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}. \tag{4.53}$$

[3] Recodando que en el contexto de este trabajo llamamos Big-Bang al estado donde el universo tiene un factor de escala igual a cero, con $R \to \infty$ y $\rho \to \infty$.

Si se considera la edad del universo como el intervalo de tiempo entre el Big-Bang y el tiempo actual t_o. Podemos obtener el tiempo t del Big-Bang para estos valores de la ecuación (4.46), haciendo $a = 0$, tenemos

$$0 = \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3 - \tilde{\zeta}_1)\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t - t_o)\right)}{\tilde{\zeta}_0}\right]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}, \tag{4.54}$$

$$3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1 = e^{\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t - t_o)\right)}, \tag{4.55}$$

$$\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t - t_o) = \ln\left[\frac{3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1}{3 - \tilde{\zeta}_1}\right], \tag{4.56}$$

$$t_{BB} = \frac{2}{\tilde{\zeta}_0 H_o}\ln\left[1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1}\right] + t_o, \quad \tilde{\zeta}_0 \neq 0, \quad \tilde{\zeta}_1 \neq 3, \tag{4.57}$$

de donde podemos obtener fácilmente la edad del universo como

$$|t_{BB} - t_o| = -\frac{2}{\tilde{\zeta}_0 H_o}\ln\left[1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1}\right], \quad \tilde{\zeta}_0 \neq 0, \quad \tilde{\zeta}_1 \neq 3. \tag{4.58}$$

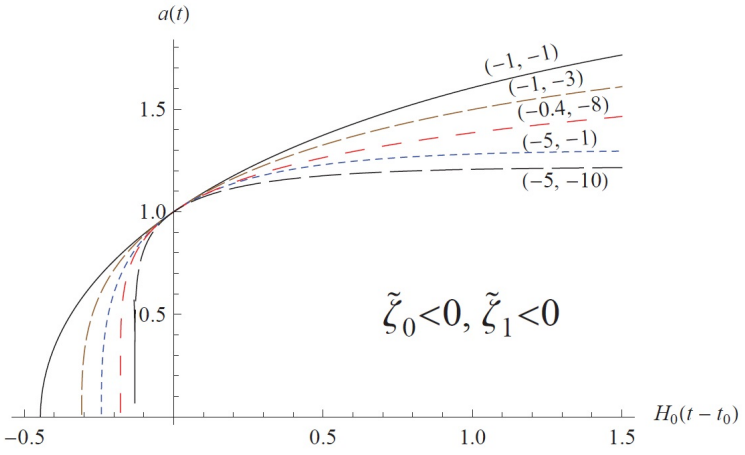

FIGURA 4.1: Gráfica de a(t) en función de $H_o(t - t_o)$ para distintos valores de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, que pertenecen a ($\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$) [34]. Observamos los puntos de corte de las curvas con el eje horizontal que es donde se da Bing-Bang para los diferentes casos dentro de este intervalo. Además se muestra la tendencia a la desaceleración de las curvas.

Para valores $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$

Según estos valores, el universo no tuvo un Big-Bang, dado que $a \neq 0$ para todo valor de t, a(t) alcanza un valor mínimo para $t \to -\infty$ de

$$a_{min} = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3-\tilde{\zeta}_1)\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t-t_o)\right)}{\tilde{\zeta}_0}\right]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)} = \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3}{\tilde{\zeta}_o}\right]^{-2/(\tilde{\zeta}_1-3)}, \tag{4.59}$$

$$a_{min} = \left[\frac{\tilde{\zeta}_o}{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3}\right]^{2/(\tilde{\zeta}_1-3)}. \tag{4.60}$$

Desde este punto el factor de escala aumenta su valor aceleradamente, hasta que en un tiempo t_{BR} el universo experimenta un Big-Rip, que es cuando el factor de escala y el escalar de curvatura divergen. Podemos calcular el tiempo t al que sucedería el Big-Rip de la ecuación (4.46)

$$(a \to \infty) \quad \to \quad \tilde{\zeta}_o + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3-\tilde{\zeta}_1)\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t-t_o)\right) = 0, \tag{4.61}$$

$$\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t-t_o) = \ln\left(\frac{3-\tilde{\zeta}_0-\tilde{\zeta}_1}{3-\tilde{\zeta}_1}\right), \tag{4.62}$$

$$t_{BR} = \frac{2}{\tilde{\zeta}_0 H_o}\ln\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3}{\tilde{\zeta}_1} - 3\right) + t_o. \tag{4.63}$$

Para valores $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$

Si consideramos la condición $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$. Las ecuaciones dan como resultado un universo que se expandirá eternamente, y que comenzó con un Big-Ban sucedido por una expansión con aceleración negativa que fue aumentando hasta ser cero y luego ser positiva, pasando así de una desaceleración a una aceleración en la expansión del universo.
El tiempo t_{trans}, cuando sucedió esta transición se puede calcular de la ecuación (4.48), igualando a cero

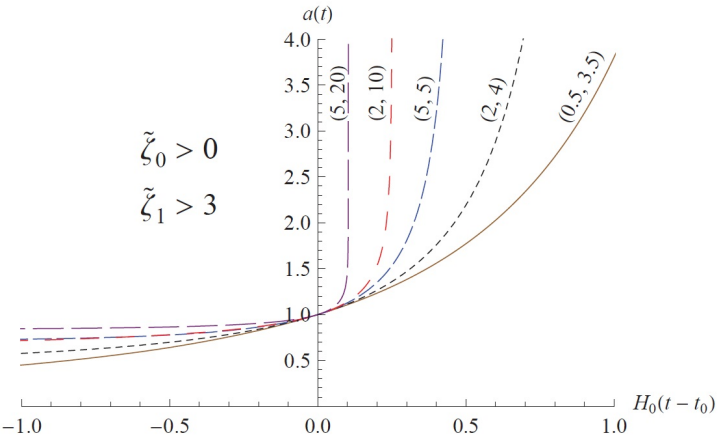

FIGURA 4.2: Gráfica de a(t) para distintos valores de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, que pertenecen a ($\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$) [34]. Se muestra que las curvas no cortan el eje horizontal, ya que para estos valores no se da un Bing-Bang.

$$\frac{d^2a\,(t)}{dx^2} = \frac{e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}{2}\left(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + 2e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}\right)\left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3-\tilde{\zeta}_1)\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t-t_o)\right)}{\tilde{\zeta}_0}\right]^{2(\tilde{\zeta}_1-2)/(3-\tilde{\zeta}_1)} = 0, \tag{4.64}$$

$$\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + 2e^{\tilde{\zeta}_0 x/2} = 0, \tag{4.65}$$

$$t_{trans} = \frac{2}{\tilde{\zeta}_0 H_o}\ln\left(\frac{3-\tilde{\zeta}_0-\tilde{\zeta}_1}{2}\right) + t_o, \tag{4.66}$$

de la ecuación (4.66) se deduce que para la transición sucedió en el pasado para $1 < \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$, si $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 1$ la transición será en el futuro y si $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 1$ tendremos $t_{trans} = t_o$.

