Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Análisis de un modelo matemático compartimental de la dinámica de transmisión del VIH/SIDA con tratamiento y cobertura mediática

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

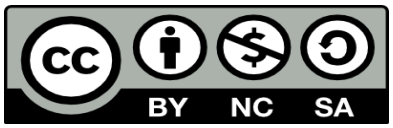
Evelyn Katherine GONZALES MORENO

ASESOR

Dra.Roxana LÓPEZ CRUZ

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Gonzales, E. (2025). *Análisis de un modelo matemático compartimental de la dinámica de transmisión del VIH/SIDA con tratamiento y cobertura mediática*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Evelyn Katherine Gonzales Moreno
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	44464211
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-4739-2967
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	**Roxana López Cruz**
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10798114
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-7703-5784
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Renato Mario Benazic Tome
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445668
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43688114
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Manuel Adrian Acuña Zegarra
Tipo de documento	Pasaporte
Número de documento de identidad	PE / 221094679
Datos de investigación	
Línea de investigación	Matemática Aplicada

Grupo de investigación	**GI CMATVIDA**
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	**Nombre:** Universidad Nacional Mayor de San Marcos **País:** Perú **Departamento:** Lima **Provincia:** Lima **Distrito:** Lima (Cercado de Lima) **Centro poblado:** Lima Metropolitana **Urbanización:** Urbanización San Marcos (o zona universitaria) **Manzana y lote:** No aplica (campus universitario) **Calle / Avenida:** Avenida Germán Amézaga N.° 375 **Latitud:** −12.05635 **Longitud:** −77.08491
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Marzo 2022 - Marzo 2025
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 17:10.. horas del día jueves dieciocho de diciembre de dos mil veinticinco, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, el Jurado Examinador de tesis, presidido por el Dr. Renato Mario Benazic Tome e integrado por los siguientes miembros: Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (Jurado Informante), Dr. Adrian Acuña Zegarra (Jurado Externo) y la Dra. Roxana López Cruz como Miembro de Asesora; se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «ANÁLISIS DE UN MODELO MATEMÁTICO COMPARTIMENTAL DE LA DINÁMICA DE TRANSMISIÓN DEL VIH/SIDA CON TRATAMIENTO Y COBERTURA MEDIÁTICA», presentada por la Bachiller Evelyn Katherine Gonzales Moreno, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por la graduanda; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido la Bachiller **EVELYN KATHERINE GONZALES MORENO**, el calificativo de 18. MUY BUENO .....

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Examinador recomienda que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional** a la Bachiller **EVELYN KATHERINE GONZALES MORENO**.

Siendo las 18:35.. horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Renato Mario Benazic Tome
Presidente

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Miembro

Dr. Adrian Acuña Zegarra
Miembro Externo

Dra. Roxana López Cruz
Miembro Asesora

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Roxana López Cruz en mi condición de asesora acreditada con la Resolución Decanal N° 000531 2021-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es

"ANÁLISIS DE UN MODELO MATEMÁTICO COMPARTIMENTAL DE LA DINÁMICA DE TRANSMISIÓN DEL VIH/SIDA CON TRATAMIENTO Y COBERTURA MEDIÁTICA"

presentado por la bachiller **Evelyn Katherine Gonzáles Moreno** para optar el Grado Académico de Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 11% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del Grado Académico de Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Lima, 12 de setiembre de 2025

Firma del Asesor 

Nombres y Apellidos del asesor: Roxana López Cruz

DNI 10798114

Dedicado a
Barbara y Ramón, por haberme enseñado a perseguir mis sueños.

Agradecimientos

Esta tesis ha desarrollado y concluido gracias a un grupo de personas que han estado conmigo de forma directa e indirecta, que sin ellos no hubiera sido posible llegar hasta este punto. El camino ha sido muy largo y en los momentos más difíciles siempre encontraba esa motivación para seguir adelante. Entre las personas que me han apoyado de forma directa la doctora Roxana Lopez Cruz Ph.D, que desde el primer curso que llevé con ella en la maestría siempre mostró ese ímpetu e interés por el aprendizaje de sus estudiantes. Siempre le estaré agradecida por su tiempo en la orientación de la tesis desde la elección del tema, el desarrollo y revisión. Además, por la consideración en sus proyectos de investigación donde tuve la oportunidad de aprender más cosas sobre matemática aplicada. También agradecer a los docentes de la maestría en matemática aplicada de la facultad de ciencias matemática de la UNMSM; por su dedicación y enseñanza en los diversos cursos que han sido de mucha ayuda para sentar la base de este trabajo. Las personas que han aportado de forma indirecta en este proceso están mis padres: Laura y José, así como mis hermanas: Ivonne y Jackeline, que a pesar de la distancia siempre los tengo en mi mente y corazón, ellos fueron mi motivación para seguir adelante; sus palabras y ánimos fueron mi fortaleza. Así mismo, a Carmen Saldaña, que se convirtió en mi familia al estar lejos de casa donde ha sido testigo de mis logros importantes, alegrías y tristezas. También, a Pedro Pesantes, quien en muchos momentos hemos intercambio conocimientos en diversas reuniones desde que lo conocí en la maestría, en la cual con su entendimiento en Biología me ayudó mucho a comprender ciertos temas de la matemática aplicada a esta ciencia.

Resumen

En el presente estudio, titulado "Análisis de un Modelo Matemático Compartimental de la Dinámica de Transmisión del VIH/SIDA con Tratamiento y Cobertura Mediática", se propone una formulación matemática constituida por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Esta formulación incorpora dos tasas de incidencia que reflejan la influencia de la cobertura mediática, considerada como un mecanismo de control frente a la propagación del virus.

El análisis cualitativo efectuado demuestra, en primera instancia, que el sistema admite soluciones positivas dentro de una región invariante. Asimismo, se identifican dos puntos de equilibrio: uno libre de enfermada y otro endémico. Se establece que, cuando el número básico de reproducción R_0 es inferior a la unidad, el equilibrio libre de enfermedad resulta local y asintóticamente estable, lo que biológicamente se interpreta como la eventual desaparición del virus en la población. Por el contrario, cuando R_0 supera la unidad, el equilibrio endémico se mantiene local y asintóticamente estable, lo cual indica que la infección persistirá en el tiempo.

De manera adicional, se demuestra que la formulación es globalmente estable para $R_0 > 1$, y que en $R_0 = 1$ presenta una bifurcación hacia adelante. Finalmente, mediante simulaciones numéricas realizadas en el software XPPAUT, se corroboran los resultados obtenidos, destacando de manera evidente el efecto que ejerce la cobertura mediática sobre la dinámica del modelo.

PALABRAS CLAVES: Modelos compartimentales, VIH/SIDA, estabilidad global, cobertura mediática, tratamiento antirretroviral, diagrama de bifurcación.

Abstract

In this study, entitled "Analysis of a Compartmental Mathematical Model of HIV/AIDS Transmission Dynamics with Treatment and Media Coverage", we propose a mathematical framework defined by a set of nonlinear differential equations. The framework incorporates two incidence rates that account for the influence of media coverage, regarded as a control mechanism for limiting the spread of the virus.

The qualitative analysis shows that the system admits positive solutions within an invariant region. Moreover, two equilibrium states are identified: a disease-free equilibrium and an endemic equilibrium. It is established that when the basic reproduction number R_0 is less than one, the disease-free equilibrium is locally and asymptotically stable, which biologically implies the eventual elimination of the virus from the population. Conversely, when R_0 exceeds one, the endemic equilibrium remains locally and asymptotically stable, indicating that the infection will persist over time.

Furthermore, the model is shown to be globally stable for $R_0 > 1$, and it undergoes a forward bifurcation at $R_0 = 1$. Finally, numerical simulations conducted using the XPPAUT software validate the analytical findings and clearly illustrate the role of media coverage in shaping the model's dynamics.

KEYWORDS: Compartmental models, HIV/AIDS, global stability, media coverage, antiretroviral treatment, bifurcation diagram.

Índice general

Agradecimientos **II**

Resumen **III**

Abstract **IV**

Lista de figuras **VII**

Lista de tablas **IX**

1. Preliminares **4**
1.1. Conceptos básicos del análisis matemático 4
1.2. Nociones básicas de un sistema de E.D.O 6
1.2.1. Sistema de E.D.O. lineales 6
1.2.2. Sistema de E.D.O no lineales 8
1.3. Análisis de estabilidad de un sistema de E.D.O 9
1.3.1. Estabilidad de sistemas de E.D.O lineales 9
1.3.2. Estabilidad de sistemas de E.D.O. no lineales 11
1.3.3. Funcional de Lyapunov 14
1.4. Bifurcaciones 17
1.4.1. Bifurcación silla-nodo 17
1.4.2. Bifurcación hacia adelante y hacia atrás 20

2. Nociones básicas en Epidemiología **23**
2.1. Modelo compartimental 23
2.2. Número de reproducción básico 25
2.2.1. Método de la próxima generación 25
2.3. Modelos básicos epidemiológicos 27
2.3.1. Modelo SI 27
2.3.2. Modelo SIR 29
2.3.3. Modelo SIRS 31
2.3.4. Modelo SEIR 32
2.4. Función de incidencia 33
2.5. Impacto de la cobertura mediática en diversos modelos epidemiológicos 34
2.6. Modelos matemáticos del VIH/SIDA 36

3. Modelo SIIJA **39**
3.1. Descripción del modelo básico SIIJA 39
3.1.1. Diagrama del modelo básico SIIJA 40
3.1.2. Descripción de las tasas de contacto 41
3.1.3. Sistema de ecuaciones diferenciales del modelo básico SIIJA . 44
3.2. Positividad de soluciones 47
3.3. Región invariante 48
3.4. Punto de equilibrio libre de infección 49
3.4.1. Número de reproducción básico del modelo básico SIIJA . . . 50
3.5. Punto de equilibrio endémico 52
3.5.1. Relación entre R_0, R_1, R_2 y R_3 53
3.5.2. Punto endémico $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$ 60
3.6. Análisis de estabilidad local del modelo SIIJA 62
3.6.1. Estabilidad local de E_0 62
3.6.2. Estabilidad local de E^* 64
3.7. Diagrama de bifurcación respecto a R_0 67
3.8. Análisis de simulación del modelo SIIJA 69
3.8.1. Simulaciones del modelo SIIJA: Punto E_0 y E^* 69
3.9. Análisis de sensibilidad 75
3.10. Descripción del modelo SIIJA perturbado 78
3.11. Positividad de soluciones 81
3.12. Región invariante 83
3.13. Puntos de equilibrio 84
3.13.1. Número de reproducción básico del modelo SIIJA perturbado 85
3.13.2. Punto de equilibrio endémico 87
3.14. Análisis de estabilidad del modelo SIIJA perturbado 92
3.14.1. Estabilidad local de E_0 94
3.14.2. Estabilidad local de $\bar{E}^*$ 97
3.14.3. Estabilidad global de E_0 100
3.14.4. Estabilidad global de $\bar{E}^*$ 101
3.15. Análisis de bifurcación 106
3.16. Análisis de simulación del modelo SIIJA perturbado 111
3.16.1. Simulaciones del sistema SIIJA: Punto E_0 y E^* 111
3.16.2. Simulaciones variando las condiciones iniciales 118
3.16.3. Simulaciones variando parámetros 121
3.17. Análisis de sensibilidad 128

4. Conclusiones **133**

5. Trabajos Futuros **135**

Referencias **136**

Índice de figuras

1.1. Grafica de $f(x) = r + \frac{1}{2}x - \frac{x}{1+x}$ para diversos valores de r 19
1.2. Diagrama de bifurcación silla-nodo 20

2.1. Diagrama del modelo SI 28
2.2. Dinámica del modelo SI 29
2.3. Diagrama del modelo SIR 30
2.4. Dinámica del modelo SI 30
2.5. Diagrama del modelo SIRS 31
2.6. Dinámica del modelo SIRS 31
2.7. Diagrama del modelo SEIR 32
2.8. Dinámica del modelo SEIR 32

3.1. Diagrama de trasmisión del modelo básico SIIJA. Tomado del artículo (Gonzales-Moreno K, 2021) 41
3.2. Función $\lambda_1(I_2)$ cuando $m = 30$ 43
3.3. Tasa de contacto $\beta_1(I_2)$ cuando $m = 30$ 43
3.4. Función $\lambda_1(I_2)$ cuando $\beta_1' = 0{,}4$ 43
3.5. Grafica de $\lambda_1 = \beta_1' \dfrac{I_2}{m + I_2}$ 44
3.6. Grafica de $P(J)$ 62
3.7. Raíz positiva de $J(t)$ 62
3.8. Diagrama de bifurcación de I_1^* respecto a R_0 del modelo SIIJA 67
3.9. Diagrama de bifurcación de I_2^* respecto a R_0 del modelo SIIJA 68
3.10. Diagrama de bifurcación de J^* respecto a R_0 del modelo SIIJA 68
3.11. Dinámica del modelo SIIJA cuando $R_0 = 0{,}8490211027$ 70
3.12. Diagrama de fase 3D entre las poblaciones S, I_1 e I_2 70
3.13. Dinámica de las poblaciones S, I_1 e I_2 con $R_0 = 13{,}00634$ 71
3.14. Dinámica de las poblaciones J e A con $R_0 = 13{,}00634$ 72
3.15. Diagrama de fase 3D con diferentes condiciones iniciales 73
3.16. Dinámica de las poblaciones S e I_1 cuando $R_0 = 3$ 73
3.17. Dinámica de las poblaciones I_2, J y A cuando $R_0 = 3$ 74
3.18. Diagrama de fase I_1 respecto a S 74
3.19. Diagrama de fase I_2 respecto a S 75
3.20. Diagrama de fase J respecto a S 75
3.21. Grafica de R_0 vs ρ y β_2 76
3.22. Grafica de R_0 vs ξ_1 y ξ_2 76
3.23. Grafica de R_0 vs r y ε 77
3.24. Grafica de R_0 vs r y ε 77

3.25. Diagrama de trasmisión del modelo SIIJA perturbado. Adaptado del artículo (Gonzales-Moreno K, 2021) 79
3.26. Raíz positiva de $P^*(J)$ 92
3.27. Diagrama de bifurcación de I_1 respecto a $\bar{R}_0$ 110
3.28. Diagrama de bifurcación de I_2 respecto a $\bar{R}_0$ 110
3.29. Diagrama de bifurcación de J respecto a $\bar{R}_0$ 111
3.30. Dinámica del modelo SIIJA perturbado cuando $R_0 = 0{,}2797977$ . . . 112
3.31. Diagrama de fase 3D 113
3.32. Dinámica de $S(t)$, $I_1(t)$ y $I_2(t)$ 114
3.33. Simulaciones de las variables $J(t)$, $A(t)$ 114
3.34. Diagrama de fase 3D 115
3.35. Dinámica de $S(t)$ e $I_1(t)$ 116
3.36. Dinámica de $I_2(t)$, $J(t)$ y $A(t)$ 116
3.37. Diagrama de fase de I_1 respecto a S cuando $\bar{R}_0$=2.370589 117
3.38. Diagrama de fase de I_2 respecto a S cuando $\bar{R}_0$=2.370589 117
3.39. Dinámica de fase de J respecto a S con $\bar{R}_0$=2.370589 117
3.40. Dinámica de $A(t)$ variando $I_1(0)$ 118
3.41. Dinámica de $A(t)$ variando $I_2(0)$ 119
3.42. Dinámica de $A(t)$ variando $J(0)$ 119
3.43. Dinámica de $J(t)$ variando $I_1(0)$ 120
3.44. Dinámica de $J(t)$ variando $I_2(0)$ 120
3.45. Zoom de gráfica 3.44 121
3.46. Dinámica de $S(t)$ variando δ 122
3.47. Dinámica de $I_1(t)$ variando δ 122
3.48. Dinámica de $I_2(t)$ variando δ 123
3.49. Dinámica de $J(t)$ variando δ 124
3.50. Dinámica de $A(t)$ variando δ 124
3.51. Dinámica de $S(t)$ variando m 125
3.52. Dinámica de $I_1(t)$ variando m 126
3.53. Dinámica de $I_2(t)$ variando m 127
3.54. Dinámica de $J(t)$ variando m 128
3.55. Dinámica de $A(t)$ variando m 128
3.56. Sensibilidad de $\bar{R}_0$ respecto a ε y δ respectivamente 129
3.57. Grafica de R_0 vs ρ y β_2 130
3.58. Grafica de $\bar{R}_0$ vs r y δ 130
3.59. Grafica de $\bar{R}_0$ vs ξ_1 y ξ_2 131
3.60. Grafica de $\bar{R}_0$ vs r y ε 131
3.61. Grafica de $\bar{R}_0$ vs r y ε 132

Índice de tablas

3.1. En la tabla se presentan la descripció de los parámetros del modelo SIIJA, adaptado del artículo (Gonzales-Moreno K, 2021) 46
3.2. Número de posibles raíces reales positivas de la ecuación 3.30 58
3.3. En la tabla se presentan la descripción de los parámetros del modelo SIIJA, adaptado del artículo (Gonzales-Moreno K, 2021) 81
3.4. Número de posibles raíces reales positivas de la ecuación 3.84 89

Introducción

Los modelos epidemiológicos permiten visualizar la propagación de una enfermedad infecciosa teniendo presente las consideraciones que se pueden dar desde un inicio. Estos modelos se han venido estudiando hasta la actualidad para dar respuestas a muchas preguntas; tales como: ¿Cuál es el valor estimado de los infectados en un tiempo determinado?, ¿Qué decisiones se deben de tomar para que la cantidad de infectados y muertos no sigan aumentando?, ¿Qué tan eficiente es la vacunación y que impacto tiene en la propagación de la enfermedad?, entre otras preguntas. La epidemiología matemática tiene un gran papel para dar respuestas a preguntas de interés para la población como las antes mencionadas, y para ello se utilizan las ecuaciones diferenciales en sus diferentes tipos o clases en la que se han visto muy relacionadas con estos modelos. Daniel Bernoulli en 1766 (Bernoulli y Blower, 2004) fue el que propuso el primer modelo matemático de una enfermedad, donde su objetivo fue fundamentar la importancia de la vacunación contra la *viruela*. Años más tarde; 1902 Sir R.A Ross (Ross, 1905) obtuvo el premio Nobel de fisiología y medicina gracias a su trabajo de investigación respecto a la *malaria* en la cual indicó que el control de la enfermedad se lograba si se controlaba la cantidad de mosquitos. En 1927, Kermack y McKendrick se convirtieron en los primeros epidemiólogos en exponer una buena aproximación en los datos reales de una plaga de Bombay de 1905/1906. McKendrick presentó una investigación respecto al Teorema del Umbral; donde se indica que: *"la densidad de población de susceptibles debe superar un valor crítico para que un brote epidémico se produzca"*. El modelo que presentaron Kermack y McKendrick tenía tres compartimientos; susceptibles, infectados y recuperados donde consideraron lo siguiente: la enfermedad podía ser viral o bacteriana, la transmisión era por contacto directo entre personas, la población se suponía constante, todos los individuos se podían enfermar, luego de pasar el proceso completo de la enfermedad se podían recuperan adquiriendo inmunidad o en otro caso morir. En la disciplina de la epidemiología matemática, un concepto esencial para el análisis de la propagación de enfermedades es el *número básico de reproducción*, que se define como el promedio de casos infectados secundarios que genera cada uno de los primeros casos al inicio de una epidemia, tomando como referencia (Ripoll, de la Parra, Bardina, y Cuadrado, s.f.). Por ejemplo, con $R_0 = 4$, una persona infecta a otras cuatro, que a su vez infectan a otras cuatro, etc., lo que lleva a una progresión geométrica, es decir, exponencial, del número de casos. La epidemia solo puede desarrollarse si $R_0 > 1$, (Martcheva, 2015), (Brauer, Castillo-Chavez, y Feng, 2019), (Ledder, 2023), (Li, 2018).

Entre algunas de las enfermedades infecciosas que han sido estudiadas mediante modelos epidemiológicos se tiene: en 1985 se presentó un modelo matemático que

pronostica la propagación global de la *influenza* basado en información de la ciudad inicial en la red de transporte que experimentó la enfermedad, este modelo se basó en una investigación en Rusia de casi 20 años de trabajo soviético sobre la modelización de la propagación geográfica de la influenza en este país (Rvachev y Longini Jr, 1985), en 1988 se presentó la comparación de dos modelos epidemiológicos de la *malaria* donde se mostraron diferentes caracterizaciones de la inmunidad potenciada por la exposición a la infección y que generaron resultados cualitativamente diferentes (Aron, 1988), en 1996 se presentó un artículo con el estudio de cuatro modelos sobre la *tuberculosis* y también se logró discutir cuestiones relacionadas con las estrategias óptimas de vacunación contra esta enfermedad (Castillo-Chavez, Feng, y cols., 1996), en 1998 se presentó el análisis de un modelo del *dengue* donde se consideró la población humana constante, y la población de vectores, esta última tenía una tasa de reclutamiento constante que dependían de las fracciones de huevos y larvas que maduran hasta la etapa adulta, llegando a demostrar la estabilidad global del modelo (Esteva y Vargas, 1998).Uno de los primeros aportes científicos en torno al estudio del VIH/SIDA fue realizado en 1987 por May y Anderson (Anderson, Jury, y Mansour, 1987), quienes documentaron información epidemiológica relacionado a infecciones en hombres heterosexuales, homosexuales, mujeres embarazadas y otros segmentos de la población; los cuales fueron de gran apoyo para proponer modelos que consideraban otras variables que den respuesta a preguntas de interés y así comprender la propagación de la enfermedad. Posteriormente gracias a estas primeras investigaciones ha sido posible estudiar modelos más complejos, considerando diversas formas de tasa de infección, vacunación, estructurado de acuerdo a la sintomatología, estructurado de acuerdo a la edad, entre otros; estos últimos modelos entregan más información, pero su análisis cualitativo es más difícil de realizar.

Esta investigación examina un esquema compartimental para el VIH/SIDA con el fin de comprender su dinámica al integrar el efecto del tratamiento y de la difusión mediática. El planteamiento matemático se estructura en cinco compartimientos: población susceptible, infectados con latencia lenta, infectados con latencia rápida, individuos en tratamiento y aquellos que han desarrollado SIDA, apoyándose en la contribución de (Huo y Feng, 2013). A este modelo se le agregan dos tasas de infección con una forma saturada en la que involucra la cobertura mediática para estudiar el impacto que tiene en el modelo. La estructura que tiene el trabajo es la siguiente:

- Capítulo 1: Se presentan los principios básicos sobre ecuaciones diferenciales y sobre sistemas de ecuaciones diferenciales, incluyendo un análisis de la teoría cualitativa aplicada tanto a sistemas lineales como no lineales. Cabe señalar que los sistemas no lineales son de particular relevancia para el desarrollo del presente estudio.

- Capítulo 2: Se muestran conceptos relacionados a la epidemiología, modelos compartimentales, número de reproducción básico, descripción de los modelos básicos epidemiológicos como el modelo SI, SIR, SIRS y SEIR. También se describe la función de incidencia con sus diversas formas que puede tomar, la cobertura mediática que se ha considerado en algunos modelos de interés y la presentación de modelos epidemiológicos relacionados con el VIH/SIDA.

- Capítulo 3: Después de haber estudiando los puntos importantes en los capítulos anteriores, ahora se realiza el análisis cualitativo de un modelo básico, el cual llamaremos *modelo SIIJA*; este modelo se basa en el trabajo de (Huo y Feng, 2013), al cual se consideró agregar tasas de infección de tipo saturadas con el objetivo de involucrar la cobertura mediática y estudiar el impacto que tiene sobre el modelo. Algunos resultados fueron presentados en el artículo (Gonzales-Moreno K, 2021), mientras que aquí se pretende mostrar con más detalle los resultados adicionando el diagrama de bifurcación que presenta el modelo SIIJA.
  Dentro de los elementos clave de este capítulo se destacan las gráficas de sensibilidad del sistema con respecto al parámetro de influencia mediática m. Los resultados evidencian que, para valores bajos de este parámetro, la población de individuos infectados aumenta de manera gradual, alcanzando niveles máximos relativamente bajos. Por lo tanto, si se logra detectar de forma temprana un número mínimo de casos de VIH/SIDA y se comunica oportunamente a la población, esta podrá adoptar las medidas preventivas y precauciones necesarias.
  La determinación del número básico de reproducción R_0 se realizó mediante el procedimiento de la próxima generación, y el análisis de estabilidad condujo a los resultados que se presentan a continuación:

  - Si el número básico de reproducción R_0 es menor que uno, el estado de equilibrio libre de infección resulta local y asintóticamente estable.
  - Por el contrario, cuando R_0 excede la unidad, el estado de equilibrio endémico permanece local y asintóticamente estable.

  Cuando se cumple la primera condición, la infección desaparecerá, mientras que bajo la segunda condición, la enfermedad permanecerá en la población.

- Capítulo 4: Teniendo como referencia el modelo SIIJA y tomando como una realidad de que muchas personas que tienen el virus del VIH no reciben tratamiento, entonces se perturba el modelo SIIJA con la intención de contestar la siguiente pregunta: ¿Cuál es el comportamiento del modelo SIIJA y como influye el hecho de que el tratamiento no se llegue aplicar a todas las personas que tengan el virus?. Para dar respuesta a esta nueva interrogante, se desarrolla un modelo actualizado, el cual será sometido a un análisis análogo al efectuado para el modelo examinado en el capítulo 3. Se incorporan simulaciones complementarias, se evalúa la estabilidad tanto local como global, y se realiza un análisis exhaustivo de bifurcaciones.

- Capítulo 5: En esta sección se presentan las conclusiones del trabajo enfocadas en los resultados obtenidos del modelo SIIJA y el modelo SIIJA perturbado que consideran la cobertura mediática y el tratamiento.

- Capítulo 6: En el capítulo 6 se plantean futuros trabajos de investigación considerando puntos importantes con el objetivo de responder nuevas preguntas asociadas a la enfermedad.

Capítulo 1

Preliminares

a presente sección introduce los principios matemáticos básicos que serán utilizados en el análisis de los esquemas epidemiológicos desarrollados en los capítulos 3 y 3.9. Se abordarán aspectos relacionados con ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.), sistemas de E.D.O., evaluación de estabilidad, análisis de bifurcaciones y algunos conceptos fundamentales de análisis matemático. Las ecuaciones diferenciales ordinarias es un tema muy amplio por ello se mencionarán algunas definiciones, teoremas y proposiciones que serán de gran utilidad para el desarrollo de la presente tesis. De querer profundizar más en estos temas se sugiere revisar los siguientes textos: (Hirsch, Smale, y Devaney, 2012), (Strogatz, Friedman, Mallinckrodt, y McKay, 1994), (Chicone, 1999), (Logan, 2006) y (Braun y Golubitsky, 1983).

1.1. Conceptos básicos del análisis matemático

Se empieza mostrando las definiciones y propiedades elementales del análisis matemático:

Definición 1.1.1. ***(Bola abierta)*** *Consideremos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. La bola abierta con centro en x_0 y radio r, representada por $B(x_0, r)$, está conformada por la colección de puntos de $\mathbb{R}^n$ cuya distancia al centro x_0 es menor que r, es decir:*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \parallel x - x_0 \parallel < r\}$$

donde $\parallel \cdot \parallel$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.2. ***(Conjunto abierto)*** *Se dice que un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina abierto en $\mathbb{R}^n$ si, para todo punto $x_0 \in V$, existe un $r > 0$ tal que la colección de puntos correspondiente a la bola abierta $B(x_0, r) \subset V$.*

Definición 1.1.3. ***(Frontera de un conjunto)*** *Consideremos $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se define como punto frontera de V si cada bola abierta $B(x_0, r)$ incluye puntos pertenecientes a V y puntos fuera de él. La agrupación de todos los puntos de este tipo se llama la frontera de V.*

Definición 1.1.4. ***(Límite de función definida en $\mathbb{R}^n$)*** *Sea $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre el conjunto abierto V en $\mathbb{R}^n$. Si x_0 es un punto interior*

de V o un punto de frontera, el límite de la función f al acercarse x a x_0 es L, lo que se expresa mediante la notación:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

dado un ε arbitrario ($\varepsilon > 0$), existe un $\delta > 0$ que cumpla que:

$$x \in B(x_0, \delta) \cap V \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in B(L, \varepsilon)$$

Definición 1.1.5. ***(Continuidad en un punto)*** *Sea $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre el conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $x_0 \in V$. Se establece que f presenta continuidad en x_0 si satisface la siguiente condición:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si f carece de continuidad en x_0, se dice que es discontinua en x_0. Asimismo, f se considera continua sobre el conjunto V si lo es para todos y cada uno de los puntos $x \in V$. (Braun y Golubitsky, 1983)

Teorema 1.1.1. *Consideremos las funciones $f, g : V \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas sobre un dominio abierto V de $\mathbb{R}^n$. Siempre que f y g sean funciones continuas, se cumple que:*

- *La suma de funciones $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ presenta continuidad en V.*
- *La diferencia de funciones $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ presenta continuidad en V.*
- *El producto de funciones $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ presenta continuidad en V.*
- *El cociente de funciones $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ presenta continuidad en V, siempre que $g(x) \neq 0$.*

Teorema 1.1.2. *Sea V un conjunto no acotado de números reales; $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
- *Para toda sucesión (x_n) de puntos de V, creciente y no acotada, se tiene que* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{R}$ *tal que, si* $x \in V$ *y* $x > K \Longrightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$*(Braun y Golubitsky, 1983)*

Teorema 1.1.3. ***(Teorema de valor medio)*** *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b); en consiguiente bajo estas condiciones, se garantiza la existencia de al menos un punto $c \in (a, b)$ para el cual:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

1.2. Nociones básicas de un sistema de E.D.O

Las ecuaciones diferenciales son las herramientas que han permitido modelar diversos fenómenos, entre ellos se tiene físicos y biológicos; donde estos modelos matemáticos tienen como objetivo estudiar ciertas variables que están relacionadas con su razón de cambio instantánea. Aquí se mencionan los conceptos claves sobre sistema de EDO autónomos lineales y no lineales que se pueden encontrar en (Perko, 2013) y (David, SCHAEFFER, y John, 2018).

1.2.1. Sistema de E.D.O. lineales

En la presente sección se exponen las nociones fundamentales de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, cuya forma general se puede expresar como:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

es decir;

$$\begin{cases} x_1' = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x_2' = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n' = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y A una matriz de orden $n \times n$ con $det(A) \neq 0$. Se denota el lado derecho e izquierdo de 1.1 como:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

teniendo en cuenta que $F_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $F_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ son lineales, para $i = 1, 2, \cdots, n$ y que la matriz A está dada por;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lema 1. *Consideremos una matriz cuadrada A, se tiene que:*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

donde $e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$

Teorema 1.2.1. ***(Teorema de Existencia y Unicidad)***
Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $F : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Considerando la ecuación diferencial ordinaria lineal $x' = F(x)$, se denomina punto crítico o punto

singular de F a todo punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga la condición $F(x^*) = 0$. (Perko, 2013)

$$\begin{cases} x' & = Ax \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

está dado por $\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}.x_0$ con $t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2.1. ***(Punto crítico)*** *Sea un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ y una función $F : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, para los cuales se define la EDO lineal $x' = F(x)$. Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ se clasifica como punto crítico o singular de F si, y únicamente si, $F(x^*) = 0$.*

Para explicar que tipo de puntos críticos existen, se presenta por ejemplo el caso del sistema de ecuaciones diferenciales lineales en $\mathbb{R}^2$:

$$x' = Ax \tag{1.3}$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden de 2×2, entonces el punto crítico se denomina:

- Punto *silla*, cuando los autovalores de la matriz A son reales y de distinto signo. Esto quiere decir que, existen orbitas que se acercan al origen y otras que se alejan de él.
- *Nodo*, cuando los autovalores son reales del mismo signo. Puede suceder de que todas las trayectorias de acerquen al origen o que se alejen.
- *Centro*, si los autovalores son imaginarios puros. Eso quiere decir que las orbitas son cerradas que rodean al punto crítico.
- *Foco*, si los autovalores son imaginarios conjugados no puros. Las orbitas se pueden acercar al origen en forma de espiral o puedes alejarse en forma de espiral también.

Teorema 1.2.2. *Sea $\delta = det(A)$ y $\tau = traza(A)$, considerando el sistema lineal*

$$x' = Ax \tag{1.4}$$

luego se cumple que:

a) Si $\delta < 0$, la ecuación 1.4 posee un punto silla en el origen.

b) Cuando $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, la ecuación 1.4 presenta un punto nodo en el origen, el cual es estable si $\tau < 0$, e inestable cuando $\tau > 0$.

c) Para $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ y $\tau \neq 0$, la ecuación 1.4 exhibe un punto foco en el origen, siendo estable si $\tau < 0$, e inestable cuando $\tau > 0$.

d) Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces 1.4 determina un centro en el origen.
Es importante destacar que, en el caso b), se cumple que $\tau^2 \geq 4|\delta| > 0$, lo cual implica que $\tau \neq 0$.(Perko, 2013)

1.2.2. Sistema de E.D.O no lineales

Definición 1.2.2. *Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma*

$$\begin{array}{ll} \frac{dx_1}{dt} & = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} & = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} & = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array} \tag{1.5}$$

donde $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ cuando las funciones f_i, no dependen explícitamente de t, entonces es llamado sistema de ecuaciones diferenciales autónomos.

Definición 1.2.3. *Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma*

$$x' = f_\lambda(t, x) \tag{1.6}$$

en un espacio d-dimensional euclidiana ($\mathbb{R}^d$); donde $f_\lambda : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $(x, \lambda) \longrightarrow f_\lambda(t, x)$ es de clase C^m con derivadas parciales continuas en (t, x, λ) con λ un número real; entonces se le llama EDO no autónomo; cuyo comportamiento asintótico de sus soluciones dependerá también del tiempo inicial.

Ahora al considerar el sistema no lineal autónomo de ecuaciones diferenciales y el caso no autónomo 1.6 se observa que las variables espaciales x e y dependen de t, luego se cumple que un sistema no autónomo puede ser escrito como un autónomo.

Definición 1.2.4. *La función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se considera diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si existe un operador lineal $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ cumple la siguiente relación:*

$$\lim_{|h| \longrightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0 - h)|}{|h|} = 0 \tag{1.7}$$

El operador lineal $Df(x_0)$ es llamada la derivada de f en x_0.

Teorema 1.2.3. *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en x_0, entonces la derivada parcial $\frac{\partial f_j}{\partial x_j}$, $i, j = 1, ..., n$ existe en x_0 y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple*

$$Df(x_0).x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} x_j$$

De esta manera, si f es una función diferenciable, su derivada Df se representa mediante la matriz Jacobiana de dimensión $n \times n$;

$$Df = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$$

Teorema 1.2.4. *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que incluye a x_0, y supongamos que $f \in C^1(E)$, se asegura la existencia de un valor $a > 0$ tal que el correspondiente PVI*

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

presenta una única solución $x(t)$ en el intervalo $[-a, a]$.(Perko, 2013)

1.3. Análisis de estabilidad de un sistema de E.D.O

1.3.1. Estabilidad de sistemas de E.D.O lineales

A continuación, se presentan algunos resultados fundamentales respecto a la estabilidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas.

Definición 1.3.1. *Sea un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales*

$$x' = F(x), \tag{1.8}$$

y sea $x = \varphi(t)$ una solución del mismo. Se dice que el sistema es estable cuando cualquier solución $\psi(t)$ de 1.8 que inicie suficientemente cerca de $\varphi(t)$ en $t = 0$, se mantiene próxima a $\varphi(t)$ para todo instante posterior t.

Por el contrario, la solución $\varphi(t)$ se considera inestable si existe como mínimo una solución $\psi(t)$ de 1.8 que comience próxima a $\varphi(t)$ en $t = 0$, pero que no permanezca cercana a $\varphi(t)$ para instantes posteriores.

Formalmente, la solución $\varphi(t)$ se estabiliza si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$|\psi_j(t) - \varphi_j(t)| < \varepsilon \quad si \quad |\psi_j(0) - \varphi_j(0)| < \delta(\varepsilon), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

para toda solución $\psi(t)$ de 1.8.(Perko, 2013)

Definición 1.3.2. *Una solución $x = \varphi(t)$ de 1.8 se identifica como asintóticamente estable si, además de ser estable, toda solución $\psi(t)$ que comience lo suficientemente próxima a $\varphi(t)$ se acerca a $\varphi(t)$ cuando $t \to \infty$.*
De manera particular, un punto de equilibrio $x(t) = x_0$ de 1.8 se considera asintóticamente estable si toda solución $x = \psi(t)$ de 1.8, que inicie cercana a x_0 en el instante $t = 0$, no solo permanece próxima a x_0 para todo instante posterior, sino que además converge hacia x_0 a medida que $t \to t_0 \in]0, +\infty[$.(Perko, 2013)

Para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$x' = Ax \tag{1.9}$$

se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1. *a) Toda solución $x = \varphi(t)$ de 1.9 se clasifica como estable si todos los valores propios de A presentan parte real negativa.*

b) Toda solución $x = \varphi(t)$ de 1.9 se considera inestable cuando existe como mínimo un valor propio de A cuya parte real sea positiva.

c) Supóngase que todos los valores propios de A tienen parte real nula (es decir, son imaginarios puros), denotados por $\lambda_1 = i\delta_1, \ldots, \lambda_l = i\delta_l$; además, se asume que cada $\lambda_j = i\delta_j$ posee multiplicidad k_j. Es decir que, el polinomio característico de A puede expresarse en la forma factorizada:

$$p(\lambda) = (\lambda - i\delta_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\delta_l)^{k_l}$$

En consecuencia, toda solución $x = \varphi(t)$ de 1.9 se considera estable cuando la matriz A posee k_j autovectores linealmente independientes correspondientes a cada valor propio $\lambda_i = i\delta_j$. En caso contrario, todas las soluciones $\varphi(t)$ resultan inestables (Braun y Golubitsky, 1983).

Ahora al considerar el sistema no lineal;

$$x' = F(x) = Ax + g(x) \tag{1.10}$$

donde

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

es muy pequeño comparado con x, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2. *Considérese que la función vectorial*

$$\frac{g(x)}{\|x\|} \equiv \frac{g(x)}{\text{máx}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}$$

presenta continuidad respecto a las variables $x_1, \dots, x_n$ y se anula en $x = 0$. Bajo estas premisas se tiene que:

a) La solución de equilibrio $x(t) = 0$ de 1.10 se clasifica como asintóticamente estable si la correspondiente solución de equilibrio $x(t) = 0$ de la ecuación linealizada $x' = Ax$ es asintóticamente estable. Equivalentemente, $x(t) = 0$ de 1.10 es asintóticamente estable si todos los autovalores de A poseen parte real negativa.

b) La solución de equilibrio $x(t) = 0$ de 1.10 se considera inestable si existe al menos un autovalor de A cuya parte real sea positiva.

c) Cuando todos los autovalores de A tienen parte real no positiva y, en particular, alguno de ellos presenta parte real nula, la estabilidad del equilibrio $x(t) = 0$ asociado a la ecuación 1.10 no puede deducirse de la estabilidad del equilibrio $x(t) = 0$ correspondiente al sistema lineal $x' = Ax$.

El presente teorema permite establecer la estabilidad de las soluciones de equilibrio correspondientes a ecuaciones diferenciales autónomas (Perko, 2013).

Definición 1.3.3. *Sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y considérese la ecuación diferencial ordinaria (EDO)*

$$x' = F(x).$$

Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ se denomina punto crítico si satisface $F(x^*) = 0$. Sobre estos puntos críticos se definen las siguientes propiedades de estabilidad:

- *El punto crítico x^* se clasifica como estable si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

- *El punto crítico x^* se considera asintóticamente estable si es estable y, además, todas las soluciones que inician suficientemente cerca de x^* convergen hacia él cuando $t \to \infty$, es decir,*

$$\lim_{t \to \infty^+} x(t) = x^*.$$

- *Si ninguna de las condiciones anteriores se cumple, el punto de equilibrio x^* se clasifica como inestable.*

1.3.2. Estabilidad de sistemas de E.D.O. no lineales

Un aspecto central en el estudio de la estabilidad de sistemas no lineales es el teorema de estabilidad linealizada, el cual proporciona criterios lo suficientemente fuerte para la mayoría de las aplicaciones. Específicamente, un punto de equilibrio de una ecuación diferencial autónoma $x' = f(x)$ en $\mathbb{R}^n$ se clasifica como asintóticamente estable si todos los autovalores de la matriz Jacobiana evaluada en dicho punto presentan parte real negativa.
Además, este principio de estabilidad puede extenderse a ciertas ecuaciones diferenciales no autónomas y no homogéneas de la forma

$$x' = A(t)x + g(x, t)$$

donde $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua.

Lema 2. *Sea una función continua $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos compactos, entonces se dice que f es de Lipschitz, si existe un número $L > 0$ tal que;*

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\|$$

para todo $(x, t), (y, t) \in K \times A$.

Proposición 1. *Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, la solución $t \longrightarrow x(\xi, t)$ de la ecuación diferencial $x' = f(x, t)$ tal que $x(\xi, 0) = \xi$. Si $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que la solución $t \longrightarrow x(\xi_0, 0)$ es definida para $0 \leq t \leq T$, y si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que contiene al arco de órbita.*

$$O(\xi_0) = \{x(\xi_0, t)/0 \leq t \leq T\},$$

entonces hay un conjunto abierto $V \subset U$ tal que $\xi_0 \in V$ y

$$\{x(\xi, t)/\xi \in V, 0 \leq t \leq T\} \subseteq U,$$

es decir, la solución que comienza en cada $\xi \in V$ existe en el intervalo $[0, T]$ y sus valores en este intervalo están en U.(Perko, 2013)

El siguiente resultado indica que, cuando un sistema presenta un punto estacionario en el origen, su linealización exhibe un punto de equilibrio asintóticamente estable en dicho origen, y la componente no lineal del sistema se encuentra controlada y limitada, entonces el sistema no lineal también posee un punto de equilibrio asintóticamente estable.(Perko, 2013)

Teorema 1.3.3. *Sea el PVI*

$$x' = A(t)x + g(x,t); \quad x(t_0) = x_0$$

para el caso donde $A = A(t)$ es una matriz real constante. Si todo autovalor de A tiene parte real negativa y si hay constantes positivas $a > 0$ y $k > 0$ talque $\|g(x,t)\| \leq k\|x\|^2$ cuando $\|x\| < a$, entonces existen constantes positivas c, b y α que son independientes de la elección del tiempo inicial t_0 tal que la solución $t \longrightarrow x(t)$ del PVI satisface;

$$\|x(t)\| \leq c\|x_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}$$

para $t \geq t_0$ cuando $\|x_0\| \leq b$. En particular, la función $t \longrightarrow x(t)$ está definida para toda $t \geq t_0$, y la solución cero (la solución con condición inicial $x(t_0) = 0$) es asintóticamente estable.

Pasando a otro punto importante dentro del tema de EDO no lineales se tiene el proceso de linealización. Se determina la estabilidad de un punto de equilibrio o también llamado punto fijo $x^*(t)$ para comprender la naturaleza de las soluciones que se aproximan a él.

- **Linealización**
  Se considera

  $$x = x^*(t) + \epsilon, \epsilon = \epsilon(t) \in \mathbb{R}^n$$

  entonces sustituyendo en el sistema autónomo, $\frac{dx}{dt} = f(x)$; $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ donde f es al menos dos veces diferenciables; y aplicando la expansión de Taylor alrededor de x, se tiene:

  $$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^*}{dt} + \frac{d\epsilon}{dt} = f(x^*(t)) + Df(x^*(t))\epsilon + O(|\epsilon|^2);$$

  donde $|\cdot|$ es la norma en $\mathbb{R}^n$. Luego

  $$\frac{d\epsilon}{dt} = Df(x^*(t))\epsilon + O(|\epsilon|^2) \tag{1.11}$$

  que describe la evaluación de la órbita alrededor de x^*.
  El comportamiento de las soluciones arbitrariamente cercanas a x^* se obtiene estudiando el sistema lineal asociado,

  $$\frac{d\epsilon}{dt} = Df(x^*(t))\epsilon$$

  Por consiguiente, si $x^*(t) = x^*$ es un punto de equilibrio; es decir $f(x^*) = 0$, entonces $Df(x^*)$ es una matriz y la solución de 1.11 con condición inicial $\epsilon_0 = \epsilon(0) \in \mathbb{R}^n$ es

  $$\epsilon(t) = e^{Df(x^*(t))}\epsilon_0$$

De ello se deduce que $\epsilon(t)$ es asintóticamente estable si todos los autovalores de $Df(x^*)$ tienen parte reales negativas. Luego, el teorema de Hartman Grobman conduce a la siguiente caracterización simple de las propiedades de estabilidad de x^*.

Teorema 1.3.4. *Si todos los autovalores de $Df(x^*)$ tienen parte real negativa, el punto de equilibrio $x = x^* \in \mathbb{R}^n$ del sistema no lineal*

$$\frac{dx}{dt} = f(x); \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

es asintóticamente estable (Givental, 2001), (Brauer y cols., 2019) y (Wiggins, Wiggins, y Golubitsky, 2003).

- **Criterio de Routh-Hurwitz**

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz proporciona un marco para establecer las condiciones necesarias y suficientes que garantizan la estabilidad local de un sistema dinámico. Para su implementación, se analiza la correspondiente ecuación característica:

$$det(Df(x^*) - \lambda I) = 0 \tag{1.12}$$

la cual para garantizar que los autovalores tengan parte real negativa se plantea el siguiente resultado aportado por Routh-Hurwitz;

Teorema 1.3.5. *Sea el polinomio característico de $Df(x^*)$ de grado n con coeficientes constantes*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{1.13}$$

definimos n matrices Hurwitz usando los coeficientes a_i del polinomio característico

$$H_1 = (a_1) \quad ; \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

y

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ : & : & : & : & \cdots & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

donde $a_j = 0$ si $j > n$. Toda raíz del polinomio $P(\lambda)$ tendrán parte real negativa si y solo si el determinante de toda matriz Hurwitz es positiva:

$$det(H_j) > 0; j = 1, \cdots, n$$

Por ejmeplo; para el caso de $n = 2$, el criterio de Routh-Hurwitz se simplifica a $a_1 > 0$ y $a_1a_2 > 0$, ya que, $a_3 = 0$ en H_2. Estas están relacionadas con las propiedades de que:

$$traz(Df(x)) < 0 \quad y \quad det(Df(x)) > 0.$$

Para diversos valores de n se presenta una tabla con las condiciones que deben de cumplir los coeficientes del polinomio característico.

n	Signos de coeficientes	Condiciones adicionales
2	$a_1 > 0, a_2 > 0$	-
3	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$	$a_1 a_2 > a_3$
4	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$	$a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$
5	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0$	$a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$, $(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5 (a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$

1.3.3. Funcional de Lyapunov

Otro de los conceptos importantes que involucra estudiar sistemas autónomos de EDO, son las llamadas funciones de Lyapunov. En esta sección se muestran breves resultados relacionadas al tema de la teoría de Lyapunov; puesto que este es un tema muy amplio y que se puede encontrar con más detalle en (Sastry, 2013) y (Wiggins y cols., 2003).
Uno de los puntos en las que se toma las funciones de Lyapunov es para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio cuando no se ha logrado tener información mediante su linealización. No existe un método general para construir una funcional de Lyapunov que muestra que un punto de equilibrio es estable,sin embargo se han desarrollado diversas investigaciones entre ellos la de Zhisheng Shuai y Van Den Driessche (2013) (Shuai y van den Driessche, 2013), en la cual presentan dos métodos para guiar la construcción de funciones de Lyapunov para modelos de enfermedades y así establecer la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio libre de infección y para el punto de equilibrio endémico. Para el primer caso se utiliza un método teórico de matriz basado en el vector propio de Perron, mientras que el método de la teoría de grafos y nuevas relaciones combinatorias se utilizan para el punto de equilibrio endémico. Así mismo, presenta algunas aplicaciones a sistemas de ecuaciones epidemiológico.

En general encontrar una función de Lyapunov es difícil y los cálculos suelen ser muy extensos. Sin embargo, después de encontrar una función de Lyapunov se puede establecer la estabilidad global del punto de equilibrio. El teorema de Lyapunov requiere que la derivada de una función de Lyapunov con respecto a t sea estrictamente negativa. A continuación se dan las siguientes definiciones basándonos en (Sastry, 2013), (Liao, Wang, y Yu, 2007) y (Wiggins y cols., 2003).

Definición 1.3.4. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ una vecindad de x. Una función $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada definida positiva si*

i) $V(x) > 0$ *para todo* $x \neq 0$

ii) $V(x) = 0$ *si y solo si* $x = 0$

iii) $V(x) \longrightarrow \infty$ *cuando* $x \longrightarrow \infty$

$V(x)$ es semidefinida positiva si $V(x) \geq 0$ para todo $x \in U$. La función $V(x)$ es *definida negativa* si $V(x) < 0$. Más aún, $V(x)$ es semidefinida negativa, si $V(x) \leq 0$.

Definición 1.3.5. *La función V es localmente definida positiva si existe $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene un punto de equilibrio $x = \bar{x}$ tal que*

i) $V(\bar{x}) = 0$

ii) $V(x) > 0$ *para todo* $x \in U - \{\bar{x}\}$

Una función definida positiva o función definida negativa también son llamadas funciones de signo definidas.

Definición 1.3.6. *Una función definida positiva V en una vecindad abierta del origen. Se dice que es una función de Lyapunov para el sistema diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

si $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x).f(x) \rangle \leq 0$ *para todo* $x \in U - \{0\}$. *En el caso* $\dot{V}(x) < 0$ *para todo* $x \in U \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$, *la función es llamada función de Lyapunov estricta.*

A continuación se presenta el teorema de Lyapunov

Teorema 1.3.6. *(Teorema de estabilidad de Lyapunov) Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio del sistema*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n,$$

y considere V una función definida positiva de clase C^1 en una vecindad de U alrededor de $\bar{x}$. Bajo estas condiciones, se obtiene el siguiente criterio de estabilidad de Lyapunov:

1. *Si* $\dot{V} \leq 0$ *para todo* $x \in U \setminus \{\bar{x}\}$, *entonces $\bar{x}$ es estable.*
2. *Si* $\dot{V} < 0$ *para todo* $x \in U \setminus \{\bar{x}\}$, *entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable.*
3. *Si* $\dot{V} > 0$ *para algún* $x \in U \setminus \{\bar{x}\}$, *entonces $\bar{x}$ es inestable.(Liao y cols., 2007)*

Se observa que en el caso 1, V es una funcional de Lyapunov y en el caso 2, V es una función de Lyapunov estricta según la definición 1.3.6. Si se logra elegir que U sea todo $\mathbb{R}^n$, entonces se dice que $\bar{x}$ es globalmente asintóticamente estable, si se cumplen 1. y 2.

Ejemplo 1. *Sea el sistema Duffing amortiguado,*

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x - x^3 - \delta y \end{aligned}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *y el parámetro* $\delta > 0$. *Indicar una funcional de Lyapunov que permita mostrar que el punto de equilibrio* $(0, 0)$ *es globalmente asintóticamente estable.*

Solución. *Vemos que el sistema tiene como punto de equilibrio* $(0,0)$*. Consideramos* $V(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ *como una función, donde claramente se tiene que* $V(0,0) = 0$ *y* $V(x,y) > 0$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$*. Además,*

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= \frac{2yy'}{2} - \frac{2xx'}{2} + \frac{4x^3x'}{4} \\ &= yy' - xx' + x^3x' \\ &= y(x - x^3 - \delta y) - xy + x^3y \\ &= yx - yx^3 - \delta y^2 - xy + x^3y \\ &= -\delta y^2 < 0; \quad \delta > 0\end{aligned}$$

Así, por el teorema de la función de Lyapunov 1.3.6 el punto de crítico $(0,0)$ *es global y asintóticamente estable para* $\delta > 0$*.*

También dentro de la estabilidad global de un sistema EDO es posible utilizar algunos resultados aritméticos como el que se menciona a continuación.

- **Desigualdad entre media aritmética y geométrica**

Uno de los resultado conocidos dentro de la matemática básica indica que la media aritmética de números reales positivos es mayor o igual a su media geométrica. Para dos números reales positivos se tiene(Martínez, 2013);

$$\sqrt{AB} \leq \frac{A+B}{2}$$

Además, para que se cumpla la igualdad $\frac{A-B}{2} = 0$, por consiguiente $A = B$. La desigualdad de la media aritmética con geométrica entre dos números reales positivos tiene las siguientes equivalencias:

- $(A-B)^2 \geq 0$
- $A^2 + 2AB + B^2 \geq 4AB$
- $2 - \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \leq 0$
- $2AB \leq A^2 + B^2$

Esta desigualdad también se cumple para más de dos número reales y que queda enunciado de la siguiente manera:

Desigualdad de la MA y MG generalizada: Para $n \in \mathbb{N}$ números positivos: $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$, la media geométrica es siempre menor o igual que la media aritmética:

$$\sqrt[n]{A_1A_2A_3\ldots A_n} \leq \frac{A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n}{n}$$

Además, la igualdad se verifica cuando $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$.

1.4. Bifurcaciones

Los diagramas de bifurcaciones son gráficas que muestran los estados de los puntos de equilibrios de un sistema dinámico. Aquí solamente se explicará mediante la bifurcación más conocida: silla-nodo, como se producen las bifurcaciones. Claro está que no es el único tipo de bifurcación; existen muchas otras y que puede encontrar con más detalle su descripción en la siguiente bibliografía; (Strogatz y cols., 1994), (S. Guo y Wu, 2013). Según lo indicado en el libro de Strogatz; "*una ecuación diferencial ordinaria de una única variable tiene una dinámica muy limitada, puesto que todas las soluciones o bien se dirigen al punto de equilibrio o bien divergen a* $\pm\infty$*. La parte interesante de un sistema en una sola dimensión es la dependencia de los parámetros, pues la estructura cualitativa del flujo puede cambiar al variar los parámetros*"(Strogatz y cols., 1994). Esto quiere decir que: los puntos fijos pueden ser creados o destruidos o su estabilidad puede cambiar; esta propiedad cualitativos en la dinámica son llamados *bifurcaciones* y los valores en los que se producen se llaman puntos de bifurcación. Las bifurcaciones proporcionan la información cuando el sistema se comporta de una forma y al perturbar algún parámetro se comparta de otra manera. Ahora se hará una pequeña descripción de la bifurcación silla-nodo según Strogatz y un ejemplo.

1.4.1. Bifurcación silla-nodo

La bifurcación silla-nodo representa el mecanismo fundamental mediante el cual los puntos de equilibrio pueden aparecer o desaparecer. A medida que un parámetro del sistema varía, dos puntos fijos se aproximan entre sí, colisionan y se eliminan mutuamente. La forma normal de esta bifurcación está descrita por el siguiente sistema de primer orden:

$$\dot{x} = r + x^2, \tag{1.14}$$

donde r es un parámetro, que puede ser positivo, negativo o cero. Cuando r es negativo hay dos puntos fijos, uno estable y otro inestable. A continuación se muestra un ejemplo sacado de la lista de ejercicios propuestos del libro de Strogatz (Strogatz y cols., 1994) para analizar de forma cualitativa el comportamiento del campo vectorial y además se esbozará el diagrama de bifurcación.

