

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Físicas

Escuela Académico Profesional de Física

Enseñanza de la física a través de software libre

MONOGRAFÍA TÉCNICA

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

AUTOR

Jorge Moisés MINAYA MARTÍNEZ

ASESOR

Raúl Félix CARITA MONTERO

Lima, Perú

2009



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Minaya, J. (2009). *Enseñanza de la física a través de software libre*. Monografía Técnica para optar el título profesional de Licenciado en Física. Escuela Académico Profesional de Física, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

DEDICATORIA

A mi madre, quien inculco en mí un espíritu más humano.
A mi familia toda, quienes resistieron los embates de la vida.

AGRADECIMIENTOS

A la Dra. Mariela Berrocal y al Doctor Raúl Carita, quienes me brindaron su tiempo y aliento y compromiso en este trabajo.
A

INDICE

Resumen

Capítulo I. Introducción

Capítulo II.

2.1 Scilab y Scicos

2.2 Herramientas del Scicos

2.3 Símbolos

2.4 Accesando a Scicos

2.5 Modelos sencillos

2.5.1 Ejemplo 1

2.5.2 Ejemplo 2

Capítulo III.

3.1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

3.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.

3.3 Ecuación diferencial lineal de la forma $y'+ay=b(t)$; para $t\geq 0$.

3.4 Ecuación diferencial lineal de la forma $y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$

Capítulo 4. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

4.1 Caída de graves

4.2 Ley de enfriamiento de Isacc Newton

4.3 Radioactividad

4.4 Circuito RC

4.5 Circuito RL (con voltaje constante)

4.6 Circuito RL con voltaje dependiente del tiempo

Capitulo V. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

5.1 Ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden

5.2 Ecuaciones diferenciales de segundo orden no homogéneas.

Capítulo VI. Aplicaciones de las ecuaciones de segundo orden

6.1 Movimiento armónico simple

6.2 Circuito eléctrico LC bajo la presencia de una fuerza electromotriz constante.

6.3 Sistema masa-resorte con amortiguamiento

Conclusiones

Referencias bibliográficas

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo, es propiciar el uso de una nueva herramienta libre y gratuita en español que sirve como complemento a las tareas cotidianas de la enseñanza-aprendizaje de la física: Scilab y su simulador el Scicos., Asimismo, generar una cultura en torno a los grandes beneficios del software libre como soporte para las tareas didácticas y pedagógicas. En este marco, esta monografía constituye también, un manual en español para quienes requieran simular sistemas dinámicos de fenómenos físicos.

Scicos, es un editor de diagramas de bloques con ambiente amigable que puede ser usado para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales que representa un problema físico a resolver.

Nos centramos en resolver algunos modelos físicos, cuyas soluciones parten de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden. Se muestran distintas aplicaciones ilustrativas a partir del cual se pueden ampliar una serie de necesidades propias para cada área de la física. Las simulaciones que se muestran presentan un carácter cualitativo de los modelos físicos así como la comprobación de sus formulaciones matemáticas.

CAPITULO I

1.1 Introducción

La aparición del software libre se registra desde los años 60 y 70 del siglo pasado, donde no era considerado un producto sino un añadido que los vendedores de los grandes computadores de la época aportaban a sus clientes para que estos pudieran usarlos. En la decana del 70, cuando la informática todavía no ha sufrido un gran avance, las personas hacían uso de ella en los ámbitos, académicos y empresariales, creaban y compartían el software sin ninguna restricción.

En la década del 80, la situación empezó a cambiar, las computadoras empezaron a utilizar sistemas operativos privados, forzando a los usuarios a aceptar condiciones restrictivas que impedían realizar modificaciones de dicho software, es decir, no se tenía acceso al código fuente. [1]

Con este antecedente, Richard Stallman [2] comenzó a trabajar en un proyecto para luego fundar la Free Software Fundation (Fundación del Software Libre). El software libre es la denominación del software que brinda la libertad a los usuarios sobre su producto adquirido. De modo más preciso, se refiere a cuatro libertades de los usuarios [3]: la libertad de usar el programa con cualquier propósito, de estudiar el funcionamiento del programa y adaptarlo a las necesidades, de distribuir copias con lo que puede ayudar a otros, de mejorar el programa y hacer públicas las mejoras de modo que toda la comunidad se beneficie.

En la actualidad se han desarrollado diversos software libres aplicados a las infinitas necesidades de los usuarios, entre los principales software de carácter científico y pedagógico podemos mencionar a: Maxima, Octave, R, Qcad, Mayura Draw, Grass, TNTitle, OpenOffice, Alice, Wings 3D. [4]

En el Perú, el escaso desarrollo del software libre y la falta de una cultura para su impulso, trae consigo la dependencia tecnológica y cultural para nuestro

país. El costo cada vez mayor de software aplicativos para los diferentes campos de la investigación, implican la búsqueda y creación de nuevas alternativas para el desarrollo de la investigación, es en esa búsqueda, donde nace el software libre, que se caracterizan por no ser privados, y por tanto, no es una negación a la investigación.

Scilab, es un software libre comparable por sus cualidades al Matlab y tiene como simulador al Scicos, cuyo uso es aplicado a diferentes áreas de investigación como la física, la economía, la biología, la química, etc.

Éste trabajo se focaliza en la aplicación en la enseñanza de la física como instrumento de apoyo para visualizar, interpretar y describir cualitativamente un fenómeno físico modelado en forma matemática a través una ecuación diferencial ordinaria de primer y segundo orden.

En la primera parte se describe una visión general de Scilab y Scicos donde se identifica, de manera general, las características y bondades más importantes de éste software, para este fin, se ilustran (con sus respectivos diagramas de bloques y gráficas correspondientes) dos ejemplos aplicativos que se derivan de solucionar ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden. En la segunda parte, procedemos a solucionar las ecuaciones ordinarias de primer orden con coeficientes constantes y dependientes del tiempo, seguido de sus respectivas aplicaciones a la física. Un tercer bloque, es seguido por las ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden seguidas de las aplicaciones correspondientes.

CAPÍTULO II

2.1 Scilab y Scicos

Scilab, fue creado a inicios de la década de los 90 por un grupo de seis investigadores franceses (Jean-Philippe Chancelier, François Debelecque, Claude Gómez, Maurice Goursat, Ramine Nikoukhah y Serges Steer) . Este equipo (llamado equipo “Scilab”), trabajó en la publicación de dos libros en dos idiomas (inglés y francés), donde trata del uso y manejo de las herramientas de todo el paquete del Scilab. La creación de este software, fue inspirada por la potencia y eficacia del Matlab y a inicios de 1994, cuando se amplió la cobertura de internet, se decidió distribuir gratuitamente en su primera versión (Scilab 1.1) a través de su página web como un software libre. Esta distribución se hizo en diversas plataformas (entre ellas Windows y Linux) [5].

Desde el inicio de la primera versión y con el apoyo de desarrolladores externos, Scilab va renovándose anualmente presentando una nueva versión. En noviembre del 2008, salió a la luz la última versión: Scilab 5.1, la cual puede ser descargada desde su página [5].

Scilab, incluye un gran número de bibliotecas que engloban funciones gráficas, integración numérica, algebra lineal, entre otras. Asimismo, posee un lenguaje de programación propia que permite la creación de programas numéricos.

Entre las principales características [6] de Scilab podemos citar a:

- **a.** Es un software de distribución gratuita, con código fuente disponible, su lenguaje es simple y de fácil aprendizaje.
- **b.** Cuenta con un sistema de apoyo para el usuario: help.
- **c.** Es un ambiente que cuenta con herramientas gráficas bidimensionales y tridimensionales, inclusive animaciones tridimensionales.
- **d.** Cuenta con diversas funciones matemáticas que se pueden manipular fácilmente.

Por otro lado, Scilab, incluye a Scicos como un conjunto de herramientas que es utilizado para el modelamiento, simulación y análisis de sistemas dinámicos. Este sistema se aplica a sistemas lineales y no lineales, continuos y discretos. Scicos, fue creado por el investigador Francés R. Nikoukhah [7] y la

codificación está hecha en el simulador fortran y el lenguaje “C”. Además, Utiliza una interface gráfica como usuario para la construcción de modelos a partir de diagramas de bloques previamente establecido, a través de operaciones de clic y arrastre del mouse. Con esta interface podemos generar modelos de la misma forma lógica con que lo haríamos con un lápiz y un papel.

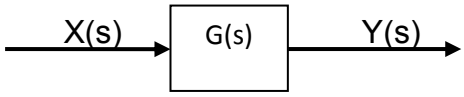
A partir de la definición de un modelo (ecuación matemática), la simulación puede ser hecha con diferentes algoritmos de resolución, escogidos a partir del menú de Scicos. El tratamiento, del diagrama del bloques es similar (en su estructura) al diagrama de bloques del Simulink del Matlab [8]. En la siguiente sección se ampliará el funcionamiento con aplicaciones concretas que obedecen al objetivo del presente trabajo.

2.2 Herramientas del Scicos

Para representar los sistemas físicos por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias se debe definir la relación entre la entrada y salida de las funciones y por lo tanto, es conveniente describir y sistematizar correctamente dicha relación matemática, de tal forma que la relación sea expresada claramente [8]. Una forma de representar las ecuaciones diferenciales de un sistema consiste en utilizar un diagrama de bloques, en la que cada bloque representa una operación matemática asociada a la entrada y salida.

2.3 Símbolos

Podemos sintetizar los diagramas de bloques, de manera general, con los siguientes símbolos a seguir.



Donde:

X(S): la variable en entrada

Y(s): la variable de salida

G(s): función de transferencia

A demás, el bloque rectangular es un operador determinado.

2.4 Accesando a Scicos

Para ingresar a Scicos, se abre previamente la ventana de Scilab y desde el menú de aplicaciones se llama al programa Scicos. Otra forma de ingresar es escribiendo la palabra Scicos desde la ventana de Scilab y presionando Enter. (ver la figura 1).

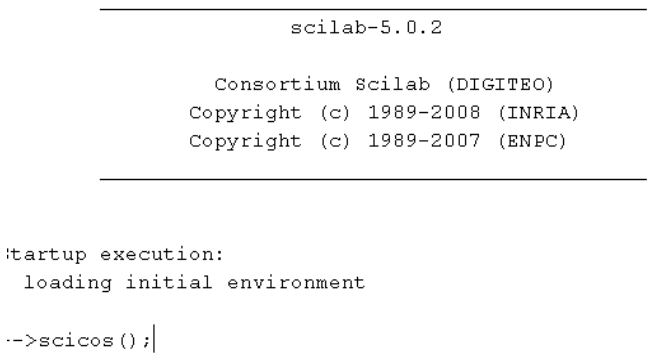


Figura 01. Ventana de Scilab

2.5 Modelos sencillos

2.5.1 Ejemplo. Simularemos una ecuación diferencial de primer orden, Sea la siguiente ecuación diferencial y dadas las condiciones iniciales.

$$y' = \text{sen}(t), \text{ dado } t=0,\ y(0)=0.$$

Ya en la ventana de Scicos, se abrirá una ventana en blanco, sin nombre, luego procedemos a identificarlo con un nombre y grabar dicho archivo (del menú file, escogemos save y le damos el nombre ejemplo 1).



Figura 02. Ventana Scicos con el menú palette.

Procedemos a escoger desde el menú “palette”, las herramientas necesarias para nuestro problema. Damos clic en la biblioteca de sources (fuentes), donde aparecerá una serie de bloques como se muestra la figura 3.

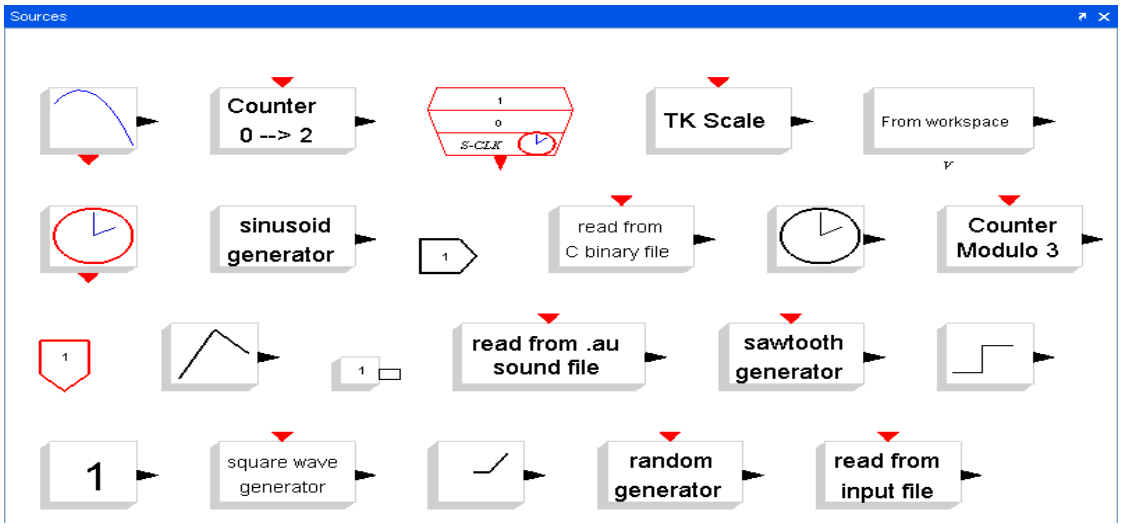


Figura 03. Biblioteca de fuentes

Como necesitamos la función seno, elegimos y arrastramos dicha función o hacemos doble clic sobre dicho bloque. (Este bloque se encuentra en paletas y luego elegimos fuentes).

