Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Teoría de Morse y homología singular de las variedades diferenciales finito dimensionales

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Alberth John NUÑEZ SULLCA

ASESOR

Dr. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Nuñez, A. (2026). *Teoría de Morse y homología singular de las variedades diferenciales finito dimensionales*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Alberth John Nuñez Sullca
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	45893713
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0009-1237-8290
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9177-1561
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Josué Alonso Aguirre Enciso
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41341744
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.2. Topología y Geometría

Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2025 - 2026
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 17:02. horas del jueves 17 de julio de 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso (PRESIDENTE), Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (MIEMBRO) y el Dr. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "TEORÍA DE MORSE Y HOMOLOGÍA SINGULAR DE LAS VARIEDADES DIFERENCIALES FINITO DIMENSIONALES", presentado por el señor Bachiller Alberth John Nuñez Sullca, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación sobresaliente con mención con un calificativo promedio de diecinueve (19).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso, manifestó que el señor Bachiller Alberth John Nuñez Sullca, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 17:50 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso
PRESIDENTE

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
MIEMBRO

Dr. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR

UNMSM
Firmado digitalmente por BARAHONA MARTINEZ Willy David FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 28.09.2026 10:06:31 -05:00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. Willy David Barahona Martínez en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N.º 001957-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es **"TEORÍA DE MORSE Y HOMOLOGÍA SINGULAR DE LAS VARIEDADES DIFERENCIALES FINITO DIMENSIONALES"**, presentado por el bachiller Alberth John Nuñez Sullca para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 10 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Lima, 28 de setiembre de 2026

Firma del Asesor
Nombres y Apellidos del asesor: Willy David Barahona Martínez
DNI: 996276400

FICHA CATALOGRÁFICA

Alberth John Nuñez Sullca

Teoría de Morse y homología singular de las variedades diferenciales finito dimensionales, (Lima) 2026
VIII.,56pág.,29.7cm (UNMSM, Título, Matemática, 2026)
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática, UNMSM/FCM II. Título
(Series).

DEDICATORIA

Esta tesis va dedicada a Dios y mi familia, que me apoyaron en todo momento y me animaron a cumplir mis objetivos.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a Dios por guiar mis pasos cada día de mi vida y permitirme culminar esta tesis, a mis padres por alentarme y aconsejarme cada vez que lo he necesitado.

A mi asesor, el Dr Willy David Barahona Martínez por su paciencia y apoyo constante en la elaboración de este trabajo, a los jurados Dr Josue Aguirre y Dr Jorge Coripaco por sus sugerencias y consejos para concluirlo.

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por darme cobijo en sus aulas, a mis profesores que con sus enseñanzas me formaron como profesional.

Finalmente agradezco a mis amigos de la facultad Javier, Maldonado, Henry , Fernando,Pedro, Diego, Diego (mi hermano),Susane, Marco por haber salido a tantas verbenas, amanecidas y largas jornadas en los bares el Sky, Pedrito, Tambo y Sandro (la habitación del tiempo), la clínica y los parques de la Universidad donde bebiamos adentro y conocí el vino de 3 soles, el ron Can Cun (1 litro de sana diversión) y los clásicos 3x y Climax. Grandes conversaciones que me hicieron pensar que estaba haciendo con mi vida , pero que lo volvería a repetir sin dudarlo, y una mención especial a mi amigo Jose Alvarado que fue como mi maestro en la etapa de estudiante, basicamente todo lo que aprendi no fue gracias a las clases si no a las juntas que teníamos para discutir las teoría y ejercicios, siempre faltando a clases y solo apareciendonos a la hora del examen, también agradezco a mis amigos del barrio Mycky, Jhoncito, Henry (nuevamente) por las cervezas de los últimos fines de semana

Gracias a todos por ayudarme a concluir esta etapa en mi vida.

RESUMEN

Teoría de Morse y homología singular de las variedades diferenciales finito dimensionales

Alberth John Nuñez Sullca

17 de Julio – 2026

Asesor : Dr. Willy David Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

Esta tesis estudia cómo la teoría de Morse ofrece un método geométrico para calcular la homología de variedades diferenciables. Analizando los puntos críticos de funciones suaves, es posible descomponer una variedad en células cuyas dimensiones corresponden a los índices de dichos puntos. Esta estructura celular permite determinar los grupos de homología a partir de información analítica, estableciendo un puente natural entre la geometría diferencial y la topología algebraica. Siguiendo los enfoques clásicos de [Mil16], [Lim60], [doCa87], [Min04], el trabajo destaca la conexión entre las propiedades locales diferenciales y los invariantes topológicos globales, mostrando cómo la teoría de Morse unifica las perspectivas analítica y topológica de la matemática moderna.

Palabras clave:

Teoría de Morse, Homología , Variedades diferenciales, Funciones suaves, Puntos críticos.

ABSTRACT

Morse Theory and the Singular Homology of finite dimensional Manifolds

Alberth John Nuñez Sullca

17 July – 2026

Adviser : Dr. Willy David Barahona Martínez.

Obtained : Graduate in Mathematics.

This thesis explores how Morse theory provides a geometric method for computing the homology of differentiable manifolds. By analyzing the critical points of smooth functions, one can decompose a manifold into cells whose dimensions correspond to the indices of these points. This cellular structure allows the homology groups to be determined from analytic data, linking differential geometry and algebraic topology in a natural way. Following the classical approaches of [Mil16], [Lim60], [doCa87], [Min04], the work highlights the connection between local differential properties and global topological invariants, illustrating how Morse theory unifies analytical and topological perspectives in modern mathematics.

Keywords:

Morse theory, Homology, Differentiable manifolds, Smooth functions.

ÍNDICE GENERAL

Contenido **6**

Introducción **9**

Agradecimientos **10**

1. Preliminares **11**

1.1. Variedades diferenciales 11

1.1.1. Espacio Tangente 14

2. Descomposición celular de tipo CW **17**

2.1. Adjunción de células 17

2.2. CW-complejos y aplicaciones celulares 18

3. Nociones de homotopía **20**

3.1. Homotopías entre espacios topológicos 20

3.2. Retracciones 22

3.3. Homotopías entre variedades diferenciales 24

4. Nociones de Homología **27**

4.1. Sucesiones exactas 27

4.2. Complejo de cadenas 28

4.3. Homología singular 31

4.4. Números de Betti 34

5. Elementos de la Teoía de Morse **36**

5.1. Estudio de variedades usando funciones 36

5.2. Funciones Morse 38

5.3. Geometría del flujo gradiente 41

5.4. Variedades estables e inestables 43

5.5. Descomposición de tipo CW vía funciones Morse 46

6. Homología vía Teoría de Morse **49**

6.1. Desigualdades de Morse 49

Bibliografía **54**

Introducción

La relación entre la geometría y la topología ha sido, desde los orígenes de la matemática moderna, una fuente inagotable de ideas y resultados profundos. Uno de los vínculos más notables entre ambas áreas está dado por la teoría de Morse, desarrollada por Marston Morse en la década de 1930, que permite estudiar la forma y la estructura global de una variedad diferenciable a partir del análisis local de ciertas funciones suaves llamadas funciones de Morse.
La idea fundamental es sorprendentemente simple: si se examina una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ sobre una variedad M, los puntos críticos de f (aquellos donde su derivada se anula) revelan información topológica sobre M. Más precisamente, cada punto crítico no degenerado se asocia a una célula de dimensión igual a su índice, y la variedad puede reconstruirse, paso a paso, agregando estas células. De este modo, la teoría de Morse ofrece un puente entre el análisis y la topología, permitiendo calcular grupos de homología y características topológicas mediante herramientas diferenciales.

En esta tesis se estudia la estructura homológica de las variedades diferenciables a través de la teoría de Morse, mostrando cómo los conceptos de homología, descomposición celular y homotopía pueden interpretarse geometricamente mediante el comportamiento de funciones suaves. El trabajo se apoya en las presentaciones clásicas de [Mil16], [Lim60], [doCa87] y [Min04]. buscando una exposición clara y coherente que una las ideas de la topología algebraica con la intuición geométrica.

El desarrollo se organiza en varios capítulos. En primer lugar, se introducen las nociones básicas de variedades diferenciables y complejos celulares tipo CW, que sirven como marco para la construcción topológica de los espacios. Luego se presentan las

nociones de homotopía y homología singular, herramientas algebraicas que permiten asociar invariantes topológicos a los espacios diferenciables. A continuación se expone con detalle la teoría de Morse, incluyendo la definición de funciones Morse, los índices críticos, las variedades estables e inestables y la descomposición de tipo CW inducida por una función Morse. Finalmente, se estudia cómo esta descomposición permite calcular los grupos de homología de una variedad y entender sus propiedades topológicas fundamentales.

El propósito esencial de este trabajo consiste en mostrar cómo una teoría analítica (basada en derivadas y puntos criticos). puede emplearse para obtener información puramente topológica, como los números de Betti o la característica de Euler. Este enfoque unifica dos visiones complementarias de la matemática: la suavidad de las funciones diferenciables y la estructura discreta de los invariantes topológicos.

Desde un punto de vista formativo, la teoría de Morse ofrece un ejemplo paradigmático del diálogo entre el análisis, la geometría y el álgebra. A nivel de licenciatura, constituye una excelente introducción a los métodos modernos de la geometría diferencial y la topología algebraica, mostrando cómo una idea simple(analizar los puntos críticos de la función) conduce a resultados de gran profundidad y belleza conceptual.

1 Preliminares

1.1. Variedades diferenciales

A lo largo de este capítulo se describen los elementos fundamentales de variedades diferenciales, con la intención de proporcionar los fundamentos requeridos para el desarrollo posterior de la teoría de Morse. Se introducen las nociones de carta y atlas, las aplicaciones diferenciables entre variedades y los objetos asociados al espacio tangente. Estos elementos proporcionan el lenguaje y las herramientas que permitirán estudiar el comportamiento local de las funciones suaves y su relación con la estructura global de la variedad. El desarrollo de este capitulo se basa principalmente en los resultados presentados por [DC16] y [doCa87].

Definición 1.1. Una *carta local o sistema coordenado sobre un espacio topologico* M *de dimension* n *centrado en un punto* $p \in M$ *es un par* (φ, V) *donde* φ *es un homeomorfismo*

$$\varphi : V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

y $V \subseteq M$ *es un abierto de* M *con* $p \in V$ *y* $\varphi(V)$ *es un abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, *las funciones* $x_i : V \to \mathbb{R}$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *se denominan* funciones coordenadas de p relativas al sistema de coordenadas φ.

Definición 1.2. Dado M un espacio topologico, se define un *atlas* $\mathcal{A}$ *de dimensión* n como un conjunto de cartas locales $\{(\varphi_i, V_i)\}_i$ tal que la unión de los conjuntos V_i cubre todo M, es decir, $\bigcup_i V_i = M$.

Definición 1.3. Un atlas $\mathcal{A}$ de dimensión n sobre M se dice *diferenciable* si para todo par de cartas locales $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$, la funcion

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

sera un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$. En particular el Jacobiano $\mathrm{Jac}(\psi \circ \varphi^{-1}) \neq 0$ en todos los puntos donde esta definida.

