Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Físicas
Escuela Profesional de Física

Formalismo hamiltoniano de modelos inflacionarios

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Para optar el Grado Académico de Bachiller en Física

AUTOR

Martín Alejandro BRAVO GUTIERREZ

ASESOR

Dr. Teófilo VARGAS AUCCALLA

Lima, Perú

2022



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Bravo, M. (2022). *Formalismo hamiltoniano de modelos inflacionarios*. [Trabajo de investigación de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Martín Alejandro Bravo Gutierrez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	71426250
URL de ORCID	
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Teófilo Vargas Auccalla
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06532544
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9833-3887
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Fulgencio Villegas Silva
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09202973
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	José Domingo Arbañil Vela
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41345341
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Carlos Javier Solano Salinas
Tipo de documento	DNI

Número de documento de identidad	06445870
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.2.1.2. Cosmología y Gravitación
Grupo de investigación	Grupo de Física Teórica - GFT
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación y Posgrado. Programa de Promoción de Tesis de Pregrado. B20130520a-PTPGRADO
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Calle: Av. República de Venezuela 34 Latitud: -12.059658618698705 Longitud: -77.08173807658837
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020 - 2021
URL de disciplinas OCDE	Física de partículas, Campos de la Física https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.03

Firmado digitalmente por SOLANO SALINAS Carlos Javier FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 22.04.2024 12:25:03 -05:00

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE BACHILLER EN FÍSICA

Siendo las 20:00 horas de miércoles 09 de febrero del 2022, en la Sala de Sesión Virtual de la Facultad de Ciencias Físicas, bajo la Presidencia del Dr. Fulgencio Villegas Silva, el Dr. José Domingo Arbañil Vela (Miembro), el Dr. Teófilo Vargas Auccalla (Asesor), y el Dr. Carlos Javier Solano Salinas (Suplente) se dio inicio a la Sesión Pública de Sustentación de Trabajo de Investigación para optar el Grado Académico de Bachiller en Física, del egresado:

Martín Alejandro Bravo Gutierrez

El Presidente del Jurado en primer lugar dio lectura al documento formal que designa al Jurado y aprueba el acto de sustentación del Trabajo de Investigación, así como el Resumen del Expediente e invitó al citado egresado a realizar la presentación y exposición de su Trabajo de Investigación:

"Formalismo hamiltoniano de modelos inflacionarios"

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente del Jurado con el apoyo de la Unidad de Informática, invitó al egresado y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión Virtual, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado el Dr. Fulgencio Villegas Silva invitó al candidato y al público en general a pasar a la Sala de Sesión Virtual, para dar lectura al Acta de Calificación, en cuyo contenido se ha registrado la nota obtenida por el egresado, la misma que ha sido de:

17	DIECISIETE	APROBADO CON MENCIÓN HONROSA
.....	.....	.....
(NÚMERO)	(LETRAS)	(MENCIÓN)

Habiendo concluido la Sustentación del Trabajo de Investigación, el Presidente del Jurado, remitirá el Acta al Vicedecano Académico de la Facultad de Ciencias Físicas, quien la suscribirá dando fe de la realización del acto virtual de manera remota.

UNMSM
Firmado digitalmente por SOLANO SALINAS Carlos Javier FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 22.04.2024 12:25:18 -05:00

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

El Acta de Calificación será remitida al Director de la Escuela Profesional de Física quien a su vez solicitará la aprobación del Consejo de Facultad para el otorgamiento del Grado Académico de Bachiller en Física al egresado Martin Alejandro Bravo Gutierrez.

Siendo las 21:56 horas, se dio por concluido el acto académico, expidiéndose tres (03) Actas originales de la Sustentación del Trabajo de Investigación.

Ciudad Universitaria, 09 de febrero de 2022.

Dr. Fulgencio Villegas Silva
PRESIDENTE

Dr. José Domingo Arbañil Vela
MIEMBRO

Dr. Teófilo Vargas Auccalla
ASESOR

Dr. Carlos Javier Solano Salinas
SUPLENTE

UNMSM
Firmado digitalmente por VILLEGAS SILVA Fulgencio FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 16.06.2023 08:39:52 -05:00

Dr. Fulgencio Villegas Silva
VICEDECANO ACADÉMICO - FCF

Datos de la plataforma virtual institucional del acto de sustentación:

Enlace:

Unirse a la reunión Zoom

https://us06web.zoom.us/j/81937604936?pwd=aEQwRVFYTk1JN1AyRU5OU09HSXhNdz09

ID de reunión: 819 3760 4936

Código de acceso: 938317

Grabación archivada en: https://fb.watch/l74dSy7SNN/

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, Decana de América)

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
EP FÍSICA

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Teófilo Vargas Auccalla en mi condición de asesor acreditado con el Acuerdo Comité de Gestión N° 017–EPF–FCF–20 del trabajo de investigación, cuyo título es Formalismo Hamiltoniano de Modelos Inflacionarios, presentado por el estudiante Martín Alejandro Bravo Gutierrez para optar el grado de Bachiller en Física.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 8 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado correspondiente.

Lima, 8 de julio de 2024

Dr. Teófilo Vargas Auccalla
DNI: 06532544

¿Y qué vemos cuando miramos el cielo nocturno?
En la noche vemos simplemente la expansión del universo.
Galaxias y galaxias y más allá galaxias y más allá cuásares.
Y más atrás en el espacio no veríamos ni galaxias ni cuásares
sino un universo en que aún no se habría condensado nada,
un muro oscuro, antes del instante en que el universo
se volvió transparente. Y más antes
¿qué veríamos finalmente?
Cuando no había nada.
En el principio...

Ernesto Cardenal «*Cántico cósmico*»
(Nicaragua, 1925 – 2020)

Agradecimientos

Primero agradecer a mi extraordinaria familia por el invaluable apoyo que me ha brindado a lo largo de mi vida. Todo lo que soy, todo lo que he logrado y todo lo bueno que lograré no son más que el fruto, la inevitable consecuencia, de sus enseñanzas, su confianza, su comprensión, su bondad y su infinito amor. Muchas gracias por tanto.

Agradecer también a mi asesor, el Dr. Teófilo Vargas Auccalla, por la motivación y la guía que me brindó y me sigue brindando en el proceso de mi formación como físico. De igual manera agradecer a los todos los miembros del Grupo de Física Teórica (GFT) de la Facultad de Ciencias Físicas por la oportunidad de pertenecer a tan maravilloso grupo que complementó mi desarrollo académico.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por el financiamiento de este proyecto de investigación (código B20130520a) auspiciado por el Vicerrectorado de Investigación y Posgrado a través del Programa de Promoción de Trabajos de Investigación para Obtener el Grado Académico de Bachiller (Resolución Rectoral N° 015156–R–20).

Este trabajo es en memoria de Venus y Lucifer.

Martín Alejandro Bravo Gutierrez

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla el formalismo hamiltoniano de los modelos inflacionarios en los cuales el campo inflatón está no mínimamente acoplada con la gravedad por medio de una modificación de la acción de Hilbert, mostrándose en detalle la descomposición 3+1 de la acción y obteniéndose la densidad hamiltoniana y las ecuaciones dinámicas y de restricción de estos modelos.

Palabras clave: (cosmología, inflación, acoplamiento no mínimo, formalismo hamiltoniano, descomposición $3+1$).

Abstract

In the present work the Hamiltonian formalism of inflationary models in which the inflaton field is not minimally coupled with gravity by means of a modification of the Hilbert action is developed, showing in detail the $3 + 1$ decomposition of the action and obtaining the Hamiltonian density and the dynamic and constraint equations of these models.

Keywords: (cosmology, inflation, non-minimal coupling, hamiltonian formalism, $3 + 1$ decomposition).

Notación

En este trabajo se ha adoptado la convención $(-,+,+,+)$ para la signatura de la métrica del espacio-tiempo y $(+,+,+)$ para la signatura de la métrica de las hipersuperficies riemannianas.

Los índices griegos $(\alpha, \beta, \cdots)$ son usados en las componentes de los tensores definidos en el espacio-tiempo y pueden tomar los valores $\{0,1,2,3\}$; mientras que los índices latinos $(i, j, \cdots)$ son usados en las componentes de los tensores definidos en las hipersuperficies espaciales y pueden tomar los valores $\{1,2,3\}$. Se usa la convención de suma de Einstein: índices repetidos indican una suma sobre todos sus posibles valores.

En los capítulos 3 y 5 se usa ${}^{(4)}R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$, ${}^{(4)}R_{\mu\nu}$ y ${}^{(4)}R$ para referirnos al tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci de la variedad del espacio-tiempo respectivamente, mientras que se usa $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$, $R_{\mu\nu}$ y R para referirnos al tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci de las hipersuperficies respectivamente. Para describir la derivada parcial de una cantidad geométrica T se usan los símbolos $\partial_\mu T = \partial T/\partial x^\mu$; para describir la derivada covariante asociada a la métrica del espacio-tiempo usamos $\nabla_\mu T$; y si consideramos derivadas covariantes asociadas a la métrica de las hipersuperficies usamos $D_i T$.

Finalmente, en esta tesis se usan unidades geometrizadas $c = G = 1$.

Abreviaciones

GR	Relatividad General (GR, por sus siglas en inglés)
FLRW	Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker
CMB	Fondo cósmico de microndas (CMB, por sus siglas en inglés)
CDM	Materia oscura fría (CDM, por su siglas en inglés)
ADM	Arnowitt–Deser–Misner

Índice general

Agradecimientos **ii**

Resumen **iii**

Abstract **iv**

Notación **v**

Índice general **vi**

1 Introducción **1**
1.1 Antecedentes 1
1.2 Objetivos 2

2 Elementos de la Relatividad General **3**
2.1 Variedad diferencial 3
2.2 Vectores, formas lineales y tensores 4
2.3 Tensor métrico 7
2.4 Conexión 9
2.5 Derivada de Lie 11
2.6 Relatividad General 12

3 Formalismo $3+1$ de la relatividad general **15**
3.1 Hipersuperficies 15
3.2 Foliación del espacio-tiempo 16
3.3 Elementos de la geometría del espacio-tiempo en el formalismo $3+1$ 16
3.4 Descomposición $3+1$ de la Relatividad General 25

4 Cosmología moderna **29**
4.1 La métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker . . 29
4.2 Ecuaciones de campo cosmológicas 30
4.3 Constante cosmológica 32
4.4 Modelos inflacionarios 34

5 Formalismo hamiltoniano del acoplamiento no mínimo **37**

6 Conclusiones **45**

Bibliografía **46**

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

El modelo ΛCDM es el modelo cosmológico más aceptado en la actualidad por la comunidad científica, siendo consistente con casi todas las observaciones astrofísicas hechas hasta el momento [1]. Sobre el marco del principio cosmológico y la relatividad general este modelo propone que, además de la materia ordinaria, el Universo está compuesto por energía oscura, que es un tipo de energía exótica que da cabida a la expansión acelerada actual del Universo; y materia oscura fría, una clase de materia no bariónica que permite describir el comportamiento gravitatorio de algunas estructuras a grandes escalas. A pesar de sus muchas virtudes al explicar, por ejemplo, la historia térmica del Universo, la existencia y características de la radiación de fondo cósmico de microondas (CMB), la abundancia de elementos ligeros y la actual expansión acelerada del Universo; el modelo ΛCDM no es suficiente para solucionar por si solo una serie de problemas relacionados al origen de las estructuras galácticas, la existencia del monopolo magnético, la razón de la aparente planitud del Universo y el problema del horizonte [2].

El modelo inflacionario es una de las propuestas más atractivas para solucionar estos problemas fundamentales de la cosmología. Desarrollada inicialmente por Guth [3] y Starobisky [4] y posteriormente mejorada por Linde [5], la teoría inflacionaria propone que posterior a la singularidad que da origen al Universo este contenía un campo escalar, llamado inflatón, en un estado de falso vacío, el cual produjo al decaer un periodo de expansión exponencial inestable del Universo (inflación) que dio finalmente paso al proceso de recalentamiento y producción de las partículas del modelo estándar [6]. Esta expansión acelerada eliminó las posibles heterogeneidades y anisotropías que hubiesen podido haber en los instantes iniciales del Universo, generó la planitud observada hoy en día y redujo la densidad de partículas exóticas pesadas, proporcionando además el mecanismo necesario para la formación de estructuras a grandes escalas en el Universo [7-9]. El uso de campos escalares en física teórica no es nuevo: una de las piezas fundamentales del modelo estándar de partículas es el campo de Higgs, que media el mecanismo por el cual las partículas adquieren masa. El campo de Higgs es hasta la fecha el único campo escalar cuya existencia ha sido confirmada experimentalmente [10, 11] . Debido a que la naturaleza del inflatón es aún desconocida, surge la pregunta de si el campo de Higgs sería el mismo campo escalar que originó la inflación cósmica. En un principio resulta imposible una conexión entre ambos campos debido a los distintos regímenes de energía en los que trabaja cada uno [12]. Pero Bezrukov y Shaposhnikov

encontraron que es posible solventar este problema considerando una interacción entre el inflatón y el campo gravitatorio por medio de modelos de acoplamiento no mínimo [13, 14]. Así, los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo tienden un puente entre las dos teorías estándar por antonomasia de la física moderna: el modelo estándar de partículas y el modelo estándar de la cosmología.

Aunque el estudio de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo desde el formalismo lagrangiano puede resultar una primera aproximación, suele ser más conveniente una formulación hamiltoniana del problema. El formalismo hamiltoniano o ADM de la relatividad general fue desarrollado en 1959 por Arnowitt, Deser y Misner [15, 16] y permite, a diferencia del formalismo lagrangiano usual, hacer una distinción clara de las ecuaciones dinámicas que describen la evolución de los campos con respecto a las ecuaciones de restricción que limitan las condiciones iniciales del modelo estudiado. Mas para su desarrollo el formalismo hamiltoniano requiere de una coordenada temporal global, por lo que es necesario realizar una separación explícita entre el tiempo y las coordenadas espaciales en un proceso denominado descomposición 3+1 [17]. Este método consiste en la foliación del espacio-tiempo en una familia de hipersuperficies espaciales parametrizadas por una variable temporal. El formalismo ADM es fundamental en muchos avances de gravedad canónica cuántica, como la ecuación de Wheeler-DeWitt [18, 19]; además de tener importantes aplicaciones en el área de la relatividad numérica, al permitir reescribir las ecuaciones de campo de Einstein como un problema de ecuaciones diferenciales sujetas a condiciones iniciales [20].

1.2. Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo de investigación es el desarrollo del formalismo hamiltoniano de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo, hallándose las respectivas variables dinámicas y construyéndose los momentos conjugados asociados a ellas. Además, se calcula la densidad hamiltoniana y se deducen las ecuaciones dinámicas y de restricción de estos modelos.

- En el Capítulo 2 se exponen los principales conceptos de geometría diferencial usados en la teoría de la relatividad general para la definición del espacio-tiempo y el desarrollo de las ecuaciones de campo de Einstein.
- En el Capítulo 3 se muestran los principales conceptos de la descomposición 3+1 del espacio-tiempo, haciendo énfasis en las características de las variables ADM.
- En el Capítulo 4 se presentan las ideas fundamentales de la cosmología moderna y de los modelos inflacionarios.
- Finalmente, en el capítulo 5 se desarrolla el formalismo hamiltoniano de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo.

Capítulo 2

Elementos de la Relatividad General

La relatividad general es la teoría de la gravedad desarrollada por Albert Einstein en 1915. Esta teoría implica un cambio de paradigma al entender la interacción gravitatoria no ya como una fuerza de atracción entre cuerpos masivos sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, que pasó de ser el escenario pasivo donde se desarrollan los fenómenos físicos, a ser un ente dinámico que interactúa con los campos de materia presentes en el mismo. Dicha interacción está mediada por las ecuaciones de campo de Einstein, cuya solución es el tensor métrico, que es una generalización del potencial gravitacional de la teoría newtoniana y codifica la información sobre la geometría del espacio-tiempo y su estructura causal. En este capítulo daremos un desarrollo de los principales conceptos de geometría diferencial en los que descansa la relatividad general, para lo cual se ha usado como principal fuente el trabajo [21].

2.1. Variedad diferencial

Una ***variedad topológica*** n***-dimensional*** es un espacio topológico $\mathcal{M}$ que puede ser localmente mapeado por medio de un homeomorfismo a $\mathbb{R}^n$. Esto quiere decir que para todo conjunto abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$ existe un mapa x que admite una inversa, es continua y su inversa es continua., tal que

$$x : \mathcal{U} \in \mathcal{M} \longrightarrow x(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}^n.$$

La dupla $(\mathcal{U}, x)$ recibe el nombre de ***carta*** n***-dimensional del espacio topológico*** $\mathcal{M}$, donde $n < \infty$.

Sean $(\mathcal{U}_1, x_1)$ y $(\mathcal{U}_2, x_2)$ un par de cartas con $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$. El ***mapa de transición entre cartas*** es el mapa formado por la composición $x_2 \circ x_1^{-1}$:

$$\begin{aligned} x_2 \circ x_1^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x_1(\mathcal{U}_1) &\longmapsto \ x_2(\mathcal{U}_2). \end{aligned}$$

Un ***atlas*** de $\mathcal{M}$ es el conjunto de cartas $(\mathcal{U}_\alpha, x_\alpha)$ tal que $\mathcal{M}$ es cubierto por este conjunto, $\mathcal{M} = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$, y todo mapa de transición entre cartas $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ es una función C^∞ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Un ***atlas maximal*** es aquel que no es contenido por ningún otro atlas.