Ejemplo 2. *Analizar la forma cualitativa del comportamiento del campo vectorial de la ecuación diferencial:*

$$\dot{x} = r + \frac{1}{2}x - \frac{x}{1+x} \tag{1.15}$$

Solución. *Para encontrar los puntos fijos se comienza igualando* $f(x) = r+\frac{1}{2}x-\frac{x}{1+x}$ *a cero, luego hay que despejar* x *en función de* r *como se muestra a continuación*

$$\begin{aligned} f(x) = r + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{x}{1+x} &= 0 \\ \tfrac{2r(1+x)+x(1+x)-2x}{2(x+1)} &= 0 \\ x^2 + x(2r-1) + 2r &= 0 \end{aligned}$$

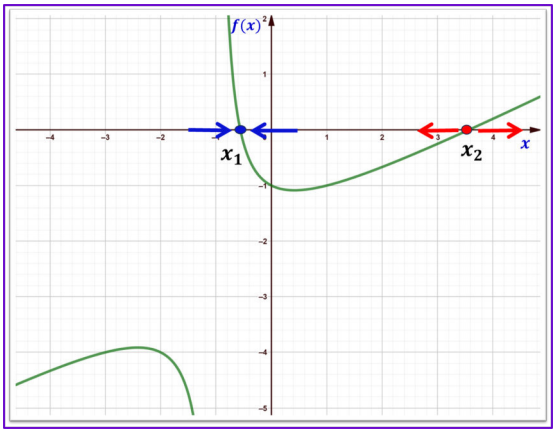
el coeficiente lineal e independiente dependen de r, entonces ahora se calcula la solución para x:

$$x_1 = \frac{1-2r+2\sqrt{(r-1{,}5)^2-2}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1-2r-2\sqrt{(r-1{,}5)^2-2}}{2}$$

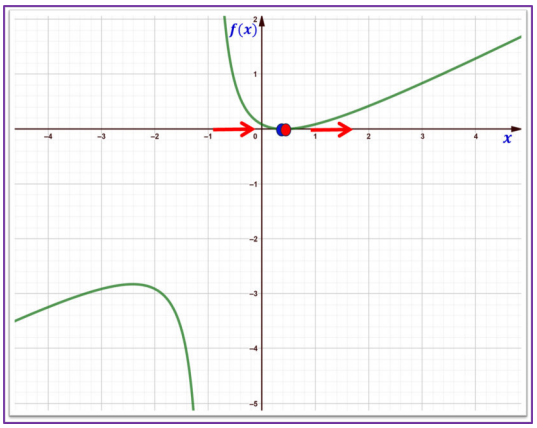
luego se tiene que,

- *si el discriminante $\triangle = (r-1{,}5)^2 - 2 < 0$, no hay puntos singulares.*
- *si el discriminante $\triangle = (r-1{,}5)^2 - 2 = 0$, existe un único punto crítico; esto ocurre cuando $r = 0{,}08579$ ó $2{,}9142$.*
- *si $\triangle = (r-1{,}5)^2 - 2 < 0$, hay dos puntos singulares uno respulsor y el otro atractor; esto ocurre cuando $r \in \langle -\infty; 0{,}08579\rangle \cup \langle 2{,}9142; \infty\rangle$.*

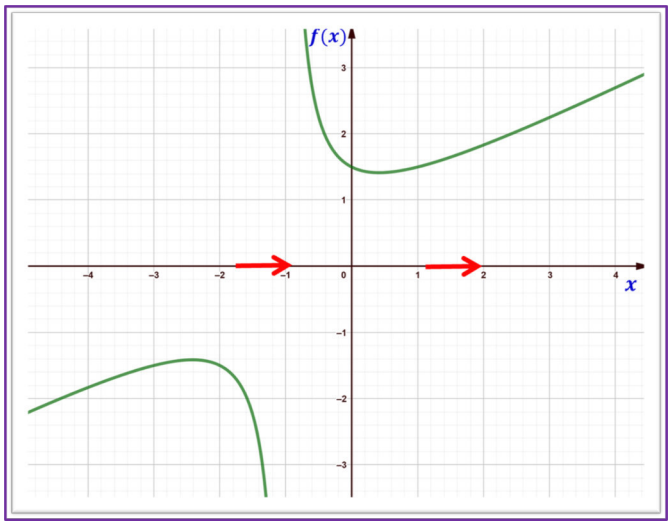
En la figura 1.1, se presenta la relación entre $f(x)$ y x, en la cual cuando $r = -1$ aparecen dos valores de x, uno negativo ($x_1 = -0{,}56$) y otro positivo ($x_2 = 3{,}56$). Remplazando estos valores en $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(1+x)^2}$ se tiene la estabilidad de las soluciones para x; es decir $f'(x_1) > 0$ y $f'(x_2) < 0$, luego se concluye que x_1 es un repulsor y x_2 es un atractor.
Ahora, si se considera r =0.8579 se observa que los puntos críticos mencionados anteriormente colapsan y aparece un único punto crítico (silla). Sin embargo, cuando $r = 1{,}5$ no hay ningún punto crítico; mientras en $r = 2{,}9142$ vuelve aparecer un único punto crítico (silla), luego en $r = 3{,}5$ se observa que se crean dos puntos críticos x; $x_1 = -4{,}41$ y $x_2 = -1{,}59$ donde uno es atractor y el otro repulsor.



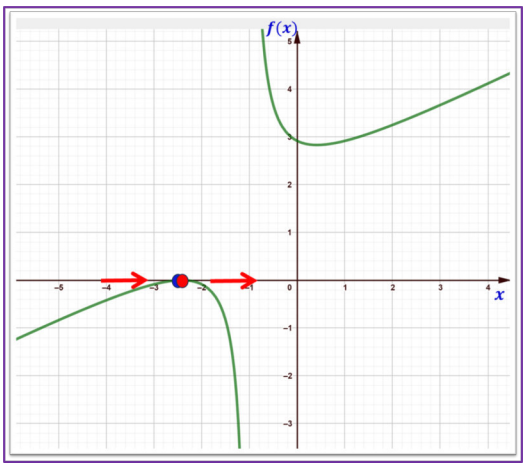
(a) $r = -1$



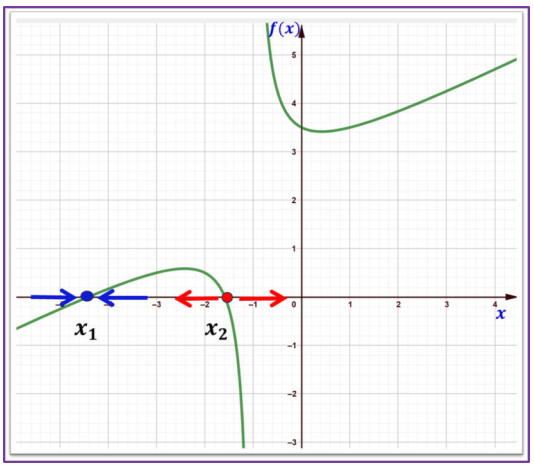
(b) $r = 0{,}08579$



(c) $r = 1{,}5$



(d) $r = 2{,}9142$



(e) $r = 3{,}5$

Figura 1.1: Grafica de $f(x) = r + \frac{1}{2}x - \frac{x}{1+x}$ para diversos valores de r

Mediante el Geogebra se ha realizado el diagrama de bifurcación (figura 1.2) que tiene como ejes la variable x y los valores de r; teniendo encuenta lo anterior

se anexa su estabilidad de los puntos. Aquí se indica con mayor claridad para que valores de r se pueden encontrar los puntos estables (color azul) y los inestables (lineas discontinuas rojas).
Cuando $r_1 = 0{,}0859$ colapsan los puntos cuando x_1 y x_2 obteniéndose un punto silla; mientras que en $r_2 = 2{,}9142$ se obtiene otro punto de bifurcación donde se crean los puntos x_1 y x_2 nuevamente. Por consiguiente en r_1 y r_2 se origina una bifurcación silla-nodo.

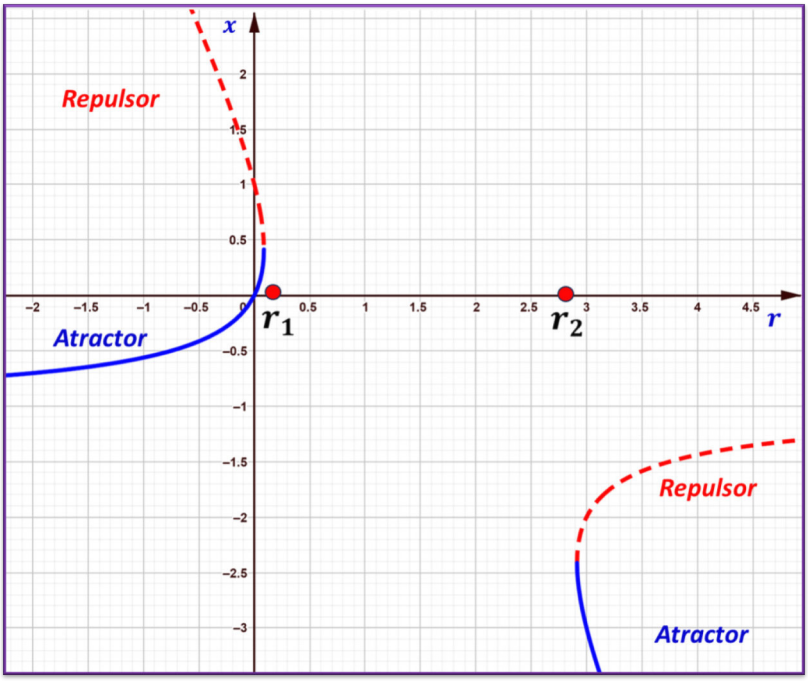


Figura 1.2: Diagrama de bifurcación silla-nodo

1.4.2. Bifurcación hacia adelante y hacia atrás

En esta sección se presenta uno de los resultados relacionados a la bifurcación hacia adelante y hacia atrás en $R_0 = 1$. Estas bifurcaciones han aparecido en diversos modelos epidemiológicos en la cual muestran los diagramas respectivos con su demostración basados en la teoría propuesta por Castillo-Chávez y Song. En esta tesis también se considera la investigación de Castillo y Song para demostrar la bifurcación que se obtiene en el modelo del capítulo 4. Se produce una bifurcación hacia adelante en sistemas epidemiológicos cuando se obtiene un único punto de equilibrio libre de infección estable de $0 < R_0 < 1$; luego cuando $R_0 = 1$ aparece un punto de equilibrio endémico estable y es libre de enfermedad se vuelve inestable. En el caso de la bifurcación hacia atrás sucede si $R_0 < 1$ aparece un pequeño equilibrio endémico positivo inestable, mientras que el equilibrio libre de infección y un equilibrio positivo mayor son loca y asintóticamente estables; esta bifurcación no se presenta en esta tesis. Luego para $R_0 > 1$ aparece un nuevo punto de equilibrio endémico estable y es libre de enfermedad se vuelve inestable. Esto quiere decir que, no solamente cuando $R_0 < 1$ la enfermedad se extingue; sino que puede aún existir la enfermedad.

En cuanto a los conocimientos previos, se presentan los resultados obtenidos en (Castillo-Chavez y Song, 2004) para hallar la dirección de la bifurcación en $R_0 = 1$, fundamentados en la teoría de la variedad central. Los autores aplicaron este marco teórico no solo para analizar la estabilidad local del estado no hiperbólico, sino también para investigar la posible existencia de un equilibrio adicional (bifurcación del estado no hiperbólico) (Castillo-Chavez y Song, 2004).

Otro estudio relacionado con el análisis de la variedad central en las proximidades del estado libre de infección y $R_0 = 1$ corresponde a (Van den Driessche y Watmough, 2002), que sirvió de referencia para el trabajo de (Castillo-Chavez y Song, 2004). A continuación, se formula lo siguiente:

Consideremos el conjunto dinámico de ecuaciones diferenciales con un parámetro ϕ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \phi), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad y \quad f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n) \tag{1.16}$$

Sin que se pierda la generalidad, se considera que $\mathbf{0}$ representa un estado de equilibrio del sistema para cualquier valor del parámetro ϕ, es decir:

$$f(\mathbf{0}, \phi) \equiv 0 \quad \text{para todo} \quad \phi \tag{1.17}$$

Teorema 1.4.1. *Sea*

- $A = D_x f(0,0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\right)$ *la matriz de linealización del sistema 1.16 en torno a la posición de equilibrio* $\boldsymbol{0}$*, evaluando el parámetro* ϕ *en 0. Se asume que cero constituye un valor propio simple de A, mientras que todos los demás valores propios presentan partes reales negativas;*
- *Además, la matriz A posee un autovector derecho no negativo* w *y un autovector izquierdo* v *asociado al autovalor cero.*

Además sea f_k *la k-esima componente de* f *y*

$$a = \sum_{k,i,j=1}^{n} v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k(0,0)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.18}$$

$$b = \sum_{k,i=1}^{n} v_k w_i \frac{\partial^2 f_k(0,0)}{\partial x_i \partial \phi} \tag{1.19}$$

Por consiguiente, dinámica local del sistema 1.16 en torno a $\boldsymbol{0}$ *queda completamente determinada por los parámetros* a *y* b*:*

a) $a > 0$, $b > 0$. *Cuando* $\phi < 0$ *y* $|\phi| \ll 1$, *el punto crítico* $\boldsymbol{0}$ *es asintóticamente estable y, además, emerge un equilibrio positivo inestable. Por el contrario, si* $0 < \phi \ll 1$, $\boldsymbol{0}$ *se vuelve inestable, mientras que un equilibrio negativo local se mantiene estable y asintóticamente estable.*

b) $a < b$, $b < 0$. *Para valores de* $\phi < 0$ *con* $|\phi| \ll 1$, $\boldsymbol{0}$ *resulta inestable. En cambio, cuando* $0 < \phi \ll 1$, *el punto crítico* $\boldsymbol{0}$ *adquiere estabilidad local y asintótica, y simultáneamente aparece un equilibrio positivo inestable.*

c) $a > 0$, $b < 0$. *Si* $\phi < 0$ *con* $|\phi| \ll 1$, *el punto crítico* $\boldsymbol{0}$ *es inestable, mientras que un equilibrio negativo local se mantiene asintóticamente estable. Por el contrario, para* $0 < \phi \ll 1$, $\boldsymbol{0}$ *se estabiliza y surge un equilibrio positivo inestable.*

d) $a < 0$, $b > 0$. *Al variar* ϕ *de negativo a positivo,* $\boldsymbol{0}$ *cambia su estabilidad de estable a inestable. Como resultado, un equilibrio negativo inestable se transforma en positivo, adquiriendo estabilidad local y asintótica.(Castillo-Chavez y Song, 2004)*

También de este resultado se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1. *Si* $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces la bifurcación en* $\phi = 0$ *es bifurcación hacia adelante (backward bifurcation).*

Uno de los teoremas fundamentales respecto a la estabilidad de los sistemas de ED autónomos no lineales es el Teorema de LaSalle que asegura la existencia de conjuntos atrayentes para las órbitas de un sistema autónomo. Este conjunto es importante para el estudio asintótico de la dinámica del sistema diferencial. A continuación se menciona dicho teorema;

Teorema 1.4.2. *(**Principio de invariancia de LaSalle**) Sea un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales dado por*

$$x'(t) = f(x), \quad x(0) = 0.$$

Sea $\Omega \subset D$ *un conjunto compacto que se mantiene invariante bajo la dinámica del sistema. Supóngase que* $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continuamente diferenciable satisfaciendo* $\dot{V} \leq 0$ *en* Ω. *Definamos*

$$E = \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

y sea M *el mayor subconjunto invariante contenido en* E. *Entonces, toda trayectoria iniciada en* Ω *converge al conjunto* M *conforme* $t \longrightarrow \infty$.*(LaSalle, 1960)*

Capítulo 2

Nociones básicas en Epidemiología

En esta sección se introduce la terminología, notación y resultados estándar en la formulación y análisis de modelos epidemiológicos. Se inicia con la descripción de un modelo compartimental, luego número de producción básico, modelos básicos en epidemiología, diversos tipos de función de incidencia, impacto de la cobertura mediática en modelos epidemiológicos y finalmente describir algunos modelos relacionados con el VIH/SIDA. Primero se describen algunas palabras claves que se utilizan dentro de la epidemiología y que serán de mucha importancia para entender las diversas secciones más adelante, aquí se tiene como referencia el libro de (Shah y Mittal, 2021).

- Individuos susceptibles: Personas que están en riesgo de contraer una infección aunque todavía no están infectados.
- Individuos infectados: Personas infectadas capaces de transmitir la infección.
- Individuos expuestos: Personas que están infectadas pero que no son capaces de transmitir la infección.
- Individuos recuperados: Después del tratamiento o debido al desarrollo de la inmunidad, la infección se cura y las personas ya no están infectadas.
- Periodo de incubación: Es el tiempo en que un individuo recibe una infección y luego llega a tener el primer síntoma aparente de la enfermedad.

2.1. Modelo compartimental

Los modelos epidémicos se utilizan para describir brotes muy rápidos de enfermedades que ocurren en poco tiempo, mientras que los modelos endémicos se utilizan para estudiar enfermedades durante períodos más largos, durante los cuales hay una renovación de susceptibles por nacimientos o recuperación de la inmunidad temporal; (Hethcote y Van den Driessche, 1991). Estos modelos son representados mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de la forma:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X) \tag{2.1}$$

Esta ecuación es un sistema dinámico con estado de dimensión finita, donde $X(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector variable que depende del tiempo. En los modelos dinámicos, el problema se divide en compartimientos con características homogéneas que describen a una variable. Por lo tanto, estos modelos también se conocen como modelos compartimentales. También la expresión (2.1) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1(t)}{dt} &= f_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\
\frac{dX_2(t)}{dt} &= f_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
\frac{dX_n(t)}{dt} &= f_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)
\end{aligned}$$

donde $f_1, f_2, \cdots, f_n$ representan las tasas de cambio de cada compartimiento con respecto al tiempo con $X = (X_1, X_2, \ldots X_n)$. Dependiendo del sistema se puede tener modelos muy complejos y su análisis suele ser muy laborioso. El análisis del modelo involucra, en primer lugar, la determinación de los estados de equilibrio. Un estado de equilibrio de un modelo evolutivo corresponde a un punto fijo que representa una solución que permanece invariante en el tiempo. Estos se pueden calcular igualando cada ecuación del sistema a cero. También se dice que los estados de equilibrio son funciones constantes que satisfacen el sistema dinámico, lo que significa que son soluciones del modelo independientes del tiempo (Shah y Mittal, 2021). Dentro del estudio de los modelos matemáticos en epidemiología, pueden identificarse al menos dos categorías fundamentales de estados estacionarios: el estado libre de infección, en el cual la enfermedad desaparece de la población, y el estado endémico, donde la infección persiste de manera estable en el tiempo. Se dice que un punto de equilibrio X de un sistema es estable si para cada $\epsilon > 0$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$, tal que si cada solución $X(t)$ tiene condiciones iniciales dentro de la distancia δ, es decir, $\|X(t_0) - X\| < \delta$, entonces la solución $X(t)$ permanece a una distancia ϵ del punto de equilibrio X, es decir, $\|X(t) - X\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$. Esta tesis, se enfoca en una condición más fuerte que la estabilidad llamada estabilidad asintótica. Se considera que un estado de equilibrio posee estabilidad asintótica cuando cumple la condición de estabilidad y para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ existe $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ tal que siempre que $\|X(t_0) - X\| < \delta_0$ entonces $X(t) \longrightarrow X$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Se estudiarán dos tipos de estabilidad: estabilidad asintótica local y estabilidad asintótica global.

- La estabilidad asintótica local de un modelo en un punto de equilibrio significa que la solución del sistema debe acercarse a un punto de equilibrio en condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio del modelo. La estabilidad asintótica local se establece utilizando la matriz jacobiana del sistema. Si todos los autovalores tienen partes reales negativas, entonces el sistema es local y asintóticamente estable sobre el punto de equilibrio (Johnson, 2004). El criterio de Routh-Hurwitz se utilizan bien para encontrar la estabilidad asintótica local (Routh, 1877).

- La estabilidad asintótica global de un modelo en un punto de equilibrio es la solución del sistema que debe aproximarse al punto de equilibrio bajo todas las

condiciones iniciales. La función de Lyapunov (La Salle, 1976) ayuda a establecer que el modelo es globalmente asintóticamente estable, también existen otros métodos tales como la teoría de grafos (H. Guo, Li, y Shuai, 2008) y la teoría del método geométrico. Más información se puede encontrar en (Li y Muldowney, 1996) en donde los autores estudian la estabilidad global de un modelo

2.2. Número de reproducción básico

La siguiente definición es muy utilizada dentro de la epidemiología y se hace referencia a los siguientes textos para explorar mejor esta subsección: (Bacaër, Ripoll, de La Parra, Bardina, y Cuadrado, 2021), (Brauer y cols., 2019) y (Brauer, Castillo-Chavez, y Castillo-Chavez, 2012). Uno de los principales resultados de la epidemiología matemática es que, los modelos exhiben un comportamiento umbral en $R_0 = 1$ (Bacaër y cols., 2021), es decir que; cuando el número promedio de infecciones secundarias generadas por un individuo infectado promedio durante su período de infecciosidad (denominado número básico de reproducción) es menor que la unidad entonces no hay epidemia mientras que cuando esta cantidad excede la unidad, entonces se propaga la enfermedad. El R_0 se define como la media de nuevos contagios que origina un individuo infectado al incorporarse en una población íntegramente susceptible. El famoso criterio del umbral establece que: La enfermedad puede invadir a la población si $R_0 > 1$, mientras que no puede invadir a la población si $R_0 < 1$.
Matemáticamente, si $R_0 < 1$, las soluciones del modelo que describe la situación se aproximan al equilibrio libre de infección. Cuando $R_0 > 1$, el equilibrio libre de enfermedad es inestable y las soluciones se alejan de él. Además, existe un equilibrio endémico con un número positivo de individuos infectados. En este caso, la enfermedad permanece endémica en la población. Sin embargo, la situación puede no ser tan sencilla, con más de un equilibrio estable cuando el número básico de reproducción es menor que uno. Ahora se presenta el proceso y método para hallar el R_0.

2.2.1. Método de la próxima generación

Van den Driessche y Watmough (Van den Driessche y Watmough, 2002) desarrollaron el método de la matriz de próxima generación con el propósito de calcular el R_0 en modelos epidemiológicos que consideran múltiples compartimientos infecciosos. Este valor se interpreta como "el número esperado de casos secundarios provocados por un individuo infeccioso en una población completamente susceptible" (Van den Driessche y Watmough, 2002).

De manera más general, R_0 cuantifica la capacidad de propagación de una enfermedad, ya que indica el número promedio de individuos que pueden infectarse en la siguiente generación de transmisión dentro de una comunidad determinada. Matemáticamente, R_0 se define como el radio espectral de la matriz de próxima generación, lo que le confiere una formulación rigurosa y aplicable a diversos escenarios epidemiológicos. Se presenta esta técnica y la descripción detallada de las notaciones más resaltantes.

Si en un modelo se tiene n compartimentos de infectados, incluyendo a los individuos latentes (individuos infectados pero que no son infecciosos) y m compartimentos no infectados, de tal manera que $m+n$ el número total de variables dependiente del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representa un modelo. Se denota como $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ como subpoblaciones en cada uno de estos compartimentos. A continuación mostramos los pasos para hallar el R_0:

1. Se ordenan las ecuaciones diferenciales colocando los primeros n compartimientos infectados y luego los no infectados. De esta manera el sistema de ecuaciones diferenciales queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_i^{'} &= f_i(x,y); \quad i = 1, ..., n \\ y_j^{'} &= g_j(x,y); \quad j = 1, ..., m \end{aligned}$$

2. Luego la función $f_i(x,y)$ puede expresarse como la resta de dos componentes:

$$\begin{aligned} x_i' &= \mathcal{F}_i(x,y) - \mathcal{V}_i(x,y), \\ y_j' &= g_j(x,y), \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde:

- $\mathcal{F}_i(x,y)$ representa la contribución asociada a las nuevas infecciones en el compartimento i;
- $\mathcal{V}_i(x,y)$ recoge los efectos de otros procesos demográficos o epidemiológicos, tales como nacimientos, muertes o migraciones.

Debe subrayarse que la distinción entre compartimentos susceptibles e infecciosos no es única, y en consecuencia, las formas específicas de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{V}$ pueden diferir según el modelo considerado. Esta no unicidad genera posibles variaciones tanto en la interpretación de los mecanismos de transmisión como en la representación matemática del número reproductivo básico R_0. Para evitar inconsistencias, la descomposición debe satisfacer las siguientes condiciones (Martcheva, 2015):

a) $\mathcal{F}_i = 0$ y $\mathcal{V}_i = 0$ para $y \geq 0$ e $i = 1, \ldots, n$. Esto implica que:
   - todas las infecciones emergentes corresponden a *infecciones secundarias* originadas en individuos infectados, y
   - no se permite *inmigración directa* de susceptibles hacia los compartimentos de la enfermedad.

b) $\mathcal{F}_i(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \geq 0$. De esta forma, se asegura que las infecciones nuevas provienen únicamente de huéspedes infectados, descartando entradas externas.

c) $\mathcal{V}_i(x,y) \leq 0$ siempre que $x_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. En este escenario, cada componente de $\mathcal{V}_i$ describe el flujo neto de salida de un compartimento, el cual debe reflejar únicamente entradas cuando el compartimento está vacío.

d) $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \geq 0$. Esta condición garantiza que el flujo total de salida de los compartimentos infecciosos sea no negativo, manteniendo la consistencia en el balance poblacional.

3. Ahora suponiendo que el sistema libre de enfermedades es de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = g(0, y)$$

presenta un único equilibrio libre de enfermedad $E_0 = (0, y_0)$, tal que todas las soluciones con las condiciones iniciales de la forma $(0, y)$ se aproximan a $(0, y_0)$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Este punto se conoce como el equilibrio libre de enfermedad.

4. Después de que $\mathcal{F}_i$ y $\mathcal{V}_i$ han cumplido las condiciones anteriores, se forma la matriz de próxima generación FV^{-1} donde $\mathcal{F}_i$ y $\mathcal{V}_i$ se calcula mediante:

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(0, y_0)}{\partial x_j}\right];$$
$$V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(0, y_0)}{\partial x_j}\right]$$

Las matrices en cuestión se derivan mediante la linealización del sistema 2.2 en un entorno del estado de equilibrio libre de enfermedad. En este marco, con $i, j = 1, \ldots, m$ y $(0, y_0)$ representando dicho equilibrio, cada entrada de la matriz FV^{-1} cuantifica la tasa a la cual los individuos infectados en el compartimento x_j originan nuevas infecciones en el compartimento x_i, ponderada por el tiempo medio de permanencia de un individuo en una única estancia dentro del compartimento j.

R_0 se formaliza como el radio espectral (esto es, el autovalor dominante) de la matriz

$$R_0 = \rho(FV^{-1}). \tag{2.3}$$

De este modo, si $R_0 < 1$, el equilibrio libre de enfermedad constituye un atractor local asintótico, lo que implica la extinción progresiva de la infección en la población. Así mismo, cuando $R_0 > 1$, emerge un equilibrio endémico que resulta localmente asintóticamente estable, garantizando la persistencia de la enfermedad dentro de la comunidad.

2.3. Modelos básicos epidemiológicos

2.3.1. Modelo SI

SI, es el modelo epidemiológico matemático más simple, el cual involucra únicamente dos estados, susceptible (S) e infectado (I). Un individuo en estado susceptible es alguien que no tiene la enfermedad pero que pudiera poseerla al entrar en contacto con alguien que sí la tiene. Un individuo en estado infectado es alguien que tiene la enfermedad y que potencialmente pasa la enfermedad si está en contacto con un individuo susceptible. Esta clasificación de dos estados no toma en consideración muchos detalles biológicos, pero su simplicidad resulta útil en muchos casos.
Se considera las siguientes poblaciones:

- $S(t)$: Cantidad de individuos susceptibles en el instante de tiempo t.
- $I(t)$: Cantidad de individuos infectados en el instante de tiempo t.

Se denota a β como la tasa promedio de contactos de un individuo infectado con cualquier otro miembro de la población. La enfermedad es transmitida únicamente cuando una persona infectada tiene contacto con una susceptible. Si la población total tiene N individuos, entonces la probabilidad promedio de que una persona elegida aleatoriamente sea susceptible es $\frac{S}{N}$, en consecuencia una persona infectada tiene contacto con un promedio de $\frac{\beta S}{N}$ personas susceptibles por unidad de tiempo. Luego, debido a que el número promedio total de individuos de infectados es I, entonces se tiene que la tasa media total para nuevas infecciones es $\beta\frac{SI}{N}$. De este modo se deduce la siguiente ecuación diferencial para la población de infectados;

$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{SI}{N} \tag{2.4}$$

Al mismo tiempo el número de individuos susceptibles decrece respecto a la misma tasa:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta\frac{SI}{N} \tag{2.5}$$

luego de (2.4) y (2.5) es lo que se conoce como el modelo SI.

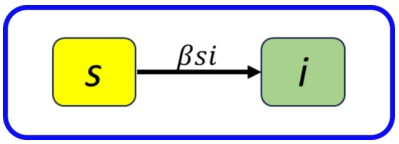


Figura 2.1: Diagrama del modelo SI

Resulta conveniente definir variables que representan la fracción de individuos susceptibles y la fracción de individuos infectados, esto es:

$$s = \frac{S}{N} \qquad , \qquad i = \frac{I}{N}$$

En consecuencia, se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si \tag{2.6}$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si \tag{2.7}$$

cuya dinámica es la que se muestra a continuación

En la dinámica de la figura 2.2 se presenta la población de susceptibles e infectados del modelo SI con condiciones iniciales $s_0 = 0{,}99, i_0 = 0{,}01$ y el valor del parámetro $\beta = 0{,}8$.

Se nota que la ecuación (2.7) se puede escribir sólo en función de i, quedando de la siguiente manera;

$$\frac{di}{dt} = \beta(1-i)i \tag{2.8}$$

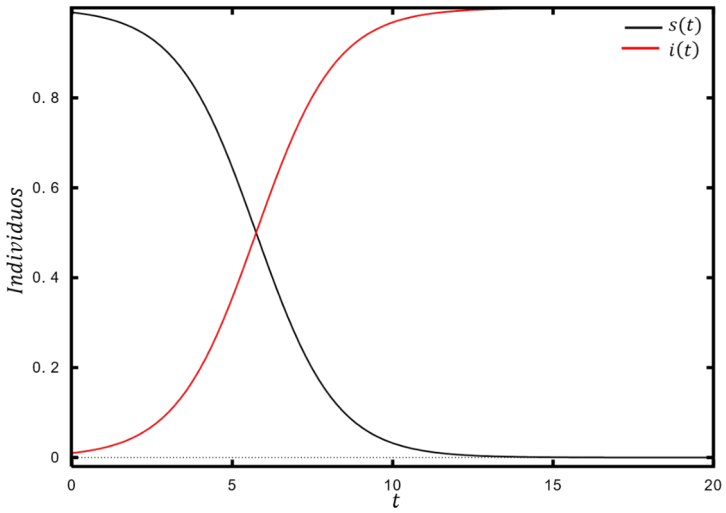


Figura 2.2: Dinámica del modelo SI

donde $1 - i = s$.
Vemos que (2.8) es una ecuación logística con capacidad de carga igual a 1. Con solución;

$$i(t) = \frac{i_0 e^{\beta t}}{1 - i_0 + i_0 e^{\beta t}} \tag{2.9}$$

en consecuencia $s(t) = 1 - \dfrac{i_0 e^{\beta t}}{1 - i_0 + i_0 e^{\beta t}}$.
El comportamiento de i y s , depende de los valores iniciales de la fracción de infectados y del valor de β (ver Figura 2.2). Para cada instante t la fracción de infectados y susceptibles sumaran uno. Ya que el modelo SI considera que la población sólo pasa del estado susceptible al infectado sin posibilidad de volver al estado original o de morir. De este modo sólo con que β sea diferente de cero y haya uno o más individuos infectados en $t = 0$, entonces a largo plazo todos los individuos susceptibles pasaran al estado infectado.

2.3.2. Modelo SIR

El modelo SIR constituye uno de los modelos fundamentales en el estudio de las enfermedades endémicas. La abreviación corresponde a S(susceptibles), I(infectados) y R(recuperados). Para el planteamiento del modelo se tiene presente ciertas consideraciones como por ejemplo: i) Todos los individuos pueden contraer la enfermedad con la misma probabilidad, ii) No considera migraciones o algún factor externo que haga que las poblaciones tenga individuos nuevos. iii) Se asume que la población esta distribuida de forma homogénea, sin que intervengan aspectos políticos o económicos que haga que ello se altere.

Las EDO del modelo SIR esta dado por:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I$$
$$\frac{dR}{dt} = \alpha I$$

donde $\beta > 0, \alpha > 0, S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0$, así mismo se denota con condiciones iniciales a, $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$. El diagrama del modelo se presenta como

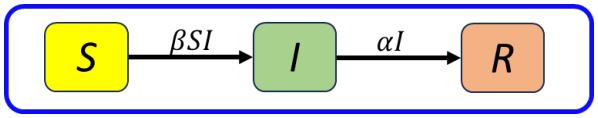


Figura 2.3: Diagrama del modelo SIR

y como simulación;

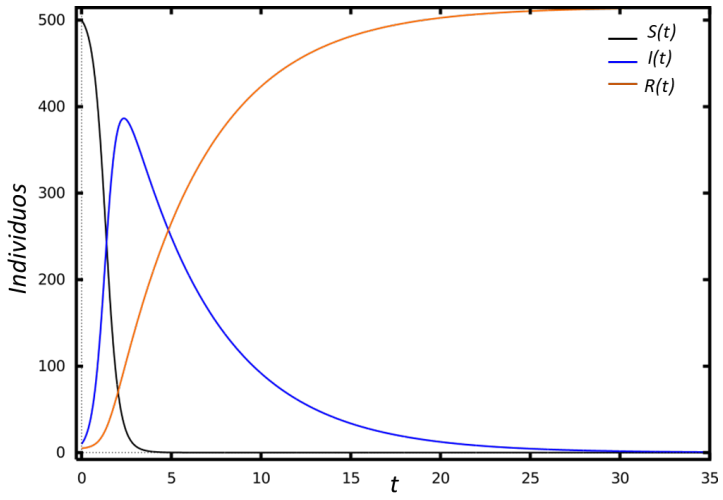


Figura 2.4: Dinámica del modelo SI

La figura 2.4 se presenta la población de susceptibles e infectados del modelo SI con condiciones iniciales $S_0 = 500, I_0 = 10, R_0 = 5$ y valores de parámetros $\beta = 0{,}006, \alpha = 0{,}2$ con $R_0 = 5$.
Como vemos el sistema de ecuaciones del modelo SIR presenta varios términos entre ellos; $-\beta SI$: indica que una fracción de individuos abandona el compartimiento de los susceptibles y se van a los infectados; ya que β simboliza la tasa de transmisión de la enfermedad que se produce cuando un individuo susceptible tiene contacto con un individuo infectado.
En el caso de la segunda ecuación se tiene el término $-\alpha I$ que hace alusión a la fracción de infectado que pasa al compartimiento de recuperados con una tasa de recuperación α.

2.3.3. Modelo SIRS

Otro modelo epidemiológico es el SIRS, donde se considera adicionalmente al modelo anterior que los individuos del compartimiento de recuperados pueden volver a ser susceptibles como una tasa γ. El sistema de EDO del modelo SIRS está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - \gamma R\end{aligned}$$

donde $\beta > 0, \alpha > 0, S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0$, se denota con condiciones iniciales a, $S(0) = S_0, I(0) = I_0$ y $R(0) = R_0$. El diagrama del modelo se presenta como;

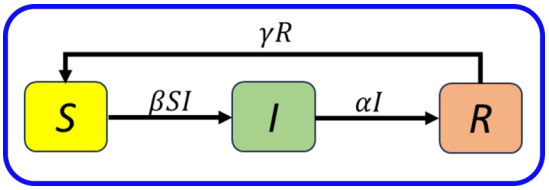


Figura 2.5: Diagrama del modelo SIRS

y como simulación

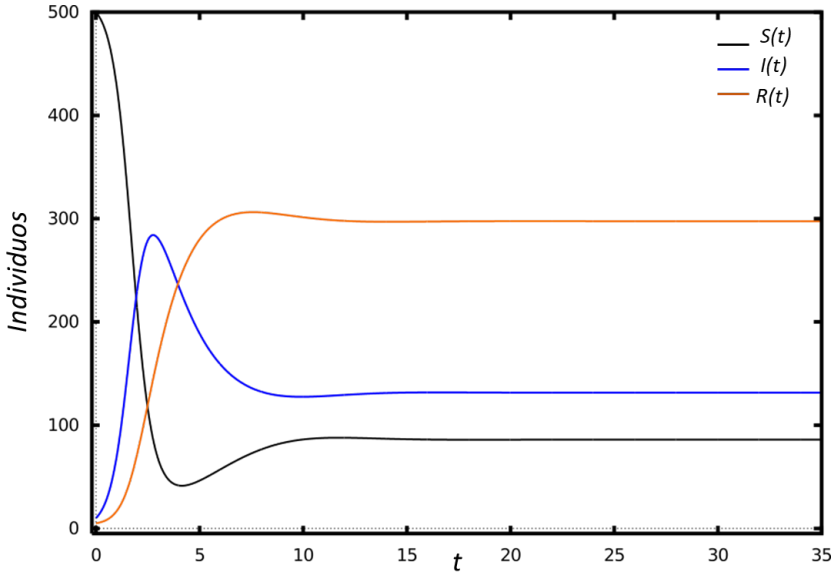


Figura 2.6: Dinámica del modelo SIRS

En la dinámica de la figura 2.6 se muestra la población de susceptibles e infectados del modelo SIRS con condiciones iniciales $S_0 = 500, I_0 = 10, R_0 = 5$ y valores de los parámetros $\beta = 0{,}005, \alpha = 0{,}43, \gamma = 0{,}19$.

2.3.4. Modelo SEIR

El modelo SEIR vendría a ser una variante del modelo SIR para acercarse un poco más a la realidad.Los individuos llamados expuestos son aquellos que han adquirido la enfermedad pero permanecen en una etapa de latencia. Aquí se establecen ciertas hipótesis como: la transmisión se produce por contacto directo entre individuos y el grupo de recuperados incluye tanto a quienes superaron la infección y desarrollaron inmunidad como a los fallecidos por complicaciones graves. En este modelo, a pesar de que incorpora una población adicional, aún no constituye una representación íntegra de la realidad.

Con $N = S + E + I + R$ se tiene el sistema de EDO del modelo SEIR está dado por 4 compartimientos:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\
\frac{dE}{dt} &= \beta SI - \sigma E \\
\frac{dI}{dt} &= \sigma E - \alpha I \\
\frac{dR}{dt} &= \alpha I
\end{aligned}$$

donde $\beta > 0, \sigma > 0, \alpha > 0, S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0, E(t) \geq 0$. Así mismo, $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, E(0) = E_0$ son las condiciones iniciales de las poblaciones. El diagrama del modelo se presenta como;

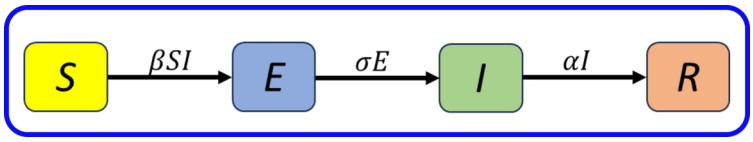


Figura 2.7: Diagrama del modelo SEIR

y como simulación considerando ciertas condiciones iniciales;

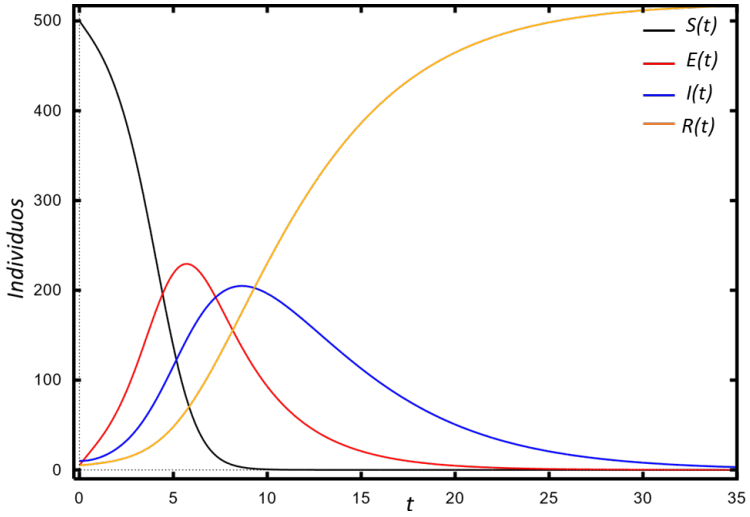


Figura 2.8: Dinámica del modelo SEIR

La figura 2.8 presenta la evolución de la población de susceptibles e infectados del modelo SEIR con condiciones iniciales $S_0 = 500, E_0 = 5, I_0 = 10, R_0 = 5$ y valores de parámetros $\beta = 0{,}006, \alpha = 0{,}3, \sigma = 0{,}2$.
A diferencia del modelo SIR, el término $-\beta SI$ representa la fracción de individuos que abandona el compartimiento de susceptibles para pasar al de expuestos. El término $-\sigma E$, corresponde a la fracción de expuestos que terminaron su periodo de incubación y pasan al grupo de infectados.

2.4. Función de incidencia

Se hace una breve descripción de algunas de las funciones de incidencia más utilizadas; pero para mayor información respecto a diferentes tasas de incidencias no lineales se puede ver (Hethcote y Van den Driessche, 1991). En un inicio se considera la población total dada como N, los susceptibles por $S(t)$ y los infectados por $I(t)$. Luego de forma general se describe la tasa β dada en la subsección anterior (Modelo SI) y se dá su interpretación basándonos en (Brauer y cols., 2019). La cantidad de veces que un individuo infeccioso entra en contacto con otro individuo por unidad de tiempo se define como la tasa de contacto, que a menudo depende del número N de individuos en la población total y se denota mediante una función $\beta(N)$. Si las personas contactadas por una persona infectada son susceptibles, entonces pueden estar infectadas. Suponiendo que la probabilidad de infección por cada contacto es β_0, entonces el producto $\beta_0.\beta(N)$ se denomina *tasa de contacto efectiva*, muestra la capacidad de un individuo infectado de infectar a otros (dependiendo del ambiente, la toxicidad del virus o bacteria, etc).

Como la fracción de susceptibles en la población total es $\frac{S}{N}$, entonces la tasa de contacto media efectiva de un infeccioso con los individuos susceptibles es $\beta_0.\beta(N)\frac{S}{N}$, que se denomina tasa de infecciosidad. Asimismo, el número de nuevos contagios producidos por unidad de tiempo se expresa mediante

$$\beta_0\, \beta(N)\, \frac{S(t)}{N(t)}\, I(t),$$

expresión que corresponde a la incidencia de la enfermedad. (Takeuchi, Iwasa, y Sato, 2007). Dependiendo de $\beta(N)$ se tiene que:

- Cuando la tasa de contacto resulta directamente proporcional al tamaño total de la población, es decir, $\beta(N) = kN$, la expresión correspondiente para la incidencia se define como

  $$\beta_0 k S(t) I(t) = \beta S(t) I(t)$$

  que se denomina *incidencia bilineal o incidencia de acción de masas simple* (Takeuchi y cols., 2007), en la cual $\beta_0 k = \beta$ se le llama, coeficiente de transmisión.

- Cuando la tasa de contacto es constante ($\beta(N) = k$), la incidencia está dada como;

  $$\beta_0 k \frac{S(t)}{N(t)} I(t) = \beta \frac{S(t)}{N(t)} I(t)$$

la cual este tipo de función de incidencia se denomina *incidencia estándar*, donde $\beta_0 k = \beta$. (Takeuchi y cols., 2007)

Otras formas que puede tomar la tasa de incidencia incluyendo saturación fueron propuestos por Dietz en 1982 en su artículo dado en (Dietz, 1982), así como Heesterbeek y Metz en 1993 (Heesterbeek y Metz, 1993), que están dadas respectivamente como:

$$\beta(N) = \frac{\alpha N}{1 + \omega N},$$
$$\beta(N) = \frac{\alpha N}{1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}}$$

y que satisfacen lo siguiente:

$$\beta(0) = 0; \beta'(N) \geq 0; \left(\frac{\beta(N)}{N}\right) \leq 0; \lim_{N \longrightarrow \infty} \beta(N) = \beta_0$$

según (Takeuchi y cols., 2007).
Así mismo, en 1986 Liu et al. (W.-m. Liu, Levin, y Iwasa, 1986) trabajaron con el modelo SIRS considerando la de incidencia $\beta I^p S^q$ en la cual llegaron a la conclusión de que el sistema presentaba comportamientos dinámicos cualitativamente diferentes, bifurcaciones de Hopf, entre otras bifurcaciones. A lo que ellos indicaron que: *"Estos pueden ser importantes desde el punto de vista epidemiológico, ya que demuestran la posibilidad de un brote y colapso de la infección, o la coexistencia periódica autónoma de la enfermedad y el huésped "*. Posteriormente en 1987 (W.-m. Liu, Hethcote, y Levin, 1987) presentaron una investigación sobre diversos modelos epidemiológicos con tasas de incidencias de la forma $\beta I^p S^q$, $\frac{\beta I^p S^q}{N}$ en la cual llegan a mostrar que en dichos modelos pueden existir diferentes comportamientos en su diagrama de fase e incluso pueden aparecer soluciones periódicas dependiendo de los parámetros p y q.

2.5. Impacto de la cobertura mediática en diversos modelos epidemiológicos

La cobertura mediática se a considerado en diferentes modelos epidemiológicos con el objetivo de estudiar el impacto que tiene en la dinámica del modelo. La presencia de este factor puede adoptar múltiples formas en los sistema de ED. A continuación, se señalan investigaciones que muestran cómo la cobertura de los medios incide en varios enfoques epidemiológicos.

El artículo de (Y. Liu y Cui, 2008) presenta un modelo matemático SIRS para estudiar la influencia de la cobertura mediática en la propagación y el control de enfermedades infecciosas en una región determinada. Se llega a la conclusión de que la cobertura mediática eficaz es útil para el control de las enfermedades infecciosas. Dado que, cuando se informa de más personas infectadas, las susceptibles adoptarán muchos métodos para evitar infectarse. Esta investigación tuvo como precedente a

los artículos: (R. Liu, Wu, y Zhu, 2007) y (Cui, Sun, y Zhu, 2008) donde este último presenta diversas formas de tasas de incidencias no lineales que involucran la cobertura mediática. También otro de los artículos donde considera la cobertura mediática es; (Tchuenche, Dube, Bhunu, Smith, y Bauch, 2011), en la cual se presentan varios modelos entre los cuales se muestra la dinámica de la influenza con 4 variables; susceptibles (S), vacunados (V), infectados (I) y recuperados (R). Uno de sus resultado indican que el efecto de los medios debido a la notificación del número de infecciones, así como el número de personas vacunadas con éxito, se introduce en este modelo a través de una función de tipo incidencia saturada, donde si bien los medios pueden alentar a más personas a vacunarse, también pueden desencadenar un pánico por la vacunación o promover un exceso de confianza en la capacidad de una vacuna para proteger completamente contra la enfermedad; esto puede tener consecuencias potencialmente desastrosas ante una nueva pandemia. Luego en el artículo (Samanta, Rana, Sharma, Misra, y Chattopadhyay, 2013) publicado en el 2013 se formuló y analizó un modelo matemático SIS con el objetivo de estudiar el impacto de los programa de concientización (considerado como cobertura mediática) que realizan los medios de comunicación respecto a la propagación de la enfermedad infecciosa mediante una variable, donde este modelo compartimental contiene las siguientes poblaciones; susceptibles no conscientes, susceptibles conscientes e infectados, considerando que los individuos de ambas clases susceptibles pueden infectarse al entrar en contacto con los infectados. Entre los resultados importante obtenido se tiene que; cuando el número de programas de concientización aumenta, la proporción de individuos infectados disminuye; además en el análisis del modelo se tiene que al aumentar la implementación del programa de concienciación por encima de un valor umbral, el sistema pasa de estable a inestable (con bifurcación de Hopf). Luego en el 2021 se publicó un artículo de (Salman, 2021) donde se presentó un modelo epidemiológico del VIH/SIDA con ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con el objetivo de estudiar el efecto de la memoria de propagación (otros autores usan las ecuaciones diferenciales con retardo); además se consideró una función no lineal el tasa de transmisión que contenía al cobertura mediática como una forma de control llegando a reducir la tasa de contacto entre los susceptibles e infectado, y en consecuencia controlar la propagación de la enfermedad. Mas adelante (Goswami, Olaniyi, Abimbade, y Chuma, 2024) presentan un modelo matemático para investigar el efecto de los programas de concienciación de los medios de comunicación sobre la propagación de COVID-19 con un control óptimo, donde se muestra un sistema de ecuaciones diferenciales en la que aparece una tasa de incidencia no lineal expresada con una exponencial que contiene al parámetro de la cobertura mediática y que se considera como una función del número promedio de noticias de casos clínicamente infectados, y de una constante positiva que representa el peso del impacto de la cobertura mediática. Finaliza su investigación recomendando que es necesario intensificar los esfuerzos en la toma de conciencia de los medios sobre la transmisión y propagación del coronavirus para eliminar la enfermedad en la población; haciendo uso de los periódicos, televisión, radio, carteles, folletos y actividades públicas para compartir información sobre la enfermedad y evitar la propagación del COVID-19. En el mismo año se publicó un artículo de (Chen, Li, y Zhang, 2024), donde se propone un modelo epidemiológico SEIR respecto al COVID-19 considerando la cobertura mediática y la limitación de

los recursos biomédicos. En esta investigación también aparece una tasa de incidencia tipo saturada como una forma de control y realiza las simulaciones numéricas respectivas después de haber estimado los parámetros del modelo usando una dada de Shanghai de marzo y abril del 2022.

También se han publicado investigaciones de modelos estocásticos que describe la dinámica de algunas enfermedades que involucran cobertura mediática; para mayor entendimiento de ello se dejan dos de ellos: (Cai, Kang, Banerjee, y Wang, 2016) y (Wu, Chen, Zhang, y Li, 2024).

2.6. Modelos matemáticos del VIH/SIDA

El VIH/SIDA es una enfermedad que no tiene cura y que muchas personas han muerto por causas directa e indirecta de ella. Aquí se presenta algunos datos estadísticos obtenidos del programa conjunto de las Naciones Unidas sobre el VIH/SIDA (ONUSIDA) (ONUSIDA, 2024):

- Al comenzar el año 2024, se calculaba que alrededor de 39,9 millones de personas convivían con el VIH en todo el mundo.
- A lo largo del 2023, aproximadamente 630 000 muertes estuvieron relacionadas con enfermedades asociadas al sida.
- Durante ese mismo año, se produjeron cerca de 1,3 millones de nuevas infecciones por VIH.
- Se prevé que alrededor de 5,4 millones de personas desconocían su condición de vivir con el virus en 2023.
- Hacia finales de ese año, cerca del 77 % de la población con VIH tuvo acceso a terapia antirretroviral.
- En términos de financiamiento, al cierre del 2023 se destinaron aproximadamente 19 800 millones de dólares estadounidenses a la respuesta frente al sida en países de ingresos bajos y medianos, de los cuales en torno al 59 % procedía de fuentes nacionales (ONUSIDA, 2024).

En términos generales, la transmisión del VIH ocurre únicamente a través del contacto con fluidos corporales que contienen el virus, entre los que se incluyen la sangre, la leche materna, el semen y las secreciones vaginales de una persona infectada. Además, puede producirse la transmisión de una madrea su bebé durante el embarazo o en el proceso de parto. En contraste, el virus no se propaga por interacciones sociales habituales como besos, abrazos o apretones de manos, ni por el uso compartido de objetos, alimentos o agua (OMS, 2003). El tratamiento antirretroviral (TAR) es crucial para reducir las muertes de los pacientes con esta enfermedad; pero lamentablemente muchas personas desconocen que tiene el virus del VIH (o tienen conocimiento de ello pero al no presentar síntomas no le ponen interés a su Salud por falta de información) y es complicado prevenir la transmisión del virus por completo. Además, se sabe que una persona que contrae el VIH y que no recibe

ningún tratamiento, puede llegar a tener una infección crónica después de 10 años aproximadamente. Según (ONUSIDA, 2024) el beneficio de recibir el tratamiento es crucial, porque el individuo reduce la carga viral, reduce e riesgo de resistencia a otros fármacos, tiene mejor calidad de vida y disminuye el riesgo de transmición del VIH. En Perú se tienen los siguientes datos, según el ministerio de salud, hasta junio 2024 (MINSA, 2020);

- El primer caso de sida en el país se notificó en 1983. Desde entonces, y hasta junio de 2024, se han acumulado 177 226 diagnósticos de VIH, de los cuales 49 550 evolucionaron al estadio de sida.
- En el transcurso de los seis primeros meses de 2024, los varones concentraron la mayoría de las nuevas notificaciones: 76.6 % de los casos de infección por VIH y 79.2 % de los que alcanzaron la fase de sida.
- Al analizar la distribución por edades, en la población masculina los casos predominan en el grupo de 20 a 34 años, mientras que en las mujeres la mayor incidencia se presenta entre los 15 y 39 años.
- Asimismo, se observa que el 86 % de las mujeres recientemente diagnosticadas se encuentra en etapa reproductiva, comprendida entre los 15 y 49 años (MINSA, 2020).

Con el modelamiento matemático se ha podido analizar diversas situaciones de la dinámica del VIH/SIDA. En los artículos que se describirán a continuación presentan en general los siguientes puntos: el análisis cualitativo, el cálculo del R_0, simulaciones numéricas que verifican sus resultados y algunos presentan el análisis de sensibilidad. Muchos de ellos trabajan con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales, estocásticas y algunas con retardo.
En el 2006 se presentó un trabajo de investigación (López-Cruz, 2006) cuyo objetivo fue estudiar dos modelos matemáticos; uno en EDO y el otro con retardo para visualizar los efectos de la edad y las estructuras sociales en los modelos epidémicos SI, con aplicaciones específicas a la epidemia de VIH en Perú y Estados Unidos. Los parámetros fueron ajustados con datos de Perú y Estados Unidos. Entre los resultados obtenidos se observó que la dinámica en ambos modelos son similares, lo que llevó a concluir que las propiedades dinámicas observadas son robustas. Así mismo, se obtuvo un modelo que incorporó los efectos de los factores sociales, económicos y culturales en las enfermedades epidémicas SI, llegando a indicar que la falta de atención médica y control de las mujeres embarazadas infectadas ayudó a la propagación de la enfermedad. Después de tantos otros artículos publicados en el 2015 se presenta un artículo de (Mastroberardino, Cheng, Abdelrazec, y Liu, 2015) en la cual se propuso un modelo matemático no lineal para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en Cuba. En este caso se consideró que el único modo de transmisión es a través del contacto con aquellos que aún no han sido diagnosticados con VIH, con ello se realizó el análisis del sistema de ecuaciones diferenciales llegando a desarrollar el análisis de estabilidad global.
También se han publicado modelos que incorporan dos enfermedades; por ejemplo: la malaria con el VIH/SIDA, la tuberculosis con el VIH/SIDA entre otras relaciones. A este tipo de modelos se les llama modelos epidemiológicos de coinfección.