Observación 1.1. La aplicación $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es llamada *cambio de coordenadas.*

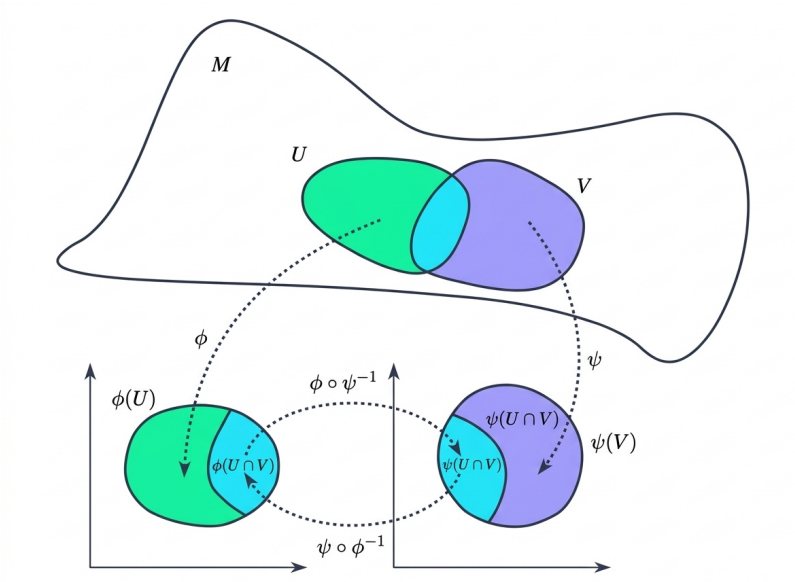
Definición 1.4. Una carta local (ν, U) en M es *admisible respecto a* $\mathcal{A}$ cuando, para toda carta local (φ, V) que pertenece a $\mathcal{A}$ y satisface $U \cap V \neq \emptyset$, el cambio de coordenadas

$$\nu \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \nu(U \cap W)$$

es un difeomorfismo.
Asimismo, un atlas $\mathcal{A}$ en M se llama *maximal* si todas las cartas locales de M resultan admisibles con respecto a $\mathcal{A}$.

Observación 1.2. *Todo atlas diferenciable* $\mathcal{A}$ *definido en* M *esta contenido en un único atlas diferenciable maximal.*

Definición 1.5. Una *variedad diferenciable de dimensión* n es un espacio de Hausdorff con base numerable, provisto de un atlas maximal diferenciable de dimensión n.



Ejemplo 1.1. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n. En efecto, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})\},$$

donde $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la identidad, es un atlas diferenciable para $\mathbb{R}^n$. Por tanto, $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.2. La esfera unitaria

$$S^n = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión n. Un atlas diferenciable para S^n está dado por las dos proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur.

La proyección estereográfica desde el *polo norte* $N = (1, 0, \ldots, 0)$ es la aplicación

$$\varphi : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_0}.$$

De manera análoga, la proyección estereográfica desde el *polo sur* $S = (-1, 0, \ldots, 0)$ está dada por

$$\phi : S^n \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 + x_0}.$$

El cambio de coordenadas sera un difeomorfismo, por lo que $\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{N\}, \varphi), (S^n \setminus \{S\}, \phi)\}$ es un atlas diferenciable para S^n.

Ejemplo 1.3. El *espacio proyectivo real* $\mathbb{R}P^n$ es el espacio cociente

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\} / \sim$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } x_i = \lambda y_i \text{ para todo } i.$$

Denotamos por $[x_0 : \ldots : x_n]$ la clase de equivalencia de $(x_0, \ldots, x_n)$, y definimos

$$U_i = \{\, [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0 \,\}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Estos conjuntos forman un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}P^n$, es decir $\bigcup_{i=0}^{n} U_i = \mathbb{R}P^n$. Definimos los mapas:

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[x_0 : \ldots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Estos mapas son homeomorfismos, y los cambios de coordenadas

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \quad &\longrightarrow \quad \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \\ (u_1, \ldots, u_n) \qquad &\longmapsto \left(\frac{u_0}{u_i}, \ldots, \frac{u_{i-1}}{u_i}, \frac{1}{u_i}, \frac{u_{i+1}}{u_i}, \ldots, \frac{u_n}{u_i} \right), \end{aligned}$$

son difeomorfismos. Por tanto, $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0}^n$ es un atlas diferenciable y $\mathbb{R}P^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n.

Observación 1.3. Todo subconjunto abierto W de una variedad diferenciable M de dimensión n adquiere de manera natural una estructura de variedad diferenciable de dimensión n. Basta tomar en el atlas $\mathcal{A}$ asociado a a M el subatlas formado por las cartas locales (U, φ) tal que $U \subseteq W$.

Ejemplo 1.4. Sea $M(n, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices reales de tamaño $n \times n$. Dado que $M(n, \mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ mediante la aplicación que enumera las entradas de una matriz, se sigue del Ejemplo 1.1 que $M(n, \mathbb{R})$ posee una estructura natural de variedad diferenciable.

Consideremos ahora el subconjunto

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{\, X \in M(n, \mathbb{R}) : \det(X) \neq 0 \,\},$$

es decir, el conjunto de matrices invertibles. Como la función determinante $\det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua, el conjunto $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}\left(\mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$ es abierto en $M(n, \mathbb{R})$. Por la Observación 1.3, todo subconjunto abierto de una variedad diferenciable es una variedad diferenciable con la estructura inducida.

Por tanto, $GL(n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión n^2.

1.1.1. Espacio Tangente

Para definir la derivada de una aplicación diferenciable $f : M \to N$ entre variedades, asociaremos a cada punto $x \in M$ un espacio vectorial T_xM al cual llamaremos *espacio tangente a M en el punto x* y luego veremos que si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable, entonces existe una aplicación lineal $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ llamada *derivada de f en x*. Los elementos de T_xM serán llamados *vectores tangentes.*

Definición 1.6. *Sea $C^\infty(M)$ el espacio de las funciones diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$. Un* vector tangente *a M en p se define como una aplicación lineal*

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

que satisface la regla de Leibniz, es decir

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f), \quad \textit{para todo } f, g \in C^\infty(M).$$

Denotaremos al conjunto de todas las derivaciones en p por

$$\boxed{T_pM = \{X_p : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R} : \quad X_p \text{ es una derivacion en p}\}}$$

T_pM junto con la suma y producto por un escalar definidas por

- $(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$, para todo $f \in C^\infty(M)$.
- $(\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}, f \in C^\infty(M)$.

Proposición 1.1. *T_pM junto con la suma y producto por un escalar forma un espacio vectorial real de dimensión n.*

Demostración. Dada una carta local (U, φ) al rededor de p, donde $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Definimos las derivaciones $\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p$ para cada $i = 1, \ldots, n$ por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

para todo $f \in C^\infty(M)$.

Estas n derivaciones son linealmente independientes y juntas nos darán una base para T_pM.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p = 0$$

y desde que $\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p (x_j) = \delta_{ij}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p (x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j = 0$$

y eso vale para todo $j = 1, \ldots, n$, por tanto el conjunto es linealmente independiente.

Sea $F : T_pM \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$T(X_p) = (X_p(x_i), \ldots, X_p(x_n))$$

esta aplicación es claramente lineal. Observamos por definición

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mid_p\right) = e_i$$

es decir lleva el conjunto linealmente independiente $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\mid_p\}_{i=1}^n$ hacia la base de $\mathbb{R}^n$ $\{e_i\}_{i=1}^n$, entonces $\dim T_pM \geq n$. Por otro lado desde que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\mid_p\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente, entonces $\dim T_pM \geq n$, luego tendremos $n \leq \dim T_pM \leq n$, entonces $\dim T_pM = n$, así $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\mid_p\}_{i=1}^n$ forma una base de T_pM. □

Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Dado $p \in M$ la *derivada de f en p* es una aplicación lineal

$$Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

definida de la siguienta manera

$$Df_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f) \quad \text{para todo } g \in C^\infty(N).$$

2 Descomposición celular de tipo CW

La descomposición celular de tipo CW ofrece una manera natural y flexible de analizar la estructura topológica de una variedad mediante piezas elementales llamadas células. Esta perspectiva resulta especialmente útil en el contexto de la teoría de Morse, donde los puntos críticos de una función suave permiten descomponer la variedad en células asociadas a los índices de dichos puntos.

A lo largo de este capítulo se desarrollan las ideas básicas de los complejos CW y su construcción inductiva a partir de células de distintas dimensiones. Se discuten las propiedades topológicas fundamentales y se enfatiza la conexión entre esta descomposición y la información obtenida a través de funciones de Morse. De este modo, la estructura celular se convierte en un puente entre la geometría diferencial y la topología algebraica, permitiendo traducir propiedades analíticas en descripciones topológicas concretas de la variedad. El desarrollo de este capítulo se basa principalmente en los resultados presentados por [Mil16], [Hat02], [Lee11] y [Min04b].

2.1. Adjunción de células

Definición 2.1. Se denomina *n-célula* a un espacio topológico que es homeomorfo al disco cerrado de dimensión n

$$D^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}.$$

Observación 2.1. Nos referiremos por *célula* a una n-célula, para algún $n \in \mathbb{N}$ y por convención D^0 *sera un conjunto finito de puntos, y denotaremos a la frontera de* D^n *por* S^{n-1} *es decir*

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}.$$

Definición 2.2. *Sea* X *un espacio topológico y* $f : S^{n-1} \to X$ *una función continua, se define la adjuncion de la n-célula a* X *a través de* f *denotado por*

$$X \sqcup_f D^n$$

Este es el espacio generado por la unión disjunta de X con D^n e identificando los puntos $x \in S^{n-1}$ con $f(x) \in X$.

Definición 2.3. Decimos que A se obtiene de X *pegando una n-célula a través de f* si $A = X \sqcup_f D^n$

En otras palabras A se obtiene de la unión disjunta de X y D^n y tras lo cual se hace corresponder cada punto del borde del disco con su imagen a través de f en X.

Ejemplo 2.1. (a) D^n se obtiene de S^{n-1} adjuntando una n-célula, a través de la función identidad $\mathrm{Id} : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$.

(b) S^n lo obtenemos de un punto $*$ adjuntando una n-célula, a través de la función contracción $\mathrm{c} : S^{n-1} \longrightarrow *$

2.2. CW-complejos y aplicaciones celulares

Definición 2.4. *Un CW-complejo* es un espacio topológico X junto con una filtracion

$$\emptyset \subseteq X^0 \subseteq X^1 \cdots \subseteq X^n \subseteq X^{n+1} \subseteq \cdots \subseteq X.$$

de modo que

(a) X^0 consiste en un número finito de puntos $X^0 = \{x_1, \ldots, x_k\}$.

(b) X^n lo obtenemos a partir de X^{n-1} pegando un numero finito, infinito o vacío de n-células. X^n es llamado n-esqueleto.

(c) $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ esta dotado con la topología coherente (es decir, $F \subset X$ es cerrado si y solo si $F \cap X^n$ es cerrado en X^n, para todo $n \in \mathbb{N}$).