Para valores $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$ y $\tilde{\zeta}_1 = 0$

Haciendo $\tilde{\zeta}_1 = 0$ en (4.39), (4.46), (4.47) y (4.48)

$$H(z) = H_o\left[\frac{(3-\tilde{\zeta}_0)(1+z)^{3/2} + \tilde{\zeta}_0}{3}\right] \quad \tilde{\zeta}_0, \neq 0, \tag{4.67}$$

$$a(t) = \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 - 3 + 3\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t-t_o)\right)}{\tilde{\zeta}_0}\right]^{2/3}, \quad \tilde{\zeta}_0, \neq 0, \tag{4.68}$$

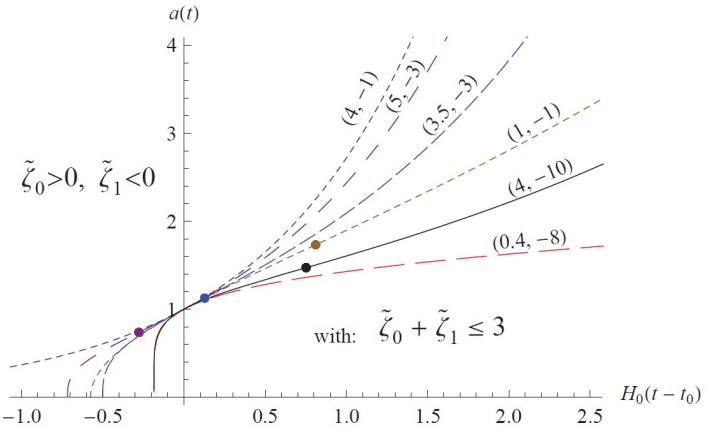

FIGURA 4.3: Comportamiento de a(t) para ($\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$) con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 \leq 3$ [34]. Los puntos dentro de la figura corresponden al tiempo de transición en la aceleración del universo para cada curva. El comportamiento del factor de escala para el caso correspondiente a un universo como el de Sitter se muestra en la curva superior con valores de $\tilde{\zeta}_0 = 4$ y $\tilde{\zeta}_1 - 1$.

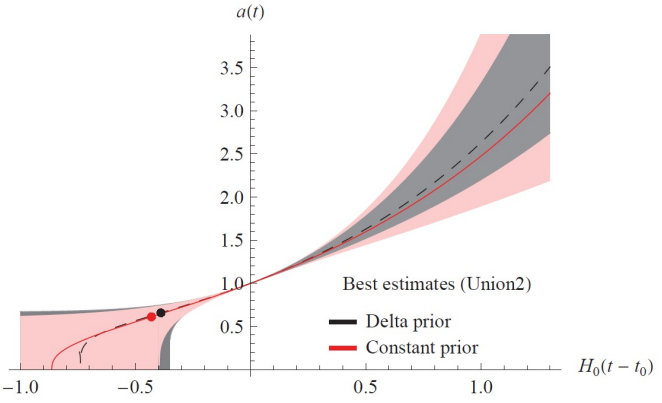

FIGURA 4.4: Comportamieno del factor de escala para las dos mejores aproximaciones de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, que corresponde también al caso **(Caso 11)** [34], la curva roja conticua corresponde a una estimación para $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ usado un FDP previa como constante, mientras que la curva negra punteada es de una estimación usado FDP previa en forma de Delta de Dirac, las bandas de colores son las evaluaciones de las insertidumbres de las mediciones, respecto de su color correspondiente.

$$\frac{da\,(t)}{dx} = e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}\left[\frac{\tilde{\zeta}_0}{\tilde{\zeta}_0 - 3 + 3e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}\right]^{1/3}, \tag{4.69}$$

$$\frac{d^2a\,(t)}{dx^2} = \frac{e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}{2}\left(\tilde{\zeta}_0 - 3 + 2e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}\right)\left[\frac{\tilde{\zeta}_0}{\tilde{\zeta}_0 - 3 + 3e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}\right]^{4/3}. \tag{4.70}$$

Considermos el caso $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$. En las figuras 4.6 y 4.7 podemos ver el comportamiento de las funciones (4.68), (4.69) y (4.70).

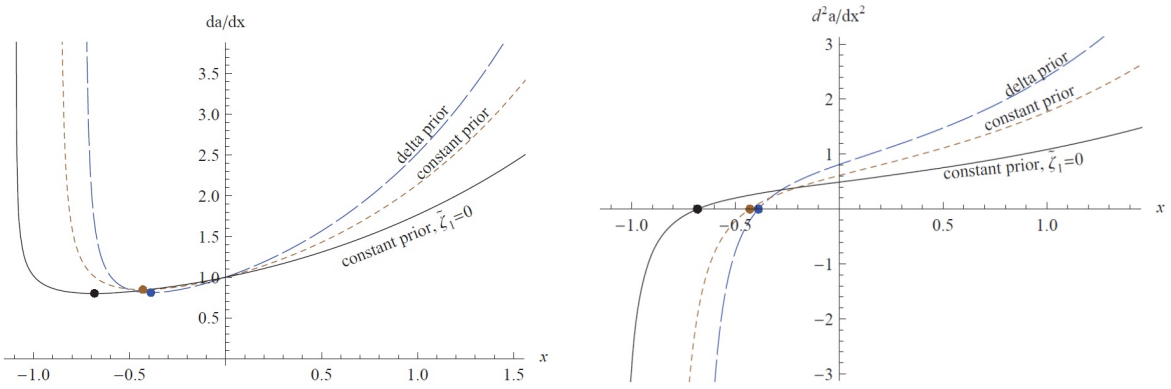

FIGURA 4.5: Gráfica de las dos primeras derivadas de a(t) respecto de x, evaluadas en las estimaciones más precisas para $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ [34].

Para estos valores nuevamente el modelo nos da como resultado un comportamiento para el universo, que inicia con un Big-Ban, continuado por una expansión desacelerada que pasa por un periodo de transición donde la aceleración es cero y posteriormente pasa a ser una expansión acelerada, para finalmente en $t \to \infty$ convertirse en un universo de Sitter.

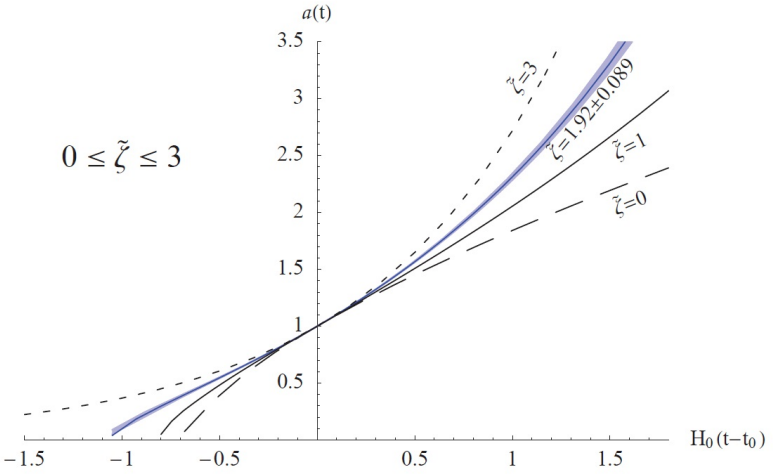

FIGURA 4.6: Gráfica del comportamiento de a(t) para $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$ y $\tilde{\zeta}_1 = 0$, donde la curva con la banda azul se corresponde a la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ con $\tilde{\zeta}_1 = 0$ [34].