Una ***variedad diferencial*** n***-dimensional*** $\mathcal{M}$ es una variedad topológica n-dimensional equipada con una estructura diferencial dada por un atlas maximal.

2.2. Vectores, formas lineales y tensores

Para el completo estudio de la geometría del espacio-tiempo no basta con definirlo solamente como una variedad diferencial, es además imperativo poder trabajar con vectores, formas lineales y tensores definidos sobre el mismo. En el caso particular de una variedad plana podemos equiparla completamente de una estructura de espacio vectorial. Pero si la variedad tiene curvatura, el concepto usual de vectores como flechas que unen dos puntos o como segmentos parametrizados de una recta no puede mantenerse. Podríamos aún así pensar en los vectores como una medida del cambio de un punto a lo largo de una curva, aunque dicha interpretación requeriría considerar que la variedad que estamos estudiando está embebida en una variedad plana de dimensión superior. Si queremos construir el concepto de vector (y de espacio vectorial) sobre una variedad con curvatura sin tener que recurrir a artificios externos a la misma variedad, es necesario elevar nuestro concepto de vector al de un operador diferencial que actúa sobre campos escalares definidos en la variedad[1] [22].

2.2.1. Vectores en una variedad diferencial

Una curva en una variedad diferencial $\mathcal{M}$ es un mapa σ que lleva elementos de la recta real $\mathbb{R}$ a $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ \mathbb{R} \ &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \lambda \ &\longmapsto \ p = \sigma(\lambda). \end{aligned}$$

Un ***campo escalar*** definido en la variedad $\mathcal{M}$ es un mapa que asocia a cada punto de $\mathcal{M}$ un número real:

$$f \ : \mathcal{M} \ \longmapsto \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Se asume que todo campo escalar en $\mathcal{M}$ es diferenciable en el sentido de que dada cualquier carta $(\mathcal{U}, x)$ del atlas maximal de $\mathcal{M}$, el mapa $f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \ \longmapsto \mathbb{R}$ es un mapa C^∞. El conjunto de todos los campos escalares diferenciables definidos en $\mathcal{M}$ se denota como $C^\infty(\mathcal{M})$.

Dado un punto $p \ = \sigma(\lambda_0)$, se define al ***vector tangente a la curva*** σ ***en el punto*** p, $v_{\sigma,\ p}$, como el mapa:

$$\begin{aligned} v_{\sigma,\ p} \ : \ C^\infty(\mathcal{M}) \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \ &\longmapsto v_{\sigma,\ p}(f) = \left. \frac{d}{d\lambda} \ f(\sigma(\lambda)) \right|_{\lambda=\lambda_0}. \end{aligned}$$

Para cada punto $p \in \mathcal{M}$, se define el espacio vectorial ***espacio tangente de*** M ***en el punto*** $\boldsymbol{p}$, $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$, como el conjunto de todos los vectores tangentes en p:

$$\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) = \{ v_{\sigma,\ p} \ / \ \sigma \text{ es una curva suave} \}.$$

[1] De esta forma, el vector hace referencia solo a propiedades intrínsecas de la variedad, en este caso, un campo escalar definido sobre ella.

De ahora en adelante denotaremos simplemente como $\boldsymbol{v}$ para referirnos a un vector tangente a una curva en un punto p. Considerando una carta $(\mathcal{U}, x)$ del atlas maximal de $\mathcal{M}$ y una curva $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, podemos expresar al vector tangente $\boldsymbol{v}$ en el punto p como:

$$\boldsymbol{v}(f) = \frac{d}{d\lambda}\ f(\sigma(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda} f(x^{-1}(x(\sigma))) = \left(\frac{\partial\ f(x^{-1})}{\partial\ x^{\mu}(\sigma)}\right)\ \left(\frac{d\ x^{\mu}(\sigma)}{d\lambda}\right).$$

Esta expresión se acostumbra a escribir con una notación más compacta:

$$\boldsymbol{v}(f) = v^{\mu}\ \boldsymbol{\partial}_{\mu}(f), \tag{2.2}$$

donde $v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$ y $\boldsymbol{\partial}_{\mu}(f) = \frac{\partial\ f(x^{-1})}{\partial\ x^{\mu}(\sigma)}$. Es necesario recalcar que $\boldsymbol{\partial}_{\mu}(f)$ no representa realmente a una derivada parcial puesto que f es un mapa cuyo dominio es $\mathcal{M}$.

La identidad (2.2) se cumple para todo campo escalar $f \in C^{\infty}$ por lo que podemos representar al vector $\boldsymbol{v}$ usando la carta $(\mathcal{U}, x)$ como el mapa:

$$\boldsymbol{v} = v^{\mu} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\mu}. \tag{2.3}$$

Dado que todo vector tangente en el punto p puede ser expresado como una combinación lineal de la forma (2.3), entonces podemos concluir que el conjunto de vectores $[\boldsymbol{\partial}_{\mu}]_{\mu=0.\cdots,n-1}$, forma una base de $\mathcal{T}_p(\mathcal{U})$.

2.2.2. Formas lineales en una variedad diferencial

Como $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ es un espacio vectorial, entonces es posible construir un espacio dual asociado, $\mathcal{T}_p^*(\mathcal{M})$, llamado ***espacio contangente de $\mathcal{M}$ en el punto*** p, que será el conjunto de todas las aplicaciones lineales que mapean vectores de $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ a los números reales. Así, dado un punto $p \in \mathcal{M}$, una forma lineal será la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} : \mathcal{T}_p^*(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \langle \boldsymbol{\omega} | \boldsymbol{v} \rangle , \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación de Dirac para escribir la acción de una forma lineal sobre un vector.

Sea f un campo escalar de $\mathcal{M}$. Para todo punto $p \in \mathcal{M}$, se define el gradiente de f como la forma lineal $\boldsymbol{\nabla} f$ que mapea:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \langle \boldsymbol{\nabla} f | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}(f) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es decir, la aplicación de $\boldsymbol{\nabla} f$ sobre un vector tangente $\boldsymbol{v}$ es igual a la aplicación de $\boldsymbol{v}$ sobre el campo escalar f. Puesto que el gradiente de f es una forma lineal, entonces $\boldsymbol{\nabla} f \in \mathcal{T}_p^*(\mathcal{M})$.

Dada una carta $(\mathcal{U}, x)$, podemos tratar a las coordenadas (x^μ) como campos escalares debido a que asocian un número real a cada punto p de la variedad $\mathcal{M}$. El gradiente de los campos $[x^\mu]$ lo denotaremos como $\boldsymbol{d}x^\mu$. Aplicando $\boldsymbol{d}x^\mu$ a la base $[\boldsymbol{\partial}_\alpha]$ de $\mathcal{T}_p(\mathcal{U})$ obtenemos:

$$\langle \boldsymbol{d}x^\mu | \boldsymbol{\partial}_\alpha \rangle = \boldsymbol{\partial}_\alpha(x^\mu) = \delta^\mu_\alpha,$$

por lo que, dada la construcción usual de la base de un espacio dual, el conjunto $[\boldsymbol{d}x^\mu]$ es una base del espacio cotangente $\mathcal{T}^*_p(\mathcal{U})$. De esta manera, dada una carta $(\mathcal{U}, x)$, toda forma lineal $\boldsymbol{\omega}$ puede ser expresada como la combinación lineal:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_\mu \cdot \boldsymbol{d}x^\mu. \tag{2.4}$$

2.2.3. Tensores en una variedad diferencial

Los tensores son generalizaciones de todo lo visto anteriormente. Para un punto $p \in \mathcal{M}$, un tensor $\boldsymbol{T}$ de rango (r, s) es la aplicación multilineal que mapea r formas lineales de $\mathcal{T}^*_p\mathcal{M}$ y s vectores de $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ a $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{T} : \underbrace{\mathcal{T}^*_p(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathcal{T}^*_p(\mathcal{M})}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M})}_{s \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_r, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s) \longmapsto \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_r, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s) \in \mathbb{R}.$$

Como consecuencia, dada una carta $(\mathcal{U}, x)$, un tensor $\boldsymbol{T}$ de rango (r, s) puede ser expresado como una combinación lineal multi-indexada de la base del espacio tangente $\mathcal{T}_p(\mathcal{U})$ y del espacio cotangente $\mathcal{T}^*_p(\mathcal{U})$:

$$\boldsymbol{T} = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s} \; \boldsymbol{\partial}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\partial}_{\alpha_r} \otimes \boldsymbol{d}x^{\beta^1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{d}x^{\beta^s},$$

donde $T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s}$ son las componentes del tensor $\boldsymbol{T}$ con respecto a las bases de $\mathcal{T}_p(\mathcal{U})$ y $\mathcal{T}^*_p(\mathcal{U})$. Estas componentes se calculan evaluando al tensor con respecto a $[\boldsymbol{\partial}_\mu]$ y $[\boldsymbol{d}x^\mu]$:

$$T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\partial}_{\alpha_1}, \cdots, \boldsymbol{\partial}_{\alpha_r}, \boldsymbol{d}x^{\beta^1}, \cdots, \boldsymbol{d}x^{\beta^s}) \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Una propiedad importante de los tensores es el de simetría y antisimetría. Un tensor $\boldsymbol{T}$ de tipo $(0, 2)$ es llamado **simétrico** si, para todo par de vectores $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{T}_p\mathcal{M}$, se cumple que:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \,. \tag{2.6}$$

Un tensor $\boldsymbol{T}$ de tipo $(0, 2)$ es llamado **antisimétrico** si, para todo par de vectores $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{T}_p\mathcal{M}$, se cumple que:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \,. \tag{2.7}$$

2.2.4. Campos en una variedad

Un ***campo vectorial*** $\boldsymbol{v}$ en la variedad diferencial $\mathcal{M}$ asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un vector tangente a una curva en el punto p. Dado un campo vectorial $\boldsymbol{v}$, para cualquier campo escalar f se tiene que la expresión $\boldsymbol{v}(f)$ actúa como un campo escalar, $\boldsymbol{v}(f) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, por lo que el campo vectorial $\boldsymbol{v}$ puede ser descrito como el mapa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} : C^\infty &\longrightarrow C^\infty \\ f &\longmapsto \boldsymbol{v}(f)\,. \end{aligned}$$

Al conjunto de todos los campos vectoriales en $\mathcal{M}$ lo denotamos como $\mathcal{T}\mathcal{M}$[2].

Un ***campo de covectores*** $\boldsymbol{\omega}$ asigna a cada punto de la variedad una forma lineal ω pero también puede ser interpretado como un mapa que actúa sobre campos vectoriales $\boldsymbol{v}$ tal que $\boldsymbol{\omega} : \mathcal{T}\mathcal{M} \longrightarrow C^\infty$. Al conjunto de todos los campos de covectores lo denotamos como $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$.

Un ***campo tensorial*** $\boldsymbol{T}$ ***tipo*** (r, s) asigna a cada punto de la variedad un tensor $\boldsymbol{T}$ tipo (r, s). También puede ser interpretado como un mapa C^∞-multilineal que actúa sobre r campos vectoriales y s campos de covectores:

$$\boldsymbol{T} : \underbrace{\mathcal{T}^*\mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{T}^*\mathcal{M}}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{\mathcal{T}\mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{T}\mathcal{M}}_{s \text{ veces}} \longrightarrow C^\infty\,.$$

2.3. Tensor métrico

El tensor métrico $\boldsymbol{g}$ es un tensor campo tensorial tipo $(0, 2)$ que en cada punto $p \in \mathcal{M}$, transforma dos vectores en el número real dado por su producto interno:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &\longmapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\,. \end{aligned}$$

El tensor métrico debe satisfacer las siguientes propiedades:

- El tensor métrico $\boldsymbol{g}$ es un tensor simétrico: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$.
- El tensor métrico $\boldsymbol{g}$ es un tensor no degenerativo: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq 0$ y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ si y solo si $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0\ , \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$.

Como se ha mostrado en (2.5), dada una carta $(\mathcal{U}, x)$, podemos usar la base $[\boldsymbol{\partial}_\mu] \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ para hallar las componentes $g_{\alpha\beta}$ del tensor métrico:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_\alpha, \boldsymbol{\partial}_\beta) = \boldsymbol{\partial}_\alpha \cdot \boldsymbol{\partial}_\beta = g_{\alpha\beta}\,.$$

[2]En la mayoría de trabajos suele utilizarse la expresión $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ para referirse al fibrado tangente de $\mathcal{M}$. Pero como en esta tesis no se usa dicha noción, hemos expropiado este término sin riesgo a futuros malentendidos.

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(u^\alpha \boldsymbol{\partial}_\alpha, v^\beta \boldsymbol{\partial}_\beta) = u^\alpha v^\beta \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_\alpha, \boldsymbol{\partial}_\beta) = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \,. \tag{2.8}$$

Como el tenso métrico es un tensor tipo (0,2), podemos representar sus componentes en un arreglo matricial de orden $(m \times m)$, $m = n - 1$:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & \cdots & g_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m0} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} . \tag{2.9}$$

Por otro lado, debido a que el tensor métrico es no degenerativo, esta matriz es invertible; esto es, existe $[g_{\alpha\beta}]^{-1} = g^{\alpha\beta}$:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^{00} & \cdots & g^{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{m0} & \cdots & g^{mm} \end{pmatrix} . \tag{2.10}$$

tal que:

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta \,, \tag{2.11}$$

siendo δ^α_β el delta Kronecker, cuyos valores son:

$$\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \end{cases} . \tag{2.12}$$

La métrica nos permite inducir un isomorfismo (llamado isomorfismo musical) entre $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ y $\mathcal{T}^*_p(\mathcal{M})$. Si aplicamos al tensor g solamente al vector $\boldsymbol{u} \in \mathcal{T}_p\mathcal{M}$ obtendremos una forma lineal $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \cdot\,)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \cdot\,) : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \,. \end{aligned}$$

Puesto que la forma lineal $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \cdot\,)$ es obtenida a partir del vector $\boldsymbol{u}$, usaremos la notación $\hat{\boldsymbol{u}}$ para referirnos a ella. Las componentes de $\hat{\boldsymbol{u}}$, que denotaremos como u_α, estarán dadas por:

$$u_\alpha = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\partial}_\alpha) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\partial}_\alpha) = g_{\beta\nu} u^\beta (\boldsymbol{\partial}_\alpha)^\beta = g_{\beta\nu} u^\beta \delta^\nu_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta \,.$$

Esta operación es llamada **bajada de índices**. Como $\boldsymbol{g}$ es no degenerativo, podemos invertir esta relación:

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta \,.$$

Esta operación es llamada **subida de índices**. De esta manera podemos reescribir (2.8) como:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = u_\beta v^\beta \,.$$

Con estas ideas podemos generalizar la operación de bajada y subida de índices a tensores de rango arbitrario:

$$T^{\mu}_{\ \nu} = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}, \qquad T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}T_{\alpha\beta}, \qquad T_{\sigma\mu\nu\rho} = g_{\sigma\lambda}T^{\lambda}_{\ \mu\nu\rho}\,.$$

Una propiedad importante del tensor métrico es su **signatura**. Para toda base de $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$, existe siempre el mismo número s de componentes negativas y el mismo número $n-s$ de componentes positivas de la matriz $g_{\alpha\beta}$ cuando es expresada en forma diagonal. La signatura se expresa como:

$$sign\ \boldsymbol{g} = (\underbrace{-,\cdots,-}_{s\ \text{veces}},\underbrace{+,\cdots,+}_{n-s\ \text{veces}})\,. \tag{2.13}$$

Si $s = 0$, $\boldsymbol{g}$ es llamada **métrica riemanniana** y $\mathcal{M}$ es llamada **variedad riemanniana**. Si $s = 1$, $\boldsymbol{g}$ es llamada **métrica lorentziana** y $\mathcal{M}$ es llamada **variedad lorentziana**.

Podemos definir el vector de desplazamiento infinitesimal de p a q como el vector $\bar{\boldsymbol{dl}} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ cuya acción sobre un campo escalar $f \in C^\infty$ es:

$$\bar{\boldsymbol{dl}}(f) = \nabla f|_{p\to q} = f(q) - f(p) \tag{2.14}$$

Dada una carta $(\mathcal{U}, x)$, podemos expresar al vector desplazamiento infinetsimal como:

$$\bar{\boldsymbol{dl}}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}dx^\alpha = dx^\alpha \boldsymbol{\partial}_\alpha(f)\,. \tag{2.15}$$

Puesto que f es un campo escalar arbitrario podemos obviarlo y escribir la relación anterior simplemente como:

$$\bar{\boldsymbol{dl}} = dx^\alpha \boldsymbol{\partial}_\alpha\,. \tag{2.16}$$

Esto quiere decir que las componentes del vector $\bar{\boldsymbol{dl}}$ con respecto a las coordenadas x^α no son nada más que el incremento infinitesimal dx^α. Aplicando el tensor métrico sobre este vector obtenemos:

$$ds^2 = \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{dl}}, \bar{\boldsymbol{dl}}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_\alpha, \boldsymbol{\partial}_\beta)dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta\,. \tag{2.17}$$

Esta expresión es conocida como el **elemento de línea** y es usada comúnmente para definir al tensor métrico en relatividad general.

2.4. Conexión

La ***conexión*** $\boldsymbol{\nabla}$ en una variedad diferencial $\mathcal{M}$ es un mapa que actúa sobre un par de campos vectoriales y retorna un campo vectorial:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} : \mathcal{T}(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M})\\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &\longmapsto \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}\,,\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ es denominada **derivada covariante de $\boldsymbol{v}$ a lo largo de $\boldsymbol{u}$**.