Ejemplo 2.2. *Sea $X = S^1$, este es un CW-complejo, en efecto*

- *Sea $X^0 = \{p\}$ un único punto.*
- *X^1 lo obtendremos de X^0 pegando una única 1-célula D^1, mediante el mapa de adjuncion $\varphi : S^0 = \{-1, 1\} \to X^0$, es decir $X^1 = X^0 \sqcup_\varphi D^1$.*
- *$X = X^0 \cup X^1$.*

Observación 2.2. Un espacio topologico X puede tener varias estructuras diferentes como CW-complejo. (ver [Hat02])

Ejemplo 2.3. *Un espacio de Hilbert de dimensión infinita no es un CW-complejo, este es un espacio de Baire y por tanto no puede escribirse como una unión numerable de n-esqueletos. (ver [Lee11, p.160])*

Proposición 2.1. *Dado X un CW-complejo, entonces*

$$X \text{ es compacto} \Leftrightarrow \text{posee un numero finito de células}$$

Demostración. Ver [Min04, p. 12]. □

3 Nociones de homotopía

El concepto de homotopía permite comparar espacios topológicos desde un punto de vista más flexible que el de homeomorfismo, capturando su estructura esencial a través de deformaciones continuas. Dos aplicaciones o espacios son homotópicos si pueden transformarse uno en otro mediante un proceso continuo, lo que posibilita estudiar sus propiedades globales sin atender a los detalles locales de su geometría.
En este capítulo se introducen las nociones fundamentales de homotopía de aplicaciones, retracción, contracción y equivalencia homotópica, junto con ejemplos ilustrativos. Estas ideas desempeñan un papel central en la teoría de Morse, ya que las modificaciones que produce una función de Morse sobre el espacio —al agregar células de distintas dimensiones— pueden interpretarse desde la perspectiva homotópica. De esta manera, la homotopía provee el lenguaje adecuado para describir los cambios topológicos que acompañan al surgimiento o desaparición de puntos críticos. El desarrollo de este capítulo se basa principalmente en los resultados presentados por [Lim99a].

3.1. Homotopías entre espacios topológicos

Sean $I = [0, 1]$ el intervalo cerrado y X, Y dos espacios topológicos.

Definición 3.1. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas, se dicen *homotópicas* si existe una aplicación continua

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $G(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$, en este caso diremos que F *es una homotopía entre* f *y* g, lo cual denotaremos por $F : f \simeq g$.

Denotaremos al conjunto de funciones continuas de X en Y de la siguiente manera

$$Y^X := \{f : X \longrightarrow Y : \ f \text{ es continua}\}$$

Proposición 3.1. *La relación de homotopía es una relación de equivalencia en* Y^X.

Demostración. • Reflexiva, $f \simeq f$ para todo $f \in Y^X$.

Dado $f : X \longrightarrow Y$, la aplicación $F : X \times I \longrightarrow Y$

$$F(t, x) = f(x)$$

para todo $x \in X$ y para todo $t \in I$ es una homotopía entre f y f.

- Simétrica, Si $f \simeq g$, entonces $g \simeq f$.

  Sea $F : X \times I \longrightarrow Y$ una homotopía entre f y g, entonces definiendo

$$\begin{aligned} G : X \times I &\to Y \\ (x, t) &\mapsto G(x, t) = F(x, 1 - t) \end{aligned}$$

  es claro que G es continua y $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$, $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$, así G es una homotopía entre g y f.

- Transitiva, Si $f \simeq g$ y $g \simeq h$, entonces $f \simeq h$.

  Sean $F : f \simeq g$ y $G : g \simeq h$ homotopías . Definiremos la siguiente aplicación $H : X \times I \longrightarrow Y$ por:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

está bien definida, pues para $t = 1/2$ tenemos que $H(x, 1/2) = F(x, 1) = G(x, 0) = g(x)$, luego H es continua y además $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ para todo $x \in X$. Así concluimos que $H : f \simeq h$.

□

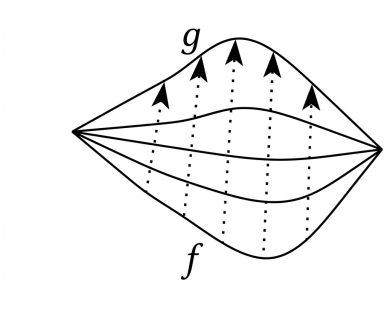
Ejemplo 3.1. (a) Dado un espacio topológico X arbitrario y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones continuas arbitrarias, entonces f y g son homotópicas.

Para demostrar esta afirmacion es suficiente definir

$$\begin{aligned} F : X \times I &\to \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

Es claro que F es continua pues es el segmento de recta que une $f(x)$ con $g(x)$, además tenemos que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$. Asi $F : f \simeq g$.

Geométricamente lo que estamos haciendo es dislocar cada punto $f(x)$ a través del segmento de recta $\overline{f(x)g(x)}$ de tal forma que en $t = 1$ lleguemos a $g(x)$. Observamos que el mismo resultado continua siendo válido si reemplazamos $\mathbb{R}^n$ por cualquier otro conjunto convexo A.



(b) Sea $f : X \longrightarrow S^n$ tal que $f(X) \neq S^n$, entonces f es homotópica a una función constante $c : X \longrightarrow S^n$, donde $c(x) = p$ para todo $x \in X$. En efecto:

Desde que $f(X) \neq S^n$, existe $p \in S^n$ tal que $p \notin f(X)$, luego f puede ser considerada como una aplicación continua $f : X \longrightarrow S^n \setminus \{p\}$, y recordando que a través de la proyección estereográfica tenemos un homemorfismo $S^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ y usando el ejemplo (a) concluimos que f es homotópica a cualquier aplicación continua $g : X \longrightarrow S^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$, en particular a una aplicación constante.

Desde que $\simeq$ es una relación de equivalencia en Y^X, denotaremos al conjunto cociente $Y^X/\simeq$ por $[X,Y]$. Uno de los asuntos centrales en el estudio de la topología es el de clasificación de aplicaciones de un espacio X en un espacio Y por medio de la relación de homotopía (que es menos estricto que la clasificación a través de homeomorfismos) precisamente buscamos condiciones necesarias y suficientes para que dos aplicaciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$ sean homotópicas y así obtener informaciones sobre la estructura de $[X,Y]$.

3.2. Retracciones

Definición 3.2. Dados los espacios topológicos X e Y se dicen que poseen el *mismo tipo de homotopía* o son *homotopicamente equivalentes*, si existen aplicaciones continuas

$f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ satisfaciendo $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$.

Veamos ahora situaciones particulares que se establecen entre un espacio y un subespacio del mismo.

Definición 3.3. Un espacio topológico X se dice *contráctil* si la aplicación $\mathrm{id} : X \longrightarrow X$ es homotópica a alguna aplicación constante.

Ejemplo 3.2. Todo convexo A de $\mathbb{R}^n$ es contráctil, basta ver que la $\mathrm{id} : A \longrightarrow A$ es homotópica a alguna aplicación constante por la parte (a) del ejemplo 3.1.

Definición 3.4. Decimos que la inclusión $i : A \to X$ es un *retracto*, si existe una aplicación continua llamada *retracción* $r : X \to A$ tal que $r \circ i = \mathrm{id}_A$.

Ejemplo 3.3. Sea $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y sea $A = S^{n-1}$ la esfera unitaria. Consideremos

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}, \qquad r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Entonces r es continua y satisface $r(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$, entonces

$$r \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$$

Así, la inclusión $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un retracto.

Definición 3.5. Decimos que el subespacio A de X es un *retracto débil de* X si existe una funcion continua $r : X \to A$ tal que $r \circ i \simeq \mathrm{id}_A$.

Ejemplo 3.4. Sea $X = B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la bola cerrada, y sea $A = S^{n-1} = \partial B^n$ su frontera.
Definimos la aplicación continua

$$r : B^n \longrightarrow S^{n-1}, \qquad r(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|}, & x \neq 0, \\ (1, 0, \ldots, 0), & x = 0. \end{cases}$$

La restricción $r \circ i$ a S^{n-1} no es la identidad, pero sí es homotópica a ella. Basta considerar la homotopía

$$H : S^{n-1} \times I \longrightarrow S^{n-1}, \qquad H(x,t) = \frac{(1-t)x + t\, r(x)}{\|(1-t)x + t\, r(x)\|}.$$

Por tanto, S^{n-1} es un *retracto débil* de B^n.

Definición 3.6. Decimos que el subespacio A de X es un *retracto por deformación* si es un retracto y además $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$.

Ejemplo 3.5. *Sea*

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \qquad y \qquad S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Definimos la inclusión

$$i : S^{n-1} \hookrightarrow B^n,$$

y la aplicación

$$r : B^n \to S^{n-1}, \qquad r(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

que envía cada punto al punto del borde en la misma dirección radial.
Entonces S^{n-1} es un retracto por deformación de B^n. En efecto, definimos una homotopía

$$H : B^n \times [0,1] \to B^n, \qquad H(x,t) = (1-t)x + t\,\frac{x}{\|x\|}.$$

Esta satisface:

$$H(x,0) = x, \qquad H(x,1) = r(x),$$

y es claro que H fija S^{n-1}. Por lo tanto,

$$i \circ r \simeq \mathrm{id}_{B^n},$$

lo cual prueba que S^{n-1} es un retracto por deformación de B^n.

Observación 3.1. En particular si un subespacio A es un retracto por deformación de un espacio X, entonces estos son homotópicamente equivalentes.

3.3. Homotopías entre variedades diferenciales

Vamos a estudiar el caso cuando X e Y son variedades diferenciables, y describiremos las homotopías entre ellos.

Definición 3.7. Sean M, N dos variedades diferenciables de dimensión n, m respectivamente. Una *homotopía diferencial* entre $f, g : M \longrightarrow N$ dos aplicaciones diferenciables es una aplicación diferenciable $F : M \times I \longrightarrow N$, tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$ para todo $x \in M$, en este caso decimos que f y g son *diferencialmente homotópicas*.

Ser diferencialmente homotópicas es una relación de equivalencia en el espacio de aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables, el hecho de ser reflexiva y simétrica se sigue igual que en la Proposición 3.1. Ser transitiva es algo más complicado y lo veremos en el siguiente Lema.

Lema 3.1. *Sean $f, g : M \longrightarrow N$ aplicaciones diferenciables y $F : f \simeq g$, $G : g \simeq h$ homotopias diferenciables, entonces existe una homotopía diferencial $H : f \simeq h$.*

Demostración. Vamos a considerar una función diferenciable $\xi : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow [0, 1]$ satisfaciendo:

- $\xi(0) = 0$, $\xi(\frac{1}{2}) = 1$
- Las derivadas de cualquier $\xi^{(r)}(t)$ se anulan en $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}$.

□

Una función ξ con esas características existe, basta ver [Lim99a, p. 166]. Definimos una homotopía $H : M \times I \longrightarrow N$ como:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, \xi(t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(t, \xi(t - \frac{1}{2})) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Desde que $F(x\xi(t)) = G(x, \xi(0)) = g(x)$, entonces H está bien definida y es continua. Además $H(x, 0) = F(x, \xi(0)) = f(x)$ y $H(x, 1) = G(x, \xi(\frac{1}{2}) = G(x, 1) = g(x)$, para cualquier $x \in M$, se sigue que H es una homotopía entre M y N. Ahora veamos que es diferenciable.

Es claro que los puntos problema son de la forma $H(x, \frac{1}{2})$, entonces veremos que $\frac{\partial^k H}{\partial t^k}(x, \frac{1}{2})|_{t=\frac{1}{2}}$ existe para todo k. calcularemos las derivadas parciales:

- Calculando la derivada lateral por la izquierda de $\frac{\partial H}{\partial t}(x, \frac{1}{2})|_{t=\frac{1}{2}}$ y por la regla de la cadena obtenemos $\frac{\partial H}{\partial t}(x, \frac{1}{2})|_{t\to\frac{1}{2}^-} = \xi'\left(\frac{1}{2}\right).\frac{\partial F}{\partial t}(x, 1) = 0$, desde que $\xi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
- Calculando la derivada lateral por la derecha de $\frac{\partial H}{\partial t}(x, \frac{1}{2})|_{t=\frac{1}{2}}$ y nuevamente usando la regla de la cadena obtenemos $\frac{\partial H}{\partial t}(x, \frac{1}{2})|_{t\to\frac{1}{2}^+} = \xi'(0).\frac{\partial G}{\partial t}(x, 0) = 0$, desde que $\xi'(0) = 0$.