El tiempo en que sucede el Big-Ban, de (4.68) es

$$a(t) = \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 - 3 + 3\exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t - t_o)\right)}{\tilde{\zeta}_0}\right]^{2/3} = 0, \tag{4.71}$$

$$\frac{3 - \tilde{\zeta}_0}{3} = \exp\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{2}(t - t_o)\right), \tag{4.72}$$

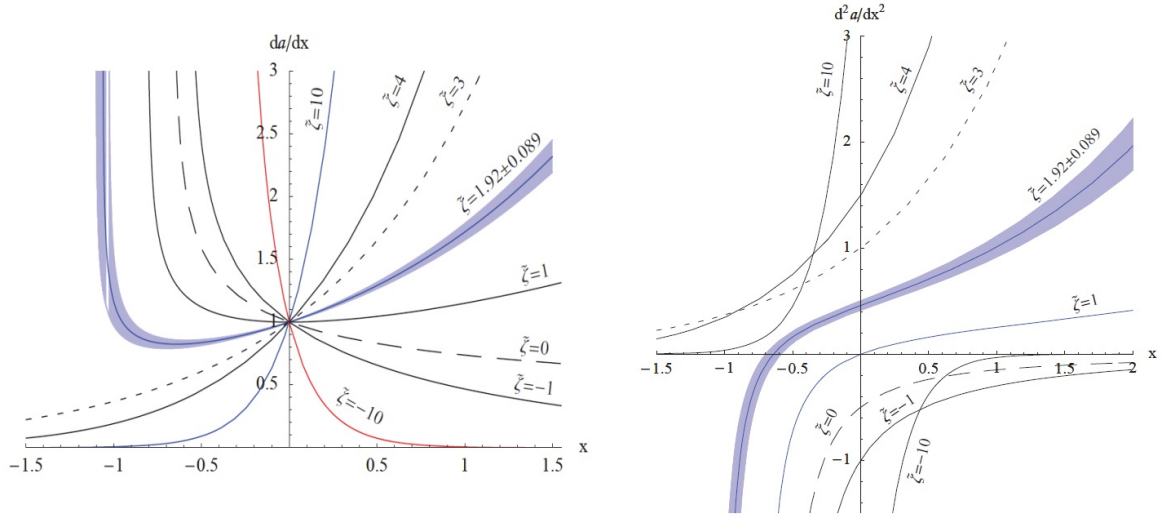

FIGURA 4.7: Gráfica de la primera y segunda derivada de a(t) respecto de x para distintos valores de $\tilde{\zeta}_0$ con $\tilde{\zeta}_1 = 0$ [34].

$$t_{BB} = \frac{2}{\tilde{\zeta}_0 H_o} \ln\left(\frac{3-\tilde{\zeta}_0}{3}\right) + t_o, \tag{4.73}$$

con lo que la edad del universo según este caso será

$$Edad = \frac{2}{\tilde{\zeta}_0 H_o} \ln\left(\frac{3-\tilde{\zeta}_0}{3}\right), \tag{4.74}$$

y el tiempo de transición t_{trans}, de (4.70), es

$$\frac{e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}{2}\left(\tilde{\zeta}_0 - 3 + 2e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}\right)\left[\frac{\tilde{\zeta}_0}{\tilde{\zeta}_0 - 3 + 3e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}\right]^{4/3} = 0, \tag{4.75}$$

$$\frac{3-\tilde{\zeta}_0}{2} = e^{H_0(t-t_0)/2}, \tag{4.76}$$

$$t_{trans} = \frac{2}{\tilde{\zeta}_0 H_o} \ln\left(\frac{3-\tilde{\zeta}_0}{2}\right) + t_o. \tag{4.77}$$

Según la ecuación (4.77), transición se dará en le futuro para $0 < \tilde{\zeta}_0 < 1$, en el tiempo actual para $\tilde{\zeta}_0 = 1$, y en el pasado para $1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$.

Debemos notar que la aceleración en la expansión del universo se da de manera natural en el modelo sin la necesidad de postular alguna componente adicional desconocida.
En la historia de la expansión del universo, que se puede ver en las observaciones experimentales de SNIa, sabemos que efectivamente el universo pasó de un periodo de desaceleración a un periodo de aceleración en su expansión. [1] [34].

De los valores de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, surgen en total 12 casos, clasificados según el comportamiento que predicen para el universo (cuadro 4.2). Hasta el momento solo se ha mostrado el análisis de 5 casos más representativos, y serán solo de nuestro interés, de entre todos, lo dos últimos.

Según la evaluación estadística, el modelo se ajusta a los datos experimentales solo para valores acotados de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ de ($\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$ con $1 < \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$) y ($\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 = 0$ con $1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$), que corresponden precisamente a los casos que dan un comportamiento del universo, iniciado por un Big-ban y seguido de una expansión desacelerada que llega a ser cero en un tiempo t_{trans} y que termina en una expansión acelerada hasta la actualidad.

Tomando una FDP previa como delta de Dirac						
Prueba	Conjunto de SN	Ω_{ro}	$\tilde{\zeta}_0$	$\tilde{\zeta}_1$	x^2_{min}	$x^2_{d.o.f}$
SNe	Union 2	0	8.58935+1.217	-5.96505+1.159	561.15	1.011
SNe	Union	0	8.858+1.55	-6.257+1.47	314.78	1.032
Sne y CMB	Union	0	5.546+0.24	-3.124+0.20	319.18	1.046
SNe y CMB	Union	$5x10^{-5}$	5.547+0.24	-3.124+0.2	319.18	1.043
Tomando una FDP previa constante						
Prueba	Conjunto de SN	Ω_{ro}	$\tilde{\zeta}_0$	$\tilde{\zeta}_1$	x^2_{min}	$x^2_{d.o.f}$
SNe	Union 2	0	4.38929+1568	-2.16673+1.421	524.38	0.977
SNe	Union 2	0	1.9835+0.066	0	544.587	0.979
SNe, CMB y BAO	Union 2	0	0.1054+0.046	0	1418.89	2.551
SNe	Unión	0	6.281+0.1	-3.925+0.11	309.99	1.016
SNe y CMB	Unión	0	4.716+0.34	-2.496+0.25	310.647	1.018
SNe y CMB	Unión	$5x10^{-5}$	4.716+0.34	-2.496+0.25	310.647	1.015
SNe, CMB y BAO	Unión 2	0	2.9177	-1.3378	1102.83	1.979

CUADRO 4.1: En el primera parte mostramos los valores de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ calculados usando un FDP como delta dirac, mientras que en la segunda se ha usado una FDP como constante [34].

Podemos notar también del cuadro 4.1, que además de darnos los valores más precisos de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ para la correspondencia entre datos experimentales y modelo, también nos indica que este modelo se ajusta bastante bien a los datos experimentales. Que se ve evidenciado en los valores

de x^2_{min} [4] y $x^2_{d.o.f}$ [5] (Que son indicadores de precisión del modelo a los datos).