Aquí se tiene la investigación publicada en el 2009 (Mukandavire, Gumel, Garira, y Tchuenche, 2009) en la cual muestra un estudio de un modelo que esta formados por dos submodelos (VIH y Malaria). El estudio analítico cualitativo se realiza por separado para luego compararlo con el completo; obteniendo como resultado de que la reducción de la actividad sexual de las personas con síntomas de malaria disminuye el número de nuevos casos de VIH. Otro modelo de coinfección es el presentado en (Sharomi, Podder, Gumel, y Song, 2007), que al igual que la investigación antes mencionada primero se realiza el estudio de los submodelos para luego compararlo con el modelo completo esto con el objetivo de evaluar el impacto de las diversas estrategias de tratamiento. Entre los resultado importantes se tiene que la estrategia de tratamiento solo del VIH evita más casos de infección mixta que la estrategia solo de tuberculosis. De forma similar el año pasado, (Zahli, Zeroual, y Fatmi, 2024) publicaron un modelo también de coinfección entre TB y VIH cuyo objetivo es analizar la posible expansión factible de la coinfección de las enfermedades VIH y TB.

Capítulo 3

Modelo SIIJA

Después de haber introducido las nociones básicas en epidemiología se propone un modelo del tipo SI con varios compartimientos de infección para visualizar la dinámica del VIH/SIDA; es decir, que muestre la dinámica entre susceptibles e infectados dado que estos últimos nunca se recuperan. Así mismo, se considera una tasa de nacimientos y una tasa de muerte ya sea por la enfermedad del SIDA o por forma natural. En un inicio el modelo fue estudiado y publicado en un artículo de Huo (Huo, Chen, y Wang, 2016), en la cual realizaron el análisis de estabilidad local. En esta sección se hará un análisis cualitativo del mismo modelo de (Huo y cols., 2016) pero considerando dos tasas de transmisión de contacto que tiene la forma de una función de incidencia saturada, la cual involucra la cobertura mediática y que funciona como control. El análisis del modelo con esta consideraciones fue estudiado en el artículo de (Gonzales-Moreno K, 2021) y publicado en la revista Selecciones matemática de la Universidad Nacional de Trujillo. En esta tesis llamaremos a este modelo como; *modelo básico SIIJA.*

3.1. Descripción del modelo básico SIIJA

El presente modelo matemático de tipo epidemiológico tiene como objetivo analizar el comportamiento de la transmisión del VIH/SIDA en relación con el tiempo. La población total, representada por $N(t)$, se organiza en grupos de individuos con iguales condiciones. Las variables consideradas asumen valores enteros no negativos, incluido el cero, ya que se refieren a cantidades de personas. Como se mencionó anteriormente el tipo de enfermedad que esta relacionada con el modelo, es el SIDA, la cual no tiene cura; por ello se toma como referencia el modelo SI (capítulo 2). Los infectados son divididos en 3 compartimientos; I_1, I_2 y J. A continuación se denota a las poblaciones como:

- S: Individuos susceptibles.
- I_1: Individuos infectados asintomáticos con latencia lenta.
- I_2: Individuos infectados asintomáticos con latencia rápida.
- J: Individuos sintomáticos.
- A: Individuos con SIDA.

Para el modelo básico SIIJA se tiene las siguientes consideraciones:

1. La población susceptible (S) está expuesta al contagio mediante el contacto con individuos infectados asintomáticos con latencia rápida (I_2), así como con aquellos infectados sintomáticos (J). Dichas interacciones se describen mediante las tasas de transmisión $\beta_1(I_2)$ y $\beta_2(J)$.

2. El compartimento (I_1) agrupa a personas portadoras del VIH que no presentan síntomas. Se trata de individuos con latencia prolongada, caracterizados por no tener enfermedades crónicas adicionales que comprometan su sistema inmunológico. Este conjunto no constituye una fuente de contagio para los susceptibles.

3. El grupo (I_2) incluye también a personas infectadas sin presentar síntomas, pero que se clasifican como de latencia rápida, debido al deterioro de su sistema inmune ocasionado por la presencia de alguna enfermedad crónica. A diferencia del grupo anterior, estos sí pueden contagiar.

4. El compartimento (J) corresponde a individuos infectados con VIH que presentan síntomas y son capaces de contagiar a los susceptibles. Además, reciben tratamiento con el objetivo de disminuir su carga viral.

5. El conjunto (A) está conformado por personas que han pasado a la etapa de SIDA y que, pese a recibir tratamiento, no han mostrado mejoría, alcanzando la fase avanzada de la enfermedad. Este grupo no contagia a los susceptibles.

6. En resumen, dentro de los cinco compartimentos del modelo, cuatro de ellos (I_1, I_2, J y A) representan poblaciones infectadas. No obstante, únicamente los individuos con latencia rápida (I_2) y los infectados sintomáticos (J) son los que infectan.

Así, los grupos poblacionales definidos anteriormente obedecen la relación siguiente:

$$N(t) = S(t) + I_1(t) + I_2(t) + J(t) + A(t) \tag{3.1}$$

donde $S(t) \geq 0$, $I_1(t) \geq 0$, $I_2(t) \geq 0$, $J(t) \geq 0$ y $A(t) \geq 0$. Para la formalización matemática del modelo se muestra la descripción de las tasas o parámetros las cuales toman valores positivos.(Gonzales-Moreno K, 2021)

3.1.1. Diagrama del modelo básico SIIJA

El diagrama de trasmisión del modelo nos permite ver la dinámica del modelo. Se muestran las tasas y los compartimientos que hemos explicado en el punto anterior. También se ha considerado las tasas de incidencia $\beta_1(I_2)$ y $\beta_2(J)$ que describiremos más adelante.

Se considera que I_2 representa la población que con el transcurso del tiempo podrían pasar a ser infectados sintomáticos que recibirían tratamiento (J). Por otro lado, para pasar del grupo de infectados con latencia lenta (I_1) a latencia rápida (I_2) se realiza con una tasa de ε. El grupo de individuos sintomáticos en tratamiento (J) puede retornar a la condición de individuos asintomáticos (I_1 o I_2) con tasas de

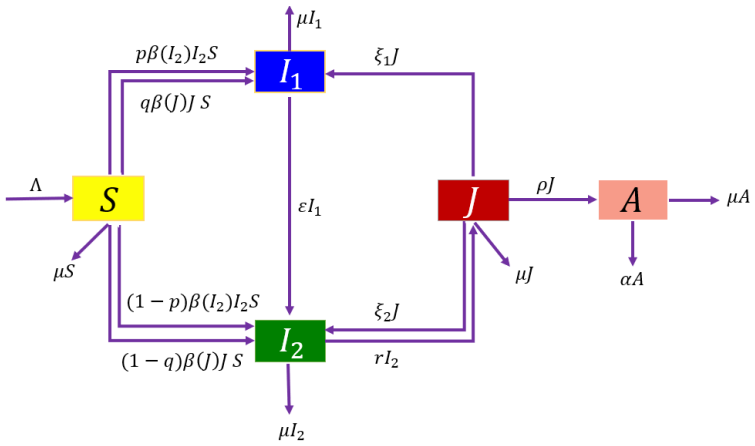


Figura 3.1: Diagrama de trasmisión del modelo básico SIIJA. Tomado del artículo (Gonzales-Moreno K, 2021)

transición ξ_1 y ξ_2, respectivamente. Alternativamente, una fracción de estos individuos puede evolucionar hacia el estado de SIDA (A) con una tasa ρ. Una vez en este compartimento, los individuos pueden fallecer como consecuencia del SIDA o por otras patologías (Huo y Feng, 2013). Cada compartimento contempla una salida por mortalidad natural, regulada por la tasa μ, y el modelo considera adicionalmente la incorporación de nuevos individuos mediante la tasa de reclutamiento Λ.

3.1.2. Descripción de las tasas de contacto

Las tasas de contacto consideradas en el modelo desarrollado por (Huo y Feng, 2013) se presentan de la siguiente manera:

$$\beta_1(I_2) = \beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m + I_2}, \quad \beta_2(J) = \beta_2 - \beta_2' \frac{J}{m + J} \tag{3.2}$$

Estas expresiones corresponden a funciones no lineales, cuya incorporación al modelo tiene como finalidad representar el efecto de la cobertura mediática, denotada por $m \in \mathbb{N}$, como un mecanismo de control. La dinámica del modelo fue analizada en (Gonzales-Moreno K, 2021), donde se indica que *"cuando surge una nueva enfermedad infecciosa, se esperaría que la población adopte medidas preventivas inmediatamente después de que se publique el número de individuos infectados con latencia rápida $I_2(t)$ y sintomáticos $J(t)$"* (Gonzales-Moreno K, 2021). Este efecto se ha descrito en la literatura como un *"impacto psicológico"* (Capasso y Serio, 1978).
En particular, la ecuación

$$\beta_1(I_2) = \beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m + I_2}$$

indica que la tasa de transmisión por contacto entre los individuos del compartimento I_2 y los susceptibles (S) se reduce tras la difusión de información por los medios sobre el número de casos de infección con latencia rápida. En esta formulación, β_1 representa la tasa de contacto inicial antes de la intervención mediática, mientras

que el término $\beta_1' \dfrac{I_2}{m+I_2}$ cuantifica la disminución inducida por la información sobre los infectados con latencia rápida. Este mecanismo refleja un control social mediado por la cobertura informativa, asegurando que $\beta_1 - \beta_1' > 0$. Además, se observa que al aumentar I_2 indefinidamente, la reducción de la tasa de contacto se aproxima a su valor máximo β_1', mientras que el efecto intermedio se alcanza cuando $I_2 = m$ (Y. Liu y Cui, 2008).

En la investigación realizada por Salman (Salman, 2021) se considera la función $\dfrac{I_2}{m+I_2}$, la cual representa un efecto de saturación de la enfermedad. En este contexto, m se interpreta como la constante de saturación media, reflejando el impacto de la cobertura mediática sobre la tasa de contacto (Y. Liu y Cui, 2008). Para el caso particular en que $m = 0$, se observa que $\beta_1(I_2) = \beta_1 - \beta_1^{'}$, permaneciendo constante con $\beta_1 > \beta_1^{'}$, lo que indica que incluso cuando la saturación mediática es nula, se mantiene cierto control sobre la tasa de incidencia. Al analizar la razón de cambio de $\beta_1(I_2)$ respecto a m, se obtiene

$$\frac{\partial \beta_1(I_2)}{\partial m} = \beta_1^{'} \frac{I_2}{(m+I_2)^2} > 0,$$

lo que refleja que un aumento en m incrementa la reducción de la tasa de contacto. Desde el punto de vista biológico, Gonzales-Moreno y López-Cruz (Gonzales-Moreno K, 2021) argumentan que *"un valor pequeño de m implica que la velocidad de decremento de la tasa de transmisión de contacto es limitada; esto sugiere la necesidad de que los medios de comunicación difundan información sobre los mecanismos de transmisión y medidas preventivas, con el fin de disminuir la propagación del VIH/SIDA"*. De forma análoga, al derivar respecto a $\beta_1^{'}$ se obtiene

$$\frac{\partial \beta_1(I_2)}{\partial \beta_1'} = -\frac{I_2}{m+I_2} < 0,$$

lo que indica que incrementos en $\beta_1^{'}$ conducen a una disminución en la tasa de contacto efectiva.

De la misma manera, la tasa de incidencia $\beta_2(J) = \beta_2 - \beta_2^{'} \frac{J}{m+J}$ se interpreta en el modelo suponiendo que todos los individuos infectados con VIH y latencia rápida pueden, eventualmente, recibir tratamiento para retrasar la progresión hacia SIDA.

En la figura 3.2 se ilustra la función $\lambda_1(I_2) = \beta_1^{'} \frac{I_2}{m+I_2}$ para $m = 30$, mostrando un crecimiento gradual que alcanza un límite superior $\beta_1^{'}$ cuando I_2 es grande. La figura 3.3 presenta la función de saturación $\beta_1(I_2) = \beta_1 - \beta_1^{'} \frac{I_2}{m+I_2}$ con $m = 30$ y $\beta_1 = 0{,}95$, evidenciando una disminución de la tasa de contacto con un máximo alcanzable de $\beta_1 - \beta_1^{'}$ a medida que I_2 se incrementa.

Además, en la figura 3.4 se analiza $\lambda_1(I_2)$ para distintos valores de m (20, 30 y 40) con $\beta_1^{'} = 0{,}4$, observándose que la función es creciente y se aproxima al valor máximo de 0,4 conforme I_2 aumenta. La figura 3.5(a) muestra la dependencia de λ_1 respecto a I_2 y $\beta_1^{'}$, indicando un crecimiento conjunto al aumentar ambos parámetros. Finalmente, la figura 3.5(b) representa $\lambda_1(I_2, m)$ con $\beta_1^{'} = 0{,}4$, evidenciando que la función tiende a 0,4 a medida que m y I_2 alcanzan valores altos.

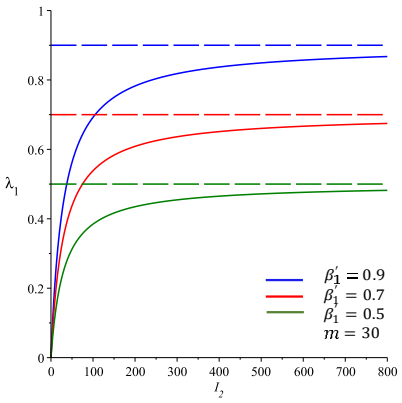


Figura 3.2: Función $\lambda_1(I_2)$ cuando $m = 30$

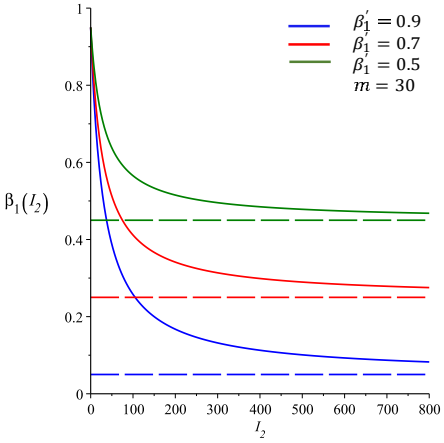


Figura 3.3: Tasa de contacto $\beta_1(I_2)$ cuando $m = 30$

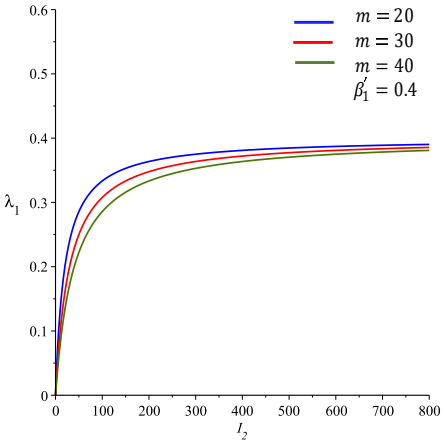
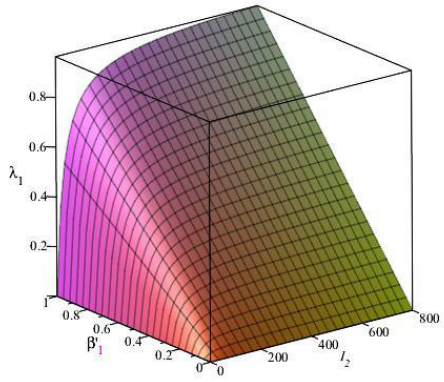
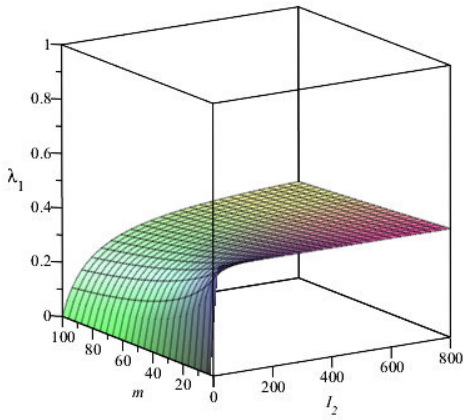


Figura 3.4: Función $\lambda_1(I_2)$ cuando $\beta_1' = 0{,}4$



(a) Función λ_1 cuando $m = 30$.



(b) Función λ_1 cuando $\beta_1^{'} = 0{,}4$

Figura 3.5: Grafica de $\lambda_1 = \beta_1^{'} \dfrac{I_2}{m + I_2}$

Después de haber mencionado las consideraciones del modelo SIIJA y realizado la descripción de las tasas $\beta_1(I_2)$ y $\beta_2(J)$, se plantean las ecuaciones diferenciales para posteriormente realizar el análisis cualitativo.

3.1.3. Sistema de ecuaciones diferenciales del modelo básico SIIJA

Teniendo en cuenta el diagrama 3.1 donde se muestra las salidas y entradas de los compartimientos, se obtienen 6 ecuaciones diferenciales ordinarias, teniendo en cuenta que las variables y los parámetros toman valores positivos. En este modelo se involucra las tasas de contacto descritas en la sesión 3.1.2 con el objetivo de analizar el modelo propuesto por (Huo y Feng, 2013) pero considerando la cobertura mediática:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1(I_2)I_2S - \beta_2(J)JS - \mu S, & (3.3)\\
\dfrac{dI_1}{dt} = p\beta_1(I_2)I_2S + q\beta_2(J)JS - b_1I_1 + \xi_1 J, & (3.4)\\
\dfrac{dI_2}{dt} = (1-p)\beta_1(I_2)I_2S + (1-q)\beta_2(J)JS + \varepsilon I_1 - b_2I_2 + \xi_2 J, & (3.5)\\
\dfrac{dJ}{dt} = rI_2 - b_3J, & (3.6)\\
\dfrac{dA}{dt} = \rho J - b_4A. & (3.7)
\end{cases}
$$

con tasas de contacto $\beta_1(I_2) = \beta_1 - \beta_1' \dfrac{I_2}{m+I_2}$ y $\beta_2(J) = \beta_2 - \beta_2' \dfrac{J}{m+J}$, donde $S(t) \geq 0, I_1(t) \geq 0, I_2(t) \geq 0, J(t) \geq 0$ y $A(t) \geq 0$. Los parámetros están dados por: $b_1 = \varepsilon + \mu, b_2 = r + \mu, b_3 = \xi_1 + \xi_2 + \rho + \mu$ y $b_4 = \alpha + \mu$.
El modelo SIIJA presenta parámetros descritos en la siguiente tabla 3.1. Por ejemplo, los parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2'$ y r fueron referenciados como asumidos en el artículo (Gonzales-Moreno K, 2021), pero que ahora en esta sesión se considera como referencia dicho artículo. Para el caso de los parámetros p, q, ξ_1 y ξ_2 se han considerado los valores que utilizaron en las simulaciones en el artículo (Huo y Feng, 2013). Se considera que: $\beta_1 - \beta_1' > 0$, $\beta_2 - \beta_2' > 0$, $\Lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \mu, p, q, \varepsilon, r, \rho, \xi_1$ y ξ_2 son parámetros entre 0 y 1. Los valores de algunos de los parámetros fueron considerados de las investigaciones de (Ali, Raina, Iqbal, y Mathur, 2019),(Huo y Feng, 2013) y (Salman, 2021). Y de los parámetros: β_1, β_2, β_1', β_2' y r sus valores fueron asumidos en el trabajo de (Gonzales-Moreno K, 2021).

Tabla 3.1: En la tabla se presentan la descripció de los parámetros del modelo SIIJA, adaptado del artículo (Gonzales-Moreno K, 2021)

Parámetro	**Valores**
Tasa de progresión de individuos en tratamiento que pasan a I_1 (ξ_1)	0.8 año^{-1}
Tasa de progresión de individuos en tratamiento que pasan a I_2 (ξ_1) (ξ_2)	0.9 año^{-1}
Tasa de evolución de individuos I_1 a I_2 (ε)	0.002 año^{-1}
Tasa de evolución de individuos I_2 a J (r)	0.025 año $^{-1}$
Tasa de evolución de individuos J a A (ρ)	0.03 año^{-1}
Parámetro de saturación media que cuantifica la influencia de la cobertura mediática sobre la tasa de transición por contacto. (m)	30 personas
Probabilidad de que un susceptible infectado por J ingrese a I_1 (q); el resto pasa a I_2 $(1-q)$	0.8
Tasa de mortalidad por causa del VIH/SIDA (α)	0.01 año $^{-1}$
Tasa de mortalidad natural (μ)	0.01 año $^{-1}$
Probabilidad de que un susceptible infectado por I_2 ingrese a I_1 (p); el resto pasa a I_2 $(1-p)$	0.9
Tasa de reclutamiento de población (Λ)	300 personas por año
Tasa de trasmisión del VIH por parte del compartimiento I_2 debido a la cobertura de los medios. ($\beta_1^{'}$)	2×10^{-6} (per. año) $^{-1}$
Tasa de trasmisión del VIH por parte del compartimiento sintomático J debido a la cobertura mediática ($\beta_2^{'}$)	4×10^{-7} (per. año) $^{-1}$
Tasa de trasmisión del VIH por indivisión I_2 antes de la cobertura de los medios (β_1)	2.2727 $\times 10^{-6}$ (per. año) $^{-1}$
Tasa de trasmisión del VIH por individuos J antes de la cobertura de los medios (β_2)	4.5442 $\times 10^{-7}$ (per. año) $^{-1}$

Para llevar a cabo un análisis riguroso del modelo matemático, se demostrará que las soluciones son positivamente invariantes dentro de una región adecuadamente definida del espacio de estados. Dado que el modelo contempla distintas clases de población: susceptibles (S), infectados con latencia rápida (I_1), infectados con latencia lenta (I_2), infectados sintomáticos (J) y personas con SIDA (A), cada una de estas subpoblaciones se representa mediante funciones continuas del tiempo t.

Se asume que las variables S, I_1, I_2, J, A son de clase C^1, es decir, funciones definidas como

$$S, I_1, I_2, J, A : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

con derivadas continuas en todo el dominio $\mathbb{R}_0^+$. Esta propiedad asegura que las operaciones algebraicas elementales realizadas entre ellas (suma, resta, producto, multiplicación por constantes) generan funciones continuas, garantizando que el modelo sea matemáticamente consistente para cualquier $t \geq 0$.

Los parámetros del sistema se consideran positivos y acotados, con valores en el intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}^+$, excepto Λ y m, los cuales pueden tomar valores superiores. En consecuencia, la multiplicación de cualquiera de estos parámetros por las variables

del sistema produce funciones continuas para todo $t \geq 0$, asegurando que el conjunto positivo

$$(S, I_1, I_2, J, A) \in \mathbb{R}_0^5$$

sea invariante bajo la dinámica del modelo (Gonzales-Moreno K, 2021).

3.2. Positividad de soluciones

Ahora debemos garantizar que las variables del modelo (3.3)-(3.7) sean no negativas para todo $t > 0$ y para ello presentamos el siguiente lema.

Lema 3. *Dadas condiciones iniciales positivas para las variables S, I_1, I_2, J y A, el sistema (3.3)-(3.7) admite soluciones que permanecen positivas en todo instante $t > 0$.*

Demostración. La positividad de las soluciones se demostrará mediante el método de contradicción, bajo el supuesto de que las condiciones iniciales son estrictamente positivas.

Consideremos que los valores iniciales cumplen $S(0), I_1(0), I_2(0), J(0), A(0) > 0$. Para establecer la positividad de las soluciones, supongamos lo contrario, es decir, que en algún instante de tiempo al menos una de las variables $S(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, $J(t)$ o $A(t)$ deja de ser positiva. Los posibles escenarios que se derivan de esta suposición son los siguientes:

1) Supongamos que existe un primer tiempo t_1 tal que $S(t_1) = 0$, $S'(t_1) < 0$, $I_1(t) > 0$, $I_2(t) > 0$, $J(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_1]$

2) Supongamos que existe un primer tiempo t_2 tal que $I_1(t_2) = 0$, $I_1'(t_2) < 0$, $S(t) > 0$, $I_2(t) > 0$, $J(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_2]$

3) Supongamos que existe un primer tiempo t_3 tal que $I_2(t_3) = 0$, $I_2'(t_3) < 0$, $S(t) > 0$, $I_1(t) > 0$, $J(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_3]$

4) Supongamos que existe un primer tiempo t_4 tal que $J(t_4) = 0$, $J'(t_4) < 0$, $S(t) > 0$, $I_1(t) > 0$, $I_2(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_4]$

5) Supongamos que existe un primer tiempo t_5 tal que $A(t_5) = 0$, $A'(t_5) < 0$, $S(t) > 0$, $I_1(t) > 0$, $I_2(t) > 0$ y $J(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_5]$

Luego para el caso 1), según la primera ecuación del sistema tenemos que

$$S'(t_1) = \Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2(t_1)}{m + I_2(t_1)}\right) I_2(t_1) S(t_1) - \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J(t_1)}{m + J(t_1)}\right) J(t_1) S(t_1) - \mu S(t_1)$$

$$S'(t_1) = \Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2(t_1)}{m + I_2(t_1)}\right) I_2(t_1)(0) - \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J(t_1)}{m + J(t_1)}\right) J(t_1)(0) - \mu(0)$$

$$S'(t_1) = \Lambda > 0$$

el cual es contradictorio con $S'(t_1) < 0$.
Para el caso 2), según la segunda ecuación del sistema sabemos que

$$I_1'(t_2) = p\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2(t_2)}{m + I_2(t_2)}\right) I_2(t_2)S(t_2) + q\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J(t_2)}{m + J(t_2)}\right) J(t_2)S(t_2)$$
$$- b_1 I_1(t_2) + \xi_1 J(t_2) > 0$$

lo cual es una contradicción con $I_1'(t_2) < 0$.
En el caso 3), según la tercera ecuación del sistema sabemos que

$$I_2'(t_3) = (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2(t_3)}{m + I_2(t_3)}\right) I_2(t_3)S(t_3) + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J(t_3)}{m + J(t_3)}\right) J(t_3)S(t_3)$$
$$+ \varepsilon I_1(t_3) - b_2 I_2(t_3) + \xi_2 J(t_3) > 0$$

lo cual es una contradicción con $I_2'(t_3) < 0$.
Para el caso 4), según la cuarta ecuación del sistema sabemos que

$$J'(t_4) = rI_2(t_4) - b_3 J(t_4) > 0$$

lo cual es una contradicción con $J'(t_4) < 0$.
Finalmente para el caso 5), según la quinta ecuación del sistema sabemos que

$$A'(t_5) = \rho J(t_5) - b_4 A(t_5) > 0$$

lo cual es una contradicción con $A'(t_5) < 0$.
Por lo tanto, como todos los casos opuestos de la tesis son faltas, por consiguiente la tesis es verdadera; es decir, las soluciones $S(t), I_1(t), I_2(t), J(t)$ y $A(t)$ del sistema son positivas $\forall t > 0$. □

3.3. Región invariante

Con el objetivo de garantizar que las soluciones del modelo posean una interpretación biológica coherente, resulta necesario establecer la existencia de una región factible y positivamente invariante, denotada por Ω, dentro de la cual las soluciones permanezcan acotadas a lo largo del tiempo. En particular, $S(t), I_1(t), I_2(t), J(t)$ y $A(t)$ se encuentran limitadas superiormente por la razón de supervivencia $\frac{\Lambda}{\mu}$, siendo Λ la tasa de ingreso de nuevos individuos y μ la tasa de mortalidad natural. Esto conduce a la desigualdad $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, que admite la siguiente interpretación biológica: si $\frac{\Lambda}{\mu} < 1$, la población tenderá a extinguirse, mientras que si $\frac{\Lambda}{\mu} > 1$, se espera que las poblaciones persistan en el tiempo.

Lema 4. *Se define a región factible Ω como*

$$\Omega = \left\{ (S(t), I_1(t), I_2(t), J(t), A(t)) \in \mathbb{R}_+^5 \;\middle|\; N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

Esta región se mantiene positivamente invariante respecto al sistema (3.3)-(3.7) bajo condiciones iniciales no negativas $S(0) \geq 0, I_1(0) \geq 0, I_2(0) \geq 0, J(0) \geq 0$ y $A(0) \geq 0$.

Demostración. Para demostrar la invariancia de Ω, se suman las ecuaciones del sistema (3.3)-(3.7) obteniendo la dinámica total de la población:

$$\frac{d}{dt}(S + I_1 + I_2 + J + A) = \Lambda - \mu(S + I_1 + I_2 + J + A) - \alpha A,$$
$$\frac{dN}{dt} = -\mu N + (\Lambda - \alpha A).$$

Dado que $A(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, se tiene que

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N + (\Lambda - \alpha A) \leq \Lambda - \mu N. \tag{3.8}$$

Integrando la inecuación diferencial (3.8) se obtiene:

$$\frac{dN}{-\mu N + \Lambda} \leq dt,$$
$$N - \frac{\Lambda}{\mu} \leq Ce^{-\mu t},$$

donde C es una constante determinada por las condiciones iniciales. De esta manera, la solución satisface la cota superior:

$$N(t) \leq Ce^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}. \tag{3.9}$$

Aplicando el límite cuando $t \to +\infty$, se deduce:

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

lo que confirma que la población total permanece acotada por $\dfrac{\Lambda}{\mu}$ a largo plazo.

En consecuencia, la región

$$\Omega = \left\{ (S(t), I_1(t), I_2(t), J(t), A(t)) \in \mathbb{R}^5_+ \;\middle|\; N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

se constituye como un conjunto positivamente invariante para el sistema (3.3)-(3.7), asegurando que todas las trayectorias con condiciones iniciales no negativas permanezcan dentro de Ω para todo $t \geq 0$. citemoreno2021estabilidad. □

3.4. Punto de equilibrio libre de infección

En esta sección se hallarán los puntos críticos del sistema (3.3)-(3.7) para luego estudiar su estabilidad local. Sea el SE no lineales:

$$\Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S - \left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS - \mu S = 0 \tag{3.10}$$

$$p\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + q\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS - b_1 I_1 + \xi_1 J = 0 \tag{3.11}$$

$$(1-p)\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS + \varepsilon I_1 - b_2 I_2 + \xi_2 J = 0 \tag{3.12}$$

$$rI_2 - b_3 J = 0 \tag{3.13}$$

$$\rho J - b_4 A = 0 \tag{3.14}$$

se despejan las variables I_2 y A de las ecuaciones (3.13) y (3.14) respectivamente:

$$I_2 = \frac{b_3 J}{r}$$
$$A = \frac{\rho J}{b_4}.$$

De (3.10) y (3.11) se tiene S e I_1 dadas por las expresiones:

$$S = \frac{\Lambda}{\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{b_3 J}{mr + b_3 J}\right)\frac{b_3 J}{r} + \left(\beta_2 - \beta_2'\frac{J}{m+J}\right) J + \mu}$$

$$I_1 = \frac{J\left[p\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{b_3 J}{mr+b_3 J}\right)\frac{b_3 S}{r} + q\left(\beta_2 - \beta_2'\frac{J}{m+J}\right) S + \xi_1\right]}{b_1} \tag{3.15}$$

Reemplazando S, I_1 y I_2 en la expresión (3.12), se tiene un factor común J que se muestra en;

$$J\left\{(1-p)\left(\beta_1(I_2)\right)\frac{b_3 S}{r} + (1-q)\left(\beta_2(J)\right) S + \frac{\varepsilon}{b_1}\left(p\left(\beta_1(I_2)\right)\frac{b_3 S}{r} + q\left(\beta_2(J)\right) S + \xi_1\right) - \frac{b_2 b_3}{r} + \xi_2\right\} = 0 \tag{3.16}$$

el cual igualando a cero se tiene $J = 0$ y el estado libre de infección E_0 está dado por;

$$E_0 = (S, I_1, I_2, J, A) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right) \tag{3.17}$$

Del otro factor se obtendrá el punto de equilibrio endémico, que será analizado con más detenimiento en la sección 3.5. Ahora, calculamos el R_0 del modelo básico SIIJA.

3.4.1. Número de reproducción básico del modelo básico SIIJA

Según lo indicado en el artículo (Gonzales-Moreno K, 2021), R_0 se interpreta como la cantidad de caso infecciosos que se pueden generar por un caso primario

de infección en una población de susceptibles, más referencia respecto a este tema lo podemos encontrar en la sección 2.2. Luego se procede a mostrar el cálculo del número básico de reproducción del modelo básico SIIJA mediante el método de la próxima generación siguiendo la teoría de (Van den Driessche y Watmough, 2002). Considerando la notación $X = (I_1, I_2, J, A)^T$, el sistema (3.4)-(3.7) se escribe como:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$$

donde,

$$F(X) = \begin{pmatrix} p\left(\beta_1 - \beta_1'\dfrac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + q\left(\beta_2 - \beta_2'\dfrac{J}{m+J}\right) JS \\ (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1'\dfrac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2'\dfrac{J}{m+J}\right) JS \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

y

$$V(X) = \begin{pmatrix} b_1 I_1 - \xi_1 J \\ -\varepsilon I_1 + b_2 I_2 - \xi_2 J \\ -r I_2 + b_3 J \\ -\rho J + b_4 A. \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Evaluando las matrices Jacobianas de $F(X)$ y $V(X)$, obtenidas en (3.18) y (3.19), en el punto de equilibrio E_0 definido en (3.17), se obtiene:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & p\beta_1\dfrac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2\dfrac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1\dfrac{\Lambda}{\mu} & (1-q)\beta_2\dfrac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & -\xi_1 & 0 \\ -\varepsilon & b_2 & -\xi_2 & 0 \\ 0 & -r & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & b_4 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

De acuerdo con (3.20), se construye la matriz FV^{-1} y, aplicando el método propuesto por Van den Driessche et al. (Van den Driessche y Watmough, 2002), se identifica su autovalor de mayor valor, el cual corresponde al número básico de reproducción R_0 del sistema.

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{\beta_1(\xi_1+\xi_2+\rho+\mu)(\mu(1-p)+\varepsilon) + \beta_2 r(\mu(1-q)+\varepsilon)}{r(\varepsilon(\rho+\mu)+\mu(\xi_1+\rho+\mu)) + \mu(\xi_1+\xi_2+\rho+\mu)(\varepsilon+\mu)}\right) \tag{3.21}$$

El R_0 también se puede denotar de la siguiente forma:

$$R_0 = \left(\frac{\beta_1 b_3 L_1 + \beta_2 r L_2}{\theta}\right)\frac{\Lambda}{\mu} \tag{3.22}$$

donde,

$$L_1 = \varepsilon + \mu(1-p) = p\varepsilon + b_1(1-p); \quad p < 1 \tag{3.23}$$

$$L_2 = \varepsilon + \mu(1-q) = q\varepsilon + b_1(1-q); \quad q < 1 \tag{3.24}$$

$$\theta = r(\varepsilon(\rho+\mu)+\mu(\xi_1+\rho+\mu)) + \mu(\xi_1+\xi_2+\rho+\mu)(\varepsilon+\mu) = b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon\xi_1 + b_1\xi_2)r \tag{3.25}$$

3.5. Punto de equilibrio endémico

Se presenta el cálculo del punto de equilibrio endémico. En la sesión anterior (3.4) vimos que el estado de equilibrio libre de infección estaba dado por; $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$; y para esta parte se considera el segundo factor igualado a cero:

$$(1-p)\left(\beta_1(I_2)\right)\frac{b_3 S}{r}+(1-q)\left(\beta_2(J)\right)S+\frac{\varepsilon}{b_1}\left(p\left(\beta_1(I_2)\right)\frac{b_3 S}{r}+q\left(\beta_2(J)\right)S+\xi_1\right)-\frac{b_2 b_3}{r}+\xi_2=0$$

Reemplazando

$$\beta_1(I_2)=\beta_1-\beta_1'\frac{I_2}{m+I_2} \quad y \quad \beta_2(J)=\beta_2-\beta_2'\frac{J}{m+J}$$

en la ecuación y realizando operaciones algebraicas con el objetivo de obtener un polinomio con variable J y coeficientes que dependan de los parámetros se llega a

$$\begin{aligned}
&b_3 L_1 \Lambda r\left[m^2 r\beta_1+Jm(b_3(\beta_1-\beta_1')+\beta_1 r)+J^2 b_3(\beta_1-\beta_1')\right]\\
&+\Lambda r^2 L_2\left[m^2 r\beta_2+Jm(r(\beta_2-\beta_2')+\beta_2 b_3)+J^2 b_3(\beta_2-\beta_2')\right]\\
&-J^3 b_3\theta\left[b_3(\beta_1-\beta_1')+r(\beta_2-\beta_2')\right]-J^2 m\theta\left[b_3(b_3(\beta_1-\beta')+\beta_1 r)+r(r(\beta_2-\beta_2')+\beta_2 b_3)\right]\\
&-\theta\mu r b_3 J^2-\theta b_3\beta_1 m^2 rJ-\theta r^2\beta_2 m^2 J-\theta\mu r m(r+b_3)J-\theta\mu r^2 m^2=0 \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Para reducir los coeficientes de la ecuación que se mostrará en la siguiente página consideramos las expresiones positivas denotadas como R_1, R_2 y R_3 como:

$$R_1=\left(\frac{\beta_1' b_3 L_1+\beta_2' r L_2}{\theta}\right)\frac{\Lambda}{\mu}>0 \qquad (3.27)$$

$$R_2=\left(\frac{\beta_1 b_3^2 L_1+\beta_2 r^2 L_2}{\theta}\right)\frac{\Lambda}{\mu}>0 \qquad (3.28)$$

$$R_3=\left(\frac{\beta_1' b_3^2 L_1+\beta_2' r^2 L_2}{\theta}\right)\frac{\Lambda}{\mu}>0 \qquad (3.29)$$

o lo que es equivalente a:

$$\begin{aligned}
R_1\mu\theta&=\Lambda(\beta_1' b_3 L_1+\beta_2' r L_2)\\
R_2\mu\theta&=\Lambda(\beta_1 b_3^2 L_1+\beta_2 r^2 L_2)\\
R_3\mu\theta&=\Lambda(\beta_1' b_3^2 L_1+\beta_2' r^2 L_2)
\end{aligned}$$

además se considera;

$$\begin{aligned}
\varpi_1&=b_3(\beta_1-\beta_1')+r(\beta_2-\beta_2')\\
\varpi_2&=b_3^2(\beta_1-\beta_1')+r^2(\beta_2-\beta_2')
\end{aligned}$$

Luego al reemplazar R_1, R_3, ϖ_1 y ϖ_2 en 3.26 se tiene;

$$\begin{aligned}
&b_3\varpi_1 J^3+\left[m(\varpi_2+b_3 r(\beta_1+\beta_2))+\mu r b_3((1+R_1-R_0)\right]J^2\\
&+\left[m^2 r(b_3\beta_1+r\beta_2)+rm\mu(R_3-(r+b_3)(R_0-1))\right]J-m^2 r^2\mu(R_0-1)=0
\end{aligned}$$

Igualando a cero se obtiene una ecuación cúbica de la forma:

$$A_1 J^3 + B_1 J^2 + C_1 J + D_1 = 0, \tag{3.30}$$

donde;

$$\begin{aligned}
A_1 &= b_3\varpi_1 \\
B_1 &= m(\varpi_2 + b_3 r(\beta_1 + \beta_2)) + \mu r b_3(R_1 - (R_0 - 1)) \\
C_1 &= m^2 r(b_3\beta_1 + r\beta_2) + rm\mu(R_3 - (r + b_3)(R_0 - 1)) \\
D_1 &= -m^2 r^2 \mu(R_0 - 1)
\end{aligned}$$

Así $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$ es el punto de equilibrio endémico del sistema, el cual se encuentra definido únicamente si J^* adopta un valor positivo como solución de la ecuación (3.30). Esta condición asegura la coherencia biológica dentro del modelo SIIJA. A continuación, se procede a estudiar las posibles soluciones de la ecuación cúbica asociada, cuya existencia y número de raíces positivas estarán determinados por los signos de sus coeficientes, de acuerdo con la regla de Descartes. El coeficiente A_1 siempre es positivo, dado que $\varpi_1 > 0$, mientras que D_1 es negativo, si $R_0 > 1$ y D_1 es positivo, si $R_0 < 1$. En el caso de B_1 y C_1, sus signo puede variar teniendo en cuenta las siguientes desigualdades.

3.5.1. Relación entre R_0, R_1, R_2 y R_3

En esta sesión se demuestra la relación entre R_0, R_1, R_2 y R_3 definidas anteriormente teniendo en cuenta las condiciones del sistema (3.4)-(3.7). Estas relaciones son importantes para mostrar como cambian los signos de B_1 y C_1.

- $R_0 > R_1$

  Demostración.

$$\begin{aligned}
R_0 - R_1 &= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1 b_3 L_1 + \beta_2 r L_2) - \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1' b_3 L_1 + \beta_2' r L_2) \\
&= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1 b_3 L_1 + \beta_2 r L_2 - \beta_1' b_3 L_1 - \beta_2' r L_2) \\
&= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(b_3 L_1(\beta_1 - \beta_1') + r L_2(\beta_2 - \beta_2')) > 0
\end{aligned}$$

  □

- $R_2 > R_3$

  Demostración.

$$\begin{aligned}
R_2 - R_3 &= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1 b_3^2 L_1 + \beta_2 r^2 L_2) - \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1' b_3^2 L_1 + \beta_2' r^2 L_2) \\
&= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1 b_3^2 L_1 + \beta_2 r^2 L_2 - \beta_1' b_3^2 L_1 - \beta_2' r^2 L_2) \\
&= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(b_3^2 L_1(\beta_1 - \beta_1') + r^2 L_2(\beta_2 - \beta_2')) > 0
\end{aligned}$$

  □

- $R_1 > R_3$ siempre que $1 > b_3$

  Demostración.

$$\begin{aligned} R_1 - R_3 &= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1^{'} b_3 L_1 + \beta_2^{'} r L_2) - \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1^{'} b_3^2 L_1 + \beta_2^{'} r^2 L_2) \\ &= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(L_1 b_3 \beta_1^{'}(1 - b_3) + L_2 r \beta_2^{'}(1 - r)) > 0 \quad \text{si} \quad 1 > b_3 \end{aligned}$$

□

- $R_1(r + b_3) > R_3$

  Demostración.

$$\begin{aligned} R_1(r + b_3) - R_3 &= \frac{\Lambda(r + b_3)}{\mu\theta}(\beta_1^{'} b_3 L_1 + \beta_2^{'} r L_2) - \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1^{'} b_3^2 L_1 + \beta_2^{'} r^2 L_2) \\ &= \frac{\Lambda}{\mu\theta}((r + b_3)(\beta_1^{'} b_3 L_1 + \beta_2^{'} r L_2) - \beta_1^{'} b_3^2 L_1 - \beta_2^{'} r^2 L_2) \\ &= \frac{\Lambda b_3 r}{\mu\theta}(\beta_1^{'} L_1 + \beta_2^{'} L_2) > 0 \end{aligned}$$

□

- $R_0(r + b_3) > R_3$

  Demostración.

$$\begin{aligned} R_0(r + b_3) - R_3 &= \frac{\Lambda(r + b_3)}{\mu\theta}(\beta_1 b_3 L_1 + \beta_2 r L_2) - \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1^{'} b_3^2 L_1 + \beta_2^{'} r^2 L_2) \\ &= \frac{\Lambda}{\mu\theta}((r + b_3)(\beta_1 b_3 L_1 + \beta_2 r L_2) - \beta_1^{'} b_3^2 L_1 - \beta_2^{'} r^2 L_2) \\ &= \frac{\Lambda}{\mu\theta}(b_3^2 L_1(\beta_1 - \beta_1^{'}) + r^2 L_2(\beta_2 - \beta_2^{'}) + b_3 r(\beta_1 L_1 + \beta_2 L_2)) > 0 \end{aligned}$$

□

- $R_0(r + b_3) > R_2$

  Demostración.

$$\begin{aligned} R_0(r + b_3) - R_2 &= \frac{\Lambda(r + b_3)}{\mu\theta}(\beta_1 b_3 L_1 + \beta_2 r L_2) - \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1 b_3^2 L_1 + \beta_2 r^2 L_2) \\ &= \frac{\Lambda}{\mu\theta}((r + b_3)(\beta_1 b_3 L_1 + \beta_2 r L_2) - \beta_1 b_3^2 L_1 - \beta_2 r^2 L_2) \\ &= \frac{\Lambda b_3 r}{\mu\theta}(\beta_1 L_1 + \beta_2 L_2) > 0 \end{aligned}$$

□

- $\varpi_1(r+b_3) > \varpi_2$

  Demostración.

$$\begin{aligned}\varpi_1(r+b_3) - \varpi_2 &= (r+b_3)(b_3(\beta_1-\beta_1^{'}) + r(\beta_2-\beta_2^{'})) - (b_3^2(\beta_1-\beta_1^{'}) + r^2(\beta_2-\beta_2^{'})) \\ &= rb_3(\beta_1-\beta_1^{'}) + rb_3(\beta_2-\beta_2^{'}) \\ &= rb_3((\beta_1-\beta_1^{'}) + (\beta_2-\beta_2^{'})) > 0\end{aligned}$$

□

- $B_1 > 0$ cuando $\Gamma = \dfrac{m(\varpi_2 + b_3 r(\beta_1+\beta_2)) + \mu r b_3 R_1}{\mu r b_3(R_0-1)} > 1$ con $R_0 > 1$.

- $C_1 > 0$, cuando $\Upsilon = \dfrac{m(b_3\beta_1 + r\beta_2) + \mu R_3}{\mu(r+b_3)(R_0-1)} > 1$, con $R_0 > 1$.

De las desigualdades anteriores se tiene las siguientes proposiciones:

Proposición 2. *Si $1 > b_3$, se cumple que;*

- $R_1 > R_3$
- $b_3 r(\beta_1+\beta_2) < b_3\beta_1 + r\beta_2$
- $\varpi_2 < \varpi_1$

Proposición 3. *Si $r + b_3 < 1$, entonces $R_0 > (r+b_3)R_0$*

Proposición 4. *Si $r < b_3$, entonces $b_3\beta_2 - r\beta_2^{'} > 0$*

Demostración. Se sabe que, $0 < \beta_2^{'} < \beta_2 < 1$ luego multiplicando por b_3 se tiene;

$$0 < b_3\beta_2^{'} < b_3\beta_2 < b_3 \tag{3.31}$$

ahora como $0 < r < b_3$; multiplicamos por $\beta_2{}'$;

$$0 < r\beta_2^{'} < b_3\beta_2^{'} \tag{3.32}$$

de 3.31 y 3.32 se tiene que, $r\beta_2^{'} < b_3\beta_2^{'} < b_3\beta_2$.
Por consiguiente, $b_3\beta_2 - r\beta_2^{'} > 0$. □

Proposición 5. *Si $R_1 - (R_0 - 1) < 0$, entonces $\frac{\mu\theta}{\Lambda} < b_3L_1(\beta_1-\beta_1^{'}) + rL_2(\beta_2-\beta_2^{'})$*

Demostración. Reemplazando R_0 y R_1 en la hipótesis se tiene;

$$R_1 - (R_0-1) = \frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1^{'}b_3L_1 + \beta_2^{'}rL_2) - \left(\frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1b_3L_1 + \beta_2rL_2) - 1\right) < 0$$

Luego, asociando términos;

$$R_1 - (R_0-1) = \frac{-\Lambda(b_3L_1(\beta_1-\beta_1^{'}) + rL_2(\beta_2-\beta_2^{'})) + \mu\theta}{\mu\theta} < 0$$

Por consiguiente, $\frac{\mu\theta}{\Lambda} < b_3L_1(\beta_1-\beta_1^{'}) + rL_2(\beta_2-\beta_2^{'})$ □

Proposición 6. *Si* $R_1 - (R_0 - 1) < 0$*, entonces* $R_3 - (r + b_3)(R_0 - 1) < 0$

Demostración. Por hipótesis se sabe que, $R_0 - 1 > R_1$ luego multiplicando ambos miembros por $r + b_3$, se obtiene $(r + b_3)(R_0 - 1) > R_1(r + b_3)$. Ahora, por una de las desigualdades anteriores se sabe que; $R_1(r + b_3) > R_3$, por consiguiente;

$$(r + b_3)(R_0 - 1) > R_1(r + b_3) > R_3$$

De los extremos de la desigualdad se obtiene; $(r + b_3)(R_0 - 1) > R_3$; por lo tanto $R_3 - (r + b_3)(R_0 - 1) < 0$. □

Proposición 7. *Sean los coeficientes* B_1 *y* C_1 *de la ecuación 3.30, si* $B_1 < 0$ *y* $r < b_3$*; entonces* $C_1 < 0$ *y* $B_1 - C_1 > 0$.

Demostración. De la ecuación 3.30; se sabe que $B_1 = m(\varpi_2 + b_3 r(\beta_1 + \beta_2)) + \mu r b_3(R_1 - (R_0 - 1))$. Vamos a partir de esta expresión para encontrar una relación entre B_1 y C_1 teniendo en cuenta la hipótesis.
Sea

$$\begin{aligned}
B_1 &= m(\varpi_2 + b_3 r(\beta_1 + \beta_2)) + \mu r b_3(R_1 - (R_0 - 1)) \\
&= m(\varpi_2 + b_3 r(\beta_1 + \beta_2)) + \mu r b_3 R_1 - \mu r b_3(R_0 - 1) \\
&= m(b_3^2(\beta_1 - \beta_1^{'}) + r^2(\beta_2 - \beta_2^{'}) + b_3 r(\beta_1 + \beta_2)) + \mu r b_3 \left(\frac{\Lambda}{\mu\theta}(\beta_1^{'} b_3 L_1 + \beta_2^{'} r L_2)\right) \\
&- \mu r b_3(R_0 - 1) \\
&= m b_3^2(\beta_1 - \beta_1^{'}) + m r^2(\beta_2 - \beta_2^{'}) + m b_3 r(\beta_1 + \beta_2) + \frac{r b_3 \Lambda \beta_1^{'} b_3 L_1}{\theta} \\
&+ \frac{r b_3 \Lambda \beta_2^{'} r L_2}{\theta} - \mu r b_3(R_0 - 1) \\
&= \frac{1}{m}\left[m^2 b_3^2(\beta_1 - \beta_1^{'}) + m^2 r^2(\beta_2 - \beta_2^{'}) + m^2 b_3 r(\beta_1 + \beta_2) + \frac{m r b_3^2 \Lambda \beta_1^{'} L_1}{\theta}\right] \\
&+ \frac{1}{m}\left[\frac{m r^2 b_3 \Lambda \beta_2^{'} L_2}{\theta} - m\mu r b_3(R_0 - 1)\right] \\
&= \frac{1}{m}\left[m^2 b_3^2 \beta_1 - m^2 b_3^2 \beta_1^{'} + m^2 r^2 \beta_2 - m^2 r^2 \beta_2^{'} + m^2 b_3 r \beta_1 + m^2 b_3 r \beta_2 + \frac{m r b_3^2 \Lambda \beta_1^{'} L_1}{\theta}\right] \\
&+ \frac{1}{m}\left[\frac{m r^2 b_3 \Lambda \beta_2^{'} L_2}{\theta} - m\mu r b_3(R_0 - 1)\right]
\end{aligned}$$

asociamos términos

$$\begin{aligned}
B_1 = &\frac{1}{m}\left(m^2 r^2 \beta_2 + m^2 b_3 r \beta_1 + \frac{m r b_3^2 \Lambda \beta_1^{'} L_1}{\theta} - m\mu r b_3(R_0 - 1)\right) \\
&+ \frac{1}{m}\left(m^2 b_3^2 \beta_1 - m^2 b_3^2 \beta_1^{'} - m^2 r^2 \beta_2^{'} + m^2 b_3 r \beta_2 + \frac{m r^2 b_3 \Lambda \beta_2^{'} L_2}{\theta}\right)
\end{aligned}$$

sumando y quitando los términos $\frac{m\Lambda\beta_2^{'}r^3L_2}{\theta}$ y $r^2m\mu(R_0-1)$ se tiene

$$B_1 = \frac{1}{m}\left(m^2r^2\beta_2 + m^2b_3r\beta_1 + \frac{mrb_3^2\Lambda\beta_1^{'}L_1}{\theta} - m\mu rb_3(R_0-1) + \frac{m\Lambda\beta_2^{'}r^3L_2}{\theta} - r^2m\mu(R_0-1)\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\left(m^2b_3^2\beta_1 - m^2b_3^2\beta_1^{'} - m^2r^2\beta_2^{'} + m^2b_3r\beta_2 + \frac{mr^2b_3\Lambda\beta_2^{'}L_2}{\theta} - \frac{m\Lambda\beta_2^{'}r^3L_2}{\theta} + r^2m\mu(R_0-1)\right)$$
$$= \frac{1}{m}\left(m^2r(r\beta_2 + b_3\beta_1) + \frac{m\mu r\Lambda}{\theta\mu}(\beta_1^{'}b_3^2L_1 + \beta_2^{'}r^2L_2) - m\mu r(R_0-1)(b_3+r)\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\left(m^2b_3^2(\beta_1-\beta_1^{'}) + m^2r(b_3\beta_2 - r\beta_2^{'}) + \frac{m\Lambda r^2L_2\beta_2^{'}}{\theta}(b_3-r) + r^2m\mu(R_0-1)\right)$$
$$= \frac{1}{m}\left(m^2r(b_3\beta_1 + r\beta_2) + rm\mu(R_3 - (r+b_3)(R_0-1))\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\left(m^2b_3^2(\beta_1-\beta_1^{'}) + m^2r(b_3\beta_2 - r\beta_2^{'}) + \frac{m\Lambda r^2L_2\beta_2^{'}}{\theta}(b_3-r) + r^2m\mu(R_0-1)\right)$$

de 3.30 sabemos que; $C_1 = m^2r(b_3\beta_1 + r\beta_2) + rm\mu(R_3 - (r+b_3)(R_0-1))$ entonces reemplazando en B_1

$$B_1 = \frac{1}{m}\left(C_1 + m^2b_3^2(\beta_1-\beta_1^{'}) + m^2r(b_3\beta_2 - r\beta_2^{'}) + \frac{m\Lambda r^2L_2\beta_2^{'}}{\theta}(b_3-r) + r^2m\mu(R_0-1)\right)$$
$$= \frac{C_1}{m} + \frac{1}{m}\left(m^2b_3^2(\beta_1-\beta_1^{'}) + m^2r(b_3\beta_2 - r\beta_2^{'}) + \frac{m\Lambda r^2L_2\beta_2^{'}}{\theta}(b_3-r) + r^2m\mu(R_0-1)\right)$$

ahora por condición del sistema sabemos que $\beta_1 - \beta_1^{'} > 0$, $m \geq 1$, además por estar en el caso endémico $R_0 > 1$ y por hipótesis $b_3 > r$. Luego el segundo sumando es positivo.
También por hipótesis se cumple que $B_1 < 0$; es decir

$$B_1 = \frac{C_1}{m} + \frac{1}{m}\left(m^2b_3^2(\beta_1-\beta_1^{'}) + m^2r(b_3\beta_2 - r\beta_2^{'}) + \frac{m\Lambda r^2L_2\beta_2^{'}}{\theta}(b_3-r) + r^2m\mu(R_0-1)\right) < 0$$

luego $\frac{C_1}{m} < 0 \longrightarrow C_1 < 0$.
Además, restando C_1 a ambos miembros de la igualdad se tiene

$$B_1 - C_1 = C_1\left(\frac{1}{m} - 1\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\left(m^2b_3^2(\beta_1-\beta_1^{'}) + m^2r(b_3\beta_2 - r\beta_2^{'}) + \frac{m\Lambda r^2L_2\beta_2^{'}}{\theta}(b_3-r) + r^2m\mu(R_0-1)\right)$$

$$B_1 - C_1 = C_1\left(\frac{1-m}{m}\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\left(m^2b_3^2(\beta_1-\beta_1^{'}) + m^2r(b_3\beta_2 - r\beta_2^{'}) + \frac{m\Lambda r^2L_2\beta_2^{'}}{\theta}(b_3-r) + r^2m\mu(R_0-1)\right)$$

como indicamos anteriormente el segundo sumando es positivo; además $1-m < 0$ y $C_1 < 0$, entonces $C_1\left(\frac{1-m}{m}\right) > 0$.
Por consiguiente, $B_1 - C_1 > 0$. □

De la proposición 7 podemos inferir lo siguiente: del polinomio $P(J^*) = A_1(J^*)^3 + B_1(J^*)^2 + C_1J^* + D_1$ se sabe que puede tener coeficientes positivos y negativos, por ello se utiliza la regla de Descartes para mostrar los diferentes casos en la que se podría obtener una solución positiva. Pero la posibilidad de que los coeficientes B_1 sea negativo y C_1 sea positivo a la vez es imposible ya que se ha demostrado en la proposición 7 que $C_1 < B_1 < 0$. Es decir que, los únicos casos según Descartes donde existe una solución positiva son los dados en la siguiente tabla, considerando la abreviatura NCS (Números de cambio de signo) y NPRP (Número de posibilidades de raíces positivas):

Casos	A_1	B_1	C_1	D_1	R_0	NCS	NPRP
I	+	+	+	-	$R_0 > 1$	1	1
II	+	+	-	-	$R_0 > 1$	1	1
III	+	-	-	-	$R_0 > 1$	1	1

Tabla 3.2: Número de posibles raíces reales positivas de la ecuación 3.30

Ahora se hará el análisis de los cambios de signo de los coeficientes según Descarte para los otros casos.