Por lo tanto, acabamos de ver que las derivada laterales existen y son iguales, luego H es de clase C^1. Repitiendo este argumento obtenemos que todas las derivadas parciales de orden k existen, así H es diferenciable.

Teorema 3.1. *Sean M, N variedades diferenciales compactas de dimensión n y m respectivamente. Entonces*

(a) Toda aplicación continua $f : M \longrightarrow N$ es homotópica a una aplicación diferenciable $g : M \longrightarrow N$.

(b) Si dos aplicaciones diferenciables $f, g : M \longrightarrow N$ son homotópicas, entonces ellas son diferencialmente homotópicas.

Demostración. Ver [ElonV, p. 144]. □

4 Nociones de Homología

La homología proporciona una herramienta fundamental para estudiar la estructura topológica de los espacios mediante la asignación de grupos algebraicos que reflejan su forma y conectividad. A diferencia de la homotopía, que se centra en deformaciones continuas, la homología traduce la información geométrica en un lenguaje algebraico que permite distinguir y clasificar espacios de manera sistemática.

En este capítulo se introducen las nociones básicas de cadenas, bordes, ciclos y grupos de homología, junto con ejemplos ilustrativos que muestran cómo estos conceptos capturan la estructura esencial de un espacio topológico. Estas ideas resultan especialmente relevantes en la teoría de Morse, donde la aparición de puntos críticos de una función suave se relaciona con la creación o cancelación de clases de homología. De este modo, la homología ofrece una descripción algebraica precisa de los cambios topológicos inducidos por el análisis morseano. El desarrollo de este capítulo se basa principalmente en los resultados presentados por [ElonH] y [BT95].

4.1. Sucesiones exactas

Nos centraremos en grupos abelianos, usando 0 tanto para el grupo cero como para el morfismo cero. Los morfismos únicos que van hacia o provienen del grupo 0 los denotaremos por $0 \to M$ y $M \to 0$, respectivamente.

Definición 4.1. Una sucesión de la forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

se llama *sucesión exacta corta* (s.e.c.) si $\ker(g) = \mathrm{Im}(f)$. Esto equivale a decir que f es un monomorfismo y g un epimorfismo

Ejemplo 4.1.

- La sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M \oplus P \xrightarrow{q} P \longrightarrow 0$ es una (s.e.c), donde i es la inclusión y q es la proyección de la segunda coordenada.

- La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{q} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

es una (s.e.c.), donde f es la multiplicación por 2 y q asigna la clase módulo 2. Observemos que dicha (s.e.c.) no es de la misma forma que la presentada arriba.

- Dado $N \leq G$ (sugbrupo), entonces

$$0 \to N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/N \to 0$$

es una (s.e.c).

Proposición 4.1. *Sea*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

una (s.e.c.) Las siguientes afirmaciones equivalen entre si:

(a) f es una sección, esto es, existe un morfismo $r : N \to M$ tal que $r \circ f = \mathrm{id}_M$.

(b) g es una retracción, esto es, existe un morfismo $i : P \to N$ tal que $g \circ i = \mathrm{id}_P$.

(c) Tenemos un isomorfismo $\varphi : N \to M \oplus P$ satisfaciendo

$$\varphi \circ f(m) = (m, 0), \quad g \circ \varphi^{-1}(m, p) = p.$$

Diremos que una (s.e.c) *se parte* si satisface las propiedades de la Proposición 4.1

4.2. Complejo de cadenas

Definición 4.2. Un *complejo de cadenas* (C_*, d) consiste en un diagrama de grupos abelianos conectados mediante morfismos de grupos.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

para el cual $d_n \circ d_{n+1} = 0$, para todo n o de modo equivalente $\mathrm{Im} d_{n+1} \subset \ker d_n$

Definición 4.3. Sea (C_*, d). La *homología de* (C_*, d) *en grado* n se define como el grupo abeliano

$$H_n(C_*) = \ker d_n / \mathrm{Im}\, d_{n+1}.$$

De manera habitual, denotamos $Z_n(C) := \ker d_n$, conocido como el *grupo de n-ciclos* de C_*, y $B_n(C) := \operatorname{Im} d_{n+1}$, llamado el *grupo de n-bordes*. Por tanto

$$H_n(C_*) = Z_n(C)/B_n(C),$$

esto es, el grupo de n-ciclos módulo el grupo de n-bordes.

Lema 4.1. *Se tiene $H_n(C_*) = 0$ si y solo si el complejo C_* es exacto en el grado n.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $H_n(C_*) = 0$, entonces $\ker d_n = \mathrm{Im} d_{n+1}$, luego resulta que C_* es exacta en el lugar n.
($\Leftarrow$) Si C_* es exacta en el lugar n, entonces $\mathrm{Im} d_{n+1} = \ker d_n$, luego

$$H_n(C_*) = \ker d_n / \mathrm{Im} d_{n+1} = 0.$$

□

Observación 4.1. *En consecuencia, una sucesión exacta puede interpretarse como un complejo cuya homología se anula en todos los grados.*

Consideremos algunos ejemplos de complejos y los correspondientes grupos de homología.

Ejemplo 4.2. (a) Consideremos

$$C_* = \cdots \longrightarrow M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{0} M \longrightarrow \cdots$$

En este caso se obtiene que $H_n(C_*) = M$ para cada n.

(b) Tomemos ahora $C_* = \cdots \longrightarrow M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id_M} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id_M} M \longrightarrow \cdots$. De esta forma, resulta que $H_n(C_*) = 0$ para todo n, lo que muestra que la sucesión es exacta.

(c) Finalmente, si $C_* = \cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{.m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{.m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$, se verifica que $H_n(C_*) = 0$ siempre que n sea par, mientras que $H_n(C_*) = \mathbb{Z}_m$ en los valores impares de n.

Definición 4.4 (Morfismo de cadenas)**.** *Definimos $f : (C_*, d) \longrightarrow (C'_*, d')$ como una familia de morfismos $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ para todo n que conmutan con la diferencial i.e.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d} & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \xrightarrow{d} & C_{n-2} & \xrightarrow{d} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-2}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{d'} & C'_n & \xrightarrow{d'} & C'_{n-1} & \xrightarrow{d'} & C'_{n-2} & \xrightarrow{d'} & \cdots
\end{array}$$

tal que $f_{n-1} \circ d = d' \circ f_n$*, para todo* n*.*

Observación 4.2. *En la definición anterior si cada* f_n *es un isomorfismo, entonces* $f : (C_*, d) \longrightarrow (C'_*, d')$ *se denomina isomorfismo.*

Bajo estas condiciones es fácil ver que el morfismo f envía ciclos en ciclos y bordes en bordes, entonces cada morfismo $f : (C_*, d) \longrightarrow (C'_*, d')$ induce un morfismo entre sus grupos de homología:

$$\begin{aligned} f_* : & H_n(C_*) \longrightarrow H_n(C'_*) \\ & [x] \longmapsto f_*(x) = [f_n(x)] \end{aligned}$$

Proposición 4.2. *Dado* $f : (C_*, d) \to (C'_*, d')$ *un isomorfismo, entonces* $f_* : H_n(C_*) \to H_n(C'_*)$ *es tambien un isomorfismo.*

Demostración. f_* es un monomorfismo, en efecto:

$$\begin{aligned} f_*([x]) &= f_*([y]) \\ [f_n(x)] &= [f_n(y)] \end{aligned}$$

por lo tanto, $f_n(x) - f_n(y) \in \mathrm{Im} d'_{n+1}$, luego usando el hecho que $d'^2 = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n(y) &= d'_{n+1}(x), \text{con } x \in C'_{n+1} \\ d'_n \circ f_n(x) - d'_n \circ f_n(y) &= d'_n \circ d'_{n+1}(x) = 0 \end{aligned}$$

Así, $f_{n-1} \circ d_n(x) = f_{n-1} \circ d_n(y)$ y desde que f es isomorfismo se sigue que $d_n(x) = d_n(y)$, en consecuencia $x - y \in \mathrm{Im} d_n$, por tanto $[x] = [y]$.
f_* es un epimorfismo, en efecto:

Sea $[y] \in H_n(C'_*)$, entonces $y \in \ker d'_n$, en particular $y \in C'_n$ y desde que $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ es un isomorfismo para todo n, existe $\tilde{y}$ tal que $f_n(\tilde{y}) = y$, luego

$$d'_n \circ f_n(\tilde{y}) = d'_n(y)$$
$$f_{n-1} \circ d_n(\tilde{y}) = 0$$

asi $d_n(\tilde{y}) = 0$, entonces $\tilde{y} \in \ker d_n$ por tanto $f_*([\tilde{y}]) = [y]$.

□

Observación 4.3. El recíproco de la Proposición 4.2 no es verdad, por ejemplo el morfismo 0 entre sucesiones exactas distintas induce un isomorfismo entre sus homologías, sin embargo no es isomorfismo a nivel de complejos.

Definición 4.5. Decimos que $f : (C_*, d) \longrightarrow (C'_*, d)$ es un *cuasi-isomorfismo* cuando el morfismo inducido $f_* : H_n(C_*) \longrightarrow H_n(C'_*)$ resulta ser un isomorfismo para cada n.

Definición 4.6. Sean $f, g : (C_*, d) \longrightarrow (C'_*, d)$. Una homotopía $\phi : f \simeq g$ consiste en una colección de morfismos $\phi_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$ para cada n, cumpliendo los siguiente:

$$d'_{n+1} \circ \phi_n + \phi_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n.$$

Proposición 4.3. *Sean $f, g : (C_*, d) \longrightarrow (C'_*, d)$. Si $f \simeq g$, entonces*

$$f_* = g_* : H_n(C_*) \longrightarrow H_n(C'_*)$$

para todo n.

Demostración. Ver [ElonH, p. 42]. □

4.3. Homología singular

En esta sección analizaremos la homología más relevante asociada a los espacios topológicos.

Definición 4.7. Un *n-symplex estandard* es el conjunto

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ con } t_i \geq 0 \right\}$$

Ejemplo 4.3. (a) Δ^0 se reduce a un solo punto.

(b) Δ^1 resulta ser un segemento.

(c) Δ^2 resulta ser un triangulo.

(d) Δ^3 seria un tetraedro.

Definición 4.8. Dado un espacio topologico X. Un *n-symplex singular* es una función continua $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$.

Definimos

$$S_n(X) = \{ \sum_{\text{finitas}} m_i \sigma_i \ : \ m_i \in \mathbb{Z} \}$$

Ejemplo 4.4. (a) $S_0(X)$ corresponde al grupo abeliano libre cuyo conjunto de generadores es X.

(b) $S_1(X)$ es el grupo abeliano libre generado por todos los caminos contenidos en X.

Ejemplo 4.5. (a) $S_0(X)$ está dado por el grupo abeliano libre con base en los puntos de X.

(b) $S_1(X)$ se obtiene como el grupo abeliano libre generado por los caminos de X.