Rango de valores de $\tilde{\zeta}_0$, $\tilde{\zeta}_1$	Prediciones del modelo
(Caso 1) $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$	Un universo de De Sitter, sin un Big-Bang.
(Caso 2) $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$	Un Big-Bang seguido por una expansión en desaceleración para cualquier tiempo t. Con un a_{min} para $t \to \infty$.
(Caso 3-1) $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ **y** $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$	Un Big-Bang y una historia de la evolución del universo que pasa de una desaceleración a un aceleración en la expansión del universo. (Pero este intervalo de valores no es favorecido por la estimaciones de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$)
(Caso 3-2) $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ **y** $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$	Sin un Big-Bang con una continua expansión acelerada.
(Caso 4) $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$	Permite un Big-Bang. Para $\tilde{\zeta}_1 > 1$, perdice una aceleración en tiempos tempranos y termina con una expansión desacelerada. Para $\tilde{\zeta}_1 \leq 1$ tiene una expansión continua desacelerada.
(Caso 5) $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$	No permite un Big-Bang y tiene una expansión acelerada que termina en un Big-Rip.
(Caso 6-1) $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$ **y** $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$	No permite un Big-Bang y predice que el universo pasa de una expansión acelerada a una expansión desacelerada
(Caso 6-2) $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$ **y** $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$	No permite un Big-Bang. Predice una expansión acelerada continua hasta terminar en un Big-Rip.
(Caso 7) $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$	No permite un Big-Bang. Expansión acelerada continua.
(Caso 8) $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$	Solo permite un Big-Bang para $t \to -\infty$. Expanión acelerada que pasa a una desacelerada.
(Caso 9) $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$	Nuevamente un universo como el planteado por De Sitter
(Caso 10-1) $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 \neq 0$ **y** $\tilde{\zeta}_1 < 3$	Hay un Big-Bang. Para $\tilde{\zeta}_1 < 1$ la expansión es desacelerada para todo t. Para $1 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ la expansión es acelerada para todo t.
(Caso 10-2) $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 \neq 0$ **y** $\tilde{\zeta}_1 > 3$	No hay un Big-bang. Predice un expansión acelerada que termina en un Big-Rip.
(Caso 11) $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$ **y** $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$	Segundo mejor candidato para el universo.
(Caso 12) $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$ **y** $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$	Mejor candidato para describir el universo.

Cuadro 4.2: Resumen de las prediciones del modelo según los valores de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ [34].

[4] En el cálculo estadístico de las estimaciones de parámetros libres, x^2_{min} es una función que se busca minimizar, ya que su minimización implica que se maximice la probabilidad de certeza en la estimación de los parámetros, además un x^2_{min} del orden del número de datos usados indica un buen ajuste del modelo a los datos experimentales.

[5] Se define como x^2_{min}/n, donde n es el número de datos usados para el calculo estadístico. La función $x^2_{d.o.f}$ es un mejor indicador que x^2_{min} de la eficiencia del ajuste del modelo a los datos experimentales y la estimación de los parámetros libres, dado que nos permite comparar las eficiencias de los calculos usando diferentes grupos de datos experimentales, aunque la cantidad de datos no sea la misma. Por ejemplo nos permite saber cual es la mejor estimación de los valores de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ usando dos grupos de datos de supernovas Union y Union 2, el primero con una muestra de 307 SNIa y el segundon 557 SNIa.

4.2.2. Evolución del escalar de curvatura para un universo con viscosidad volumétrica

El escalar de curvatura para un geometría plana ($k = 0$), se escribe como

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right), \tag{4.78}$$

de la segunda ecuación de Friedmann para fluidos viscosos (4.19)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(\rho - 9\zeta H\right), \tag{4.79}$$

sabiendo que $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$, $\tilde{\zeta}_0 = (24\phi G/H_o)\,\zeta_0$, $\tilde{\zeta}_1 = (24\phi G)\,\zeta_1$ y de la ecuación (4.15) $\rho_m = 3H^2/(8\pi a)$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\frac{3H^2}{8\pi G} - 9\left(\frac{\tilde{\zeta}_0 H_o}{24\phi G} + \frac{\tilde{\zeta}_1 H}{24\pi G}\right)H\right), \tag{4.80}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{H^2}{2}\left(\frac{H_o}{H}\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 1\right), \tag{4.81}$$

reemplazando en R

$$R = 6\left[\frac{H^2}{2}\left(\frac{H_o}{H}\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 1\right) + H^2\right], \tag{4.82}$$

$$R = 6\left[\frac{H^2}{2}\left(\frac{H_o}{H}\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 + 1\right)\right], \tag{4.83}$$

$$R = 3H\left[H_o\tilde{\zeta}_0 + (\tilde{\zeta}_1 + 1)H\right], \tag{4.84}$$

de la ecuación (4.40) sabemos $H(a) = H_o\left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right)a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]$, reemplazando en la ecuación (4.84)

$$R = 3H_o\left[\left(1-\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right)a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2}+\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]\left\{H_o\tilde{\zeta}_0+H_o\left[\left(1-\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right)a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2}+\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]\right\}, \tag{4.85}$$

$$R = \frac{3H_o^2}{(3-\tilde{\zeta}_1)^2}\left[\left(3-\tilde{\zeta}_0-\tilde{\zeta}_1\right)a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2}+\tilde{\zeta}_0\right]\left\{\tilde{\zeta}_0(3-\tilde{\zeta}_1)+\left[\left(3-\tilde{\zeta}_0-\tilde{\zeta}_1\right)a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2}+\frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right](\tilde{\zeta}_1+1),\right\} \tag{4.86}$$

$$R = \frac{3H_o^2}{(3-\tilde{\zeta}_1)^2}\left\{4\tilde{\zeta}_0^2+\left(3+\tilde{\zeta}_0-\tilde{\zeta}_1\right)a^{(\tilde{\zeta}_1-3)/2}\left[\tilde{\zeta}_0(3-\tilde{\zeta}_1)+\left(3-\tilde{\zeta}_1-\tilde{\zeta}_0\right)a^{(\tilde{\zeta}_1-3)/2}(\tilde{\zeta}_1+1)+2\tilde{\zeta}_0(\tilde{\zeta}_1+1)\right]\right\}, \tag{4.87}$$

$$R = \frac{3H_o^2}{(3-\tilde{\zeta}_1)^2}\left\{4\tilde{\zeta}_0^2+\left(3-\tilde{\zeta}_0-\tilde{\zeta}_1\right)a^{(\tilde{\zeta}_1-3)/2}\left[\tilde{\zeta}_0(5+\tilde{\zeta}_1)+\left(3-\tilde{\zeta}_1-\tilde{\zeta}_0\right)a^{(\tilde{\zeta}_1-3)/2}(\tilde{\zeta}_1+1)\right]\right\}, \tag{4.88}$$

$$R = \frac{3H_o^2}{(3-\tilde{\zeta}_1)^2}\left\{4\tilde{\zeta}_0^2+\left(\tilde{\zeta}_0+\tilde{\zeta}_1-3\right)a^{(\tilde{\zeta}_1-3)/2}\left[\left(\tilde{\zeta}_1+\tilde{\zeta}_0-3\right)a^{(\tilde{\zeta}_1-3)/2}(\tilde{\zeta}_1+1)-\tilde{\zeta}_0(5+\tilde{\zeta}_1)\right]\right\}. \tag{4.89}$$

Para el caso $\tilde{\zeta}_0 > 0$ **y** $\tilde{\zeta}_1 < 0$ con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$

Si $a \to \infty$, entonces

$$R \to \frac{3H_0^2}{\left(3-\tilde{\zeta}_1\right)^2}\left(4\tilde{\zeta}_0\right)^2 = 12\left[\frac{H_0\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]^2, \tag{4.90}$$

cuando $a \to 0$ el escalar de curvatura diverge, lo que corrobora las condiciones de un Big-Ban para los valores de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ en este caso.