CASO I: En un primer caso los signos de los coeficientes del polinomio cúbico están dados por: $\underbrace{A_1}_{+}(J^*)^3 + \underbrace{B_1}_{+}(J^*)^2 + \underbrace{C_1}_{+}J^* + \underbrace{D_1}_{-}$ cuando $R_0 > 1$, $\Gamma > 1$ y $\Upsilon > 1$. Luego según Descartes tendrá *una raíz positiva* ya que se tiene un solo cambio de signo en su expresión:

$$p(J) = \underbrace{A_1}_{+}J^3 + \underbrace{B_1}_{+}J^2 + \underbrace{C_1}_{+}J + \underbrace{D_1}_{-}$$

Ahora probaremos la cantidad de cambios de signo para $p(-J)$:

$$p(-J) = \underbrace{A_1}_{+}(-J)^3 + \underbrace{B_1}_{+}(-J)^2 + \underbrace{C_1}_{+}(-J) + \underbrace{D_1}_{-}$$

$$p(-J) = -\underbrace{A_1}_{+}J^3 + \underbrace{B_1}_{+}J^2 - \underbrace{C_1}_{+}J + \underbrace{D_1}_{-}$$

De aquí vemos que $p(-J)$ tiene dos variaciones de signo por lo cual tiene máximo dos raíces negativas ó 0 raíz negativa (ya que el máximo de raíces 2 es disminuido en un número par $2 - 2 = 0$). Resumiendo las posibilidades de este primer caso se muestra la siguiente tabla:

Posibilidades	Raíces Positivas	Raíces Negativas	Raíces Complejas	Total
1	1	2	0	3
2	1	0	2	3

CASO II: En un segundo caso los signos de los coeficientes del polinomio cúbico están dados por: $\underbrace{A_1}_{+}(J^*)^3 + \underbrace{B_1}_{+}(J^*)^2 + \underbrace{C_1}_{-}J^* + \underbrace{D_1}_{-}$ cuando ; $R_0 > 1$, $\Gamma > 1$ y

$\Upsilon < 1$. Luego según Descartes tendrá *una raíz positiva* ya que se tiene un solo cambio de signo en su expresión:

$$p(J) = \underbrace{A_1}_{+} J^3 + \underbrace{B_1}_{+} J^2 + \underbrace{C_1}_{-} J + \underbrace{D_1}_{-}$$

Ahora probaremos la cantidad de cambios de signo para $p(-J)$:

$$p(-J) = \underbrace{A_1}_{+}(-J)^3 + \underbrace{B_1}_{+}(-J)^2 + \underbrace{C_1}_{-}(-J) + \underbrace{D_1}_{-}$$
$$p(-J) = \underbrace{-A_1}_{-} J^3 + \underbrace{B_1}_{+} J^2 - \underbrace{C_1}_{-} J + \underbrace{D_1}_{-}$$

De aquí vemos que $p(-J)$ tiene dos variaciones de signo por lo cual tiene máximo dos raíces negativas ó 0 raíz negativa (ya que el máximo de raíces 2 es disminuido en un número par $2 - 2 = 0$). Resumiendo las posibilidades de este segunda caso se muestra la siguiente tabla:

Posibilidades	Raíces Positivas	Raíces Negativas	Raíces Complejas	Total
1	1	2	0	3
2	1	0	2	3

CASO III: En un primer caso los signos de los coeficientes del polinomio cúbico están dados por: $\underbrace{A_1}_{+}(J^*)^3 + \underbrace{B_1}_{-}(J^*)^2 + \underbrace{C_1}_{-} J^* + \underbrace{D_1}_{-}$ cuando ; $R_0 > 1$, $\Gamma < 1$ y $\Upsilon < 1$. Luego según Descartes tendrá *1 raíz positiva* ya que se tiene un cambio de signo en su expresión:

$$p(J) = \underbrace{A_1}_{+} J^3 + \underbrace{B_1}_{-} J^2 + \underbrace{C_1}_{-} J + \underbrace{D_1}_{-}$$

Ahora probaremos la cantidad de cambios de signo para $p(-J)$:

$$p(-J) = \underbrace{A_1}_{+}(-J)^3 + \underbrace{B_1}_{-}(-J)^2 + \underbrace{C_1}_{-}(-J) + \underbrace{D_1}_{-}$$
$$p(-J) = -\underbrace{A_1}_{+} J^3 + \underbrace{B_1}_{-} J^2 - \underbrace{C_1}_{-} J + \underbrace{D_1}_{-}$$

De aquí vemos que $p(-J)$ tiene dos variaciones de signo por lo cual tiene máximo dos raíces negativas ó 0 raíz negativa (ya que el máximo de raíces 2 es disminuido en un número par $2 - 2 = 0$). Resumiendo las posibilidades de este tercer caso se muestra la siguiente tabla:

Posibilidades	Raíces Positivas	Raíces Negativas	Raíces Complejas	Total
1	1	2	0	3
2	1	0	2	3

De acuerdo con el criterio de Descartes, se garantiza la existencia de al menos una solución positiva $J^* > 0$, ya que en los casos I, II y III previamente analizados

siempre se cumple esta condición. En tal sentido, el punto de equilibrio endémico E^* está asegurado. Adicionalmente, mediante la aplicación de la fórmula de Cardano (Janson, 2010), es posible expresar explícitamente las raíces de una ecuación cúbica a partir de sus coeficientes conocidos. Basándose en estos resultados, se enuncian el teorema 3.5.1 y la proposición 8, los cuales fueron previamente enunciados en (Gonzales-Moreno K, 2021).

Teorema 3.5.1. *El modelo (3.3)-(3.7) presenta un único estado de equilibrio endémico E^* si $R_0 > 1$.*

Proposición 8. *Sea la ecuación cúbica $A_1(J^*)^3 + B_1(J^*)^2 + C_1J^* + D_1 = 0$, con $\triangle_1 = \dfrac{2\left(\dfrac{B_1}{A_1}\right)^3 - 9\left(\dfrac{B_1}{A_1}\right)\left(\dfrac{C_1}{A_1}\right) + 27\left(\dfrac{D_1}{A_1}\right)}{54}$ y $\triangle_2 = \dfrac{\left(\dfrac{B_1}{A_1}\right)^2 - 3\left(\dfrac{C_1}{A_1}\right)}{9}$; entonces la solución está dada por:*

$$J^* = -\frac{B_1}{3A_1} + \sqrt[3]{-\triangle_1 + \sqrt{\triangle_1^2 - \triangle_2^3}} + \sqrt[3]{-\triangle_1 - \sqrt{\triangle_1^2 - \triangle_2^3}}$$

y será una solución real con diversas multiplicidades de acuerdo a los siguientes criterios:

1. *Una raíz real con multiplicidad triple se presenta cuando se cumplen simultáneamente las condiciones $\triangle_1 = \triangle_2 = 0$.*
2. *Una raíz real con multiplicidad doble ocurre si $\triangle_1^2 - \triangle_2^3 = 0$, bajo la restricción de que $\triangle_1 \neq 0$ y $\triangle_2 \neq 0$.*
3. *Una raíz real simple se obtiene cuando se verifica que $\triangle_1^2 - \triangle_2^3 > 0$.*

Además, se tiene tres soluciones reales diferentes cuando $\triangle_1^2 - \triangle_2^3 < 0$ y son de la forma:

$$J_1^* = -2\sqrt{\triangle_2}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\triangle_1}{\sqrt{(\triangle_2)^3}}\right)\right) - \frac{B_1}{3A_1}$$

$$J_2^* = -2\sqrt{\triangle_2}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\arccos\left(\frac{\triangle_1}{\sqrt{(\triangle_2)^3}}\right) + 2\pi\right)\right) - \frac{B_1}{3A_1}$$

$$J_3^* = -2\sqrt{\triangle_2}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\arccos\left(\frac{\triangle_1}{\sqrt{(\triangle_2)^3}}\right) - 2\pi\right)\right) - \frac{B_1}{3A_1}.$$

3.5.2. Punto endémico $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, sí es posible encontrar una solución positiva y más aún de acuerdo a la proposición 8 se puede asegurar que es un único

estado de equilibrio endémico; $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$, donde;

$$J^* = \frac{\left[27A_1^2D_1 + 9A_1B_1C_1 - 2B_1^3 + \sqrt{4(3A_1C_1 - B_1^2)^3 + (27A_1^2D_1 + 9A_1B_1C_1 - 2B_1^3)^2}\right]^{1/3}}{3\sqrt[3]{2}A_1}$$
$$- \frac{\sqrt[3]{2}(3A_1C_1 - B_1^2)}{3A_1\left[27A_1^2D_1 + 9A_1B_1C_1 - 2B_1^3 + \sqrt{4(3A_1C_1 - B_1^2)^3 + (27A_1^2D_1 + 9A_1B_1C_1 - 2B_1^3)^2}\right]^{1/3}}$$
$$- \frac{B_1}{3A_1}$$

luego reemplazando en las otras variables del modelo, se obtiene:

$$S^* = \frac{\Lambda}{\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{b_3 J^*}{mr + b_3 J^*}\right)\frac{b_3 J^*}{r} + \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J^*}{m + J^*}\right)J^* + \mu}$$
$$I_1^* = \frac{J^*\left[p\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{b_3 J^*}{mr + b_3 J^*}\right)\frac{b_3 S^*}{r} + q\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J^*}{m + J^*}\right)S^* + \xi_1\right]}{b_1}$$
$$I_2^* = \frac{b_3}{r}J^*$$
$$A^* = \frac{\rho}{b_4}J^*,$$

Ejemplo 3. *Considerando los valores de* $\beta_1 = 2{,}2727 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = 4{,}544 \times 10^{-6}$, $\beta_1' = 0{,}00001$, $\beta_2' = 0{,}000003$, $r = 0{,}01$ *y el resto los de la tabla 3.1, se tienen los coeficientes* A_1, B_1, C_1 *y* D_1 *para graficar* $P(J)$*;*

$$A_1 = 0{,}0000385591308$$
$$B_1 = 0{,}000161943833$$
$$C_1 = -0{,}03028947045$$
$$D_1 = -0{,}01002660388$$

luego el polinomio es; $P(t) = 0{,}0000385591308J^3 + 0{,}000161943833J^2 - 0{,}03028947045J - 0{,}01002660388$

Usando MAPLE se obtuvieron las figura 3.6 y 3.7 que hacen referencia al polinomio $P(t) = 0{,}0000385591308J^3 + 0{,}000161943833J^2 - 0{,}03028947045J - 0{,}01002660388$, en la cual se visualiza que tiene un solución positiva.
Se muestran tres puntos de intersección de $P(J)$ con el eje de las abscisas; es decir tiene 3 raíces; $J_1 = -30{,}05150489$, $J_2 = -0{,}3304880443$ y $J_3 = 26{,}18211006$, aquí se está en una situación del caso II (solo una raíz positiva) dado que los coeficientes B_1 es positivo y C_2 es negativo.
De la figura anterior, haciendo Zoom se visualiza la raíz positiva $J_3 = 26{,}18211006$, con $\Gamma = 1{,}083541798 > 1$ y $\Upsilon = 0{,}4821296713 < 1$.

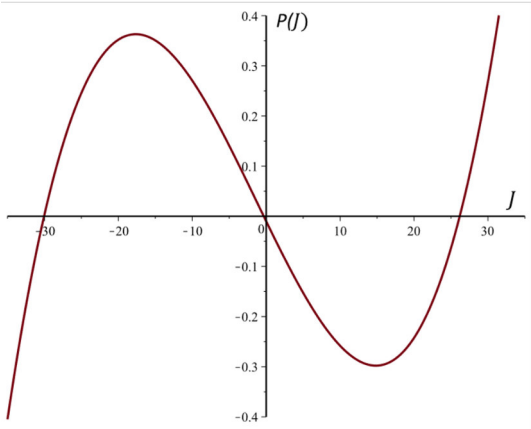


Figura 3.6: Grafica de $P(J)$

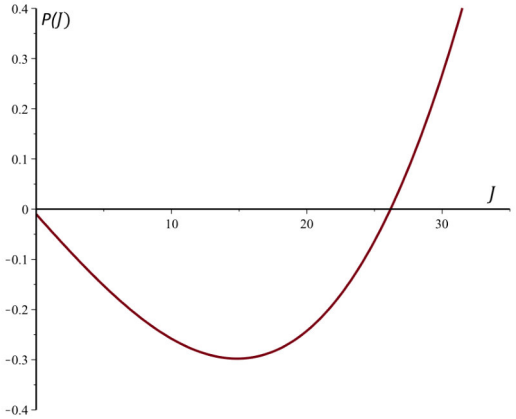


Figura 3.7: Raíz positiva de $J(t)$

3.6. Análisis de estabilidad local del modelo SII-JA

Después de haber realizado los cálculos respectivos para obtener el estado de equilibrio libre de infección E_0 y el endémico E^*, se procede a realizar el análisis local en cada uno de estos puntos.

3.6.1. Estabilidad local de E_0

Teniendo como referencia la investigación de (Van den Driessche y Watmough, 2002), para demostrar la estabilidad local del punto libre de enfermedad en modelos epidemiológicos compartimentales enunciamos el teorema de estabilidad local demostrado en (Gonzales-Moreno K, 2021):

Teorema 3.6.1. *Sea el sistema (3.3)-(3.7), si $R_0 < 1$, entonces se presenta un punto de equilibrio libre de infección E_0. Este equilibrio es local y asintóticamente estable siempre que $M_1 > 1$, $N_1 > 1$ y $T_1 > 1$.*

Demostración. Hallamos la matriz Jacobiana del sistema de EDO (3.3)-(3.7),

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1(I_2).I_2 - \beta_2(J).J - \mu & 0 & -S\phi_1 & -S\phi_2 & 0 \\ p\beta_1(I_2).I_2 + q\beta_2(J).J & -b_1 & pS\phi_1 & qS\phi_2 + \xi_1 & 0 \\ (1-p)\beta_1(I_2).I_2 + (1-q)\beta_2(J).J & \varepsilon & (1-p)S\phi_1 - b_2 & (1-q)S\phi_2 + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -b_4 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

donde;

$$\phi_1 = \beta_1 - \beta_1^{'}\left(\frac{2m + I_2}{(m + I_2)^2}\right) I_2 \tag{3.34}$$

$$\phi_2 = \beta_2 - \beta_2^{'}\left(\frac{2m + J}{(m + J)^2}\right) J \tag{3.35}$$

evaluamos el estado E_0 en la matriz jacobiana,

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\dfrac{\beta_1\Lambda}{\mu} & -\dfrac{\beta_2\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -b_1 & p\dfrac{\beta_1\Lambda}{\mu} & q\dfrac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & (1-p)\dfrac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 & (1-q)\dfrac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -b_4 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Tras determinar el polinomio característico, se procede a resolver la ecuación característica mediante la relación $|J(E_0) - \lambda I| = 0$, lo que conduce a la siguiente expresión:

$$(\lambda + \mu)(\lambda + b_4)\left(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3\right) = 0 \tag{3.37}$$

donde;

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + b_2 + b_3 - (1-p)\beta_1\frac{\Lambda}{\mu} \\ a_2 &= b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - \frac{R_{02}}{\mu} - r\xi_2 - \beta_1L_1\frac{\Lambda}{\mu} \\ a_3 &= \theta(1 - R_0) \end{aligned}$$

con $R_{02} = \Lambda(\beta_1b_3(1-p) + \beta_2r(1-q))$.
Se establece que E_0 es localmente estable si todos los autovalores del sistema poseen parte real negativa. Para verificar esta propiedad, se aplica el criterio de Routh-Hurwitz (Anderson y cols., 1987).

A partir de la ecuación (3.37), se observa que dos de los autovalores son

$$\lambda_1 = -\mu, \quad \lambda_2 = -b_4.$$

Los autovalores restantes corresponden a las raíces de la ecuación cúbica

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Dado que se analiza el escenario del punto libre de infección, se cumple que $R_0 < 1$, lo que asegura que $a_3 > 0$. Según el criterio de Routh-Hurwitz, además de $a_3 > 0$, es necesario que $a_1 > 0$ y que se cumpla la desigualdad

$$a_1 a_2 - a_3 > 0,$$

condiciones que garantizan que todas las raíces tengan parte real negativa. En consecuencia,

- $a_1 > 0$ si se cumple $M_1 = \frac{\mu(b_1+b_2+b_3)}{(1-p)\beta_1\Lambda} > 1$
- $a_1 a_2 - a_3 > 0$ si se cumple $N_1 = \frac{\beta_1\Lambda(1-p)(\mu r\xi_2+R_{02}+\beta_1 L_1\Lambda)(M_1-1)(T_1-1)}{\mu^2\theta(1-R_0)} > 1$

con $T_1 = \dfrac{\mu(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)}{\mu r\xi_2 + R_{02} + \beta_1 L_1\Lambda} > 1$. Por consiguiente, el estado de equilibrio E_0 es loca y asintóticamente estable. Planteamos este resultado en el siguiente teorema. □

3.6.2. Estabilidad local de E^*

Se procede a estudiar la estabilidad local del punto de equilibrio endémico

$$E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$$

correspondiente al modelo (3.3)-(3.7) (Gonzales-Moreno K, 2021). Para este análisis, se construye la matriz Jacobiana y se evalúa en E^*, lo que permitirá determinar las condiciones de estabilidad en torno a dicho equilibrio.

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -A_2-\mu & 0 & -D_2 & -G_2 & 0 \\ B_2 & -b_1 & pD_2 & qG_2+\xi_1 & 0 \\ C_2 & \varepsilon & (1-p)D_2-b_2 & (1-q)G_2+\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -b_4 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

donde se tiene que:

$$\begin{aligned} &A_2 = \beta_1(I_2^*).I_2^* + \beta_2(J^*).J^* \quad , \quad B_2 = p\beta_1(I_2^*).I_2^* + q\beta_2(J^*).J^* \\ &C_2 = (1-p)\beta_1(I_2^*).I_2^* + (1-q)\beta_2(J^*).J^* \, , \quad D_2 = S^*\phi_1^* \\ &G_2 = S^*\phi_2^* \end{aligned}$$

y

$$\phi_1^* = \beta_1 - \beta_1^{'} + \beta_1^{'}\frac{m^2}{(m+I_2^*)^2} \quad , \quad \phi_2^* = \beta_2 - \beta_2^{'} + \beta_2^{'}\frac{m^2}{(m+J^*)^2}$$

Puesto que $\beta_1 - \beta_1$ es positivo, se infiere que ϕ_1^* y ϕ_2^* adoptan valores positivos, lo que garantiza que $D_2 > 0$ y $G_2 > 0$. De forma similar, al ser $\beta_1(I_2^*)$ y $\beta_2(J^*)$ positivos, se concluye que $A_2 > 0$, $B_2 > 0$ y $C_2 > 0$.

Procediendo a la resolución de la ecuación característica

$$|J(E^*) - \lambda I| = 0,$$

se obtiene la factorización:

$$(\lambda + b_4)\left(\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4\right) = 0, \tag{3.39}$$

donde los coeficientes c_i, con $i = 1, 2, 3, 4$, se determinan de manera explícita a partir de los parámetros del sistema y serán empleados para evaluar la estabilidad del equilibrio endémico.

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_1 + b_2 + b_3 + A_2 + \mu - (1-p)D_2 \\
c_2 &= b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3 + (A_2+\mu)\left(b_1 + b_2 + b_3 - D_2(1-p)\right) + D_2C_2 \\
&\quad - \left((D_2b_3(1-p) + G_2r(1-q)\right) + r\xi_2 + D_2((1-p)\mu + \varepsilon)) \\
c_3 &= (A_2+\mu)\left(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - (D_2b_3(1-p) + G_2r(1-q)) - r\xi_2 - D_2(\varepsilon + \mu(1-p))\right) \\
&\quad + b_1b_2b_3 - r(\varepsilon\xi_1 + b_1\xi_2) - b_1(D_2b_3(1-p) + G_2r(1-q)) - \varepsilon(D_2b_3p + G_2rq) \\
&\quad + C_2(D_2b_3 + G_2r) + D_2(B_2\varepsilon + C_2b_1) \\
c_4 &= -(A_2+\mu)(b_1b_2b_3 - r(b_1\xi_2 + \varepsilon\xi_1) - b_1(D_2b_3(1-p) + G_2r(1-q)) - \varepsilon(D_2b_3p + G_2rq)) \\
&\quad + (D_2b_3 + G_2r)(C_2b_1 + B_2\varepsilon)
\end{aligned}$$

Se visualiza que c_1 es positivo cuando $\frac{b_1+b_2+b_3+A_2+\mu}{(1-p)D_2} > 1$, denotando como $R^*_{01} = \varepsilon(D_2b_3 + G_2r)$, $R^*_{02} = \mu(D_2b_3(1-p) + G_2r(1-q))$ y R^*_0 positivo denotado como;

$$R^*_0 = \frac{R^*_{01} + R^*_{02}}{\theta} \tag{3.40}$$

además se tiene otra equivalencia:

$$R^*_0 = \frac{\mu}{A_2+\mu}(R_0 - (R_1 - \varpi_3)) \tag{3.41}$$

donde; $1 < R_1 - \varpi_3$, con

$$\varpi_3 = D_2b_3(1-p) + G_2r(1-q), \tag{3.42}$$

$$R_1 - \varpi_3 = \frac{\Lambda\left[\varepsilon\left(\frac{\beta_1' b_3 I_2^*(2m+I_2^*)}{(m+I_2)^2} + \frac{\beta_1' r J^*(2m+J^*)}{(m+J)^2}\right) + \mu\left(\frac{\beta_1' b_3(1-p) I_2^*(2m+I_2^*)}{(m+I_2)^2} + \frac{\beta_2' r(1-q) J^*(2m+J^*)}{(m+J)^2}\right)\right]}{\mu\theta}$$

Se reducen los coeficientes quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_1 + b_2 + b_3 + A_2 + \mu - (1-p)D_2 \\
c_2 &= b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3 + (A_2+\mu)\left(b_1 + b_2 + b_3\right) + D_2C_2 - (A_2+\mu)D_2(1-p) \\
&\quad - \left(\frac{R^*_{02}}{\mu} + r\xi_2 + D_2L_1\right) \\
c_3 &= (A_2+\mu)\left(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - \frac{R_{02}}{\mu} - r\xi_2 - D_2L_1\right) + \theta(1 - R^*_0) \\
&\quad + C_2\frac{R^*_{01}}{\varepsilon} + D_2(A_2\varepsilon + C_2\mu) \\
c_4 &= \theta(A_2+\mu)(1 - R^*_0) + \frac{R^*_{01}}{\varepsilon}(A_2\varepsilon + C_2\mu)
\end{aligned}$$

luego c_4 será positivo dado que, $1 - R_0^* > 0$; entonces;

$$0 < 1 - \frac{\mu}{A_2 + \mu}(R_0 - (R_1 - \varpi_3)) \tag{3.43}$$

$$0 < \frac{\mu}{A_2 + \mu}(R_0 - (R_1 - \varpi_3)) < 1 \tag{3.44}$$

$$0 < \mu(R_0 - (R_1 - \varpi_3)) < A_2 + \mu \tag{3.45}$$

$$1 < R_1 - \varpi_3 < R_0 < \frac{A_2}{\mu} + 1 + (R_1 - \varpi_3) \tag{3.46}$$

Por consiguiente, $R_0 > 1$.
Para garantizar que todos los autovalores tengan parte real negativa, se recurre al criterio de Routh-Hurwitz (Anderson y cols., 1987). En particular, de la ecuación (3.39) se identifica de manera inmediata la solución

$$\lambda_1 = -b_4,$$

mientras que las demás raíces se obtienen resolviendo la ecuación polinómica de cuarto grado:

$$\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 = 0.$$

De acuerdo con el criterio de Routh-Hurwitz, todas las raíces de esta ecuación presentan parte real negativa si se cumplen las siguientes condiciones:

$$c_1 > 0, \quad c_3 > 0, \quad c_4 > 0, \quad c_1c_2 - c_3 > 0, \quad c_1c_2c_3 - c_3^2 - c_1^2c_4 > 0.$$

Es importante resaltar que el coeficiente c_4 ya se encuentra garantizado como positivo debido a que $1 - R_0^* > 0$.

Posteriormente, se introducen las notaciones que permitirán simplificar y clarificar el desarrollo de los resultados subsiguientes:

$$M_2 = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + A_2 + \mu}{(1-p)D_2}$$

$$N_2 = \frac{\mu(b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3 + (A_2+\mu)(b_1 + b_2 + b_3) + D_2C_2)}{R_{02} + \mu r\xi_2 + \mu D_2L_1 + \mu D_2(1-p)(A_2+\mu)}$$

$$P_2 = \frac{\mu\varepsilon(A_2+\mu)(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) + \mu C_2R_{01}^* + \mu\varepsilon D_2(A_2\varepsilon + C_2\mu) + \varepsilon\mu\theta(1-R_0^*)}{\varepsilon(R_{02}^* + \mu r\xi_2 + \mu D_2L_1)(A_2+\mu)}$$

$$T_2 = \frac{(M_2-1)(N_2-1)(1-p)D_2\left(\frac{R_{02}^*}{\mu} + r\xi_2 + D_2L_1 + (A_2+\mu)D_2(1-p)\right)}{(P_2-1)(A_2+\mu)\left(\frac{R_{02}^*}{\mu} + r\xi_2 + D_2L_1\right)}$$

$$Q_2 = \frac{(M_2-1)(N_2-1)(P_2-1)(1-p)D_2(A_2+\mu)\left(\frac{R_{02}^*}{\mu} + r\xi_2 + D_2L_1\right)\left(\frac{R_{02}^*}{\mu} + r\xi_2 + D_2L_1 + (A_2+\mu)D_2(1-p)\right)}{(P_2-1)^2(A_2+\mu)^2\left(\frac{R_{02}^*}{\mu} + r\xi_2 + D_2L_1\right)^2 + (M_2-1)^2(1-p)^2D_2^2\left(\theta(A_2+\mu)(1-R_0^*) + \frac{R_{01}^*}{\varepsilon}(A_2\varepsilon + C_2\mu)\right)}$$

En consecuencia, los coeficientes c_1, c_2, c_3 son positivos cuando $M_2 > 1, N_2 > 1$ y $P_2 > 1$ respectivamente, $c_1c_2 - c_3 > 0$ siempre que $T_2 > 1$ y se cumple que $c_1c_2c_3 - c_3^2 - c_1^2c_4 > 0$ cuando $Q_2 > 1$.
Por consiguiente, con las condiciones antes mencionadas se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 3.6.2. *El sistema (3.3)-(3.7) presenta un punto de equilibrio endémico E^* siempre que el número básico de reproducción cumpla $R_0 > 1$. Además, dicho equilibrio se mantiene local y asintóticamente estable bajo las condiciones*

$$M_2 > 1, \quad N_2 > 1, \quad P_2 > 1, \quad T_2 > 1, \quad Q_2 > 1,$$

(Gonzales-Moreno K, 2021)

3.7. Diagrama de bifurcación respecto a R_0

La intensión de esta sección es presentar algunas graficas de bifurcaciones que fueron realizadas en XPPAUTO para visualizar que los resultados obtenidos anteriormente se están cumpliendo. Aquí no se ha realizado la demostración de la bifurcación que presenta el modelo básico SIIJA, pero sí se presentará la demostración de la bifurcación del modelo perturbado en el siguiente capítulo.

Las Figuras 3.8, 3.9 y 3.10 ilustran los diagramas de bifurcación de los compartimientos infectados I_1, I_2 y J en función del número básico de reproducción R_0. Se evidencia que, para $R_0 < 1$, el sistema posee un estado de equilibrio estable libre de enfermedad; en cambio, cuando $R_0 > 1$, surge un equilibrio endémico estable, mientras que el equilibrio libre de infección se torna inestable. Este tipo de comportamiento corresponde a lo que se conoce como una bifurcación hacia adelante (forward bifurcation). Los diagramas fueron obtenidos variando la tasa r, que representa la evolución del compartimiento I_2 hacia los individuos sintomáticos J, con $\beta_2 = 0{,}0004545$, manteniendo constantes los demás parámetros definidos en la Tabla 3.1.

En particular, la Figura 3.8 muestra el diagrama de bifurcación de I_1^* respecto a R_0 para distintos valores del parámetro r. En esta representación, la línea azul indica equilibrio estable, mientras que la línea roja señala equilibrio inestable. Se observa que en $R_0 = 1$ se produce una bifurcación hacia adelante, confirmando el comportamiento esperado del modelo bajo las condiciones especificadas.

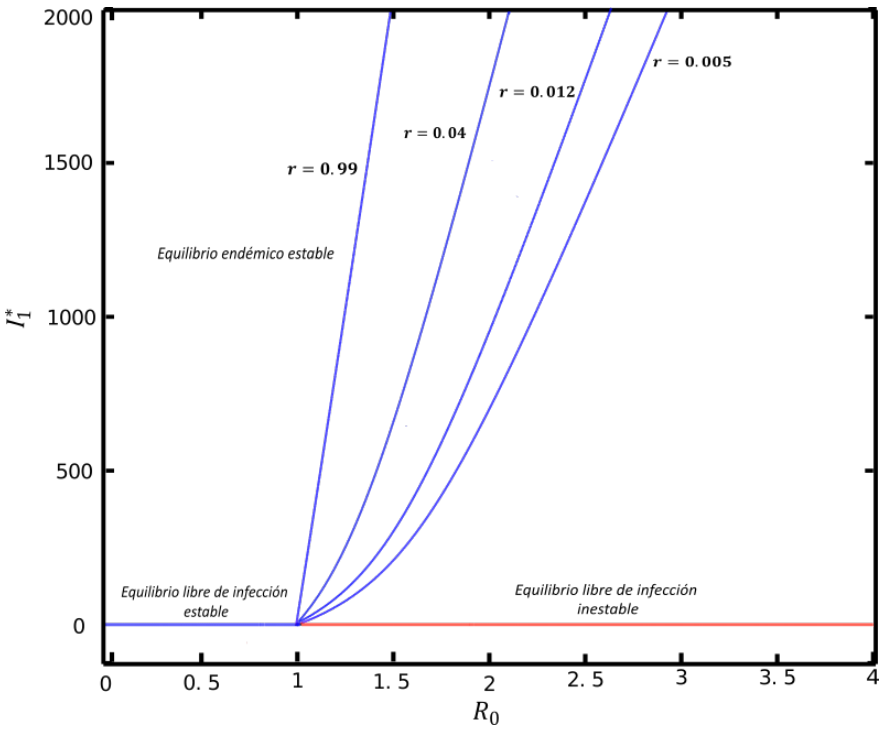


Figura 3.8: Diagrama de bifurcación de I_1^* respecto a R_0 del modelo SIIJA

En el caso de la figura 3.9 se tiene el diagrama de bifurcación de I_2^* respecto a R_0 para dos valores del parámetro r. La línea de color azul y rojo representa

equilibrio estable e inestable, respectivamente y en $R_0 = 1$ se tiene una bifurcación hacia adelante.

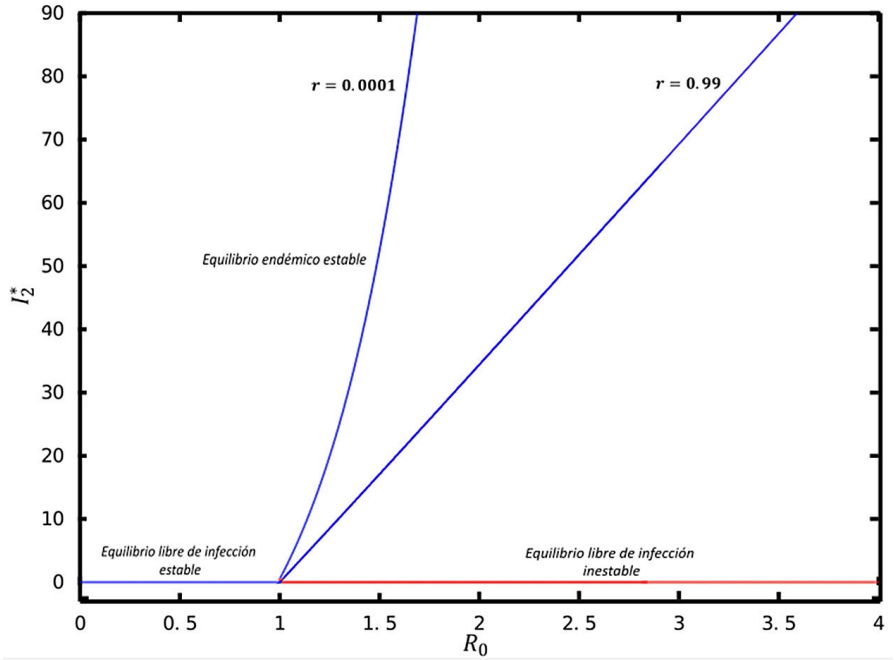


Figura 3.9: Diagrama de bifurcación de I_2^* respecto a R_0 del modelo SIIJA

Análogamente en la figura 3.10 se presenta el diagrama de bifurcación de J^* respecto a R_0, donde la línea de color azul y rojo representa equilibrio estable e inestable, respectivamente.

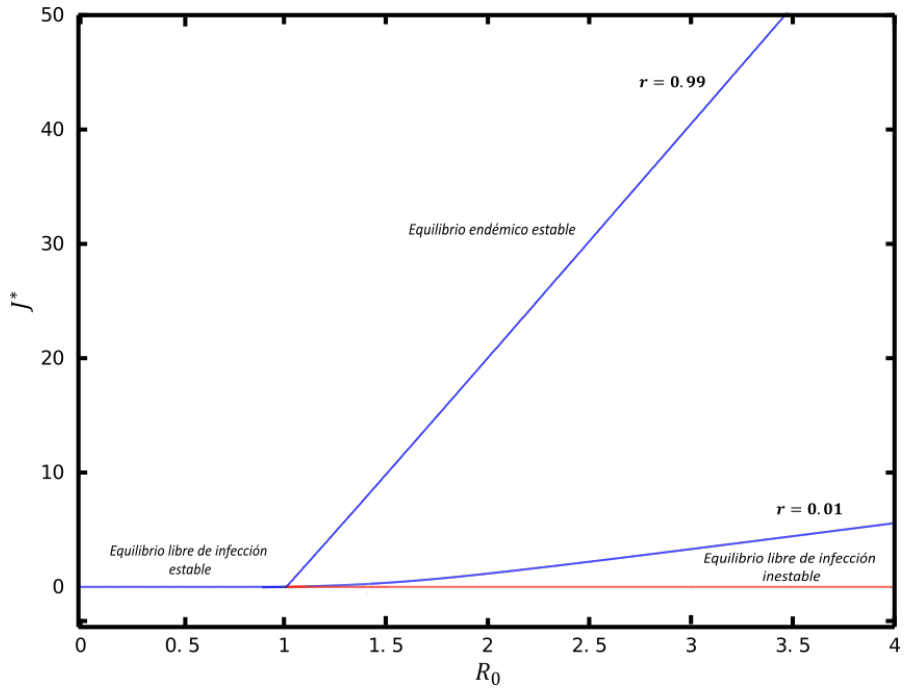


Figura 3.10: Diagrama de bifurcación de J^* respecto a R_0 del modelo SIIJA

De las tres figuras se observa que el punto de bifurcación se origina cuando $R_0 = 1$. Puesto que, para $R_0 < 1$ el modelo SIIJA presenta un punto de equilibrio libre de infección estable mientras que para $R_0 > 1$ aparece un punto de equilibrio endémico y al mismo tiempo el libre de infección se vuelve inestable.

3.8. Análisis de simulación del modelo SIIJA

Para ilustrar el comportamiento dinámico del modelo SIIJA, se realizaron simulaciones utilizando el software XPPAUTO (Ermentrout y Mahajan, 2003). En primer lugar, se presentan los resultados correspondientes a un escenario con un punto de equilibrio libre de infección, seguido por las simulaciones que muestran la evolución hacia el punto de equilibrio endémico. A continuación, se generan gráficas de las poblaciones bajo diferentes condiciones iniciales, con el fin de verificar la consistencia de los resultados con las predicciones obtenidas del estudio de la estabilidad local en torno a los puntos de equilibrio del sistema.

3.8.1. Simulaciones del modelo SIIJA: Punto E_0 y E^*

Supongamos que se tienen las condiciones iniciales:

$$S(0) = 22000, I_1(0) = 100, I_2(0) = 50, J(0) = 30, A(0) = 10, \tag{3.47}$$

Se examina la evolución temporal de las poblaciones del sistema bajo la condición $R_0 < 1$, con el fin de determinar el punto de equilibrio libre de infección E_0. Para este análisis se emplean los parámetros especificados en la Tabla 3.1.

La Figura 3.11 muestra la dinámica de I_1, I_2, J y A en un intervalo de tiempo $t \in [0, 1000]$, mientras que para la población susceptible $S(t)$ se considera $t \in [0, 600]$. En la simulación se obtuvo $R_0 = 0{,}8490217 < 1$ y $\theta = 0{,}0004208$. Se aprecia que la población susceptible $S(t)$ aumenta inicialmente hasta alcanzar un estado estable alrededor de $t = 400$. En contraste, $I_1(t)$ e $I_2(t)$ presentan un incremento rápido que alcanza un máximo local, seguido de un descenso progresivo hasta estabilizarse cerca de cero. Las poblaciones $J(t)$ y $A(t)$ disminuyen desde el inicio del intervalo temporal y, con el tiempo, todas las variables convergen hacia el punto de equilibrio libre de infección

$$E_0 = (30000, 0, 0, 0, 0).$$

Este equilibrio se verifica como local y asintóticamente estable, ya que los parámetros derivados del análisis de estabilidad cumplen $M_1 = 262{,}0965$, $T_1 = 2{,}373239559$ y $N = 1332{,}750779$, todos superiores a 1, en concordancia con lo establecido en el Teorema 3.6.1. Para una comprensión más detallada de las unidades correspondientes a las tasas de incidencia, se describen a continuación los valores empleados en la Figura 3.11, los cuales también se mencionan en (Gonzales-Moreno K, 2021):

- $\beta_1 = 2{,}2727 \times 10^{-6}\,(\text{por año})^{-1} = \dfrac{1}{440000}\,(\text{por año})^{-1}$, lo que se traduce como que aproximadamente una persona de cada 440 000 contrae el VIH por contacto con un individuo infectado perteneciente al compartimiento I_2 cada año.

- $\beta_2 = 4{,}5442 \times 10^{-7}$ (por año)$^{-1} = \dfrac{1}{2201673}$ (por año)$^{-1}$, indicando que aproximadamente una persona de cada 2 201 673 contrae el VIH por interacción con un individuo infectado del compartimiento J cada año (Gonzales-Moreno K, 2021).

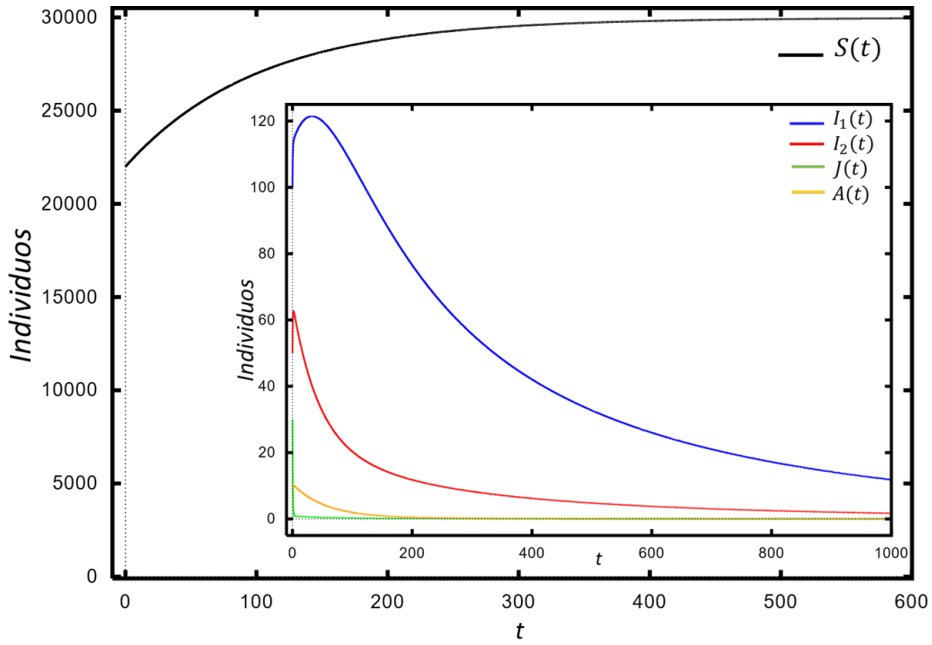


Figura 3.11: Dinámica del modelo SIIJA cuando $R_0 = 0{,}8490211027$

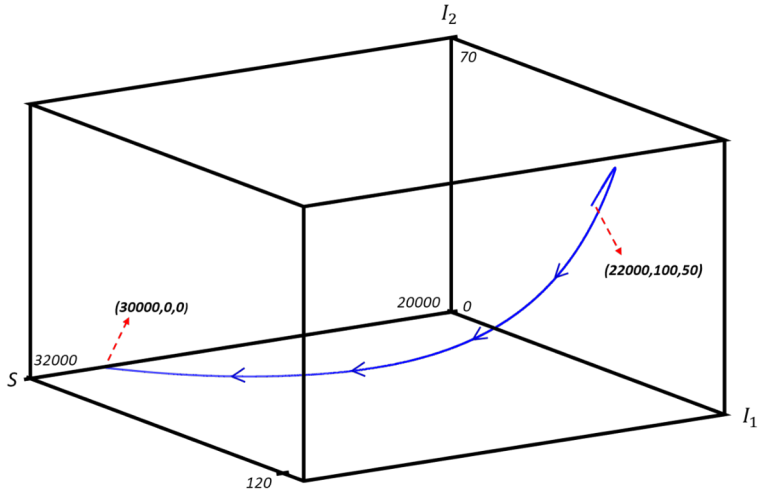


Figura 3.12: Diagrama de fase 3D entre las poblaciones S, I_1 e I_2

La figura 3.12 presenta el diagrama de fase entre las variables S, I_1 y I_2 para un tiempo de $t \in [0; 1000]$, considerando condición inicial de estas variables $(22000, 100, 50)$, entonces la dinámica se dirige hacia el punto $(30000, 0, 0)$ con $R_0 =$

0,8490211027. Para el caso de las simulaciones del estado de equilibrio endémico se consideraron algunos valores de los parámetros que están en la tabla 3.1, excepto los valores de $\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2'$ y r las cuales son $\beta_1 = 2.435\times10^{-5}$, $\beta_2 = 4.544\times10^{-6}$, $\beta_1' = 0{,}00001$, $\beta_2' = 0{,}000003$ y $r = 0{,}01$; donde el punto de equilibrio endémico resultó $E^* = (3896, 21354, 4643, 27, 40)$ con $R_0 = 13{,}00634$. La Figura 3.13 ilustra la evolución temporal de las variables $S(t)$, $I_1(t)$ y $I_2(t)$ en el intervalo $t \in [0, 600]$. Se evidencia que la población de individuos infectados con latencia lenta, I_1, experimenta un incremento más pronunciado que la de latencia rápida, I_2, hasta alcanzar un estado estacionario aproximadamente en $t = 250$. En cuanto a la población susceptible $S(t)$, esta presenta un aumento inicial hasta alcanzar un máximo de $S(t) = 23020$ en $t = 33$, seguido de un descenso gradual, estabilizándose posteriormente alrededor de $t = 350$.

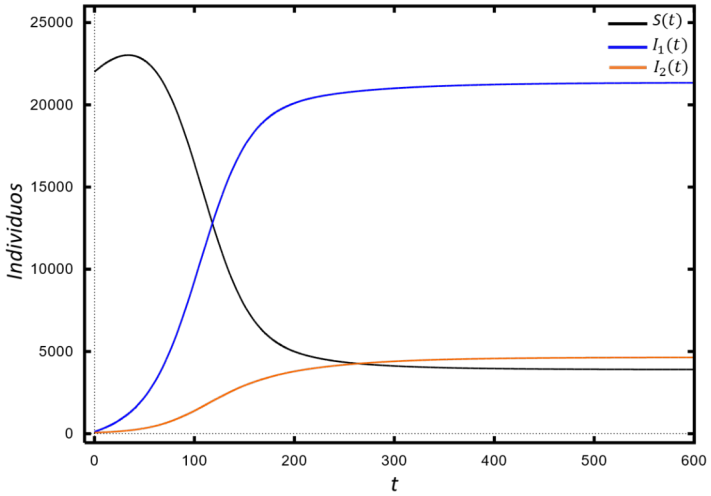


Figura 3.13: Dinámica de las poblaciones S, I_1 e I_2 con $R_0 = 13{,}00634$

De manera simultánea, se generó la Figura 3.14 empleando los mismos valores de parámetros utilizados en la figura precedente. La gráfica ilustra la evolución temporal de las poblaciones $J(t)$ y $A(t)$, mostrando que $J(t)$ experimenta una disminución inicial hasta $t = 2$, seguida de un incremento que conduce a la estabilización en $J^*(t) = 27$. En paralelo, la población $A(t)$ disminuye hasta $t = 80$ y posteriormente crece hasta alcanzar un estado estable en $A^*(t) = 40$.

Con base en la Proposición 8, se confirma que las simulaciones presentadas en las Figuras 3.13 y 3.14 indican que el punto de equilibrio endémico es:

$$E^* = (3896, 21354, 4643, 27, 40),$$

y que dicho equilibrio es *local y asintóticamente estable*, dado que los valores de los indicadores de estabilidad satisfacen $M_2 = 330{,}7519031$, $N_2 = 9{,}964725$, $P_2 = 3{,}413817$, $T_2 = 90{,}924923$ y $Q_2 = 732{,}932506$, todos superiores a uno, en concordancia con las condiciones del Teorema 3.6.2. Adicionalmente, los criterios derivados de Routh-Hurwitz, $c_1c_2 - c_3 = 0{,}316158 > 0$ y $c_1c_2c_3 - c_3^2 - c_1^2c_4 = 0{,}001045 > 0$, respaldan la estabilidad local del equilibrio endémico, evidenciando la consistencia

de las simulaciones con el análisis teórico del modelo; donde

$$\begin{aligned} c_1 &= 1{,}843419 \\ c_2 &= 0{,}173413 \\ c_3 &= 0{,}003516 \\ c_4 &= 0{,}000019 \\ R_{01} &= 0{,}000195 \\ R_{02} &= 0{,}000097 \\ R_0^* &= 0{,}995190 \\ R_1 &= 5{,}346049 \\ R_1 - \varpi_3 &= 5{,}342325 \end{aligned}$$

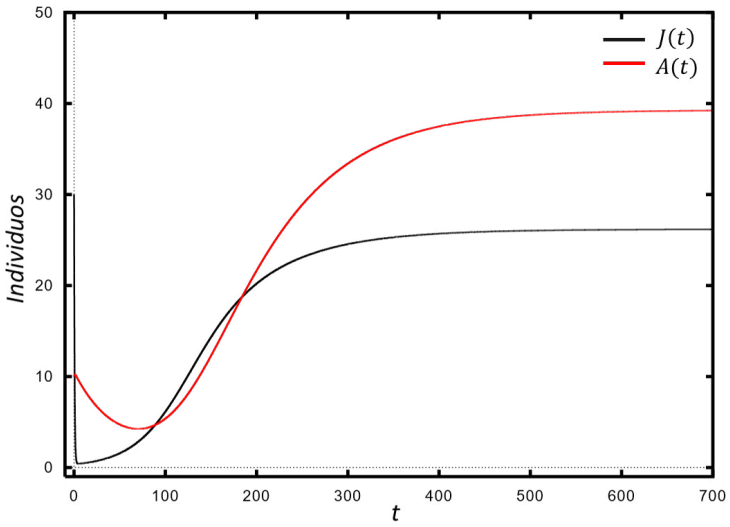


Figura 3.14: Dinámica de las poblaciones J e A con $R_0 = 13{,}00634$

En la figura 3.15 se muestra una simulación en 3D del diagrama de fase de las poblaciones I_1, I_2 y J con diferentes condiciones iniciales para el caso de $R_0 = 13{,}00634 > 1$, donde se observa que por ejemplo para las condiciones iniciales $(20000, 400, 20)$, $(40, 200, 50)$, $(12000, 2200, 100)$,$(4000, 4200, 100)$, $(15000, 4200, 100)$ y $(3000, 5000, 5)$ en un tiempo muy grande tiende a $(21345, 4643, 27)$. Aquí para todas las condiciones iniciales se considera $S(t) = 22000$ y $A(t) = 10$, además $S^*(t) = 3896$ y $A^*(t) = 40$.

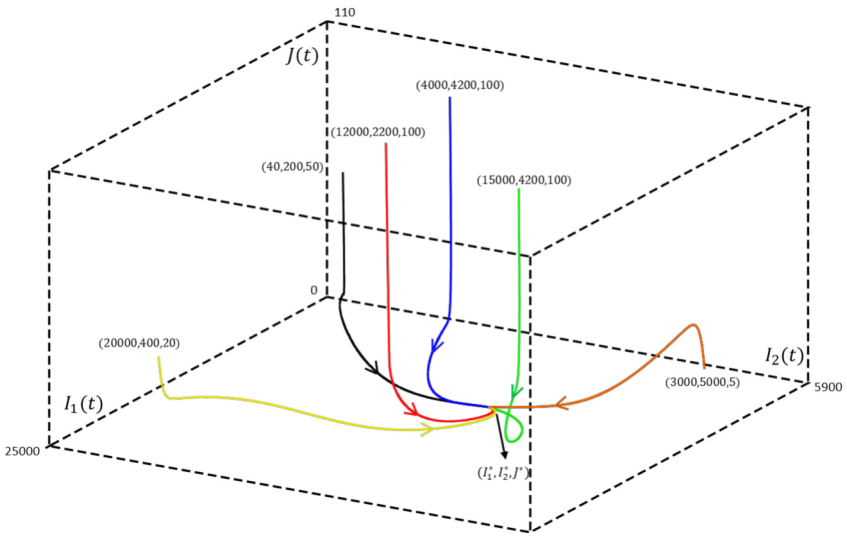


Figura 3.15: Diagrama de fase 3D con diferentes condiciones iniciales

Ahora si consideramos nuevos valores para $r = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}000028$, $\Lambda = 1862$, $\beta_1' = 0{,}00001$ y $\beta_2' = 0{,}000003$, entonces se obtendrá $E^* = (10783, 77907, 538, 93, 139)$ con $R_0 = 3$. Este es otro caso del estado endémico del modelo SIIJA con un R_0 menor a la situación anterior. En las figuras 3.16 y 3.17 aparecen unas ondas cuyos periodos son cada vez más pequeños cuando el tiempo crece. Esto nos indica que este estado las variables presentan ciertos picos después de crecer y decrecer hasta que se llegan a estabilizar.

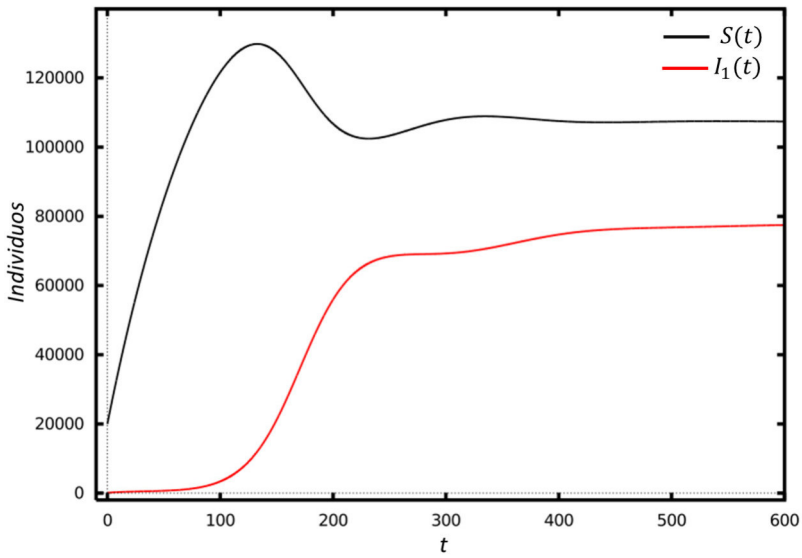


Figura 3.16: Dinámica de las poblaciones S e I_1 cuando $R_0 = 3$

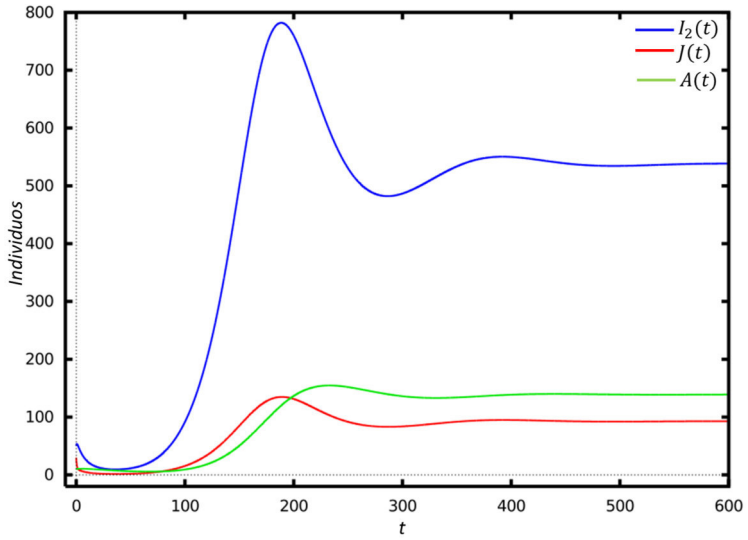


Figura 3.17: Dinámica de las poblaciones I_2, J y A cuando $R_0 = 3$

Luego se tiene los diagramas de fase de los compartimientos infectados con respecto a S. En el caso de las figuras 3.19 y 3.20 claramente se observa que se forma una espiral para llegar al punto de equilibrio endémico después de que t es grande.