Definición 4.9. Dado $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ un n-símplex singular. Definimos

$$\sigma^{(i)} \colon \Delta^{n-1} \longrightarrow X,$$
$$(t_0, \ldots, t_{n-1}) \longmapsto \sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_{n-1}).$$

Es llamado la *i-ésima cara* de σ.

Definición 4.10. $(S_*(X), d)$ es conocido como *el complejo singular de* X, donde $d : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ queda definida por:

$$d(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

Definición 4.11. La *homología singular de* X se define como la homología del complejo $(S_*(X), d)$ y escribimos $H_n(X; \mathbb{Z})$ para referirnos a su n-ésimo grupo de homología.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos , esta induce un morfismo entre complejos singulares $f_* : (S_*(X), d) \longrightarrow (S_*(Y), d')$, la cual a su vez como en la sección anterior induce un morfismo entre homologías $f_* : H_n(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y;\mathbb{Z})$ para todo n.

Ejemplo 4.6. Vamos a calcular la homología singular de un 0-symplex o sea punto $X = *$. Primeramente observamos que $S_n(X) = \mathbb{Z}$ para todo n

Entonces $d : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ resulta ser $d : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, entonces $d = 0$, si n es par y $d = \mathrm{id}$, si n es impar, por lo tanto, tenemos:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

luego, obtenemos

$$H_n(*;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Proposición 4.4. *El grupo $H_0(X;\mathbb{Z})$ es el grupo abeliano libre cuyo conjunto de generadores está dado por las componentes conexas de X.*

Teorema 4.1. *Dadas $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas, y sean $f_*, g_* : (S_*(X), d) \longrightarrow (S_*(Y), d')$ los morfismos inducidos. Si $f \simeq g$, entonces $f_* \simeq g_*$. En particular, se tiene $f_* = g_* : H_n(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y;\mathbb{Z})$.*

Demostración. Ver [ElonH, p. 104]. □

Corolario 4.1. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces el morfismo inducido*

$$f_* : H_n(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y;\mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.

Ejemplo 4.7. Si X es contráctil, entonces

$$H_n(X;\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ \mathbb{Z}, & n = 0 \end{cases}$$

4.4. Números de Betti

Considerando M como una variedad diferenciable compacta, los grupos de homologia singular $H_i(M;\mathbb{Z})$ resultan ser grupos Abelianos finitamente generados, entonces por el Teorema fundamental de los grupos Abelianos finitamente generados

$$H_i(M;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{r_i} \oplus T_i$$

r_i es un entero no negativo y se denominara *i-esimo numero de Betti de M denotado por* β_i*, es decir*

$$\beta_i := \operatorname{rank}(H_i(M;\mathbb{Z}))$$

De manera intuitiva, el i-ésimo número de Betti de M indica el **número de agujeros** *de dimensión i presentes en la variedad M.*

- β_0 *representa la cantidad de componentes conexas.*
- $\beta_1 = 2g$*, para superficies compactas y orientables, donde g es el genero de la superficie.*
- $\beta_n = 1$*, para una variedad cerrada, conexa y orientable de dimension n*

Ejemplo 4.8. (a) En el caso de la esfera S^2 los números de Betti son:

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$$

(b) En el caso de Toro real bidimensional $\mathbb{T}^2$, sabemos que $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ y usando la fórmula de Kunneth (ver [BT95, p. 47]) obtenemos:

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = 1, \beta_{i>2} = 0$$

Recordamos que $S_n(M)$ *el grupo abeliano libre generado por todos los n-symplex singulares de X, es decir sumas finitas* $\sum m_i\sigma_i$*, con* $m_i \in \mathbb{Z}$*. Si ahora en lugar de considerar* $m_i \in \mathbb{Z}$ *consideramos* $m_i \in \mathbb{F}$*, donde* $\mathbb{F}$ *es un cuerpo como por ejemplo* $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, etc$ *y procediendo exáctamente como en la Sección 4.3.*
En esa situacion $H_i(X;\mathbb{F})$ *se convierte en un* $\mathbb{F}$*-espacio vectorial y el i-esimo numero de Betti en* $\mathbb{F}$ *se define como*

$$\beta_i(M,\mathbb{F}) = \dim H_i(M;\mathbb{F})$$

Observación 4.4. *Si la variedad M no posee torsion (es decir sus grupos de homologia singular poseen torsion nula), entonces*

$$\beta_i = \beta_i(M, \mathbb{Z}) = \beta_i(M, \mathbb{F})$$

para cualquier cuerpo F.

La característica de Euler definida por $\chi(M) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i$ es un invariante topológico de la variedad, es decir si dos espacios X e Y son homeomorfos entonces $\chi(X) = \chi(Y)$, esto nos permite saber cuando dos espacios no son homeomorfos, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.9. En el Ejemplo 4.8 observamos que

$$\chi(S^2) = 2, \text{ mientras que } \chi(\mathbb{T}^2) = 0$$

por lo tanto, la esfera y el toro no son espacios homeomorfos como era de esperarse.

Observación 4.5. El recíproco no es verdad , es decir dos espacios topológicos pueden tener la misma característica de Euler sin ser ellos homeomorfos. Por ejemplo

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0, \ n \text{ es impar} \\ 2, \ n \ \text{ es par} \end{cases}$$

Sin embargo S^n no es homeomorfo a S^m para $n \neq m$.

5 Elementos de la Teoía de Morse

La teoría de Morse constituye uno de los vínculos más profundos entre la geometría diferencial y la topología. A través del estudio de las funciones suaves sobre una variedad, permite extraer información global de naturaleza topológica a partir de datos locales asociados a los puntos críticos y sus índices. Esta correspondencia convierte a la teoría de Morse en una herramienta central para comprender cómo cambia la forma de una variedad cuando se atraviesan niveles críticos de una función.

El presente capítulo aborda la presentación de los conceptos centrales de la teoría, incluyendo las definiciones de función de Morse, índice de un punto crítico y variedades de nivel, así como los resultados que describen la modificación topológica del espacio al pasar por un valor crítico. Esta teoría resulta significativa por la posibilidad que ofrece para traducir problemas diferenciales en información topológica concreta, estableciendo una relación directa con la descomposición celular y la homología de la variedad. El desarrollo de este capítulo se basa principalmente en los resultados presentados por [Mil16] y [Dua05].

5.1. Estudio de variedades usando funciones

Sea M una variedad cerrada (compacta y sin borde ver [doCa87, Seccion 1.2]) de dimensión n y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable no constante en M. Sea

$$a = min\{f(x) \ : x \in M\}, \quad b = max\{f(x) \ : x \in M\}$$

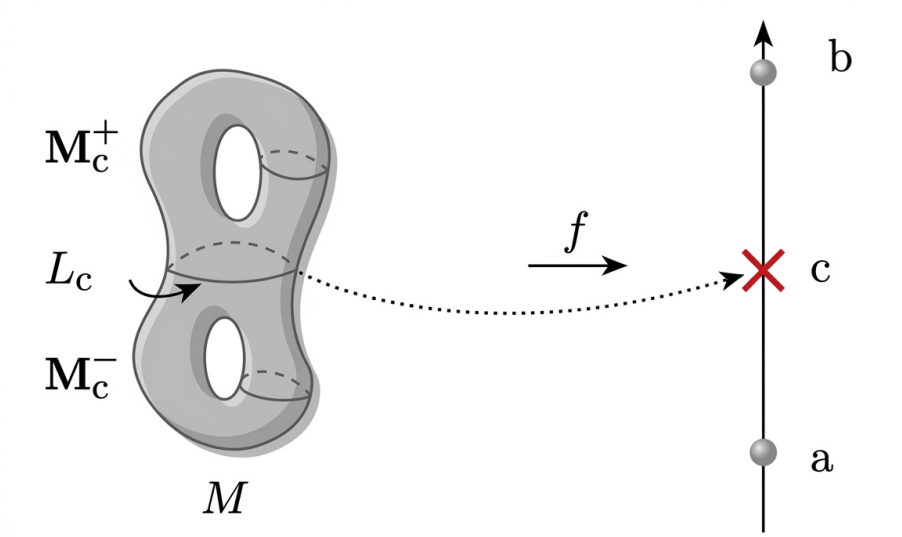
Entonces f es una función sobre $[a, b]$. Intuitivamente f asigna a cada punto $x \in M$ una altura $f(x) \in [a, b]$. Sea $c \in (a, b)$ aquellos puntos en M con la misma altura c (i.e. $L_c := f^{-1}(c) \subset M$) forman una superficie de nivel de f al nivel c. Esto nos proporciona una descomposición de la variedad en dos partes:

$$M = M_c^- \cup M_c^+$$

donde

$$M_c^- = \{x \in M : \ f(x) \leq c\} \, (la \ parte \ de \ abajo \ de \ Ł_c)$$
$$M_c^+ = \{x \in M : \ f(x) \geq c\} \, (la \ parte \ de \ arriba \ de \ Ł_c)$$

y con $Ł_c = M_c^- \cap M_c^+$



En general, dada una sucesión de números reales $a = d_1 < \cdots < d_r = b$, *las* $r-2$ *superficies de nivel* $Ł_{d_i}$, $2 \leq i \leq r-1$, *definen una filtración en* M

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_m = M$$

con $M_i = M_{d_i}^-$.
Nuestro objetivo es entender la construcción geométrica de M *(en vez de las funciones sobre* M*). Naturalmente esperamos encontrar una buena función* f *como también números reales apropiados* $a = d_1 < \cdots < d_r = b$ *tal que:*

(1) Cada M_i *es una variedad diferenciable con borde* $Ł_{d_i}$.

(2) El cambio en la topología entre cada par adjunto $M_k \subset M_{k+1}$ *sea lo más simple posible.*

Si esto se puede hacer, podemos llegar a una imagen global sobre la construcción de M. Entre todas las funciones suaves en M, las funciones Morse son las adecuadas para este propósito.

5.2. Funciones Morse

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $p \in M$. En una carta local $(U, x_1, \ldots, x_n)$ centrada en p la expansión de Taylor de f en una vecindad de p es:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a + \sum_{1=i}^{n} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + Resto$$

En el cual

$$\begin{aligned} a =& f(0) \\ b_i =& \frac{\partial f}{\partial x_i}(0), 1 \leq i \leq n \\ c_{ij} =& \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0), 1 \leq i, j \leq n \end{aligned}$$

Definición 5.1. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con $\dim M = n$. Decimos que $p \in M$ es un *punto crítico si*

$$Df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$$

es la aplicación nula, es decir $Df(p) = 0$. En coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n)$, viene dada por

$$Df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

Esta definición es independiente de la coordenada local escogida al rededor del punto.

Observación 5.1. *Es decir si $p \in M$ es un punto crítico, entonces en el desarrollo de Taylor de f cerca de p tendremos $b_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.*

El conjunto de puntos críticos de f sera denotado por $\mathcal{C}(f)$.

Denotamos la matriz Hessiana de f en el punto p por $H_p(f)$. En coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n)$, está dado por

$$H_p(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix}.$$

Definición 5.2. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, con $\dim M = n$. Decimos que $p \in M$ es un punto critico no degenerado si $H_p(f)$ es invertible. Esta definición es independiente de la coordenada local escogida al rededor del punto.

Ejemplo 5.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen}(x)$. El origen es un punto crítico degenerado y todos los demás son no degenerados.

Ejemplo 5.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2$. Entonces todos los puntos del eje Y son puntos críticos degenerados y forman una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.