Para el caso $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$ y $\tilde{\zeta}_1 = 0$

El escalar de curvatura toma la forma

$$R = \frac{3H_o^2}{3^2}\left\{4\tilde{\zeta}_0^2 + \left(\tilde{\zeta}_0 - 3\right)a^{-3/2}\left[\left(\tilde{\zeta}_0 - 3\right)a^{-3/2} - \tilde{\zeta}_0 5\right]\right\}. \tag{4.91}$$

- Si $\tilde{\zeta}_0 = 0$, nos da $R = 3H_0^2 a^{-3}$, es decir el escalar de curvatura es el mismo que para un universo sin viscosidad.
- Si $\tilde{\zeta}_0 = 3$, tenemos $R = 3H_0^2$ que correspondiente al universo de Sitter.
- Si $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, en a $= 0$ el escalar de curvatura divirge ($R \to \infty$) para este caso, notamos que el escalar de curvatura es positivo siempre y va decreciendo hasta un valor mínimo en $a \to \infty$ de $R = \frac{4}{3}H_0^2\tilde{\zeta}_0$.

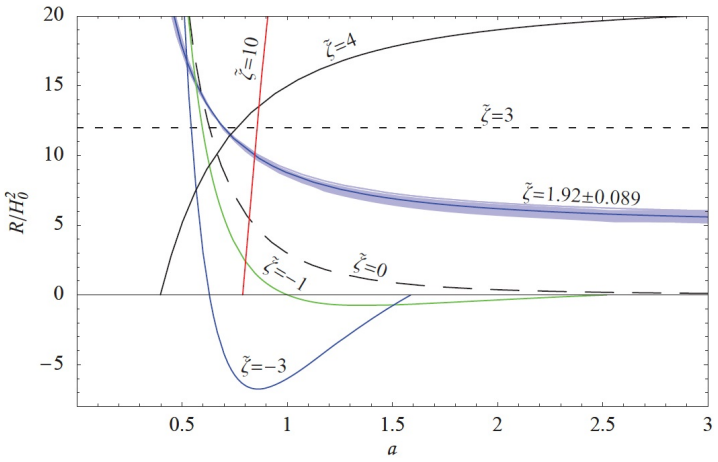

FIGURA 4.8: Comportamiento de $R(a)$ para el caso **caso 12** [34].

4.2.3. Evolución de la densidad del materia

De la ecuación (4.15), podemos despejar

$$\rho_m = \left(\frac{3}{8\pi G}\right)H^2. \tag{4.92}$$

Reemplazando (4.40)

$$\rho_m(a) = \left(\frac{3}{8\pi G}\right)H_o^2\left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right)a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]^2, \tag{4.93}$$

$$\rho_m(a) = \rho^o_{crit}\left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right) a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]^2. \tag{4.94}$$

Para $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$

- Si $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$, en $a = 0$ entonces $\rho_m \to \infty$.
- cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$, en $a = a_{min}$ cuando $t \to -\infty$ entonces $\rho_m = 0$, por lo que para este intervalo no podria haber un Big-Ban.
- Para $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$, la densidad es constante, igual a ρ^o_{min}.

Para $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$ con $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$,

- Si $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\rho_m = \left(3H_0^2/8\pi G\right) a^{-3}$, que describe un modelo de universo sin viscosidad.
- Si $\tilde{\zeta}_0 = 3$, $\rho_m = 3H_0^2/8\pi G$, que concuerda con el modelo de universo de Sitter.
- Si $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, para $a \to 0$ la densidad de materia diverge, lo cual corresponde a las condiciones de un Big-Ban, después ρ_m comienza a decrecer hasta un valor $\left(H_0^2/24\pi G\right)\tilde{\zeta}_0$ para $a \to \infty$.

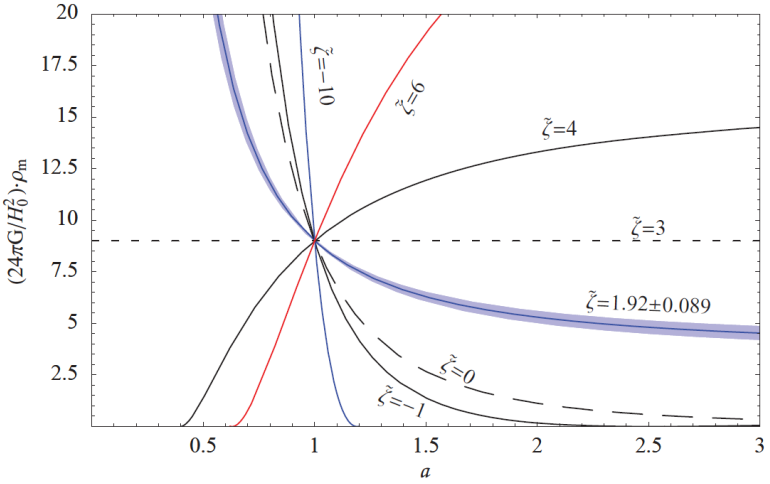

FIGURA 4.9: Comportamiento de $\rho_m(a)$ para el **(Caso 12)** [34].

4.2.4. Cálculos de la edad del universo

Para $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$ con $1 < \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$

A partir de la ecuación (4.58), se puede hacer una estimación de la edad del universo para este

rango de valores, tomaremos un constante de Hubble en la actualidad de $H_o = 72(Km/s)Mpc^{-1}$. Si tomamos $\tilde{\zeta}_0 = 4{,}38929$ y $\tilde{\zeta}_1 = -2{,}16673$, calculado usando los datos de SNIa correspondiente a*Union 2*, como podemos ver en la cuadro 4.1

$$Edad = -\frac{2}{H_0\tilde{\zeta}_0}\ln\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1}\right), \tag{4.95}$$

$$Edad = -\frac{2}{(72)(4{,}38929)}\ln\left(1 - \frac{4{,}38929}{3 - 2{,}16673}\right), \tag{4.96}$$

$$Edad = 11{,}72x10^9 \quad años. \tag{4.97}$$

Se puede notar que el resultado para la edad del universo con estos valores presenta un problema dado que, como lo mencionamos anteriormente, existen estrellas de al menos 12 mil millones de años de edad que imponen una cota inferior para la edad del universo.

Para el caso $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$ con $1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$
Usando los datos de SNIa *Union 2*, la mejor estimación para $\tilde{\zeta}_1 = 0$, es $\tilde{\zeta}_0 = 1{,}9835$. En la ecuación (4.74)

$$Edad = -\frac{2}{H_0\tilde{\zeta}_0}\ln\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3}\right), \tag{4.98}$$

$$Edad = -\frac{2}{(72)(1{,}9835)}\ln\left(1 - \frac{1{,}9835}{3}\right), \tag{4.99}$$

$$Edad = 14{,}81997x10^9 \quad años. \tag{4.100}$$

Podemos ver que para este caso si cumple con la cota mínima impuesta por las estrellas y galaxias mas antiguas.

Como se ha mostrado hasta el momento, en base a la evolución del factor de escala, el escalar de curvatura y la densidad de materia, el modelo funciona bastante bien para dos posibles rangos de valores caso 11 y caso 12 (donde se fijado $\tilde{\zeta}_1 = 0$); sin embargo, a partir de los cálculos de la edad del universo, notamos que el caso Caso 11, usando sus mejores aproximaciones de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, presenta una discordancia con las cotas mínimas para este cálculo. Por otro lado, debemos

recordar, como se mencionó anteriormente de la construcción del tensor de energía-momento, que para un fluido cosmológico con viscosidad volumétrica se impone la condición de $\zeta \geq 0$ si se quiere que se cumpla la segunda ley de la termodinámica.