Para que el operador $\boldsymbol{\nabla}$ sea una conexión de $\mathcal{M}$ debe satisfacer las siguientes propiedades:

- Cuando se aplica sobre campos escalares debe reducirse a la aplicación del vector sobre dicho campo.

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} f = \boldsymbol{v}(f);\ \forall\ f \in C^{\infty}\,. \tag{2.18}$$

- Es lineal sobre los campos vectoriales. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{S}$ campos vectoriales, entonces

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}\,. \tag{2.19}$$

- Obedece la regla de Leibnitz.

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{T});\ \forall\ f \in C^{\infty}\,. \tag{2.20}$$

Consideremos la aplicación del operador $\boldsymbol{\nabla}$ sobre un par de campos vectoriales arbitrarios $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$. Dada una carta $(\mathcal{U},x)$, podemos expandir $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$ como una combinación lineal de $[\boldsymbol{\partial}_\mu]$, que en este contexto son los campos vectoriales que en el punto $p\in\mathcal{U}$ dan la base vectorial de $\mathcal{T}_p(\mathcal{U})$[3]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\nabla}_{v^\mu\boldsymbol{\partial}_\mu}(u^\nu\boldsymbol{\partial}_\nu)\,,\\ &= v^\mu(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\partial}_\mu}u^\nu)\boldsymbol{\partial}_\nu + v^\mu u^\nu\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\partial}_\mu}(\boldsymbol{\partial}_\nu)\,.\end{aligned}$$

El término $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\partial}_\mu}(\boldsymbol{\partial}_\nu)$ es también un campo vectorial, por lo que puede ser expresado por medio de una combinación lineal:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\partial}_\mu}\boldsymbol{\partial}_\nu = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\boldsymbol{\partial}_\alpha\,.$$

donde los coeficientes de dicha expansión, $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, son llamados **coeficientes de la conexión**. Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} &= v^\mu\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}\boldsymbol{\partial}_\nu + v^\mu u^\nu\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\boldsymbol{\partial}_\alpha\,,\\ &= \left(v^\mu\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} + v^\mu u^\nu\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)\boldsymbol{\partial}_\alpha\,,\end{aligned}$$

por lo que las componentes de la derivada covariante de $\boldsymbol{u}$ a lo largo de $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$, vienen dadas por:

$$(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u})^\alpha = v^\mu\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} + v^\mu u^\nu\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,.$$

Sea $\boldsymbol{v}\in\mathcal{T}(\mathcal{M})$, se define la derivada covariante de $\boldsymbol{v}$ como el campo tensorial tipo $(1,1)$, $\boldsymbol{\nabla v}$, cuyas componentes respecto a la carta $(\mathcal{U},x)$ están dadas por

$$(\boldsymbol{\nabla v})^\alpha_\beta = \nabla_\beta v^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\beta}v^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}v^\mu\,.$$

[3] En general, no es posible encontrar un conjunto de campos vectoriales definidos globalmente sobre $\mathcal{M}$ con los que podamos expresar cualquier campo vectorial como una combinación lineal de ellos debido a que $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ no es un espacio vectorial per se sino un módulo. Pero sí se puede hacer esta expansión considerando una región local de la variedad, $\mathcal{U}\in\mathcal{M}$.

Se puede extender la derivada covariante a un campo tensorial $\boldsymbol{T}$ tipo (r, s), obteniéndose el campo tensorial $\boldsymbol{\nabla T}$ tipo (r, s + 1). Las componentes de este este campo tensorial respecto a la carta $(\mathcal{U}, x)$ están dadas por:

$$(\boldsymbol{\nabla T})^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s\gamma} = \nabla_\gamma T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_s} + \sum_{i=1}^{k} \Gamma^{\alpha_i}_{\sigma\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\sigma\alpha_{i+1}\cdots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_s} - \sum_{i=1}^{s} \Gamma^{\sigma}_{\beta_i\gamma} T^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_{i-1}\sigma\beta_{i+1}\cdots\beta_s} .$$

2.4.1. Conexión de Levi-Civita

Si a la variedad diferencial $\mathcal{M}$ la equipamos de una conexión que cumpla con las siguientes propiedades:

- ∇ es **libre de torsión**, es decir, para todo campo escalar f, $\nabla\nabla f$ es un campo bilineal simétrico cuyas componentes son:
$$\nabla_\alpha \nabla_\beta f = \nabla_\beta \nabla_\alpha f . \tag{2.21}$$
- La derivada covariante del tensor métrico es idénticamente nulo:
$$\boldsymbol{\nabla g} = \boldsymbol{0} . \tag{2.22}$$

En este caso la conexión es llamada **conexión de Levi-Civita asociada a $\boldsymbol{g}$**. Las componentes $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ reciben en este caso el nombre de **símbolos de Christoffel de segunda especie**, las cuales vienen expresados en función de las componentes de la métrica $\boldsymbol{g}$ y sus primeras derivadas parciales por medio de:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) . \tag{2.23}$$

El teorema fundamental de la geometría riemanniana establece que la conexión de Levi-Civita es la única conexión que cumple con las dos condiciones antes mencionadas. De ahora en adelante asumiremos siempre que $\boldsymbol{\nabla}$ es una conexión de Levi-Civita.

2.5. Derivada de Lie

La derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial $\boldsymbol{v}$ es una generalización de la derivada direccional a una variedad diferencial equipada con una conexión $\boldsymbol{\nabla}$. Su aplicación sobre un campo escalar es:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} = v^\mu \nabla_\mu \phi = v^\mu \partial_\mu \phi . \tag{2.24}$$

Su aplicación sobre un campo vectorial $\boldsymbol{u}$ es:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} u^\nu = v^\mu \nabla_\mu v^\nu - u^\mu \nabla_\mu v^\nu . \tag{2.25}$$

Su aplicación sobre una 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ es:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} \omega_\nu = v^\mu \nabla_\mu \omega_\nu + \omega_\mu \nabla_\nu v^\mu . \tag{2.26}$$

A partir de aquí, es posible generalizar la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial a tensores de rango arbitrario.

2.6. Relatividad General

La relatividad general es la teoría de la gravitación de Einstein. Matemáticamente se desarrolla utilizando los conceptos de geometría diferencial y describe la interacción gravitatoria en términos de la curvatura del espacio-tiempo. Se sustenta en los siguientes postulados [23]:

1. *El espacio-tiempo es una variedad diferencial 4-dimensional $\mathcal{M}$ que está equipada con una métrica lorentziana $\boldsymbol{g}$ y una conexión $\boldsymbol{\nabla}$ libre de torsión*[4]

Al desarrollar el concepto de espacio-tiempo de esta manera podemos construir un tensor definido sobre la variedad $\mathcal{M}$ que nos de información sobre su curvatura intrínseca. Dicho tensor es llamado tensor de curvatura de Riemann, $\boldsymbol{Riem}$, y está expresado por medio de la identidad de Ricci:

$$\forall\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{T}(\mathcal{M}), \quad (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) v^\gamma = R^\gamma_{\mu\alpha\beta} v^\mu \,. \tag{2.27}$$

De esta identidad se puede interpretar al tensor de Riemann como la medida de la no conmutatividad de dos derivadas covariantes sucesivas.

El tensor de Riemann es el único indicador de la curvatura del espacio-tiempo: si todas sus componentes son idénticamente nulas, $R^\gamma_{\mu\alpha\beta} = 0$, entonces el espacio-tiempo es plano, lo que corresponde al caso de Minkowski; caso contrario, tiene algún tipo de curvatura que afecta las geodésicas de las partículas masivas y fotones. En base a (2.27) las componentes del tensor de Riemann se pueden expresar directamente como:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \,, \tag{2.28}$$

con Γ donde, al ser $\boldsymbol{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de $\mathcal{M}$, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ está dado por (2.23). De su definición es posible demostrar que el tensor de Riemann tiene las siguientes propiedades:

- Antisimetría respecto a los primeros dos índices:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \,. \tag{2.29}$$

- Antisimetría respecto a los últimos dos índices:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \,. \tag{2.30}$$

- Simetría respecto al primer y último par de índices:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \,. \tag{2.31}$$

[4] Además, el espacio-tiempo es un espacio de Haudorff y tiene una orientación temporal.

La contracción del tensor de Riemann con respecto al primer y tercer índice nos da otro tensor importante: el tensor de Ricci, $\boldsymbol{R}$:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}\,. \tag{2.32}$$

La contracción del tensor de Ricci genera el escalar de Ricci, R:

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\,. \tag{2.33}$$

Estos tensores guardan toda la información sobre la curvatura intrínseca del espacio-tiempo.

2. *Existe un tensor simétrico* $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\phi) = T_{\beta\alpha}$ *que es función de los campos de materia* ϕ *y sus derivadas, tal que:*

   - $T_{\alpha\beta} = 0$ *si y solo si* $\phi_i = 0$ *para todo* i *sobre* $\mathcal{M}$.
   - $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$.

Esta última propiedad está relacionada a la conservación de la energía y el momento en la relatividad general.

3. *La métrica definida sobre la variedad de espacio-tiempo está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein:*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}\,. \tag{2.34}$$

donde $G_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Ricci y R es el escalar de Ricci. $T_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de energía-momento y $\kappa = 8\pi G/c^4$, siendo G la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz en el vacío. Como se puede observar de la simetría de los tensores involucrados, (2.34) contiene 10 ecuaciones independientes. Estas ecuaciones son escritas muchas veces en forma equivalente como:

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)\,, \tag{2.35}$$

donde $T = T^{\mu}_{\mu}$. Las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser deducidas aplicando el principio variacional respecto a la métrica a la acción:

$$S = \frac{1}{2\kappa}S_{EH} + S_m\,, \tag{2.36}$$

donde S_{EH} es la acción de Einstein-Hilbert, la cual es una función de la métrica y de sus primeras y segundas derivadas; y está dado por:

$$S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\;R\;\,, \tag{2.37}$$

siendo g el determinante de la matriz de las componentes del tensor métrico con respecto a un sistema coordenado $[x^\alpha]$:

$$g = \det(g_{\alpha\beta})\,. \tag{2.38}$$

El término S_m corresponde a la acción que codifica a los campos de materia. A partir de este término se calcula el tensor de energía-momento de los campos no gravitacionales como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{2.39}$$

Un aspecto fundamental de las ecuaciones de campo subyace en que el tensor de Einstein, $\boldsymbol{G}$, cumple con una propiedad llamada identidad contraida de Bianchi, la cual establece que su divergencia es idénticamente nula:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{2.40}$$

En forma extensa esta identidad toma la forma:

$$\partial_0 G^{0\nu} + \partial_k G^{k\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} G^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} G^{\mu\alpha} = 0 \tag{2.41}$$

Una rápida inspección de (2.41) muestra que los últimos tres términos pueden contener a lo más segundas derivadas temporales de la métrica por lo que el primer término también debe contener a lo más segundas derivadas temporales. Pero como $\partial_0 G^{0\nu}$ ya contiene una derivada temporal, las componentes $G^{0\nu}$ del tensor de Einstein pueden contener como máximo sólo primeras derivadas temporales de la métrica. Debido a que las ecuaciones de campo son ecuaciones de segundo orden, esto implica que cuatro de las diez ecuaciones de Einstein no describen la dinámica de los campos gravitatorios, sino que son ecuaciones que existen como restricciones de las condiciones iniciales del sistema, mientras que las seis ecuaciones restantes serán ecuaciones de evolución.

El problema que surge con la ecuación (2.34) es que no expresa de forma explícita estos resultados, por lo que para poder analizar la naturaleza dinámica de la relatividad general es necesario reescribirla utilizando un mecanismo conocido como descomposición $3+1$, el cual será descrito en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Formalismo $3+1$ de la relatividad general

El formalismo $3+1$ es un mecanismo por el cual se genera una separación explicita del espacio-tiempo (descrito como una variedad diferencial equipada con una métrica lorentziana) en una familia de hipersuperficies espaciales (subvariedades equipadas con una métrica riemanniana) parametrizadas por una coordenada temporal global. Hay muchas razones para describir la física de la relatividad general por medio de este formalismo: permite describir las ecuaciones de campo de Einstein como un problema de Cauchy sujeto a condiciones iniciales; es el mecanismo más utilizado para una aproximación a la relatividad numérica; además de ser fundamental en avances en gravedad canónica.

El desarrollo del formalismo $3+1$ presentado a continuación está basado en los trabajos [20], [17] y [24].

3.1. Hipersuperficies

Dada una variedad diferencial 4-dimensional $\mathcal{M}$, una hipersuperficie Σ es una variedad diferencial 3-dimensional que está contenida en $\mathcal{M}$. Es especificada como el conjunto de puntos p de $\mathcal{M}$ que al ser evaluados por un campo escalar t dan la misma constante $\hat{t} \in \mathbb{R}$:

$$\Sigma = \{p \in \mathcal{M} / t(p) = \hat{t} \in \mathbb{R}\},$$

De esta forma, si se considera que el campo escalar t es un parámetro temporal definido sobre toda la variedad $\mathcal{M}$, entonces se puede interpretar dentro del marco de la relatividad general que una hipersuperficie es el conjunto de puntos del espacio-tiempo para los cuales un observador encontraría fenómenos simultáneos. En tanto estas hipersuperficies son variedades diferenciales 3-dimensionales es posible equiparlas de una métrica, $\boldsymbol{\gamma}$, por lo que se pueden clasificar en tres tipos:

- **Hipersuperficies tipo espacio:** Tienen una métrica Riemanniana, es decir, tiene signatura $(+,+,+)$.
- **Hipersuperficies tipo tiempo:** Tienen una métrica Lorentziana, es decir, tiene signatura $(-,+,+)$.
- **Hipersuperficies nulas:** Tienen una métrica degenerada, es decir, tiene signatura $(0,+,+)$.

Aunque muchas de las propiedades que se van a desarrollar en este capítulo se cumplen en general para cualquier hipersuperficie cuya métrica no sea degenerada, se asumirá de ahora en adelante que toda hipersuperficie Σ es de tipo espacio.

3.2. Foliación del espacio-tiempo

Una foliación del espacio-tiempo consiste en su descomposición en una familia de hipersuperficies parametrizadas por un campo escalar t que actúa globalmente sobre $\mathcal{M}$:

$$\forall \hat{t} \in \mathbb{R}, \qquad \Sigma_t = \left\{ p \in \mathcal{M} \,/\, t(p) = \hat{t} \right\} ,$$

donde t es un campo escalar regular. Esto significa que el gradiente $\boldsymbol{\nabla} t$ no se anula en ningún punto de $\mathcal{M}$, por lo que las hipersuperficies no se intersectan entre sí:

$$\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \{\varnothing\} ,$$

Lo importante de la foliación es que cubre completamente toda la variedad $\mathcal{M}$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i = \mathcal{M} .$$

A pesar de que dicha foliación es necesaria para el desarrollo del formalismo hamiltoniano de la relatividad general, no es posible asumir de entrada que todos los espacios-tiempo admiten una descomposición de estas características. Solo aquellos que cumplan con ciertas condiciones en su estructura causal pueden ser foliados mediante lo descrito anteriormente. Dichos espacios-tiempo son llamados ***espacios-tiempo globalmente hiperbólicos***. La topología de un espacio-tiempo globalmente hiperbólico se puede expresar siempre como:

$$\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R} ,$$

donde Σ es la topología de las hipersuperficies. Por suerte, casi todas las situaciones en cosmología y astrofísica que se estudian en la actualidad cumplen con esta propiedad, por lo que nuestro análisis de la naturaleza no se ve restringido por la asunción de que el espacio-tiempo es globalmente hiperbólico. Para un estudio profundo de las propiedades de estos espacios-tiempo revisar [23].

3.3. Elementos de la geometría del espacio-tiempo en el formalismo $3 + 1$

Ahora definiremos los principales elementos que se utilizan para la descripción del espacio-tiempo en el formalismo $3 + 1$. Dichos elementos hacen referencia tanto a la geometría intrínseca de las hipersuperficies de la foliación como a su geometría extrínseca, es decir, la forma en que dichas hipersuperficies están embebidas en $\mathcal{M}$.

3.3.1. Vector Normal Unitario

Debido a que cada hipersuperficie está caracterizada por un conjunto de puntos $p \in \mathcal{M}$ que al ser evaluados por el campo escalar t devuelven la misma constante, podemos interpretar a Σ como una superficie de nivel del campo t. Debido a esto es posible construir un vector normal a Σ por medio del vector dual asociado al gradiente $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t$ [25]. Sus componentes serán $\nabla^\alpha t = g^{\alpha\mu}\nabla_\mu t$, y cumplirá con la siguiente propiedad:

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{T}_p(\Sigma), \quad g_{\mu\nu} v^\nu \nabla^\mu t = v^\nu \nabla_\mu t = 0\,. \tag{3.1}$$

Este vector define la única dirección normal a la hipersuperficie Σ, por lo que cualquier otro vector normal debe ser paralelo a $\boldsymbol{\nabla} t \ : \boldsymbol{u} = \lambda \nabla t$, donde $\boldsymbol{u}$ es un vector normal a Σ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definimos el ***vector normal unitario*** **a** Σ como:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t}{\sqrt{-\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t}}\,, \tag{3.2}$$

donde el signo $-$ garantiza que la raíz cuadrada esté bien definida. Las componentes de $\boldsymbol{n}$ serán

$$n^\mu = \frac{\nabla^\mu t}{\sqrt{-\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t}}\,. \tag{3.3}$$

De esta definición se verifica que $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = -1$.

3.3.2. Coordenadas adaptadas a la foliación

La relatividad general es una teoría que está escrita en lenguaje tensorial, esto en razón de que todas las leyes y propiedades que se estudian en la naturaleza deben ser independientes del sistema coordenado usado para representarla (la elección de una determinada carta $(\mathcal{U}, x)$ para analizar la variedad $\mathcal{M}$ no define las propiedades de la variedad). Mas a pesar de esto, para poder trabajar con las ecuaciones tensoriales es necesario en algún momento introducir un sistema de coordenadas en la variedad del espacio-tiempo $\mathcal{M}$. La mejor forma de hacerlo es usando coordenadas adaptadas a la foliación $(\Sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Cada hipersuperficie Σ_t tiene un sistema coordenado $[x^i] = (x^1, x^2, x^3)$, llamado sistema coordenado espacial. Si estos sistemas coordenados cambian de forma no abrupta al pasar de una hipersuperficie Σ_t a otra cercana $\Sigma_{t+\delta t}$, entonces podemos construir a partir de ellos un sistema coordenado para toda la variedad $\mathcal{M}$, dado por $[x^\mu] = (t, x^1, x^2, x^3)$.

La base del espacio tangente $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ asociado a las coordenadas $[x^\mu]$ serán los vectores $[\boldsymbol{\partial}_\mu] = (\boldsymbol{\partial}_t, \boldsymbol{\partial}_i)$:

$$\boldsymbol{\partial}_t = (1,0,0,0), \quad \boldsymbol{\partial}_1 = (0,1,0,0), \quad \boldsymbol{\partial}_2 = (0,0,1,0), \quad \boldsymbol{\partial}_3 = (0,0,0,1),$$

donde $\boldsymbol{\partial}_t$ es llamado vector temporal y es un vector tangente a las líneas con coordenadas espaciales constantes [1]. La base del espacio cotangente $\mathcal{T}_p^*(\mathcal{M})$ vendrá dada por la base dual asociada a $[\boldsymbol{\partial}_\mu]$. En particular, la 1-forma dual al vector temporal $\boldsymbol{\partial} t$ será $\boldsymbol{\nabla} t$, puesto que se cumple la relación:

$$\langle \boldsymbol{\nabla} t | \boldsymbol{\partial}_t \rangle = \boldsymbol{\partial}_t(t) = 1\,. \tag{3.4}$$

Es necesario tomar en cuenta que en general $(\boldsymbol{\partial}_t)^\mu \neq \nabla^\mu t$.

3.3.3. Operador Proyección

La foliación de $\mathcal{M}$ induce a su vez una descomposición de los espacios tangentes $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$:

$$\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) = \mathcal{T}_p(\Sigma) \times \mathrm{Vect}(\boldsymbol{n})\,.$$

donde $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{n})$ es el subespacio 1-dimensional generado por el vector unitario $\boldsymbol{n}$ y $\mathcal{T}_p(\Sigma)$ es el espacio tangente de la hipersuperficie Σ en el punto p. De esta manera todo vector en $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ puede ser descompuesto en un vector tangente a $\mathcal{T}_p(\Sigma)$ y un vector tangente a $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{n})$.

Definimos el ***operador proyección*** en Σ como el operador $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}$ asociado a la descomposición anterior, que proyecta vectores en $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ a vectores en $\mathcal{T}_p(\Sigma)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}} : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}_p(\Sigma) \\ \boldsymbol{v} &\longrightarrow \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}\,. \end{aligned}$$

Las componentes del operador proyección vienen dadas por:

$$\gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta\,. \tag{3.5}$$

Es sencillo verificar que este operador cumple con las siguientes propiedades:

$$n^\nu \gamma^\mu_\nu = 0\,. \tag{3.6}$$

$$\gamma^\mu_\nu \gamma^\nu_\rho = \gamma^\mu_\rho\,. \tag{3.7}$$

$$\gamma^\mu_\mu = 3\,. \tag{3.8}$$

Para proyectar vectores en $\mathcal{M}$ al subespacio $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{n})$ usamos el operador proyección normal $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ que actúa de la forma:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{N}} : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\longrightarrow Vect\ (\boldsymbol{n}) \\ \boldsymbol{v} &\longrightarrow -\ (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\,. \end{aligned}$$

Las componentes del operador proyección normal son

$$N^\alpha_\beta = -n^\alpha n_\beta \tag{3.9}$$

[1] Dichas líneas no necesariamente son normales a Σ.

Podemos utilizar (3.5) para extender el operador de proyección a cualquier tensor arbitrario en $\mathcal{M}$. Para ello utilizamos el mapa $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}^*$, que es una generalización del operador proyección $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}$, que actúa sobre cualquier tensor $\boldsymbol{T}$ tipo (r,s) en la variedad $\mathcal{M}$. Las componentes del tensor proyectado $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{T})$ se obtienen por medio de la contracción de cada uno de los índices de las componentes del tensor $\boldsymbol{T}$ con γ^{α}_{β}:

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}^*\boldsymbol{T})^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_q} = \gamma^{\alpha_1}_{\mu_1}\ldots\gamma^{\alpha_r}_{\mu_r}\gamma^{\nu_1}_{\beta_1}\ldots\gamma^{\nu_s}_{\beta_s}T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\nu_1\ldots\nu_s}\,. \tag{3.10}$$

Esta operador se reduce a (3.5) cuando actúa sobre vectores en $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$. Dado cualquier tensor $\boldsymbol{T}$, se verifica que $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}^*\boldsymbol{T}$ es tangente a Σ[2]. De esta forma, (3.10) permite descomponer cualquier tensor tipo (r,s) definido en $\mathcal{M}$ una parte en un tensor tangente a Σ. La parte normal la obtenemos por la aplicación del operador (3.9) sobre dicho tensor.

3.3.4. Tensor métrico inducido de Σ

La aplicación del operador $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}^*$ sobre el tensor métrico $\boldsymbol{g}$ induce la métrica espacial $\boldsymbol{\gamma}$, también llamada ***tensor métrico inducido*** o primera forma fundamental de Σ:

$$\boldsymbol{\gamma} = \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}^*\boldsymbol{g}\,. \tag{3.11}$$

Usando (3.10) se tiene que:

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta} &= \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\mu}_{\beta}g_{\mu\nu}\,,\\ &= (\delta^{\mu}_{\alpha}+n^{\nu}n_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta}+n^{\nu}n_{\beta})g_{\mu\nu}\,,\\ &= (g_{\alpha\nu}+n_{\nu}n_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta}+n^{\nu}n_{\beta})\,.\end{aligned}$$

Con esto se verifica que las componentes del tensor métrico inducido $\boldsymbol{\gamma}$ en función de la métrica $\boldsymbol{g}$ y del vector normal unitario $\boldsymbol{n}$ están dadas por:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_{\mu}n_{\nu}\,. \tag{3.12}$$

Así, debido a la expresión (3.11), se cumplirá qué:

$$\forall\ \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\in\mathcal{T}_p(\Sigma),\quad \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\,. \tag{3.13}$$

La métrica inducida en la hipersuperficie actúa de la misma forma que $\boldsymbol{g}$ cuando es aplicada sobre los tensores definidos en Σ, permitiendo las operaciones de bajada y subida de índices y conteniendo toda la información sobre la geometría local de la hipersuperficie.

[2]El tensor $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}^*\boldsymbol{T}$ es cero si uno de sus argumentos es $\boldsymbol{n}$ o $\underline{\boldsymbol{n}}$ (la 1-forma asociada al vector normal unitario).

3.3.5. Conexión de Σ

Al aplicar el operador $\overrightarrow{\gamma}^*$ sobre la conexión de Levi-Civita de $\mathcal{M}$, obtenemos su proyección sobre Σ, que denotaremos como $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{DT} = \overrightarrow{\gamma}^* \boldsymbol{\nabla T}\,. \tag{3.14}$$

De (3.10) se obtienen las componentes de esta proyección:

$$D_\rho T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s} = \gamma^{\alpha_1}_{\mu_1}\cdots\gamma^{\alpha_r}_{\mu_r}\gamma^{\nu_1}_{\beta_1}\cdots\gamma^{\nu_s}_{\beta_s}\gamma^{\sigma}_{\rho}\nabla_\sigma T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s}\,. \tag{3.15}$$

Este operador satisface las siguientes propiedades:

- Es un operador lineal (se deduce inmediatamente de la linealidad de $\boldsymbol{\nabla}$).
- Se reduce a una derivada parcial ordinaria cuando se aplica sobre campos escalares.
- Obedece la regla de Leibnitz: $D_\alpha v^\mu u_\mu = v^\mu D_\alpha u_\mu + u_\mu D_\alpha v^\mu, \forall v, u \in \mathcal{T}_p(\Sigma)$.
- Es libre de torsión; es decir, su aplicación sucesiva sobre un campo escalar conmuta: $D_\alpha D_\beta f = D_\beta D_\alpha f$.
- Cumple con la condición de metricidad: $D_\alpha \gamma_{\mu\nu} = 0$.

Las tres primeras propiedades implican que $\boldsymbol{D}$ es una conexión de Σ. Las últimas dos propiedades aseguran que $\boldsymbol{D}$ es la conexión de Levi-Civita de Σ.

3.3.6. Geometría intrínseca de la hipersuperficie Σ

La hipersuperficie Σ es una variedad diferencial equipada con una conexión de Levi-Civita, $\boldsymbol{D}$, por lo que toda la información sobre su curvatura intrínseca estará codificada en el tensor de Riemann, $\boldsymbol{Riem}$, asociado a dicha conexión. Este tensor, de forma análoga al caso de la variedad $\mathcal{M}$, medirá la no conmutatividad de dos derivadas covariantes sucesivas D, estando expresado por medio de la identidad de Ricci:

$$\forall\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{T}_p\Sigma, \quad D_\nu D_\beta v^\mu - D_\beta D_\nu v^\mu = R^\mu_{\alpha\nu\beta} v^\alpha\,. \tag{3.16}$$

Las componentes del tensor de Riemann serán:

$$R^\mu_{\alpha\nu\beta} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\,, \tag{3.17}$$

donde $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(\partial_\mu\gamma_{\nu\beta} + \partial_\nu\gamma_{\mu\beta} - \partial_\beta\gamma_{\mu\nu})\,. \tag{3.18}$$

El correspondiente tensor de Ricci de Σ estará dado por $\boldsymbol{R}$, cuyas componentes serán $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ mientras que el escalar de Ricci es obtenido por la contracción del tensor de Ricci con el tensor métrico inducido $R = \gamma^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

3.3.7. Función lapso

Como se ha mencionado anteriormente, todo vector normal a la hipersuperficie Σ tiene que ser paralelo a $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t$, vector dual al gradiente de t. El vector normal unitario $\boldsymbol{n}$ es un vector tipo tiempo, con norma $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=-1$ y está dado por:

$$\boldsymbol{n} = -N\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t\,, \tag{3.19}$$

donde N es la norma de $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t$:

$$N = \frac{1}{\sqrt{-\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} t}}\,. \tag{3.20}$$

La norma N es un campo escalar que recibe el nombre de función lapso [22]. Es una de las variables más importantes del formalismo hamiltoniano de la relatividad general y permite relacionar, como se más adelante, el intervalo de tiempo propio entre dos hipersuperficies vecinas con el intervalo de tiempo medido por un observador euleriano.

3.3.8. 4-Velocidad y 4-Aceleración

Una de las principales características del vector normal $\boldsymbol{n}$ es que su norma es -1. Dado que el espacio-tiempo tiene una orientación temporal hacia el futuro, esto nos permite interpretar al vector $\boldsymbol{n}$ como la 4-velocidad de un observador, llamado observador euleriano. Desde el punto de vista de este observador todos los eventos que suceden en una misma hipersuperficie Σ_t son simultáneos, además de ser su línea de mundo en el espacio-tiempo ortogonal a todas las hipersuperficies de la foliación.

El intervalo de tiempo propio $\delta\tau$ entre dos eventos medidos por un observador euleriano está relacionado con el intervalo de la coordenada temporal δt por medio de la función lapso [3] [17]:

$$\delta\tau = N\delta t\,.$$

La 4-aceleración de un observador euleriano está definida como la derivada covariante de $\boldsymbol{n}$ a lo largo de sí mismo:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}\,. \tag{3.21}$$

Este vector es tangente a la hipersuperficie Σ:

$$\begin{aligned} n^\mu a_\mu &= n^\mu n^\nu \nabla_\nu n_\mu\,,\\ &= \frac{1}{2} n^\nu \nabla_\nu (n^\mu n_\mu)\,,\\ &= \frac{1}{2} n^\nu \nabla_\nu (-1) = 0\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

[3] Esta es la razón de su nombre.

La 4-aceleración de un observador euleriano tiene una importante relación con la derivada covariante $\boldsymbol{D}$ y la función lapso:

$$\begin{aligned}
a_\alpha &= n^\mu \nabla_\mu n_\alpha = -n^\mu \nabla_\mu (N \nabla_\alpha t)\,, \\
&= -n^\mu (\nabla_\mu N)(\nabla_\alpha t) - N n^\mu \nabla_\mu \nabla_\alpha t\,, \\
&= n^\mu (\nabla_\mu N) \frac{1}{N} \underbrace{(-N \nabla_\alpha t)}_{n_\alpha} + N n^\mu \nabla_\alpha (\frac{1}{N} \underbrace{(-N \nabla_\mu t)}_{n_\mu})\,, \\
&= \frac{1}{N} (\nabla_\mu N) n^\mu n_\alpha + N (-\frac{1}{N^2}) (\nabla_\alpha N) \underbrace{n^\mu n_\mu}_{-1} + \frac{N}{N} \underbrace{n^\mu \nabla_\alpha n_\mu}_{0}\,, \\
&= \frac{\mathbf{1}}{N} (\nabla_\mu N) n^\mu n_\alpha + \frac{1}{N} (\nabla_\alpha N)\,, \\
&= \frac{1}{N} \nabla_\mu N \underbrace{(\delta^\mu_\alpha + n^\mu n_\alpha)}_{\gamma^\mu_\alpha}\,, \\
&= \frac{1}{N} \gamma^\mu_\alpha \nabla_\mu N\,, \\
&= \frac{1}{N} D_\alpha N = D_\alpha (\ln N)\,.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

De esta forma, la 4-aceleración puede ser expresado como el vector dual al gradiente (respecto a Σ) del logaritmo natural de la función lapso:

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{D}} \ln N\,. \tag{3.24}$$

3.3.9. Vector normal de evolución

Se define el ***vector normal de evolución*** a Σ como:

$$\boldsymbol{m} = N \boldsymbol{n}\,. \tag{3.25}$$

A partir de esta definición resulta evidente que $\boldsymbol{m}$ es un vector tipo tiempo (normal a Σ) y que cumple con las siguientes propiedades:

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m} = -N^2\,, \tag{3.26}$$

$$\langle \boldsymbol{\nabla} t | \boldsymbol{m} \rangle = \nabla_{\boldsymbol{m}} t = m^\mu \nabla_\mu t = 1\,. \tag{3.27}$$

Una consecuencia importante del vector normal de evolución respecto a la anterior propiedad es que, dada una hipersuperficie Σ de la foliación, $\boldsymbol{m}$ permite obtener la hipersuperficie vecina $\Sigma_{t+\delta t}$ debido al desplazamiento infinitesimal de todos los puntos de Σ a lo largo del vector $\delta t \boldsymbol{m}$. De este hecho se desprende que la derivada de Lie a lo largo del vector $\boldsymbol{m}$ de cualquier tensor tangente a Σ también es un tensor tangente a Σ [17]:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}^* (\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{T}) = \mathscr{L}_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{T}\,. \tag{3.28}$$

3.3.10. Vector Desplazamiento

Existe un grado de libertad a la hora de elegir el vector de evolución temporal que no hemos tomado en el caso anterior: si al vector $\boldsymbol{m}$ le agregamos cualquier vector espacial $\boldsymbol{\beta}$, que recibe el nombre de ***vector desplazamiento***, obtenemos un vector, $\boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\beta}\,, \tag{3.29}$$

cuyas componentes estarán dadas por:

$$t^{\mu} = N n^{\mu} + \beta^{\mu}\,, \tag{3.30}$$

y que satisface la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\nabla} t | \boldsymbol{t} \rangle &= \langle \boldsymbol{\nabla} t | \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\beta} \rangle\,, \\ &= \underbrace{\nabla^{\mu} t\ m_{\mu}}_{1} + \underbrace{\nabla^{\mu} t\ \beta_{\mu}}_{0} = 1\,. \end{aligned}$$

Este resultado implica que $\boldsymbol{t}$ es un vector de evolución y por lo tanto cumple, al igual que $\boldsymbol{m}$, con la función de transportar puntos de la hipersuperficie Σ_t a la hipersuperficie vecina $\Sigma_{t+\delta t}$. Comparando este resultado con (3.27), se observa que el vector $\boldsymbol{t}$ es el vector temporal de la base de $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\partial}_t\,. \tag{3.31}$$

La expresión (3.29) es la forma más general del vector de evolución temporal puesto que no es necesariamente normal a Σ y la libertad en su definición está relacionada a la covarianza de las ecuaciones de Einstein. Podemos expresar al vector desplazamiento $\boldsymbol{\beta}$ en función de sus componentes espaciales:

$$\beta^{\mu} = (0, \beta^1, \beta^2, \beta^3)\,. \tag{3.32}$$

La función lapso N, el vector desplazamiento $\boldsymbol{\beta}$ y la métrica inducida $\boldsymbol{\gamma}$ conforman las llamadas variables ADM que se usarán para construir el formalismo hamiltoniano de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo.

3.3.11. Tensor de curvatura extrínseca de Σ

Cualquier hipersuperficie espacial Σ_t de la foliación de $\mathcal{M}$ tiene una curvatura intrínseca que depende de sus características propias y no hace caso de su relación con la variedad que la contiene. Para obtener toda la información sobre el espacio-tiempo a partir del análisis de la foliación de $\mathcal{M}$ necesitamos un tensor que cuantifique cómo Σ_t está embebido en $\mathcal{M}$. Esta curvatura extrínseca depende de la forma en que la hipersuperficie esté contenida en la variedad espacio-temporal y por lo tanto su definición no debe contener cantidades intrínsecas de Σ.

El ***tensor de curvatura extrínseca*** $\boldsymbol{K}$, también llamado segunda forma fundamental de la hipersuperficie Σ, es un tensor tipo (0, 2) que cuantifica

la curvatura antes mencionada y está definido como la proyección de la derivada covariante del covector dual a $\boldsymbol{n}$ [20]:

$$\boldsymbol{K} = -\overrightarrow{\gamma}^{*}\boldsymbol{\nabla}\underline{n}\,.$$

Como se puede observar de su definición, el tensor de curvatura extrínseca provee información sobre cuánto cambia la dirección del vector normal $\boldsymbol{n}$ cuando se transporta a lo largo de la hipersuperficie Σ y, por lo tanto, sobre cómo Σ está embebido en $\mathcal{M}$.

El tensor $\boldsymbol{K}$ cumple con las siguientes propiedades:

- Es un tensor puramente espacial, esto es: $n^{\mu}K_{\mu\nu} = n^{\nu}K_{\mu\nu} = 0$.
- Es un tensor simétrico: $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$.
- En un sistema de coordenadas adaptadas a la foliación las siguientes componentes son cero: $K^{00} = K^{oi} = 0$.
- La traza del tensor de curvatura extrínseca es igual a la divergencia del vector normal $\boldsymbol{n}$: $K = \gamma^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}n^{\rho}$.

El tensor de curvatura extrínseca puede ser expresado de varias maneras. Partiendo de su definición, las componentes de $\boldsymbol{K}$ pueden relacionarse con la 4-aceleración de un observador euleriano:

$$K_{\mu\nu} = -\gamma^{\alpha}_{\mu}\nabla_{\alpha}n_{\nu} = -\left(\nabla_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}n^{\alpha}\nabla_{\alpha}n_{\nu}\right) = -\left(\nabla_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}a_{\nu}\right)\,. \tag{3.33}$$

A partir de la relación anterior y de (3.24) podemos encontrar una expresión para la derivada covariante del vector de evolución normal $m^{\alpha} = Nn^{\alpha}$:

$$\nabla_{\beta}m^{\alpha} = -NK^{\alpha}_{\beta} - n_{\beta}D^{\alpha}N + n^{\alpha}\nabla_{\beta}N\,. \tag{3.34}$$

De (3.33) se desprende además que el tensor $\boldsymbol{K}$ también puede ser expresado en función de la derivada de Lie de la métrica espacial. Como $K_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\rho}_{\mu}\nabla_{\rho}n_{\nu} + \gamma^{\rho}_{\nu}\nabla_{\rho}n_{\mu}\right)\,,\\
&= \frac{1}{2}\left(n^{\rho}n_{\mu}\nabla_{\rho}n_{\nu} + n^{\rho}n_{\nu}\nabla_{\rho}n_{\mu} + \nabla_{\mu}n_{\nu} + \nabla_{\nu}n_{\mu}\right)\,,\\
&= \frac{1}{2}\left(n^{\rho}\nabla_{\rho}(n_{\mu}n_{\nu}) + g_{\rho\nu}\nabla_{\mu}n^{\rho} + g_{\mu\rho}\nabla_{\nu}n^{\rho}\right)\,,\\
&= \frac{1}{2}\left(n^{\rho}\nabla_{\rho}\gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\rho\nu}\nabla_{\mu}n^{\rho} + \gamma_{\mu\rho}\nabla_{\nu}n^{\rho}\right)\,.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

La última ecuación es proporcional a la derivada de Lie de la métrica $\boldsymbol{\gamma}$ a lo largo del vector normal $\boldsymbol{n}$, por lo que

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(n^{\rho}\nabla_{\rho}\gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\rho\nu}\nabla_{\mu}n^{\rho} + \gamma_{\mu\rho}\nabla_{\nu}n^{\rho}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\gamma_{\mu\nu}\,. \tag{3.36}$$

Otra expresión para el tensor de curvatura en función de la derivada de Lie a lo largo del vector temporal es:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(n^\rho \nabla_\rho \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\rho\nu}\nabla_\mu n^\rho + \gamma_{\mu\rho}\nabla_\nu n^\rho\right) , \\ &= \frac{1}{2N}\left[N n^\rho \nabla_\rho \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\rho\nu}\nabla_\mu (N n^\rho) + \gamma_{\mu\rho}\nabla_\nu (N n^\rho)\right] , \\ &= \frac{1}{2N}\gamma_\mu^\rho \gamma_\nu^\sigma \mathcal{L}_{\boldsymbol{N n}}\gamma_{\rho\sigma} = \frac{1}{2N}\gamma_\mu^\rho \gamma_\nu^\sigma \mathcal{L}_{(\boldsymbol{\partial}_t - \boldsymbol{\beta})}\gamma_{\rho\sigma} , \\ &= \frac{1}{2N}\gamma_\mu^\rho \gamma_\nu^\sigma \left(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\partial}_t}\gamma_{\rho\sigma} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}\gamma_{\rho\sigma}\right) . \end{aligned} \tag{3.37}$$

Considerando que para un sistema coordenado adaptado a la foliación se cumplirá que $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\partial}_t} = \partial_0$ [17] y debido a que tanto $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son tensores espaciales es posible expandir el término $\mathcal{L}_\beta \gamma_{\rho\sigma}$ utilizando la conexión espacial $\boldsymbol{D}$ en lugar de $\boldsymbol{\nabla}$, la expresión anterior toma la forma:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}\left(\partial_0 \gamma_{\mu\nu} - D_\mu \beta_\nu - D_\nu \beta_\mu\right) . \tag{3.38}$$

3.4. Descomposición $3+1$ de la Relatividad General

La descomposición $3+1$ del espacio-tiempo $\mathcal{M}$ (dada por la foliación) genera a su vez una descomposición similar de todos los tensores definidos en $\mathcal{M}$. Ahora se mostrará la descomposición del tensor métrico $\boldsymbol{g}$ y el tensor de Riemann ${}^{(4)}\boldsymbol{Riem}$. Aunque en el presente trabajo no se mostrará, también es posible realizar una descomposición del tensor de energía-momento y como consecuencia, de las ecuaciones de campo de Einstein en el formalismo $3+1$ [20].

3.4.1. Descomposición del tensor métrico

Las componentes del tensor métrico se hallan de la forma usual, aplicando la métrica sobre la base $[\boldsymbol{\partial}_\mu]$ en las coordenadas x^μ:

$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_\mu, \boldsymbol{\partial}_\nu) = \boldsymbol{\partial}_\mu \cdot \boldsymbol{\partial}_\mu$$

Así, las componentes temporales de la métrica serán:

$$\begin{aligned} g_{00} = \boldsymbol{\partial}_t \cdot \boldsymbol{\partial}_t &= (N\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\beta}) \cdot (N\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\beta}) , \\ &= N^2 \underbrace{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})}_{-1} + 2N \underbrace{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})}_{0} + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta} , \\ &= -N^2 + \beta_i \beta^i . \end{aligned} \tag{3.39}$$

Para los términos mixtos se tendrá:

$$\begin{aligned} g_{i0} = \ &= \boldsymbol{\partial}_t \cdot \boldsymbol{\partial}_i = (N\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\partial}_i = \underbrace{N\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\partial}_i}_{0} + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\partial}_i , \\ &= (\beta_j \boldsymbol{d}x^j) \cdot (\boldsymbol{\partial}_i) = \beta_i \underbrace{(\boldsymbol{d}x^j \cdot \boldsymbol{\partial}_j)}_{\delta_i^j} = \beta_i . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Y para las componentes espaciales del tensor métrico:

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_i, \boldsymbol{\partial}_j) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\partial}_i, \boldsymbol{\partial}_j) = \gamma_{ij}\,. \tag{3.41}$$

Resumiendo estos resultados en forma matricial, las componentes del tensor métrico y su inversa serán:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -N^2 + \beta_k\beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix};\; g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{\beta^j}{N^2} \\ \frac{\beta^i}{N^2} & \gamma_{ij} - \frac{\beta^i\beta^j}{N^2} \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Dada esta descomposición del tensor métrico, el intervalo de espacio-tiempo será expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dt^2 + g_{i0}dtdx^i + g_{oj}dtdx^j + g_{ij}dx^i dx^j\,, \\ &= (-N^2\beta_k\beta^k)dt^2 + \beta_i dtdx^i + \beta_j dtdx^j + \gamma_{ij}dx^i dxj\,, \\ &= -N^2dt^2 + \gamma ij\beta^i\beta^j dt^2 + \gamma_{ij}\beta^j dtdx^i + \gamma_{ij}\beta^i dtdx^j\gamma_{ij}dx^i dx^j\,, \\ &= -N^2dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)\,. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Si escribimos la componente g^{00} usando la regla de Cramer obtenemos:

$$g^{00} = \frac{C_{00}}{det(g_{00})} = \frac{(-1)^0 M_{00}}{g} = \frac{det(\gamma_{ij})}{g} = \frac{\gamma}{g}\,. \tag{3.44}$$

De (3.42) se tiene que $g^{00} = -\frac{1}{N^2}$, por lo que $g = -N^2\gamma$, o equivalentemente:

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}\,. \tag{3.45}$$

3.4.2. Descomposición $3+1$ del tensor de Riemann

La geometría de cada hipersuperficie de la foliación está descrita por el tensor métrico inducido $\boldsymbol{\gamma}$ y el tensor de curvatura extrínseca $\boldsymbol{K}$. La descomposición $3+1$ del tensor de Rieman ${}^{(4)}\boldsymbol{Riem}$ permite expresarlo en términos de estos parámetros. Las ecuaciones que describen esta descomposición son las relaciones de Gauss, Codazzi-Mainardi y de Ricci y se obtienen por las las distintas proyecciones que se pueden realizar sobre ${}^{(4)}\boldsymbol{Riem}$:

$$\gamma^\mu_\alpha\gamma^\nu_\beta\gamma^\gamma_\rho\gamma^\sigma_\delta\,{}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu}, \qquad \gamma^\gamma_\rho n^\sigma\gamma^\mu_\alpha\gamma^\nu_\beta\,{}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu}, \qquad \gamma_{\alpha\mu}n^\rho\gamma^\nu_\beta n^\sigma\,{}^{(4)}R^\mu_{\rho\nu\sigma}\,.$$

Debido a las propiedades de simetría y antisimetría del tensor de Riemann, cualquier otra posible proyección suya es idénticamente nula. Para una revisión detallada de las demostraciones referirse a [17, 25].

3.4.2.1. Relación de Gauss

Partiendo de la definición del tensor de Riemann en (3.16), podemos obtener la ***relación de Gauss***, que no es otra cosa más que la proyección total del tensor ${}^{(4)}\boldsymbol{Riem}$ por medio de la contracción de todos sus índices con γ^μ_ν:

$$\gamma^\mu_\alpha\gamma^\nu_\beta\gamma^\gamma_\rho\gamma^\sigma_\delta\,{}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu} = R^\gamma_{\delta\alpha\beta} + (K^\gamma_\alpha K_{\delta\beta} - K^\gamma_\beta K_{\alpha\delta})\,. \tag{3.46}$$

Contrayendo los índices γ y α obtenemos la ***relación de Gauss contraída***:

$$\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu\,(4)}_{\beta}R_{\mu\nu}+\gamma_{\alpha\mu}n^{\nu}\gamma^{\rho}_{\beta}n^{\sigma\,(4)}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}=R_{\alpha\beta}+KK_{\alpha\beta}-K_{\alpha\mu}K^{\mu}_{\beta}\,. \tag{3.47}$$

Por último, tomamos la traza con γ^{α}_{β}

$$^{(4)}R+2^{(4)}R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu}=R+K^2-K_{ij}K^{ij}\,. \tag{3.48}$$

que es la ***ecuación escalar de Gauss***.

3.4.2.2. Relación de Codazzi-Mainardi

Esta ecuación consiste en una proyección mixta del tensor $^{(4)}\boldsymbol{Riem}$. Empezamos con la aplicación de (2.27) sobre el vector normal $\boldsymbol{n}$:

$$(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}-\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha})n^{\gamma}=^{(4)}R^{\gamma}_{\mu\alpha\beta}n^{\mu}\,. \tag{3.49}$$

Proyectando esta relación sobre Σ y haciendo uso de (3.33) obtenemos la ***relación de Codazzi-Mainardi***:

$$\gamma^{\gamma}_{\rho}n^{\sigma}\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu\,(4)}_{\beta}R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}=D_{\beta}K^{\gamma}_{\alpha}-D_{\alpha}K^{\gamma}_{\beta}\,. \tag{3.50}$$

Contrayendo los índices γ y α se consigue la ***relación contraída de Codazzi***:

$$\gamma^{\mu}_{\alpha}n^{\nu\,(4)}R_{\mu\nu}=D_{\alpha}K-D_{\mu}K^{\mu}_{\alpha}\,. \tag{3.51}$$

3.4.2.3. Relación de Ricci

Igual que el caso anterior, partimos de la identidad de Ricci aplicado al vector $\boldsymbol{n}$, pero esta vez proyectándolo una vez a lo largo de Σ y una vez a lo largo de $\boldsymbol{n}$, y sustituyendo las relaciones (3.24) y (3.33). De esta forma se obtiene:

$$\gamma_{\alpha\mu}n^{\rho}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma\,(4)}R^{\mu}_{\rho\nu\sigma}=-K_{\alpha\sigma}K^{\sigma}_{\beta}+\frac{1}{N}D_{\beta}D_{\alpha}N+\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma}\nabla_{\sigma}K_{\mu\nu}\,. \tag{3.52}$$

El término $\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma}\nabla_{\sigma}K_{\mu\nu}$ está relacionado con $\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{K}$:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}}K_{\alpha\beta}=m^{\mu}\nabla_{\mu}K_{\alpha\beta}+K_{\mu\beta}\nabla_{\alpha}m^{\mu}+K_{\alpha\mu}\nabla_{\beta}m^{\mu}\,.$$

Proyectando esta relación en Σ, tomando en cuenta que debido a (3.28) $\overrightarrow{\gamma}^{*}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{K}=\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{K}$ y haciendo uso de (3.34), la ecuación anterior toma la forma:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K_{\alpha\beta}=N\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma}\nabla_{\sigma}K_{\mu\nu}-2NK_{\alpha\mu}K^{\mu}_{\beta}\,.$$

Sustrayendo $\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma\nu_{\beta}n^{\sigma}\nabla_{\sigma}K_{\mu\nu}$ y reemplazando el resultado en (3.52), obtenemos:

$$\gamma_{\alpha\mu}n^{\rho}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma\,(4)}R^{\mu}_{\rho\nu\sigma}=\frac{1}{N}\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}}K_{\alpha\beta}+\frac{1}{N}D_{\alpha}D_{\beta}N+K_{\alpha\mu}K^{\mu}_{\beta}\,. \tag{3.53}$$

Esta ecuación es conocida como la ***relación de Ricci***.

3.4.3. Descomposición $3+1$ del escalar de curvatura

La parte izquierda de (3.53) aparece también en la ecuación contraída de Gauss, por lo que igualando ambos resultados obtenemos una expresión para el tensor de Ricci:

$$\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}{}^{(4)}R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N}\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}}K_{\alpha\beta} - \frac{1}{N}D_{\alpha}D_{\beta}N + R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu}K^{\mu}_{\beta}\,. \quad (3.54)$$

Tomando la traza de la ecuación (3.54) con respecto a la métrica $\gamma^{\alpha\beta}$ y haciendo uso de la siguiente expresión (derivada en [17]):

$$-\gamma^{ij}\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}}K_{ij} = -\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}}K + 2NK_{ij}K^{ij}\,, \quad (3.55)$$

se obtiene la relación:

$${}^{(4)}R + {}^{(4)}R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = R + K^2 - \frac{1}{N}\boldsymbol{m}K - \frac{1}{N}D_{\alpha}D^{\alpha}\,.$$

Combinando esta ecuación con la relación escalar de Gauss obtenemos finalmente la ***descomposición*** $3+1$ ***del escalar de curvatura***:

$${}^{(4)}R = R + K^2 + K_{ij}K^{ij} - \frac{2}{N}\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}}K - \frac{2}{N}D_iD^iN\,, \quad (3.56)$$

donde, debido a que todos los términos presentes son cantidades definidas en las hipersuperficies, se han sustituido todos los índices griegos por índices latinos sin pérdida de generalidad.

Una aplicación importante de lo desarrollado anteriormente radica en que la descomposición $3+1$ del espacio-tiempo es un paso necesario para el desarrollo del formalismo hamiltoniano de la relatividad general y para estudiar desde un distinto enfoque al lagrangiano distintos problemas de cosmología y inflación. En el siguiente capítulo se describirán los principales conceptos de estos tópicos con el objetivo de realizar posteriormente el formalismo hamiltoniano de los modelos inflacionarios.

Capítulo 4

Cosmología moderna

La cosmología moderna se construyó a lo largo del siglo pasado en base a las nuevas posibilidades teóricas que permitía la teoría de la relatividad general en el estudio de la estructura y evolución del Universo. Durante las décadas de 1920 y 1930 fue desarrollado independientemente por medio de diversos autores la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW), la cual modela un Universo homogéneo, isotrópico y en expansión/contracción. Después de los resultados observacionales de E. Hubble en 1929, que establecieron a partir del análisis del corrimiento al rojo galáctico que el Universo se expandía, quedó sentado que cualquier modelo cosmológico que pretendiera dar un marco teórico adecuado para el estudio del Universo debía considerar como base la métrica de FLRW y las subsecuentes ecuaciones dinámicas que se desprendían de ella.

4.1. La métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

Para poder estudiar la evolución del Universo es necesario describir al espacio-tiempo $\mathcal{M}$ por medio de una foliación $\Sigma \times \mathbb{R}$, donde la isotropía y la homogeneidad[1] son referidas a cada una de las hipersuperficies espaciales Σ que evolucionan a lo largo de un parámetro temporal global $t \in \mathbb{R}$. La métrica de un espacio-tiempo máximamente simétrico, homogéneo e isotrópico es la métrica de FLRW [26], cuyo elemento de línea es:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{4.1}$$

donde $a(t)$ y k son llamados factor de escala y escalar de curvatura respectivamente. Esta métrica está escrita usando coordenadas comóviles $[x^\mu] = (t, r, \theta, \phi)$, siendo t una coordenada temporal conocida como tiempo cósmico y (r, θ, ϕ) las coordenadas espaciales de la hipersuperficie Σ. En estas coordenadas todos los observadores están fijados en las coordenadas espaciales, independientemente de la expansión o contracción del Universo[2], moviéndose solamente con el flujo del espacio, de tal forma que la distancia que separa dos puntos en coordenadas comóviles no depende del tiempo y corresponde generalmente a un valor distinto a la separación real que hay entre ellos. La distancia física entre dos puntos en un instante de tiempo t_0 se puede calcular a partir de la distancia en las

[1] Homogeneidad significa que la distribución de materia del Universo es igual visto desde cualquier punto espacial del cosmos, mientras que la isotropía implica que el Universo describe las mismas características independientemente de la dirección en la que se hagan las observaciones.

[2] Esto, evidentemente, en ausencia de cualquier fuerza que actúe sobre ellos.

coordenadas comóviles por medio del parámetro $a(t)$:

$$R(t_0) = a(t_0)r\,. \tag{4.2}$$

Así, $a(t)$ determina las distancias relativas en las hipersuperficies espaciales Σ en cada instante de tiempo. El factor de escala es una de las variables más importantes que nos interesa conocer siendo sus características fundamentales para determinar el comportamiento y la evolución del Universo.

El escalar de curvatura k es una constante adimensional cuyo valor puede ser únicamente $-1, 0, +1$ [27]. Debido a esto es que, dependiendo del valor de k, solo hay 3 posibles geometrías para las hipersuperficies espaciales Σ: Para $k = 0$ el Universo tiene una curvatura nula y una geometría espacial plana; para $k = 1$ el Universo tiene una curvatura positiva y una geometría espacial esférica; y para $k = -1$ el Universo tiene una curvatura negativa y una geometría espacial hiperbólica. Las observaciones astronómicas actuales [28] apuntan a que $k \approx 0$ por lo cual a grandes escalas el nuestro parece ser un Universo plano.

Una cantidad importante en el estudio del espacio de FLRW es el parámetro de Hubble, el cual está definido como:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}\,. \tag{4.3}$$

Este parámetro es dependiente del tiempo e indica la tasa de expansión del Universo. El valor en el presente del parámetro de Hubble es, según el estudio más reciente de las cefeidas de la Gran Nube de Magallanes [29] $H_0 = 74{,}03 \pm 1{,}42\ km \cdot s^{-1} Mp^{-1}$.

4.2. Ecuaciones de campo cosmológicas

Partiendo de la métrica (4.1) podemos hallar los símbolos de Christoffel, que están dados por (2.23), siendo sus únicos elementos no nulos:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{11} = a\dot{a}/(1-kr^2), && \Gamma^0_{22} = a\dot{a}r^2, && \Gamma^0_{33} = a\dot{a}r^2\sin^2\theta,\\
&\Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \dot{a}/a, && \Gamma^1_{11} = kr/(1-kr^2), && \Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2),\\
&\Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta, && \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = 1/r, && \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^3_{23} = \cot\theta. &&&&
\end{aligned}$$

A partir de ellos podemos usar (2.32) para calcular las componentes no nulas del tensor de Ricci:

$$R_{00} = -3\ddot{a}/a, \tag{4.4}$$

$$R_{11} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)/(1-kr^2), \tag{4.5}$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2, \tag{4.6}$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2\sin\theta. \tag{4.7}$$

El escalar de Ricci, que está dado por $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, será:

$$R = 6\left[\frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right] . \tag{4.8}$$

Para escribir las ecuaciones de campo de Einstein necesitamos conocer el tensor de energía-momento del Universo. La suposición más razonable y práctica para describir toda la materia y radiación que hay en el cosmos es modelándola como un fluido perfecto caracterizado en cada punto del espacio solamente por su presión p y su densidad de energía ρ. En este caso el tensor de energía-momento tendrá la forma [25]:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)\, u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} , \tag{4.9}$$

donde u_α es la 4-velocidad del fluido, que en coordenadas comóviles es simplemente $[u^\alpha] = (1, 0, 0, 0)$. Es importante precisar que debido a la isotropía y homogeneidad del Universo, tanto p como ρ pueden depender a lo sumo sólo del parámetro temporal t. La traza del tensor $T_{\mu\nu}$ está dada por la contracción:

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p . \tag{4.10}$$

Reemplazando (4.4)-(4.7) y (4.9) en (2.34), obtenemos las ecuaciones de campo cosmológicas, conocidas como las ecuaciones de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa\frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2} , \tag{4.11}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) . \tag{4.12}$$

La ley de la conservación de la energía y el momento establece que:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \partial^\mu T_{\mu\nu} - g^{\mu\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}T_{\rho\nu} - g^{\mu\sigma}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}T_{\rho\mu} = 0 . \tag{4.13}$$

Reemplazando (4.9) y los símbolos de Christoffel asociados a la métrica (4.1) en (4.13) obtenemos la ecuación de continuidad del fluido cosmológico:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 . \tag{4.14}$$

Esta relación puede ser deducida también a partir de las ecuaciones de Friedmann tomando la derivada temporal de (4.11) y usando (4.12). Podemos interpretar este resultado diciendo que en un Universo en expansión/contracción se genera una disminución/aumento de la densidad de energía presente en el mismo.

El sistema de ecuaciones diferenciales independientes (4.11) y (4.12) determinan la evolución temporal del factor de escala $a(t)$ y el comportamiento del Universo. Para resolver estas ecuaciones primero debemos establecer la relación que hay entre la densidad de energía y la presión que componen el fluido cosmológico. Para ello se propone una ecuación de estado, que en cosmología usualmente es:

$$w = \frac{p}{\rho} , \tag{4.15}$$

donde w es un parámetro el cual puede ser constante o dependiente del tiempo y que caracteriza el modelo cosmológico estudiado, siendo su valor determinado por la distribución de materia y radiación presentes en el Universo.

En los modelos de polvo el Universo está dominado por materia que no se mueve a velocidades relativistas, como las galaxias o el polvo intergaláctico, y que puede estar compuesta tanto por materia bariónica como por materia oscura fría (CDM) [30]. Estos modelos se caracterizan porque debido al movimiento conjunto entre el polvo y la expansión o contracción del Universo, la presión del fluido cosmológico es nula:

$$p_m = 0\,, \tag{4.16}$$

lo que a su vez genera la ecuación de estado:

$$w_m = 0\,.$$

Por otro lado, los modelos de radiación se caracterizan porque la radiación domina en el cosmos. El término radiación se refiere a todos los elementos relativistas presentes en el Universo y que puede estar compuesta tanto por radiación electromagnética (fotones) como por partículas poco masivas que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz, como los neutrinos. Según la teoría electromagnética clásica [31], la presión dada por la radiación está dada en función de su densidad de energía por:

$$p_r = \frac{\rho}{3}\,, \tag{4.17}$$

por lo que el parámetro de estado en estos modelos será:

$$w_r = \frac{1}{3}\,.$$

4.3. Constante cosmológica

Tanto en los modelos de radiación como de polvo se tiene que $\ddot{a} < 0$, debido a lo cual un Universo compuesto únicamente por estos dos elementos inevitablemente tendrá una expansión desacelerada o una contracción acelerada. Sin embargo, los resultados dados por el estudio del espectro electromagnético de las supernovas Tipo Ia [32] apuntan a que en la actualidad el Universo se expande aceleradamente. Del análisis de las ecuaciones (4.11) y (4.12) se desprende que la condición para que suceda una expansión acelerada del espacio es que el fluido cosmológico genere una presión negativa de tal forma que $\ddot{a} > 0$ y, como se puede deducir de (4.15), la ecuación de estado sea $w < -1/3$. Desde finales del siglo XX se han desarrollado una gran variedad de modelos cosmológicos que tratan de explicar esta dinámica del Universo, algunos contemplando una forma exótica de energía, llamada energía oscura [33], que genere en el fluido cosmológico la presión negativa necesaria para una expansión acelerada; o desarrollando teorías alternativas a la relatividad general, como las teorías de gravedad modificada las

cuales alteran las ecuaciones de campo de Einstein por medio de modificaciones en la acción de Hilbert [34].

El modelo ΛCDM describe la energía oscura como un fluido perfecto que llena el espacio, denominado constante cosmológica. La presión y la densidad de energía (que en este contexto es llamada densidad de energía del vacío) de la constante cosmológica están definidas como [25]:

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{\kappa}, \qquad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa}\,, \tag{4.18}$$

donde la constante Λ, también llamada constante cosmológica, parametriza tanto la densidad de energía del vacío como la presión del fluido cosmológico. Reemplazando (4.18) en (4.15), obtenemos la ecuación de estado de la constante cosmológica:

$$w_\Lambda = -1\,. \tag{4.19}$$

Podemos describir este fluido por medio del tensor de energía-momento:

$$T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu}\,. \tag{4.20}$$

Considerando esta contribución en las ecuaciones de Einstein, estas quedan modificadas como:

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g_{\mu\nu}\right) - \Lambda g_{\mu\nu}\,. \tag{4.21}$$

Tomando en cuenta (4.11) y (4.21) se obtienen las ecuaciones de Friedmann-Lemaître [27]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa\frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}\,, \tag{4.22}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}\,. \tag{4.23}$$

Con todo esto se evidencia a partir de la relación (4.23) que dependiendo del valor de la constante cosmológica Λ es posible describir adecuadamente la expansión acelerada que se observa en la dinámica actual del Universo.

En cosmología es conveniente reescribir las densidades de energía usando los llamados parámetros cosmológicos [2], definidos como:

$$\Omega_{m,r} = \frac{\kappa\rho}{3H^2}, \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \qquad \Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2} \tag{4.24}$$

Como se puede observar de su definición, el parámetro cosmológico $\Omega_{m,r}$ depende de la densidad de energía tanto de la materia bariónica como de la radiación electromagnética; Ω_Λ depende de la densidad de energía del vacío (por medio de la constante cosmológica Λ); y Ω_k, que es llamado parámetro de densidad

de curvatura, depende de la constante k. Reemplazando estas cantidades en la ecuación (4.22), obtenemos la sencilla y elegante relación:

$$\Omega_{m,r} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1\,. \tag{4.25}$$

Las mediciones del proyecto Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [35], muestran que el contenido actual de materia en el Universo está compuesto en un 72.1 % de energía oscura, un 23.3 % de materia oscura y un 4.6 % de materia ordinaria, por lo que los valores presentes ($t = t_0$) de los parámetros cosmológicos son:

$$\Omega_{m,r(t_0)} \approx 0{,}28, \qquad \Omega_{\Lambda(t_0)} \approx 0{,}72, \qquad \Omega_{k(t_0)} \approx 0.$$

4.4. Modelos inflacionarios

El modelo ΛCDM es el marco teórico más exitoso en la actualidad para describir la evolución del Universo después del Big Bang [1]. Sin embargo, hay una serie de problemas cosmológicos que este modelo no es capaz de explicar por si solo:

- **PROBLEMA DE LA PLANITUD**: Consideremos la ecuación de Friedmann:

  $$\Omega_k(t) = -\frac{k}{a^2H^2} = 1 - \Omega(t)\,. \tag{4.26}$$

  En esta ecuación todos los parámetros cosmológicos son dependientes del tiempo y relaciona la geometría del Universo (codificada por medio de la constante de curvatura k) con la materia y energía presentes en el mismo (codificadas por $\Omega(t)$). Como se mencionó anteriormente, las observaciones astronómicas actuales arrojan que el nuestro es un Universo plano ($k \approx 0$), por lo que debe cumplirse que:

  $$\Omega(t) = 1\,. \tag{4.27}$$

  El problema yace en que este valor es un punto inestable: la única forma en que el Universo sea plano en la actualidad es que también haya sido plano en su origen; bastaría una pequeña desviación de Ω de 1 hace miles de millones de años para que esta desviación creciera con el paso del tiempo hasta hacer que el Universo mostrara en el presente una curvatura observable. Aunque a priori es posible simplemente asumir la planitud del Universo en el pasado remoto como una condición inicial del mismo, debido a que no hay una razón física fundamental para que este sea el caso resulta natural preguntarse si no hubo algún mecanismo subyacente que hizo que esto sea posible.

- **PROBLEMA DEL HORIZONTE**: Analizando en frío imparcialmente, resulta extraño que el Universo sea homogéneo e isotrópico. Si consideramos que hay regiones que se encuentran causalmente desconectadas unas de otras, es imposible que estas regiones hayan tenido en el pasado el contacto

térmico necesario para que puedan describir las mismas propiedades en el presente. La única forma en que esto pudiese suceder es si de entrada todo el Universo hubiese sido igualmente homogéneo e isotrópico en sus orígenes, lo cual resulta ser una condición inicial extremadamente particular. Nuevamente cabe preguntarse si existió algún mecanismo en el pasado remoto que pudiese explicar la homogeneidad actual que se observa en el Universo.

Los problemas antes mencionados pueden ser solucionados de manera elegante considerando un periodo del Universo anterior a la formación de las partículas del modelo estándar (recalentamiento) en el que sucedió una expansión exponencial del espacio [36] denominado periodo inflacionario.

Los modelos más simples de inflación involucran un campo escalar ϕ, conocido como inflatón, mínimamente acoplado a la gravedad. De esta forma, la acción sobre la que se deducen todas las propiedades del inflatón es:

$$S = \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}R + \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right], \tag{4.28}$$

donde el primer término corresponde a la acción de Hilbert. La contribución por el campo escalar ϕ está incluida en el lagrangiano:

$$L = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\,. \tag{4.29}$$

Debido a que durante el periodo inflacionario el ente dominante en el Universo es el inflatón, la acción (4.28) no contiene un lagrangiano de materia. Aunque en general no es necesario tomar en cuenta ninguna particularidad del campo ϕ, es conveniente considerar que el campo escalar es homogéneo, por lo que será dependiente solo de la coordenada temporal y no de las coordenadas espaciales. Con el objetivo de hallar las ecuaciones que describan la dinámica del campo escalar aplicamos el principio variacional a la acción de la inflación mínimamente acoplada respecto a ϕ:

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta\phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi + \frac{dV}{d\phi}\right). \tag{4.30}$$

Reemplazando la métrica (4.1) en la ecuación anterior obtenemos la ecuación de movimiento de ϕ:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0\,. \tag{4.31}$$

El tensor de energía-momento del campo escalar está dado por:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\mathcal{L}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\partial^\sigma\phi\partial_\sigma\phi + V(\phi)\right]. \tag{4.32}$$

Comparando (4.32) con (4.9) se observa que el campo escalar tiene las características de un fluido perfecto. Tomando esto en cuenta podemos identificar la densidad de energía y la presión de ϕ como:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\,, \qquad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\,, \tag{4.33}$$

por lo que la ecuación de estado asociada será:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}\,. \tag{4.34}$$

Es aquí donde se observa por qué considerar un campo escalar es perfecto para describir la expansión acelerada durante los primeros momentos del Universo. Mientras se cumpla la condición de que el término potencial domine sobre el término cinético:

$$V \gg \dot{\phi}^2\,, \tag{4.35}$$

el parámetro de estado será negativo:

$$w_\phi \approx \frac{-V(\phi)}{V(\phi)} \approx -1 < -\frac{1}{3}\,, \tag{4.36}$$

por lo que el campo escalar tendrá una presión negativa:

$$p_\phi \approx -\rho_\phi\,, \tag{4.37}$$

y se generará una expansión acelerada del Universo. Cuando la energía cinética de ϕ aumenta hasta ser comparable con la energía potencial:

$$\dot{\phi}^2 \approx V(\phi)\,, \tag{4.38}$$

el periodo inflacionario finaliza y el Universo deja de acelerar exponencialmente, entrando así en una etapa de recalentamiento donde la densidad de energía del campo escalar se transforma en las partículas del modelo estándar y dando inicio a lo que actualmente se conoce como Big Bang [37]. A partir de este punto, el Universo evoluciona según lo descrito por el modelo ΛCDM.

Aunque la inflación cósmica resuelve de manera sencilla y elegante varios problemas cosmológicos asociados a las condiciones iniciales del Universo, aún no se sabe casi nada sobra la naturaleza del campo inflatón, existiendo una gran cantidad de modelos inflacionarios que describen distintos tipos de potenciales e interacciones con el espacio-tiempo. De todos estos, los más llamativos son los modelos inflacionarios con un acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y el escalar de Ricci debido a que permiten considerar al campo de Higgs como un candidato para el inflatón. Gracias a ello, estos modelos permiten establecer una relación natural entre el modelo estándar de partículas y el modelo estándar de cosmología.

En el siguiente capítulo se desarrollará el formalismo hamiltoniano de los modelos inflacionarios no mínimamente acoplados en el caso más general en que el acoplamiento se da por medio de una función arbitraria del campo inflatón.

Capítulo 5

Formalismo hamiltoniano del acoplamiento no mínimo

Los modelos de acoplamiento no mínimo entre la gravedad y los campos escalares aparecen de forma natural en el contexto de física teórica, como es en el caso de las teorías de gravedad modificada [34]. En el ámbito de la cosmología, el trabajo de Bezrukov y Shaposhnikov ha revivido la idea de la inflación de Higgs, la cual establece un puente entre el modelo estándar de partículas y las teorías inflacionarias al identificar al campo de Higgs como el responsable de la inflación cósmica, siendo esto posible únicamente en el contexto de modelos de acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y el escalar de curvatura [13] [14].

Para el estudio de estos modelos según el formalismo hamiltoniano partimos con la acción de un campo escalar acoplado al escalar de curvatura [12], la cual está dada por:

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[{}^{(4)}RF(\phi) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right],$$

donde $V(\phi)$ es el potencial inflacionario y $F(\phi)$ es la función que genera el acoplamiento no mínimo, estando esta definida como:

$$F(\phi) = \frac{1}{2\kappa}\left(1 - \frac{1}{2}\xi f(\phi)\right), \tag{5.1}$$

siendo ξ un parámetro de acoplamiento adimensional constante y $f(\phi)$ una función genérica de ϕ. Nótese que el caso particular en el que $\xi = 0$ corresponde al modelo inflacionario con acoplamiento mínimo visto en la sección anterior.

Como $\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}$, la acción toma la forma:

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{\gamma}N\left[{}^{(4)}RF(\phi) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right]. \tag{5.2}$$

Para poder hallar el hamiltoniano asociado a esta acción debemos expresar cada uno de los términos de (5.2) en función de las variables ADM. Con tal propósito analizamos el término $N^{(4)}R$ haciendo uso de la descomposición del escalar de curvatura dado por (3.56) y de la relación (3.55):

$$\begin{aligned}
N^{(4)}R &= N\left(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}\right) - 2\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K - 2D_iD^iN\,,\\
&= N\left(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}\right) - 2\left[\gamma^{ij}\mathcal{L}_{\boldsymbol{m}}K_{ij} + 2NK_{ij}K^{ij}\right] - 2D_iD^iN\,,\\
&= N\left(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}\right) - 2\left[\gamma^{ij}\left(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\partial}_t}K_{ij} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}K_{ij}\right) + 2NK_{ij}K^{ij}\right]\\
&\quad - 2D_iD^iN\,.
\end{aligned}$$

Expandiendo $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}} K_{ij}$ y tomando en cuenta que en un sistema adaptado a la foliación la derivada de Lie a lo largo de $\boldsymbol{\partial}_t$ se reduce a la derivada parcial con respecto a t, la ecuación anterior toma la forma:

$$N^{(4)}R = N\left(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}\right) - 2\left[\gamma^{ij}\partial_0 K_{ij} - \beta^j D_j K - \gamma^{ij}K_{kj}D_i\beta^k - \gamma^{ij}K_{ik}D_j\beta^k + 2NK_{ij}K^{ij}\right] - 2D_iD^iN\,. \tag{5.3}$$

Ahora podemos reescribir el término $NK_{ij}K^{ij}$ partiendo de la expresión del tensor de curvatura extrínseca:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\partial_0\gamma_{ij} - D_i\beta_j - D_j\beta_i\right)\,,$$

y contrayéndola con NK^{ij}:

$$\begin{aligned} NK_{ij}K^{ij} &= -\left(\frac{1}{2N}\right)NK^{ij}\left(\partial_0\gamma_{ij} - D_i\beta_j - D_j\beta_i\right)\,, \\ &= -\frac{1}{2}(\underbrace{K^{ij}\partial_0\gamma_{ij}}_{-K_{ij}\partial_0\gamma^{ij}} - K^{ij}D_i\beta_j - \underbrace{K^{ij}D_j\beta_i}_{K^{ij}D_i\beta_j})\,, \\ &= -\frac{1}{2}(-K_{ij}\partial_0\gamma^{ij} - 2K^{ij}D_i\beta_j)\,, \\ &= -\frac{1}{2}(-\partial_0 K + \gamma^{ij}\partial_0 K_{ij} - 2K^{ij}D_i\beta_j)\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Reemplazamos la expresión (5.4) en (5.3):

$$\begin{aligned} N^{(4)}R &= N\left(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}\right) - 2\gamma^{ij}\partial_0 K_{ij} + 2\beta^j D_j K \\ &\quad + 2\gamma^{ij}K_{kj}D_i\beta^k + 2\gamma^{ij}K_{ik}D_j\beta^k - 2\gamma^{ij}K_{ik}D_j\beta^k \\ &\quad - 2NK_{ij}K^{ij} - \partial_0 K + \gamma^{ij}\partial_0 K_{ij} - 2K^{ij}D_i\beta_j - 2\gamma^{ij}D_iD_jN\,, \\ &= N\left(R + K^2 - K^{ij}K_{ij}\right) - \gamma^{ij}\partial_0 K_{ij} - \partial_0 K + 2\gamma^{ij}\beta_j K_{ik} \\ &\quad + 2\beta^j D_j K - 2\gamma^{ij}D_jD_iN + 2\gamma^{ij}K_{ik}D_j\beta^k \\ &\quad - 2\gamma^{ij}\beta^k D_i K_{jk} + 2\beta_i K D_j\gamma^{ij}\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Con todo esto y reagrupando términos, $N^{(4)}R$ queda finalmente expresado como:

$$\begin{aligned} N^{(4)}R &= N\left(R + K^2 - K_{ij}K^{ij}\right) - \gamma^{ij}\partial_0 K_{ij} - \partial_0 K \\ &\quad - 2\beta_i D_j\left(K^{ij} - \gamma^{ij}K\right) - 2\gamma^{ij}D_j\left(D_iN - \beta^k K_{ik}\right)\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ahora realizamos la descomposición 3+1 del término cinético del campo escalar:

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\;\partial_\nu\phi = g^{00}\partial_0\phi\;\partial_0\phi + g^{0i}\partial_0\phi\;\partial_i\phi + g^{j0}\partial_j\phi\;\partial_0\phi + g^{ij}\partial_i\phi\;\partial_j\phi\,. \tag{5.7}$$

Expresamos cada una de los componentes $g^{\mu\nu}$ en función de la descomposición 3+1 de la métrica dada por (3.42):

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\ \partial_\nu\phi &= -\left(\frac{\partial_0\phi}{N}\right)^2 + \frac{2\beta^i}{N^2}\partial_0\phi\ \partial_i\phi + \left(\gamma^{ij} - \frac{\beta^i\beta^j}{N^2}\right)\partial_i\phi\ \partial_j\phi\,, \\ &= -\frac{1}{N}\left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right)^2 + N\gamma^{ij}\partial_i\phi\ \partial_j\phi\,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Reemplazando (5.6) y (5.8) en (5.2) obtenemos la descomposición 3+1 de la acción del acoplamiento no mínimo:

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{\gamma}\Big\{ & \left[N\left(R + K^2 - K_{ij}K^{ij}\right) - \gamma^{ij}\partial_0 K_{ij} - \partial_0 K\right. \\ & \left. -2\beta_i D_j\left(K^{ij} - \gamma^{ij}K\right) - 2\gamma^{ij}D_j\left(D_i N - \beta^k K_{ik}\right)\right] \times F(\phi) \\ & + \frac{1}{2N}\left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right)^2 - \frac{N}{2}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - NV\left(\phi\right)\Big\}\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

El tensor K_{ij} contiene al término $\partial_0\gamma_{ij}$ por medio de la relación (3.38), por lo que para facilitar el cálculo de los momentos conjugados y del hamiltoniano, primero eliminamos las derivadas de K_{ij} y K de la acción (5.9). Con tal propósito expandimos cada uno de los términos que contienen derivadas de K_{ij} y K por medio de la regla de Leibniz. De esta forma la acción del acoplamiento no mínimo toma la forma:

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{\gamma}\Big\{ & K_{ij}F(\phi)\partial_0\gamma^{ij} + 2K\partial_0 F(\phi) - 2\partial_0\left(F(\phi)K\right) \\ & + 2K^{ij}F(\phi)D_j\beta_i + 2D_j\left(\beta_i F(\phi)\gamma^{ij}K\right) - 2K\gamma^{ij}\beta_i D_j F(\phi) \\ & - 2K\gamma^{ij}F(\phi)D_j\beta_i - 2\gamma^{ij}D_j\left(F(\phi)D_i N\right) + 2\gamma^{ij}D_i\left(ND_j F(\phi)\right) \\ & - 2\gamma^{ij}ND_iD_jF(\phi) + N\left(R + K^2 - K_{ij}\right)F(\phi) \\ & + \frac{1}{2N}\left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right) - \frac{N}{2}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - NV(\phi)\Big\}\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Podemos eliminar $2\gamma^{ij}D_j\left(F(\phi)D_iN\right)$ y $2\gamma^{ij}D_i\left(ND_jF(\phi)\right)$ debido a que al ser divergencias puras contribuyen en la acción solo como términos de frontera. Además, tomando en cuanta que $\partial_0 F(\phi) = F'\partial_0\phi$ y $D_iF(\phi) = F'\partial_i\phi$, donde $F' = \partial F/\partial\phi$, y reagrupando algunos términos la acción se vuelve:

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{\gamma}\Big\{ & K_{ij}F(\phi)\partial_0\gamma^{ij} - 2\partial_0\left(F(\phi)K\right) + 2KF'\left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right) \\ & - \partial_0\left(F(\phi)K\right) + 2K^{ij}F(\phi)D_j\beta_i + 2D_j\left(\beta_i F(\phi)\gamma^{ij}K\right) \\ & - 2K\gamma^{ij}\beta_i D_jF(\phi) - 2K\gamma^{ij}F(\phi)D_j\beta_i - 2\gamma^{ij}ND_jD_iF(\phi) \\ & + N\left(R + K^2 - K_{ij}\right)F(\phi) + \frac{1}{2N}\left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right) \\ & - \frac{N}{2}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - NV(\phi)\Big\}\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Analizamos los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
A_1 &= F(\phi)\underbrace{K_{ij}\partial_0\gamma^{ij}}_{-K^{ij}\partial_0\gamma_{ij}} + 2K^{ij}F(\phi)D_j\beta_i - 2K\gamma^{ij}F(\phi)D_j\beta_i\,,\\
&= -K^{ij}F(\phi)\partial_0\gamma_{ij} + 2K^{ij}F(\phi)D_j\beta_i - 2K\gamma^{ij}F(\phi)D_j\beta_i\,,\\
&= -F(\phi)K^{ij}\underbrace{\left(\partial_0\gamma_{ij} - D_j\beta_i - D_i\beta_j\right)}_{-2NK_{ij}} - 2K\gamma^{ij}F(\phi)D_j\beta_i\,,\\
&= F(\phi)K^{ij}(2NK_{ij}) - 2K\gamma^{ij}F(\phi)D_j\beta_i\,,\\
&= 2F(\phi)K^{ij}K_{ij}N - 2NK^2F(\phi) - KF(\phi)\gamma^{ij}\partial_0\gamma_{ij}\,. \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en (5.11) obtenemos:

$$\begin{aligned}
S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{\gamma}\Big\{ & N(R + K^{ij}K_{ij} - K^2)F + 2KF'(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi)\\
& - 2\gamma^{ij}ND_jD_iF(\phi) + \frac{1}{2N}\left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right)\\
& - \frac{N}{2}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - NV(\phi) - KF(\phi)\gamma^{ij}\partial_0\gamma_{ij}\\
& - 2\partial_0\left(F(\phi)K\right) + 2D_j\left(F(\phi)K\beta^j\right)\Big\}\,. \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Los últimos tres términos se eliminan debido a que pueden expresarse como la divergencia pura respecto a la conexión espacial $\boldsymbol{D}$ de un vector normal a Σ:

$$\begin{aligned}
A_2 &= -KF(\phi)\gamma^{ij}\partial_0\gamma_{ij} - 2\partial_0\left(F(\phi)K\right) + 2D_j\left(F(\phi)K\beta^j\right)\,,\\
&= -KF(\phi)t^0\gamma^{ij}\partial_0\gamma_{ij} - 2\partial_0\left(F(\phi)Kt^0\right)\\
&\quad + KF(\phi)\beta^k\gamma^{ij}\partial_k\gamma_{ij} + 2\partial_j\left(KF(\phi)\beta^j\right)\,,\\
&= -KF(\phi)t^\mu\gamma^{ij}\partial_\mu\gamma_{ij} - 2\partial_\mu\left(F(\phi)Kt^\mu\right)\\
&\quad + KF(\phi)\beta^\mu\gamma^{ij}\partial_\mu\gamma_{ij} + 2\partial_\mu\left(KF(\phi)\beta^\mu\right)\,,\\
&= -KF(\phi)\left(t^\mu - \beta^\mu\right)\gamma^{ij}\partial_\mu\gamma_{ij} - 2\partial_\mu\left[F(\phi)K\left(t^\mu - \beta^\mu\right)\right]\,,\\
&= -KF(\phi)Nn^\mu\gamma^{ij}\partial_\mu\gamma_{ij} - 2\partial_\mu\left(F(\phi)KNn^\mu\right)\,,\\
&= 2D_\mu(KF(\phi)Nn^\mu)\,.
\end{aligned}$$

Debido a esto, la acción del acoplamiento no mínimo toma finalmente la forma más simple:

$$\begin{aligned}
S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{\gamma}\Big\{ & N(R + K^{ij}K_{ij} - K^2)F + 2KF'(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi)\\
& - 2\gamma^{ij}ND_jD_iF(\phi) + \frac{1}{2N}\left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right)^2\\
& - \frac{N}{2}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - NV(\phi)\Big\}\,. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

La densidad lagrangiana del acoplamiento gravitacional no mínimo será:

$$\mathcal{L} = N(R + K^{ij}K_{ij} - K^2)F + 2KF'(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi) - NV(\phi) \\ - 2\gamma^{ij}ND_jD_iF(\phi) + \frac{1}{2N}\left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right)^2 - \frac{N}{2}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi\,. \tag{5.15}$$

Para poder hallar la densidad hamiltoniana asociada a esta acción debemos encontrar los momentos conjugados de las variables dinámicas. Como se puede observar directamente de (5.15), la densidad lagrangiana no depende de las derivadas temporales de N y β^i, por lo que la función lapso y el vector desplazamiento no son variables dinámicas del sistema. Las únicas variables dinámicas son el campo escalar ϕ y la métrica espacial γ_{ij} [38]. Los momentos conjugados asociados p^{ij} y p_ϕ se hallan variando la acción anterior con respecto a $\partial_0\gamma_{ij}$ y $\partial_0\phi$, respectivamente:

$$p^{ij} = \frac{\delta S}{\delta\partial_0\gamma_{ij}}\,, \\ = \sqrt{\gamma}\left(K\gamma^{ij} - K^{ij}\right)F(\phi) - \frac{1}{N}\sqrt{\gamma}\;\gamma^{ij}F'C_0\,. \tag{5.16}$$

$$p_\phi = \frac{\delta S}{\delta\partial_0\phi}\,, \\ = \sqrt{\gamma}C_0 + 2\sqrt{\gamma}KF'\,. \tag{5.17}$$

donde:

$$C_0 = \left(\partial_0\phi - \beta^i\partial_i\phi\right)\,. \tag{5.18}$$

La densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ del acoplamiento no mínimo se calcula por medio de la transformada de Legendre:

$$\mathcal{H} = p^{ij}\partial_0\gamma_{ij} + p_\phi\partial_0\phi - \sqrt{\gamma}\mathcal{L}\,. \tag{5.19}$$

Expresamos K y K^{ij} en términos de los momentos p_ϕ y p^{ij}:

$$K = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}F}\left(\frac{p + 3F'p_\phi}{\Omega}\right)\,, \tag{5.20}$$

$$K^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}F}\left[\frac{1 + 2\frac{F'^2}{F}}{2\Omega}\gamma^{ij}p - p^{ij} + \frac{F'}{2\Omega}\gamma^{ij}p_\phi\right]\,, \tag{5.21}$$

donde $p = p^{ij}\gamma_{ij}$ y $\Omega = 1 + 3\frac{F'^2}{F}$. Despejando C_0 de (5.17) por medio de (5.20) obtenemos:

$$C_0 = \frac{N}{\sqrt{\gamma}}\left[\left(1 - \frac{3F'^2}{F\Omega}\right)p_\phi - \left(\frac{F'}{F\Omega}\right)p\right]\,. \tag{5.22}$$

Así, comparando (5.18) y (5.22) se consigue:

$$p_\phi\partial_0\phi = \frac{N}{\sqrt{\gamma}}\left[\left(1 - \frac{3F'^2}{F\Omega}\right)p_\phi^2 - \left(\frac{F'}{F\Omega}\right)pp_\phi\right] + \beta^i\partial_i\phi\,. \tag{5.23}$$

Por otro lado, contrayendo la relación (3.38) con p^{ij} y despejando se logra:

$$p^{ij}\partial_0\gamma_{ij} = 2p^{ij}D_i\beta_j - N\gamma_{ik}\gamma_{jl}K^{kl}p^{ij} - NK_{ij}p^{ij}\,. \tag{5.24}$$

Reemplazando (5.16) y (5.21) en la ecuación anterior, esta toma la forma:

$$\begin{aligned} p^{ij}\partial_0\gamma_{ij} = 2p^{ij}D_i\beta_j - \frac{N}{\sqrt{\gamma}F}\left[\frac{1}{2\Omega}\left(1+\frac{2F'^2}{F}\right)p^2 - p^{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jl}p^{kl} + \frac{F'}{2\Omega}pp_\phi\right] \\ - N\left[\sqrt{\gamma}\left(K^2 - K^{ij}K_{ij}\right)F - \frac{1}{N}\sqrt{\gamma}F'KC_0\right]\,. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Reemplazando (5.23) y (5.25) en (5.19), la densidad hamiltoniana se vuelve:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = {} & \frac{N}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{3F'^2}{F\Omega}\right)p_\phi^2 - \frac{N}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{F'}{F\Omega}\right)pp_\phi + \beta^i\partial_i\phi \\ & + 2p^{ij}D_i\beta_j + \frac{N}{\sqrt{\gamma}F}\left[p^{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jl}p^{kl} - \frac{1}{2\Omega}\left(1+\frac{2F'^2}{F}\right)p^2\right] \\ & + \sqrt{\gamma}F'KC_0 - \frac{N}{2\sqrt{\gamma}}\frac{F'}{F\Omega}pp_\phi - NFR\sqrt{\gamma} \\ & - 2\sqrt{\gamma}F'KC_0 - 2\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}ND_jD_iF - \frac{\sqrt{\gamma}}{2N}C_0^2 \\ & + \frac{N}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + N\sqrt{\gamma}V(\phi)\,. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Nuestro objetivo ahora es expresar la densidad hamiltoniana en función únicamente de los momentos conjugados. Para ello reescribimos $\frac{\sqrt{\gamma}}{2N}C_0^2$ y $\sqrt{\gamma}F'C_0K$ en términos de p^{ij} y p_ϕ haciendo uso de (5.22) y (5.20):

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{2N}C_0^2 = \frac{N}{2\sqrt{\gamma}}\left[p_\phi^2 + \left(\frac{3F'^2}{F\Omega}p_\phi + \frac{F'}{F\Omega}p\right)^2 - 2\left(\frac{3F'^2}{F\Omega}p_\phi^2 + \frac{F'}{F\Omega}pp_\phi\right)\right]\,, \tag{5.27}$$

$$\sqrt{\gamma}F'C_0K = \frac{N}{2\gamma}\left[\frac{F'}{F\Omega}pp_\phi + \frac{3F'^2}{F\Omega}p_\phi^2 - \left(\frac{F'}{F\Omega}p + \frac{3F'^2}{F\Omega}p_\phi\right)^2\right]\,. \tag{5.28}$$

Reemplazando (5.27) y (5.28) en (5.26) obtenemos la densidad hamiltoniana de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = {} & -\sqrt{\gamma}NRF + \frac{N}{\sqrt{\gamma}F}\left[p^{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jl}p^{kl} - \frac{1}{2\Omega}\left(1+\frac{2F'^2}{F}\right)p^2\right] \\ & + \frac{N}{2\sqrt{\gamma}\Omega}p_\phi^2 + \frac{N}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + N\sqrt{\gamma}V(\phi) - \frac{N}{\sqrt{\gamma}F\Omega}F'pp_\phi \\ & - 2\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}ND_jD_iF + p_\phi\beta^i\partial_i\phi + 2p^{ij}D_i\beta_j\,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Las ecuaciones dinámicas o de evolución del sistema se hallan por medio de las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{ij} &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p^{ij}}\,, \\ &= \frac{2N}{\sqrt{\gamma}F}\left[p_{ij} - \frac{1}{2\Omega}\left(1 + \frac{2F'^2}{F}\right)\gamma_{ij}p\right] - \frac{NF'}{\sqrt{\gamma}F\Omega}p_\phi\gamma_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i\,,\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}^{ij} &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \gamma_{ij}}\,, \\ &= -N\sqrt{\gamma}\left(R^{ij} - \frac{1}{2}R\gamma^{ij}\right) + \frac{N\gamma^{ij}}{2\sqrt{\gamma}F}\left[p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2\Omega}\left(1 + \frac{2F'^2}{F}\right)p^2\right] \\ &\quad - \frac{2N}{F\sqrt{\gamma}}\left[p^{ic}p^j_c - \frac{1}{2\Omega}\left(1 + \frac{2F'^2}{F}\right)pp^{ij}\right] + \frac{N\gamma^{ij}}{4\sqrt{\gamma}\Omega}p_\phi^2 \\ &\quad - \frac{N}{4}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\gamma^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \frac{N}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ia}\gamma^{jb}\partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{N}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}V(\phi) \\ &\quad - \frac{NF'}{2\sqrt{\gamma}F\Omega}pp_\phi\gamma^{ij} + \frac{NF'}{\sqrt{\gamma}F\Omega}p_\phi p^{ij} + N\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\gamma^{ab}D_bD_aF \\ &\quad - 2N\sqrt{\gamma}\gamma^{ia}\gamma^{jb}D_jD_iF + p_\phi\gamma^{ia}\gamma^{jb}\beta_b\partial_a\phi + \sqrt{\gamma}\left(D^iD^jN - \gamma^{ij}D^cD_cN\right) \\ &\quad + \sqrt{\gamma}D_c\left(\frac{\beta^cp^{ij}}{\sqrt{\gamma}} - 2p^{c(i}D_c\beta^{j)}\right)\,,\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_\phi}\,, \\ &= \frac{N}{\sqrt{\gamma}\Omega}p_\phi - \frac{NF'}{\sqrt{\gamma}F\Omega} + \beta^i\partial_i\phi\,,\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_\phi &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}\,, \\ &= \frac{NF'}{\sqrt{\gamma}F^2}\left[p^{ij}p_{ij} - \frac{1}{2\Omega}\left(1 + \frac{2F'^2}{F}\right)p^2\right] - \frac{Np^2\Omega'}{3\sqrt{\gamma}F\Omega}\left(1 + \frac{1}{\Omega}\right) \\ &\quad + \frac{Np_\phi^2\Omega}{2\sqrt{\gamma}\Omega^2} - N\sqrt{\gamma}V'(\phi) - \frac{Npp_\phi F'\Omega'}{\sqrt{\gamma}F\Omega^2} + \frac{Npp_\phi}{\sqrt{\gamma}\Omega}\left(\frac{F''F - F'^2}{F^2}\right) \\ &\quad + 2\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}N\left(F'''\partial_i\phi\partial_j\phi + F''\partial_j\partial_i\phi\right)\end{aligned} \tag{5.33}$$

El conjunto de ecuaciones (5.30)-(5.33) describen cómo evoluciona el sistema a estudiar dadas ciertas condiciones iniciales.

La última parte de la formulación hamiltoniana consiste en obtener las ecuaciones de restricción de la teoría. Estas se hallan variando $\mathcal{H}$ con respecto a N y β^i:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta N} = &-\sqrt{\gamma}RF + \frac{1}{\sqrt{\gamma}F}\left[p^{ij}\gamma_{ik}\gamma_{jl}p^{kl} - \frac{1}{2\Omega}\left(1+\frac{2F'^2}{F}\right)p^2\right] \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}\Omega}p_\phi^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + \sqrt{\gamma}V(\phi) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}F\Omega}F'pp_\phi \\ &- 2\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}D_jD_iF + p_\phi\beta^i\partial_i\phi = 0\,, \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\beta^i} = p_\phi\partial_i\phi - 2\gamma_{ik}D_jp^{kj} = 0\,. \tag{5.35}$$

Las ecuaciones (5.34) y (5.35) son un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales que deben ser satisfechas por las condiciones iniciales del sistema antes de tan siquiera considerar su evolución. y muestran que en el formalismo hamiltoniano la función lapso y el vector desplazamiento juegan el rol de multiplicadores de Lagrange, siendo las verdaderas variables dinámicas γ_{ij}, p^{ij}, ϕ y p_ϕ [17].

Las ecuaciones dinámicas y de restricción desarrolladas en este capítulo resultan mucho más complejas y generales que el caso del acoplamiento mínimo [39], siendo este un caso particular que se obtiene cuando el parámetro de acoplamiento ξ tiende a cero, como se puede observar de (5.1). Además, son una generalización de las ecuaciones de restricción de Hamilton y de momento de la formulación ADM usual en el vacío [40]

El formalismo hamiltoniano de los modelos con acoplamiento no mínimo resulta fundamental en cosmología cuántica y gravedad canónica [41], siendo la base del desarrollo de la ecuación de Wheeler-DeWitt [42].

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de investigación se ha presentado una revisión de los principales conceptos de geometría diferencial y de la relatividad general. Además, se ha dado una introducción a las ideas más importantes del formalismo 3+1 y se describió las características del modelo cosmológico ΛCDM y de los modelos inflacionarios mínimamente acoplados.

El cuerpo central del presente trabajo de investigación se encuentra en el desarrollo del formalismo hamiltoniano de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo. Aplicando los resultados del formalismo 3+1 se construyó la acción del acoplamiento no mínimo en función de las variables ADM, la cual está dada por (5.14), mostrándose que las variables dinámicas del sistema están dadas por la métrica espacial γ_{ij} y el campo escalar ϕ; mientras que el vector desplazamiento β^i y la función lapso N solo juegan el papel de multiplicadores de Lagrange. Además, se halló los momentos conjugados p^{ij} (5.16) y p_ϕ (5.17) y, por medio de la transformada de Legendre, la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ en función de los momentos conjugados y las variables ADM, la cual se encuentra expresada en (5.29). A partir de ahí, se hallaron las ecuaciones dinámicas y las restricciones de los modelos inflacionarios con acoplamiento no mínimo, dadas en el sistema de ecuaciones (5.30)-(5.35). Después de elegir una métrica para el sistema, describir la geometría de las hipersuperficies y especificar las condiciones iniciales que satisfacen las ecuaciones de restricción, es posible determinar la evolución del sistema cosmológico usando las ecuaciones dinámicas.

La densidad hamiltoniana (5.29) y las ecuaciones (5.30)-(5.35) obtenidas en este trabajo describen en la forma más general posible las características de un sistema inflacionario asociado a un campo escalar, puesto que no se han realizado ninguna asunción ni del tipo de acoplamiento no mínimo (no se ha especificado la forma de la función $F(\phi)$) ni del tipo de modelo inflacionario (no se ha especificado el tipo de potencial $V(\phi)$). A su vez, estas ecuaciones contienen como casos particulares a las ecuaciones de Hamilton de la relatividad general en el vacío y de los modelos inflacionarios mínimamente acoplados ($\xi = 0$).

Bibliografía

[1] Turner, M. S. «The case for LambdaCDM». En: *arXiv preprint astro-ph/9703161* (1997).

[2] Weinberg, S. *Cosmology*. Oxford university press, 2008.

[3] Guth, A. H. «Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems». En: *Physical Review D* vol. 23, n.º 2 (1981), pág. 347.

[4] Starobinsky, A. A. «A new type of isotropic cosmological models without singularity». En: *Physics Letters B* vol. 91, n.º 1 (1980), págs. 99-102.

[5] Linde, A. D. «A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems». En: *Physics Letters B* vol. 108, n.º 6 (1982), págs. 389-393.

[6] Kofman, L., Linde, A. y Starobinsky, A. A. «Towards the theory of reheating after inflation». En: *Physical Review D* vol. 56, n.º 6 (1997), pág. 3258.

[7] Guth, A. H. y Pi, S.-Y. «Fluctuations in the new inflationary universe». En: *Physical Review Letters* vol. 49, n.º 15 (1982), pág. 1110.

[8] Hawking, S. W. «The development of irregularities in a single bubble inflationary universe». En: *Physics Letters B* vol. 115, n.º 4 (1982), págs. 295-297.

[9] Starobinsky, A. A. «Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations». En: *Physics Letters B* vol. 117, n.º 3-4 (1982), págs. 175-178.

[10] Collaboration, A. y col. «Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC». En: *arXiv preprint arXiv:1207.7214* (2012).

[11] Chatrchyan, S. y col. «Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC». En: *Physics Letters B* vol. 716, n.º 1 (2012), págs. 30-61.

[12] Steinwachs, C. F. «Higgs field in cosmology». En: *One Hundred Years of Gauge Theory*. Springer, 2020, págs. 253-287.

[13] Bezrukov, F. y Shaposhnikov, M. «Standard Model Higgs boson mass from inflation: Two loop analysis». En: *Journal of High Energy Physics* vol. 2009, n.º 07 (2009), pág. 089.

[14] Bezrukov, F. y Shaposhnikov, M. «The Standard Model Higgs boson as the inflaton». En: *Physics Letters B* vol. 659, n.º 3 (2008), págs. 703-706.

[15] Arnowitt, R., Deser, S. y Misner, C. W. «Canonical variables for general relativity». En: *Physical Review* vol. 117, n.º 6 (1960), pág. 1595.

[16] Arnowitt, R., Deser, S. y Misner, C. W. «Dynamical structure and definition of energy in general relativity». En: *Physical Review* vol. 116, n.º 5 (1959), pág. 1322.

[17] Gourgoulhon, E. *3+ 1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*. Vol. 846. Springer Science & Business Media, 2012.

[18] Wheeler, J. A. «Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics.» En: *pp 615-724 of Topics in Nonlinear Physics. Zabusky, Norman J.(ed.). New York, Springer-Verlag New York, Inc., 1968.* (1969).

[19] DeWitt, B. S. «Quantum theory of gravity. I. The canonical theory». En: *Physical Review* vol. 160, n.º 5 (1967), pág. 1113.

[20] Alcubierre, M. *Introduction to 3+ 1 numerical relativity*. Vol. 140. Oxford University Press, 2008.

[21] Isham, C. J. *Modern differential geometry for physicists*. Vol. 61. World Scientific Publishing Company, 1999.

[22] Thorne, K. S., Misner, C. W. y Wheeler, J. A. *Gravitation*. Freeman, 2000.

[23] Hawking, S. W. y Ellis, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Vol. 1. Cambridge university press, 1973.

[24] Poisson, E. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.

[25] Carroll, S. M. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.

[26] Baumann, D. «Cosmology». En: *Part III Mathematical Tripos* (2012).

[27] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P. y Lasenby, A. N. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.

[28] Ade, P. A. y col. «Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters». En: *Astronomy & Astrophysics* vol. 594 (2016), A13.

[29] Riess, A. G. y col. «Large Magellanic Cloud Cepheid standards provide a 1 % foundation for the determination of the Hubble constant and stronger evidence for physics beyond ΛCDM». En: *The Astrophysical Journal* vol. 876, n.º 1 (2019), pág. 85.

[30] Bertone, G., Hooper, D. y Silk, J. «Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints». En: *Physics reports* vol. 405, n.º 5-6 (2005), págs. 279-390.

[31] Griffiths, D. J. *Introduction to electrodynamics*. 2005.

[32] Riess, A. G. y col. «Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant». En: *The Astronomical Journal* vol. 116, n.º 3 (1998), pág. 1009.

[33] Copeland, E. J., Sami, M. y Tsujikawa, S. «Dynamics of dark energy». En: *International Journal of Modern Physics D* vol. 15, n.º 11 (2006), págs. 1753-1935.

[34] Faraoni, V. *Cosmology in scalar-tensor gravity*. Vol. 139. Springer Science & Business Media, 2004.

[35] Jarosik, N. y col. «Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP*) observations: sky maps, systematic errors, and basic results». En: *The Astrophysical Journal Supplement Series* vol. 192, n.º 2 (2011), pág. 14.

[36] Baumann, D. «TASI lectures on inflation». En: *arXiv preprint arXiv:0907.5424* (2009).

[37] Bassett, B. A., Tsujikawa, S. y Wands, D. «Inflation dynamics and reheating». En: *Reviews of Modern Physics* vol. 78, n.º 2 (2006), pág. 537.

[38] Weenink, J. y Prokopec, T. «Gauge invariant cosmological perturbations for the nonminimally coupled inflaton field». En: *Physical Review D* vol. 82, n.º 12 (2010), pág. 123510.

[39] Blau, M. *Lecture notes on general relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern, Germany, 2011.

[40] Tong, F. «A Hamiltonian Formulation of General Relativity». En: (2006).

[41] Wang, S.-J., Yamada, M. y Vilenkin, A. «Constraints on non-minimal coupling from quantum cosmology». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* vol. 2019, n.º 08 (2019), pág. 025.

[42] Kiefer, C. «Non-minimally coupled scalar fields and the initial value problem in quantum gravity». En: *Physics Letters B* vol. 225, n.º 3 (1989), págs. 227-232.