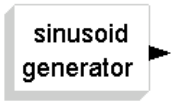


Figura 04. Bloque que genera la función Seno.

Abrimos la biblioteca lineal y elegimos el bloque de integración.

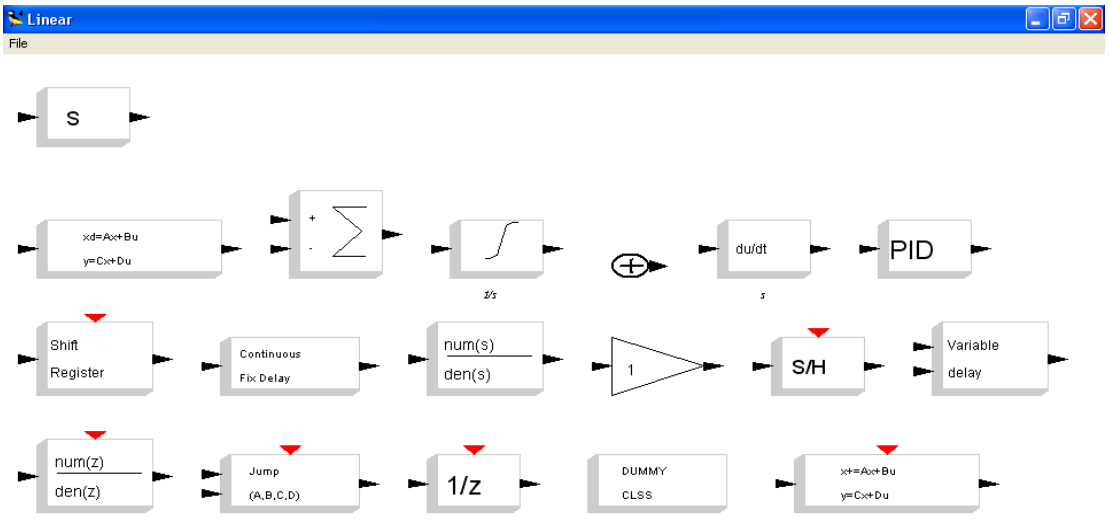


Figura 05. Muestra la biblioteca lineal

Relacionamos los dos bloques mediante el enlace y se muestra el bloque de generador y la integración.

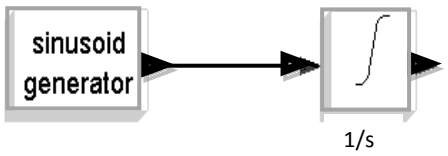


Figura 06. Muestra el bloque de integración

Abrimos la biblioteca de salida (ver figura 07), y elegimos un osciloscopio para mostrar el resultado de la ecuación diferencial planteada.

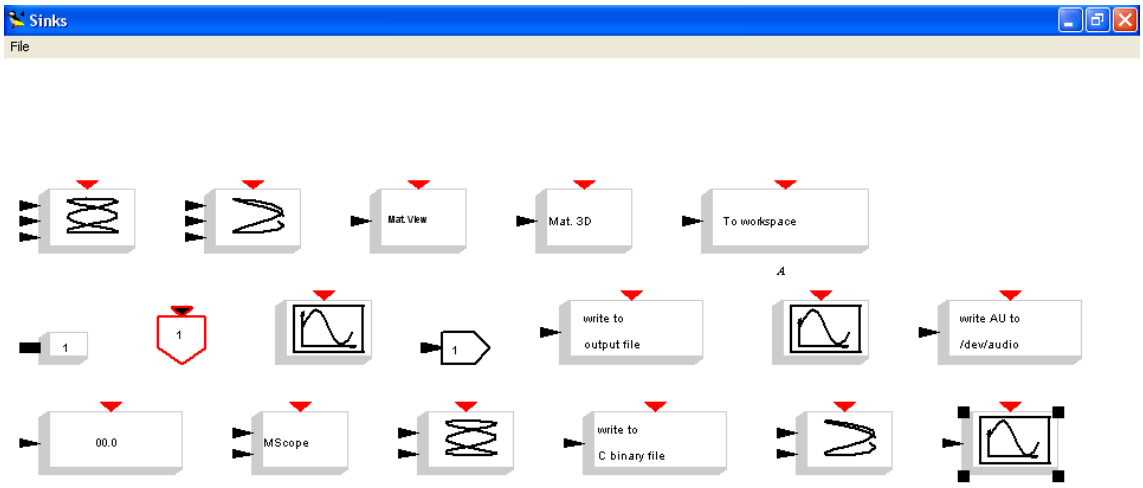


Figura 07. Biblioteca de los bloques de salida.

para la muestra de la gráfica es necesario sincronizada el tiempo de salida, por tanto requerimos de un reloj que se encuentra en la biblioteca de fuentes. Conectamos los bloques como se muestra:

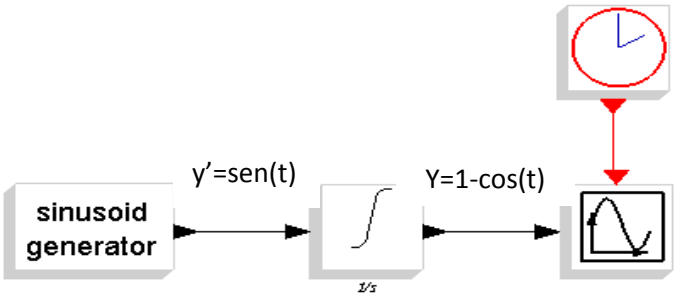


Figura 08. Diagrama de bloques de la ecuación y'=sen(t)

De la barra de menú elegimos simulate – setup (ver figura 02) y establecemos un tiempo de integración igual a 10 **(ver figura 09)**. En el circuito, se ingresa inicialmente la función (seno), luego se integra (considerando sus valores iniciales), y por último se muestra dicha integración.

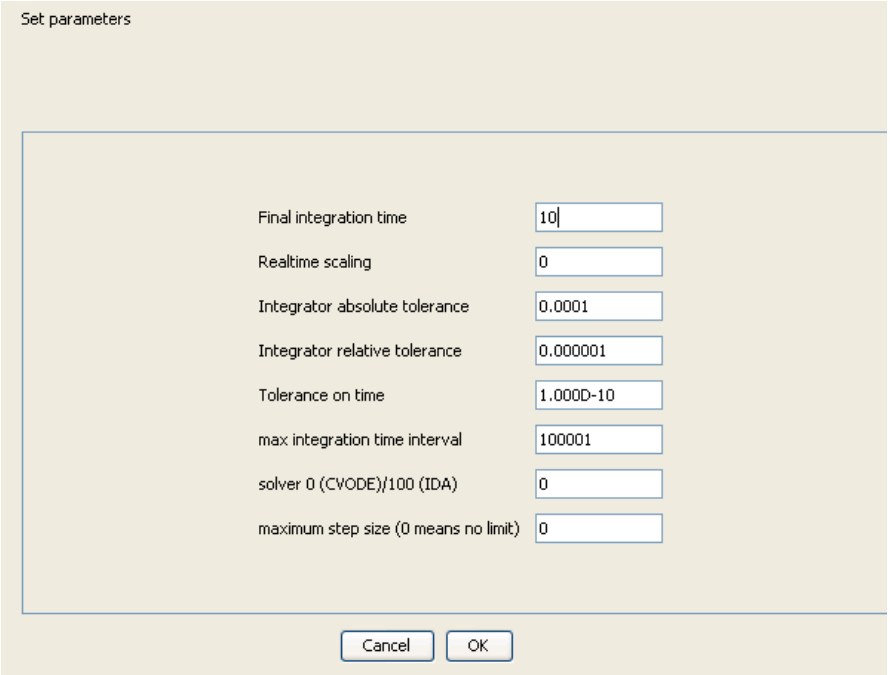


Figura 09. Caja del Setup.

Hacemos doble clic en el osciloscopio y aparecerá una pantalla de parámetros (ver figura 10) y ingresamos los valores del eje “y” (valores extremos superior e inferior), a demás ingresamos el valor para el “refresh period” igual 10. Por defecto en el bloque integrador (1/s) se genera la condición inicial como cero.

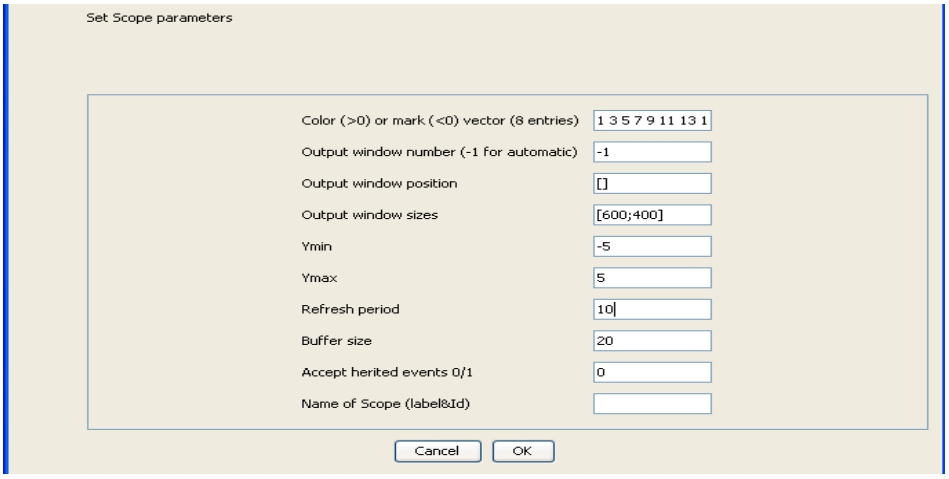


Figura 10. Caja del osciloscopio

Por último, procedemos a simular nuestro modelo. Hacemos clic en “simúlate – run”. El resultado muestra el siguiente gráfico:

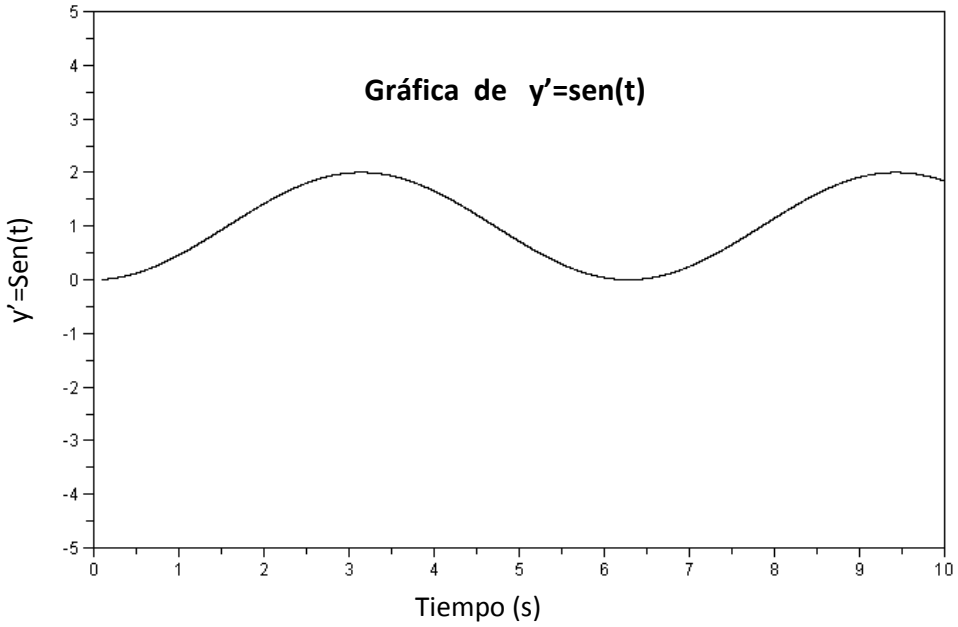


Figura 11. Muestra gráfica de la ecuación diferencial y’=sen(t)

Para verificar que este grafico representa a la solución de la ecuación diferencial deseada, debemos resolver analíticamente dicha ecuación, cuyo resultado es: Y(t)=1-cos(t), cuyas condiciones inciales para t=0, es y=1.

2.5.2 Ejemplo. En este ejemplo, resolveremos una ecuación de segundo orden. Sea la ecuación diferencial y’’+3y’+2y=0, con y(0)=2 e y’(0)=-3

La ecuación característica es: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, con raíces : $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2$.

La solución general es: $y = c_1 e^{-1t} + c_2 e^{-2t};$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2\ ;\ y'(0) = -1c_1 - 2c_2 = -3$$

Luego c_1=1 y c_2=1 ; lo cual nos conduce a la solución siguiente:

$$y = e^{-1t} + e^{-2t}$$

Siguiendo el procedimiento del ejemplo 2.5.1, la solución en Scicos con su respectivo diagrama de bloques (ver figura 12). Los detalles de funcionamiento de este diagrama de bloques se muestran en el capítulo V, donde se ilustra el esquema general de un diagrama de bloques para resolver una ecuación diferencial de segundo orden.