Podemos calcular la forma de ζ, partiendo de

$$\zeta(t) = \zeta_0 + H\zeta_1, \tag{4.101}$$

reemplazando los valores de ζ_0 y ζ_1 en función de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, nos da

$$\zeta(t) = \left(\frac{H_0}{24\pi G}\right)\tilde{\zeta}_0 + \left(\frac{1}{24\pi G}\right)\tilde{\zeta}_1 H, \tag{4.102}$$

$$\zeta(t) = \left(\frac{H_0}{24\pi G}\right)\tilde{\zeta}_0 + \left(\frac{1}{24\pi G}\right)\tilde{\zeta}_1 H_o \left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right) a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right], \tag{4.103}$$

$$\zeta(t) = \left(\frac{H_0}{24\pi G}\right)\left\{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 \left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right) a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]\right\}, \tag{4.104}$$

haciendo $24\pi G\zeta/H_o = \zeta$

$$\zeta(t) = \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 \left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right) a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3-\tilde{\zeta}_1}\right]. \tag{4.105}$$

En la gráfica 4.10 podemos observar el comportamiento de ζ evaluado en las estimaciones más precisas de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ para los caso 11 y 12. La gráfica nos muestra que para el **caso 11** en un primer periodo de universo ζ es negativa, mientras que para los últimos periodos es positiva. Si hacemos ahora $\tilde{\zeta}_1 = 0$, encontramos que ζ es constante y positiva para todo tiempo t.

Por ende, resulta que el modelo de un universo con viscosidad volumétrica cumple con las restricciones observacionales y teóricas solo para valores de ($\tilde{\zeta}_0 \neq 0, \tilde{\zeta}_1 = 0$ con $1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$). Para este caso el coeficiente de viscosidad volumétrica que se obtiene será constante en el tiempo y espacio, lo cual corresponde a la más sencilla de las parametrizaciones de ζ. Debemos señalar además que, como se muestra en el cuadro 2, cuando se fija $\tilde{\zeta}_1 = 0$ y se calcula estadísticamente el valor de $\tilde{\zeta}_0$ de los datos experimentales se obtiene $\tilde{\zeta}_0 = 1{,}9835$, concuerda con el intervalo fijado ($1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$).

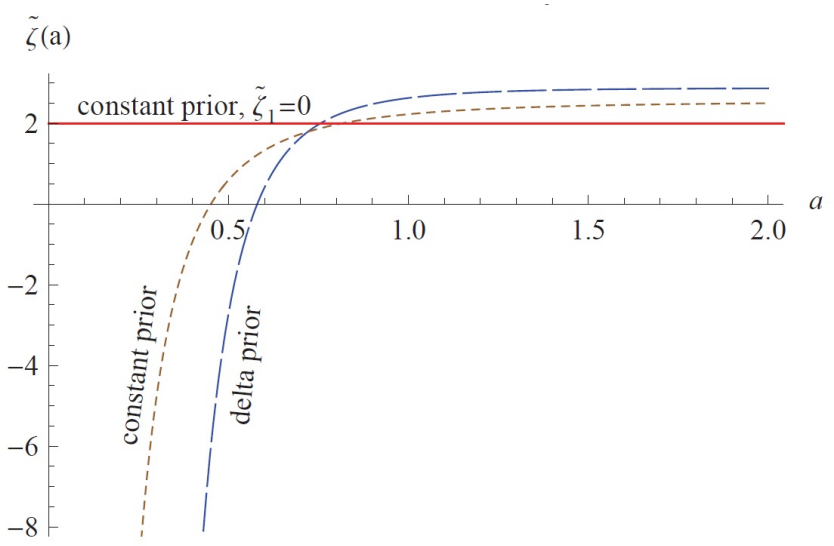

FIGURA 4.10: Evolución del término de viscosidad [34].

Por lo que el modelo, según estos valores nos dice que el universo empezó con un Big-Bang (con $\rho_m \to \infty$ y $R \to \infty$ para $a \to 0$), desde donde pasó a una expansión desacelerada que gradualmente disminuyó, hasta que en un tiempo t_{trans} en el pasado ($t_{trans} < t_o$), sucedió una transición a una expansión acelerada que continúa hasta la actualidad. En cuanto a la densidad de materia y el escalar de curvatura disminuyeron su valor apartir de Big-Bang y finalmente llegarán a $\rho_{min} = (H_o^2/24\pi G)\tilde{\zeta}_0$ y $R_{min} = \frac{4}{3}H_o^2\tilde{\zeta}_0$. Los cálculos de la edad de los universo para las más precisas estimaciones están sobre las cotas mínimas impuestas por las galaxias y estrellas más antiguas.

4.2.5. Comparación con el modelo ΛCDM

Modelo	H_o	$\tilde{\zeta}_0$	Ω_{mo}	x^2_{min}	$x^2_{d.o.f}$
$\zeta = \tilde{\zeta}_0$	69.62 ± 0.59	1.922 ± 0.089	1	314.57	1.031
ΛCDM	70.01±0.59	-	0.278±0.027	311.84	1.022

CUADRO 4.3: Comparación entre los modelos de viscidad volumétrica y ΛCDM [34].

Finalmente, en el cuadro 4.3 se muestra las estimaciones más precisas que se pueden obtener de $\tilde{\zeta}_0$ y H_o usando los datos de supernovas tipo Ia para el modelo de un universo con viscosidad volumétrica (fijando $\tilde{\zeta}_0$) y la estimación de H_o y Ω_{mo} usando los mismos datos para el modelo de ΛCDM. Los resultados nos dan valores de la constante de Hubble H_o muy cercanos y congruentes con el calculo realizado por el "Proyecto Clave" [10]. Pero sobre todo nos dan x^2_{min} y $x^2_{d.o.f}$ muy similares, lo que nos indica que el modelo de un universo con viscosidad volumétrica se ajusta a los datos de SNIa tanto como el Modelo ΛCDM, lo que nos indica que el modelo presentado en esta sección es bastante competitivo para la descripción del universo en la actualidad.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de la primera parte del presente trabajo de tesis se ha estudiado a detalle el modelo de un universo con energía oscura descrita por la constante cosmológica. Se ha encontrado que asociada a Λ se puede definir una densidad de energía

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

que resulta independiente del tiempo, es decir la densidad de energía oscura para este modelo sería también constante en el tiempo, y tendría una ecuación de estado $\rho = -p$. También, como se ha mencionado en las primeras secciones, la constante cosmológica genera una aceleración, dentro de las ecuaciones de Friedmann, en contra a la desaceleración provocada por la presencia de materia en el universo que tiende a frenar la expansión. En cuanto a su validación con las principales observaciones experimentales de SNIa se encontró que el modelo se ajusta bastante bien a dichos datos experimentales y según la combinación de los estudios de la radiación cósmica de fondo, la oscilaciones acústica de bariones y las supernovas, la energía oscura descrita por este modelo representa casi el 70 % del contenido del universo, esta dominancia sobre la materia haría que en la actualidad el universo esté en aceleración. Al llegar a la contrastación de este modelo con la energía del vacío, se llegó a una desacuerdo entre los datos medidos para ρ_Λ y los calculados teóricamente para ρ_v, sin embargo esta discrepancia no es definitiva para descartar la constante cosmológica principalmente porque aunque exista similitud con las característica de la energía del vacío, la constante cosmológica no está restringida a ser relacionada parcial o totalmente con la energía del vacío, además de que la definición de la energía del vacío no es clara y no se ha podido medir directamente de forma experimental.