Definición 5.3. Una función diferenciable cuyos todos sus puntos críticos son no degenerados se llama *función Morse.*

Ejemplo 5.3. *Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy.$$

El gradiente está dado por

$$\nabla f(x, y) = \big(2x + y,\ x - 2y\big).$$

Luego haciendo $\nabla f = (0, 0)$ obtenemos

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

por tanto

$$(x, y) = (0, 0)$$

es el único punto crítico de f.

El Hessiano de f *en* $p = (0,0)$ *está dado por*

$$H_p(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el punto crítico obtenemos

$$H_p(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El determinante del Hessiano es

$$\det\big(H_p(f)\big) = -5 \neq 0,$$

por lo que el único punto crítico $p = (0,0)$ *es no degenerado. En consecuencia, la función* f *es una función de Morse en* $\mathbb{R}^2$.

Proposición 5.1. *Sea* $f : M \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable con* $\dim M = n$. *Los puntos críticos no degenerados forman un conjunto aislado en el conjunto de los puntos críticos.*

Demostración. Sea q un punto crítico no degenerado de f y sea $(U_q, x_1, \ldots, x_n)$ una carta local en coordenadas alrededor de q

$$\begin{aligned} g : U_q &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto g(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right) \end{aligned}$$

Así, observamos que $g(p) = 0$ si y solamente si, p es un punto crítico de f, en particular $g(q) = 0$. Por otro lado observamos que por la definición de g

$$Dg(q) = H_q(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q)\right) \neq 0$$

Pues q es punto crítico no degenerado, por el Teorema de función Inversa (ver [doCa87, Sección 2]) existe una vecindad $V_q \subset U_q$ tal que $g \mid V_q$ es invertible. Afirmamos que $V_q \cap \mathcal{C}(f) = q$, por construcción sea $x \in V_q \cap \mathcal{C}(f)$ entonces $g(x) = 0 = g(q)$ en V_q, por tanto $x = q$. □

Lema 5.1. *Si M es compacto y f una función Morse, entonces el conjunto de puntos críticos es finito.*

Demostración. El conjunto de puntos críticos $\mathcal{C}(f)$ de f es compacto pues es un cerrado dentro de un compacto, además por la Proposición 5.1 es discreto, por tanto $\mathcal{C}(f)$ es finito. □

Definición 5.4. El *índice* de un punto crítico no degenerado q es el número de autovalores negativos de la matriz Hessiana $H_q(f)$, y lo denotamos por $\text{ind}_f(q)$.

Aparentemente ser una función Morse es una condición débil, sin embargo se puede mostrar que las funciones Morse forman un conjunto denso en el conjunto de funciones diferenciables (ver [Mil16, p. 34]). Por otro lado las funciones Morse tiene un buen comportamiento local como veremos en el siguiente Lema.

Lema 5.2. *[Lemma de Morse] Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función Morse y q un punto critico no degenerado con $\text{ind}_q(f) = \lambda$. Entonces existe una carta coordenada $(U_q, x_1, \ldots, x_n)$ de q tal que:*

$$f \mid U_q = -\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} x_i^2 + f(q)$$

Demostración. Ver [Mil16, p. 6]. □

5.3. Geometría del flujo gradiente

Las primeras informaciones que podemos obtener directamente de la definición de función Morse consiste en:

(1) El conjunto de puntos críticos $\mathcal{C}(f)$ de f.

(2) La función índice $\text{ind} : \mathcal{C}(f) \longrightarrow \mathbb{Z}$

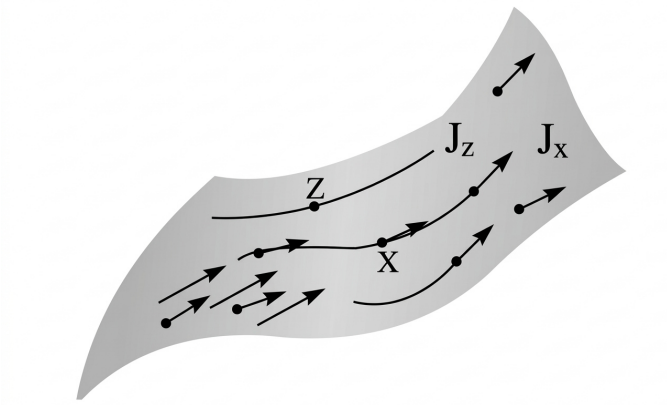
Equipamos a nuestra variedad M con una métrica Riemaniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y definimos el campo gradiente $\nabla f : M \longrightarrow TM$ como $\langle \nabla f(x), v \rangle = Df(x)(v)$ para todo $v \in T_x M$.

Por el teorema de existencia local de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria (ver [HSD12]), el siguiente sistema EDO

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -\nabla f(\varphi(t)) \\ \varphi(0) = x \end{cases}$$

posee solución única, es decir existe una curva integral φ_x asociada al campo de vectores $-\nabla(f)$ a través de cualquier punto $x \in M$. Si M es cerrrada, entonces el dominio de cualquier curva integral es $\mathbb{R}$(ver [HSD12]).

Definición 5.5. Para $x \in M$, llamaremos *linea del flujo gradiente a través de x* a $J_x = \operatorname{Im} \varphi_x \subseteq M$.



Observemos un poco de la geometría de las lineas de flujo en el siguiente lema.

Lema 5.3. *(Geometría de las líneas de flujo) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ funcion Morse con M cerrada, entonces*

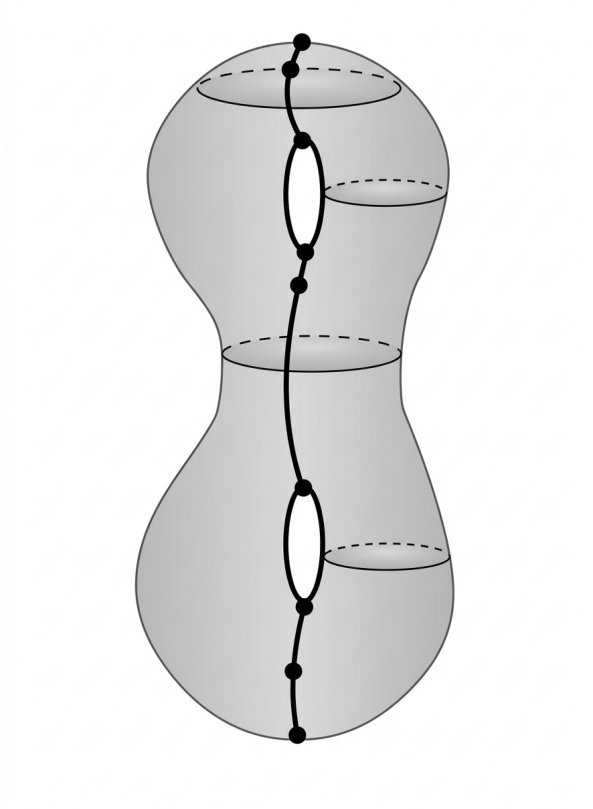
(1) $x \in \mathcal{C}(f) \Leftrightarrow J_x = x$.

(2) Para todo $x, y \in M$ tenemos que o bien $J_x = J_y$ o $J_x \cap J_y = \emptyset$.

(3) Si $x \notin \mathcal{C}(f)$, entonces J_x cruza las superficies de nivel de f perpendicularmente y f es estrictamente decreciente a lo largo de la dirección de J_x.

(4) Si $x \notin \mathcal{C}(f)$, entonces los dos limites $\lim_{t \to \pm\infty} \varphi_x(t)$ existe y pertenece a $\mathcal{C}(f)$.

Demostración. Ver [Dua05, Lema 2.3]. □



Observación 5.2. Cada linea de flujo empieza y termina en un punto crítico.

Ejemplo 5.4. Sea $M = S^2$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. La función $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = z$, es una función Morse con dos puntos críticos, el polo norte y el polo sur, por lo tanto, cada linea de flujo de $-\nabla(f)$ recorre desde el polo norte hacia el polo sur (con una cierta parametrización).

5.4. Variedades estables e inestables

Las líneas de flujo nos definen los siguientes importantes conceptos.

Definición 5.6. Sea M una variedad cerrada, sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función Morse y sea p un punto crítico de f. La *variedad estable de* p es el conjunto de puntos de M cuyas líneas de flujo terminan en p, i.e.

$$S(p) = \left\{ x \in M : \lim_{t \to +\infty} \varphi_x(t) = p \right\}$$

La *variedad inestable de* p es el conjunto de puntos de M cuyas líneas de flujo empiezan en p, i.e.

$$U(p) = \left\{ x \in M : \lim_{t \to -\infty} \varphi_x(t) = p \right\}$$

Observación 5.3. *Tanto $S(p)$ como $U(p)$ son subvariedades inmersas de M*

El siguiente resultado puede ser probado mediante el lema de Morse (ver lema 5.2).

Proposición 5.2. *Sea p un punto crítico de índice λ. Entonces $S(p)$ y $U(p)$ son homeomorfos a $\mathbb{R}^{n-\lambda}, \mathbb{R}^{\lambda}$ respectivamente, y ambas se interceptan transversalmente en p.*

Demostración. Ver [Dua05, Lema 2.4]. □

Se sigue que una función Morse f en M proporciona dos descomposiciones de M en unión disjunta de células.

$$M = \bigcup S(p) = \bigcup U(p) \tag{5.1}$$

Nos referiremos a esto como la descomposición estable *y* descomposición inestable *respectivamente de M asociada a f.*

Observamos que la descomposición inestable asociada a f es la misma que la descomposición estable asociada a $-f$.

Al intersectar estas dos descomposiciones obtenemos una más fina, denominada descomposición de Morse-Smale*:*

$$M = \bigcup F(p_1, p_2), \quad F(p_1, p_2) = U(p_1) \cap S(p_2)$$

$F(p_1, p_2)$ consiste en todas las líneas de flujo que van de p_1 hacia p_2.

Ejemplo 5.5. Consideramos la función Morse del Ejemplo 5.4 en $M = S^2$, la descomposición estable de la variedad tiene dos componentes una copia de $\mathbb{R}^0$ y $\mathbb{R}^2$. La descomposición inestable es similar. La intersección de estas descomposiciones tiene 3 componentes, dos puntos y una copia de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

El comportamiento de las variedades estables e inestables es particularmente bueno si imponemos la condición de que se crucen transversalmente.

Definición 5.7. Una función Morse f en una variedad Riemaniana M se dice *Morse-Smale*, si $U(p_1)$ es transversal a $S(p_2)$, para todo $p_1, p_2 \in \mathcal{C}(f)$.