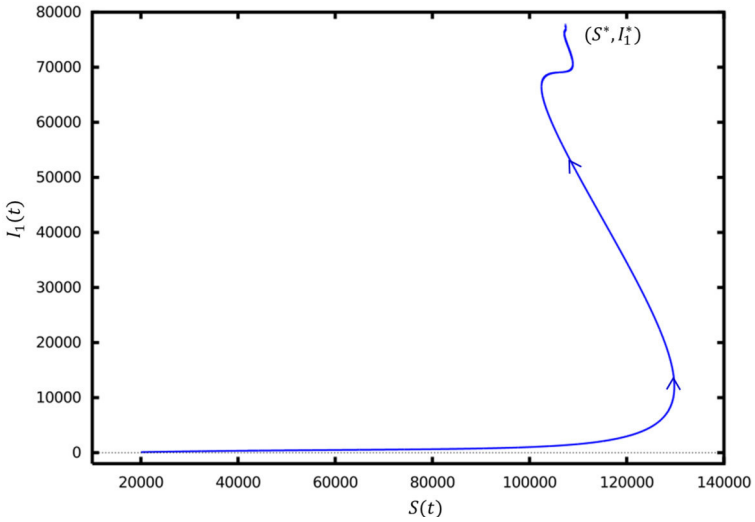


Figura 3.18: Diagrama de fase I_1 respecto a S

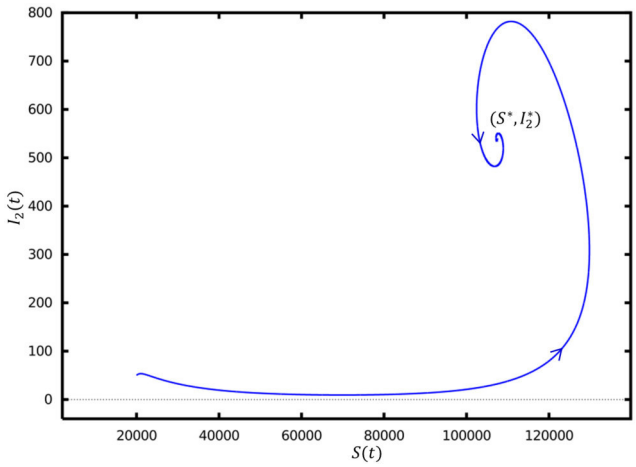


Figura 3.19: Diagrama de fase I_2 respecto a S

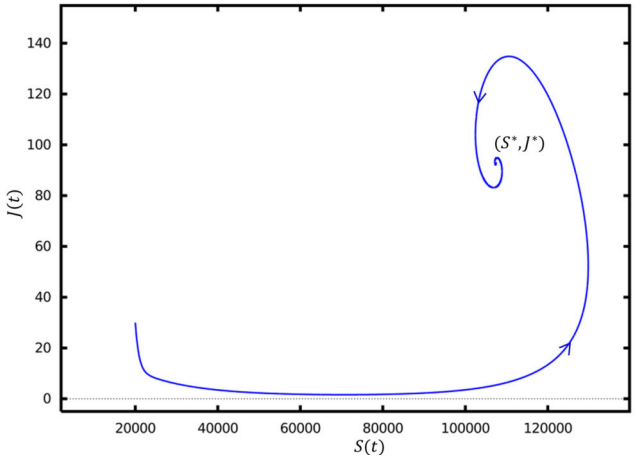


Figura 3.20: Diagrama de fase J respecto a S

3.9. Análisis de sensibilidad

En esta sesión se presentan algunos gráficos que muestran la sensibilidad del R_0 respecto a algunos parámetros. Estas gráficas fueron elaboradas en Wolfram mathematica. La figura 3.21 muestra a R_0 en función de ρ y β_2 donde se observa que si ρ disminuye y β_2 incrementa, entonces R_0 supera a 1; es decir que al aumentar la tasa de incidencia β_2 en valores pequeños, entonces se origina el estado de equilibrio endémico. Mientras que, si la tasa de evolución del compartimiento de los infectados sintomáticos hacia el compartimiento de los individuos con SIDA se aproxima a 1, hace que R_0 disminuya.

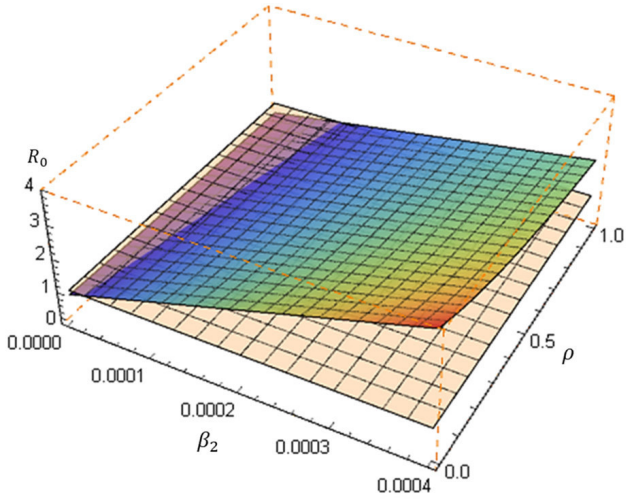


Figura 3.21: Grafica de R_0 vs ρ y β_2

En la figura 3.22 se tiene que valores de R_0 por debajo de 1 siempre que ξ_2 aumente y ξ_1 disminuya. Mientras que si ambos parámetros toman valores muy pequeños al mismo tiempo la enfermedad se vuelve una epidemia.

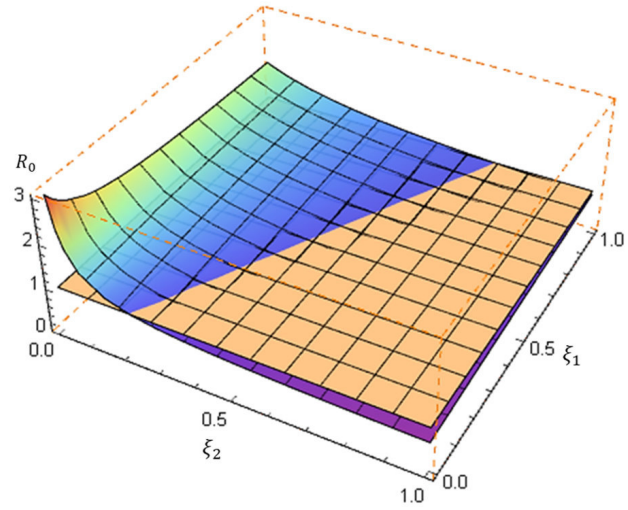


Figura 3.22: Grafica de R_0 vs ξ_1 y ξ_2

Ahora en la figura 3.23 muestra a R_0 en función de r y ε donde se observa que si r disminuye y ε incrementa, entonces R_0 supera a 1; es decir que, al aumentar la tasa de evolución del compartimiento I_1 y I_2; entonces, se origina el estado de equilibrio endémico. Mientras que, si la tasa de evolución del compartimiento de los infectados de latencia rápida hacia el compartimiento de los individuos con síntomas se aproxima a 1, hace que R_0 disminuya.

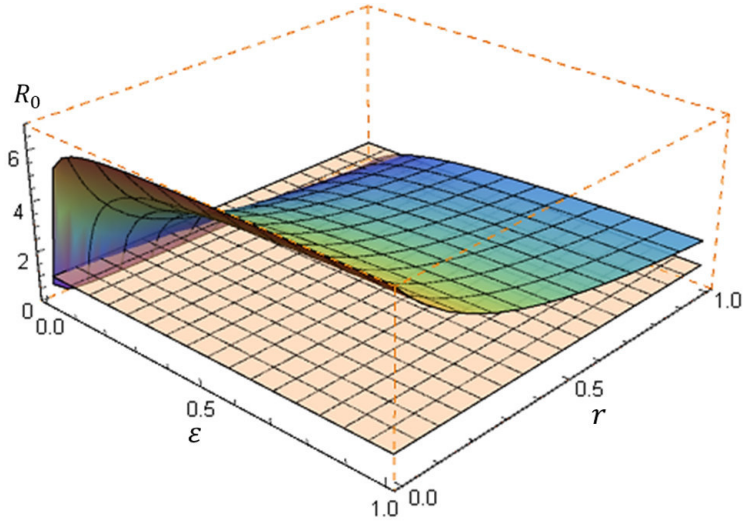


Figura 3.23: Grafica de R_0 vs r y ε

En la figura 3.24 se expone un mapa de calor de R_0 respecto a r y ε (es otra manera de representar la figura 3.23). Aquí se visualiza que a medida que ε se acerca a 1 y r se aproxima a 0, entonces R_0 crece más rápido y supera a 1.

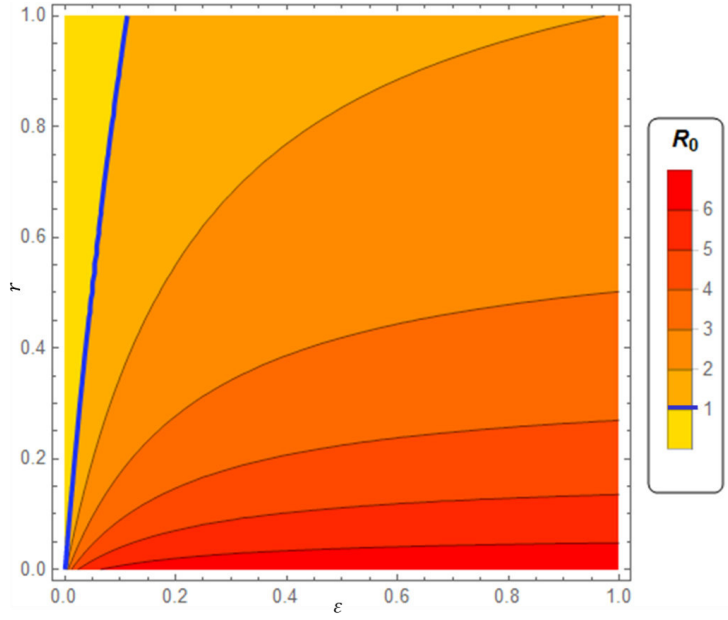


Figura 3.24: Grafica de R_0 vs r y ε

Modelo SIIJA Perturbado

En esta sección se analiza el modelo SIIJA explicado en la sección anterior pero con una perturbación. Al modelo anterior (3.3-3.7) se le realizó el análisis cualitativo considerando dos tasas de contacto que tiene la forma de una función de incidencia saturada, así mismo, se estudió el impacto de la cobertura de medios en la dinámica VIH/SIDA y en la cual se concluyó que: el modelo tenía un punto de equilibrio libre de infección y un punto de equilibrio endémico, donde el primero es estable para $R_0 < 1$ y el segundo es estable para $R_0 > 1$ bajo ciertas condiciones. Además, de ello se mostró mediante el análisis de sensibilidad que el parámetro m (cobertura mediática) influye en la dinámica del modelo básico SIIJA. Esto es que, cuando m es pequeño ($m = 30$) la población de infectados crece rápido y se tienen puntos máximos en poco tiempo a comparación de si m es grande ($m = 3000$) (Gonzales-Moreno K, 2021). También, otro de los puntos que se mostraron fue el de la sensibilidad del R_0 respecto a los parámetros; por ejemplo, se visualizó que manteniendo fijos los parámetros de la tabla 3.1 y graficando R_0 en función de la tasa de evolución del compartimiento de infectados de latencia lenta a rápido (ε) y la tasa de evolución del compartimiento de latencia rápida a sintomáticos con tratamiento (r); se tiene que el número reproductor básico crece cuando ε aumenta y r disminuye.

Ahora, a partir del modelo antes mencionado nos preguntamos ¿Cómo influye en la dinámica, el hecho de que las personas infectadas no lleguen a tener un tratamiento antirretroviral?, dado que, existen diversos factores que influyen la toma de decisión de llevar o no el tratamiento. Por ejemplo, el factor económico, pues los precios de los medicamentos antirretrovíricos son muy elevados. Por este motivo ahora se considera una perturbación en el modelo SIIJA.

3.10. Descripción del modelo SIIJA perturbado

Se propone un nuevo modelo sobre la dinámica del VIH/SIDA, tomado como base el sistema (3.3-3.7) que se propuso en el artículo (Gonzales-Moreno K, 2021). Para ello se considera una tasa de progresión δ, que va del compartimiento de individuos infectados asintomáticos con latencia rápida (I_2) hacia el compartimento de la población que tiene SIDA, A. Esto con el objetivo de hacer una comparación con el modelo SIJA y analizar el impacto que tiene el hecho de que los individuos infectado reciban tratamiento para mejorar su sistema inmunológico.

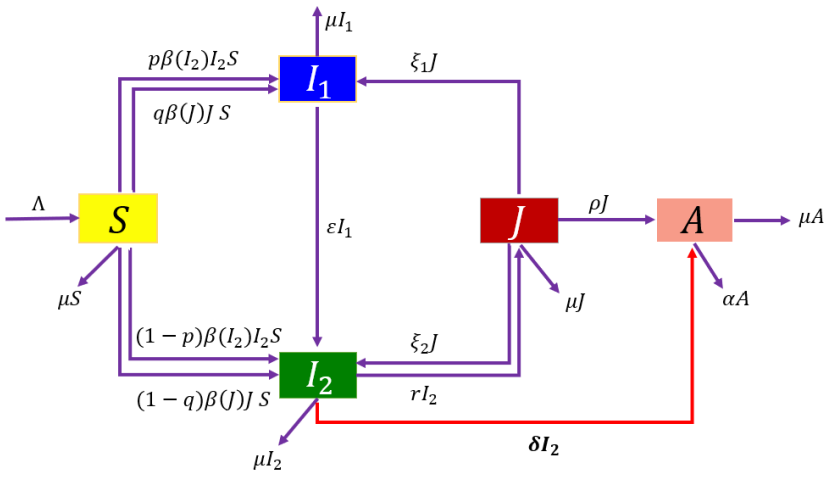


Figura 3.25: Diagrama de trasmisión del modelo SIIJA perturbado. Adaptado del artículo (Gonzales-Moreno K, 2021)

Teniendo en cuenta el sistema anterior se tiene el modelo dado por las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S - \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J}{m+J}\right) JS - \mu S$$

$$\frac{dI_1}{dt} = p\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + q\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J}{m+J}\right) JS - (\varepsilon+\mu) I_1 + \xi_1 J$$

$$\frac{dI_2}{dt} = (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J}{m+J}\right) JS + \varepsilon I_1 - (r+\delta+\mu) I_2 + \xi_2 J$$

$$\frac{dJ}{dt} = rI_2 - (\xi_1 + \xi_2 + \rho + \mu) J$$

$$\frac{dA}{dt} = \rho J + \delta I_2 - (\alpha + \mu) A$$

En contraste con el modelo del capítulo anterior (3.3)-(3.7), el parámetro b_2 se modifica al incorporar un nuevo término δ, mientras que la última ecuación diferencial incluye un término adicional δI_2, que representa la transición de los individuos infectados asintomáticos con latencia rápida hacia el compartimiento de pacientes con SIDA.
Para simplificar la formulación del modelo, se introducen nuevas constantes equivalentes, definidas de la siguiente manera:

$$b_1 = \varepsilon + \mu$$
$$b_2 = r + \delta + \mu$$
$$b_3 = \xi_1 + \xi_2 + \rho + \mu$$
$$b_4 = \alpha + \mu$$

En tal sentido, el sistema de ecuaciones que representan el nuevo diagrama 3.25 queda expresado como:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 S - \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J}{m + J}\right) JS - \mu S \tag{3.48}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = p\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 S + q\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J}{m + J}\right) JS - b_1 I_1 + \xi_1 J \tag{3.49}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 S + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J}{m + J}\right) JS + \varepsilon I_1 - b_2 I_2 + \xi_2 J \tag{3.50}$$

$$\frac{dJ}{dt} = rI_2 - b_3 J \tag{3.51}$$

$$\frac{dA}{dt} = \rho J + \delta I_2 - b_4 A \tag{3.52}$$

con tasas de contacto $\beta_1(I_2) = \beta_1 - \beta_1' \dfrac{I_2}{m + I_2}$ y $\beta_2(J) = \beta_2 - \beta_2' \dfrac{J}{m + J}$ donde $S(t) \geq 0, I_1(t) \geq 0, I_2(t) \geq 0, J(t) \geq 0$ y $A(t) \geq 0$. Ahora con este modelo se hará un estudio de la dinámica del VIH/SIDA teniendo presente la cobertura de los medios y el tratamiento antirretroviral.

Los parámetros del modelo SIIJA perturbado son los mismos del modelo anterior, si embargo el valor del parámetro δ fue asumido en este capítulo ($\delta = 0{,}041$). Así mismo, se recuerda las condiciones: $\beta_1 - \beta_1' > 0$, $\beta_2 - \beta_2' > 0$, $\Lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \mu, p, q, \varepsilon, r, \rho, \xi_1$ y ξ_2 son parámetros con valores entre 0 y 1.

Tabla 3.3: En la tabla se presentan la descripción de los parámetros del modelo SIIJA, adaptado del artículo (Gonzales-Moreno K, 2021)

Parámetro	**Valores**
Tasa de progresión de individuos en tratamiento que pasan a I_1 (ξ_1)	0.8 año^{-1}
Tasa de progresión de individuos en tratamiento que pasan a I_2 (ξ_2)	0.9 año^{-1}
Tasa de evolución de individuos I_1 a I_2 (ε)	0.002 año^{-1}
Tasa de evolución de individuos I_2 a J (r)	0.025 año $^{-1}$
Tasa de evolución de individuos J a A (ρ)	0.03 año^{-1}
Parámetro de saturación media que cuantifica la influencia de la cobertura mediática sobre la tasa de transición por contacto. (m)	30 personas
Probabilidad de que un susceptible infectado por J ingrese a I_1 (q); el resto pasa a I_2 $(1-q)$	0.8
Tasa de mortalidad por causa del VIH/SIDA (α)	0.01 año $^{-1}$
Tasa de mortalidad natural (μ)	0.01 año $^{-1}$
Probabilidad de que un susceptible infectado por I_2 ingrese a I_1 (p); el resto pasa a I_2 $(1-p)$	0.9
Tasa de reclutamiento de población (Λ)	300 personas por año
Tasa de trasmisión del VIH por parte del compartimiento I_2 debido a la cobertura de los medios. ($\beta_1^{'}$)	2×10^{-6} (per. año) $^{-1}$
Tasa de trasmisión del VIH por parte del compartimiento sintomático J debido a la cobertura mediática ($\beta_2^{'}$)	4×10^{-7} (per. año) $^{-1}$
Tasa de trasmisión del VIH por indivisión I_2 antes de la cobertura de los medios (β_1)	2.2727 $\times 10^{-6}$ (per. año) $^{-1}$
Tasa de trasmisión del VIH por individuos J antes de la cobertura de los medios (β_2)	4.5442 $\times 10^{-7}$ (per. año) $^{-1}$
Tasa de progresión de individuos del compartimiento I_2 a A (δ)	0.041 año $^{-1}$

3.11. Positividad de soluciones

Al igual que el capitulo anterior se probará que el modelo (3.48 - 3.52) presenta soluciones no negativas considerando la misma dinámica de la demostración que se uso en el modelo anterior.

Lema 5. *Consideremos el sistema (3.48)-(3.52) con condiciones iniciales estrictamente positivas*

$$S(0) > 0, \quad I_1(0) > 0, \quad I_2(0) > 0, \quad J(0) > 0, \quad A(0) > 0.$$

Se afirma que bajo estas condiciones, las funciones solución

$$S(t),\ I_1(t),\ I_2(t),\ J(t),\ A(t)$$

permanecen positivas para todo $t > 0$.

Demostración. Usando el método de contradicción se dejará en evidencia que las soluciones del sistema son positivas tomando las hipótesis que indica el lema.
Si la tesis no se cumple, entonces al menos una de las variables $S(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, $J(t)$ y $A(t)$ no es positiva. Es decir, los casos opuestos a la tesis serían los siguientes;

1) Supongamos que existe un primer tiempo t_1 tal que $S(t_1) = 0$, $S'(t_1) < 0$, $I_1(t) > 0$, $I_2(t) > 0$, $J(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_1]$

2) Supongamos que existe un primer tiempo t_2 tal que $I_1(t_2) = 0$, $I_1'(t_2) < 0$, $S(t) > 0$, $I_2(t) > 0$, $J(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_2]$

3) Supongamos que existe un primer tiempo t_3 tal que $I_2(t_3) = 0$, $I_2'(t_3) < 0$, $S(t) > 0$, $I_1(t) > 0$, $J(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_3]$

4) Supongamos que existe un primer tiempo t_4 tal que $J(t_4) = 0$, $J'(t_4) < 0$, $S(t) > 0$, $I_1(t) > 0$, $I_2(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_4]$

5) Supongamos que existe un primer tiempo t_5 tal que $A(t_5) = 0$, $A'(t_5) < 0$, $S(t) > 0$, $I_1(t) > 0$, $I_2(t) > 0$ y $J(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_5]$

Luego para el caso 1), según la primera ecuación del sistema tenemos que

$$S'(t_1) = \Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2(t_1)}{m + I_2(t_1)}\right) I_2(t_1)S(t_1) - \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J(t_1)}{m + J(t_1)}\right) J(t_1)S(t_1) - \mu S(t_1)$$
$$S'(t_1) = \Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2(t_1)}{m + I_2(t_1)}\right) I_2(t_1)(0) - \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J(t_1)}{m + J(t_1)}\right) J(t_1)(0) - \mu(0)$$
$$S'(t_1) = \Lambda > 0$$

el cual es contradictorio con $S'(t_1) < 0$.
Para el caso 2), según la segunda ecuación del sistema sabemos que

$$I_1'(t_2) = p\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2(t_2)}{m + I_2(t_2)}\right) I_2(t_2)S(t_2) + q\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J(t_2)}{m + J(t_2)}\right) J(t_2)S(t_2) - b_1 I_1(t_2) + \xi_1 J(t_2) > 0$$

lo cual es una contradicción con $I_1'(t_2) < 0$.
En el caso 3), según la tercera ecuación del sistema sabemos que

$$I_2'(t_3) = (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2(t_3)}{m + I_2(t_3)}\right) I_2(t_3)S(t_3) + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J(t_3)}{m + J(t_3)}\right) J(t_3)S(t_3) + \varepsilon I_1(t_3) - b_2 I_2(t_3) + \xi_2 J(t_3) > 0$$

lo cual es una contradicción con $I_2'(t_3) < 0$.
Para el caso 4), según la cuarta ecuación del sistema sabemos que

$$J'(t_4) = rI_2(t_4) - b_3 J(t_4) > 0$$

lo cual es una contradicción con $J'(t_4) < 0$.
Finalmente para el caso 5), según la quinta ecuación del sistema sabemos que

$$A'(t_5) = \rho J(t_5) + \delta I_2(t_5) - b_4 A(t_5) > 0$$

lo cual es una contradicción con $A'(t_5) < 0$.
Entonces , como todos los casos opuestos de la tesis son faltas, por consiguiente la tesis es verdadera; es decir, las soluciones $S(t), I_1(t), I_2(t), J(t)$ y $A(t)$ del sistema son positivas $\forall t > 0$. □

3.12. Región invariante

Dado que las variables $S(t), I_1(t), I_2(t), J(t), A(t)$ están restringidas por la tasa de supervivencia $\frac{\Lambda}{\mu}$, se tiene que $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$. Con base en esta observación, se formula el siguiente resultado:

Lema 6. *Sea la región factible*

$$\Omega = \left\{ (S(t), I_1(t), I_2(t), J(t), A(t)) \in \mathbb{R}^5_+ : N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

Entonces, Ω es positivamente invariante respecto al sistema de ecuaciones (3.48)-(3.52) bajo condiciones iniciales no negativas

$$S(0) \geq 0, \quad I_1(0) \geq 0, \quad I_2(0) \geq 0, \quad J(0) \geq 0, \quad A(0) \geq 0.$$

Demostración. Sumando las ecuaciones del sistema (3.48)-(3.52) se obtiene

$$\frac{d}{dt}(S + I_1 + I_2 + J + A) = \Lambda - \mu(S + I_1 + I_2 + J + A) - \alpha A,$$
$$\frac{dN}{dt} = -\mu N + (\Lambda - \alpha A).$$

Dado que $A(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, se tiene la desigualdad

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N + (\Lambda - \alpha A) \leq \Lambda - \mu N. \tag{3.53}$$

Desarrollando la desigualdad diferencial (3.53) resulta

$$\frac{dN}{-\mu N + \Lambda} \leq dt,$$
$$N - \frac{\Lambda}{\mu} \leq Ce^{-\mu t},$$

lo que conduce a la expresión

$$N(t) \leq Ce^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}. \tag{3.54}$$

Aplicando el límite cuando $t \to \infty$ se obtiene

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Por consiguiente, la región

$$\Omega = \left\{ (S(t), I_1(t), I_2(t), J(t), A(t)) \in \mathbb{R}^5_+ : N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

se confirma como un conjunto positivamente invariante para el sistema (3.48)-(3.52). □

3.13. Puntos de equilibrio

Sea el sistema:

$$\Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S - \left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS - \mu S = 0 \tag{3.55}$$

$$p\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + q\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS - b_1 I_1 + \xi_1 J = 0 \tag{3.56}$$

$$(1-p)\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS + \varepsilon I_1 - b_2 I_2 + \xi_2 J = 0 \tag{3.57}$$

$$rI_2 - b_3 J = 0 \tag{3.58}$$

$$\rho J + \delta I_2 - b_4 A = 0 \tag{3.59}$$

de la ecuación 3.58 despejando I_2;

$$I_2 = \frac{b_3 J}{r} \tag{3.60}$$

luego de la ecuación 3.59 se tiene;

$$A = \frac{\rho J + \delta I_2}{b_4} = \frac{(r\rho + b_3\delta)J}{rb_4} \tag{3.61}$$

Así mismo, de las ecuaciones 3.55 y 3.56 se despeja S e I_1 y luego reemplazando 3.60 se tiene;

$$S = \frac{\Lambda}{\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{b_3 J}{mr + b_3 J}\right)\frac{b_3 J}{r} + \left(\beta_2 - \beta_2'\frac{J}{m+J}\right) J + \mu} \tag{3.62}$$

$$I_1 = \frac{J\left[p\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{b_3 J}{mr + b_3 J}\right)\frac{b_3 S}{r} + q\left(\beta_2 - \beta_2'\frac{J}{m+J}\right) S + \xi_1\right]}{b_1} \tag{3.63}$$

Sustituyendo S, I_1 e I_2 en la expresión (3.57), se tiene un factor común J que se muestra en;

$$J\left\{(1-p)\left(\beta_1(I_2)\right)\frac{b_3 S}{r}+(1-q)\left(\beta_2(J)\right)S+\frac{\varepsilon}{b_1}\left(p\left(\beta_1(I_2)\right)\frac{b_3 S}{r}+q\left(\beta_2(J)\right)S+\xi_1\right)-\frac{b_2 b_3}{r}+\xi_2\right\}=0 \tag{3.64}$$

con

$$\beta_1(I_2)=\beta_1-\beta_1'\frac{I_2}{m+I_2} \quad y \quad \beta_2(J)=\beta_2-\beta_2'\frac{J}{m+J}$$

donde aquí una solución es, $J=0$ y reemplazándolo en (3.60 -3.63) resulta el punto libre de infección:

$$E_0=(S,I_1,I_2,J,A)=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0,0,0\right) \tag{3.65}$$

Del otro factor se obtendrá el punto de equilibrio endémico, que será analizado con más detenimiento en la sección 3.13.2. Ahora se procede a calcular el R_0 del modelo básico SIIJA.

$$E_0=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0,0,0\right) \tag{3.66}$$

3.13.1. Número de reproducción básico del modelo SIIJA perturbado

Considerando la misma idea del proceso de obtención del R_0 en el ejercicio anterior, empezamos presentando la matriz Jacobiana de un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$J=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I_1} & \frac{\partial f_1}{\partial I_2} & \frac{\partial f_1}{\partial J} & \frac{\partial f_1}{\partial A} \\
\frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I_1} & \frac{\partial f_2}{\partial I_2} & \frac{\partial f_2}{\partial J} & \frac{\partial f_3}{\partial A} \\
\frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I_1} & \frac{\partial f_3}{\partial I_2} & \frac{\partial f_3}{\partial J} & \frac{\partial f_3}{\partial A} \\
\frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial I_1} & \frac{\partial f_4}{\partial I_2} & \frac{\partial f_4}{\partial J} & \frac{\partial f_4}{\partial A} \\
\frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial I_1} & \frac{\partial f_5}{\partial I_2} & \frac{\partial f_5}{\partial J} & \frac{\partial f_5}{\partial A}
\end{pmatrix} \tag{3.67}$$

El cálculo del número de reproducción básico R_0 se realiza mediante la construcción de la matriz de próxima generación. Sea el vector de variables infecciosas

$$X=(I_1,I_2,J,A)^T,$$

el sistema dado por (3.49)-(3.52) puede representarse de manera compacta como:

$$\frac{dX}{dt}=F(X)-V(X)$$

donde;

$$F(X) = \begin{pmatrix} p\left(\beta_1 - \beta_1'\dfrac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + q\left(\beta_2 - \beta_2'\dfrac{J}{m+J}\right) JS \\ (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1'\dfrac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2'\dfrac{J}{m+J}\right) JS \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

y

$$V(X) = \begin{pmatrix} b_1 I_1 - \xi_1 J \\ -\varepsilon I_1 + b_2 I_2 - \xi_2 J \\ -r I_2 + b_3 J \\ -\delta I_2 - \rho J + b_4 A \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

Las matrices $F(X)$ y $V(X)$ obtenidas en 3.68 y 3.69 evaluadas en el punto de equilibrio E_0 (3.66) son:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & p\beta_1\frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2\frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1\frac{\Lambda}{\mu} & (1-q)\beta_2\dfrac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & -\xi_1 & 0 \\ -\varepsilon & b_2 & -\xi_2 & 0 \\ 0 & -r & b_3 & 0 \\ 0 & -\delta & -\rho & b_4 \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

Antes de hallar V^{-1}, se calcula el determinante de V

$$\det(V) = b_4\left[b_1 b_2 b_3 - r(\epsilon\xi_1 + b_1\xi_2)\right] \tag{3.71}$$

Reemplazando los equivalentes de b_1, b_2, b_3 y b_4 en $det(V)$, se transforma en:

$$\det(V) = b_4\left\{(\mu+\varepsilon)\left[\xi_1(r+\delta) + (\rho+\mu)(r+\mu+\delta) + \xi_2(\mu+\delta)\right] + \xi_1\mu r\right\} \tag{3.72}$$

se observa que, es diferente de cero más aún es positivo entonces V tiene inversa. Luego se calcula la inversa V^{-1}.

$$V^{-1} = \frac{b_4}{det(V)}\begin{pmatrix} b_2b_3 - r\xi_2 & \xi_1 r & \xi_1 b_2 & 0 \\ \varepsilon b_3 & b_1 b_3 & \xi_1\varepsilon + b_1\xi_2 & 0 \\ \varepsilon r & b_1 r & b_1 b_2 & 0 \\ \frac{\epsilon(r\rho+\delta b_3)}{b_4} & \frac{b_1(r\rho+\delta b_3)}{b_4} & \frac{b_1 b_2\rho + \delta(\epsilon\xi_1 + b_1\xi_2)}{b_4} & \frac{b_1 b_2 b_3 - r(\epsilon\xi_1 + b_1\xi_2)}{b_4} \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

se realiza la multiplicación FV^{-1}:

$$FV^{-1} = \frac{b_4}{det(V)}\begin{pmatrix} 0 & p\beta_1\frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2\frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1\frac{\Lambda}{\mu} & (1-q)\beta_2\frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2b_3 - r\xi_2 & \xi_1 r & \xi_1 b_2 & 0 \\ \varepsilon b_3 & b_1 b_3 & \xi_1\varepsilon + b_1\xi_2 & 0 \\ \varepsilon r & b_1 r & b_1 b_2 & 0 \\ \frac{\epsilon(r\rho+\delta b_3)}{b_4} & \frac{b_1(r\rho+\delta b_3)}{b_4} & \frac{b_1 b_2\rho + \delta(\epsilon\xi_1 + b_1\xi_2)}{b_4} & \frac{b_1 b_2 b_3 - r(\epsilon\xi_1 + b_1\xi_2)}{b_4} \end{pmatrix}$$

$$FV^{-1} = \frac{b_4\Lambda}{\mu det(V)}\begin{pmatrix} \varepsilon(p\beta_1 b_3 + q\beta_2 r) & b_1(p\beta_1 b_3 + q\beta_2 r) & p\beta_1(\xi_1\varepsilon + b_1\xi_2) + q\beta_2 b_1 b_2 & 0 \\ \varepsilon((1-p)\beta_1 b_3 + (1-q)\beta_2 r) & b_1((1-p)\beta_1 b_3 + (1-q)\beta_2 r) & (1-p)\beta_1(\xi_1\varepsilon + b_1\xi_2) + (1-q)\beta_2 b_1 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y luego se encuentra su máximo autovalor según (Van den Driessche y Watmough, 2002). Para ello se resuelve la ecuación $\det(FV^{-1} - \lambda I) = 0$;

$$\det(FV^{-1}-\lambda I)=\lambda^2\begin{vmatrix}\frac{b_4\Lambda\varepsilon(p\beta_1b_3+q\beta_2r)}{\mu\det(V)}-\lambda & \frac{b_4\Lambda b_1(p\beta_1b_3+q\beta_2r)}{\mu\det(V)}\\ \frac{b_4\Lambda\varepsilon(\beta_1b_3+\beta_2r-(p\beta_1b_3+q\beta_2r))}{\mu\det(V)} & \frac{b_4\Lambda b_1(\beta_1b_3+\beta_2r-(p\beta_1b_3+q\beta_2r))}{\mu\det(V)}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

reduciendo se obtiene un autovalor $\lambda=0$, además resolviendo la ecuación:

$$-b_4\Lambda\varepsilon\mu\det(V)\lambda(p\beta_1b_3+q\beta_2r)-b_4\Lambda b_1\mu\det(V)\lambda(\beta_1b_3+\beta_2r-(p\beta_1b_3+q\beta_2r))+(\mu\lambda\det(V))^2=0$$

se obtendrá el otro valor de λ.

Se despeja λ y se reemplaza $\det(V)$ en función de los parámetros originales del modelo perturbado:

$$\lambda=\frac{b_4\Lambda}{\mu\det(V)}\left((pb_3\beta_1+qr\beta_2)(\varepsilon-b_1)+b_1(\beta_1b_3+\beta_2r)\right)$$
$$\lambda=\frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{\beta_1b_3(p\varepsilon+b_1(1-p))+\beta_2r(q\varepsilon+b_1(1-q))}{(\mu+\varepsilon)\left(\xi_1(\mu+\delta)+(\rho+\mu)(r+\mu+\delta)+\xi_2(\mu+\delta)\right)+\xi_1\mu r}\right)$$

el cual al reducir la expresión se denota como R_0^*; que representa el número reproductor básico del modelo SIIJA perturbado:

$$\bar{R}_0=\frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{\beta_1b_3(\mu(1-p)+\varepsilon)+\beta_2r(\mu(1-q)+\varepsilon)}{(\mu+\varepsilon)\left(\xi_1(\mu+\delta)+(\rho+\mu)(r+\mu+\delta)+\xi_2(\mu+\delta)\right)+\xi_1\mu r}\right)\tag{3.74}$$

o lo que es equivalente:

$$\bar{R}_0=\frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{\beta_1b_3(\mu(1-p)+\varepsilon)+\beta_2r(\mu(1-q)+\varepsilon)}{r(\varepsilon(\rho+\mu)+\mu(\xi_1+\rho+\mu))+(\mu+\delta)(\xi_1+\xi_2+\rho+\mu)(\varepsilon+\mu)}\right)\tag{3.75}$$

El $\bar{R}_0$ también se puede denotar de la siguiente manera:

$$\bar{R}_0=\frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{\beta_1b_3L_1+\beta_2rL_2}{\theta^*}\right)\tag{3.76}$$

donde,

$$L_1=\mu(1-p)+\varepsilon=p\varepsilon+b_1(1-p);\quad con\quad 0<p<1\tag{3.77}$$
$$L_2=\mu(1-q)+\varepsilon=q\varepsilon+b_1(1-q);\quad con\quad 0<q<1\tag{3.78}$$
$$\theta^*=r(\varepsilon(\rho+\mu)+\mu(\xi_1+\rho+\mu))+(\mu+\delta)(\xi_1+\xi_2+\rho+\mu)(\varepsilon+\mu)=b_1b_2b_3-(\varepsilon\xi_1+b_1\xi_2)r\tag{3.79}$$

3.13.2. Punto de equilibrio endémico

Al inicio de la sesión 3.13 se ha logrado calcular un valor para J. Teniendo las consideraciones del modelo

$$\beta_1(I_2)=\beta_1-\beta_1'\frac{I_2}{m+I_2}\quad y\quad \beta_2(J)=\beta_2-\beta_2'\frac{J}{m+J}$$

entonces la otra solución para J se obtendrá de;

$$p\left(\beta_1(I_2)\right)\frac{b_3}{r}S+q\left(\beta_2(J)\right)S+\xi_1-\frac{b_1}{\varepsilon}\left(b_2\frac{b_3}{r}-\xi_2-(1-p)\left(\beta_1(I_2)\right)\frac{b_3}{r}S-(1-q)\left(\beta_2(J)\right)S\right)=0$$

reduciendo la expresión anterior

$$(\beta_1(I_2))\,\frac{b_3}{r}S\left(p+(1-p)\frac{b_1}{\varepsilon}\right)+(\beta_2(J))\,S\left(q+(1-q)\frac{b_1}{\varepsilon}\right)+\xi_1-\frac{b_1}{\varepsilon}\left(b_2\frac{b_3}{r}-\xi_2\right)=0$$

factorizando términos comunes en los paréntesis:

$$S\frac{b_3}{r}\,(\beta_1(I_2))\left(1+(1-p)\frac{\mu}{\varepsilon}\right)+S\,(\beta_2(J))\left(1+(1-q)\frac{\mu}{\varepsilon}\right)+\xi_1-\frac{b_1}{\varepsilon}\left(b_2\frac{b_3}{r}-\xi_2\right)=0$$

multiplica por ε,

$$S\frac{b_3}{r}\,(\beta_1(I_2))\,(\varepsilon+(1-p)\mu)+S\,(\beta_2(J))\,(\varepsilon+(1-q)\mu)+\xi_1\varepsilon-b_1\left(b_2\frac{b_3}{r}-\xi_2\right)=0$$

se multiplica por $(mr+b_3J)\,(m+J)r$:

$$Sb_3\,(\beta_1(mr+b_3J)-\beta_1'b_3J)\,(\varepsilon+(1-p)\mu)\,(m+J)+$$
$$Sr\,(\beta_2(m+J)-\beta_2'J)\,(\varepsilon+(1-q)\mu)\,(mr+b_3J)+(\xi_1\varepsilon-b_1(b_2b_3-\xi_2r))\,(mr+b_3J)(m+J)=0$$

se reemplaza la expresión 3.62 y $-\theta^*=-b_1b_2b_3+(\varepsilon\xi_1+b_1\xi_2)r$;

$$\left(\frac{\Lambda}{(\beta_1(I_2))\,\frac{b_3}{r}J+(\beta_2(J))\,J+\mu}\right)b_3\left(\beta_1(mr+b_3J)-\beta_1'b_3J\right)(\varepsilon+(1-p)\mu)\,(m+J)$$
$$+\left(\frac{\Lambda}{(\beta_1(I_2))\,\frac{b_3}{r}J+(\beta_2(J))\,J+\mu}\right)r\left(\beta_2(m+J)-\beta_2'J\right)(\varepsilon+(1-q)\mu)\,(mr+b_3J)$$
$$-\theta^*(mr+b_3J)(m+J)=0$$

se reduce la expresión y sustituyendo algunas notaciones:

$$\begin{aligned}&b_3L_1^*\Lambda r\left[m^2r\beta_1+Jm(b_3(\beta_1-\beta_1')+\beta_1r)+J^2b_3(\beta_1-\beta_1')\right]\\&+\Lambda r^2L_2^*\left[m^2r\beta_2+Jm(r(\beta_2-\beta_2')+\beta_2b_3)+J^2b_3(\beta_2-\beta_2')\right]\\&-J^3b_3\theta^*\left[b_3(\beta_1-\beta_1')+r(\beta_2-\beta_2')\right]-J^2m\theta^*\left[b_3(b_3(\beta_1-\beta')+\beta_1r)+r(r(\beta_2-\beta_2')+\beta_2b_3)\right]\\&-\theta^*\mu rb_3J^2-\theta^*b_3\beta_1m^2rJ-\theta^*r^2\beta_2m^2J-\theta^*\mu rm(r+b_3)J-\theta^*\mu r^2m^2=0\end{aligned}\tag{3.80}$$

Para simplificar la expresión anterior se considera la siguiente notación:

$$\bar{R}_1=\left(\frac{\beta_1'b_3L_1+\beta_2'rL_2}{\theta^*}\right)\frac{\Lambda}{\mu}>0\tag{3.81}$$

$$\bar{R}_2=\left(\frac{\beta_1b_3^2L_1+\beta_2r^2L_2}{\theta^*}\right)\frac{\Lambda}{\mu}>0\tag{3.82}$$

$$\bar{R}_3=\left(\frac{\beta_1'b_3^2L_1+\beta_2'r^2L_2}{\theta^*}\right)\frac{\Lambda}{\mu}>0\tag{3.83}$$

la que lleva tener sus expresiones equivalentes:

$$\begin{aligned}\bar{R}_1\mu\theta^*&=\Lambda(\beta_1'b_3L_1+\beta_2'rL_2)\\\bar{R}_2\mu\theta^*&=\Lambda(\beta_1b_3^2L_1+\beta_2r^2L_2)\\\bar{R}_3\mu\theta^*&=\Lambda(\beta_1'b_3^2L_1+\beta_2'r^2L_2)\end{aligned}$$

además se considera;

$$\varpi_1 = b_3(\beta_1 - \beta_1') + r(\beta_2 - \beta_2')$$
$$\varpi_2 = b_3^2(\beta_1 - \beta_1') + r^2(\beta_2 - \beta_2')$$

Luego de 3.80 se tiene;

$$b_3\varpi_1 J^3 + \left[m(\varpi_2 + b_3 r(\beta_1 + \beta_2)) + \mu r b_3((1 + \bar{R}_1 - \bar{R}_0)\right] J^2$$
$$+ \left[m^2 r(b_3\beta_1 + r\beta_2) + rm\mu(\bar{R}_3 - (r + b_3)(\bar{R}_0 - 1))\right] J - m^2 r^2 \mu(\bar{R}_0 - 1) = 0$$

posteriormente la ecuación tiene una forma cúbica:

$$P^*(J) = A_1^* J^3 + B_1^* J^2 + C_1^* J + D_1^* = 0, \tag{3.84}$$

donde los coeficientes son;

$$A_1^* = b_3\varpi_1$$
$$B_1^* = m(\varpi_2 + b_3 r(\beta_1 + \beta_2)) + \mu r b_3(\bar{R}_1 - (\bar{R}_0 - 1))$$
$$C_1^* = m^2 r(b_3\beta_1 + r\beta_2) + rm\mu(\bar{R}_3 - (r + b_3)(\bar{R}_0 - 1))$$
$$D_1^* = -m^2 r^2 \mu(\bar{R}_0 - 1)$$

Luego, $\bar{E}^* = (\bar{S}^*, \bar{I}_1^*, \bar{I}_2^*, \bar{J}^*, \bar{A}^*)$ es el punto de equilibrio endémico del modelo SIIJA perturbado siempre que la ecuación (3.84) tenga una solución positiva para $\bar{J}^*$; con el propósito de que se tenga sentido biológico en el modelo. El coeficiente, $A_1^* > 0$, dado que $\varpi_1 > 0$, mientras que $D_1^* < 0$, si $\bar{R}_0 > 1$. En el caso de B_1^* y C_1^* el signo puede variar teniendo en cuenta las siguientes condiciones;

- $B_1^* > 0$, cuando $\Gamma^* = \dfrac{m(\varpi_2 + b_3 r(\beta_1 + \beta_2)) + \mu r b_3 \bar{R}_1}{\mu r b_3(\bar{R}_0 - 1)} > 1$, con $\bar{R}_0 > 1$.

- $C_1^* > 0$, cuando $\Upsilon^* = \dfrac{m(b_3\beta_1 + r\beta_2) + \mu\bar{R}_3}{\mu(r + b_3)(\bar{R}_0 - 1)} > 1$, con $\bar{R}_0 > 1$.

Al igual que el capítulo anterior se cumple el siguiente resultado.

Proposición 9. *Sean los coeficientes B_1^* y C_1^* de 3.84, si $B_1^* < 0$ y $r < b_3$; entonces $C_1^* < 0$ y $B_1^* - C_1^* > 0$.*

Entonces, $P^*(\bar{J}^*) = A_1^*(\bar{J}^*)^3 + B_1^*(\bar{J}^*)^2 + C_1^*\bar{J}^* + D_1^*$ puede tener coeficientes positivos y otros negativos, por ello se utiliza la regla de Descartes para mostrar los diferentes casos en la que se podría obtener una solución positiva teniendo en cuenta la proposición 9 (no se considera el caso $B_1 < 0$ y $C_1 > 0$).
Considerando la abreviatura NCS (Números de cambio de signo) y NPRP (Número de posibilidades de raíces positivas) se hará un resumen de los casos en la siguiente tabla:

Casos	A_1	B_1	C_1	D_1	$\bar{R}_0$	NCS	NPRP
I	+	+	+	-	$\bar{R}_0 > 1$	1	1
II	+	+	-	-	$\bar{R}_0 > 1$	1	1
III	+	-	-	-	$\bar{R}_0 > 1$	1	1

Tabla 3.4: Número de posibles raíces reales positivas de la ecuación 3.84

Ahora se hará el análisis de los cambios de signo de los coeficientes según Descarte para los otros casos para el modelo perturbado.

CASO I: En un primer caso los signos de los coeficientes del polinomio cúbico están dados por: $\underbrace{A_1^*}_{+}(\bar{J}^*)^3 + \underbrace{B_1^*}_{+}(\bar{J}^*)^2 + \underbrace{C_1^*}_{+}\bar{J}^* + \underbrace{D_1^*}_{-}$ cuando ; $\bar{R}_0 > 1$, $\Gamma^* > 1$ y $\Upsilon^* > 1$. Luego según Descartes tendrá *una raíz positiva* ya que se tiene un solo cambio de signo en su expresión:

$$P^*(J) = \underbrace{A_1^*}_{+} J^3 + \underbrace{B_1^*}_{+} J^2 + \underbrace{C_1^*}_{+} J + \underbrace{D_1^*}_{-}$$

Ahora se procede a probar la cantidad de cambios de signo para $p(-J)$:

$$P^*(-J) = \underbrace{A_1^*}_{+}(-J)^3 + \underbrace{B_1^*}_{+}(-J)^2 + \underbrace{C_1^*}_{+}(-J) + \underbrace{D_1^*}_{-}$$
$$P^*(-J) = -\underbrace{A_1^*}_{+} J^3 + \underbrace{B_1^*}_{+} J^2 - \underbrace{C_1^*}_{+} J + \underbrace{D_1^*}_{-}$$

De aquí $P^*(-J)$ tiene dos variaciones de signo por lo cual tiene máximo dos raíces negativas ó 0 raíz negativa (ya que el máximo de raíces 2 es disminuido en un número par $2-2=0$). Resumiendo las posibilidades de este primer caso se muestra la siguiente tabla:

Posibilidades	Raíces Positivas	Raíces Negativas	Raíces Complejas	Total
1	1	2	0	3
2	1	0	2	3

CASO II: En un segundo caso los signos de los coeficientes del polinomio cúbico están dados por: $\underbrace{A_1^*}_{+}(\bar{J}^*)^3 + \underbrace{B_1^*}_{+}(\bar{J}^*)^2 + \underbrace{C_1^*}_{-}\bar{J}^* + \underbrace{D_1^*}_{-}$ cuando ; $\bar{R}_0 > 1$, $\Gamma^* > 1$ y $\Upsilon^* < 1$. Luego según Descartes tendrá *una raíz positiva* puesto que se tiene un solo cambio de signo en su expresión:

$$P^*(J) = \underbrace{A_1^*}_{+} J^3 + \underbrace{B_1^*}_{+} J^2 + \underbrace{C_1^*}_{-} J + \underbrace{D_1^*}_{-}$$

Ahora se procede la cantidad de cambios de signo para $P^*(-J)$:

$$P^*(-J) = \underbrace{A_1^*}_{+}(-J)^3 + \underbrace{B_1^*}_{+}(-J)^2 + \underbrace{C_1^*}_{-}(-J) + \underbrace{D_1^*}_{-}$$
$$P^*(-J) = -\underbrace{A_1^*}_{+} J^3 + \underbrace{B_1^*}_{+} J^2 - \underbrace{C_1^*}_{-} J + \underbrace{D_1^*}_{-}$$

De aquí $P^*(-J)$ tiene dos variaciones de signo por lo cual tiene máximo dos raíces negativas ó 0 raíz negativa (ya que el máximo de raíces 2 es disminuido en un número par $2-2=0$). Resumiendo las posibilidades de este segunda caso se muestra la siguiente tabla:

Posibilidades	Raíces Positivas	Raíces Negativas	Raíces Complejas	Total
1	1	2	0	3
2	1	0	2	3

CASO III: En un primer caso los signos de los coeficientes del polinomio cúbico están dados por: $\underbrace{A_1^*}_{+}(\bar{J}^*)^3 + \underbrace{B_1^*}_{-}(\bar{J}^*)^2 + \underbrace{C_1^*}_{-}\bar{J}^* + \underbrace{D_1^*}_{-}$ cuando ; $\bar{R}_0 > 1$, $\Gamma^* < 1$ y $\Upsilon^* < 1$. Luego según Descartes tendrá *1 raíz positiva* ya que se tiene un cambio de signo en su expresión:

$$P^*(J) = \underbrace{A_1^*}_{+} J^3 + \underbrace{B_1^*}_{-} J^2 + \underbrace{C_1^*}_{-} J + \underbrace{D_1^*}_{-}$$

Ahora la cantidad de cambios de signo para $P^*(-J)$:

$$P^*(-J) = \underbrace{A_1^*}_{+}(-J)^3 + \underbrace{B_1^*}_{-}(-J)^2 + \underbrace{C_1^*}_{-}(-J) + \underbrace{D_1^*}_{-}$$

$$P^*(-J) = -\underbrace{A_1^*}_{+} J^3 + \underbrace{B_1^*}_{-} J^2 - \underbrace{C_1^*}_{-} J + \underbrace{D_1^*}_{-}$$

De aquí $P^*(-J)$ tiene dos variaciones de signo por lo cual tiene máximo dos raíces negativas ó 0 raíz negativa (ya que el máximo de raíces 2 es disminuido en un número par $2-2=0$). Resumiendo las posibilidades de este tercer caso se muestra la siguiente tabla:

Posibilidades	Raíces Positivas	Raíces Negativas	Raíces Complejas	Total
1	1	2	0	3
2	1	0	2	3

Según el método de Descartes se garantiza la existencia de $\bar{J}^* > 0$ en los diferentes casos antes mencionados se tiene al menos una solución positiva; por consiguiente el punto de equilibrio endémico $\bar{E}^*$ existe. Para el caso de $\bar{R}_0 < 1$ tampoco se considera, pues no hay raíces positivas. Esto se resume en el siguiente teorema:

Teorema 3.13.1. *El modelo (3.48-3.52) tiene un estado de equilibrio endémico* $\bar{E}^* = (\bar{S}^*, \bar{I}_1^*, \bar{I}_2^*, \bar{J}^*, \bar{A}^*)$ *si* $\bar{R}_0 > 1$.

La misma idea que el modelo básico SIIJA, se puede lograr expresar la solución de la ecuación de tercer grado 3.84 usando la teoría de Cardano.

Ejemplo 4. *Considerando los valores de los parámetros* $\beta_1 = 0{,}00022727$, $\beta_2 = 4{,}544 \times 10^{-6}$, $\beta_1^{'} = 0{,}0000005$, $\beta_2^{'} = 0{,}000003$, $r = 0{,}01$ *y el resto los de la tabla 3.3 con* $\bar{R}_0 = 10{,}39115332$, *se obtienen los coeficientes* A_1^*, B_1^*, C_1^* *y* D_1^* *para graficar* $P^*(\bar{J})$*;*

$$A_1^* = 0{,}0006865957176$$
$$B_1^* = 0{,}01908817645$$
$$C_1^* = -0{,}04562475108$$
$$D_1^* = -0{,}008452037988$$

luego el polinomio es;
$P^*(J) = 0{,}0006865957176(J)^3 + 0{,}01908817645(J)^2 - 0{,}04562475108\bar{J} - 0{,}008452037988.$

Usando MAPLE se obtiene la figura 3.26 que hace referencia al polinomio $P^*(\bar{J}) = 0{,}0006865957176(\bar{J})^3 + 0{,}01908817645(\bar{J})^2 - 0{,}04562475108\bar{J} - 0{,}008452037988$, en la cual se visualiza que tiene un solución positiva.

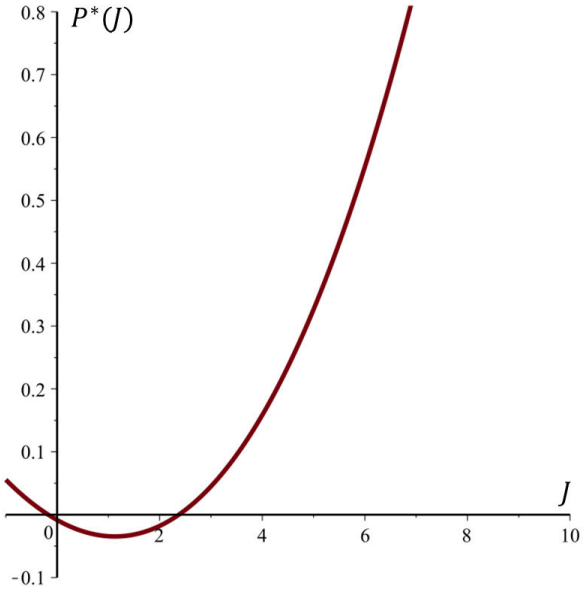


Figura 3.26: Raíz positiva de $P^*(J)$

Considerando la función $P^*(J)$, sus puntos de intersección con el eje horizontal se ubican en

$$\bar{J}_1 = -30{,}00236039, \quad \bar{J}_2 = -0{,}1728317057, \quad \bar{J}_3^* = 2{,}374004381.$$

De acuerdo con el caso II, únicamente se observa una raíz positiva, como se evidencia en la figura correspondiente. Esta configuración se debe a que el coeficiente B_1^* es positivo mientras que C_2^* resulta negativo, es decir, $\Gamma^* = 12{,}68143675 > 1$ y $\Upsilon^* = 0{,}07461538725 < 1$.