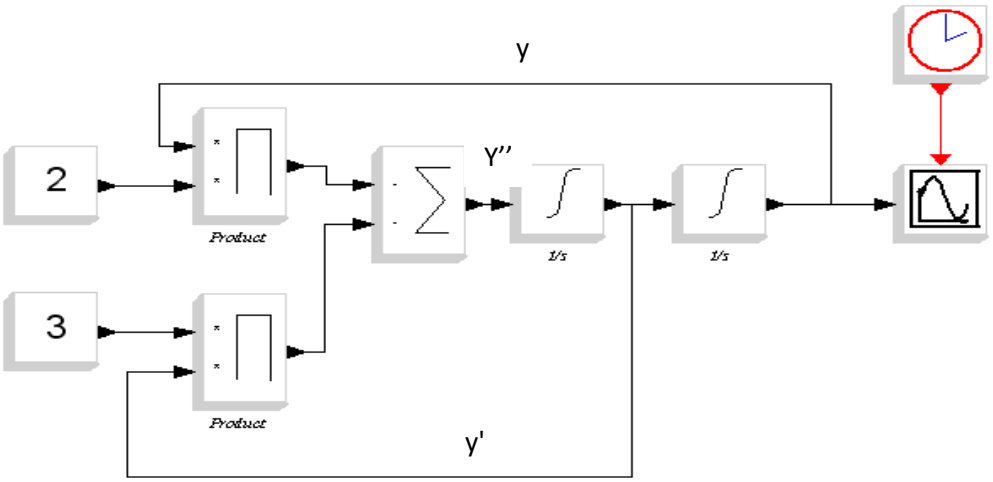


Figura 12. Diagrama de bloques de la ecuación y''+3y'+2y=0

Procedemos a simular el programa, para el cual ingresamos a simúlate (simulación) y elegimos "run".

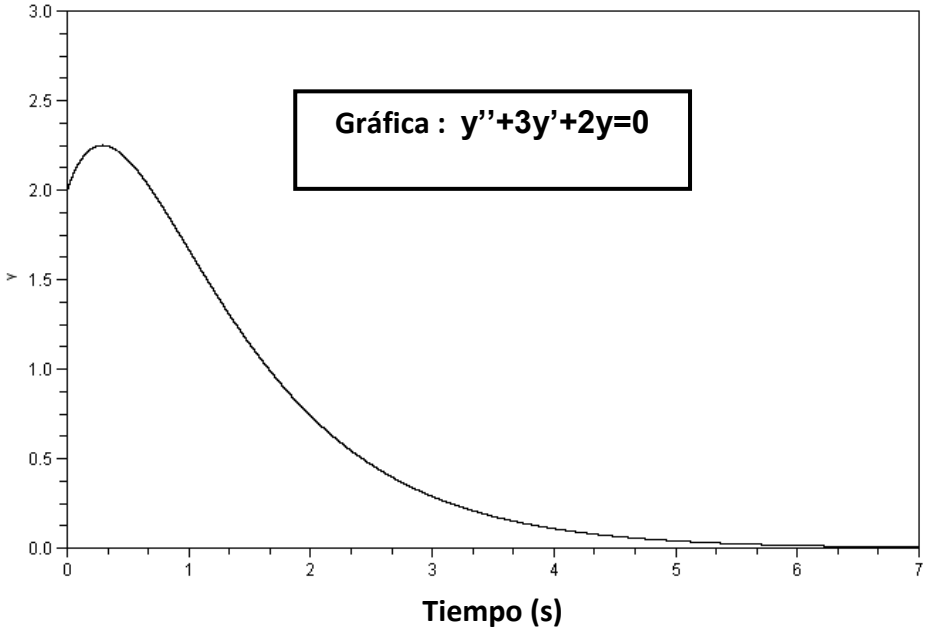


Figura 13. Muestra la gráfica de la solución de y''+3y'+2y=0

Esta gráfica representa a la solución diferencial de segundo orden, cuya solución de la ecuación característica tiene raíces reales. Una interpretación física tendremos al final cuando modelemos el movimiento de un resorte amortiguado.

CAPÍTULO III

3.1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

El descubrimiento del cálculo por Newton y Leibniz en el siglo XVII proporcionó el ímpetu para los grandes avances que siguieron en las matemáticas, ciencias e ingeniería. Una de las más importantes ramas de la matemática es sin duda las ecuaciones diferenciales [9]. Empezaremos nuestro estudio por las ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes.

3.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes

Sea la ecuación diferencial: $y' + ay = b$ con a,b constantes que pertenecen a los reales, luego para $t \geq 0$, la solución puede ser encontrada multiplicando a ambos miembros por el factor integrante e^{at}.

$$(y' + ay)e^{at} = be^{at}$$

Ordenando convenientemente: $(e^{at}y)' = e^{at}b = \frac{b}{a}(e^{at})'$

Integrando tendremos la solución general:

$$e^{at}y = \frac{b}{a}(e^{at}) + c \rightarrow y = \frac{b}{a} + ce^{-at} \quad \text{.... (1)}$$

Para problemas con valor inicial (PVI) tenemos que:

Para $y(t_0)=y_0$, esto en (1) obtenemos:

$$y(t_0) = y_0 = \frac{b}{a} + ce^{-at_0}$$

De donde: $c = (y_0 - \frac{b}{a})\, e^{at_0}$

Por último tendremos que la solución para PVI es:

$$y(t) = \frac{b}{a} + (y_0 - \frac{b}{a})\, e^{-a(t-t_0)}$$

El diagrama de flujo con bloques en scicos [8] para una ecuación de primer orden con coeficientes constantes es:

Esquema general en Scicos de la ecuación diferencial, y'+ay=b

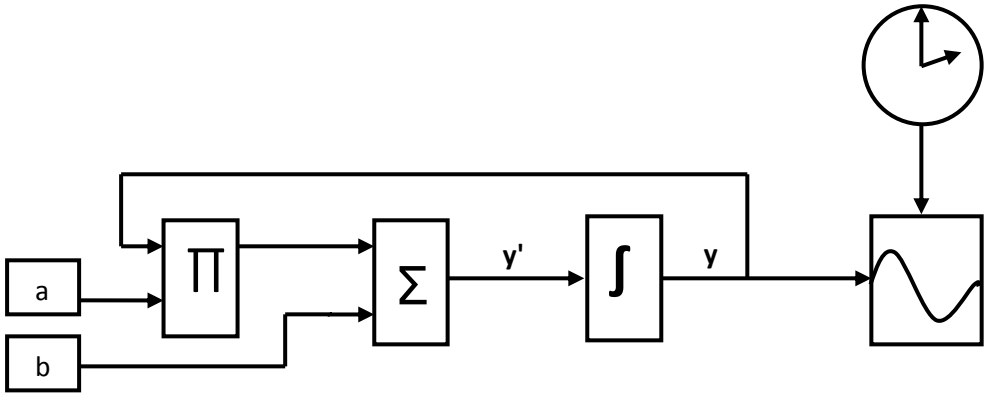
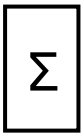


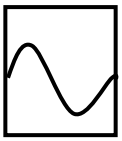
Figura 14. Circuito general de la ecuación y'+ay=b, donde a,b son constantes.

En este esquema se muestra cómo al operador suma ingresan los valores de "b" y "ay" (en este término utilizamos el operador "𝕋" para multiplicar "a" y "y"), la cual debe ser integrada y sincronizada para luego mostrarse en el osciloscopio.

Donde:



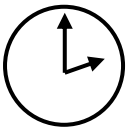
: Es un operador suma



: Es el osciloscopio.



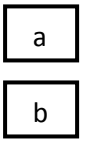
: Es operador integral



: es el reloj para definir el tiempo de salida de la simulación.



: es el operador multiplicador



: Son las constantes (coeficientes constantes de la ecuación diferencial de primer orden)

3.3 Ecuación diferencial lineal de la forma y'+ay=b(t) ; para t≥0.

Donde b(t) es una función continua definida en el intervalo [0, ∞] mientras que a ϵ R. Multiplicando a ambos miembros por factor integrante: e^{at}, tendremos:

$$e^{at}\left(y' + ay\right) = e^{at}b(t)$$

Luego:

$$(e^{at}y)' = e^{at}b(t) \quad \ldots (1)$$

El segundo miembro de la ecuación se puede escribir según el Teorema fundamental del cálculo como:

$$e^{at}b(t) = \left(\int_{t_0}^{t} e^{as}b(s)ds\right) \quad \ldots(2)$$

Reemplazando en (1)

$$(e^{at}y)' = \left(\int_{t_0}^{t} e^{as}b(s)ds\right)'$$

Integrando, tendremos:

$$(e^{at}y) = \left(\int_{t_0}^{t} e^{as}b(s)ds\right) + D$$

De donde:

$y(t) = e^{-at}\left(\int_{t_0}^{t} e^{as}b(s)ds\right) + De^{-at}$; que es la solución general.

Para problemas con valor inicial tenemos que : $y(0)=y_0$, luego, en la solución general:

$y(t_0) = y_0 = e^{-at_0}\left(\int_{t_0}^{t_0} e^{as}b(s)ds\right) + De^{-at_0}$, … (3)

siendo D una constante, la cual es:

$$D = y_0 e^{at_0}$$

Reemplazando(4) en (3), tendremos:

$$y(t) = e^{-at}\left(\int_{t_0}^{t} e^{as}b(s)ds\right) + y_0 e^{-a(t-t_0)}$$

La cual nos brinda la solución dadas las condiciones iníciales [9].

3.4 Ecuación diferencial lineal de la forma y'(t)+a(t)y(t)=b(t)

Donde a(t) y b(t) son funciones reales continuas en [0,∞], guiados por el método aplicado en la solución de y'(t)+ay(t)=b(t), multiplicaremos convenientemente a ambos miembros por el factor integrante: $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$

$$e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\,[\, y'(t)+a(t)y(t)\,] = b(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

Donde t_0, es un punto arbitrario, por ende:

$$\left[e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} y(t)\right]' = \left(\int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t_0}^{s} a(\theta)d(\theta)} ds\right)'$$

Por consiguiente existirá una constante C tal que:

$$e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t_0}^{s} a(\theta)d(\theta)} ds + C$$

de donde tenemos que:

$$y(t)= e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t_0}^{s} a(\theta)d(\theta)} ds + Ce^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

Que es la solución general de la que se desprenden los casos anteriores.
Para problemas con valores iniciales: $y(t_0)=y_0$

$$y_0=e^{-\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} \int_{t_0}^{t_0} b(s) e^{\int_{t_0}^{s} a(\theta)d(\theta)} ds + Ce^{-\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds}$$

Entonces, tenemos que: $y_0=C$
Por lo tanto, la solución con valores iniciales tenemos:

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t_0}^{s} a(\theta)d(\theta)} ds + y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

El diagrama de flujo con bloques en Scicos, se muestra como sigue [8]:

Esquema general en Scicos de la ecuación: y'+a(t)y=b(t)

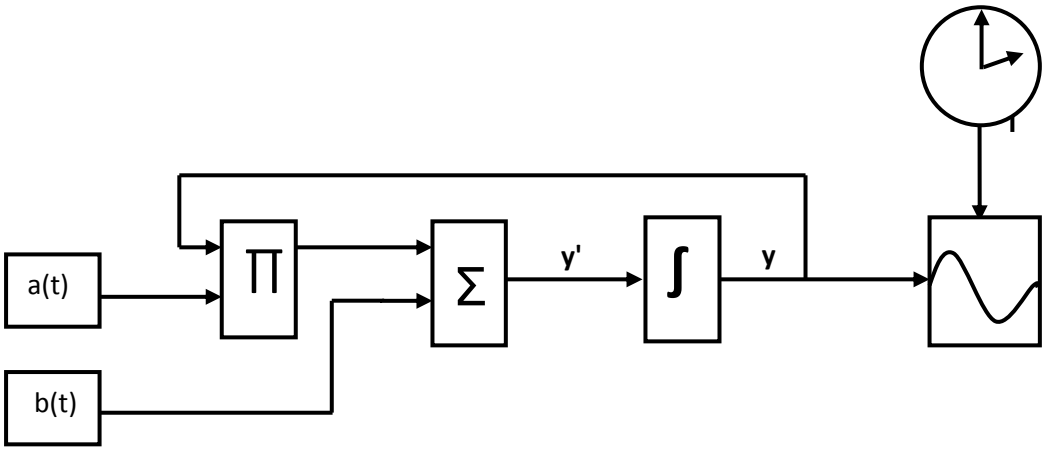


Figura 15. Muestra el circuito general una ecuación y'+a(t)y=b(t)

Donde se puede verificar que en el operador suma ingresan las dos funciones dependientes del tiempo, "b(t)" y el término a(t) que esta multiplicado con "y (a(t)y", estas funciones se integran para luego ser mostradas en el osciloscopio.

Este circuito tiene el mismo algoritmo que anterior diagrama con coeficientes constantes, es decir una vez conocida la ecuación diferencial de primer orden y'+a(t)y=b(t), escribimos como y'= b(t) - a(t)y. A partir del cual identificamos que en el segundo miembro de la ecuación aparece una diferencia "b(t) - a(t)y", la diferencia de estos dos términos debe ir en el operador suma. El término a(t)y que se está multiplicando por lo debemos utilizar el operador de la multiplicación previo a la suma. Luego procedemos a integrar (con el operador integral) la ecuación para luego mostrarlo sincronizadamente, para esto utilizamos el osciloscopio y el reloj [10].

CAPÍTULO IV

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

4.1 Caída de graves

La caída de los cuerpos viene dada por: mv'(t)=mg, cuando no se toma en cuenta la resistencia del aire. Si suponemos que la velocidad inicial v(0) es nula en t=0. Una simple integración nos conduce al siguiente resultado

V(t)=gt … (1)

Una ecuación más acorde a la realidad será [11].

$$mv'(t) = mg - kv(t) \quad \ldots (2)$$

Donde se ha considerado el término kv(t) que se opone al movimiento y es proporcional a la velocidad.

Ordenando la ecuación (2) tenemos que:

$$v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = g$$

Identificamos que tiene la forma de una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes. Recurrimos a la forma general de nuestra solución, para el cual las constantes son:

$$a = \frac{k}{m}\ ;\ b = g$$

Considerando que el cuerpo parte del reposo para t=0, tendremos que:

$$v(t) = \frac{gm}{k} - \frac{gm}{k}e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{gm}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Donde podemos notar que el segundo término disminuye muy rápidamente, siendo pronto despreciable, de modo que la velocidad se vuelve constante e igual a " $\frac{gm}{k}$ " la cual es la velocidad límite siendo ésta independiente de la velocidad inicial [12] . Podemos mostrar cualitativamente el comportamiento de la velocidad en función del tiempo (ver la figura 16).

La siguiente gráfica simulada en Scicos, utiliza los siguientes parámetros: g=9.81 y la k/m=0.5.

Diagrama de bloques para simular la caída de graves, se muestra como sigue:

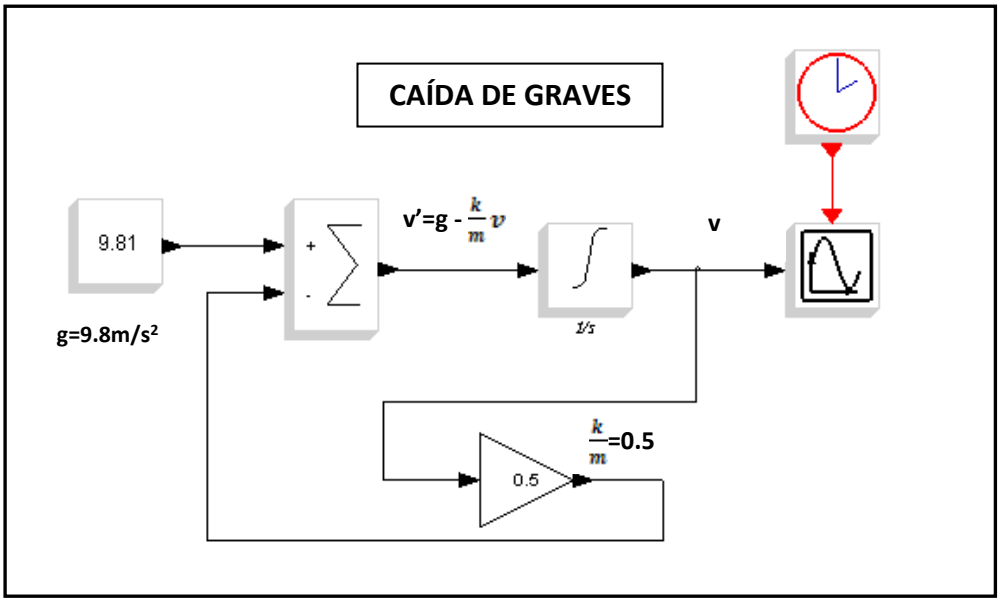


Figura 16. Se muestra el circuito para simular la caída de graves.

El bloque triangular representa un multiplicador, en este caso se está multiplicando el valor de la velocidad (v), y el coeficiente k/m.

Este circuito tiene la misma estructura que el diagrama general de bloques para una ecuación diferencial de primer grado con coeficientes constantes. Simplemente se ingreso el valor de las constantes (b=9.8; a=k/m=0.5).

El resultado de la simulación muestra (ver figura 17) la velocidad en función del tiempo de un cuerpo que cae en oposición de una fuerza de fricción proporcional a la velocidad del cuerpo.

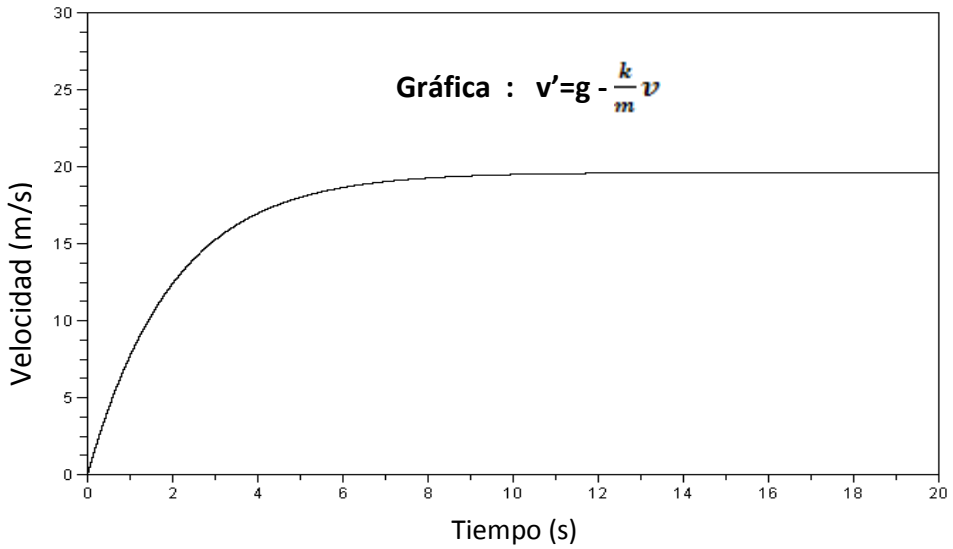


Figura 17. Muestra la simulación de la caída de graves.

4.2 Ley de enfriamiento de Isacc Newton

La ley de enfriamiento de Isaac Newton dice que: “La rapidez de enfriamiento de un cuerpo en el medio ambiente es proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo y el medio ambiente en un tiempo t”. [9]

Formulación matemática:

Sea T=T(t) la temperatura del cuerpo en el instante “t” y Tm (una constante) la temperatura del medio ambiente, luego:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$; T(o)=T_o (condición inicial)

Donde k es la constante de proporcionalidad y T_o la temperatura inicial del cuerpo.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) = T' = kT - kT_m$$

Operando: $$T = e^{k\int dt}\left[\int e^{k\int dt}(-kT_m)dt + c\right]$$

$$T = e^{kt}\left[\int e^{kt}(-kT_m)dt + c\right]$$

$$T = e^{kt}\left[\int T_m e^{-kt} + c\right]$$

$$T = T_m + ce^{-kt}$$

La cual constituye la solución general.

Simulando en Scicos y asumiendo que la condición inicial a T(0)=T_0, obtenemos

T(0)=T_m+ce^0 ➔ T_0=T_m+c

Por lo tanto: T=T_m+(T_0-t_m)e^{kt}

El diagrama de bloques que se muestra (ver la figura 18) tiene la misma estructura de un circuito de una ecuación diferencial de primer orden. Donde los coeficientes son k=0.1 y la T_m =10, con las condiciones iniciales para T(0)=0.

El circuito siguiente sigue la ruta del esquema general de una ecuación de primer orden. Con los coeficientes definidos en el párrafo anterior.

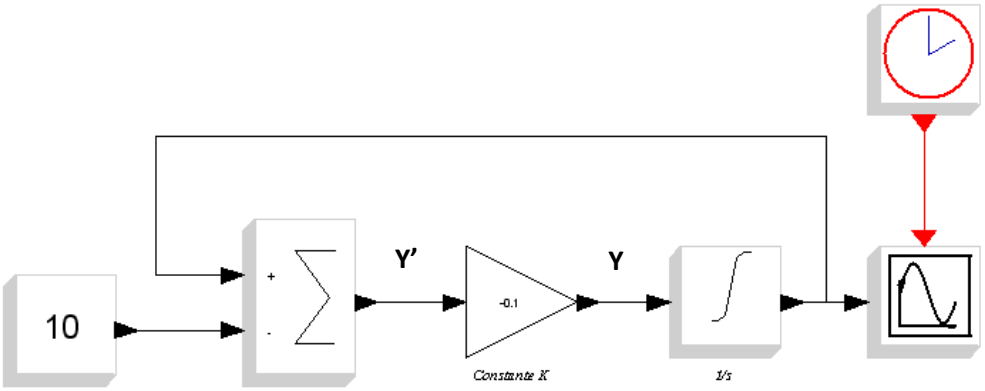


Figura 18. Diagrama de bloques para simular la ley de enfriamiento de Newton

La siguiente gráfica muestra que inicialmente la temperatura de un cuerpo medido por un termómetro desciende relativamente rápido y a medida que se aproxima a $T_C(0)$ el descenso es más lento llegando a ser casi imperceptible a medida que transcurre el tiempo.

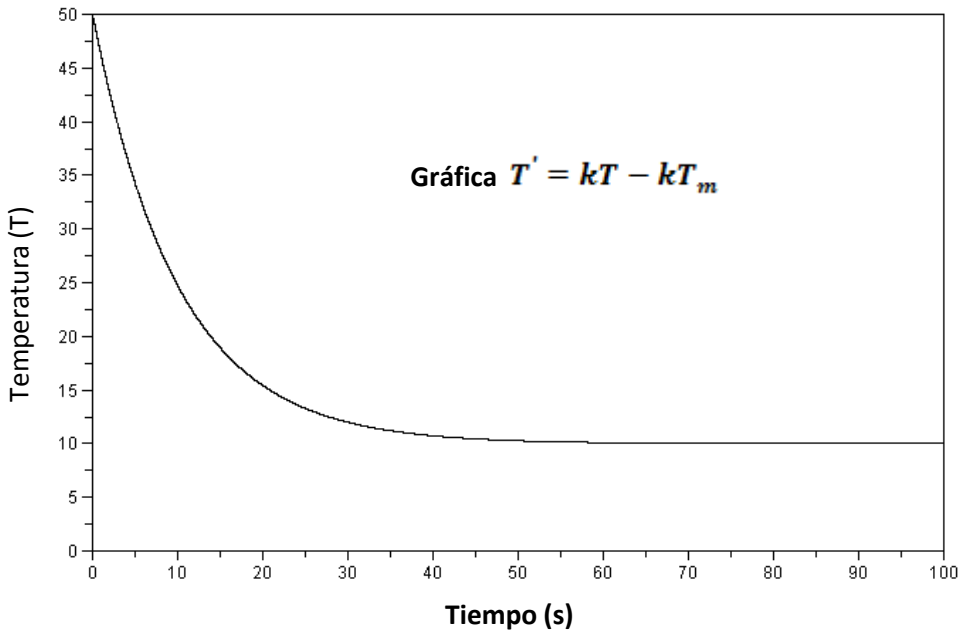


Figura 19. Simulación de la ley de enfriamiento de Newton.

4.3 Radioactividad

El fenómeno de descomposición radiactiva siempre se modela mediante la ecuación diferencial [14].

$$x'(t)=-kx(t)$$

donde notamos que la rapidez a la cual un proceso de decaimiento particular ocurre en una muestra radiactiva es proporcional al número de núcleos radiactivos presentes. donde x(t) es la cantidad de sustancia radiactiva presente en el instante t y “k” es la constante de decaimiento.

El modelo planteado es resultado de la observación experimental en el sentido de que la velocidad de descomposición es proporcional a la cantidad de sustancia radiactiva que permanece sin desintegrar. La solución de la ecuación diferencial es inmediata: $x(t)=x(0)e^{-kt}$, donde x(0) representa el número de núcleos radiactivos en t=0, además la constante “k” es:

$$k = \frac{1}{t} ln \frac{x(0)}{x(t)}$$

Otro concepto importante es la de vida media (τ) que es el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad original de sustancia radiactiva se reduzca a la mitad y se define como:

$$\frac{x(0)}{2} = x(0)e^{-k\tau}$$

De donde: $\tau = \frac{\ln 2}{k}$

Donde T es conocida como la *vida media* de una determinada sustancia y es independiente de x(0). De la solución debemos esperar que nuestra gráfica (ver figura 20) nos muestre la disminución exponencial de la sustancia radiactiva con el tiempo.

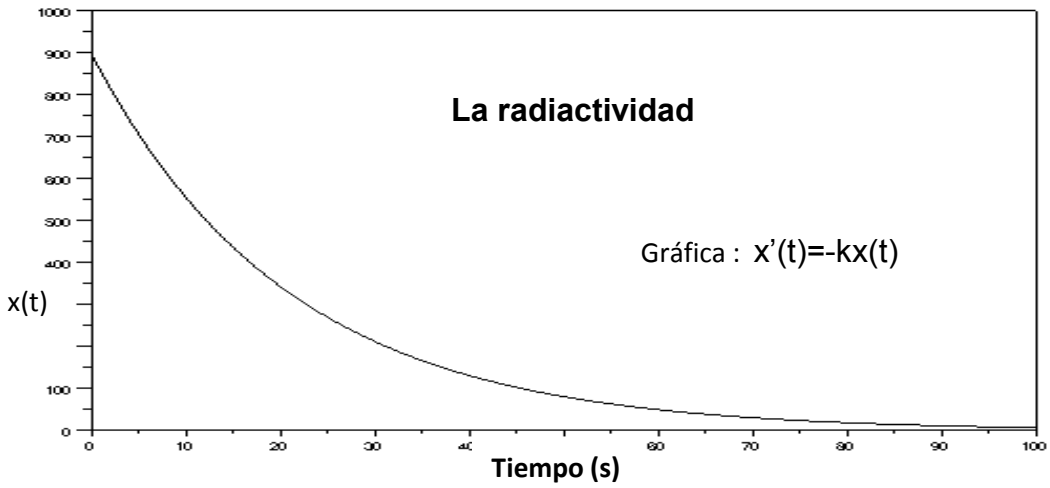


Figura 20. Simulación de la descomposición radiactiva

4.4 Circuito RC (con voltaje constante)

Es aquel circuito que contiene una combinación en serie de un resistor y un capacitor (RC). En este tipo de circuitos la corriente puede variar en el tiempo [15].

Representación de un circuito RC

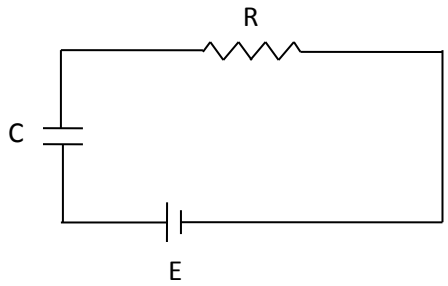


Figura 21. Circuito RC

Suponemos que el capacitor inicialmente esta descargado y el interruptor se cierra en t=0, a partir del cual empieza a fluir las cargas de modo que se establece una corriente en el circuito y el capacitor empieza a cargarse.

Para analizar este circuito cuantitativamente aplicamos la segunda regla de Kirchhoff cuando se cierra el interruptor. Al recorrer la espira en el sentido de las manecillas del reloj se obtiene:

$$E - \frac{q}{C} - IR = 0$$

Pero, como la corriente es igual al cambio en el tiempo de la carga sobre las placas del capacitor, tenemos que sustituir I=dq/dt, luego:

$$E - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}\;;$$

$$Identificando\ los\ coeficientes\ tenemos\ que: \quad a = \frac{1}{RC}, \qquad b = \frac{E}{R}$$

Luego, solución con condiciones iniciales para t=0, q(0)=0, será:

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Donde CE es la máxima carga en el capacitor. Además debemos notar que esta solución tiene la misma forma (ver gráfica 22) que el modelo de caída de graves.

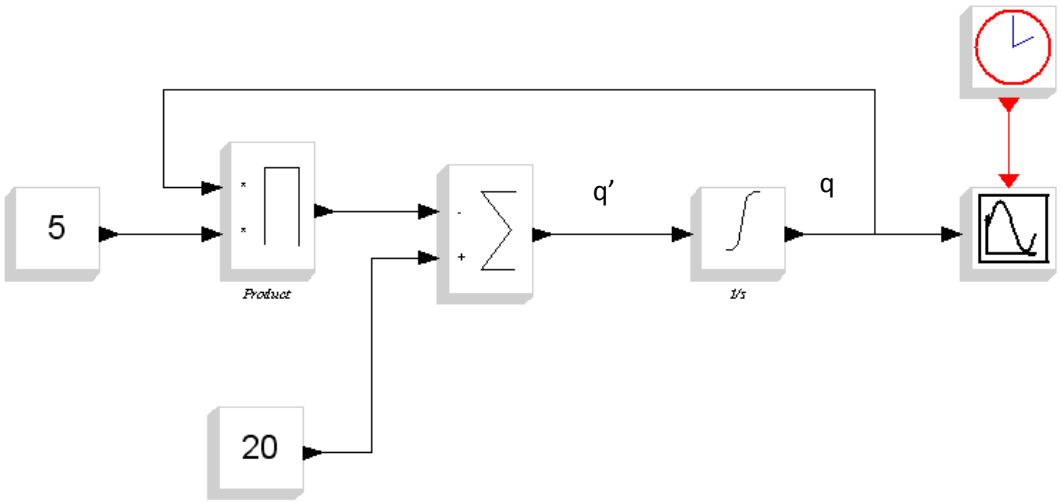


Figura 22. Diagrama de bloques de un circuito RC

Este circuito resulta de aplicar el esquema general de un circuito de una ecuación de primer orden con coeficientes constantes. Los términos que ingresan al operador suma son (a=1/RC=20; b=E/R=5), donde la constante 5 es multiplicada por "q", estos términos son integrados y luego simulados a través del osciloscopio.

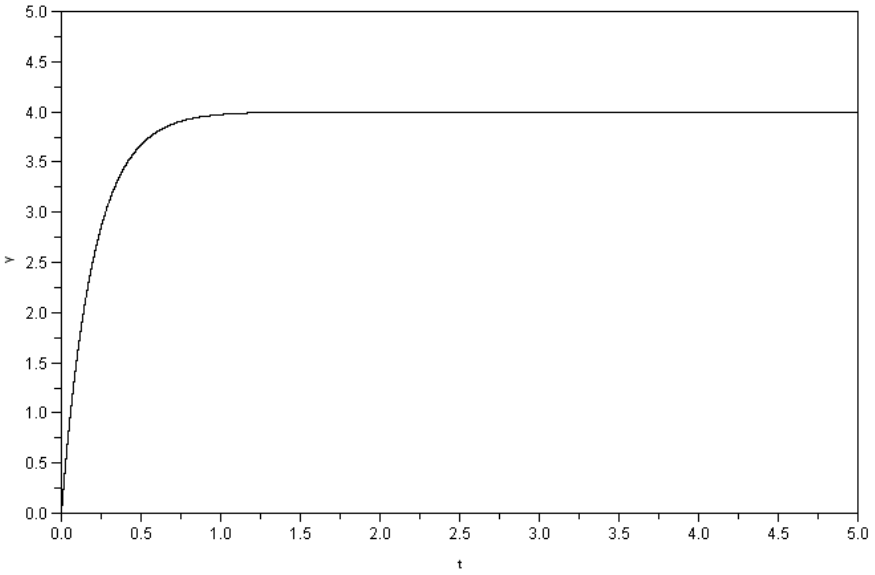


Figura 23. Simulación de un circuito RC

La gráfica (figura 23) muestra que conforme las placas comienzan a cargarse la diferencia de potencial a través del capacitor aumenta. El valor de la carga máxima depende del voltaje de la batería. Una vez alcanzada la carga máxima, la corriente en el circuito es cero puesto que la diferencia de potencial del capacitor se iguala con la suministrada por la batería.

4.5 Circuito RL

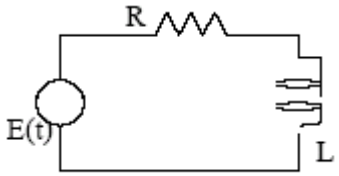


Figura 24. Circuito RL

Este circuito que incluye un inductor tiene como función la de evitar que la corriente en el circuito aumento o disminuya en forma instantánea. El inductor se opone a los cambios en la corriente a través de dicho circuito. El inductor provoca que el circuito se vuelva “perezoso” conforme reacciona a los cambios en la corriente [16].

Aplicando la segunda regla de kirchhoff (considerando imaginariamente sólo un instante de tiempo), tendremos que:

$$LI'(t) + RI(t) = E$$

Donde E(t) es la fuerza electromotriz (fem) constante, que se aplica al circuito, R es la resistencia, I la corriente y L la constante de la autoinductancia de la bobina.

Agregamos como condiciones iníciales que para t=0, I(0)=0, es decir que antes de cerrarse el circuito no circulaba la corriente .

La ecuación original se puede escribir:

$$I'(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{1}{L} E$$

Identificando los coeficientes:

$$a = \frac{R}{L} \;\; ; \;\; b(t) = \frac{E}{L}$$

Tendremos que la solución a esta ecuación será:

$$I(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

Notamos que esta solución tiene la misma forma que el circuito RC y la caída de graves.

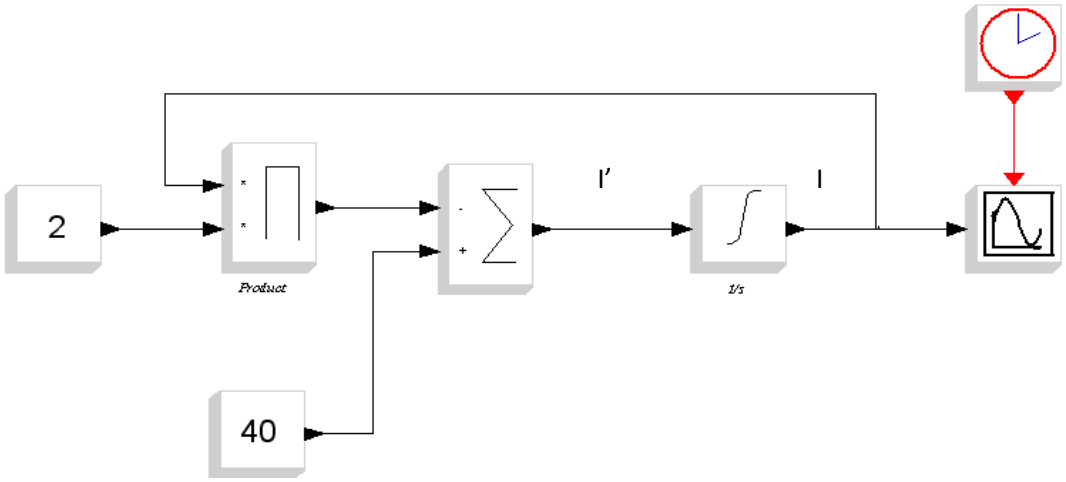


Figura 25. Muestra el diagrama de bloques para el circuito RL

Este circuito tiene la misma estructura que la primera aplicación (caída de graves). Sólo varían los valores de las constantes de la ecuación diferencial de primer orden.

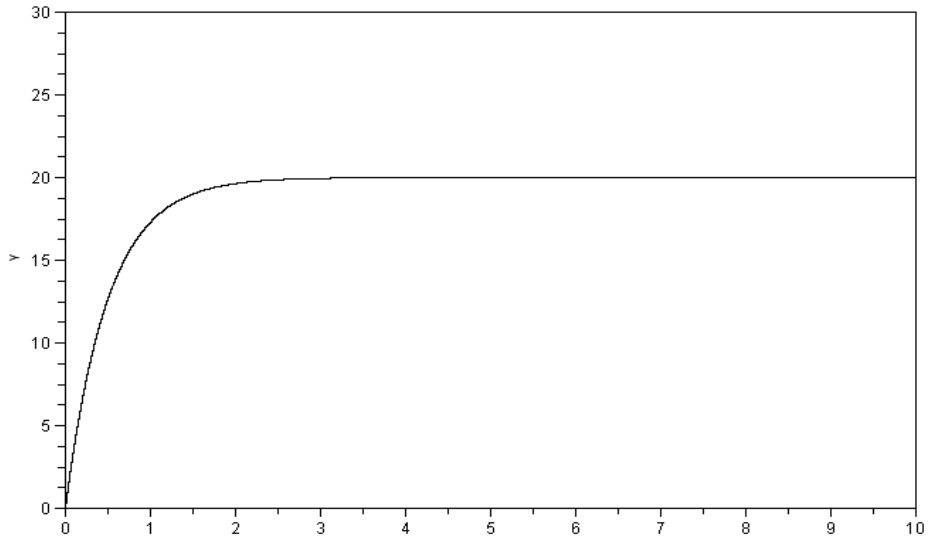


Figura 26. Muestra la gráfica de la simulación de un circuito RL

4.6 Circuito RL con voltaje dependiente del tiempo

Repasaremos el circuito RL, pero con el voltaje dependiente del tiempo. De nuestra ecuación básica tenemos que:

$$I'(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{1}{L} E(t)$$; con E(t) dependiente de "t"

La cual tiene la misma forma que la ecuación : y'+ay=b(t)

Identificando términos tenemos: $a = \frac{R}{L}$; $b(t) = E(t)$

Siguiendo el procedimiento anterior, podemos obtener la solución:

$$I(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{\frac{R}{L}s} E(s) d(s)$$

En caso en que E(t)=E_0 (constante)

Tenemos que: $$I(t) = \frac{E_0}{R} + \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Resultado que fue obtenido anteriormente.

Si E(t)= E_0coswt, tenemos que calcular la integral con condiciones iniciales I(0)=0.

$$\int_{t_0}^{t} e^{as} b(s) ds \; ; \qquad donde \; b(s) = \frac{E_0 cosws}{L}$$

Utilizando tablas de integrales tenemos:

$$\int_{t_0}^{t} e^{as} coswsds = \left| \frac{e^{as}}{a^2 + w^2} (acosws - wsenws) \right|_0^t$$
$$= \frac{e^{at}}{a^2 + w^2} (acoswt - wsenwt) - \frac{a}{a^2 + w^2}$$

Luego:

$$I'(t) = \frac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \left(\frac{R}{L} coswt - wsenwt \right) - \frac{\frac{R}{L}}{\frac{R^2}{L} + w^2} \right)$$

$$I(t) = \frac{E_0}{\frac{R^2}{L} + Lw^2} \left(\frac{R}{L} coswt - wsenwt \right) - \frac{E_0 \, R}{R^2 + L^2 w^2} e^{\frac{R}{L}t}$$

Notamos que primer término representa a un término estacionario, mientras que el segundo da lugar a una corriente transitoria. [9]

El diagrama de bloques (ver figura 27) y su respectiva simulación en Scicos, se muestran como sigue:

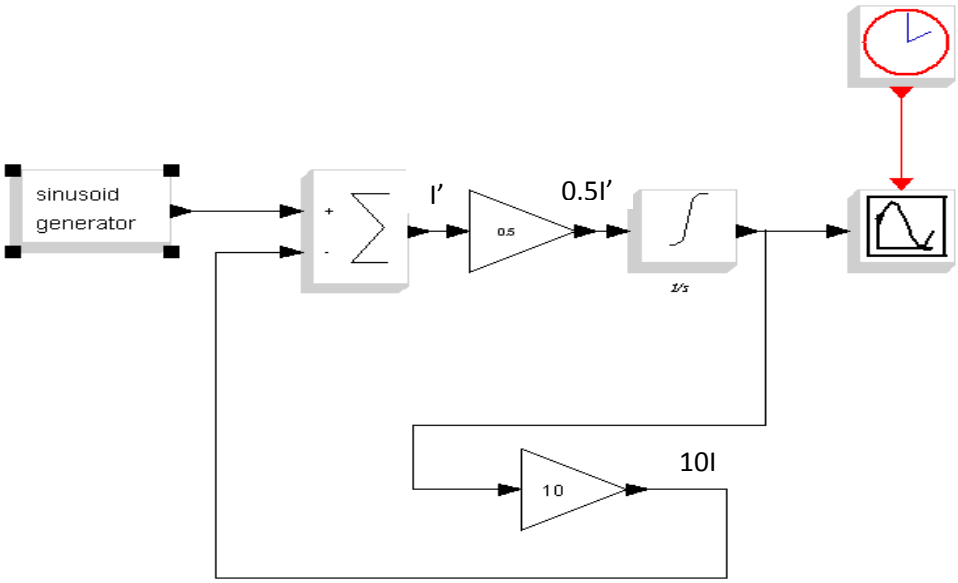


Figura 27. Diagrama de bloques de un circuito RL

Este circuito se puede al operador suma ingresan dos términos; un término constante (a=R/L) y una función dependiente del tiempo ($E_o$coswt), luego procedemos a integrar para que finalmente pueda mostrarse en el osciloscopio.

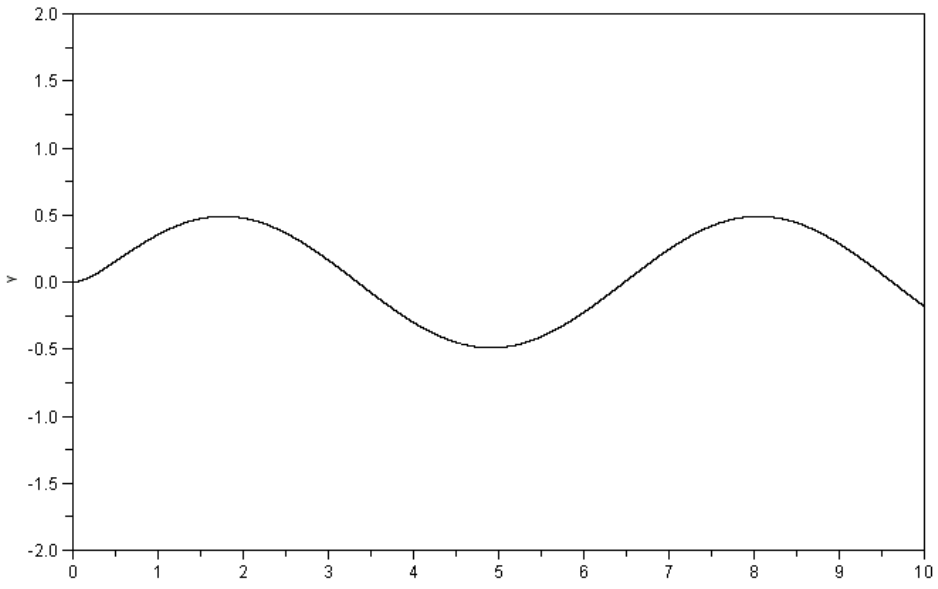


Figura 28. Gráfica de la simulación de un circuito RL

CAPÍTULO V

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

5.1 Ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden

Dada la ecuación de la forma: ay''+by'+cy=0, donde a, b y c pertenecen a los reales. Esta ecuación diferencial relaciona un polinomio de la forma: $ar^2+br+c=0$, conocida como la ecuación característica.

Si la ecuación característica tiene como soluciones a r_1 y r_2, entonces se presentarán los siguientes casos:

$$r_1 = -b + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = -b - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

dado que r_1 y r_2 son soluciones de una ecuación general de segundo grado.

Observe que:

1. Si $(b^2-4ac) > 0, entonces \;\; r_1 \; y \; r_2 \;\; son \; dos \; raices \; reales \;\; y \; diferentes$

   La solución general para este caso es: $y = D_1 e^{r_1 t} + D_2 e^{r_2 t}$

2. Si $(b^2-4ac) = 0, entonces \;\; r_1 \; y \; r_2 \;\; son \; dos \; raices \; reales \;\; iguales$

   La solución general para este caso es: $y = D_1 e^{r_1 t} + D_2 t e^{r_2 t}$

3. Si $(b^2-4ac) < 0$, $r_1 \; y \; r_2$ Son dos raíces complejas conjugadas dadas como $(r_1 = a+bi) \;\; y \;\; (r_2 = a-bi)$. La solución general de esta ecuación es:

$$y = e^{at}(D_1 cosbt + D_2 senbt)$$

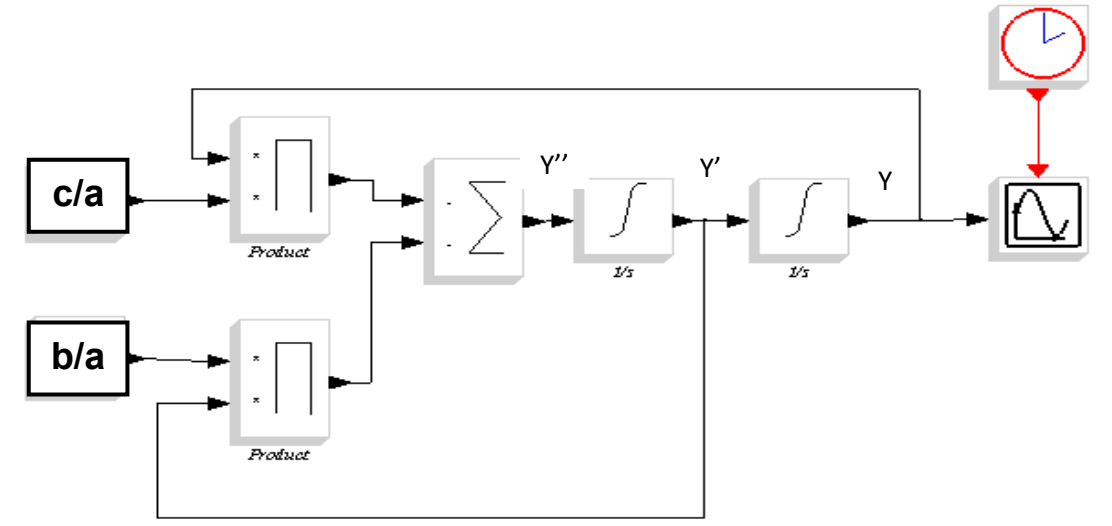


Figura 29. Esquema en Scicos para una ecuación homogénea de segundo orden

Este circuito representa la estructura general para simular una ecuación homogénea de segundo orden. Empezando de izquierda a derecha, podemos notar que al operador suma ingresan los términos “(c/a)” y “(b/a) “, que son multiplicadas por las variables “y” y “ y’ ” respectivamente. Estas variables, resultan de una integración en el caso de “y’” y la otra variable (y) de la doble integración. Luego seguimos con la lógica de los circuitos anteriores, la de mostrar la simulación a través de osciloscopio.

5.2 Ecuaciones diferenciales de segundo orden no homogéneas

Sea la ecuación de la siguiente forma:

Ay’’+by’+cy=f(t)

Teorema. Si $x_i(t)$ es una solución de una ecuación lineal no homogénea, y $x_h(t)$ es una solución de la correspondiente solución homogénea, entonces $x(t)=x_i(t)+x_h(t)$ es también una solución de la ecuación no homogénea.

Este teorema es aplicado a las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes o funciones dependientes del tiempo.

Por el método de coeficientes indeterminados la solución particular la podemos obtener según la siguiente tabla para cada función f(t):

f(t)	$\boldsymbol{\varphi_p(t)}$	
$p_m(t)$	$t^k\tilde{p}_m(t)$	0
$e^{\alpha t}p_m(t)$	$t^k e^{\alpha t}\tilde{p}_m(t)$	α
$p_m(t)cos\beta t + Q_n(t)sen\beta t$	$t^k\left(\tilde{p}_r(t)cos\beta t + \tilde{Q}_r(t)sen\beta t\right)$	iβ
$e^{\alpha t}(p_m(t)cos\beta t + Q_n(t)sen\beta t)$	$t^k e^{\alpha t}\left(\tilde{p}_r(t)cos\beta t + \tilde{Q}_r(t)sen\beta t\right)$	α+ iβ
r=max(m,n) k=orden de multiplicidad del elemento correspondiente de la tercera columna, como raíz del polinomio característico de y’’+ay’+by=0		

CAPÍTULO VI

Aplicaciones de las ecuaciones de segundo orden

6.1 Movimiento armónico simple

Consideremos un resorte, en cuyo extremo se encuentra una masa m.

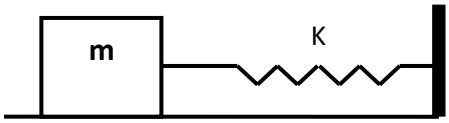


Figura30. Muestra el esquema de un sistema masa-resorte sobre una superficie lisa.

La masa del resorte se supone despreciable y el sistema se desliza sobre una superficie de rozamiento mínimo de tal manera que sea una buena aproximación afirmar que la única fuerza actuante en la dirección del movimiento es la fuerza elástica del resorte, dada por la ley de Hooke: -ky(t). De la segunda ley de Newton (considerando la masa constante) tenemos que:

$$my''(t) = -ky(t) \text{ ; es decir:}$$

$$my''(t)+ky(t)=0$$

Donde k es la constante del resorte, que es siempre positiva y caracteriza el grado de rigidez del resorte. La ecuación anterior se puede escribir como:

$$y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0$$

que es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con polinomio característico : $r^2 + \frac{k}{m} = 0$, el cual tiene como raíces $r = \pm\sqrt{k/m}\, i$, de tal manera que la solución general es:

$$y(t) = Acos(W_0 t + \theta)$$

Poniendo $B_1 Acos\theta$, $B_2 = -Asen\theta$, la solución anterior adopta la siguiente forma:

$$y(t)=B_1 cos w_0 t+B_2 sen w_0 t$$

donde $w_0 = \sqrt{k/m}$ y las constantes A, θ, B_1, B_2, han de obtenerse en función de los valores iniciales .

Debemos notar que el sistema oscila entre A y –A. Cuando t es tal que y(t)=A, obviamente $cos(W_0 t+\theta)=1$. Luego, $sen(W_0+\theta)=0$. Pero $y'(t)=-AW_0 sen(W_0 t+ \theta)$,

por ende y'(t)=0 cuando y(t)=A. En otras palabras, la velocidad en los puntos A y –A es nula. Esto coincide con el hecho físico de que en dichos puntos el sentido del desplazamiento cambia. De otro lado la velocidad máxima, AW_0, es alcanzada cuando sen(W_0+θ)=1; luego el cos(W_0t+θ)=0, con lo que podemos aseverar que dicha velocidad es alcanzada en el origen.

Descripción gráfica con Scicos. Los parámetros utilizados son: 2 para la amplitud, 0 para la fase y la constante k/m=W_0=25.

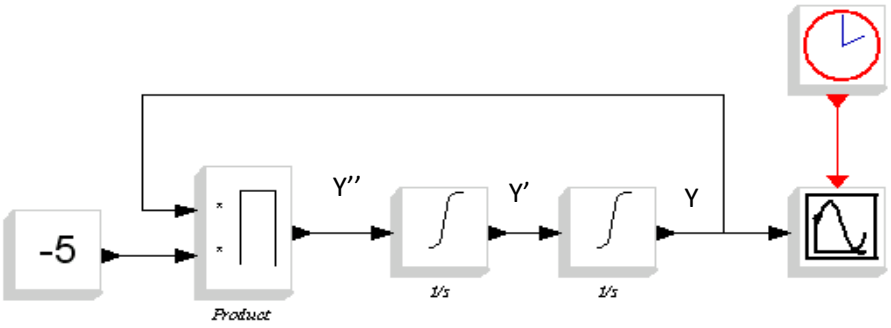


Figura 31. Diagrama de bloque para el Movimiento Armónico Simple

Este circuito responde a la misma estructura general de un circuito para una ecuación homogénea de segundo orden y muestra la siguiente gráfica.

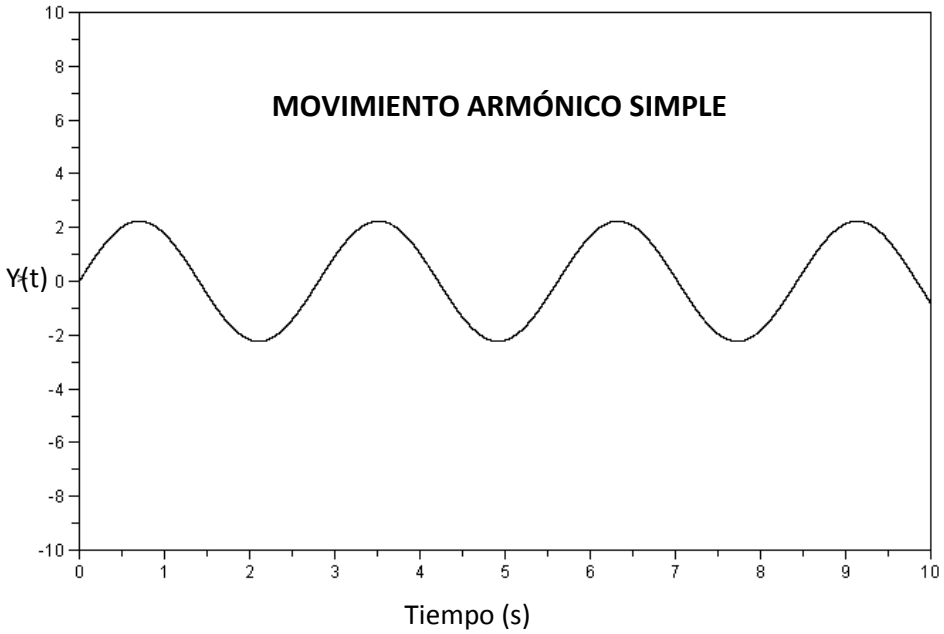


Figura 32. Gráfica de la simulación del MAS

6.2 Circuito eléctrico LC bajo la presencia de una fuerza electromotriz constante.

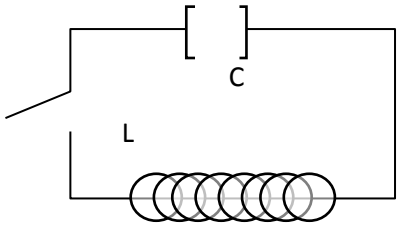


Figura 33. Muestra el circuito LC

Consideremos algún tiempo "t" después de que el interruptor se cierra, de modo que el capacitor tiene una carga $Q<Q_{max}$ y la corriente $I<I_{max}$. La energía almacenada por ambos elementos debe ser igual a la energía inicial total U almacenada en el capacitor cargado completamente en t=0.

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$$

Esto representa la energía total almacenada en el circuito LC.

Si consideramos que la resistencia del circuito es cero, entonces ninguna energía se transforma en energía interna y por tanto la energía total debe permanecer constante en el tiempo, luego derivamos la ecuación anterior respecto al tiempo.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0$$

Sabiendo además que I=dQ/dt, tendremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q$$

Podemos notar que esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación diferencial del MAS, por tanto, la solución de esta ecuación es:

$$Q=Q_{max}\cos(wt+\theta)$$

Donde Q_{max} es l carga máxima del capacitor y la frecuencia angular w es:

$$w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Es decir que frecuencia angular de las oscilaciones depende sólo de la inductancia y la capacitancia del circuito. Ésta es la frecuencia natural de

oscilación del circuito LC. El diagrama de boques (ver figura 34) para esta simulación esta dado por:

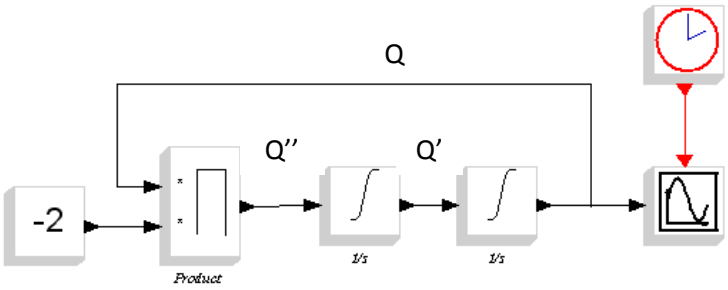


Figura 34. Muestra el diagrama de bloques para el circuito LC

Simulación de un circuito LC para los parámetros 1/LC =2.

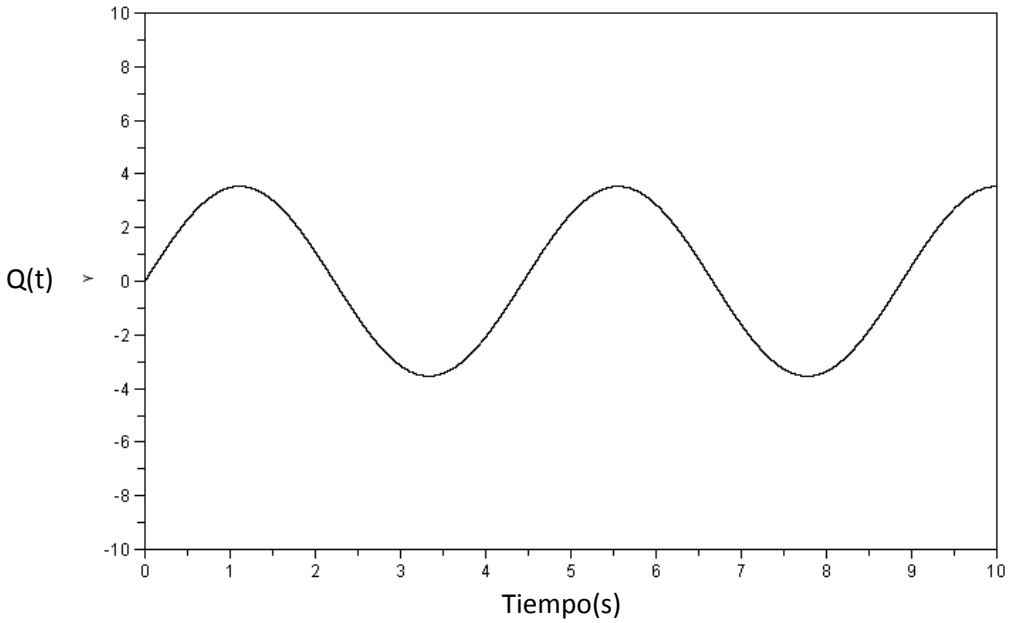


Figura 35. Muestra gráfica de la simulación para un circuito LC.

Debemos añadir que como la carga varía sinusoidalmente, la corriente en el circuito varía de la misma forma.

6.3 Sistema de masa-resorte con amortiguamiento

Por experiencia, sabemos que algunos fenómenos tales como un resorte o un péndulo donde la amplitud decrece gradualmente hasta que se detiene, tienen movimiento oscilatorio amortiguado.

La ecuación del movimiento amortiguado de una partícula sometida a una fuerza recuperadora lineal y una fuerza de rozamiento proporcional a su velocidad es:

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

Aplicando el método anteriormente planteado para la solución de una ecuación diferencial de segundo orden, tendremos su ecuación característica:

$$mp^2 + bp + k = 0$$

cuya solución es:

$$p = -\frac{b}{2m} \pm \left[\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \ (1)$$

A partir de esta solución distinguiremos tres casos:

- **a.** $k/m > (b/2m)^2$
- **b.** $k/m < (b/2m)^2$
- **c.** $k/m = (b/2m)^2$

Hacemos las siguientes sustituciones,

$$w_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \ ; \ \varphi = \frac{b}{2m} \ ; \ w_1 = (\varphi^2 - w_0^2)^{1/2}$$

Donde φ es llamado coeficiente de amortiguamiento y ($w_0/2\pi$) es la frecuencia natural del oscilador no amortiguado. Las soluciones para “p” (de la ecuación 1), serán:

$$P = -\varphi \pm iw_1$$

Cuya solución general es:

$$x = c_1 e^{(-\varphi + iw_1)t} + c_2 e^{(-\varphi - iw_1)t}$$

Como c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, podemos escribir:

$$c_1 = \frac{1}{2} A e^{i\theta} \ ; \ c_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\theta}$$

Concluimos que:

$$x = A e^{-\varphi t} \cos(w_1 t + \theta)$$

Podemos notar que la amplitud ($Ae^{-\varphi t}$) decrece exponencialmente con el tiempo.

Dependiendo de los valores complejos o reales de $w_1 = (\varphi^2 - w_0^2)^{1/2}$ podemos clasificar el amortiguamiento en amortiguamiento bajo, amortiguamiento crítico y sobre amortiguamiento.

El siguiente diagrama de bloques es la estructura de las tres simulaciones que se mostrarán en una sola ventana a través del bloque “Mux” donde concurren las tres simulaciones.

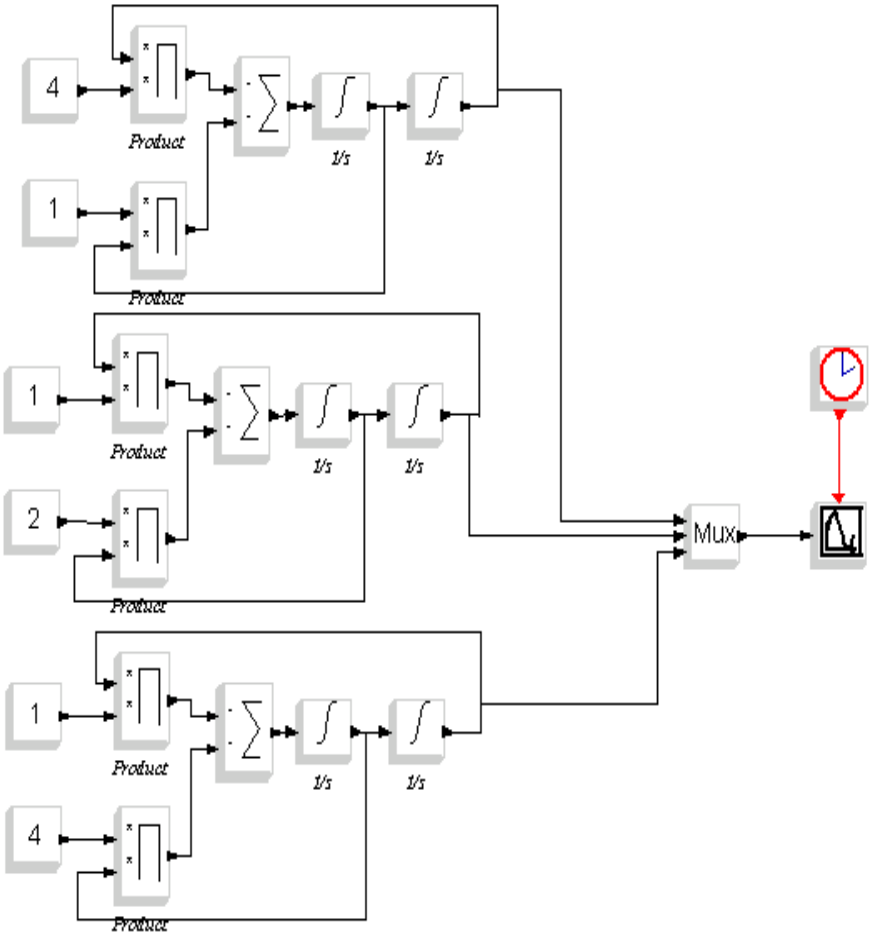


Figura 36. Muestra el diagrama de bloques para las oscilaciones amortiguadas de un resorte. Las tres simulaciones concurren en el bloque “mux”, para obtener una sola gráfica.

En forma práctica, podemos del programa tenemos que despejar la derivada de mayor orden, con lo que obtenemos:

$$x'' = \frac{b}{m}x' - \frac{k}{m}x$$

Se debe notar que los parámetros para cada (infra amortiguado, amortiguamiento crítico y sobre amortiguado) caso se ilustrar en el diagrama de bloques. Las gráficas de ésta clasificación la podemos ilustrar con Scicos. (ver las figuras 37, 38 y 39)

El resultado nos da los siguientes gráficos:

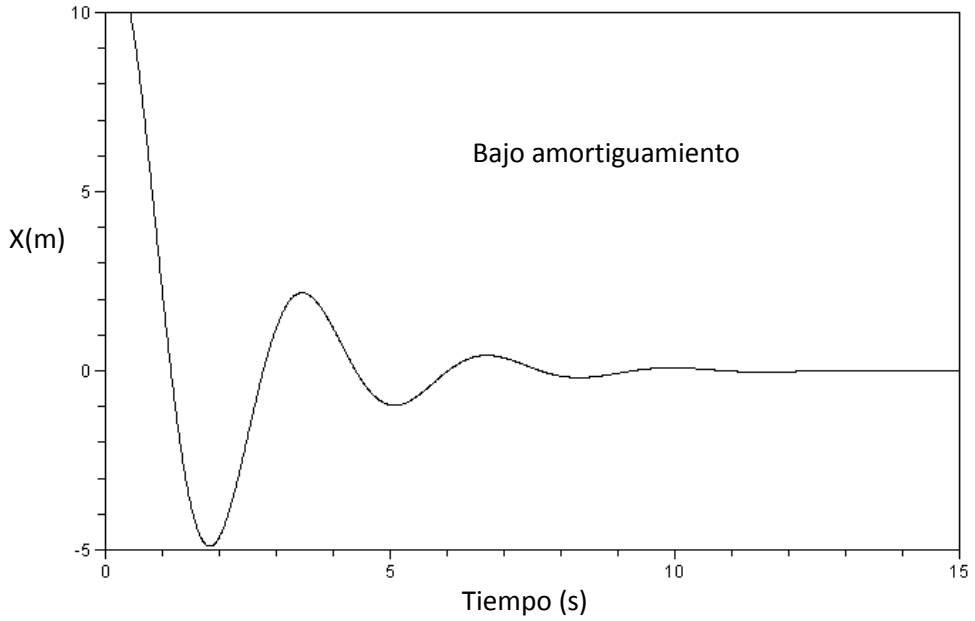


Figura 37. Gráfica del bajo amortiguamiento

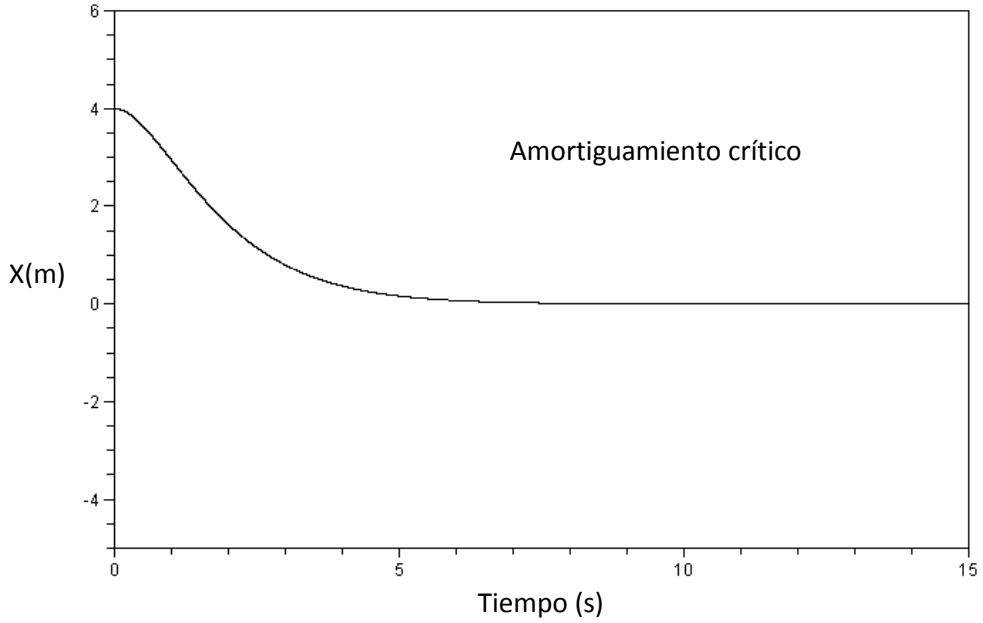


Figura 38. Gráfica del amortiguamiento crítico

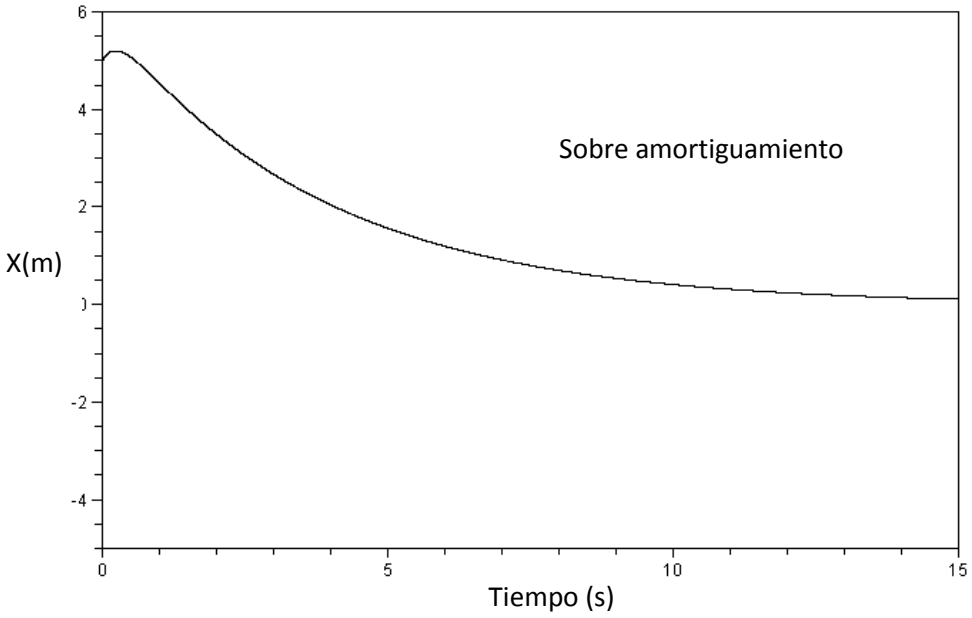


Figura 39. Gráfica del sobre amortiguamiento

Una mejor presentación (ver figura 40) las tres gráficas es la siguiente, cuyo diagrama de bloque sólo varia en la salida que uno pretende.

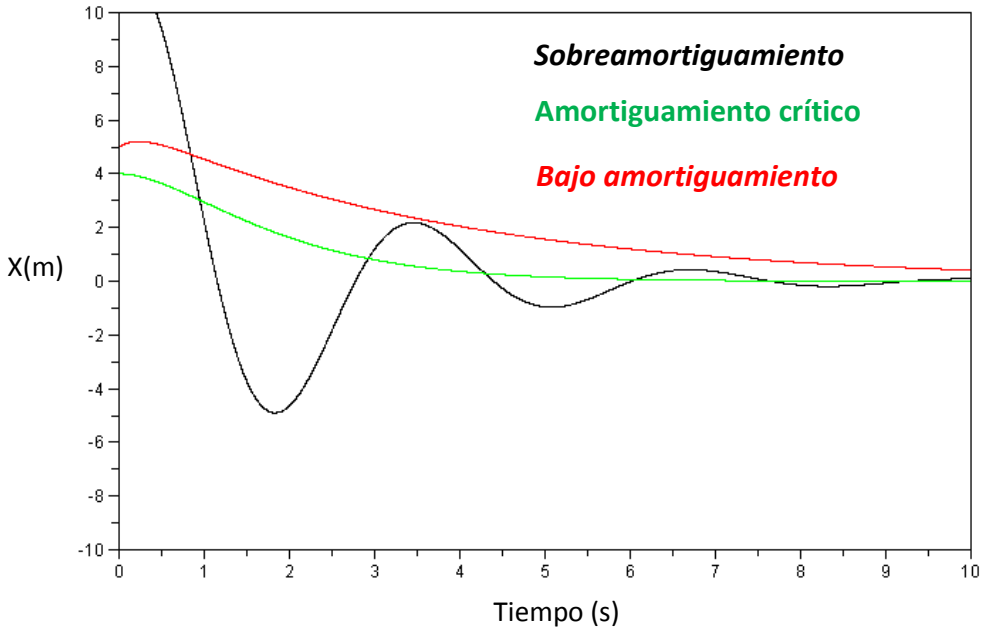


Figura 40. Muestra una mejor una sola presentación de las tres últimas gráficas.

CONCLUSIONES

Podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- Scicos, puede ser implementado eficientemente como un instrumento de enseñanza de la física a nivel básico y nivel avanzado.
- La gran ventaja del software libre, reside en su inmediatez para utilizarlo, en la eficiencia de su uso y en el constante desarrollo.
- Scicos, ofrece una diversidad de opciones en distintos campos de investigación. Es evidente que en el campo de la enseñanza de la física su utilidad es fundamental cuando necesitamos conocer la descripción cualitativa de un fenómeno físico.
- A partir de la solución de los modelos planteados en esta monografía, se pueden resolver otros ejemplos.
- La tendencia cada vez mayor del uso del software libre, se justifica en la medida que tiene un costo cero y un gran beneficio.
- La presente monografía puede usarse como un manual en español, lo cual hasta el momento no existe.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Amplia reseña histórica de Scicos. Sitio web disponible en: www.scicos_org-history.

[2] Pagina principal de Richard Stallman, creador del software libre. http://www.stallman.org/

[3] Sitio Web donde se registra las características del Software Libre. http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_libre

[4] Sitio web de la universidad de Cádiz, donde se registra los distintos software libres científicos. http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_libre.

[5] Sitio web de Scilab, donde se menciona a los fundadores de Scilab. http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_libre

[6] Sitio web donde se muestra las características de Scilab como lenguaje científico. http://www.cesma.usb.ve/wiki/index.php/Scilab.

[7] Sitio web que muestra los detalles de la creación del simulador Scicos. http://ralyx.inria.fr/2002/Raweb/participants.html?prenom=R.&nom=Nikoukhah

[8] BERROCAL TITO, CARITA MONTERO, notas de aula sobre modelaje industrial. IPRJ, VERJ. 2007.

[9] HELFGOTT MICHEL Y VERA EDGAR. Introducción a las ecuaciones diferenciales. Editores Amaru. Lima-Perú. Primera edición 1982.

[10] Manual oficial de Scicos. Sitio Web disponible www.scicos.org - 2008.

[11] KEITH R. SYMON. Mecánica, editorial addison-wesly, segunda edición, Madrid 1974.

[12] MARCELO ALONSO EDWARD J. FINN, Física volumen I. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, segunda edición, EEUU1987.

[13] Sitio web donde se encuentran diversos ejemplos con ecuaciones diferenciales. http://www.geocities.com/lioraghershman/scicos.htm.

[14] SERWAY-BEICHENER. Física para ciencias e ingeniería, volumen II. Editorial McGRAW-HILL. Quinta edición. México 2001.

[15] MARCELO ALONSO EDWARD J. FINN. Física volumen II, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, segunda edición, EEUU1987.

[16] MURRAY R. SPIEGEL, Applied Diferential Equations. Editores Prentice-Hall, México, tercera edición 1983.

1. FRANK AYRES, JR. Ecuaciones diferenciales, Serie de compendios Schaum, tercera edición. Colombia 1969.
2. SERWAY-BEICHENER. Física para ciencias e ingeniería, volumen I. Editorial McGRAW-HILL. Quinta edición. México 2001
3. EAILE DE MATTOS SILVA, JOSÉ PAULO VILELA SOARES. Manual de Scilab y Scicos aplicado en la enseñanza de la ingeniería eléctrica. Facultad de Ingeniería de la Universidad del Estado de Rio de Janeiro. 2005.
4. NANCY BLACHMAN. Mathematica: desde una perspectiva práctica, Stanford University, EUA. Primera edición 1998.
5. E. BÚTIKOV, A. BÍKOV, A. KONDRÁTIEV. Física en ejemplos y problemas. Editorial MIR. Moscú 1991.
6. Manual oficial de Scilab. Sitio Web disponible en www.scilab.org. 2008.
7. Calculo diferencial. Sitio web disponible en: www.phys.umu.se/gunnar
8. Software de cálculo matemático. Sitio web disponible en www.mathworks.com/industries
9. Documentación de ayuda para simular sistemas dinámicos. Sitio Web: www.mathworks.com/access/helpdesk/toolbook/simulink/rmvd_matlablink_1.html
10. CÉSAR PÉREZ. Matlab y sus aplicaciones en ciencias y la ingeniería. Editorial Pearson. Madrid 2002.

11. ROBER L. ZIMMERMAN. Mathematica for Physics. University of Oregon. 1994.

12. RAMINE NIKOUKHAH. Modeling and Simulation with Scicos. INRIA Rocquencourt BP105. Francia 2005.

13. L. LANDAU, A. AJIEZER, E. LIFSHITZ. Curso de Física General. Editorial MIR Moscú. URSS 1973.

14. PIRES, P. S. M. Introducción al Scilab. Disponible en http://www.dca.ufrn.br/~pmotta. (2004).

15. SCILAB Group, "Introduction to SCILAB - User's Guide". Referencia preparada por el Grupo de Soporte de SCILAB y disponible en el siguiente sitio web: http://scilabsoft.inria.fr/doc/intro/index..html. 2008.

16. GILBERTO E. URROZ. INTRODUCCIÓN AL "SCILAB". Materiales disponibles en: http://www.engineering.usu.edu/cee/faculty/gurro/Scilab.html.

17. PAULO SÉRGIO DA MOTTA PIRES. Introdução ao SCILAB, Dpto. de Engenharia de Computação e Automação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil 2006.

18. Aplicaciones a la ingeniería con ecuaciones diferenciales con Scilab. Sitio web disponible en http://www.eie.ucr.ac.cr/software/scilab/

19. CAMPBELL, S.L., J-P. CHANCELLIER Y R. NIKOUKHAH. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*, Springer(2006) (Ver 3.1)

20. GEORGE ARFKEN. Métodos matemáticos para físicos, Editorial Diana, primera edición. Mexico 1981.

21. PAUL G. HEWITT, JERRY D. WILSON, ANTHONY J. BUFFA. Ciencias Físicas 1, Editorial Pearson. Primera edición, Santiago de Chile 2006.

22. PAUL G. HEWITT, JERRY D. WILSON, ANTHONY J. BUFFA. Ciencias Físicas 2, Editorial Pearson. Primera edición, Santiago de Chile 2006.