La condición de transversabilidad nos da que $F(p_1, p_2) = U(p_1) \cap S(p_2)$ *es una variedad y además*

$$\operatorname{codim} U(p_1) \cap S(p_2) = \operatorname{codim} U(p_1) + \operatorname{codim} S(p_2)$$

siempre y cuando $U(p_1) \cap S(p_2) \neq \emptyset$. *Desde que* $F(p_1, p_2) = U(p_1) \cap S(p_2)$ *y* $\dim U(p_i) = \lambda_i$, *tenemos que*

$$n - \dim F(p_1, p_2) = (n - \lambda_1) + \lambda_2$$

y por lo tanto,

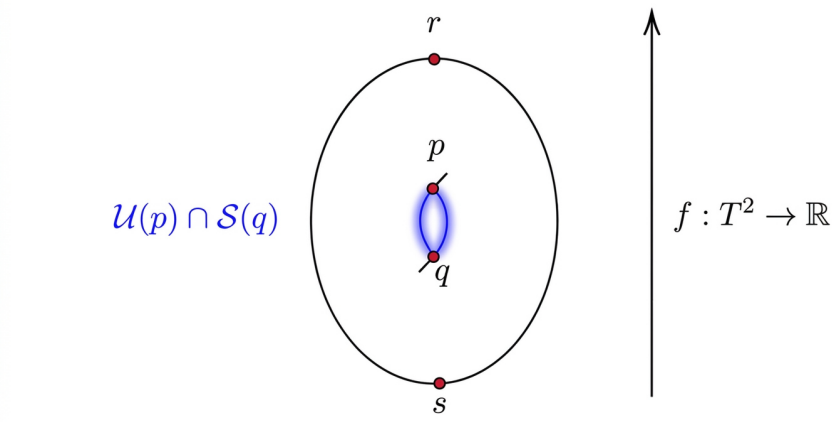
$$\dim F(p_1, p_2) = \lambda_1 - \lambda_2$$

esto nos dice en particular que, si existe una línea de flujo de p_1 *hacia* p_2, *entonces debemos tener que* $\lambda_1 > \lambda_2$.

Ejemplo 5.6. *La función altura sobre el toro definida como*

$$f : \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto z$$

es una función Morse (ver Ejemplo 5.7) pero no es Morse -Smale, pues en los puntos críticos $p = (0, 0, R - r)$ *y* $q = (0, 0, -(R - r))$ *sus variedades estable e inestable* $U(p)$ *y* $S(q)$ *respectivamente ambas son de dimensión* 1 *y se solapan, luego la intersección no puede ser trannsversal.*



Sin embargo, si inclinamos el toro ligeramente y luego tomamos la función altura del embebimiento resultante en $\mathbb{R}^3$, esta se convierte en una función Morse-Smale. Se puede demostrar que esta condicion se cumple de manera genérica, por lo que la propiedad esta garantizada.

Observación 5.4. *La condición de transversalidad es fundamental para asegurar que el espacio de trayectorias esté bien definido. Si consideramos dos puntos críticos p y q con índices $ind(p) = \lambda + 1$ e $ind(q) = \lambda$, la transversalidad garantiza que la intersección $F(p,q) = U(p) \cap S(q)$ sea una subvariedad de dimensión 1. Geométricamente, esto implica que el espacio de puntos cuyas trayectorias unen p con q es una unión de curvas aisladas. Al considerar el cociente $\mathcal{L}(p,q) = F(p,q)/\mathbb{R}$, donde se identifica cada trayectoria bajo la acción de traslación temporal, obtenemos un espacio de dimensión 0. Si la variedad M es compacta y se cumple la condición de Morse-Smale, este cociente resulta ser un conjunto finito de puntos. Este conteo es precisamente lo que permite definir el operador frontera en el complejo de Morse (que veremos mas adelante). Sin transversalidad, la intersección podría ser degenerada (de dimensión mayor a la esperada), lo que resultaría en un espacio que no es un conjunto de puntos aislados y, por tanto, imposibilitaría el conteo finito de trayectorias.*

5.5. Descomposición de tipo CW vía funciones Morse

Recordamos que si f es una función Morse en una variedad M, por (5.1) tenemos una descomposición.

$$M = \bigcup U(p)$$

donde $U(p)$ es homemorfo a $\mathbb{R}^{\lambda_p}$, siendo λ_p el indice de p, el teorema principal de la teoría de Morse nos brinda información sobre como estas componentes se pegan entre si.

Teorema 5.1. *Sea M una variedad cerrada y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Entonces, M es del mismo tipo de homotopía que un complejo CW, en el que se asigna una célula de dimensión λ por cada punto crítico de índice λ.*

Para ser más preciso este Teorema nos dice que M es homotópicamente equivalente a un espacio topológico de la forma:

$$X = \left(\left(D^{\lambda_1} \cup_{f_1} D^{\lambda_2}\right) \cup_{f_2} D^{\lambda_3}\right) \cup \ldots \cup_{f_{r-1}} D^{\lambda_r}$$

donde $0 = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_r = m$ *son los índices de los puntos críticos de* f *y* $f_1, f_2, \ldots f_{r-1}$ *mapeos de adjunción. Para simplificar la notación obviaremos el paréntesis y simplemente escribiremos:*

$$X = D^{\lambda_1} \cup_{f_1} D^{\lambda_2} \cup_{f_2} D^{\lambda_3} \cup \ldots \cup_{f_{r-1}} D^{\lambda_r}.$$

Para la prueba ver [NunezA, Thm 2.11], veamos algunos ejemplos

Ejemplo 5.7. Sea $M = \mathbb{T}^2$ el toro de dimension 2, y dada

$$\begin{array}{rcl} f : M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = z \end{array}$$

la cual es conocida como *función altura*, veamos que es una función Morse. En efecto: Primero encontraremos los puntos críticos de f, es decir $p \in M$ tales que $Df(p) \equiv 0$. Desde que

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & \varphi(u, v) = ((R + r)\operatorname{sen} v; r \operatorname{sen} u; (R + r\cos u)\cos v) \end{array}$$

es una parametrización del toro M (es la inversa de una carta local), luego $Df(p)$ expresada en coordenadas locales será de la forma:

$$D\left(f \circ \varphi\right)(u, v) = (-r\operatorname{sen}(u)\cos(v), -(R + r\cos(u))\operatorname{sen}(v))$$

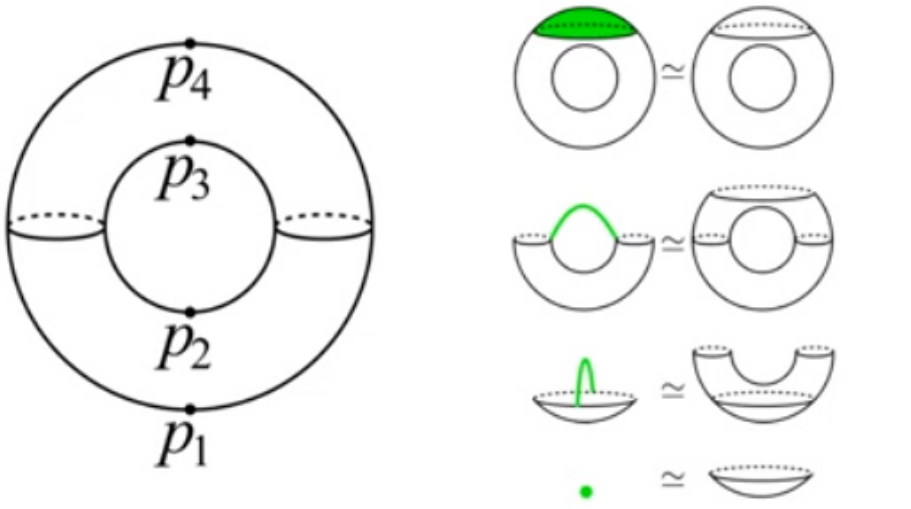
Entonces los puntos críticos se corresponden con aquellos $\varphi(u, v)$ tales que $D\left(f \circ \varphi\right)(u, v) = 0$, es decir aquellos que satisfacen $r\operatorname{sen}(u)\cos(v) = 0$ y $(R + r\cos(u))\sin(v)) = 0$, resolviendo ambas ecuaciones, obtenemos $(u, v) = \{(0, 0); (\pi, 0); (\pi, \pi); (0, \pi)\}$, así podemos construir el siguiente cuadro:

(u, v)	$(0, 0)$	$(\pi, 0)$	(π, π)	$(0, \pi)$
$\varphi(u, v)$	$(0, 0, R + r) = P_4$	$(0, 0, R - r) = P_3$	$(0, 0, -(R - r)) = P_2$	$(0, 0, -(R + r) = P_1$
Matriz hessiana	$\begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -R - r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -R + r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & R - r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & R + r \end{bmatrix}$
Índice	2	1	1	0

Observando el cuadro, vemos que todos los puntos críticos son no degenerados, pues su matriz Hessiana es invertible para todo punto, entonces f es una función Morse. Desde que M es compacta y f es función Morse, podemos aplicar el Teorema 5.1, entonces el CW-complejo

$$X = D^0 \cup D^1 \cup D^1 \cup D^2$$

es homotópicamente equivalente a M.



6 Homología vía Teoría de Morse

En este capítulo se estudia la relación entre la teoría de Morse y los invariantes homológicos de una variedad diferenciable. Aunque la teoría completa permite construir la llamada homología de Morse a partir de las líneas de flujo del gradiente, aquí nos centraremos en un aspecto más elemental pero igualmente significativo: las desigualdades de Morse, que vinculan el número de puntos críticos de una función Morse con los números de Betti de la variedad.

Este enfoque muestra cómo las propiedades diferenciales de una función suave reflejan información topológica global. En particular, los puntos críticos no degenerados, clasificados según su índice, determinan una descomposición celular del espacio, lo que permite expresar sus grupos de homología en términos puramente analíticos.

A través del polinomio de Morse y del polinomio de Poincaré se obtiene una comparación cuantitativa entre la estructura crítica de la función y los invariantes topológicos del espacio. En el caso especial de las funciones Morse perfectas, ambos polinomios coinciden, lo que implica que el número de puntos críticos de cada índice coincide exactamente con el número de Betti correspondiente.

Como aplicación final, se examina el caso del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$, donde una función Morse adecuada permite recuperar de manera elegante sus números de Betti clásicos, ilustrando el poder y la simplicidad geométrica de la teoría. El desarrollo de este capítulo se basa principalmente en los resultados presentados por [Mil16], [Hen85] y [Dua05].

6.1. Desigualdades de Morse

Definición 6.1. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función Morse definida en una variedad cerrada M, y sea m_i el número de puntos críticos de índice i. Entonces definimos el *polinomio de Morse* como:

$$\boxed{\mathcal{M}_M(t) = \sum_{i=0}^{n} m_i t^i}$$

Ejemplo 6.1. En el Ejemplo 5.7 tenemos que $\mathcal{M}_{\mathbb{T}^2}(t) = 1 + 2t + t^2$

Observación 6.1 (Complejo de Morse)**.** *Dada una función de Morse-Smale $f : M \to \mathbb{R}$ sobre una variedad cerrada M, se asocia un complejo de cadenas $(C_*(f), \partial_*)$ llamado* **complejo de Morse***, donde:*

- *El espacio de cadenas en grado i se define por:*

$$C_i(f) = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_2}\{p \in \mathcal{C}(f) \mid \operatorname{ind}(p) = i\},$$

  es un $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial con $\dim C_i(f) = m_i$.

- *El diferencial $\partial_i : C_i(f) \to C_{i-1}(f)$ está definido como*

$$\partial_i(p) = \sum_{q \in C_{i-1}(f)} n(p,q)q$$

  donde $n(p,q)$ es el numero de lineas de flujo del gradiente negativo (modulo 2) que conectan el punto p con el punto q. La suma se extiende sobre todos los puntos críticos que tienen exactamente un indice menos que p. Por otro lado satisface $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$.

- *La homología de este complejo coincido con la homologia singular con ceoficientes en $\mathbb{Z}_2$. (ver [Ban93, Thm 1])*

$$H_i(C_*(f), \partial_*) \cong H_i(M; \mathbb{Z}_2)$$

Denotaremos por $b_i := \beta_i(M, \mathbb{Z}_2) = \dim H_i(M; \mathbb{Z}_2)$, en consecuencia

$$b_i = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_i(C_*(f), \partial_*).$$

Con esta notación el polinomio de Poincaré de M considerando estos b_i se escribirá como

$$\boxed{P_M(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i}$$

El siguiente teorema nos dará una relación entre $\mathcal{M}_M(t)$ y $P_M(t)$.