En la segunda parte se estudió un modelo alternativo de un universo dominado por un fluido de materia con una viscosidad volumétrica, que incluye y es compatible con la homogeneidad e

isotropía espaciales. De este modelo surgen dos parámetros libres $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, que según los valores que tomen, dan un comportamiento distinto para las predicciones del universo, se pudieron clasificar 12 casos según este comportamiento. Se dedujo de las restricciones teóricas y experimentales que solo para valores de $1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$ y $\tilde{\zeta}_1 = 0$ el modelo describe bastante bien al universo que conocemos hasta el momento. A partir de las estimaciones estadísticas usando los datos experimentales se encontró que los valores de los parámetros libres son

$$\tilde{\zeta}_0 = 1{,}8935 \quad , \quad \tilde{\zeta}_1 = 0,$$

y que el modelo se ajusta bastante bien a los datos experimentales. Ambos modelos estudiados en este trabajo de tesis predicen que el universo inicia con un Big-Bang ($\rho \to \infty, R \to \infty$ y $a = 0$), continua con un periodo de expansión desacelerada que va decreciendo hasta ser cero y pasa a un periodo de expansión acelerada que continúa hasta la actualidad, como se mencionó recientemente, ambos modelos también se ajustan bastante bien a los datos experimentales, con la diferencia que el modelo con viscosidad volumétrica no requiere de una componente de energía oscura, adicional a las componentes de materia y de radiación, para explicar la aceleración en la expansión del universo, sino que esta aceleración sería solamente una consecuencia de la viscosidad en el fluido de materia que este modelo considera dominante.

Por lo que podemos concluir que la existencia de la energía oscura como componente del universo solo podría depender del modelo utilizado para estudiar el mismo. Del término "Energía oscura" solo podemos decir que es una generalización para referirnos a que se ha descubierto que el universo se expande aceleradamente a pesar de que se esperaba lo contrario.

Anexo A

Desarrollo de las ecuaciones de Friedmann

La métrica para un universo homogéneo e isotrópico (métrica de FLRW), en función del diferencial de línea es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1+kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{A.1}$$

su forma matricial implícita es

$$g_{\mu v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(1-kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

y su inversa

$$g^{\mu v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-kr^2)}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

El símbolo de Christoffel se escribe como

$$\Gamma^{\rho}_{\mu v} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_v g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma v} - \partial_\sigma g_{\mu v}). \tag{A.4}$$

Evaluando las componentes de símbolos de Christoffel según las componentes de la métrica de FLRW, las únicas diferentes de cero son

$$\Gamma^0_{11} = \frac{a\,\dot{a}}{1-kr^2} \quad , \quad \Gamma^0_{22} = a\,\dot{a}\,r^2 \quad , \quad \Gamma^0_{22} = a\,\dot{a}\,r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta,$$

$$\Gamma^1_{10} = \frac{\dot{a}}{a} \quad , \quad \Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2} \quad , \quad \Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2),$$

$$\Gamma^1_{33} = -(1-kr^2)(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta) \quad , \quad \Gamma^2_{02} = \frac{\dot{a}}{a} \quad , \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^2_{33} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \quad , \quad \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{a} \quad , \quad \Gamma^3_{23} = \cot\theta \quad , \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}.$$

El tensor de Ricci se expresa como

$$R_{\mu v} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu v} - \partial_v \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu v}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\rho_{\rho v}. \tag{A.5}$$

Evaluando los símbolos de Christoffel distintos de cero y las componentes de la métrica en (A.5), obtenemos

$$R_{\mu v} = 0 \quad , \quad para \quad \mu \neq v,$$

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \tag{A.6}$$

$$R_{11} = \frac{a\;\ddot{a} + 2\;\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}, \tag{A.7}$$

$$R_{22} = r^2(a\;\ddot{a} + 2\;\dot{a}^2 + 2k), \tag{A.8}$$

$$R_{33} = r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta(a\;\ddot{a} + 2\;\dot{a}^2 + 2k). \tag{A.9}$$

Podemos obtener el escalar de curvatura como

$$R = g^{\mu v} R_{\mu v} = g^{0v} R_{0v} + g^{1v} R_{1v} + g^{2v} R_{2v} + g^{3v} R_{3v}, \tag{A.10}$$

$$R = g^{0v} R_{0v} + g^{1v} R_{1v} + g^{2v} R_{2v} + g^{3v} R_{3v},$$

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33},$$

$$R = 6 \left(\frac{a\ \ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a} \right). \tag{A.11}$$

A partir de aquí podemos obtener las componentes diferentes de cero del tensor de Einstein $G_{\mu v} = R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R$ y son

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + k), \tag{A.12}$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = \frac{2a\ \ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{-1 + kr^2}, \tag{A.13}$$

$$G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R = -r^2 (2a\ \ddot{a} + \dot{a}^2 + k), \tag{A.14}$$

$$G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta (2a\ \ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \tag{A.15}$$

Para obtener las ecuaciones de Friedmann, tomamos el contenido del universo como un fluido ideal, donde el tensor de masa energía se expresa por

$$T^{\mu v} = (\rho + p)\, u^{\mu} u^{v} - p g^{\mu v}. \tag{A.16}$$

Que puede ser escrito de forma matricial como

$$T_{\mu v} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p g_{33} \end{pmatrix}, \tag{A.17}$$

Resolviendo en las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu v} = R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = 8\pi G T_{\mu v}, \tag{A.18}$$

para la componente $\mu = v = 0$

$$G_{00} = 8\pi G T_{00}, \tag{A.19}$$

$$\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) = 8\pi G\rho, \tag{A.20}$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \tag{A.21}$$

que es la primera ecuación de Friedmann.

Para la componente $\mu = v = 1$ de (A.18)

$$G_{11} = 8\pi G T_{11}, \tag{A.22}$$

$$\frac{2a\ \ddot{a} + \dot{a} + k^2}{-(1 - kr^2)} = 8\pi G p g_{11}, \tag{A.23}$$

$$\frac{2a\ \ddot{a} + \dot{a} + k^2}{-(1 - kr^2)} = 8\pi G \frac{a^2}{(1 - kr^2)} p, \tag{A.24}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p, \tag{A.25}$$

reeemplazando la ecuación (A.21)

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p, \tag{A.26}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right), \tag{A.27}$$

que es la segunda ecuación de Friedmann.

Anexo B

Desarrollo de las ecuaciones de Friedmann con constante cosmológica

Para obtener las ecuaciones de Friedmann con constante cosmológica, partimos de

$$G_{\mu v} + \Lambda g_{\mu v} = R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R + \Lambda g_{\mu v} = 8\pi G T_{\mu v}, \tag{B.1}$$

donde usaremos las expresiones encontradas en el Apendice A para $G_{\mu v}, g_{\mu v}, R$ y $T_{\mu v}$. Desarrollando para la componente $\mu = v = 0$

$$G_{00} + \Lambda g_{00} = 8\pi G T_{00}, \tag{B.2}$$

$$\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) - \Lambda = 8\pi G \rho, \tag{B.3}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{B.4}$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{B.5}$$

Desarrollando para la componente $\mu = v = 1$

$$G_{11} + \Lambda g_{11} = 8\pi G T_{11}, \tag{B.6}$$

$$\frac{2a\ \ddot{a} + \dot{a} + k^2}{-(1-kr^2)} + \Lambda \frac{a^2}{(1-kr^2)} = 8\pi G \frac{a^2}{(1-kr^2)} p, \tag{B.7}$$

$$\frac{2\ \ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G + \Lambda, \tag{B.8}$$

reemplazando (B.5)

$$\frac{2\ \ddot{a}}{a} + \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G + \Lambda, \tag{B.9}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \tag{B.10}$$

donde las expresiones B.5 y B.10 son las ecuaciones de Friedmann con constante cosmológica.

Referencias

[1] M. Tafalla. La expansión acelerada del universo. *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*, (1):403–442, 2014.

[2] M. Feast. Cepheids as distance indicators. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111(761):775, 1999.

[3] M. Mottini. *Gauging the Universe: the Effect of the Metallicity on the Cepheid Period-Luminosity Relation*. PhD thesis, lmu, 2006.

[4] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173, 1929.

[5] M. Livio and A. Riess. Measuring the hubble constant. *Physics Today*, 66(10):41–47, 2013.

[6] A. Friedman. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10(1):377–386, 1922.

[7] G. Lemaître. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 47:49–59, 1927.

[8] W. Freedman. La constante de hubble y el universo en expansión. *Investigación y ciencia*, (333):38–45, 2004.

[9] W. Freedman and B. Madore. The hubble constant. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48:673–710, 2010.

[10] W. Freedman, B. Madore, B. Gibson, L. Ferrarese, D. Kelson, S. Sakai, J. Mould, R. Kennicutt Jr, H. Ford, J. Graham, et al. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, 553(1):47, 2001.

[11] R. Tripp. Using distant type ia supernovae to measure the cosmological expansion parameters. Technical report, SCAN-9706133, 1997.

[12] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. Knop, P. Nugent, P. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. Groom, et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.

[13] A. Riess, A. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. Garnavich, R. Gilliland, C. Hogan, S. Jha, R. Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The astronomical journal*, 116(3):1009, 1998.

[14] Y. Bonder and E. Okon. Los principios de la relatividad: una introducción pedagógica. *Revista mexicana de física E*, 64(1):87–91, 2018.

[15] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847, 1915.

[16] N. Roy. Relatividad general: Complementos matemáticos. formulación minkowskiana de la re. fundamentos y ecuaciones de la rg. *Universitat Politecnica de Catalunya*, 2018.

[17] F. Villegas and T. Vargas. Formulación adm de la relatividad general. *Revista de investigación de física*, 19(2), 2016.

[18] B. Janssen. Teorıa de la relatividad general. *Granada: Universidad de Granada*, 2013.

[19] M. Hobson, G. Efstathiou, and A. Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.

[20] J. Aguilar. *Análisis de la estructura de singularidades en relatividad general mediante cálculo simbólico de los invaariantes de curvatura*. PhD thesis, Universidad Autónoma Metropolitana, 2021.

[21] S. Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.

[22] J. Cepa. *Cosmología física*. Ediciones Akal, 2007.

[23] J. Barrow. What is the principal evidence for the cosmological principle? *Royal Astronomical Society, Quarterly Journal (ISSN 0035-8738)*, 30:163–167, 1989.

[24] N. Jarosik, C. Bennett, J. Dunkley, B. Gold, M. Greason, M. Halpern, R. Hill, G. Hinshaw, A. Kogut, E. Komatsu, et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap*) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2):14, 2011.

[25] F. Villegas. La energía oscura en la cosmología estándar. *Revista de Investigación de Física*, 24(2):35–39, 2021.

[26] J. Hartle. *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity*. Adisson Wesley, 2003.

[27] S. Carroll. The cosmological constant. *Living reviews in relativity*, 4(1):1–56, 2001.

[28] S. Nobbenhuis. The cosmological constant problem, an inspiration for new physics. *arXiv preprint gr-qc/0609011*, 2006.

[29] J. Zorzano. Ii-desplazamiento hacia el rojo (redshift). *Ley de Hubble y expansión del Universo. Inf. téc. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid. URL: http://faii. etsii. upm. es/dfaii/Docencia/Material % 20Docente/Introduccci % C3 % B3n % 20a % 20la % 20Cosmolog % C3 % ADa % 20I/II-Ley % 20de % 20Hubble % 20v1. pdf*, 2008.

[30] M. Churampi and F. Villegas. La constante cosmológica y la energia oscura. *Revista de Investigación de Física*, 26(2):12–16, 2023.

[31] C. Jiménez. La constante cosmológica y la reaceleración del universo. 2020.

[32] A. Einstein. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 142–152, 1917.

[33] G. Caldera and L. Ureña. Materia y energía oscuras,¿ que son? *Revista mexicana de física*, 53:17–21, 2007.

[34] A. Avelino et al. Modelos cosmológicos dominados por materia con viscosidad volumétrica para explicar la expansión acelerada del universo. 2010.

[35] C. Burgess. The cosmological constant problem: why it's hard to get dark energy from micro-physics. *100e Ecole d'Ete de Physique: Post-Planck Cosmology*, pages 149–197, 2015.

[36] C. Vásconez. Modelos cosmológics con constante cosmológica distinta de cero. B.S. thesis, QUITO/EPN/2007, 2007.

[37] M. Rébulla and S. Alejandro. *Implicaciones físicas de la constante cosmológica.* PhD thesis, Universidad del Valle de Guatemala, 2008.

[38] A. Calahorrano et al. Edad del universo y la constante cosmológica destino del universo debido a una variación temporal de la constante cosmológica. B.S. thesis, Quito, 2015., 2015.

[39] A. Calahorrano and C. Marín. Edad del universo y la densidad de energía de la radiación. *ACI Avances en Ciencias e Ingenierías*, 7(2), 2015.

[40] G. Clementini and R. Gratton. The oldest stars and the age of the universe. *European Review*, 10(2):237–248, 2002.

[41] S. Seager, D. Sasselov, and D. Scott. A new calculation of the recombination epoch. *The Astrophysical Journal*, 523(1):L1, 1999.

[42] R. Durrer. The cosmic microwave background: the history of its experimental investigation and its significance for cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12):124007, 2015.

[43] W. Percival. Baryon acoustic oscillations: A cosmological ruler. *Physics Today*, 70(12): 32–38, 2017.

[44] M. Kowalski, D. Rubin, G. Aldering, R. Agostinho, A. Amadon, R. Amanullah, C. Balland, K. Barbary, G. Blanc, P. Challis, et al. Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets. *The Astrophysical Journal*, 686(2):749, 2008.

[45] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of modern physics*, 61(1):1, 1989.

[46] S. Carroll, W. Press, and E. Turner. The cosmological constant. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 30(1):499–542, 1992.

[47] R. Myrzakulov and L. Sebastiani. Bounce solutions in viscous fluid cosmology. *Astrophysics and Space Science*, 352:281–288, 2014.

[48] Ø Grøn. Viscous inflationary universe models. *Astrophysics and Space Science*, 173:191–225, 1990.