Seguidamente, se aborda el análisis de la estabilidad del modelo.

3.14. Análisis de estabilidad del modelo SIIJA perturbado

En esta sección se realiza el análisis de estabilidad local y global de los estados de equilibrio libre de infección y el endémico que hemos obtenido en la sección anterior de nuestro modelo propuesto. Para ello se necesita la matriz Jacobiana como parte del proceso de análisis cualitativo. Las tasas de incidencias del modelo propuesto son:

$$\beta_1(I_2) = \beta_1 - \beta_1' \frac{I_2}{m + I_2} \quad y \quad \beta_2(J) = \beta_2 - \beta_2' \frac{J}{m + J}, \tag{3.85}$$

La tasa $\beta_1(I_2)$ se deriva respecto a I_2, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\beta_1(I_2)\right)}{dI_2} &= \left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right)' \\ &= -\frac{\beta_1'(m+I_2) - \beta_1' I_2}{(m+I_2)^2} \\ &= -\frac{\beta_1' m + \cancel{\beta_1' I_2} - \cancel{\beta_1' I_2}}{(m+I_2)^2} \\ &= -\frac{\beta_1' m}{(m+I_2)^2}\end{aligned}$$

Ahora lo mismo con la tasa $\beta_2(J)$ respecto a J;

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\beta_2(J)\right)}{dJ} &= \left(\beta_1 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right)' \\ &= -\frac{\beta_2'(m+J) - \beta_2' J}{(m+J)^2} \\ &= -\frac{\beta_2' m + \cancel{\beta_2' J} - \cancel{\beta_2' J}}{(m+J)^2} \\ &= -\frac{\beta_2' m}{(m+J)^2}\end{aligned}$$

Así mismo, se calcula las derivadas de $\beta_1(I_2).I_2$ y $\beta_2(J).J$, respecto a I_2 y J respectivamente:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\beta_1(I_2).I_2\right)}{dI_2} &= \left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right)'.I_2 + \beta_1(I_2) \\ &= \left(-\frac{\beta_1' m}{(m+I_2)^2}\right).I_2 + \left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) \\ &= -I_2\beta_1'\left(\frac{m}{(m+I_2)^2} + \frac{1}{m+I_2}\right) + \beta_1 \\ &= -I_2\beta_1'\left(\frac{m+m+I_2}{(m+I_2)^2}\right) + \beta_1 \\ &= \beta_1 - I_2\beta_1'\left(\frac{2m+I_2}{(m+I_2)^2}\right)\end{aligned}$$

se considera la notación,

$$\phi_1 = \frac{2m+I_2}{(m+I_2)^2} \tag{3.86}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\beta_2(J).J\right)}{dJ} &= \left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right)'.J + \beta_2(J) \\ &= \left(-\frac{\beta_2' m}{(m+J)^2}\right).J + \left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) \\ &= -J\beta_2'\left(\frac{m}{(m+J)^2} + \frac{1}{m+J}\right) + \beta_2 \\ &= -J\beta_2'\left(\frac{m+m+J}{(m+J)^2}\right) + \beta_2 \\ &= \beta_2 - J\beta_2'\left(\frac{2m+J}{(m+J)^2}\right)\end{aligned}$$

de forma similar que el caso anterior se denota,

$$\phi_2 = \frac{2m + J}{(m + J)^2} \tag{3.87}$$

Antes de calcular la matriz Jacobiana, se tiene en cuenta las funciones f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5:

$$f_1 = \Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 S - \left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m + J}\right) JS - \mu S \tag{3.88}$$

$$f_2 = p\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 S + q\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m + J}\right) JS - b_1 I_1 + \xi_1 J \tag{3.89}$$

$$f_3 = (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 S + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m + J}\right) JS + \varepsilon I_1 - b_2 I_2 + \xi_2 J \tag{3.90}$$

$$f_4 = rI_2 - b_3 J \tag{3.91}$$

$$f_5 = \delta I_2 + \rho J - b_4 A \tag{3.92}$$

se reemplaza en la matriz Jacobiana de nuestro modelo dado en 3.67:

$$J = \begin{pmatrix} -\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 - \left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m + J}\right) J - \mu & 0 & -S\left(\beta_1 - \beta_1^{'} I_2 \phi_1\right) & -S(\beta_2 - \beta_2^{'} J\phi_2) & 0 \\ p\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 + q\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m + J}\right) J & -b_1 & pS\left(\beta_1 - \beta_1^{'} I_2 \phi_1\right) & qS(\beta_2 - \beta_2^{'} J\phi_2) + \xi_1 & 0 \\ (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m + I_2}\right) I_2 + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m + J}\right) J & \varepsilon & (1-p)S\left(\beta_1 - I_2\beta_1^{'}\phi_1\right) - b_2 & (1-q)S(\beta_2 - J\beta_2^{'}\phi_2) + \xi_2 & 0 \\ 0 & r & -b_3 & 0 & \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4 \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

3.14.1. Estabilidad local de E_0

Según lo establecido en (Van den Driessche y Watmough, 2002), el punto E_0 presenta estabilidad local siempre que sea local y asintóticamente estable. Basándose en este criterio, se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 3.14.1. *El sistema (3.48)-(3.52) posee un estado de equilibrio libre de infección E_0 si $\bar{R}_0 < 1$, el cual es local y asintóticamente estable cuando*

$$\bar{M}_1 > 1, \quad \bar{T}_1 > 1, \quad \bar{N}_1 > 1,$$

donde

$$\bar{M}_1 = \frac{\mu(b_1 + b_2 + b_3)}{(1-p)\beta_1 \Lambda},$$

$$\bar{T}_1 = \frac{\mu(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3)}{\mu r\xi_2 + \bar{R}_{02} + \beta_1 L_1 \Lambda},$$

$$\bar{N}_1 = \frac{\beta_1 \Lambda(1-p)(\mu r\xi_2 + \bar{R}_{02} + \beta_1 L_1 \Lambda)(\bar{M}_1 - 1)(\bar{T}_1 - 1)}{\mu^2 \theta^* (1 - \bar{R}_0)}.$$

Demostración. Sea la matriz Jacobiana dada en (3.93) con $\phi_1 = \dfrac{2m + I_2}{(m + I_2)^2}$ y $\phi_2 =$

$\frac{2m+J}{(m+J)^2}$, entonces evaluando $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ en la matriz se tiene

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & -\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -b_1 & p\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & (1-p)\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4 \end{pmatrix} \tag{3.94}$$

se calcula la matriz $J(E_0) - \lambda I$ para posteriormente hallar los autovalores;

$$J(E_0) - \lambda = \begin{pmatrix} -\mu-\lambda & 0 & -\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & -\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -b_1-\lambda & p\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & (1-p)\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4-\lambda \end{pmatrix}$$

se calcula el determinante

$$|J(E_0) - \lambda| = \begin{vmatrix} -\mu-\lambda & 0 & -\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & -\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -b_1-\lambda & p\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & (1-p)\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\mu-\lambda) \begin{vmatrix} -b_1-\lambda & p\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\ \varepsilon & (1-p)\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\ 0 & r & -b_3-\lambda & 0 \\ 0 & \delta & \rho & -b_4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\mu-\lambda)(-b_4-\lambda) \begin{vmatrix} -b_1-\lambda & p\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 \\ \varepsilon & (1-p)\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 \\ 0 & r & -b_3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$|J(E_0) - \lambda| = (-\mu-\lambda)(-b_4-\lambda)\left[(-b_1-\lambda)\begin{vmatrix} (1-p)\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 \\ r & -b_3-\lambda \end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} p\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 \\ r & -b_3-\lambda \end{vmatrix}\right]$$

igualando a cero los factores $(-\mu-\lambda)(-b_4-\lambda)$ se tiene $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -b_4$; por consiguiente también al tercer factor se le iguala a cero;

$$\begin{aligned} 0 &= (-b_1-\lambda)\left[\left((1-p)\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda\right)(-b_3-\lambda) - r\left((1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2\right)\right] \\ &\quad - \varepsilon\left[\left(p\frac{\beta_1\Lambda}{\mu}(-b_3-\lambda)\right) - r\left(q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1\right)\right] \\ &= (b_1+\lambda)\left[\left((1-p)\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda\right)(-b_3-\lambda) - r\left((1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2\right)\right] \\ &\quad + \varepsilon\left[\left(p\frac{\beta_1\Lambda}{\mu}(-b_3-\lambda)\right) - r\left(q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1\right)\right] \end{aligned}$$

se multiplica por μ;

$$
\begin{aligned}
0 &= (b_1+\lambda)\left[((1-p)\beta_1\Lambda - b_2\mu - \lambda\mu)(-b_3-\lambda) - r\left((1-q)\beta_2\Lambda + \xi_2\mu\right)\right] \\
&\quad + \varepsilon\left[(p\beta_1\Lambda(-b_3-\lambda)) - r\left(q\beta_2\Lambda + \xi_1\mu\right)\right] \\
0 &= (\lambda+b_1)\left[\lambda^2\mu + \lambda(\mu b_3 - ((1-p)\beta_1\Lambda\lambda - b_2\mu)) - b_3((1-p)\beta_1\Lambda - b_2\mu) - r((1-q)\beta_2\Lambda + \xi_2\mu)\right] \\
&\quad + \varepsilon\left[-p\beta_1\Lambda b_3 - p\beta_1\Lambda - rq\beta_2\Lambda - r\xi_1\mu\right] \\
0 &= \lambda^3\mu + \lambda^2\left(\mu b_3 - (1-p)\beta_1\Lambda + b_2\mu\right) \\
&\quad - \lambda\left(b_3(1-p)\beta_1\Lambda - b_3b_2\mu + r\left((1-q)\beta_2\Lambda + \xi_2\mu\right)\right) + \lambda^2 b_1\mu + \lambda b_1\left(\mu b_3 - (1-p)\beta_1\Lambda + b_2\mu\right) \\
&\quad - b_1b_3(1-p)\beta_1\Lambda + b_1b_2b_3\mu - rb_1\left((1-q)\beta_2\Lambda + \xi_2\mu\right) - \varepsilon\beta_1\Lambda\lambda - \varepsilon p\beta_1\Lambda b_3 \\
&\quad - \varepsilon rq\beta_2\Lambda - \varepsilon r\xi_1\mu
\end{aligned}
$$

Se asocian términos semejantes

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda^3\mu + \lambda^2\left[\mu b_3 - (1-p)\beta_1\Lambda + b_2\mu + b_1\mu\right] \\
&\quad + \lambda\left[-b_3(1-p)\beta_1\Lambda + b_3b_2\mu - r((1-q)\beta_2\Lambda + \xi_2\mu) + b_1(\mu b_3 - (1-p)\beta_1\Lambda + b_2\mu) - \varepsilon p\beta_1\Lambda\right] \\
&\quad - b_1b_3(1-p)\beta_1\Lambda + b_1b_2b_3\mu - rb_1((1-q)\beta_2\Lambda + \xi_2\mu) - \varepsilon p\beta_1\Lambda b_3 - \varepsilon rq\beta_2\Lambda - \varepsilon r\xi_1\mu \\
0 &= \lambda^3\mu + \lambda^2\left[\mu(b_1+b_2+b_3) - (1-p)\beta_1\Lambda\right] \\
&\quad + \lambda\left[-b_3(1-p)\beta_1\Lambda + b_3b_2\mu - r(1-q)\beta_2\Lambda - r\xi_2\mu + b_1\mu b_3 - b_1(1-p)\beta_1\Lambda + b_1b_2\mu - \varepsilon p\beta_1\Lambda\right] \\
&\quad + b_1b_3\beta_1(1-p)\Lambda + b_1b_2b_3\mu - rb_1(1-q)\beta_2\Lambda - rb_1\xi_2\mu - \varepsilon p\beta_1\Lambda b_3 - \varepsilon rq\beta_2\Lambda - \varepsilon r\xi_1\mu \\
0 &= \lambda^3\mu + \lambda^2\left[\mu(b_1+b_2+b_3) - (1-p)\beta_1\Lambda\right] \\
&\quad + \lambda\left[(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1)\mu - (1-p)\beta_1\Lambda(b_3+b_1) - r(1-q)\beta_2\Lambda - r\xi_2\mu - \varepsilon p\beta_1\Lambda\right] \\
&\quad + \mu b_1b_2b_3 - \beta_1\Lambda b_3(b_1(1-p) + \varepsilon p) - r\beta_2\Lambda(b_1(1-q) + \varepsilon q) - \mu r(b_1\xi_2 + \varepsilon\xi_1)
\end{aligned}
$$

reemplazando L_1 y L_2

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda^3\mu + \lambda^2\left[\mu(b_1+b_2+b_3) - (1-p)\beta_1\Lambda\right] \\
&\quad + \lambda\left[(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1)\mu - (1-p)\beta_1\Lambda(b_3+b_1) - r(1-q)\beta_2\Lambda - r\xi_2\mu - \varepsilon p\beta_1\Lambda\right] \\
&\quad + \mu b_1b_2b_3 - \beta_1\Lambda b_3L_1 - r\beta_2\Lambda L_2 - \mu r(b_1\xi_2 + \varepsilon\xi_1) \qquad (3.95)
\end{aligned}
$$

se tiene la ecuación respecto a λ después de reemplazar 3.76;

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda^3 + \lambda^2\left(b_1+b_2+b_3 - (1-p)\beta_1\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \lambda\left(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - \frac{\bar{R}_{02}}{\mu} - r\xi_2 - \beta_1L_1\frac{\Lambda}{\mu}\right) \\
&\quad + \theta^*(1-\bar{R}_0)
\end{aligned}
$$

y los coeficientes de $\lambda^3 + \bar{a}_1\lambda^2 + \bar{a}_2\lambda + \bar{a}_3$ son:

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= b_1+b_2+b_3 - (1-p)\beta_1\frac{\Lambda}{\mu} \\
\bar{a}_2 &= b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - \frac{\bar{R}_{02}}{\mu} - r\xi_2 - \beta_1L_1\frac{\Lambda}{\mu} \\
\bar{a}_3 &= \theta^*(1-\bar{R}_0)
\end{aligned}
$$

Luego los coeficientes son positivos cuando se tiene lo siguiente:

- $\bar{a}_1$ es positivo al ser $b_1+b_2+b_3 > (1-p)\beta_1\dfrac{\Lambda}{\mu}$

- $\bar{a}_2$ es positivo cuando $b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 > \dfrac{\bar{R}_{02}}{\mu} + r\xi_2 + \beta_1 L_1 \dfrac{\Lambda}{\mu}$

donde; $\bar{R}_{02} = \Lambda(\beta_1 b_3(1-p) + \beta_2 r(1-q))$.
Usaremos el criterio de Routh-Hurwitz (Anderson y cols., 1987) para saber si todos los autovalores tienen parte real negativa.
La expresión $\lambda^3 + \bar{a}_1\lambda^2 + \bar{a}_2\lambda + \bar{a}_3$, tendrá solución según Routh-Hurwitz si se cumple que $\bar{a}_1 > 0$, $\bar{a}_3 > 0$ (ya se cumple porque estamos en el caso del punto libre de infección) y que $\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_3 > 0$.

□

3.14.2. Estabilidad local de $\bar{E}^*$

En esta sección se procede a analizar la estabilidad local del punto de equilibrio endémico

$$\bar{E}^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$$

para el modelo SIIJA perturbado descrito por el sistema (3.48)-(3.52). Para ello, se emplea la matriz Jacobiana evaluada en $\bar{E}^*$ como herramienta fundamental para determinar el comportamiento dinámico en torno a este punto.

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2^*}{m+I_2^*}\right) I_2^* - \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J^*}{m+J^*}\right) J^* - \mu & 0 & -S^*\left(\beta_1 - \beta_1' I_2^* \phi_1^*\right) & -S^*(\beta_2 - \beta_2' J^* \phi_2^*) & 0 \\ p\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2^*}{m+I_2^*}\right) I_2^* + q\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J^*}{m+J^*}\right) J^* & -b_1 & pS^*\left(\beta_1 - \beta_1' I_2^* \phi_1^*\right) & qS^*(\beta_2 - \beta_2' J^* \phi_2^*) + \xi_1 & 0 \\ (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2^*}{m+I_2^*}\right) I_2^* + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J^*}{m+J^*}\right) J^* & \varepsilon & (1-p)S^*\left(\beta_1 - I_2^* \beta_1' \phi_1^*\right) - b_2 & (1-q)S^*(\beta_2 - J^* \beta_2' \phi_2^*) + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4 \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

para manejar los cálculos en el análisis del punto de equilibrio endémico se considera:

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= \left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2^*}{m+I_2^*}\right) I_2^* + \left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J^*}{m+J^*}\right) J^* \\ \bar{B}_2 &= p\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2^*}{m+I_2^*}\right) I_2^* + q\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J^*}{m+J^*}\right) J^* \\ \bar{C}_2 &= (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1' \frac{I_2^*}{m+I_2^*}\right) I_2^* + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2' \frac{J^*}{m+J^*}\right) J^* \\ \bar{D}_2 &= S^* \bar{\phi}_1^* \\ \bar{G}_2 &= S^* \bar{\phi}_2^* \end{aligned}$$

reemplazando en la matriz se tiene:

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\bar{A}_2 - \mu & 0 & -\bar{D}_2 & -\bar{G}_2 & 0 \\ \bar{B}_2 & -b_1 & p\bar{D}_2 & q\bar{G}_2 + \xi_1 & 0 \\ \bar{C}_2 & \varepsilon & (1-p)\bar{D}_2 - b_2 & (1-q)\bar{G}_2 + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4 \end{pmatrix}, \tag{3.97}$$

donde:

$$\bar{\phi}_1^* = \beta_1 - \beta_1' + \beta_1' \frac{m^2}{(m+I_2^*)^2} \qquad , \qquad \bar{\phi}_2^* = \beta_2 - \beta_2' + \beta_2' \frac{m^2}{(m+J^*)^2}$$

Como $\beta_1 - \beta_1^{'} > 0$, se garantiza que $\bar{\phi}_1^*$ y $\bar{\phi}_2^*$ son positivos, lo que implica que $\bar{D}_2 > 0$ y $\bar{G}_2 > 0$. De igual manera, dado que $\beta_1(I_2^*)$ y $\beta_2(J^*)$ son positivos, se sigue que $\bar{A}_2 > 0$, $\bar{B}_2 > 0$ y $\bar{C}_2 > 0$.

Los autovalores del sistema se obtienen posteriormente de

$$|J(E^*) - \lambda I| = 0,$$

la cual permite analizar la estabilidad local alrededor del punto de equilibrio endémico.

$$|J(E^*) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\bar{A}_2 - \lambda & 0 & -\bar{D}_2 & -\bar{G}_2 & 0 \\ \bar{B}_2 & -b_1 - \lambda & p\bar{D}_2 & q\bar{G}_2 + \xi_1 & 0 \\ \bar{C}_2 & \varepsilon & (1-p)\bar{D}_2 - b_2 - \lambda & (1-q)\bar{G}_2 + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{3.98}$$

$$|J(E^*) - \lambda I| = (-b_4 - \lambda) \begin{vmatrix} -\bar{A}_2 - \lambda & 0 & -\bar{D}_2 & -\bar{G}_2 \\ \bar{B}_2 & -b_1 - \lambda & p\bar{D}_2 & q\bar{G}_2 + \xi_1 \\ \bar{C}_2 & \varepsilon & (1-p)\bar{D}_2 - b_2 - \lambda & (1-q)\bar{G}_2 + \xi_2 \\ 0 & 0 & r & -b_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.99}$$

$$(-b_4 - \lambda) \left[(-b_3 - \lambda) \begin{vmatrix} -\bar{A}_2 - \lambda & 0 & -\bar{D}_2 \\ \bar{B}_2 & -b_1 - \lambda & p\bar{D}_2 \\ \bar{C}_2 & \varepsilon & (1-p)\bar{D}_2 - b_2 - \lambda \end{vmatrix} - r \begin{vmatrix} -\bar{A}_2 - \lambda & 0 & -\bar{G}_2 \\ \bar{B}_2 & -b_1 - \lambda & q\bar{G}_2 + \xi_1 \\ \bar{C}_2 & \varepsilon & (1-q)\bar{G}_2 + \xi_2 \end{vmatrix} \right] = 0$$

luego un autovalor $\lambda = -b_4$ y el otro factor esta dado por;

$$\begin{aligned} &(b_3 + \lambda) \left[(-\bar{A}_2 - \lambda) \begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & p\bar{D}_2 \\ \varepsilon & (1-p)\bar{D}_2 - b_2 - \lambda \end{vmatrix} - \bar{D}_2 \begin{vmatrix} \bar{B}_2 & -b_1 - \lambda \\ \bar{C}_2 & \varepsilon \end{vmatrix} \right] \\ &+ r \left[(-\bar{A}_2 - \lambda) \begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & q\bar{G}_2 + \xi_1 \\ \varepsilon & (1-q)\bar{G}_2 + \xi_2 \end{vmatrix} - \bar{G}_2 \begin{vmatrix} \bar{B}_2 & -b_1 - \lambda \\ \bar{C}_2 & \varepsilon \end{vmatrix} \right] = 0 \end{aligned}$$

se procede a calcular los determinantes,

$$\begin{aligned} &(\lambda + b_3) \left[(-\bar{A}_2 - \lambda) \left((-b_1 - \lambda) \left((1-p)\bar{D}_2 - b_2 - \lambda \right) - \varepsilon p \bar{D}_2 \right) - \bar{D}_2 \left(\bar{B}_2 \varepsilon + (b_1 + \lambda)\bar{C}_2 \right) \right] \\ &+ r \left[(-\bar{A}_2 - \lambda) \left((-b_1 - \lambda) \left((1-q)\bar{G}_2 + \xi_2 \right) - \varepsilon (q\bar{G}_2 + \xi_1) \right) - \bar{G}_2 (\bar{B}_2 \varepsilon + \bar{C}_2 (b_1 + \lambda)) \right] = 0 \end{aligned}$$

reduciendo y asociando los términos semejantes se obtiene la siguiente expresión:

$$\lambda^4 + \bar{c}_1 \lambda^3 + \bar{c}_2 \lambda^2 + \bar{c}_3 \lambda + \bar{c}_4 = 0 \tag{3.100}$$

con los coeficientes c_i (donde $i = 1, 2, 3, 4$) dados por:

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= b_1 + b_2 + b_3 + \bar{A}_2 + \mu - (1-p)\bar{D}_2 \\ \bar{c}_2 &= b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3 + (\bar{A}_2 + \mu) \left(b_1 + b_2 + b_3 - \bar{D}_2 (1-p) \right) + \bar{D}_2 \bar{C}_2 \\ &\quad - ((\bar{D}_2 b_3 (1-p) + \bar{G}_2 r (1-q)) + r\xi_2 + \bar{D}_2 ((1-p)\mu + \epsilon)) \\ \bar{c}_3 &= (\bar{A}_2 + \mu) \left(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - (\bar{D}_2 b_3 (1-p) + \bar{G}_2 r (1-q)) - r\xi_2 - \bar{D}_2 (\epsilon + \mu(1-p)) \right) \\ &\quad + b_1 b_2 b_3 - r(\epsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) - b_1 (\bar{D}_2 b_3 (1-p) + \bar{G}_2 r (1-q)) - \epsilon (\bar{D}_2 b_3 p + \bar{G}_2 r q) \\ &\quad + C_2 (D_2 b_3 + G_2 r) + D_2 (B_2 \epsilon + C_2 b_1) \\ \bar{c}_4 &= -(\bar{A}_2 + \mu)(b_1 b_2 b_3 - r(b_1 \xi_2 + \epsilon \xi_1) - b_1 (\bar{D}_2 b_3 (1-p) + \bar{G}_2 r (1-q)) - \epsilon (\bar{D}_2 b_3 p + \bar{G}_2 r q)) \\ &\quad + (\bar{D}_2 b_3 + \bar{G}_2 r)(\bar{C}_2 b_1 + \bar{B}_2 \epsilon) \end{aligned}$$

donde c_1 es positivo y denotando como $\bar{R}_{01} = \varepsilon(\bar{D}_2 b_3 + \bar{G}_2 r)$, $\bar{R}_{02} = \mu(\bar{D}_2 b_3(1-p) + \bar{G}_2 r(1-q))$ y

$$\bar{R}_0^* = \frac{\bar{R}_{01} + \bar{R}_{02}}{\theta^*} \tag{3.101}$$

además:

$$\bar{R}_0^* = \frac{\mu}{\bar{A}_2 + \mu}(\bar{R}_0 - (\bar{R}_1 - \bar{\varpi}_3)) \tag{3.102}$$

donde; $1 < \bar{R}_1 - \bar{\varpi}_3$, con

$$\bar{\varpi}_3 = \bar{D}_2 b_3(1-p) + \bar{G}_2 r(1-q), \tag{3.103}$$

$$\bar{R}_1 - \bar{\varpi}_3 = \frac{\Lambda\left[\varepsilon\left(\frac{\beta_1' b_3 I_2^*(2m+I_2^*)}{(m+I_2)^2} + \frac{\beta_1' r J^*(2m+J^*)}{(m+J)^2}\right) + \mu\left(\frac{\beta_1' b_3(1-p) I_2^*(2m+I_2^*)}{(m+I_2)^2} + \frac{\beta_2' r(1-q) J^*(2m+J^*)}{(m+J)^2}\right)\right]}{\mu\theta}$$

se reducen los coeficientes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1 &= b_1 + b_2 + b_3 + \bar{A}_2 + \mu - (1-p)\bar{D}_2 \\
\bar{c}_2 &= b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3 + (\bar{A}_2 + \mu)(b_1 + b_2 + b_3) + \bar{D}_2 \bar{C}_2 - (\bar{A}_2 + \mu)\bar{D}_2(1-p) \\
&\quad - (\frac{\bar{R}_{02}}{\mu} + r\xi_2 + \bar{D}_2 L_1) \\
\bar{c}_3 &= (\bar{A}_2 + \mu)\left(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - \frac{\bar{R}_{02}}{\mu} - r\xi_2 - D_2 L_1\right) + \theta(1 - \bar{R}_0^*) \\
&\quad + \bar{C}_2 \frac{\bar{R}_{01}}{\varepsilon} + \bar{D}_2(\bar{A}_2\epsilon + \bar{C}_2\mu) \\
\bar{c}_4 &= \theta^*(\bar{A}_2 + \mu)(1 - \bar{R}_0^*) + \frac{\bar{R}_{01}}{\varepsilon}(\bar{A}_2\varepsilon + \bar{C}_2\mu)
\end{aligned}$$

luego $\bar{c}_4$ será positivo dado que, $1 - \bar{R}_0^* > 0$; entonces

$$0 < 1 - \frac{\mu}{\bar{A}_2 + \mu}(\bar{R}_0 - (\bar{R}_1 - \bar{\varpi}_3)) \tag{3.104}$$

$$0 < \frac{\mu}{\bar{A}_2 + \mu}(\bar{R}_0 - (\bar{R}_1 - \bar{\varpi}_3)) < 1 \tag{3.105}$$

$$0 < \mu(\bar{R}_0 - (\bar{R}_1 - \bar{\varpi}_3)) < \bar{A}_2 + \mu \tag{3.106}$$

$$1 < \bar{R}_1 - \bar{\varpi}_3 < \bar{R}_0 < \frac{\bar{A}_2}{\mu} + 1 + (\bar{R}_1 - \varpi_3) \tag{3.107}$$

Por consiguiente, $1 < \bar{R}_0$.
Para analizar la estabilidad de las soluciones del sistema, se recurre al criterio de Routh-Hurwitz (Anderson y cols., 1987), que permite identificar las condiciones bajo las cuales todos los autovalores presentan parte real negativa. De la ecuación (3.100) se obtiene directamente $\lambda_1 = -b_4$, mientras que las demás raíces se determinan resolviendo el polinomio de cuarto grado

$$\lambda^4 + \bar{c}_1\lambda^3 + \bar{c}_2\lambda^2 + \bar{c}_3\lambda + \bar{c}_4 = 0.$$

Según el criterio de Routh-Hurwitz, las raíces poseen parte real negativa si se satisfacen las siguientes condiciones: $\bar{c}_1 > 0$, $\bar{c}_3 > 0$, $\bar{c}_4 > 0$, $\bar{c}_1\bar{c}_2 - \bar{c}_3 > 0$ y $\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3 - \bar{c}_3^2 - \bar{c}_1^2\bar{c}_4 > 0$. Se destaca que $\bar{c}_4$ es positivo dado que $1 - \bar{R}_0^* > 0$, garantizando así que se cumplen las condiciones necesarias para la estabilidad.

Se introduce entonces la siguiente notación:

$$\bar{M}_2 = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \bar{A}_2 + \mu}{(1-p)\bar{D}_2}$$

$$\bar{N}_2 = \frac{\mu(b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3 + (\bar{A}_2 + \mu)(b_1 + b_2 + b_3) + \bar{D}_2\bar{C}_2)}{\bar{R}_{02} + \mu r\xi_2 + \mu\bar{D}_2L_1 + \mu\bar{D}_2(1-p)(\bar{A}_2 + \mu)}$$

$$\bar{P}_2 = \frac{\mu\varepsilon(\bar{A}_2 + \mu)(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) + \mu\bar{C}_2\bar{R}^*_{01} + \mu\varepsilon\bar{D}_2(\bar{A}_2\varepsilon + \bar{C}_2\mu) + \varepsilon\mu\theta^*(1 - \bar{R}^*_0)}{\varepsilon(\bar{R}^*_{02} + \mu r\xi_2 + \mu\bar{D}_2L_1)(\bar{A}_2 + \mu)}$$

$$\bar{T}_2 = \frac{(\bar{M}_2 - 1)(\bar{N}_2 - 1)(1-p)\bar{D}_2\left(\frac{\bar{R}^*_{02}}{\mu} + r\xi_2 + \bar{D}_2L_1 + (\bar{A}_2 + \mu)\bar{D}_2(1-p)\right)}{(\bar{P}_2 - 1)(\bar{A}_2 + \mu)\left(\frac{\bar{R}^*_{02}}{\mu} + r\xi_2 + \bar{D}_2L_1\right)}$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{(\bar{M}_2 - 1)(\bar{N}_2 - 1)(\bar{P}_2 - 1)(1-p)\bar{D}_2(\bar{A}_2 + \mu)\left(\frac{\bar{R}^*_{02}}{\mu} + r\xi_2 + \bar{D}_2L_1\right)\left(\frac{\bar{R}^*_{02}}{\mu} + r\xi_2 + \bar{D}_2L_1 + (\bar{A}_2 + \mu)\bar{D}_2(1-p)\right)}{(\bar{P}_2 - 1)^2(\bar{A}_2 + \mu)^2\left(\frac{\bar{R}^*_{02}}{\mu} + r\xi_2 + \bar{D}_2L_1\right)^2 + (\bar{M}_2 - 1)^2(1-p)^2\bar{D}_2^2\left(\theta^*(\bar{A}_2 + \mu)(1 - R^*_0) + \frac{\bar{R}^*_{01}}{\varepsilon}(\bar{A}_2\varepsilon + \bar{C}_2\mu)\right)}$$

En consecuencia, de forma análoga que el modelo del capítulo 3 se plantea el siguiente teorema:

Teorema 3.14.2. *Sea el sistema (3.48)–(3.52). Este admite un punto de equilibrio endémico $\bar{E}^*$ siempre que se cumpla la condición $\bar{R}_0 > 1$. Además, dicho equilibrio es local y asintóticamente estable si se satisfacen simultáneamente las desigualdades $\bar{M}_2 > 1$, $\bar{N}_2 > 1$, $\bar{P}_2 > 1$, $\bar{T}_2 > 1$ y $\bar{Q}_2 > 1$.*

3.14.3. Estabilidad global de E_0

En esta sección se analiza la estabilidad global usando el siguiente teorema:

Teorema 3.14.3. *El estado de equilibrio libre de infección E_0 del modelo SIIJA perturbado es global y asintóticamente estable si $\bar{R}_0 < 1$.*

Demostración. Para esta demostración vamos a construir una funcional de Lyapunov tomando como referencia la investigación de (Yusuf, 2021) en la cual presenta un algoritmo que nos será de utilidad para establecer la estabilidad global del estado de equilibrio libre de enfermedad.
Sea la función de Lyapunov ν de la siguiente forma:

$$\nu(t, S, I_1, I_2, J, A) = C_1I_1 + C_2I_2 + C_3J + C_4A$$

con C_1, C_2, C_3 y C_4 son las constantes que debemos encontrar.
La derivada de ν con respecto a t esta dado por

$$\begin{aligned}\frac{d\nu}{dt} &= C_1\left(p\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{I_2}{m + I_2}\right)I_2S + q\left(\beta_2 - \beta_2'\frac{J}{m + J}\right)JS - b_1I_1 + \xi_1J\right)\\ &+ C_2\left((1-p)\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{I_2}{m + I_2}\right)I_2S + (1-q)(\beta_2 - \beta_2'\frac{J}{m + J})JS + \varepsilon I_1 - b_2I_2 + \xi_2J\right)\\ &+ C_3(rI_2 - b_3J) + C_4(\rho J + \delta I_2 - b_4A)\end{aligned}$$

Siguiendo el algoritmos de (Yusuf, 2021) sustituimos el valor de la variable del equilibrio libre de enfermedad para cada uno de los compartimentos no infectados de la expresión anterior; es decir de $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0)$ reemplazamos $S = \frac{\Lambda}{\mu}$.

$$\begin{aligned}\frac{d\nu}{dt} &\leq C_1\left(p\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{I_2}{m + I_2}\right)I_2\frac{\Lambda}{\mu} + q\left(\beta_2 - \beta_2'\frac{J}{m + J}\right)J\frac{\Lambda}{\mu} - b_1I_1 + \xi_1J\right)\\ &+ C_2\left((1-p)\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{I_2}{m + I_2}\right)I_2\frac{\Lambda}{\mu} + (1-q)(\beta_2 - \beta_2'\frac{J}{m + J})J\frac{\Lambda}{\mu} + \varepsilon I_1 - b_2I_2 + \xi_2J\right)\\ &+ C_3(rI_2 - b_3J) + C_4(\rho J + \delta I_2 - b_4A)\end{aligned}$$

Luego quitamos algunos términos negativos para mayorar.

$$\begin{aligned}\frac{d\nu}{dt} &\leq C_1\left(p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 JS - b_1 I_1 + \xi_1 J\right)\\ &+ C_2\left((1-p)\beta_1 I_2 S + (1-q)\beta_2 JS + \varepsilon I_1 - b_2 I_2 + \xi_2 J\right)\\ &+ C_3(rI_2 - b_3 J) + C_4(\rho J + \delta I_2 - b_4 A)\\ &\leq (C_2\varepsilon - C_1 b_1)I_1 + \left(\beta_1\frac{\Lambda}{\mu}(C_1 p + C_2(1-p)) - b_2 C_2 + C_3 r + C_4\delta\right) I_2\\ &+ \left(\beta_2\frac{\Lambda}{\mu}(C_1 q + C_2(1-q)) + C_1\xi_1 + C_2\xi_2 - C_3 b_3 + C_4\rho\right) J - C_4 b_4 A\end{aligned}$$

se sustituyen $C_1 = \varepsilon$, $C_2 = C_4 = b_1$ y $C_3 = 1$ en la desigualdad

$$\begin{aligned}\frac{d\nu}{dt} &\leq (\cancel{b_1\varepsilon} - \cancel{\varepsilon b_1})I_1 + \left(\beta_1\frac{\Lambda}{\mu}(\varepsilon p + b_1(1-p)) - b_2 b_1 + r + b_1\delta\right) I_2\\ &+ \left(\beta_2\frac{\Lambda}{\mu}(\varepsilon q + b_1(1-q)) + \varepsilon\xi_1 + b_1\xi_2 - b_3 + b_1\rho\right) J - b_1 b_4 A\end{aligned}$$

A e I_2 los expresamos en función de J y reducimos

$$\begin{aligned}\frac{d\nu}{dt} &\leq \left(\beta_1\frac{\Lambda}{\mu}L_1 - b_2 b_1 + r + b_1\delta\right)\frac{b_3 J}{r} + \left(\beta_2\frac{\Lambda}{\mu}L_2 + \varepsilon\xi_1 + b_1\xi_2 - b_3 + b_1\rho\right) J - b_1\cancel{b_4}\frac{(r\rho + b_3\delta)J}{\cancel{b_4} r}\\ &\leq J\left(\frac{\beta_1\Lambda b_3 L_1}{\mu r} + \cancel{b_3} + \frac{b_1 b_3\delta}{r} - \frac{b_1 b_2 b_3}{r} + \frac{\beta_2\Lambda L_2}{\mu} + \varepsilon\xi_1 + b_1\xi_2 + b_1\rho - \cancel{b_3} - \frac{b_1(r\rho + b_3\delta)}{r}\right)\\ &\leq J\left(\frac{\Lambda}{r\mu}(b_3\beta_1 L_1 + \beta_2 r L_2) + \cancel{\frac{b_1 b_3\delta}{r}} - \frac{b_1 b_2 b_3}{r} + \varepsilon\xi_1 + b_1\xi_2 + \cancel{b_1\rho} - \cancel{b_1\rho} - \cancel{\frac{b_1 b_3\delta}{r}}\right)\\ &\leq J(\frac{1}{r}\bar{R}_0\theta^* - \frac{b_1 b_2 b_3}{r} + \varepsilon\xi_1 + b_1\xi_2)\\ &\leq \frac{J}{r}(\bar{R}_0\theta^* - \theta^*)\\ &\leq \frac{J\theta^*}{r}(\bar{R}_0 - 1) \leq 0 \quad \text{si} \quad \bar{R}_0 < 1\end{aligned}$$

Con base en la desigualdad, cabe destacar que $\frac{d\nu}{dt} = 0$ solo cuando $J = 0$. Además, la sustitución de $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, $J = 0$ y $A = 0$ en el sistema de ecuaciones del modelo hacen que $S \longrightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, E_0 es globalmente asintóticamente estable siempre que $\bar{R}_0 < 1$, basado en el principio de invariancia de LaSalle (LaSalle, 1960). □

3.14.4. Estabilidad global de $\bar{E}^*$

En la presente sección se proporciona el estudio de la estabilidad global del punto de equilibrio $\bar{E}^*$ mediante la construcción de una función de Lyapunov adecuada. Esta función debe cumplir propiedades específicas que permitan determinar las constantes aún no especificadas en su formulación. El siguiente teorema formaliza los resultados obtenidos:

Teorema 3.14.4. *Si $\bar{R}_0 > 1$, entonces el estado de equilibrio endémico es global asintóticamente estable.*

Demostración. Sean $\bar{S}^*$, $\bar{I}_1^*$, $\bar{I}_2^*$, $\bar{J}^*$ y $\bar{A}^*$ que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S - \left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS - \mu S =& 0 \\
p\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + q\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS - b_1 I_1 + \xi_1 J =& 0 \\
(1-p)\left(\beta_1 - \beta_1^{'}\frac{I_2}{m+I_2}\right) I_2 S + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2^{'}\frac{J}{m+J}\right) JS + \varepsilon I_1 - b_2 I_2 + \xi_2 J =& 0 \\
rI_2 - b_3 J =& 0 \\
\rho J + \delta I_2 - b_4 A =& 0
\end{aligned}$$

se denota como $x = \dfrac{S}{\bar{S}^*}$, $y = \dfrac{I_1}{\bar{I}_1^*}$, $z = \dfrac{I_2}{\bar{I}_2^*}$, $u = \dfrac{J}{\bar{J}^*}$ y $v = \dfrac{A}{\bar{A}^*}$

luego derivando

$$\begin{aligned}
x' =& x\left[\frac{\Lambda}{\bar{S}^*}\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \beta_1 \bar{I}_2^*\left(\frac{z\beta_1(I_2)}{\beta_1(\bar{I}_2^*)} - 1\right) + \beta_1^{'}\frac{I_2^*}{m+\bar{I}_2^*}\bar{I}_2^*\left(\frac{z\beta_1(I_2)}{\beta_1(\bar{I}_2^*)} - 1\right)\right. \\
& \left. - \beta_2 \bar{J}^*\left(\frac{u\beta_2(J)}{\beta_2(\bar{J}^*)} - 1\right) + \beta_2^{'}\frac{\bar{J}^*}{m+\bar{J}^*}\bar{J}^*\left(\frac{u\beta_2(J)}{\beta_2(\bar{J}^*)} - 1\right)\right] \\
y' =& y\left[\frac{p\beta_1(\bar{I}_2^*)\bar{I}_2^*\bar{S}^*}{I_1^*}\left(zx\frac{1}{y}\frac{\beta_1(I_2)}{\beta_1(\bar{I}_2^*)} - 1\right) + \frac{q\beta_2(\bar{J}^*)\bar{J}^*\bar{S}^*}{\bar{I}_1^*}\left(ux\frac{1}{y}\frac{\beta_2(J)}{\beta_2(\bar{J}^*)} - 1\right)\right. \\
& \left. + \xi_1\frac{\bar{J}^*}{\bar{I}_1^*}\left(u\frac{1}{y} - 1\right)\right] \\
z' =& z\left[(1-p)S^*\beta_1(\bar{I}_2^*)\left(x\frac{\beta_1(I_2)}{\beta_1(\bar{I}_2^*)} - 1\right) + \frac{(1-q)\beta_2(\bar{J}^*)\bar{J}^*\bar{S}^*}{\bar{I}_2^*}\left(ux\frac{1}{z} - 1\right)\right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon\bar{I}_1^*}{\bar{I}_2^*}\left(y\frac{1}{z} - 1\right) + \xi_2\frac{J^*}{\bar{I}_2^*}\left(u\frac{1}{z} - 1\right)\right] \\
u' =& u\left[\frac{r\bar{I}_2^*}{\bar{J}^*}\left(\frac{1}{u}z - 1\right)\right] \\
v' =& v\left[\frac{\rho\bar{J}^*}{\bar{A}^*}\left(u\frac{1}{v} - 1\right) + \frac{\delta\bar{I}_2^*}{A}\left(z\frac{1}{v} - 1\right)\right]
\end{aligned}$$

Para el modelo, se considera la función de Lyapunov como se indica en el artículo de Korobeinikov y Maini (Korobeinikov y Maini, 2004) del tipo Volterra para cada compartimiento de infección dado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
V(S, I_1, I_2, J, A) =& \left(S - \bar{S}^*\int_1^S \frac{d\tau}{\tau}\right) + \left(I_1 - \bar{I}_1^*\int_1^{I_1}\frac{d\tau}{\tau}\right) + \left(I_2 - \bar{I}_2^*\int_1^{I_2}\frac{d\tau}{\tau}\right) \\
& + \left(J - J^*\int_1^J \frac{d\tau}{\tau}\right) + \left(A - \bar{A}^*\int_1^A \frac{d\tau}{\tau}\right) \\
=& (S - \bar{S}^*(\ln\tau)_1^S) + \left(I_1 - \bar{I}_1^*(\ln\tau)_1^{I_1}\right) + \left(I_2 - \bar{I}_2^*(\ln\tau)_1^{I_2}\right) + \left(J - \bar{J}^*(\ln\tau)_1^J\right) \\
& + \left(A - \bar{A}^*(\ln\tau)_1^A\right) \\
=& (S - \bar{S}^*\ln S) + \left(I_1 - \bar{I}_1^*\ln I_1\right) + \left(I_2 - \bar{I}_2^*\ln I_2\right) + \left(J - \bar{J}^*\ln J\right) + \left(A - \bar{A}^*\ln A\right)
\end{aligned}$$

Ahora se deriva V respecto a t:

$$V' = \left(S' - \bar{S}^*\frac{S'}{S}\right) + \left(I' - \bar{I}_1^*\frac{I_1'}{I_1}\right) + \left(I_2' - \bar{I}_2^*\frac{I_2'}{I_2}\right) + \left(J' - \bar{J}^*\frac{J'}{J}\right) + \left(A' - \bar{A}^*\frac{A'}{A}\right)$$

factorizando se llega a:

$$\begin{aligned}V' =& S'\left(1-\frac{\bar{S}^*}{S}\right)+I_1'\left(1-\frac{\bar{I}_1^*}{I_1}\right)+I_2'\left(1-\frac{\bar{I}_2^*}{I_2}\right)+J'\left(1-\frac{\bar{J}^*}{J}\right)+A'\left(1-\frac{\bar{A}^*}{A}\right)\\ =& \bar{S}^*\left(\frac{x-1}{x}\right)x'+\bar{I}_1^*\left(\frac{y-1}{y}\right)y'+\bar{I}_2^*\left(\frac{z-1}{z}\right)z'+\bar{J}^*\left(\frac{u-1}{u}\right)u'+\bar{A}^*\left(\frac{v-1}{v}\right)v'\end{aligned}$$

reemplazando x', y', z', u' y v' en V'

$$\begin{aligned}V' =& \bar{S}^*\left(\frac{x-1}{\not{x}}\right)\not{x}\Bigg[\frac{\Lambda}{\bar{S}^*}\left(\frac{1}{x}-1\right)-\beta_1\bar{I}_2^*\left(\frac{z\beta_1(I_2)}{\beta_1(\bar{I}_2^*)}-1\right)+\beta_1'\frac{\bar{I}_2^*}{m+\bar{I}_2^*}\bar{I}_2^*\left(\frac{z\beta_1(I_2)}{\beta_1(\bar{I}_2^*)}-1\right)\\ &-\beta_2\bar{J}^*\left(\frac{u\beta_2(J)}{\beta_2(\bar{J}^*)}-1\right)+\beta_2'\frac{\bar{J}^*}{m+\bar{J}^*}\bar{J}^*\left(\frac{u\beta_2(J)}{\beta_2(\bar{J}^*)}-1\right)\Bigg]+\bar{I}_1^*\left(\frac{y-1}{\not{y}}\right)\not{y}\\ &\left[\frac{p\beta_1(\bar{I}_2^*)\bar{I}_2^*\bar{S}^*}{\bar{I}_1^*}\left(zx\frac{1}{y}\frac{\beta_1(I_2)}{\beta_1(\bar{I}_2^*)}-1\right)+\frac{q\beta_2(\bar{J}^*)\bar{J}^*\bar{S}^*}{\bar{I}_1^*}\left(ux\frac{1}{y}\frac{\beta_2(J)}{\beta_2(\bar{J}^*)}-1\right)+\xi_1\frac{\bar{J}^*}{\bar{I}_1^*}\left(u\frac{1}{y}-1\right)\right]\\ &+\bar{I}_2^*\left(\frac{z-1}{\not{z}}\right)\not{z}\Bigg[(1-p)\bar{S}^*\beta_1(\bar{I}_2^*)\left(x\frac{\beta_1(I_2)}{\beta_1(\bar{I}_2^*)}-1\right)+\frac{(1-q)\beta_2(\bar{J}^*)\bar{J}^*\bar{S}^*}{\bar{I}_2^*}\left(ux\frac{1}{z}-1\right)\\ &+\frac{\varepsilon\bar{I}_1^*}{\bar{I}_2^*}\left(y\frac{1}{z}-1\right)+\xi_2\frac{\bar{J}^*}{\bar{I}_2^*}\left(u\frac{1}{z}-1\right)\Bigg]+\bar{J}^*\left(\frac{u-1}{\not{u}}\right)\not{u}\left[\frac{r\bar{I}_2^*}{\bar{J}^*}\left(\frac{1}{u}z-1\right)\right]+\bar{A}^*\left(\frac{v-1}{\not{v}}\right)\not{v}\\ &\left[\frac{\rho\bar{J}^*}{\bar{A}^*}\left(u\frac{1}{v}-1\right)+\frac{\delta\bar{I}_2^*}{A}\left(z\frac{1}{v}-1\right)\right]\end{aligned}$$

Luego se tiene;

$$\begin{aligned}V' =& (x-1)\left[\Lambda\left(\frac{1}{x}-1\right)-\beta_1\bar{S}^*\bar{I}_2^*(z-1)-\beta_2\bar{S}^*\bar{J}^*(u-1)+\frac{\beta_1'\bar{S}^*(\bar{I}_2^*)^2}{m+\bar{I}_2^*}\left(z^2\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}-1\right)\right.\\ &\left.+\frac{\beta_2'\bar{S}^*(\bar{J}^*)^2}{m+\bar{J}^*}\left(u^2\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}-1\right)\right]+(y-1)\left[p\bar{I}_2^*\bar{S}^*\beta_1\left(zx\frac{1}{y}-1\right)+q\bar{J}^*\bar{S}^*\beta_2\left(ux\frac{1}{y}-1\right)\right.\\ &\left.-\frac{p(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\beta_1'\left(z^2x\frac{1}{y}\left(\frac{m+\bar{I}_2^2}{m+I_2}\right)-1\right)-\frac{q\bar{J}^*\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\beta_2'(u^2x\frac{1}{y}\left(\frac{m+\bar{J}^*}{m+\bar{J}^*}\right)-1)+\xi_1\bar{J}^*\left(u\frac{1}{y}-1\right)\right]\\ &+(z-1)\left[(1-p)\bar{S}^*\beta_1\left(x-1\right)\bar{I}_2^*-(1-p)\beta_1'\frac{\bar{I}_2^*}{m+\bar{I}_2^*}\bar{S}^*\left(zx\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}-1\right)\right.\\ &+(1-q)\beta_2\bar{J}^*\bar{S}^*\left(xu\frac{1}{z}-1\right)-(1-q)\beta_2\frac{(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\left(u^2x\left(\frac{1}{z}\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}\right)-1\right)\Bigg]\\ &+\varepsilon\bar{I}_1^*\left(y\frac{1}{z}-1\right)+\xi_2\bar{J}^*\left(u\frac{1}{z}-1\right)+(u-1)\left[r\bar{I}_2^*(\frac{1}{u}z-1)\right]+(v-1)\left[\rho\bar{J}^*\left(u\frac{1}{v}-1\right)\right.\\ &\left.+\delta\bar{I}_2^*\left(z\frac{1}{v}-1\right)\right]\end{aligned}$$

Simplificando la expresión y luego mayorando se tiene:

$$
\begin{aligned}
V^{'} &= \Lambda\left(2-x-\frac{1}{x}\right)+p\bar{I}_2^*\bar{S}^*\beta_1\Big[(y-1)\left(\frac{zx}{y}-1\right)-(x-1)(z-1)\Big]+\beta_1\bar{S}^*\bar{I}_2^*\\
&\Big[-(z-1)(x-1)+(z-1)(x-1)\Big]+\beta_2\bar{S}^*J^*\Big[-(x-1)(u-1)+(z-1)\left(xu\frac{1}{z}-1\right)\Big]\\
&+q\bar{J}^*\bar{S}^*\beta_2\Big[(y-1)\left(\frac{ux}{y}-1\right)-(z-1)\left(\frac{xu}{z}-1\right)\Big]+\frac{\beta_1(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\Big[(x-1)\left(z^2\left(\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}\right)-1\right)\\
&-(z-1)\left(zx\left(\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}\right)-1\right)\Big]+\frac{p(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\beta_1^{'}\Big[-(y-1)\left(\frac{z^2x}{y}\left(\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}\right)-1\right)\\
&+(z-1)\left(zx\left(\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}\right)-1\right)\Big]+\frac{\beta_2^{'}(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\Big[(x-1)\left(u^2\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}-1\right)\\
&-(z-1)\left(\frac{u^2x}{z}\left(\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}\right)-1\right)\Big]+\frac{q\bar{J}^*\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\beta_2^{'}\Big[-(y-1)\left(u^2x\frac{1}{y}\left(\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}\right)-1\right)\\
&+(z-1)\left(u^2x\frac{1}{z}\left(\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}\right)-1\right)\Big]+\xi_1\bar{J}^*\left(\frac{u}{y}-1\right)(y-1)+\varepsilon\bar{I}_1^*\left(\frac{y}{z}-1\right)(z-1)\\
&+\xi_2\bar{J}^*\left(\frac{u}{z}-1\right)(z-1)+r\bar{I}_2^*(u-1)\left(\frac{z}{u}-1\right)+\rho\bar{J}^*(v-1)\left(\frac{u}{v}-1\right)+\delta\bar{I}_2^*(v-1)\left(\frac{z}{v}-1\right)\\
&=\Lambda\left(2-x-\frac{1}{x}\right)+p\bar{I}_2^*\bar{S}^*\beta_1\left(x+z-y-\frac{zx}{y}\right)+\beta_2\bar{S}^*\bar{J}^*\left(x+u-z-\frac{xu}{z}\right)\\
&+q\bar{J}^*\bar{S}^*\beta_2\left(z+\frac{ux}{z}-y-\frac{xu}{y}\right)+\frac{\beta_1(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\left(\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}(zx-z^2)+z-x\right)\\
&+\frac{p(I_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\beta_1^{'}\left(\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}\left(\frac{z^2x}{y}-zx\right)+y-z\right)+\frac{\beta_2^{'}(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\left(\frac{m+\bar{J}^*}{m+\bar{J}}\left(\frac{u^2x}{z}-u^2\right)+z-x\right)+\\
&+\frac{q(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+J^*}\beta_2^{'}\left(\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}\left(\frac{u^2x}{y}-\frac{u^2x}{z}\right)+y-z\right)+\xi_1\bar{J}^*\left(u-y-\frac{u}{y}+1\right)+\varepsilon\bar{I}_1^*\left(y-z-\frac{y}{z}+1\right)\\
&+\xi_2\bar{J}^*\left(u-z-\frac{u}{z}+1\right)+r\bar{I}_2^*\left(z-u-\frac{z}{u}+1\right)+\rho\bar{J}^*\left(u-v-\frac{u}{v}+1\right)+\delta\bar{I}_2^*\left(z-v-\frac{z}{v}+1\right)\\
&\leq\ \Lambda\Big(2-x-\frac{1}{x}\Big)\ +\ p\bar{I}_2^*\bar{S}^*\beta_1\Big(3-\frac{1}{x}-\frac{y}{z}-\frac{xz}{y}\Big)\ +\ \beta_2\bar{S}^*\bar{J}^*\Big(3-\frac{1}{x}-\frac{z}{u}-\frac{xu}{z}\Big)\\
&+\ q\bar{J}^*\bar{S}^*\beta_2\Big(4-\frac{1}{z}-\frac{y}{u}-\frac{ux}{y}-\frac{z}{x}\Big)\ +\ \frac{\beta_1(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\left(4-\frac{1}{x}-\frac{z}{x}\cdot\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}-\frac{x}{z}\cdot\frac{m+I_2}{m+\bar{I}_2^*}-\ x\right)\\
&+\ \frac{p(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\beta_1^{'}\left(4-\frac{1}{y}-\frac{z}{y}\cdot\frac{m+\bar{I}_2^*}{m+I_2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{m+I_2}{m+\bar{I}_2^*}-\ y\right)\ +\ \frac{\beta_2^{'}(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\left(4-\frac{1}{z}-\frac{u}{z}\cdot\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}\right.\\
&\left.-\frac{z}{u}\cdot\frac{m+J}{m+\bar{J}^*}-\ z\right)\ +\ \frac{q(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\beta_2^{'}\left(4-\frac{1}{y}-\frac{u}{y}\cdot\frac{m+\bar{J}^*}{m+J}-\frac{y}{u}\cdot\frac{m+J}{m+\bar{J}^*}-\ y\right)\\
&+\ \xi_1\bar{J}^*\Big(2-\frac{u}{y}-\frac{y}{u}\Big)\ +\ \varepsilon\bar{I}_1^*\Big(2-\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\Big)\ +\ \xi_2\bar{J}^*\Big(2-\frac{u}{z}-\frac{z}{u}\Big)\ +\ r\bar{I}_2^*\Big(2-\frac{z}{u}-\frac{u}{z}\Big)\\
&+\ \rho\bar{J}^*\Big(2-\frac{u}{v}-\frac{v}{u}\Big)\ +\ \delta\bar{I}_2^*\Big(2-\frac{z}{v}-\frac{v}{z}\Big)\ +\ \left(p\bar{I}_2^*\bar{S}^*\beta_1+\beta_2\bar{S}^*\bar{J}^*+q\bar{J}^*\bar{S}^*\beta_2+\frac{\beta_1(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\right.\\
&\left.+\frac{p(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\beta_1^{'}+\frac{\beta_2^{'}(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}+\frac{q(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\beta_2^{'}+\xi_1\bar{J}^*+\varepsilon\bar{I}_1^*+\xi_2\bar{J}^*+r\bar{I}_2^*+\rho\bar{J}^*+\delta\bar{I}_2^*\right)\cdot\Big(|x-1|\\
&+|y-1|+|z-1|+|u-1|+|v-1|\Big).
\end{aligned}
$$

Por el resultado de que; la media aritmética es mayor o igual que la media geométrica, entonces se tiene

- $2 - x - \dfrac{1}{x} \leq 0$ para $x > 0$, y $2 - x - \dfrac{1}{x} = 0$ si y sólo si $x = 1$.

  Por la desigualdad MA–MG: $\dfrac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x\frac{1}{x}} = 1$. Entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$, de donde se concluye $2 - x - \frac{1}{x} \leq 0$.

- $3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z} - \dfrac{xz}{y} \leq 0$ para $x, y, z > 0$, y $3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z} - \dfrac{xz}{y} = 0$ si y sólo si $x = y = z = 1$.

  Dado que $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{y}{z} \cdot \dfrac{xz}{y} = 1$, por MA–MG se cumple:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{xz}{y}}{3} \geq \sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{xz}{y} \geq 3.$$

  Así, $3 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{xz}{y} \leq 0$.

- $3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{u} - \dfrac{xu}{z} \leq 0$ para $x, z, u > 0$, con igualdad si y sólo si $x = z = u = 1$.

  Como $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{z}{u} \cdot \dfrac{xu}{z} = 1$, se aplica MA–MG análogamente.

- $4 - \dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{u} - \dfrac{ux}{y} - \dfrac{z}{x} \leq 0$ para $x, y, z, u > 0$, con igualdad si y sólo si $x = y = z = u = 1$.

  Dado que $\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{y}{u} \cdot \dfrac{ux}{y} \cdot \dfrac{z}{x} = 1$, se cumple por MA–MG que $4 - \frac{1}{z} - \frac{y}{u} - \frac{ux}{y} - \frac{z}{x} \leq 0$.

- $4 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{x}\dfrac{m + \bar{I}_2^*}{m + I_2} - \dfrac{x}{z}\dfrac{m + I_2}{m + \bar{I}_2^*} - x \leq 0$ para $x, z > 0$, con igualdad si $x = z = 1$.

  Como

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{z}{x}\frac{m + \bar{I}_2^*}{m + I_2} \cdot \frac{x}{z}\frac{m + I_2}{m + \bar{I}_2^*} \cdot x = 1,$$

  se cumple nuevamente la condición de MA–MG.

- $4 - \dfrac{1}{z} - \dfrac{u}{z}\dfrac{m + \bar{J}^*}{m + J} - \dfrac{z}{u}\dfrac{m + J}{m + \bar{J}^*} - z \leq 0$ para $z, u > 0$, con igualdad si $z = u = 1$.

  Ya que

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{u}{z}\frac{m + \bar{J}^*}{m + J} \cdot \frac{z}{u}\frac{m + J}{m + \bar{J}^*} \cdot z = 1.$$

- $2 - \dfrac{u}{y} - \dfrac{y}{u} \leq 0$ para $y, u > 0$, y $2 - \dfrac{u}{y} - \dfrac{y}{u} = 0$ si y sólo si $y = u = 1$.

  Como $\dfrac{u}{y} \cdot \dfrac{y}{u} = 1$, el resultado sigue directamente por MA–MG.

- $2 - \dfrac{z}{u} - \dfrac{u}{z} \leq 0$ para $z, u > 0$, y $2 - \dfrac{z}{u} - \dfrac{u}{z} = 0$ si y sólo si $z = u = 1$.

- $2 - \dfrac{z}{v} - \dfrac{v}{z} \leq 0$ para $z, v > 0$, y $2 - \dfrac{z}{v} - \dfrac{v}{z} = 0$ si y sólo si $z = v = 1$.

- $2 - \dfrac{u}{v} - \dfrac{v}{u} \leq 0$ para $u, v > 0$, y $2 - \dfrac{u}{v} - \dfrac{v}{u} = 0$ si y sólo si $u = v = 1$.

- Por otra parte, el término residual

$$K\big(|x-1|+|y-1|+|z-1|+|u-1|+|v-1|\big),$$

donde $K = p\bar{I}_2^*\bar{S}^*\beta_1 + \beta_2\bar{S}^*\bar{J}^* + q\bar{J}^*\bar{S}^*\beta_2 + \frac{\beta_1(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*} + \frac{p(\bar{I}_2^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{I}_2^*}\beta_1' + \frac{\beta_2'(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*} + \frac{q(\bar{J}^*)^2\bar{S}^*}{m+\bar{J}^*}\beta_2' + \xi_1\bar{J}^* + \varepsilon\bar{I}_1^* + \xi_2\bar{J}^* + r\bar{I}_2^* + \rho\bar{J}^* + \delta\bar{I}_2^*$ representa pequeñas desviaciones respecto al equilibrio y se comporta de forma cuadrática en torno a éste. Luego, su crecimiento está acotado por las variaciones de segundo orden de las variables, lo que asegura que $V' < 0$ siempre que $(x, y, z, u, v) \neq (1, 1, 1, 1, 1)$.

Por tanto, $V' \leq 0$ para $x, y, z, u, v > 0$ y $V' = 0$ si y solo si $x = y = z = u = v = 1$. El máximo conjunto invariante del modelo SIIJA perturbado en el conjunto $\{(x, y, z, u, v) : V = 0\}$ es el singleton $(1, 1, 1, 1, 1)$. Por consiguiente, para el modelo el punto de equilibrio endémico $\bar{E}^*$ es global asintóticamete estable si $\bar{R}_0 > 1$ por el principio de LaSalle (LaSalle, 1960). □

3.15. Análisis de bifurcación

En esta parte, se describe la existencia de una bifurcación hacia adelante en el punto umbral $R_0 = 1$. El análisis local de la variedad central produce un segundo parámetro, a (relacionada con dirección de la bifurcación), cuyo signo indica la existencia y estabilidad de una rama de equilibrios endémicos cerca del umbral $R_0 = 1$. En consecuencia, con las mismas propiedades de las variables, se reemplazan las variables de estado en el modelo (3.48 - 3.52) con nuevas variables como se indica a continuación.

Teorema 3.15.1. *El sistema (3.48 - 3.52) presenta una bifurcación hacia adelante en $R_0 = 1$.*

Demostración. Para realizar el análisis de bifurcación del sistema en este artículo se utilizó el enfoque de la variedad central implementado el teorema de Castillo-Song (Castillo-Chavez y Song, 2004) explicado en la sección 1.4.2. Por lo tanto, sea

$$S = x_1, I_1 = x_2, I_2 = x_3, J = x_4 \text{ y } A = x_5$$

$$\frac{dS}{dt} = g_1, \frac{dI_1}{dt} = g_2, \frac{dI_2}{dt} = g_3, \frac{dJ}{dt} = g_4 \text{ y } \frac{dA}{dt} = g_5$$

Con este supuesto, el sistema se puede escribir de la siguiente manera:

$$g_1 = \Lambda - \left(\beta_1 - \beta_1'\frac{x_3}{m+x_3}\right)x_3x_1 - \left(\beta_2 - \beta_2'\frac{x_4}{m+x_4}\right)x_4x_1 - \mu x_1 \tag{3.108}$$

$$g_2 = p\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{x_3}{m+x_3}\right)x_3x_1 + q\left(\beta_2 - \beta_2'\frac{x_4}{m+x_4}\right)x_4x_1 - b_1x_2 + \xi_1x_4 \tag{3.109}$$

$$g_3 = (1-p)\left(\beta_1 - \beta_1'\frac{x_3}{m+x_3}\right)x_3x_1 + (1-q)\left(\beta_2 - \beta_2'\frac{x_4}{m+x_4}\right)x_4x_1 + \varepsilon x_2 - b_2x_3 + \xi_2x_4 \tag{3.110}$$

$$g_4 = rx_3 - b_3x_4 \tag{3.111}$$

$$g_5 = \delta x_3 + \rho x_4 - b_4x_5 \tag{3.112}$$

Para el análisis, se selecciona β_1 como parámetro de bifurcación. Se resuelve $\bar{R}_0 = 1$ respecto a β_1 obteniendo

$$\beta_1 = \beta_1^{\#} = \frac{\mu\theta^* - \Lambda\beta_2 r L_2}{\Lambda b_3 L_1}$$

donde $\mu\theta^* - \Lambda r\beta_2 L_2 > 0$.
Sustituya $\beta_1 = \beta_1^{\#}$ y el estado de equilibrio libre de infección en la matriz jacobiana y se calculan sus autovalores mediante $|J(E_0) - \lambda I| = 0$

$$|J(E_0) - \lambda| = \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} & -\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -b_1 - \lambda & p\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & (1-p)\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

De aquí se tiene las soluciones $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -b_4$, ahora mediante la ecuación se debe demostrar que tiene una solución cero:

$$\begin{aligned} &\lambda^3\mu + \lambda^2\left[\mu(b_1 + b_2 + b_3) - (1-p)\beta_1^{\#}\Lambda\right] \\ &+ \lambda\left[(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1)\mu - (1-p)\beta_1^{\#}\Lambda(b_3 + b_1) - r(1-q)\beta_2\Lambda - r\xi_2\mu - \varepsilon p\beta_1^{\#}\Lambda\right] \\ &+ \mu b_1b_2b_3 - \beta_1^{\#}\Lambda b_3L_1 - r\beta_2\Lambda L_2 - \mu r(b_1\xi_2 + \varepsilon\xi_1) = 0 \end{aligned}$$

Reduciendo y factorizando se tiene

$$\begin{aligned} &\lambda\Bigg[\lambda^2\mu + \lambda\left(\frac{b_3L_1\mu(b_1 + b_2 + b_3) - (1-p)(\mu\theta^* - \Lambda\beta_2 r L_2)}{b_3L_1}\right) \\ &+ \frac{1}{b_3L_1}\left((b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1)b_3L_1\mu - (1-p)(b_3 + b_1)(\mu\theta^* - \Lambda\beta_2 r L_2)\right) \\ &- r(1-q)\beta_2\Lambda b_3L_1 - r\xi_2\mu b_3L_1 - \varepsilon p(\mu\theta^* - \Lambda\beta_2 r L_2)\Bigg] = 0 \end{aligned}$$

hay solución $\lambda = 0$ y de la ecuación de la forma: $\lambda^2 + a_{11}\lambda + a_{22} = 0$ se tendrá soluciones con parte real negativa cuando sus coeficientes sean positivos y esto ocurre si: $b_1 + b_2 + b_3 > (1-p)(\frac{\theta^*\mu - \Lambda\beta_2 r L_2}{\mu b_3 L_1})$ y $b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 > \frac{r(1-q)\beta_2\Lambda}{\mu} + ((1-p)b_3 + L_1)(\frac{\theta^*\mu - \Lambda\beta_2 r L_2}{\mu b_3 L_1}) + r\xi_2$. Además, estas condiciones están relacionadas con la estabilidad local del punto de equilibrio libre de infección (sección 3.14.1).
Siguiendo con la demostración, ahora se calcula el autovector por la derecha asociado al autovalor $\lambda = 0$, mediante $J(E_0).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} & -\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -b_1 & p\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & (1-p)\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} - b_2 & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & r & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \rho & -b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\mu w_1 - \frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu}w_3 - \frac{\beta_2\Lambda}{\mu}w_4 & = 0 \\ -b_1w_2 + p\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu}w_3 - (q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1)w_4 & = 0 \\ \varepsilon w_2 + ((1-p)\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} - b_2)w_3 - ((1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2)w_4 & = 0 \\ rw_3 - b_3w_4 & = 0 \\ \delta w_3 + \rho w_4 - b_4w_5 & = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se tiene la solución;

$$w_1 = -\frac{w_3}{\mu}(\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} + \frac{\beta_2\Lambda r}{\mu b_3}),\ w_2 = \frac{w_3}{b_1}(p\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} + (q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1)\frac{r}{b_3}),\ w_3 = w_3,\ w_4 = \frac{rw_3}{b_3} \text{ y } w_5 = \frac{w_3}{b_4}(\delta + \frac{\rho r}{b_3})$$

por tanto el autovector por la derecha esta dado por

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{w_3}{\mu}(\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} + \frac{\beta_2\Lambda r}{\mu b_3}) \\ \frac{w_3}{b_1}(p\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} + (q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1)\frac{r}{b_3}) \\ w_3 \\ \frac{rw_3}{b_3} \\ \frac{w_3}{b_4}(\delta + \frac{\rho r}{b_3}) \end{bmatrix}$$

ahora se calcula el autovector por la izquierda asociado al autovalor $\lambda = 0$, mediante $(J(E_0))^T.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & \varepsilon & 0 & 0 \\ -\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} & p\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} & (1-p)\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} - b_2 & r & \delta \\ -\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} & q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1 & (1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2 & -b_3 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\mu v_1 & = 0 \\ -b_1 v_2 + \varepsilon v_3 & = 0 \\ -\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu}v_1 + p\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu}v_2 - ((1-p)\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} - b_2)v_3 + rv_4 + \delta v_5 & = 0 \\ -\frac{\beta_2\Lambda}{\mu}v_1 + (q\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_1)v_2 + ((1-q)\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} + \xi_2)v_3 - b_3 v_4 + \rho v_5 & = 0 \\ -b_4 v_5 & = 0 \end{cases}$$

resolviendo se tiene la solución;

$$v_1 = 0,\ v_2 = \frac{\varepsilon v_3}{b_1},\ v_3 = v_3,\ v_4 = (\frac{b_2 - (1-p)\frac{\beta_1^{\#}\Lambda}{\mu} - \frac{p\beta_1^{\#}\Lambda\varepsilon}{\mu b_1}}{r})v_3 \text{ y } v_5 = 0$$

por tanto, el autovector por la derecha esta dado por

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\varepsilon v_3}{b_1} \\ v_3 \\ \left(\frac{\mu b_2 b_1 - \beta_1^{\#}\Lambda L_1}{\mu r b_1}\right) v_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a continuación se debe encontrar w_3 y v_3 de tal manera que $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} = 1$, es decir

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 + w_3 v_3 + w_4 v_4 + w_5 v_5 = 1 \tag{3.113}$$

después de reemplazar y simplificar se obtiene:

$$w_3 = \mu b_1^2 b_3^2 L_1 \tag{3.114}$$

$$v_3 = \frac{1}{\mu\theta^*\varepsilon b_3 p + L_1\left(\mu r(b_1(\varepsilon\xi_1 + b_1\xi_2) + \varepsilon b_3\xi_1) + b_1(\beta_2 r L_2\Lambda + b_3^2 b_1\mu)\right)} \tag{3.115}$$

ahora utilizando el criterio de (Castillo-Chavez y Song, 2004); calculamos

$$a = \sum_{k,i,j=1}^{5} v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k(E_0)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.116}$$

$$b = \sum_{k,i=1}^{5} v_k w_i \frac{\partial^2 f_k(E_0, \beta_1^{\#})}{\partial x_i \partial \beta_1^{\#}} \tag{3.117}$$

Como

$$\begin{gathered}
v_1 = v_5 = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_1 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_1 \partial x_5} = 0 \\
\frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_2 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_2 \partial x_4} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_2 \partial x_5} = 0 \\
\frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_3 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_3 \partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_3 \partial x_4} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_3 \partial x_5} = 0 \\
\frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_4 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_4 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_4 \partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_4 \partial x_4} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_4 \partial x_5} = 0 \\
\frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_5 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_5 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_5 \partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_5 \partial x_4} = 0, \frac{\partial^2 f_4(E_0)}{\partial x_5 \partial x_5} = 0
\end{gathered}$$

entonces las expresiones 3.116 y 3.117 se reducen a

$$a = v_2 \sum_{i,j=1}^{5} w_i w_j \frac{\partial^2 f_2(E_0)}{\partial x_i \partial x_j} + v_3 \sum_{i,j=1}^{5} w_i w_j \frac{\partial^2 f_3(E_0)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.118}$$

$$b = v_2 \sum_{k,i=1}^{5} w_i \frac{\partial^2 f_2(E_0, \beta_1^{\#})}{\partial x_i \partial \beta_1^{\#}} + v_3 \sum_{k,i=1}^{5} w_i \frac{\partial^2 f_3(E_0, \beta_1^{\#})}{\partial x_i \partial \beta_1^{\#}} \tag{3.119}$$

sustituyendo las componentes de $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{v}$ en las sumatorias, entonces se llega a los siguientes resultados.

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\varepsilon v_3}{b_1} \left(2w_1 w_3 p \beta_1 + 2w_1 w_4 q \beta_2 - \frac{2w_3^2 p \Lambda \beta_1'}{\mu m} - \frac{2w_4^2 q \Lambda \beta_2'}{\mu m} \right) \\
&\quad + v_3 \left(2w_1 w_3 (1-p) \beta_1 + 2w_1 w_4 (1-q) \beta_2 - \frac{2w_3^2 (1-p) \beta_1' \Lambda}{\mu m} - \frac{2w_4^2 (1-q) \beta_2' \Lambda}{\mu m} \right) \\
b &= \frac{v_3 w_3 \Lambda}{\mu} \left(\frac{\varepsilon p}{b_1} + (1-p) \right)
\end{aligned}$$

Los resultados anteriores muestran que $a < 0$ y $b > 0$; dado que, w_3, v_3, w_4 son positivos y w_2 es negativo. Por consiguiente, el modelo SIIJA perturbado presenta una bifurcación hacia adelante en R_0. □

Considerando los valores de los siguientes parámetros: $\beta_1 = 0{,}000022727$, $\mu = 0{,}01$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}002$, $\xi_1 = 0{,}8$, $\xi_2 = 0{,}9$, $r = 0{,}025$, $\rho = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}01$, $\Lambda = 1177$, $\beta_1' = 0{,}00002$, $\beta_2 = 0{,}0004544$, $m = 30$, $\beta_2' = 0{,}000004$ y $\delta = 0{,}2$ con $\bar{R}_0 = 4{,}2$, se verifica lo indicado en el teorema anterior: el punto de bifurcación se origina en $\bar{R}_0 = 1$. Se recuerda que el número reproductor básico de capítulo 3 no contiene al parámetro δ, lo cual aún así se sigue obteniendo una bifurcación hacia adelante. En las gráficas 3.27, 3.28 y 3.29 se visualiza los diferentes diagramas de

bifurcaciones obtenidas en XPPAUT. Cabe recalcar que el tipo de estabilidad de E_0 y $\bar{E}^*$ es globalmente asitóticamente estable (ver sección 3.14.3 y sección 3.14.4).

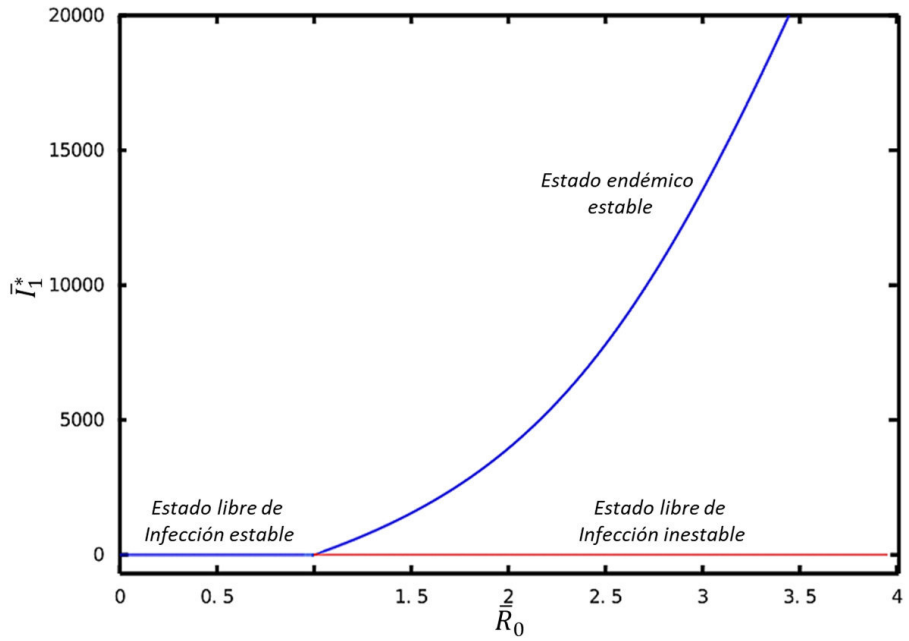


Figura 3.27: Diagrama de bifurcación de I_1 respecto a $\bar{R}_0$

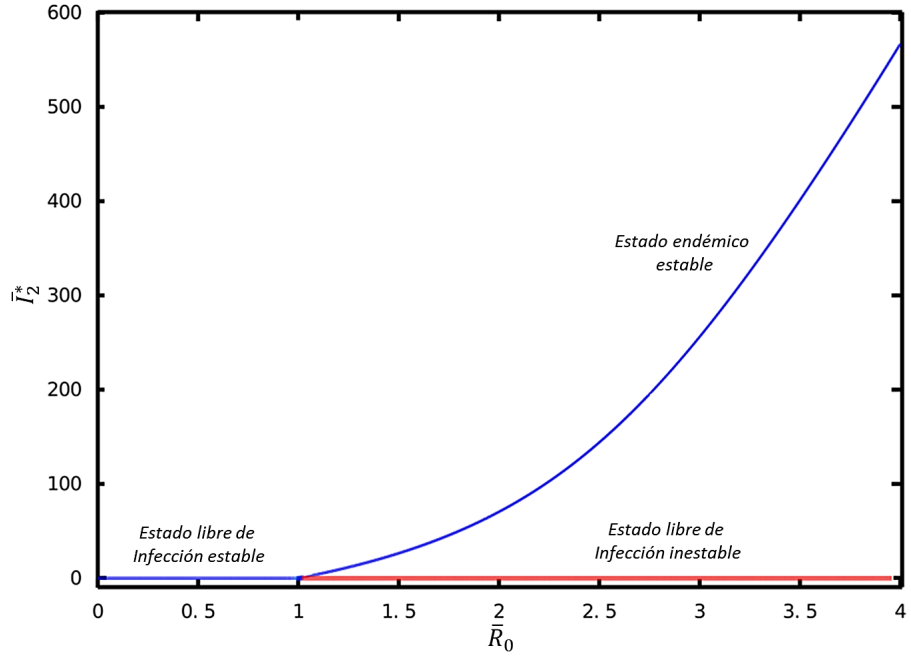


Figura 3.28: Diagrama de bifurcación de I_2 respecto a $\bar{R}_0$

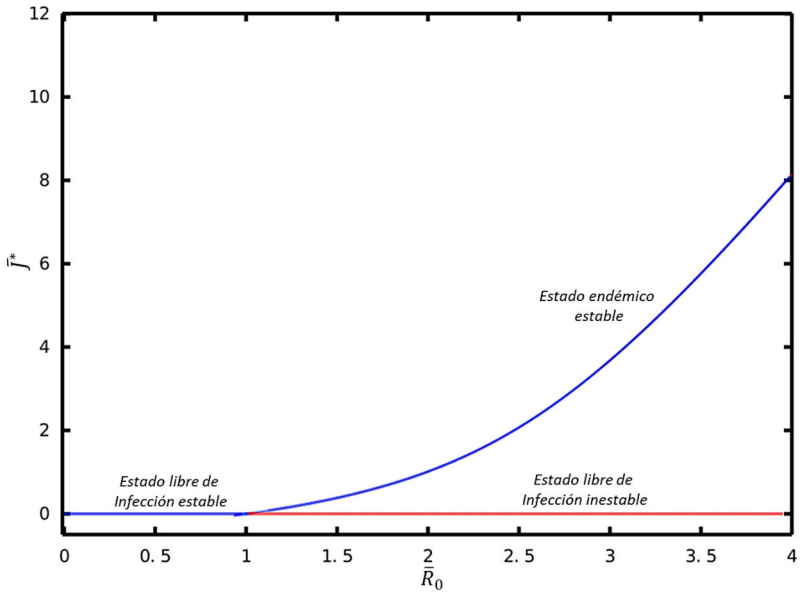


Figura 3.29: Diagrama de bifurcación de J respecto a $\bar{R}_0$

3.16. Análisis de simulación del modelo SIIJA perturbado

3.16.1. Simulaciones del sistema SIIJA: Punto E_0 y E^*

En esta sección se desarrollan simulaciones numéricas con el objetivo de contrastar los resultados teóricos previamente establecidos sobre los puntos de equilibrio del modelo. El análisis se centra en las trayectorias temporales de S, I_1, I_2, J y A, utilizando el software XPPAUTO (Ermentrout y Mahajan, 2003).

De acuerdo con la metodología expuesta en (Gonzales-Moreno K, 2021), se emplean las condiciones iniciales

$$S(0) = 22000, \quad I_1(0) = 100, \quad I_2(0) = 50, \quad J(0) = 30, \quad A(0) = 10, \qquad (3.120)$$

junto con los parámetros consignados en la Tabla 3.3.

Las tasas de incidencia consideradas en las Figuras 3.30 y 3.31 son:

$$\beta_1 = 2{,}2727 \times 10^{-6}\,(\text{año})^{-1} = \frac{1}{440000}(\text{año})^{-1},$$

lo que significa que, en promedio, una de cada 440 000 personas adquiere el VIH anualmente por interacción con un individuo de I_2; y

$$\beta_2 = 4{,}5442 \times 10^{-7}\,(\text{año})^{-1} = \frac{1}{2201673}(\text{año})^{-1},$$

que corresponde a un contagio por cada 2 201 673 individuos susceptibles en contacto con un infectado en J (Gonzales-Moreno K, 2021).

En la Figura 3.30, bajo el supuesto de $\bar{R}_0 = 0{,}2797977 < 1$ y $\theta^* = 0{,}00127688$, se observa que la población susceptible $S(t)$ presenta un crecimiento inicial, alcanzando

posteriormente un régimen estable alrededor de $t = 400$. Por otro lado, las trayectorias de $I_1(t)$, $I_2(t)$ y $A(t)$ exhiben un incremento transitorio hasta un valor máximo, seguido de una disminución progresiva que las lleva a anularse en el largo plazo. En contraste, la población $J(t)$ desciende bruscamente en los primeros instantes y se estabiliza en cero luego de aproximadamente dos años.

Con base en estos resultados, se corrobora que $E_0 = (30000, 0, 0, 0, 0)$ es local y asintóticamente estable. Esto se justifica dado que los valores $\bar{M}_1 = 268{,}1098840$, $\bar{T}_1 = 4{,}447139120$ y $\bar{N}_1 = 236{,}4491642$ superan la unidad, en concordancia con lo demostrado en el Teorema 3.14.1.

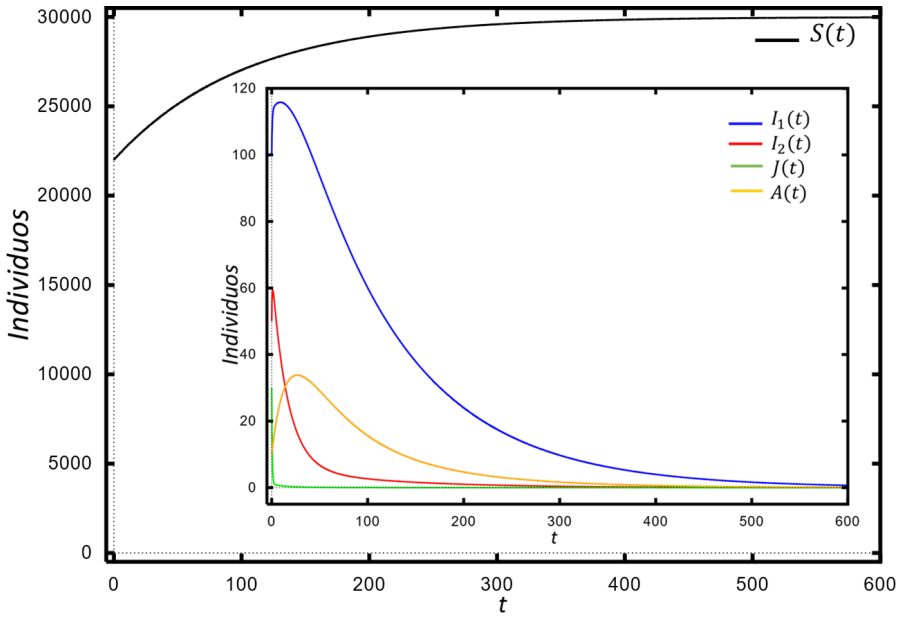


Figura 3.30: Dinámica del modelo SIIJA perturbado cuando $R_0 = 0{,}2797977$

La figura 3.31 muestra el diagrama de fase 3D entre las variables S, I_1 y I_2 para un tiempo de $t \in [0; 1000]$, con condición inicial de estas variables $(22000, 100, 50)$ la dinámica se dirige hacia el punto $(30000, 0, 0)$.

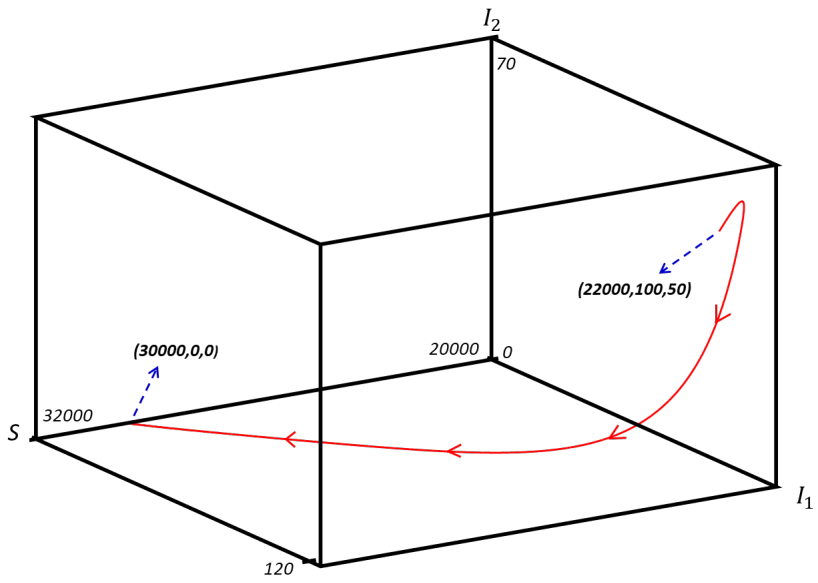


Figura 3.31: Diagrama de fase 3D

En el análisis correspondiente a las Figuras 3.32 y 3.33, se emplean valores específicos para las tasas de incidencia y otros parámetros del modelo. En primer lugar, la tasa de transmisión asociada a los individuos en el compartimiento I_2 se fija en $\beta_1 = 2{,}435 \times 10^{-5}$ (año)$^{-1} \approx \dfrac{1}{41067}$ (año)$^{-1}$. Esto significa que, en promedio, una de cada 41067 personas adquiere el VIH en el transcurso de un año tras entrar en contacto con un individuo infectado en la clase I_2.

De manera similar, para los individuos sintomáticos J, la tasa de transmisión se considera como $\beta_2 = 4{,}544 \times 10^{-6}$ (año)$^{-1} \approx \dfrac{1}{220070}$ (año)$^{-1}$. En este caso, la interpretación es que, anualmente, una de cada 220070 personas resulta contagiada al interactuar con un individuo del compartimiento J.

Además de estas incidencias, se incluyen en el modelo los valores $\beta_1^{'} = 0{,}00001$, $\beta_2^{'} = 0{,}000003$ y $r = 0{,}01$.

El análisis de la Figura 3.32 evidencia que, para $t \in [0, 600]$, con $\bar{R}_0 = 3{,}3215008 > 1$ y $\theta^* = 0{,}00114968$, la población susceptible $S(t)$ presenta un crecimiento inicial que alcanza un máximo cercano a 24746 en $t \approx 100$. Posteriormente, esta población disminuye de manera progresiva hasta estabilizarse en 14881. En paralelo, las subpoblaciones $I_1(t)$ e $I_2(t)$ exhiben un aumento sostenido que converge hacia valores de equilibrio aproximados de 11601 y 687, respectivamente, conforme el tiempo tiende a infinito. Este comportamiento confirma la persistencia de la infección en el sistema, coherente con el hecho de que $\bar{R}_0 > 1$.

Sin embargo, para el caso de $J(t)$ (Figura 3.33) la población de personas sintomáticas con tratamiento decrece de forma rápida (cuando $\delta = 0{,}041$) y posteriormente pasado dos años se estabiliza en 4 mientras que $A(t)$ (Figura 3.32) individuos con SIDA crece hasta llegar a 1414, esto ocurre a pesar de que δ es pequeño; de esta forma se verifica que el punto de equilibrio libre de infección $\bar{E}^* =$ (14881,11601,687,4,1414) es localmente asintóticamente estable cuando $\bar{M}_2$ =85.741894, $\bar{N}_2$ =3.471673, $\bar{P}_2$ =3.161057 y $\bar{T}_2$ =103.729663 y $\bar{Q}_2$ =210.32848 son mayores

que 1, es decir; cumplen el teorema 3.14.2, además $\bar{c}_1 c_2 - c_3 = 0{,}210169 > 0$, $c_1 c_2 c_3 - c_3^2 - c_1^2 c_4 = 0.0003906020714 > 0$; donde:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1 &= 1{,}811780 \\
\bar{c}_2 &= 0{,}117130 \\
\bar{c}_3 &= 0{,}002046 \\
\bar{c}_4 &= 0{,}000012 \\
\bar{R}_{01} &= 0{,}000746 \\
\bar{R}_{02} &= 0{,}000373 \\
\bar{R}_0^* &= 0{,}972748 \\
\bar{R}_1 &= 1{,}365249 \\
\bar{R}_1 - \varpi_3 &= 1{,}360418
\end{aligned}$$

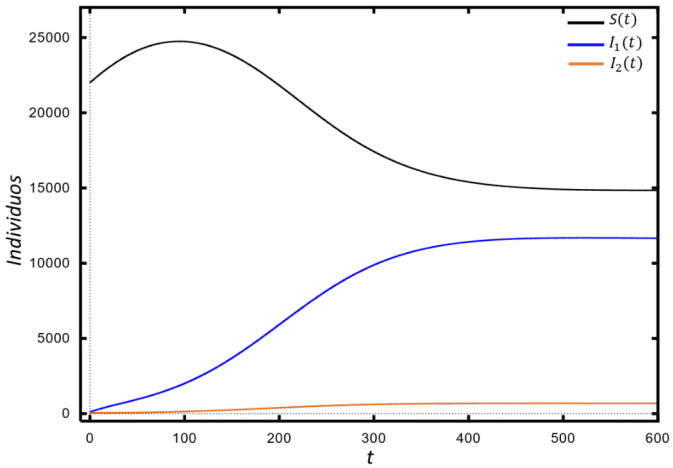
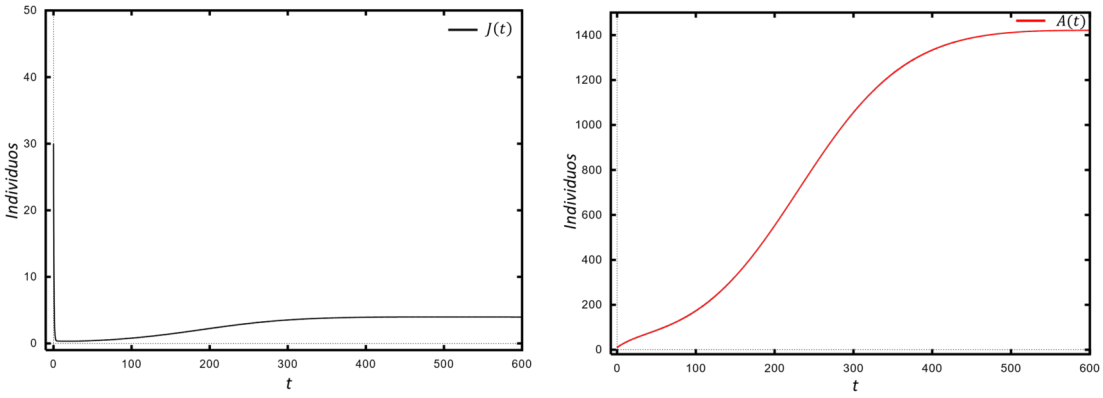


Figura 3.32: Dinámica de $S(t)$, $I_1(t)$ y $I_2(t)$



(a) Dinámica de la función $J(t)$

(b) Dinámica de la función $A(t)$

Figura 3.33: Simulaciones de las variables $J(t)$, $A(t)$

En la figura 3.34 se muestra una simulación en 3D del diagrama de fase de las poblaciones I_1, I_2 y J con diferentes condiciones iniciales para el caso de $\bar{R}_0 = 3{,}3215008 > 1$, donde se observa que para las condiciones iniciales $(20000, 400, 20)$, $(40, 200, 50)$, $(12000, 2200, 100)$,$(4000, 4200, 100)$, $(15000, 4200, 100)$ y $(3000, 5000, 5)$ en un tiempo muy grande tiende a $(11601, 687, 4)$. Aquí para todas las condiciones iniciales se considera $S(t) = 22000$ y $A(t) = 10$, además $S^*(t) = 14481$ y $A^*(t) = 1414$.

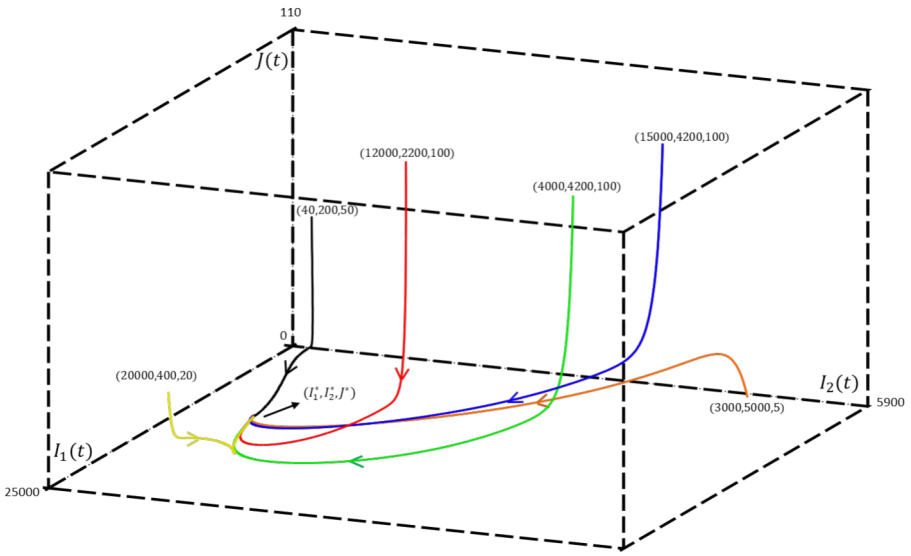


Figura 3.34: Diagrama de fase 3D

Se estudia un caso adicional correspondiente a un equilibrio endémico, alcanzado cuando $R_0 = 2{,}370589$, en cuyo punto de equilibrio se obtiene

$$\bar{E}^* = (131099, 53367, 298, 51, 688)$$

Los valores de los parámetros considerados para este escenario son: $\lambda = 1862$, $\mu = 0{,}01$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}000028$, $\xi_1 = 0{,}8$, $\xi_2 = 0{,}9$, $r = 0{,}3$, $\rho = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}01$, $\beta_1 = 0{,}000022727$, $\beta_1' = 0{,}00001$, $\beta_2 = 0{,}000004542$, $\beta_2' = 0{,}000003$, $m = 30$ y $\delta = 0{,}041$. Las dinámicas poblacionales correspondientes pueden observarse en las Figuras 3.35 y 3.36, mientras que la representación en los diagramas de fase se muestra en las Figuras 3.37, 3.38 y 3.39.

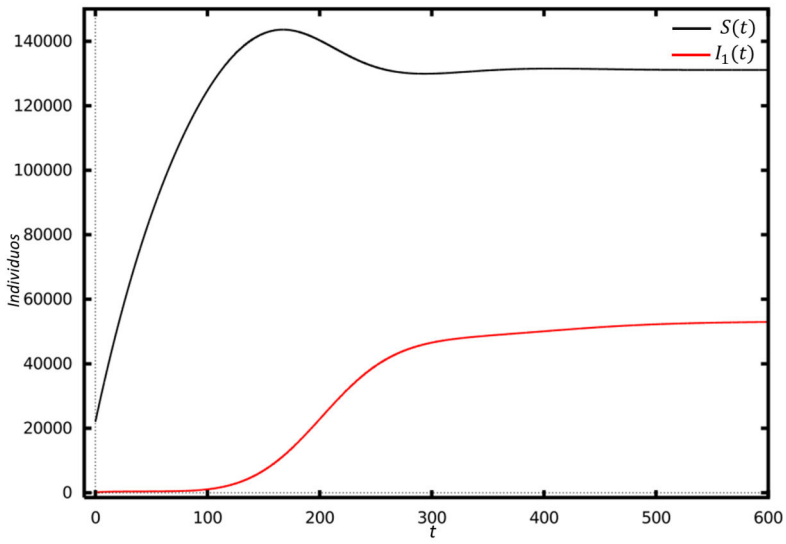


Figura 3.35: Dinámica de $S(t)$ e $I_1(t)$

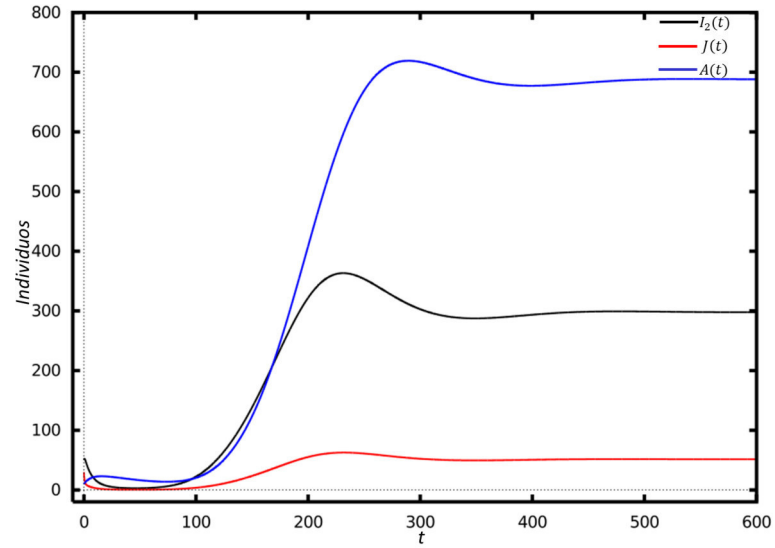


Figura 3.36: Dinámica de $I_2(t)$, $J(t)$ y $A(t)$

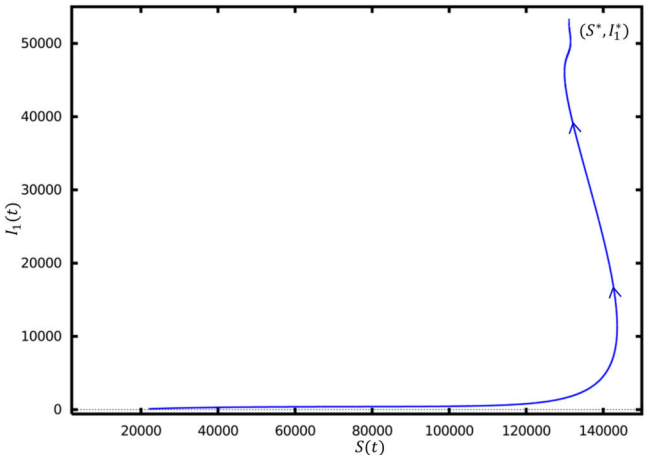


Figura 3.37: Diagrama de fase de I_1 respecto a S cuando $\bar{R}_0$=2.370589

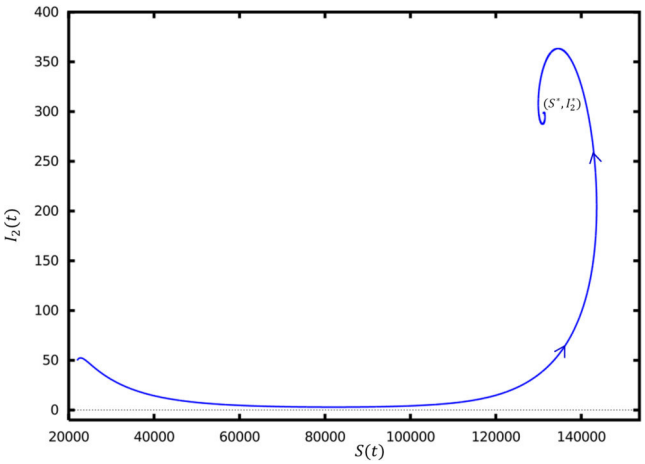


Figura 3.38: Diagrama de fase de I_2 respecto a S cuando $\bar{R}_0$=2.370589

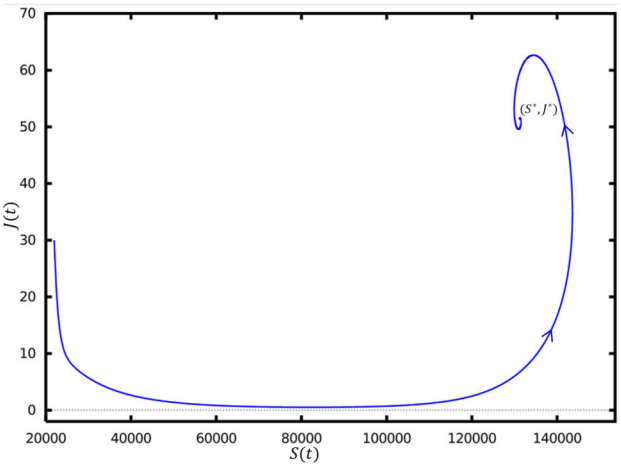


Figura 3.39: Dinámica de fase de J respecto a S con $\bar{R}_0$=2.370589

3.16.2. Simulaciones variando las condiciones iniciales

Las simulaciones expuestas en esta sección se obtuvieron modificando ciertas condiciones iniciales con el objetivo de examinar la evolución de la población de individuos con SIDA y de aquellos infectados sintomáticos que tienen acceso a tratamiento. Para este análisis se emplearon los valores de los parámetros listados en la tabla 3.3, junto con las condiciones iniciales establecidas en (3.120). La evolución temporal de $A(t)$, bajo diferentes configuraciones iniciales de $I_1(0)$, $I_2(0)$ y $J(0)$, se ilustra en las figuras 3.40, 3.41 y 3.42, respectivamente, en el intervalo $t \in [0, 600]$.

En particular, la Figura 3.40 representa la dinámica de la población con SIDA, $A(t)$, considerando $\bar{R}_0 = 0{,}27997977$ y variando la condición inicial de $I_1(0)$, la cual adopta los valores de 1000, 4000, 7000 y 10000 individuos infectados con latencia lenta, mientras que las demás condiciones iniciales se mantienen de acuerdo con (3.120). Se aprecia que $A(t)$ alcanza picos más elevados conforme aumenta el número inicial de individuos en el compartimiento I_1.

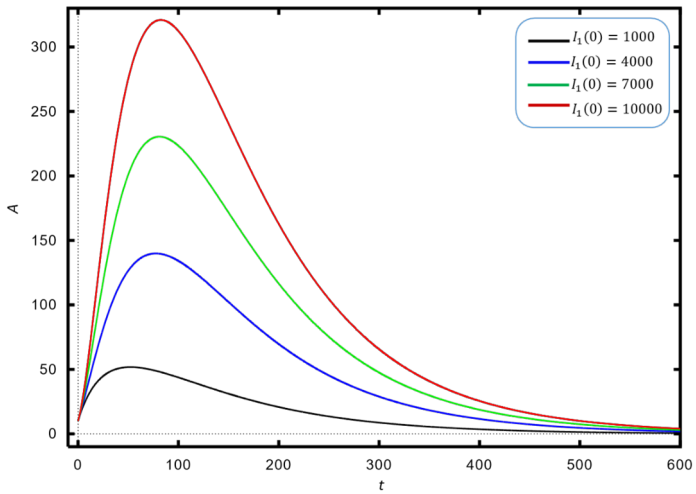


Figura 3.40: Dinámica de $A(t)$ variando $I_1(0)$

En el caso de la figura 3.41 la población de SIDA incrementa rápidamente para llegar a un valor máximo y luego decrecer e ir a cero. Estos valores máximos crecen cada vez que $I_2(0)$ aumenta. Esto epidemiológicamente se debe a que si se tiene mayor número de individuos asintomáticos con latencia rápida en un inicio, entonces habrá mayor contagio en poco tiempo y las personas con SIDA incrementarán para luego morir en un tiempo mayor. Tener presente que existe una tasa δ donde las personas de $I_2(0)$ pueden desconocer de que tiene el VIH y sin recibir un tratamiento puede empeorar su sistema inmunológico y pasar directamente a desarrollar la enfermedad y llegar a tener SIDA.

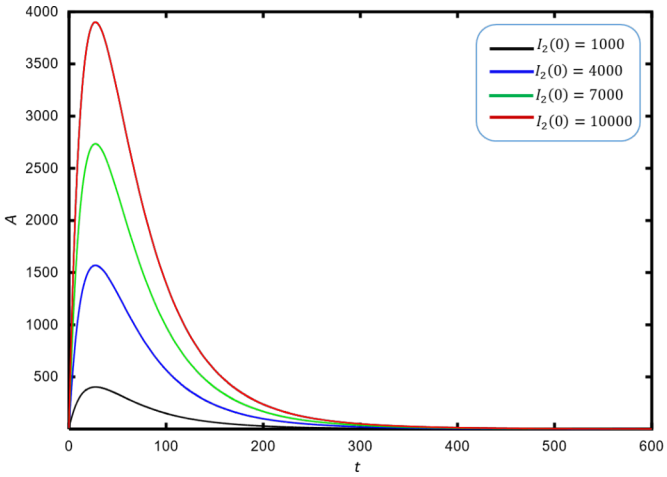


Figura 3.41: Dinámica de $A(t)$ variando $I_2(0)$

Haciendo la comparación de la figura anterior 3.40 con la figura 3.41, se observa que A es más sensible a los valores de $I_2(0)$ como condición inicial haciendo que la población con SIDA llegue a tomar en algún momento valores muy altos comparados con la variación que se hace a $I_1(0)$. Esto se debe a que I_2 infecta mientras que I_1 no.

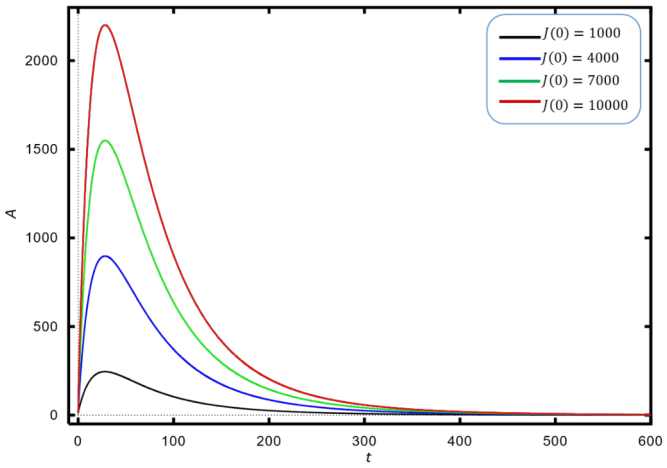


Figura 3.42: Dinámica de $A(t)$ variando $J(0)$

En la figura 3.42 la situación es similar; puesto que, si se tiene mayor población sintomáticas con opción a recibir tratamiento pero no responden positivamente a este, en consecuencia es posible que las personas lleguen a tener SIDA para luego de un tiempo determinado se origine la muerte.

En la Figura 3.43 se muestra la evolución temporal de la población correspondiente a los individuos infectados sintomáticos que reciben tratamiento, denotada por $J(t)$. Para este análisis, se modifica la condición inicial $I_1(0)$ tomando los valores 1000, 4000, 7000 y 10000 individuos con latencia lenta, mientras que las demás

condiciones iniciales permanecen fijas. Los resultados evidencian que $J(t)$ presenta un descenso inicial en corto tiempo, seguido de un incremento que alcanza un valor máximo, para posteriormente decrecer de manera sostenida hasta anularse.

Epidemiológicamente esto se puede deber a que la tasa de progresión r es menor que δ lo cuál hace que se tengan más personas con SIDA sin pasar por un tratamiento. Así en menor proporción los individuos I_2 llegan hacer sintomáticos con tratamiento.

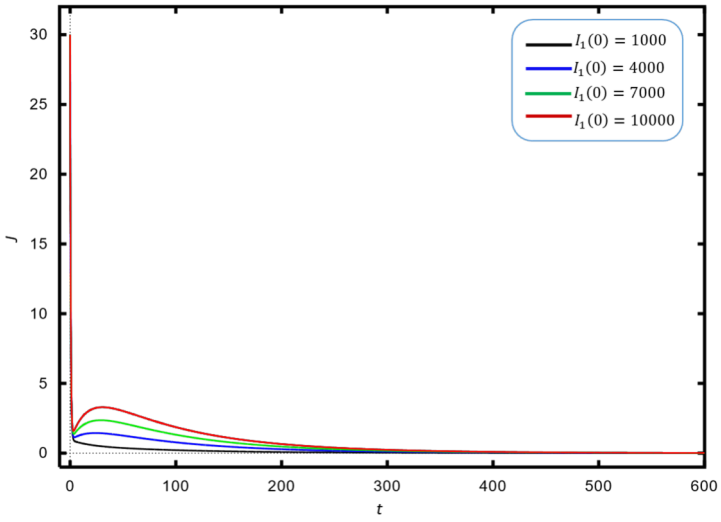


Figura 3.43: Dinámica de $J(t)$ variando $I_1(0)$

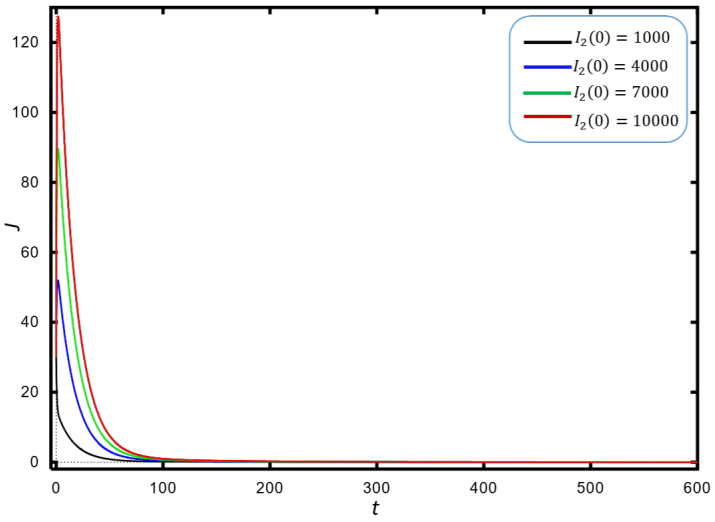


Figura 3.44: Dinámica de $J(t)$ variando $I_2(0)$

Algo similar pasa en la figura 3.44; con $I_2(0) = 4000$, $I_2(0) = 7000$ y $I_2(0) = 10000$ los individuos sintomáticos con tratamiento crecen rápidamente hasta llegar a un pico (no tan alto como A) y luego decrecer a cero. Esta situación puede suceder ya que la tasa δ es mayor que r, lo cual hace que se tengan más individuos con

SIDA que en tratamiento. Además. tener presente que los individuos que reciben el tratamiento también con el tiempo pueden pasar a tener SIDA si este no funciona, por consiguiente J decrece en un lago tiempo.

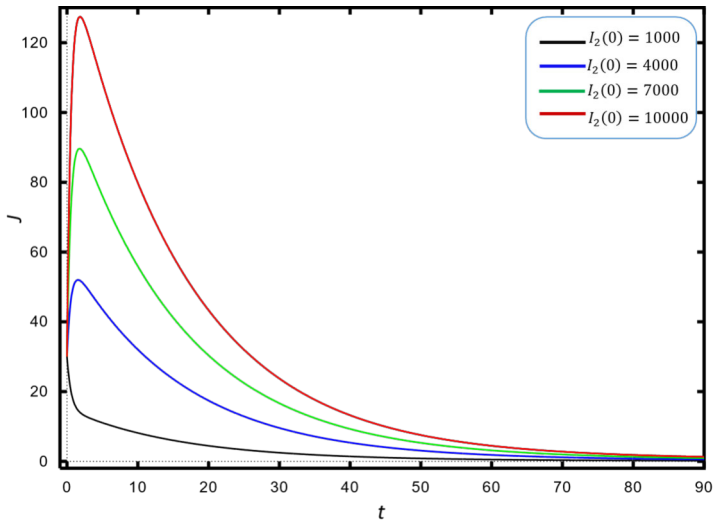


Figura 3.45: Zoom de gráfica 3.44

3.16.3. Simulaciones variando parámetros

Una forma de analizar el comportamiento de la dinámica de las poblaciones respecto a sus parámetros es mediante las simulaciones. Esto con el objetivo de indicar los parámetros más sensibles del modelo y que efecto tienen en las simulaciones. Las condiciones iniciales son las mismas del apartado anterior:

$$S(0) = 22000, I_1(0) = 100, I_2(0) = 50, J(0) = 30, A(0) = 10, \tag{3.121}$$

- Parámetro δ
  Considerando la situación de estar en un punto de equilibrio endémico ($\bar{R}_0 > 1$) se tiene la dinámica de la población $S(t)$ (figura 3.46) variando la tasa δ en la cual se deduce que; si δ es cero la curva de los susceptibles (colo rojo) crece en un inicio hasta llegar a un pico máximo aproximadamente cuando $t = 110$, para luego decrecer hasta llegar a estabilizarse. Esto significa que, si se tiene muchos individuos con latencia rápida (que desconocen tener el virus) que luego de un tiempo pasen a tener síntoma (para recién recibir tratamiento), entonces habrán más contagios. Sin embargo, al parecer si δ se aproxima más a 1, los infectados sintomáticos con tratamiento disminuyen y los individuos con SIDA incrementan para después de un tiempo morir, lo cual hace que S se estabilice en valores mayores que cuando $\delta = 0$. Uno de los factores por el que los individuos no puedan recibir el tratamiento es por motivos económicos, o porque desconocen que tienen VIH por falta de acceso a los test de VIH o por otro motivo, en consecuencia esto lleva a que existan más infectados y la cantidad de contagios incremente.

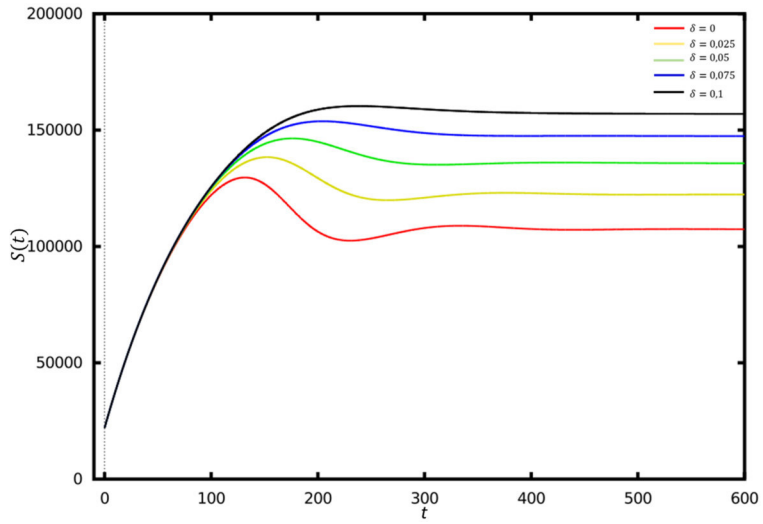


Figura 3.46: Dinámica de $S(t)$ variando δ

Para el caso de la gráfica 3.47, el compartimiento de los individuos con latencia lenta crece a mayor velocidad después de un tiempo determinado llegando a valores altos cuando $\delta = 0$; pero cuando este parámetro empieza a tomar valores mayores que cero, la población I_1 toma más tiempo para crecer y llegan a estabilizarse en valores cada vez menores. El motivo es que al tener menos individuos asintomáticos con latencia rápida (ya sea que pasen a recibir tratamiento o que su sistema inmunológico se debilite y lleguen a tener SIDA) habrán menos personas contagiadas que pasen a ser asintomáticos con latencia lenta.

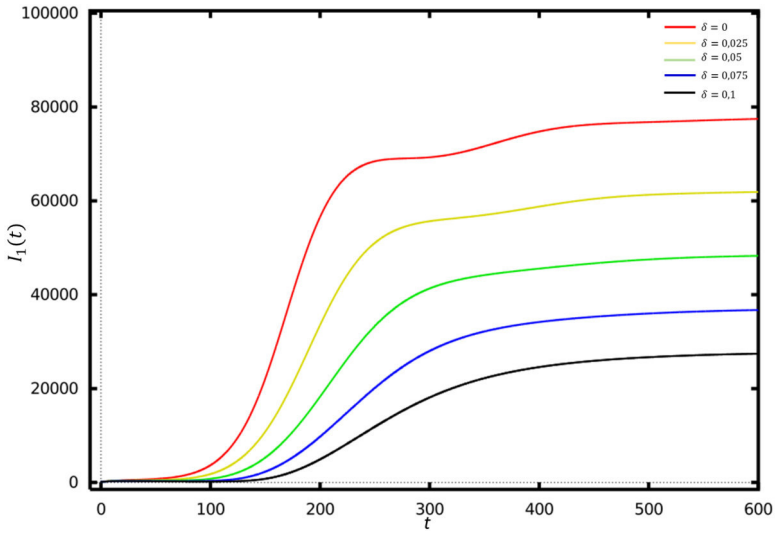


Figura 3.47: Dinámica de $I_1(t)$ variando δ

En la figura (3.48) se observa que la población de individuos asintomáticos con latencia rápida en un inicio disminuye para después incrementar y llegar aun

pico. Los picos son cada vez más altos cuando δ decrece; esto debido a que si se tiene más casos de individuos que no realizan el test de VIH, o deciden no realizar el tratamiento, entonces con el pasar el tiempo su estado de salud empeorará y se tendrán más individuos en A, por consecuencia habrán menos contagios.

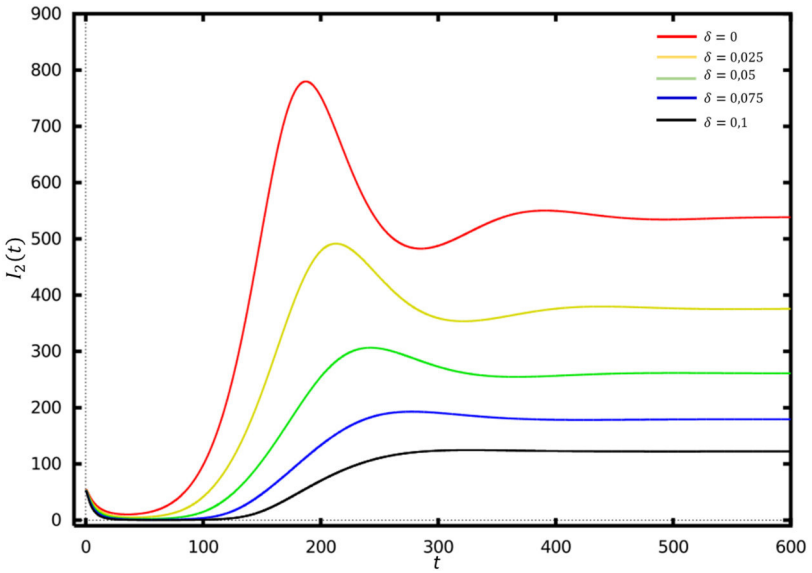


Figura 3.48: Dinámica de $I_2(t)$ variando δ

En el caso de J, llega a picos más altos cada vez que δ es pequeño, esto conlleva a que se tengan más contagios en un tiempo determinado para después decrecer y estabilizarse. Sin embargo cuando δ es mayor las tasas de contagios se reducen ya que posiblemente mente se tengan más casos de individuos con SIDA que nunca pasaron por algún tratamiento.

La dinámica de A en la figura (3.50) muestra que; si $\delta = 0$ el número de individuos con SIDA crece en menor proporción hasta llegar a estabilizarse. En cuanto a las otras curvas, a medida que δ aumenta se llega a picos mucho mayores y se estabilizan en valores mucho más grande en comparación de $\delta = 0$. Esto se debe a que personas con la latencia rápida no reciban tratamiento y sus sistema inmunológico disminuya de tal manera que solo lleguen a la etapa de tener SIDA. Además, se tiene que cuando δ esta cada vez más cercano a 1 habrán menos personas asintomáticas con latencia rápida y a mayor tiempo los contagios decrecerán hasta cierto punto en que se estabilice el sistema.

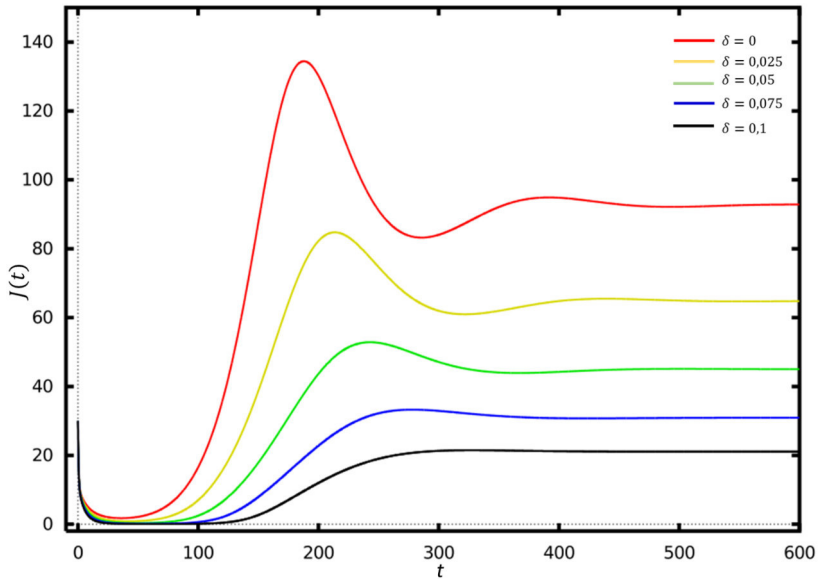


Figura 3.49: Dinámica de $J(t)$ variando δ

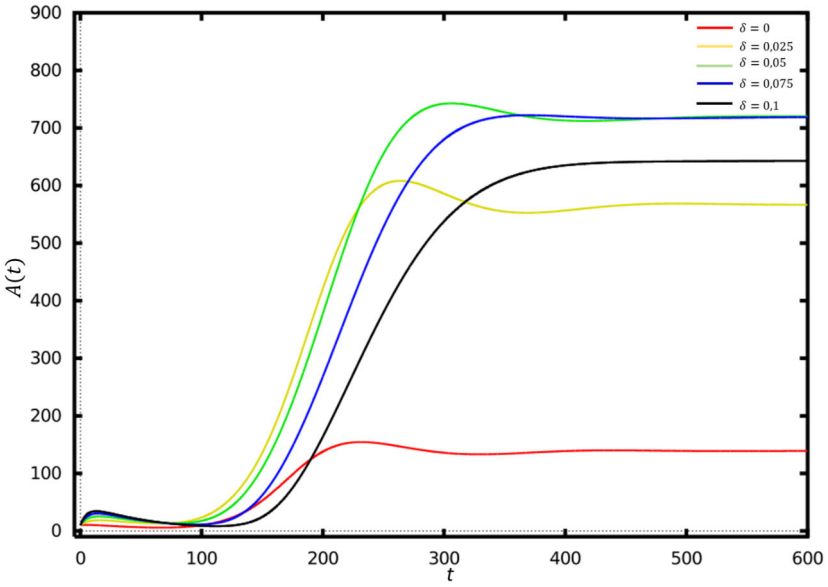


Figura 3.50: Dinámica de $A(t)$ variando δ

- Parámetro cobertura mediática (m)
  Tener presente que $\bar{R}_0$ no depende de m, por consecuencia se tendrá para las siguientes gráficas $\bar{R}_0 = 2{,}370589$ con $\Lambda = 1862, \mu = 0{,}01$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}000028$, $\xi_1 = 0{,}8$, $\xi_2 = 0{,}9$, $r = 0{,}3$, $\rho = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}01$, $\beta_1 = 0{,}000022727$, $\beta_1' = 0{,}00001$, $\beta_2 = 0{,}000004542$, $\beta_2' = 0{,}000003$ y $\delta = 0{,}041$. Estos valores ya se han dado anteriormente y ahora toca variar el parámetro m. Se recuerda que la cobertura mediática hace referencia al número de personas que son detectadas en un principio de la enfermedad y que rápidamente

se da a conocer a la población para que tome precauciones y evitar contagios.

La Figura 3.51 ilustra la variación del número de individuos susceptibles $S(t)$ para los valores de $m = 30$, 147, 264, 381 y 500, respectivamente. En dicha representación se evidencia que, si se consigue detectar una menor cantidad de personas infectadas que transmiten la enfermedad (de I_2 y J) y, en ese momento, el área responsable de vigilancia y prevención sanitaria decide difundir la información a la comunidad, las probabilidades de contagio se reducen y, en consecuencia, la población susceptible disminuye de manera más lenta. Por ejemplo, cuando se reconoce y comunica la existencia de $m = 500$ individuos infectados, la trayectoria de los susceptibles inicialmente aumenta, alcanza un pico máximo y posteriormente decrece con mayor rapidez que en el escenario en el cual se identifica e informa anticipadamente la presencia de $m = 174$ contagiados. Esto ocurre porque, si a través de los medios de comunicación se da a conocer oportunamente la detección de 174 casos, la tasa de transmisión resulta inferior en comparación con la situación donde la notificación se efectúa de forma tardía con 500 personas confirmadas. De este modo, la influencia de la difusión mediática se refleja en la prontitud con la que se identifica y comunica a la sociedad un número más reducido de infectados, constituyéndose así en un mecanismo de control de la epidemia.

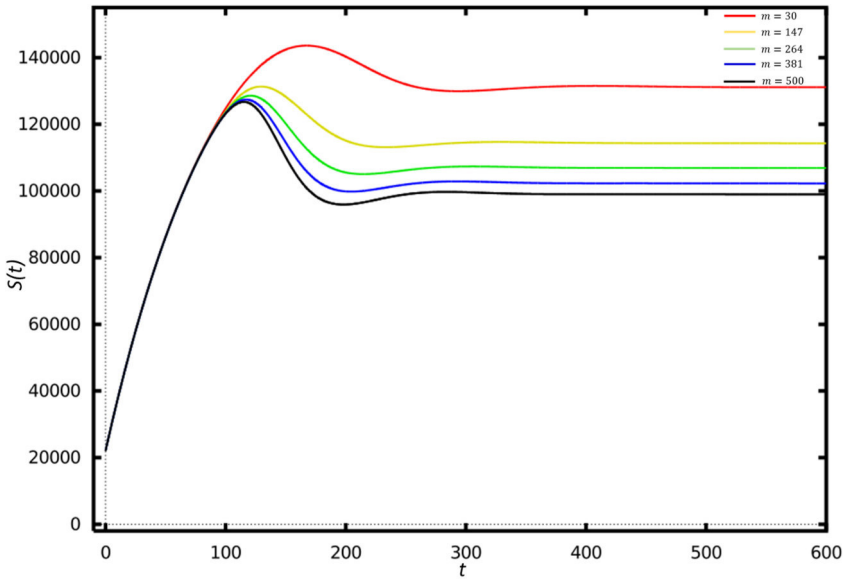


Figura 3.51: Dinámica de $S(t)$ variando m

La Figura 3.52 representa la evolución temporal de $I_1(t)$ bajo diferentes valores del parámetro $m = 30, 147, 264, 381$ y 500. Se evidencia que una detección temprana de un número reducido de individuos transmisores provenientes de las clases I_2 y J acompañada de una rápida difusión de la información por parte de las instituciones de salud pública, atenúa de manera significativa la intensidad de contagio. En consecuencia, la población con latencia lenta presenta un ascenso más moderado y alcanza niveles de estabilización considerablemente

menores frente a los escenarios en los que la notificación ocurre tardíamente.

En particular, cuando la comunicación a la población se realiza al identificarse $m = 500$ casos, el número de individuos en I_1 se aproxima a un máximo cercano a 84 000 conforme $t \to \infty$. En contraste, si la intervención ocurre de manera más temprana, al detectarse $m = 147$ individuos, la magnitud máxima disminuye de forma notable, alcanzando únicamente alrededor de 69 500 infectados. Estos hallazgos confirman que la divulgación oportuna de las medidas preventivas no solo modera el crecimiento inicial de la epidemia, sino que también limita su impacto global, consolidando así el rol estratégico de los medios de comunicación en la mitigación de la propagación del VIH/SIDA.

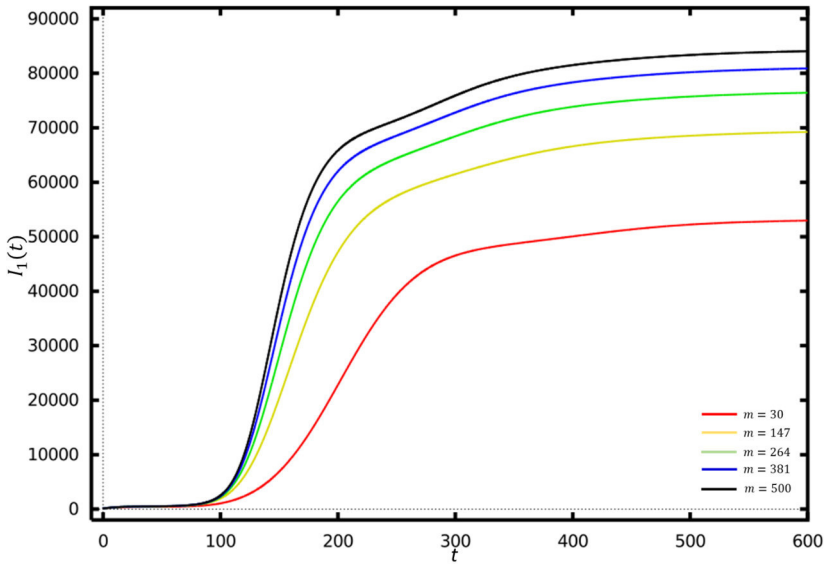


Figura 3.52: Dinámica de $I_1(t)$ variando m

En la Figura 3.53 se representa la evolución temporal de $I_2(t)$ para los valores $m = 30, 147, 264, 381$ y 500. El comportamiento descrito guarda correspondencia con las dos gráficas precedentes. En particular, cuando se logra detectar un número reducido de individuos infecciosos que generan transmisión (provenientes de las clases I_2 y J) y, en ese instante, las autoridades de control y prevención deciden comunicar de manera oportuna la información a la población, las tasas de contagio se reducen de manera significativa. Como consecuencia, la población de individuos I_2 experimenta un descenso inicial, seguido de un incremento que alcanza un valor máximo, para luego decrecer nuevamente hasta estabilizarse en niveles constantes.

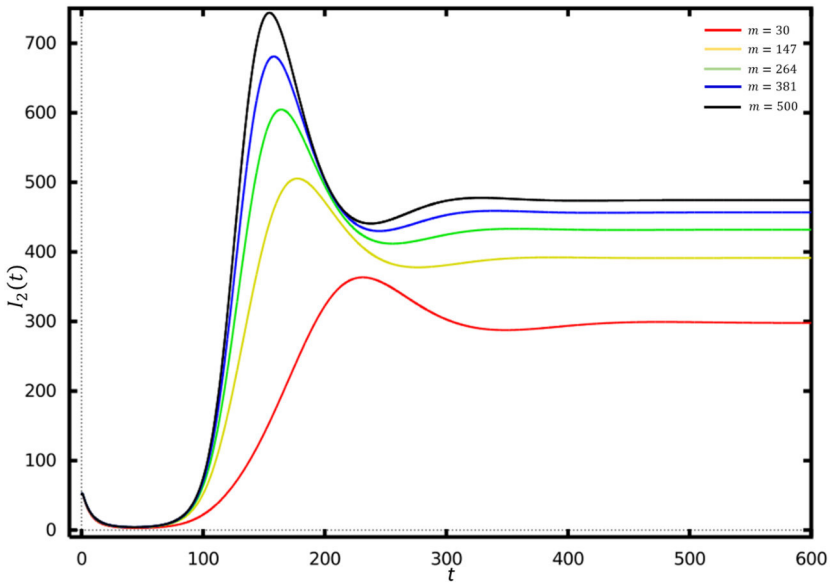


Figura 3.53: Dinámica de $I_2(t)$ variando m

La descripción se puede hacer de la misma manera que en la dinámica de I_1 y S.

En las Figura 3.54 y 3.55 se tiene la dinámica de $J(t)$ y $A(t)$ respectivamente cuando $m = 30$, 147, 264, 381 y 500; la misma idea que en la descripción de las gráficas anteriores, se logra identificar que al menor número de individuos infectados que contagian (de I_2 y J) detectados se debe informar a la población para evitar más contagios. Se recuerda que J y A son individuos que no contagian y que a pesar de tener picos altos no son tan altos comparados con I_2 e I_1; por tal motivo se origina que R_0 sea mayor que 1.

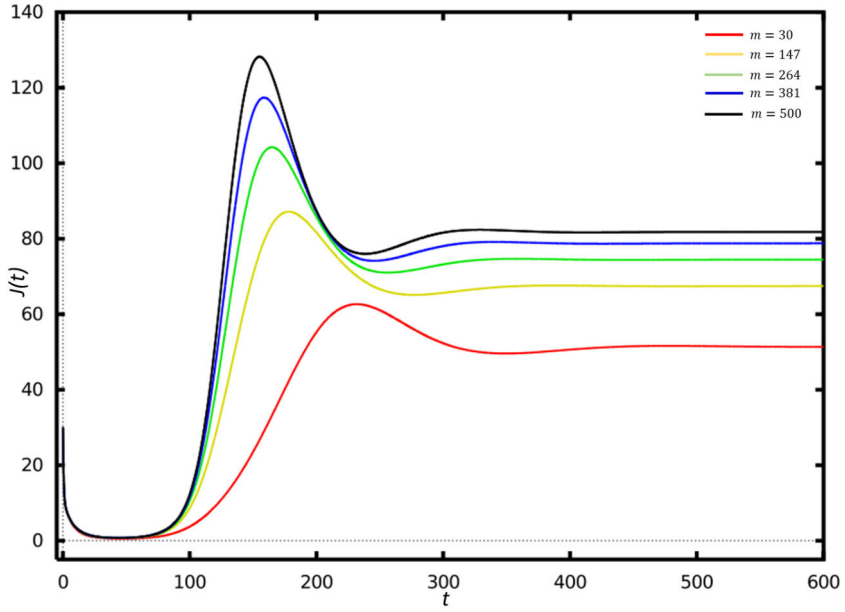


Figura 3.54: Dinámica de $J(t)$ variando m

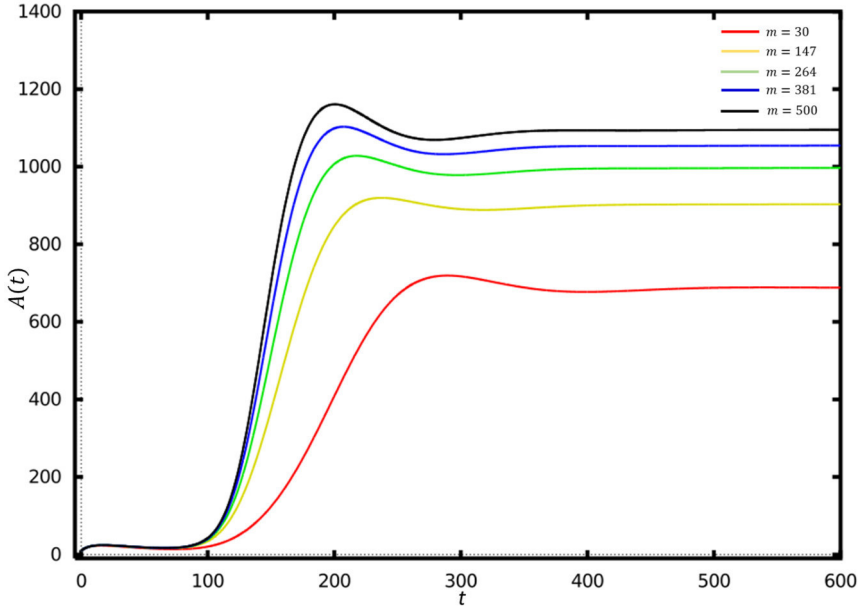


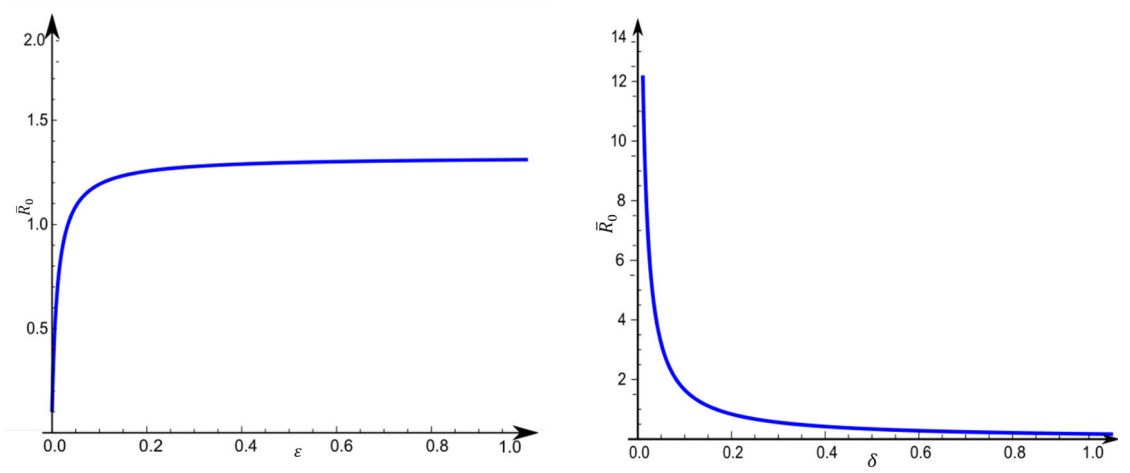
Figura 3.55: Dinámica de $A(t)$ variando m

3.17. Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad por simulaciones es una primera opción para visualizar rápidamente que sucede con el modelo e identificar cuál es el parámetro más sensible. Tener presente que $\bar{R}_0$ depende de parámetros y esta dado por:

$$\bar{R}_0 = \frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{\beta_1 b_3(\mu(1-p)+\varepsilon)+\beta_2 r(\mu(1-q)+\varepsilon)}{(\mu+\varepsilon)\left(\xi_1(\mu+\delta)+(\rho+\mu)(r+\mu+\delta)+\xi_2(\mu+\delta)\right)+\xi_1\mu r}\right) \tag{3.122}$$

Las gráficas en el plano dadas en la figura 3.56(a) y 3.56(b) se muestra $\bar{R}_0$ en función de ε y $\bar{R}_0$ en función de δ respectivamente manteniendo el resto de los parámetros constantes. En este escenario cuando ε crece, entonces $\bar{R}_0$ también crece superando a 1 y tomando valor máximo de hasta 1.3 aproximadamente. Esto quiere decir que, si la tasa de transición del compartimiento de individuos infectados con latencia lenta hacia los de latencia rápida es pequeña, entonces el sistema tiene un estado de equilibrio libre de la enfermedad; pero si para cierto valores de ε el número de reproducción básico supera a 1, luego se tiene una epidemia. Recordar que la población I_1 no infecta por ello que si I_2 se mantiene pequeño entonces no se expandirá la enfermedad. En el capitulo 3 el modelo no tenia el parámetro δ, sin embargo en este capítulo después de hallar $\bar{R}_0$ se visualiza que depende de este nuevo parámetro. De la figura 3.56(b), si δ crece; entonces $\bar{R}_0$ disminuye; mientras que si δ tiende a cero; $\bar{R}_0$ tiene de ser muy grande. Es decir, cuando hay más individuos con latencia rápida que por no tener síntomas y no llevar el tratamiento antirretroviral son más propensos a tener SIDA; por consiguiente I_2 y J decrecen y no hay epidemia. Mientras que, si muchos individuos infectados con latencia rápida pasan a tener síntomas y recibir tratamiento; por lo tanto $\bar{R}_0$ supera a 1 y se expandiría la enfermedad.



(a) $\bar{R}_0$ vs ε (b) $\bar{R}_0$ vs δ

Figura 3.56: Sensibilidad de $\bar{R}_0$ respecto a ε y δ respectivamente

La figura 3.57 muestra a $\bar{R}_0$ en función de β_2 y ρ donde se observa que si ρ disminuye y β_2 incrementa, entonces $\bar{R}_0$ supera a 1; es decir que al aumentar la tasa de incidencia β_2 en valores pequeños, entonces se origina el estado de equilibrio endémico. Mientras que, si la tasa de progresión del compartimiento de los infectados sintomáticos hacia el compartimiento de los individuos con SIDA se aproxima a 1, hace que $\bar{R}_0$ disminuya.

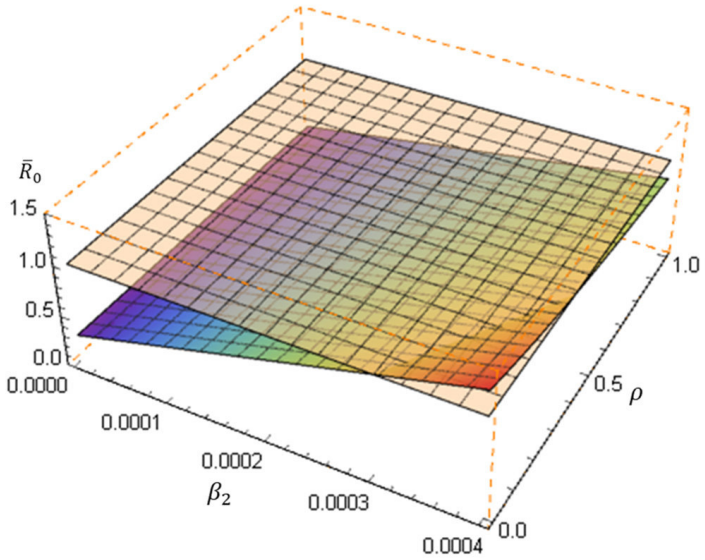


Figura 3.57: Grafica de R_0 vs ρ y β_2

En la figura 3.58 se muestra a $\bar{R}_0$ en función de r y δ donde se observa que si r y δ disminuyen, entonces $\bar{R}_0$ supera a 1; es decir que, al existir muchas personas asintomáticas con latencia rápida se origina mayor contagio. Mientras que, si más individuos con latencia rápida pasan a ser sintomáticos con tratamiento y en poca proporción individuos con latencia rápida pasan directamente al compartimiento de SIDA, en consecuencia $\bar{R}_0$ decrecerá.

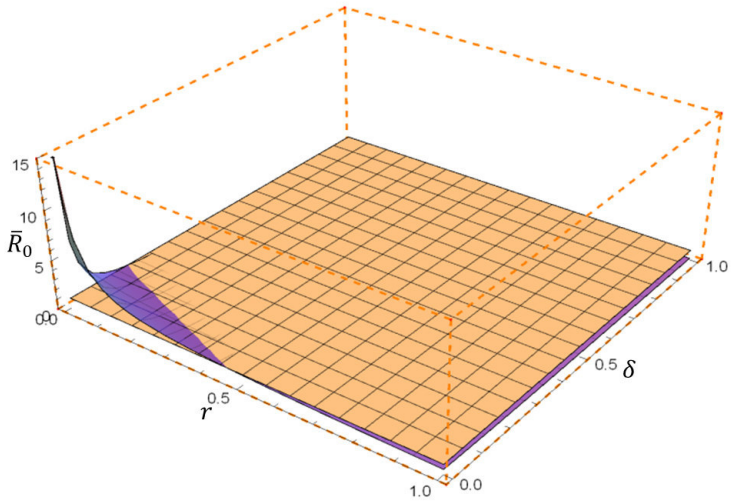


Figura 3.58: Grafica de $\bar{R}_0$ vs r y δ

En la figura 3.59 muestra a $\bar{R}_0$ en función de ξ_1 y ξ_2 donde se observa que si ξ_1 y ξ_2 toma valores próximos a cero, entonces $\bar{R}_0$ supera a 1; es decir que, si pocas personas sintomáticas que están recibiendo el tratamiento pasan a ser asintomáticos con latencia lenta o rápida; en consecuencia se origina el punto de equilibrio endémico. Esto puede ser, porque los individuos que reciben tratamiento están informados

de como evitar contagiarse cuando pasan a los compartimientos I_1 o I_2 y esto es bueno puedo para evitar más contagios. Por eso que si estas tasas son mayores por consecuencia $\bar{R}_0$ será menor que cero, lo que significa que es importante recibir el tratamiento.

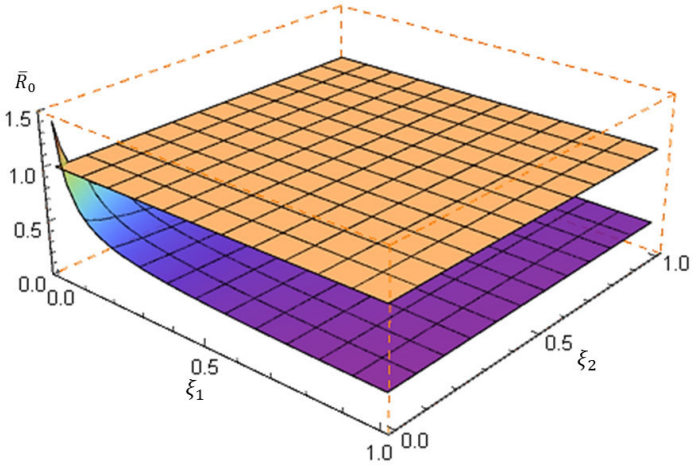


Figura 3.59: Grafica de $\bar{R}_0$ vs ξ_1 y ξ_2

La figura 3.60 muestra a $\bar{R}_0$ en función de r y ε donde se observa que si r disminuye y ε incrementa, entonces $\bar{R}_0$ supera a 1; es decir que, al aumentar la tasa de evolución del compartimiento I_1 a I_2; entonces, se origina el estado de equilibrio endémico. Mientras que, si la tasa de evolución del compartimiento de los infectados de latencia rápida hacia el compartimiento de los individuos con síntomas y en tratamiento se aproxima a 1, hace que $\bar{R}_0$ disminuya.

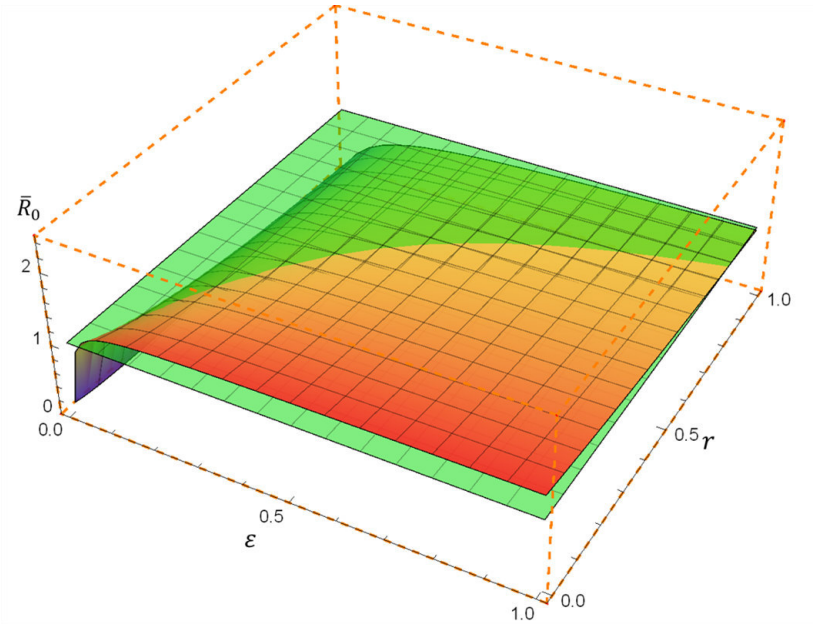


Figura 3.60: Grafica de $\bar{R}_0$ vs r y ε

La figura 3.61 ilustra un mapa de calor de $\bar{R}_0$ respecto a r y ε (es otra manera de representar la figura 3.60). Aquí se visualiza que a medida que ε se acerca a 1 y r se aproxima a 0, entonces $\bar{R}_0$ crece más rápido y supera a 1.

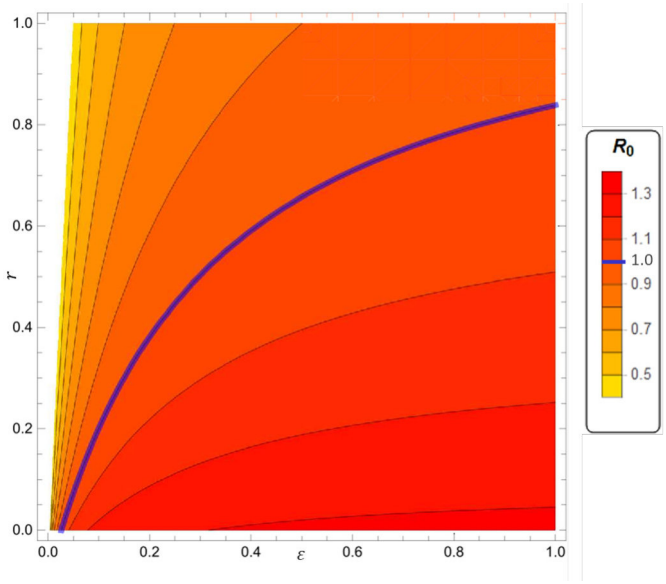


Figura 3.61: Grafica de $\bar{R}_0$ vs r y ε

Capítulo 4

Conclusiones

- Se evidencia que el modelo epidemiológico presentado en la sección 3.9, que incorpora dos fases de latencia para caracterizar la dinámica del VIH/SIDA y considera la influencia de la cobertura mediática, presenta un punto de equilibrio libre de infección que es localmente estable y globalmente asintóticamente estable cuando el número básico de reproducción es inferior a uno. Asimismo, el equilibrio endémico asociado se muestra global y asintóticamente estable siempre que el correspondiente número de reproducción supere la unidad.

- La cobertura mediática en el modelo (sección 3.9) tiene un impacto positivo; ya que, si se comunica a la población sobre la cantidad de infectados inmediatamente se tenga el reporte con la menor cantidad de infectados, entonces la población tomará sus precauciones para evitar ser contagiados. Esto no garantiza que la epidemia se extinga, pero si que la cantidad de infectados asintomáticos $I_1(t)$, $I_2(t)$ y $J(t)$ tendrán picos bajos en un tiempo no tan próximo, así las autoridades de la salud tendrán más tiempo para tomar medidas y evitar más contagios.

- En el modelo (sección 3.9) se tiene al grupo de los sintomáticos (J), estos por algún tipo de tratamiento puede convertirse en individuos con latencia lenta (I_1) o rápida (I_2). En este trabajo se ha llegado al resultado de que es importante el tratamiento, ya que si las tasas ξ_1 y ξ_2 son mayormente altas, por consiguiente la tasa de contagio disminuye. Esto puede suceder ya que los individuos sintomáticos han recibido el tratamiento y están mejor informados de los riesgos que tiene su organismo al aumentar la carga viral; por consiguiente, esto hará que tomen precauciones para su salud y eviten contagiar a otros individuos.

- Del modelo (sección 3.9) se concluye que; si aumenta el número de individuos asintomáticos que desconocen que tienen el VIH y que con el pasar de los años están más propensos a tener SIDA (llegan a la etapa final de la enfermedad); entonces el número reproductor básico disminuirá. Es decir que, la cantidad de contagios decrecerá cuando A aumente ya que, estos individuos no infectan. Esto esta relacionado con la sensibilidad que tiene R_0 respecto δ.

- Se concluye que, en el modelo (sección 3.9) si la tasa de progresión ε que lleva individuos asintomáticos con latencia lenta a rápida aumenta; en consecuencia

el sistema tiende a un estado endémico. Esto puede suceder en caso de que el sistema inmunológico de los individuos de latencia lenta se debilite por alguna otra enfermedad y si a ello le agregamos que las personas de latencia rápida no reciben tratamiento, por consiguiente se puede originar una epidemia.

- Los modelos de la sección 3 y 3.9 presentan diagrama de bifurcación hacia adelante, además se cumple la estabilidad global de los puntos de equilibrios. Así mismo; el modelo de 3.9 se convierte en el modelo de la sección3 cuando $\delta = 0$, lo cual nos permite concluir de manera general que con un buen uso de la cobertura mediática, con un aumento de individuos que reciban el tratamiento y que se llegué tener más acceso a los test del VIH, en consecuencia la propagación de la enfermedad disminuirá.

Capítulo 5

Trabajos Futuros

- Como próximo trabajo de investigación se propone realizar un estudio al modelo considerando una coinfección entre la malaria y el VIH o entre la tuberculosis con el VIH; teniendo en cuenta la cobertura mediática. Esto con el objetivo de estudiar como influyen los tratamientos de ambas enfermedades junto con la cobertura mediática en el modelo. Puesto que, se sabe que el VIH incrementa el riesgo de infección por la malaria y hace que los síntomas de esta enfermedad se aceleren (Abu-Raddad, Patnaik, y Kublin, 2006). Así mismo, por el contrario cuando una persona infectada por el VIH es atacada por la malaria, entonces su sistema inmunológico se debilita y hace que la carga viral incremente, por consiguiente el número de casos de VIH crece (Mukandavire y cols., 2009). Algo similar se puede realizar con un modelo epidemiológico de coinfección entre la tuberculosis y el VIH; pues la infección por VIH acelera la activación de la tuberculosis; mientras que la tuberculosis incrementa la carga viral y hace que la persona llegue a tener SIDA (Mayer y Hamilton, 2010).

- El presente modelo se puede extender a compartimentos multilatentes para la población infecciosa dependiendo de varias etapas debido al tratamiento y a restricciones socioeconómicas con el objetivo de estudiar la dinámica del modelo para realizar una comparación con los resultados de esta investigación. Por ejemplo, considerar $I_3(t)$, que se puede interpreta como el grupo de individuos con latencia media que infectan (Singh, Ali, Jain, y cols., 2016).

- Se puede realizar un estudio de este modelo considerando retardo temporal con el objetivo de proporcionar una situación más realista de la propagación de la enfermedad. Como un inicio de esta investigación se sugiere como referencia a (Pino Romero, 2017).

Referencias

Abu-Raddad, L. J., Patnaik, P., y Kublin, J. G. (2006). Dual infection with hiv and malaria fuels the spread of both diseases in sub-saharan africa. *Science*, *314*(5805), 1603–1606.

Ali, S., Raina, A. A., Iqbal, J., y Mathur, R. (2019). Mathematical modeling and stability analysis of hiv/aids-tb co-infection. *Palestine Journal of Mathematics*, *8*(2).

Anderson, B., Jury, E., y Mansour, M. (1987). On robust hurwitz polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *32*(10), 909–913.

Aron, J. L. (1988). Mathematical modelling of immunity to malaria. *Mathematical Biosciences*, *90*(1-2), 385–396.

Bacaër, N., Ripoll, J., de La Parra, R. B., Bardina, X., y Cuadrado, S. (2021). *Matemáticas y epidemias*.

Bernoulli, D., y Blower, S. (2004). An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it. *Reviews in medical virology*, *14*(5), 275.

Brauer, F., Castillo-Chavez, C., y Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology* (Vol. 2) (n.º 40). Springer.

Brauer, F., Castillo-Chavez, C., y Feng, Z. (2019). *Mathematical models in epidemiology* (Vol. 32). Springer.

Braun, M., y Golubitsky, M. (1983). *Differential equations and their applications* (Vol. 2). Springer.

Cai, Y., Kang, Y., Banerjee, M., y Wang, W. (2016). A stochastic epidemic model incorporating media coverage. *Commun. Math. Sci*, *14*(4), 893–910.

Capasso, V., y Serio, G. (1978). A generalization of the kermack-mckendrick deterministic epidemic model. *Mathematical biosciences*, *42*(1-2), 43–61.

Castillo-Chavez, C., Feng, Z., y cols. (1996). Mathematical models for the disease dynamics of tuberculosis.

Castillo-Chavez, C., y Song, B. (2004). Dynamical models of tuberculosis and their applications. *Mathematical Biosciences & Engineering*, *1*(2), 361–404.

Chen, T., Li, Z., y Zhang, G. (2024). Analysis of a covid-19 model with media coverage and limited resources. *Mathematical Biosciences and Engineering*, *21*(4), 5283–5307.

Chicone, C. (1999). Linear systems and stability. *Ordinary Differential Equations with Applications*, 127–197.

Cui, J., Sun, Y., y Zhu, H. (2008). The impact of media on the control of infectious diseases. *Journal of dynamics and differential equations*, *20*(1), 31–53.

David, G., SCHAEFFER, C., y John, W. (2018). *Ordinary differential equations: Basics and beyond*. Springer.

Dietz, K. (1982). Overall population patterns in the transmission cycle of infectious disease agents. En *Population biology of infectious diseases* (pp. 87–102). Springer.

Ermentrout, B., y Mahajan, A. (2003). Simulating, analyzing, and animating dynamical systems: a guide to xppaut for researchers and students. *Appl. Mech. Rev.*, *56*(4), B53–B53.

Esteva, L., y Vargas, C. (1998). Analysis of a dengue disease transmission model. *Mathematical biosciences*, *150*(2), 131–151.

Givental, A. (2001). *Linear algebra and differential equations*. American Mathematical Soc.

Gonzales-Moreno K, R., López-Cruz. (2021). Estabilidad de un modelo matemático del vih/sida considerando el tratamiento y el impacto de la cobertura mediática. *Selecciones Matemáticas*, *8*(2), 274–294.

Goswami, N. K., Olaniyi, S., Abimbade, S. F., y Chuma, F. M. (2024). A mathematical model for investigating the effect of media awareness programs on the spread of covid-19 with optimal control. *Healthcare Analytics*, *5*, 100300.

Guo, H., Li, M., y Shuai, Z. (2008). A graph-theoretic approach to the method of global lyapunov functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *136*(8), 2793–2802.

Guo, S., y Wu, J. (2013). *Bifurcation theory of functional differential equations* (Vol. 10). Springer.

Heesterbeek, J., y Metz, J. A. (1993). The saturating contact rate in marriage-and epidemic models. *Journal of Mathematical Biology*, *31*(5), 529–539.

Hethcote, H. W., y Van den Driessche, P. (1991). Some epidemiological models with nonlinear incidence. *Journal of Mathematical Biology*, *29*(3), 271–287.

Hirsch, M. W., Smale, S., y Devaney, R. L. (2012). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press.

Huo, H.-F., Chen, R., y Wang, X.-Y. (2016). Modelling and stability of hiv/aids epidemic model with treatment. *Applied Mathematical Modelling*, *40*(13-14), 6550–6559.

Huo, H.-F., y Feng, L.-X. (2013). Global stability for an hiv/aids epidemic model with different latent stages and treatment. *Applied Mathematical Modelling*, *37*(3), 1480–1489.

Janson, S. (2010). Roots of polynomials of degrees 3 and 4. *arXiv preprint arXiv:1009.2373*.

Johnson, L. (2004). An introduction to the mathematics of hiv/aids modelling. *Capetown: Centre for Actuarial Research, University of Capetown, unpublished manuscript*.

Korobeinikov, A., y Maini, P. (2004). A lyapunov function and global properties for sir and seir epidemiological models with nonlinear incidence.

LaSalle, J. (1960). Some extensions of liapunov's second method. *IRE Transactions on circuit theory*, *7*(4), 520–527.

La Salle, J. P. (1976). *The stability of dynamical systems*. SIAM.

Ledder, G. (2023). *Mathematical modeling for epidemiology and ecology*. Springer Nature.

Li, M. Y. (2018). *An introduction to mathematical modeling of infectious diseases* (Vol. 2). Springer.

Li, M. Y., y Muldowney, J. S. (1996). A geometric approach to global-stability problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, *27*(4), 1070–1083.

Liao, X., Wang, L., y Yu, P. (2007). *Stability of dynamical systems*. Elsevier.

Liu, R., Wu, J., y Zhu, H. (2007). Media/psychological impact on multiple outbreaks of emerging infectious diseases. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, *8*(3), 153–164.

Liu, W.-m., Hethcote, H. W., y Levin, S. A. (1987). Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. *Journal of mathematical biology*, *25*(4), 359–380.

Liu, W.-m., Levin, S. A., y Iwasa, Y. (1986). Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of sirs epidemiological models. *Journal of mathematical biology*, *23*(2), 187–204.

Liu, Y., y Cui, J.-A. (2008). The impact of media coverage on the dynamics of infectious disease. *International Journal of Biomathematics*, *1*(01), 65–74.

Logan, J. D. (2006). *A first course in differential equations*. Springer.

López-Cruz, R. (2006). *Structured si epidemic models with applications to hiv epidemic*. Arizona State University.

Martcheva, M. (2015). *An introduction to mathematical epidemiology* (Vol. 61). Springer.

Martínez, J. M. S. (2013). *Problemas elementales de olimpiadas de matemáticas*. Universidad de Alicante.

Mastroberardino, A., Cheng, Y., Abdelrazec, A., y Liu, H. (2015). Mathematical modeling of the hiv/aids epidemic in cuba. *International Journal of Biomathematics*, *8*(04), 1550047.

Mayer, K. H., y Hamilton, C. D. (2010). *Synergistic pandemics: confronting the global hiv and tuberculosis epidemics* (Vol. 50) (n.º Supplement_3). The University of Chicago Press.

MINSA. (2020). *Norma técnica de la salud de atención integral del adulto con infección por el virus de la inmunodeficiencia humana 2020.* Descargado de `https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/1482085/Resoluci%C3%B3n%20Ministerial%20N%C2%B01024-2020-MINSA.PDF`

Mukandavire, Z., Gumel, A. B., Garira, W., y Tchuenche, J. M. (2009). Mathematical analysis of a model for hiv-malaria co-infection. *Mathematical Biosciences & Engineering*, *6*(2), 333–362.

OMS. (2003). *Informe sobre la salud en el mundo 2003: Forjemos el futuro*. World Health Organization.

ONUSIDA. (2024). *Hoja informativa-últimas estadísticas sobre el estado de la epidemia de sida.* Descargado de `https://www.unaids.org/es/resources/fact-sheet`

Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.

Pino Romero, N. (2017). Análisis y simulación numérica de un modelo matemático si con retardo discreto para las enfermedades de transmisión sexual.

Ripoll, J., de la Parra, R. B., Bardina, X., y Cuadrado, S. (s.f.). Nicolas bacaër.

Ross, S. R. (1905). *Researches on malaria*. John Bale, Sons & Danielsson London.

Routh, E. J. (1877). *A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion: being the essay to which the adams prize was adjudged in 1877,*

in the university of cambridge. Macmillan and Company.

Rvachev, L. A., y Longini Jr, I. M. (1985). A mathematical model for the global spread of influenza. *Mathematical biosciences*, *75*(1), 3–22.

Salman, S. M. (2021). Memory and media coverage effect on an hiv/aids epidemic model with treatment. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *385*, 113203.

Samanta, S., Rana, S., Sharma, A., Misra, A. K., y Chattopadhyay, J. (2013). Effect of awareness programs by media on the epidemic outbreaks: A mathematical model. *Applied Mathematics and Computation*, *219*(12), 6965–6977.

Sastry, S. (2013). *Nonlinear systems: analysis, stability, and control* (Vol. 10). Springer Science & Business Media.

Shah, N. H., y Mittal, M. (2021). *Mathematical analysis for transmission of covid-19*. Springer.

Sharomi, O., Podder, C. N., Gumel, A. B., y Song, B. (2007). Mathematical analysis of the transmission dynamics of hiv/tb coinfection in the presence of treatment. *Mathematical Biosciences & Engineering*, *5*(1), 145–174.

Shuai, Z., y van den Driessche, P. (2013). Global stability of infectious disease models using lyapunov functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *73*(4), 1513–1532.

Singh, R., Ali, S., Jain, M., y cols. (2016). Epidemic model of hiv/aids transmission dynamics with different latent stages based on treatment. *American Journal of Applied Mathematics*, *13*(2), 222–234.

Strogatz, S., Friedman, M., Mallinckrodt, A. J., y McKay, S. (1994). Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. *Computers in Physics*, *8*(5), 532.

Takeuchi, Y., Iwasa, Y., y Sato, K. (2007). *Mathematics for life sciences and medicine. 574 springer-verlag*. Berlin.

Tchuenche, J. M., Dube, N., Bhunu, C. P., Smith, R. J., y Bauch, C. T. (2011). The impact of media coverage on the transmission dynamics of human influenza. *BMC public health*, *11*(1), 1–14.

Van den Driessche, P., y Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical biosciences*, *180*(1-2), 29–48.

Wiggins, S., Wiggins, S., y Golubitsky, M. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* (Vol. 2) (n.º 3). Springer.

Wu, Y., Chen, S., Zhang, G., y Li, Z. (2024). Dynamic analysis of a stochastic vector-borne model with direct transmission and media coverage. *AIMS Math*, *9*, 9128–9151.

Yusuf, T. T. (2021). On global stability of disease-free equilibrium in epidemiological models. *European Journal of Mathematics and Statistics*, *2*(3), 37–42.

Zahli, R., Zeroual, K., y Fatmi, N. I. (2024). Tuberculosis and hiv/aids co-dynamics: a mathematical model and sensitivity analysis. *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, *2024*, Article–ID.