Teorema 6.1. *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función Morse definida en una variedad cerrada M. Entonces*

$$\mathcal{M}_M(t) - P_M(t) = (1+t)R_M(t) \tag{6.1}$$

para algún polinomio $R_M(t)$ tal que $R_M(t) \geq 0$ (todos sus coeficientes son positivos).

Demostración. Escogemos una métrica Riemaniana tal que f sea de tipo Morse-Smale, así podremos definir el complejo de Morse (ver [Hen85, Thm 2.20]). Recordando que para cada i,

$$\dim C_i(f) = m_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Sea

$$q_i := \dim(\operatorname{Im} \partial_i), \quad 0 \leq i \leq n$$

con la convención $q_0 = 0$. Por teorema de la dimensión, denotando $z_i = \dim \ker \partial_i$:

$$m_i = \dim C_i(f) = \dim \ker \partial_i + \dim \operatorname{Im} \partial_i = z_i + q_i. \tag{6.2}$$

Por otro lado desde que $b_i = \dim H_i(C_*(f), \partial_*)$ y por definición de homologia $H_i(C_*(f), \partial_*) = \ker \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}$, entonces

$$b_i = \dim \ker \partial_i - \dim \operatorname{Im} \partial_{i+1} = z_i - q_{i+1}. \tag{6.3}$$

De (6.3) y (6.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_M(t) - P_M(t) &= \sum_{i=0}^{n} (m_i - b_i)t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (q_i + q_{i+1})t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (m_i - z_i + m_{i+1} - z_{i+1})t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (m_i - z_i)t^i + \sum_{i=0}^{n-1} (m_{i+1} - z_{i+1})t^i \\
&= t\sum_{i=1}^{n} (m_i - z_i)t^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} (m_i - z_i)t^{i-1}, \quad \text{(desde que } m_0 = z_0\text{)} \\
&= (t+1)\sum_{i=1}^{n} (m_i - z_i)t^{i-1}
\end{aligned}$$

Así haciendo $R_M(t) = \sum_{i=0}^{n-1}(m_{i+1} - z_{i+1})t^i$, y denotando $r_{i+1} := m_{i+1} - z_{i+1}$ notamos que $r_{i+1} = m_{i+1} - z_{i+1} \geq 0$ pues z_{i+1} es la dimensión de un subespacio de $C_{i+1}(f)$.

□

Observación 6.2. La ecuación (6.1) nos dice que los $m_i's$ definidos en (6.1) son una cota para los números de Betti $b_i's$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} m_0 &= b_0 + r_1 \\ m_1 &= b_1 + r_1 + r_2 \\ &\vdots \\ m_{n-1} &= b_{n-1} + r_{n-1} + r_n \\ m_n &= b_n + r_n \end{aligned}$$

Recordando que $r_i \geq 0$, entonces $m_i \geq b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Así, podemos escribir $\mathcal{M}_M(t) \geq P_M(t)$.

Proposición 6.1 (Principio Lacunar de Morse)**.** *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función Morse definida en una variedad cerrada tal que todos los puntos críticos tienen índice par, entonces $\mathcal{M}_M(t) = P_M(t)$.*

Demostración. Vamos a ver en la ecuación (6.1) que $R_M(t) \equiv 0$.

- Si i es un índice impar, entonces por hipótesis $m_i = 0$, luego por la observación 6.2 $m_i = b_i + r_i + r_{i+1} = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$, entonces $r_i = 0$.

- Si i es un índice par, entonces $m_i = 0$ o $m_i \neq 0$. Si $m_i = 0$, entonces por el mismo razonamiento anterior tenemos que $r_i = 0$. Si $m_i \neq 0$, entonces $m_i = b_i + r_i + r_{i+1} \neq 0$, luego, $r_i > 0$ o $b_i > 0$ o $r_{i+1} > 0$. Si $r_i > 0$, entonces $m_{i-1} = b_{i-1} + r_{i-1} + r_i > 0$, pero por hipótesis $m_{i-1} = 0$ pues $i-1$ es impar desde que i es par, por lo tanto $r_i = 0$ lo cual es una contradicción.

- Si $i = 0$, entonces $m_0 = b_0 + r_1$, luego si $m_0 = 0$ tenemos que $r_1 = 0$, ahora si $m_0 \neq 0$, entonces si $r_1 > 0$, por el mismo razonamiento anterior implicaría que $m_1 \neq 0$ lo cual, contradice la hipótesis, por lo tanto, en ambos casos $r_1 = 0$.

- Si $i = n$. Supongamos que n es impar, entonces $m_n = b_n + r_n = 0$, luego $r_n = 0$. Si n es par, entonces tenemos si $m_n = b_n + r_n > 0$, supongamos que $r_n > 0$,

entonces $m_{n-1} = b_{n-1} + r_{n-1} + r_n > 0$, lo cual es una contradicción pues $n-1$ es impar, por tanto $r_n = 0$.

Entonces $R_M(t) \equiv 0$, asi $\mathcal{M}_M(t) = P_M(t)$.

Definición 6.2. Una *función Morse perfecta* $f : M \to \mathbb{R}$ es una función Morse tal que $\mathcal{M}_M(t) = P_M(t)$.

Como aplicación final presentamos el caso del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$, que constituye un ejemplo clásico y especialmente ilustrativo dentro de la teoría de Morse, así obtendremos información topológica (sus números de Betti) usando todas las herramientas desarrolladas hasta ahora.

Ejemplo 6.2. *Los números de Betti del espacio complejo proyectivo* $\mathbb{C}P^n$ *son de la forma*

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & \text{para } i = 0, 2, 4, \ldots, 2n. \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases} \tag{6.4}$$

Consideramos la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}P^n &\to \mathbb{R} \\ [z_0 : \cdots : z_n] &\mapsto \frac{|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + \cdots + n|z_n|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots |z_n|^2} \end{aligned}$$

y las cartas locales (U_k, ϕ_k) *con* $k = 0, \ldots, n$ *de* $\mathbb{C}P^n$ *donde* $U_k = \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid z_k \neq 0\}$ *y*

$$\begin{aligned} \phi_k : U_k &\to \mathbb{C}^n \\ [z_0 : \cdots : z_n] &\mapsto \left(\frac{z_0}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k} \right), \end{aligned}$$

cuya inversa sera la parametrización ϕ_k^{-1} *y esta dada por*

$$\begin{aligned} \phi_k^{-1} : \mathbb{C}^n &\to U_k \\ (w_1, \ldots, w_n) &\mapsto [w_1 : \cdots : w_k : 1 : w_{k+1} : \ldots w_n] \end{aligned}$$

Luego $f \circ \phi_k^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ *esta definida como*

$$f \circ \phi_k^{-1}(w_1, \ldots, w_n) = \frac{k + \sum_{l \neq k} l|w_l|^2}{1 + \sum_{l \neq k} |w_l|^2}$$

como es un función compleja la podemos escribir de la siguiente manera

$$f \circ \phi_k^{-1}(w_1, \ldots, w_n) = \frac{k + \sum_{l \neq k} l w_l \overline{w_l}}{1 + \sum_{l \neq k} w_l \overline{w_l}}$$

Desde que $f \circ \phi_k^{-1}$ *es una función real para obtener los puntos críticos basta analizar*

$$\frac{\partial (f \circ \phi_k^{-1})}{\partial w_j} = 0, \qquad \text{para todo } j \neq k$$

Haciendo las cálculos tendremos

$$\frac{\partial (f \circ \phi_k^{-1})}{\partial w_j} = \frac{\overline{w_j}}{(1 + \sum_{l \neq k} w_l \overline{w_l})^2} \left[(j-k) + \sum_{l \neq k} (j-l)|w_l|^2 \right] = 0 \tag{6.5}$$

Resolviendo obtenemos que $w_j = 0$ *para todo* $j \neq k$*, entonces los puntos críticos son exactamente*

$$p_0 = [1 : 0 : \cdots : 0], p_1 = [0 : 1 : \cdots : 0], \ldots, p_n = [0 : 0 : \ldots, 1]$$

Todos estos son no degenerados (es decir f *es Morse) con sus respectivos indices* $\text{ind}(p_i) = 2i$ *(ver [Mil16, p. 27]) , luego tendremos por el Teorema 5.1 que* $\mathbb{C}P^n$ *es homotópicamente equivalente al CW-complejo dado por*

$$D^0 \cup D^2 \cup \cdots \cup D^{2n}$$

y por la Proposición 6.1 la función f *resulta ser Morse perfecta, es decir*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}P^n}(t) = P_{\mathbb{C}P^n}(t).$$

pero en este caso

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}P^n}(t) = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n}$$

Desde que $\mathbb{C}P^n$ *no posee torsión (ver [Hat02]), entonces por la observación 4.4* $b_{2i} = \beta_{2i} = 1$ *y* $b_i = \beta_i = 0$ *en otro caso.*

□

Bibliografía

[DC16] M. P. do Carmo. (2016). Geometría Diferencial de Curvas y Superficies (Traducción revisada). Sociedad Matemática Mexicana, México D.F.

[Ban93] A. Banyaga y D. Hurtubise. (1993). The Morse-Bott inequalities via dynamical systems. Ergodic Theory and Dynamical Systems, vol. 13, nº 3, pp. 435-446.

[Lim60] E. L. Lima. (1999). Introdução à Topologia Diferencial (Número 60). Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Río de Janeiro.

[Dua05] J. Duan. (2005). An Introduction to Morse Theory. University of Illinois at Chicago. Lecture notes.

[EV82] H. Esnault y E. Viehweg. (1982). Lectures on Vanishing Theorems. Birkhäuser, Basel.

[Hat02] A. Hatcher. (2002). Algebraic Topology. Cambridge University Press.

[HSD12] M. W. Hirsch, S. Smale, y R. L. Devaney. (2012). Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos (3rd ed.). Academic Press, San Diego.

[Hen85] G. Henniart. (1985). Les inégalités de Morse (d'après E. Witten). Astérisque, no. 121-122, 43–61. Séminaire Bourbaki, Vol. 1983/84. MR768953 (86f:58027).

[ElonH] E. L. Lima. (2012). Homologia Básica (2ª edición). Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro.

[ElonV] E. L. Lima. (1999). Variedades Diferenciáveis (2ª edición). Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro.

[Lim99a] S. Lim. (1999). Topología Diferencial. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima. Notas de clase.

[NunezA] A. J. Núñez Sullca. (2017). Decomposição Celular de Variedades Grassmannianas via Teoria de Morse (Dissertação de Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

[Mil16] J. Milnor. (2016). Morse Theory. Princeton University Press, Princeton. Annals of Mathematics Studies, Vol. 51.

[Min04] J. M. Mingo. (2004). Topología Algebraica. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima. Apuntes de curso.

[BT95] R. Bott y L. W. Tu. (1995). Differential Forms in Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 82.

[Min04b] E. G. Minian. (2004). Notas de Topología Algebraica. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF). Curso dictado en Elena II, Vaquerías.

[Lee11] J. M. Lee. (2011). Introduction to Topological Manifolds (2nd ed.). Springer.

[doCa87] M. P. do Carmo. (1987). Variedades Diferenciáveis (2ª edição). Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro.