Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Físicas
Escuela Profesional de Física

Cosmología cíclica en Universo anisotrópico

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

AUTOR

Paulo César CHURATA HUAMANÍ

ASESOR

Dr. Teófilo VARGAS AUCCALLA

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Churata, J. (2025). *Cosmología cíclica en Universo anisotrópico*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Paulo César Churata Huamani
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	70309537
URL de ORCID	-
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Teófilo Vargas Auccalla
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06532544
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9833-3887
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Fulgencio Villegas Silva
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	9202973
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	José Domingo Arbañil Vela
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41345341
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Carlos Javier Solano Salinas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445870

Datos de investigación	
Línea de investigación	B.13.0.4 Cosmología y Gravitación
Grupo de investigación	GRUPO DE FÍSICA TEÓRICA - GFT
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación y Posgrado. Programa de Promoción de Tesis de Pregrado. B19131234-PTPGRADO.
Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos Pabellón: Facultad de Ciencias Físicas Oficina: Grupo de Física Teórica #222 País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Calle: Av. Carlos Germán Amezaga #375 Latitud: -12.058333° Longitud: -77.083333°
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2019-2022
URL de disciplinas OCDE	Física de partículas, Campos de la Física http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.03 Física nuclear http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.04 Física atómica, molecular y química http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.01

UNMSM
Firmado digitalmente por JIMENEZ TINTAYA Cesar Omar FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 05.07.2023 08:41:28 -05:00

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN FÍSICA

Siendo las 18:30 horas del martes 27 de junio del 2023, en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias Físicas (Auditorio 109), bajo la Presidencia del Dr. Fulgencio Villegas Silva (Presidente), Dr. José Domingo Arbañil Vela (Miembro Titular), el Dr. Teófilo Vargas Auccalla (Asesor) y el Dr. Carlos Javier Solano Salinas (Miembro Suplente), se dio inicio a la Sesión Pública de Sustentación de Tesis para la Licenciatura en Física, mediante la Modalidad M1, del Bachiller:

PAULO CÉSAR CHURATA HUAMANÍ

Dando lectura al Resumen del Expediente, el Presidente del Jurado, invitó al Bachiller Paulo César Churata Huamaní a realizar una exposición de Tesis titulada: "Cosmología cíclica en Universo anisotrópico"

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente, invitó al Bachiller y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado, el Dr. Fulgencio Villegas Silva invitó al candidato y al público a pasar a la Sala de Sesión, para dar lectura al Acta de sustentación, en cuyo contenido se ha registrado la nota obtenida por el bachiller, la misma que ha sido de:

Con Honores (MENCIÓN) ..... 18 (NÚMERO) ..... Dieciocho (LETRAS)

Finalmente, el Presidente del Jurado, propone al consejo de la Facultad que se le declare Licenciado en Física al Bachiller Paulo César Churata Huamaní. Siendo las..... Horas, se levanta la Sesión.

Ciudad Universitaria, 27 de junio del 2023

Dr. Fulgencio Villegas Silva
PRESIDENTE

Dr. José Domingo Arbañil Vela
MIEMBRO

Dr. Teófilo Vargas Auccalla
ASESOR

Dr. Carlos Javier Solano Salinas
SUPLENTE

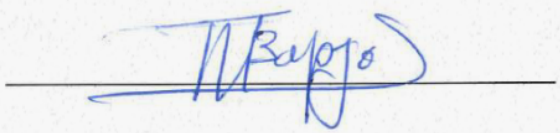
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Teófilo Vargas Auccalla en mi condición de asesor acreditado con el ACUERDO DE COMITÉ DE GESTIÓN N°064-EPF-FCF-19 de la tesis de investigación cuyo título es "Cosmología cíclica en universo anisotrópico" presentado por el bachiller Churata Huamaní Paulo César para optar el título de Licenciado en Física, CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el 13% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Lima, 5 de julio de 2025

Firma del Asesor 

Nombres y Apellidos del asesor: Teófilo Vargas Auccalla

DNI: 06532544

Lo que nos hace grandes es el hecho
de poder ver lo
pequeños que somos.

- Marti Montferrer

Índice general

Índice general ii

Resumen v

Agradecimientos 1

Introducción 3

Objetivos 6

1. Teoría de la relatividad general 7
- 1.1. Gravedad newtoniana . . . 7
- 1.2. Principios de la relatividad general . . . 8
- 1.3. Tensor métrico . . . 8
- 1.4. Símbolo de Christoffel . . . 9
- 1.5. Curvatura y geometría del espacio-tiempo . . . 10
  - 1.5.1. Tensor de Riemann . . . 10
  - 1.5.2. Tensor de Ricci . . . 10
  - 1.5.3. Escalar de Ricci . . . 10
- 1.6. La ecuación de campo de Einstein . . . 11
  - 1.6.1. Tensor energía - momento . . . 12

2. Cosmología 13
- 2.1. Modelo cosmológico estándar clásico . . . 13
  - 2.1.1. El principio cosmológico . . . 13
  - 2.1.2. La expansión del Universo . . . 14
  - 2.1.3. Coordenadas comóviles . . . 16
  - 2.1.4. Factor de escala . . . 16
- 2.2. Ecuaciones que describen a nuestro Universo . . . 18
  - 2.2.1. La métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) . . . 18
  - 2.2.2. Los símbolos de Christoffel . . . 19
  - 2.2.3. El tensor de curvatura de Riemann . . . 19
  - 2.2.4. El tensor de Ricci . . . 20
  - 2.2.5. El escalar de Ricci . . . 20
  - 2.2.6. El tensor de Einstein . . . 20
  - 2.2.7. Tensor energía-momento para la métrica de Friedmann . . . 20
  - 2.2.8. Ecuaciones de campo de Einstein para la métrica FLRW . . . 21

2.2.9. La ecuación del fluído cosmológico . . . 22
2.3. Componentes del fluído cosmológico . . . 23
2.3.1. Materia . . . 23
2.3.2. Radiación . . . 24
2.3.3. Constante cosmológica . . . 25

3. Inflación cósmica **27**
3.1. Los problemas de la teoría del Big Bang clásico . . . 27
3.1.1. El problema de la planitud del Universo . . . 27
3.1.2. El problema del horizonte . . . 28
3.2. El inflatón . . . 29
3.2.1. Ecuación de movimiento del inflatón . . . 29
3.2.2. Tensor energía-momento del inflatón . . . 31
3.2.3. Ecuaciones de Friedmann en presencia del campo escalar . . . 32
3.2.4. Inflación slow-roll . . . 33
3.2.5. Campo escalar masivo . . . 34
3.2.6. Número de e-folds . . . 34

4. Universo anisotrópico **36**
4.1. Modelo cosmológico de Bianchi tipo I . . . 36
4.1.1. Los símbolos de Christoffel . . . 37
4.1.2. El tensor de curvatura de Riemann . . . 37
4.1.3. El tensor de Ricci . . . 38
4.1.4. El escalar de Ricci . . . 38
4.1.5. El tensor de Einstein . . . 38
4.1.6. Tensor energía-momento para la métrica de Bianchi I . . . 39
4.1.7. Ecuaciones de campo de Einstein para Bianchi I . . . 39
4.1.8. Anisotropía . . . 39
4.2. Ecuaciones dinámicas para el modelo cosmológico de Bianchi I . . . 41
4.2.1. La ecuación de aceleración . . . 41
4.2.2. Ecuación de densidad . . . 42
4.3. Ecuaciones de Bianchi I en presencia de campo escalar . . . 43
4.3.1. Ecuación de movimiento del campo escalar . . . 43
4.3.2. Tensor de energía-momento . . . 45
4.3.3. Ecuaciones de Bianchi I . . . 46

5. Big Bounce en presencia de un campo escalar **48**
5.1. Etapas del Big Bounce . . . 48
5.1.1. Implementación del Bounce . . . 48
5.2. Simulación numérica del Bounce . . . 49
5.2.1. Condiciones iniciales . . . 49
5.3. Periodo cinético . . . 50
5.4. Periodo previo al Bounce . . . 51
5.5. Periodo inflacionario . . . 52
5.5.1. Inicio del periodo inflacionario . . . 53
5.5.2. Fin del periodo inflacionario . . . 54

6. Big Bounce en Universo anisotrópico **57**
6.1. Ecuaciones que describen la dinámica en Bianchi I 57
6.2. Validación del modelo 58
6.2.1. Condiciones iniciales 58
6.3. Simulación numérica y comparación con el modelo de Friedmann 60
6.3.1. Periodo inflacionario 60
6.3.2. Número de e-folds 61
6.3.3. Anisotropía 63
6.4. Inflación en universo anisotrópico 64
6.4.1. Condiciones iniciales 65
6.5. Periodo cinético 65
6.6. Periodo previo al Bounce 67
6.7. Periodo inflacionario 67
6.7.1. Inicio del periodo inflacionario 69
6.7.2. Fin del periodo inflacionario 71

7. Cosmología cíclica anisotrópica **75**
7.1. Etapas del Universo cíclico 75
7.2. Potencial tipo Higgs 77
7.2.1. Análisis del rebote y retorno del Universo 77
7.2.2. Simulación numérica 78
7.2.3. Condiciones iniciales 78
7.2.4. Evolución temporal de los factores de escala 80
7.3. Constante cosmológica negativa 88
7.3.1. Simulación numérica 89
7.3.2. Condiciones iniciales en la métrica de Friedmann 89
7.3.3. Evolución del factor de escala para la métrica de Friedmann . . . 90
7.3.4. Condiciones iniciales en la métrica de Bianchi 91
7.3.5. Evolución temporal de los factores de escala 92

8. Histéresis cosmológica **94**
8.1. Histéresis cosmológica en Universo con potencial Higgs 97
8.2. Histéresis cosmológica en Universo con constante cosmológica negativa . 98

Conclusiones **100**

Bibliografía **101**

Resumen

En la presente tesis se ha estudiado la evolución de un Universo anistrópico con Big Bounce y periodo inflacionario mediante la implementación de un campo escalar llamado inflatón con un potencial de tipo cuadrático. Además, se extendió hacia el estudio de un Universo cíclico anisotrópico mediante la implementación del potencial de Higgs y de la constante cosmológica negativa, finalmente se hizo un estudio de la histéresis cosmológica.

Palabras clave: INFLACIÓN, CAMPO ESCALAR, BIG BOUNCE, UNIVERSOS CÍCLICOS.

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a las personas más importantes que tengo en mi vida, mis padres. A mi madre, Anita, que siempre ha estado conmigo aconsejándome sobre la vida y preocupándose siempre por mí, por formarme en valores y principios, por ser estricta conmigo cuando era necesario. A mi papá, Florentino, quien siempre me ha estado apoyando y aconsejándome en cada paso que daba, por motivarme a estudiar y aprender sobre el mundo, de hecho, gracias a uno de los libros que me compraste cuando era pequeño fue donde por primera vez leí acerca del Universo y fue ahí donde todo empezó, porque aquella vez fue donde me pregunte acerca del Universo, ¿por qué existía y que hubo antes?, años después esas preguntas sin respuesta me condujeron hasta la Física. No tengo aun la respuesta a aquella pregunta, pero me motiva intentar entender y tratar de encontrar una respuesta a esa interrogante durante mi efímera existencia.
Gracias también a todas aquellas mascotas que pasaron por mi vida y la hicieron más alegre, porque en aquellas noches en las cuales miraba el cielo pensando sobre el Universo, ustedes me hacían compañía.
Gracias a todas aquellas personas que pude conocer cuando ingrese a San Marcos en la facultad de Física, a los nuevos amigos que hice y con los cuales pasábamos las tardes debatiendo sobre Física o filosofando sobre la vida, por aquellos días en los que nos juntábamos a estudiar para los exámenes o las exposiciones, porque entre todos nos motivábamos a continuar estudiando y no permitíamos que algunas malas notas nos desalienten, en especial a Melvin, Brayan, Melquicedec, Joel, Rossel, Deyvi y Emanuel, hemos compartido tantas experiencias y momentos amenos, se que son grandes profesionales.
Agradecer al grupo de Física teórica GFT y a sus integrantes, porque con sus charlas en la facultad, alimentaron más mi curiosidad y ganas de entender el Universo a través de la Física, porque ustedes y su pasión por la Física hicieron que aquello que yo antes veía complicado, empezase a ser divertido de aprender, en especial a Saneli Carbajal que desde aquella charla que dio en la presentación del GFT motivo más mi pasión por la Física, por las clases de relatividad general que impartiste a los nuevos miembros del GFT y también las de cosmología, y como no, aquellas crisis existenciales que nos generabas cuando empezábamos a hablar de filosofía. También mi especial agradecimiento a mi asesor y profesor Teófilo Vargas, quien incluso antes de enseñarme algún curso de la carrera, motivo mi pasión por la Física a través de los viernes astrónomicos, aquellas charlas sobre astronomía, astrofísica y cosmología que realmente eran y son geniales, por sus clases didácticas e interesantes sobre relatividad especial y general, aprendí mucho a través de sus enseñanzas, también muchas gracias por los consejos que usted me ha dado, tener una perspectiva de las cosas diferente a la mía y una visión más general de las cosas me ha sido muy útil, gracias por esforzarse en ser un gran profesor e inculcar el amor por la ciencia a sus alumnos, la labor que usted realiza en la facultad es invaluable.

De la misma manera agradecer a todos los profesores que me enseñaron durante mi etapa universitario, gracias al profesor Fulgencio Villegas por transmitir su pasión por la Física a través de sus clases, gracias al profesor Renato Tovar por ser tan didáctico y exigente en sus clases. Y por último, agradecer a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por darme la oportunidad de estar en sus aulas, conocer nuevas personas de las cuales he aprendido mucho, por ser tan exigente con los alumnos con el fin de lograr excelentes profesionales, pasar por tus aulas hicieron de mí una persona diferente, gracias a cada uno de los trabajadores de la Universidad que permiten su funcionamiento, se que usaré el conocimiento adquirido durante todos estos años para contribuir de manera positiva al país, porque a pesar de los problemas que pueda tener, es nuestro deber buscar soluciones y poder juntos construir un mejor país con igualdad de oportunidades para todos sus habitantes.

Introducción

Desde los inicios de la humanidad, hemos tenido un gran anhelo de poder entender nuestra propia naturaleza, ¿de donde venimos?, ¿por qué existimos?, ¿cual es el origen del Universo?, ¿de donde viene todo lo que nos rodea?. Nos encontramos presentes en un planeta que es muy hostil para la vida, aprendimos a sobrevivir y a entender a la naturaleza, creamos mitos acerca de la creación del Universo asociándolo a deidades, todas las culturas alrededor del mundo tuvieron un mito diferente para tratar de explicar el origen del Universo, hoy en día seguimos aún buscando respuestas a aquella pregunta [1]. A lo largo de los años hemos ido descubriendo y entendiendo las leyes que gobiernan el Universo gracias al avance de la Ciencia, esto nos ha permitido poder desarrollar la tecnología y transformar el mundo en un lugar totalmente diferente a como lo fue para nuestros antepasados. Hoy seguimos buscando respuestas a aquella pregunta inicial acerca del Universo a través de la cosmología.

La cosmología es una rama de la física que se encarga de estudiar la evolución del Universo, la cosmología se sustenta sobre la teoría general de la relatividad de Albert Einstein, que es una teoría totalmente revolucionaria sobre la gravedad la cual fue publicada en 1915 [2]. La teoría de Einstein cambio totalmente la idea que se tenía acerca de la gravedad newtoniana, dejando de lado el concepto de fuerza y proponiendo que la gravedad es un fenómeno totalmente geométrico que se produce debido a la interacción de la materia o energía con el espacio-tiempo. Según Einstein, la gravedad es un fenómeno que se produce por la deformación del espacio-tiempo debido a la masa o energía contenida en el. Posterior a la publicación de su teoría de la gravedad, el mismo Einstein utilizo sus ecuaciones para estudiar al universo mismo y dio así inicio a la cosmología moderna. Los avances teóricos y observacionales de la cosmología moderna [3] ha permitido tener una mejor comprensión acerca del Universo.

Un evento importante para la Cosmología fue el descubrimiento de la expansión del Universo, las observaciones mostraron que en el Universo todas las galaxias se alejan entre si debido a la expansión del propio espacio [4], la expansión del Universo fue fundamental para la comprensión del origen de nuestro Universo puesto que, si hoy en día el Universo se encuentra en expansión, si retrocedemos en el tiempo la distancia entre galaxias debió ser menor a la que vemos actualmente y hace miles de millones de años, la materia y energía del Universo debió estar contenida en un punto infinitesimal del espacio. Esta teoría es llamada teoria del Big Bang y ha sido validada por diferentes observaciones experimentales tales como la radiación de fondo de microondas [5], la abundancia de elementos ligeros como el hidrógeno y helio, la formación de elementos de núcleos atómicos a partir de nucleones preexistentes, llamado también como nucleosíntesis y también la formación de estructuras a gran escala.

Pero, existen algunos problemas que la teoría del Big Bang no responde, tales como la

planitud del Universo o la alta homogeneidad que presenta. Todo esto ha motivado a buscar alternativas a esta teoría convencional del Big Bang, como la teoría de la inflación cósmica [6], la cual plantea la existencia de un fluído de naturaleza desconocida en el Universo primigenio que habría producido un periodo de expansión acelerada del Universo primigenio durante un periodo muy breve de tiempo de $10^{-33}s$ y que habría incrementado el tamaño del Universo por un factor de 10^{26}, posterior a este periodo inflacionario, toda la energía de este fluído exótico se transformó en la materia y energía presentes en el Universo, este proceso es conocido como *recalentamiento*, el cual representaría al Big Bang clásico. Esta teoría inflacionaria soluciona los problemas presentes en la teoría convencional del Big Bang, pero no responde a la pregunta acerca del origen del Universo. La física actual no puede estudiar que paso la singularidad que dio inicio al Universo dado que no se tiene una teoría que estudie como se comporta la gravedad a escala microscópica.

La primera parte esta enfocada en revisar conceptos fundamentales sobre la teoría general de la relatividad, ya que es necesaria para poder estudiar al Universo. Revisaremos conceptos importantes como el tensor métrico, los tensores de curvatura y finalmente, las ecuaciones de campo de Einstein.

La segunda parte abarca conceptos necesarios e importantes para el estudio de la cosmología, que será necesario para el estudio de un Universo cíclico. Estudiaremos las bases de la cosmología y deduciremos las ecuaciones de Friedmann que describen a nuestro Universo.

La tercera parte se enfoca en el estudio de la inflación cósmica partiendo del análisis de los principales problemas que no resuelve el modelo cosmológico estandar, también se estudia como evoluciona el Universo en presencia del campo escalar llamado inflatón.

En la cuarta parte se realiza el estudio de un Universo que presenta anisotropias, para ello analizamos la métrica de Bianchi tipo I y obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein correspondientes a esta métrica. Ademas, se deducen otras ecuaciones que serán útiles para poder simular universos cíclicos anisotrópicos.

En la quinta parte se estudia el Big Bounce mediante la implementación de un campo escalar con un potencial de tipo cuadrático, se realiza una simulación para el caso de un Universo homogéneo e isotrópico el cual es descrito por la métrica de Friedmann y que será útil para validar nuestra simulación en el caso anisotrópico.

En la sexta parte implementamos el Big Bounce en un universo con anisotropia, se analiza como el campo escalar o inflatón produce de manera natural un periodo inflacionario luego del Big Bounce.

En la séptima parte estudiamos la cosmología cíclica mediante la implementación del potencial de tipo Higgs y la constante cosmológica negativa. Se realiza la simulación para la métrica de Friedmann y para la métrica de Bianchi.

Por último en la octava parte se realiza el estudio del fenómeno de histéresis cos-

mológica para los modelos estudiados en el capítulo anterior. A lo largo de la presente tesis utilizaremos la signatura $(-,+,+,+)$.

Objetivos

- **General**

  - Estudiar y analizar la evolución de un Universo cíclico anisotrópico descrito por la métrica de Bianchi I en presencia de un campo escalar, analizar potenciales del campo escalar que permitan simular universos cíclicos y realizar un estudio de la histéresis cosmológica.

- **Específicos**

  - Obtener todas las ecuaciones de Friedmann que describen como evoluciona un Universo homogéneo e isotrópico.
  - Estudiar la influencia del campo escalar con potencial de tipo cuadrático en el modelo de Friedmann y como este campo genera un periodo de expansión acelerada luego de un Big Bounce.
  - Obtener las ecuaciones de Einstein para la métrica de Bianchi I y derivar otras ecuaciones fundamentales para poder realizar simulaciones numéricas.
  - Implementar el campo escalar en la cosmología de Bianchi I y comprobar que para el caso homogéneo se obtienen los resultados de la cosmología de Friedmann.
  - Simular el big bounce en la cosmología de Bianchi I con anisotropia
  - Simular numéricamente un Universo cíclico mediante la implementación de un campo escalar con potencial de tipo Higgs y mediante la constante cosmológica negativa.
  - Realizar el estudio de la histéresis cosmológica.

Capítulo 1

Teoría de la relatividad general

La relatividad general es una teoría acerca de la gravedad y fue propuesta por Albert Einstein en el año 1915 tras casi una década de arduo trabajo [2]. En mayo de 1919, el astrónomo Arthur Eddington, luego de volver de una expedición científica, logra confirmar la validez de la teoría propuesta por Einstein [7]. Según Einstein, la gravedad no es una fuerza, sino más bien sería una consecuencia de la curvatura que posee el espacio-tiempo, es decir, la gravedad es un fenómeno de la geometría del espacio-tiempo, por este motivo, revisaremos algunos conceptos sobre geometría en espacios curvos para entender el mecanismo por el cual, la materia y la energía pueden deformar el espacio-tiempo.
En el presente capítulo revisaremos las principales herramientas de la relatividad general que serán necesarias para realizar nuestro estudio del Universo.

1.1. Gravedad newtoniana

Isaac Newton (1643-1727) propuso la **ley de la gravitación universal** [8], que describe a la interacción gravitatoria como una fuerza atractiva que actúa entre los cuerpos con masa, esta fuerza de atracción es proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros de masa. En particular, para dos particulas puntuales con masas m_1 y m_2, con vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente, esta fuerza está dada por la ecuación:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\hat{r}_{21}, \tag{1.1}$$

donde $G = 6.67191(99)\times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, es llamada, constante de gravitación universal. Se puede entender a la gravedad newtoniana como una interacción que se da entre una masa m y un campo gravitatorio $\vec{g}$, el cual fue producido por una distribución de masa cercana, similar a la interacción entre una carga eléctrica q y un campo eléctrico $\vec{E}$ producido por otra carga. La fuerza que experimenta esta masa m al estar inmersa en el campo gravitatorio $\vec{g}$ es dada por

$$\vec{F} = m\vec{g}. \tag{1.2}$$

También podemos describir la fuerza de interacción gravitatoria mediante un campo escalar representando por $\phi(\vec{r})$, el cual es llamada potencial gravitatorio. Para una distribución de masa con densidad $\rho(\vec{r})$, la fuerza gravitatoria está dada por la Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}). \tag{1.3}$$

Si para una distribución de masa cuya densidad es $\rho(\vec{g})$, obtenemos el potencial gravitatorio $\phi(\vec{r})$, podemos obtener el campo gravitacional $\vec{g}$ mediante la ecuación:

$$\vec{g} = -\nabla\phi. \tag{1.4}$$

Algo importante a tener en cuenta es que el campo de gravedad newtoniana es de *acción instantánea*, es decir, se propaga a velocidad infinita, sin embargo, esta conclusión está en desacuerdo con uno de los postulados de la relatividad especial, el cual fija una velocidad límite a la propagación de señales [9].

1.2. Principios de la relatividad general

En 1907, Einstein tuvo lo que según él fue 'la idea más feliz de su vida', en uno de sus experimentos mentales se dio cuenta que si se deja una partícula en caída libre, no podría distinguirse entre si este se encuentra en un sistema uniformemente acelerado sin gravedad o uno inercial con campo gravitatorio estático, mecánicamente son indistinguibles. En general, el campo de fuerzas ficticias que existen dentro de un sistema de referencia con aceleración constante es *idéntico* a un campo gravitacional estático.
Einstein propone dos principios como base de la relatividad general:

- **Principio de equivalencia:** En cada punto en un campo gravitacional arbitrario es posible escoger un sistema de referencia donde el campo se anule en un punto.

- **Principio de covarianza:** Las leyes físicas han de tener la misma forma matemática para todos los observadores.

1.3. Tensor métrico

El elemento de línea es la distancia infinitesimal entre dos eventos y se define por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \tag{1.5}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es una matriz de 16 elementos que se denomina tensor métrico y en el cual está codificada la información geométrica del espacio-tiempo.
Por ejemplo, en el espacio $\mathbb{R}^3$, el elemento de línea en coordenadas cartesiana es:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.6}$$

$$= \delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{1.7}$$

y por lo tanto, el tensor métrico de $\mathbb{R}^3$ toma la forma

$$\delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

También podemos expresar este elemento de línea en coordenadas esféricas

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2. \tag{1.9}$$

En coordenadas esféricas, el tensor métrico de $\mathbb{R}$ es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

La relatividad especial [10], describe al espacio-tiempo mediante el espacio-tiempo de Minkowski, la métrica $\eta_{\mu\nu}$ en coordenadas cartesianas con signatura $(+---)$ es:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

El elemento de línea para la métrica de Minkowski es:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1.12}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

1.4. Símbolo de Christoffel

En la geometría Euclideana o plana, la menor distancia entre dos puntos es la recta que une dichos puntos. Sin embargo, esto no se cumple cuando analizamos cual será la distancia mínima que existe entre dos puntos ubicados sobre una superficie curva, esta distancia no será igual a la recta que une dichos puntos. Se puede demostrar que la distancia mínima entre dos puntos ubicados en una superficie curva es la llamada línea geodésica que los une. Este concepto se extiende al espacio-tiempo de Einstein, donde la gravedad es una consecuencia de la deformación del espacio-tiempo causada por la interacción con la materia o energía contenida en el espacio-tiempo, esto hace que las trayectorias de las partículas en caída libre se desplacen siguiendo estas geodésicas sobre el espacio-tiempo. La ecuación que determina como están parametrizadas las coordenadas para una partícula libre sobre el espacio-tiempo está dada por la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \tag{1.13}$$

donde

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \tag{1.14}$$

es llamado símbolo de Christoffel o la conexión.
Al resolver la ecuación de la geodésica (1.13) se obtiene la línea de mundo $x^\mu = x^\mu(\tau)$ de la partícula en caída libre y que depende de la forma que tenga el tensor métrico sobre el cual se propaga dicha partícula.

1.5. Curvatura y geometría del espacio-tiempo

Debido a la naturaleza geométrica de la gravedad en la teoría general de la relatividad es necesario estudiar algunos tensores que codifican las propiedades del espacio-tiempo y su geometría. Estos tensores se detallan a continuación.

1.5.1. Tensor de Riemann

La curvatura del espacio-tiempo es dada por el tensor de Riemann [11], el cual es un tensor que posee en 256 componentes

$$R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}. \tag{1.15}$$

Este tensor posee información sobre la curvatura del espacio-tiempo, por ejemplo, para el espacio tiempo de Minkowski, el cual es un espacio plano, se puede comprobar que todas las componentes del tensor son nulas, esto también sucede con el espacio euclidiano de tres dimensiones. Por otro lado, si un espacio posee curvatura, las componentes del tensor de Riemann toman valores diferentes de cero.

1.5.2. Tensor de Ricci

Otro tensor importante en Relatividad General es el llamada tensor de Ricci, y se obtiene contrayendo el tensor de Riemann en dos de sus cuatro índices

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}. \tag{1.16}$$

1.5.3. Escalar de Ricci

Finalmente, podemos obtener el escalar de Ricci

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \tag{1.17}$$

Estos tres tensores son muy importantes dentro de la teoría de la Relatividad General dado que representan las propiedades geométrica del espacio-tiempo y que solo dependen de las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

1.6. La ecuación de campo de Einstein

En la teoría de la relatividad general la materia y energía deforman al espacio-tiempo, por lo que estas componentes son las que determinarán la geometría del espacio-tiempo. Fuera de la fuente, la ecuación diferencial que determinan las componentes del tensor métrico se halla con

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

la cual es conocida como la ecuación de campo de Einstein en el vacío, por otro lado, si queremos analizar que sucede dentro de la fuente, la ecuación tomará la forma general

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.18}$$

donde el termino $G_{\mu\nu}$ es conocido como tensor de Einstein y toma la forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \tag{1.19}$$

En la teoría gravitatoria de Newton, la fuente de gravedad es la densidad de materia, el tensor $T_{\mu\nu}$ se conoce como el tensor energía-momento, el cual es la generalización de la densidad de materia en la gravedad newtoniana. Las componentes de dicho tensor dependerán de como está distribuida la materia y energía presentes en el Universo.

Bajo la nueva concepción de Einstein, la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producida por la materia o energía y que está codificada en el tensor de energía-momento. En palabras de John Wheeler: 'la materia le dice al espacio como curvarse y el espacio le dice a la materia como moverse' [12]. La ecuación de campo de Einstein, toma la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{1.20}$$

Podemos establecer una comparación entre las teoría de gravedad según Newton y según Einstein como se observa en el siguiente cuadro

	Newton	Einstein
Sin gravedad	$\phi = 0$	$R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = 0$
Fuera de la fuente	$\nabla^2\phi = 0$	$R_{\alpha\beta} = 0$
Dentro de la fuente	$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

Tabla 1.1: Comparación entre ambas teorías de la gravedad.

1.6.1. Tensor energía - momento

El modelo cosmológico estándar asume que el Universo es altamente homogéneo e isótropo, el cual esta respaldado mediante observaciones experimentales que sugieren que nuestro Universo tiene estas características a escalas cosmológicas, por lo que nuestro Universo puede ser descrito por la geometría de Friedmann en la cual se tiene una función que parametriza la expansión del Universo y es conocida como el factor de escala. Sin embargo, para estudiar como evoluciona el Universo, es necesario tener una expresión para el tensor energía-momento en el que se codifica la distribución de materia y energía del Universo, las cuales son responsables de la deformación del espacio-tiempo. Podemos considerar al contenido del Universo como un conjunto de fluidos ideales, esto debido a que el Universo presenta una gran homogeneidad e isotropía, estos fluidos ideales se caracterizan por tener su propia densidad de energía ρ y una presión p, inmerso en un espacio-tiempo que está descrito por un tensor métrico $g_{\mu\nu}$. El tensor energía-momento se define en función a la cuadrivelocidad, y para un fluido ideal toma la forma [13]

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{1.21}$$

donde $u^u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{c}^2}}(c, \bar{v})$ representa la cuadrivelocidad del fluído, la densidad de energía es ρ y su presión p. Considerando una región del Universo que posee volúmen $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, la cual contiene una energía $E = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 c^2$ [1]. En este volúmen debe satisfacerse la conservación de la energía, por lo que se debe cumplir

$$dE + pdV = 0. \tag{1.22}$$

Si reemplazamos las expresiones para el volúmen y la energía en esta última ecuación obtenemos que

$$d\rho + 3\frac{da}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \tag{1.23}$$

Tomando en cuenta que tanto la densidad como la presión del fluído cosmológico solamente depende del tiempo, podemos expresar esta última ecuación como

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \tag{1.24}$$

La ecuación (1.24) es llamada **ecuación de conservación de energía o del fluído cosmológico**.

Capítulo 2

Cosmología

Nuestra comprensión del Cosmos ha ido evolucionando a lo largo del tiempo, en algún momento nuestro Universo solo se reducía a la Tierra, con los planetas y estrellas orbitando alrededor, creiamos que nuestro planeta era el centro del Universo y que ocupabamos un lugar importante en el Cosmos, no fue hasta que Nicolás Copérnico sugirió que no era así, sino que, la Tierra y los otros planetas orbitaban alrededor del Sol, esta idea revolucionaria provocó un profundo cambio en nuestra comprensión del Universo.
Con los trabajos de Isaac Newton y su comprensión acerca de la gravedad, dimos un paso más hacia la comprensión de como funciona nuestro Universo y finalmente con la llegada de Eistein y su teoria de relatividad general logramos una mejor comprensión del Universo y con ello nació la cosmología moderna.
La cosmología estudia el origen y evolución del Universo, gracias a esta teoría se pudo concebir al Universo como un sistema que evoluciona en el tiempo, pese a que el mismo Einstein planteaba su idea del Universo estático e inmutable.
La cosmología estudia al Universo a gran escala, para ello se fundamenta en el llamado *Principio Cosmológico*, el cual afirma que a grandes escalas, el Universo es altamente homogéneo e isotrópico, estas afirmaciones han sido comprobadas con evidencia experimental y ha permitido validar algunas teorias [5].

2.1. Modelo cosmológico estándar clásico

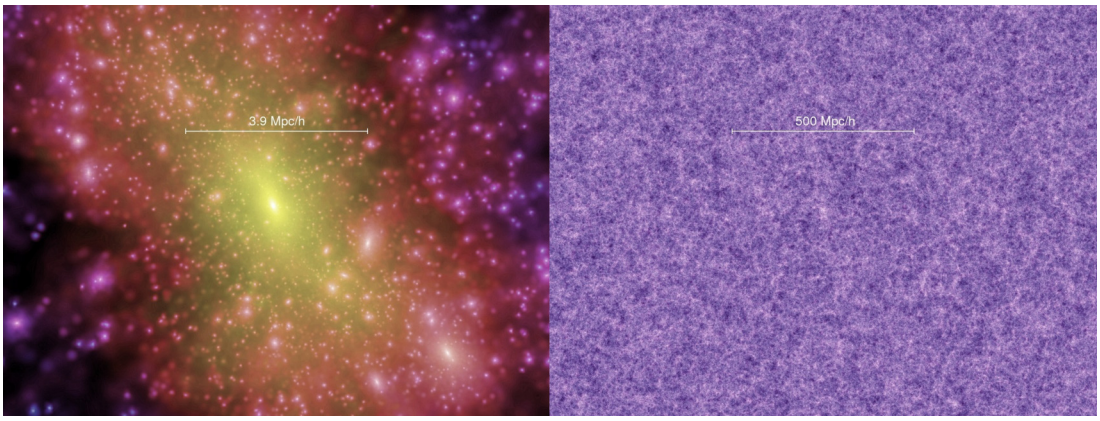
El modelo cosmológico estándar, llamado también modelo Lambda-CDM (ΛCDM), representa el mejor modelo con el que comprendemos al Universo y que está en concordancia con observaciones de la radiación de fondo de microondas [5] y con la formación de estructuras a gran escala. Este modelo se basa en las siguientes hipótesis:

- La Relatividad General de Einstein es la teoría que describe correctamente la gravedad a escalas cosmológicas.
- Principio cosmológico: El Universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas.

2.1.1. El principio cosmológico

El principio cosmológico afirma que el Universo a gran escala es homogéneo e isotrópo. Por homogéneo se refiere a que todos los puntos de la superficie del Universo son equi-

valentes, no existe un lugar privilegiado, por otro lado, la isotropía quiere decir que en el Universo no existe una dirección privilegiada, que las propiedades son las mismas en todas las direcciones.
Este principio está respaldado por observaciones experimentales de la radiación cósmica de fondo [14] , la cual tiene una temperatura aproximadamente de 2.725K en todas las direcciones. Por otro lado, las observaciones astronómicas sugieren que si nos alejamos a cientos de megapársecs (1Mpc $\approx 3.086 \times 10^{22}$m) nuestro Universo tiende hacia la homogeneidad e isotropía. Estas observaciones permiten tomar como válido al principio cosmológico y nos permite estudiar el Universo a gran escala.
Los resultados de la simulación computacional realizada por The Millenium Simulation Project [15] que podemos ver la la figura (2.1) muestran que el Universo posee una gran homogeneidad e isotropía a escalas de alrededor 500Mpc las cuales son denominadas *escalas cosmológicas* y en esta escala de longitudes se considera al Universo como si fuese un fluído ideal y todas las ecuaciones cosmológicas son válidas.



(a)

Figura 2.1: Distribución de la materia a escalas de 1Mpc (Izquierda) y de 500Mpc (derecha) [15]. A estas escalas el Universo presenta una gran homogeneidad e isotropía.

2.1.2. La expansión del Universo

Nuestra comprensión acerca del Universo ha ido evolucionando a lo largo de los años, en algún momento los humanos creíamos que eramos el centro del Universo, que ocupábamos una posición privilegiada en el Cosmos, que este Universo había sido creado para nosotros, luego la Ciencia nos demostró que no somos el centro del Universo, que existen miles de millones de galaxias y cada galaxia con millones de planetas, pero un descubrimiento que cambio nuestra visión del Cosmos ocurrió en el año 1998, el astrónomo Edwin Hubble descubrió la expansión del Universo [4], es decir, las galaxias se alejan entre si a una velocidad cada vez mayor. Estas velocidades se miden con el desplazamiento al rojo o *redshift*, el cual es similar al efecto Doppler con ondas de luz. Cada galaxia tiene un conjunto de líneas de absorción y emisión que son identificables en sus espectros y cuyas frecuencias son conocidas. Cuando una galaxia se desplaza hacia la nuestra, las ondas de luz se contraen y su frecuencia aumenta produciendo un desplazamiento hacia el azul, por otro lado, si la galaxia esta retrocediendo o alejándose de nosotros, sus líneas

características se desplazan al rojo, este efecto es el desplazamiento o corrimiento al rojo. El desplazamiento al rojo o redshift z está definido por

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} - 1, \tag{2.1}$$

donde λ_{em} y λ_{obs} son las longitudes de onda de la luz en los puntos de emisión y observación.
Para velocidades muy pequeñas comparadas con la de la luz se tiene que $\frac{v}{c} \ll 1$ y obtenemos

$$v = cz. \tag{2.2}$$

Hubble observó que la velocidad a la cual se alejaban las galaxias era proporcional a la distancia entre ellas, es decir

$$v = H_0 r. \tag{2.3}$$

Esta ecuación es conocida como la **Ley de Hubble**, donde H_0 es la constante de Hubble en el presente. Posterior a las observaciones de Hubble (Fig. 2.2), se realizaron observaciones a supernovas de tipo IA y se comprobó que no solamente el Universo se expande, sino que se expande aceleradamente [16].

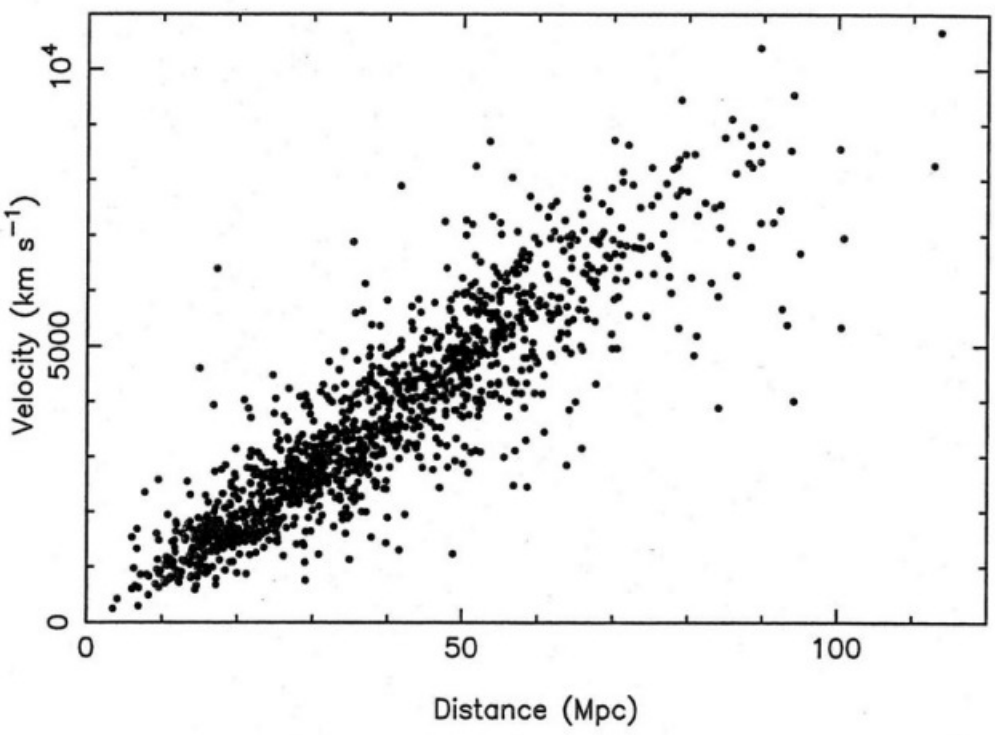


Figura 2.2: Gráfica de velocidad versus distancia estimada para un conjunto de 1355 galaxias [1]. Se puede notar una tendencia lineal mediante la cual Hubble dedujo su famosa ley.

2.1.3. Coordenadas comóviles

Debido a que la distancia en el Universo cambia con el tiempo, debemos tomar en cuenta un sistema de coordenadas que se mueva junto a esta expansión, estas coordenadas reciben el nombre de "coordenadas comóviles". Este sistema de coordenadas comóviles no se verá afectado por la expansión del Universo, tal como se puede observar en la figura 2.3

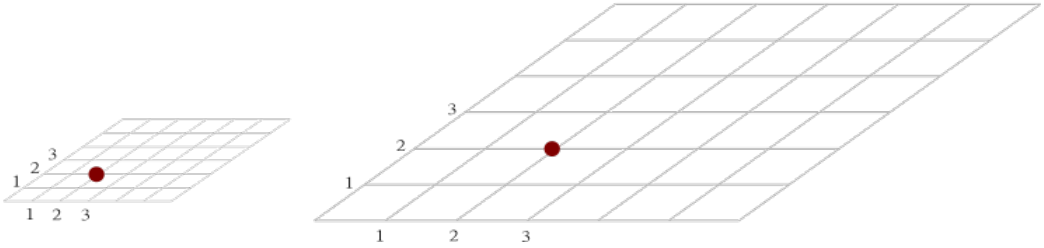


Figura 2.3: Coordenadas comóviles: El sistema de referencia no se ve afectado por la expansión del Universo.

2.1.4. Factor de escala

Dado que la distancia en el Universo cambia en el tiempo, utilizaremos una magnitud normalizada respecto a la medida actual, si suponemos que el radio del Universo en el presente es $R(t_0) = R_0$ y en un tiempo t será $R(t)$, definimos al factor de escala $a(t)$ como

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}. \tag{2.4}$$

Las distancias en el Universo cambian de forma proporcional al factor de escala $a(t)$ según

$$r(t) = a(t)x, \tag{2.5}$$

donde **r** es llamada *distancia física o real*. Dado que existe movimiento relativo entre dos galaxias, se tendrá una velocidad relativa entre ellas, pero esta velocidad es despreciable a escalas cosmológicas, por lo que podemos considerar únicamente a la expansión del Universo, de esta manera la coordenada x siempre estará fija y no será afectada por la expansión del Universo, así conseguimos un sistema inercial preferido que no se ve afectado por la expansión del Universo y al cual llamamos sistema comóvil. La velocidad se puede obtener como

$$v = \frac{dr(t)}{dt} = \dot{a}(t)x, \tag{2.6}$$

multiplicando y dividiendo por $a(t)$ se obtiene

$$v = \left(\frac{\dot{a(t)}}{a(t)}\right) r, \tag{2.7}$$

donde definimos el **parámetro de Hubble** como

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \tag{2.8}$$

Usando esta última expresión podemos escribir la ecuación (2.7) como

$$v(t) = H(t)r. \tag{2.9}$$

Comparando esta última ecuación con la ley de Hubble (2.3) y haciendo $t = t_0$, obtenemos

$$v = H(t_0)r. \tag{2.10}$$

Donde H_0 representa el parámetro de Hubble en el presente y es conocida como la constante de Hubble cuyo valor es $H_0 = 67.8 \pm 0.9 km/sMpc^{-1}$. Es importante tener en cuenta la diferencia entre el parámetro y la constante de Hubble. El parámetro de Hubble $H(t)$ es una función que depende del tiempo y parametriza la tasa de expansión del Universo, por otro lado, la constante de Hubble H_0 representa al valor del parámetro de Hubble en el presente, es decir $H_0 = H(t_0)$.

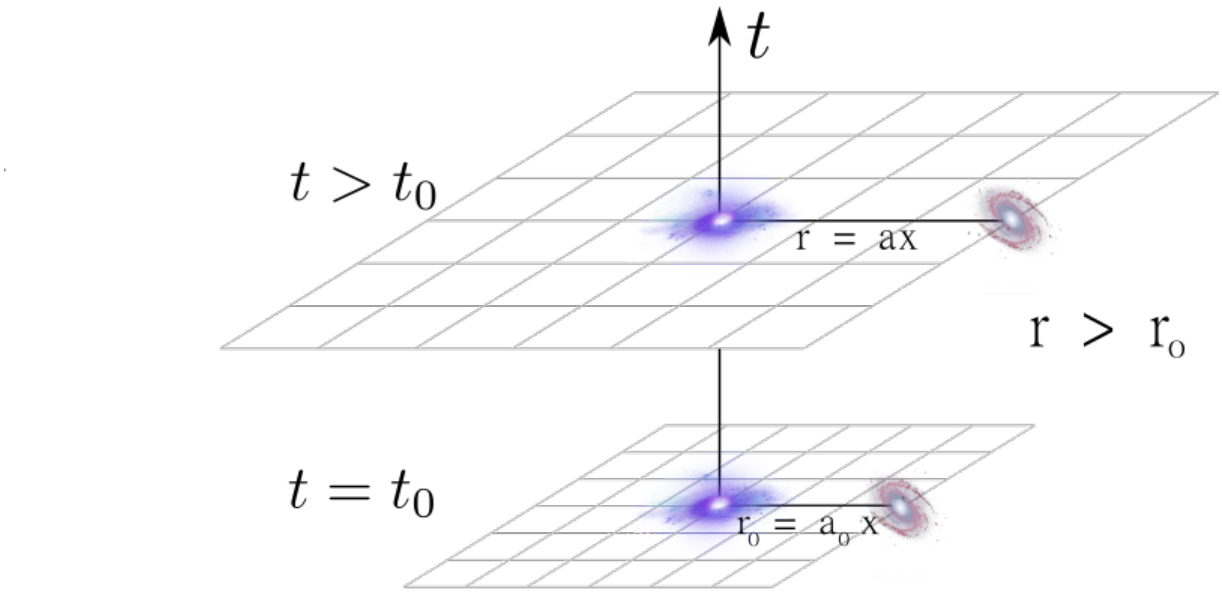


Figura 2.4: A medida que el Universo se expande, la *distancia física* entre dos puntos varía con el tiempo, por otro lado la coordenada x llamada *coordenada comóvil* se mantiene constante.

2.2. Ecuaciones que describen a nuestro Universo

Dada la validez del principio cosmológico, ahora nos planteamos encontrar un conjunto de ecuaciones que describan la dinámica de nuestro Universo y que esté en concordancia con las observaciones. Entre los años 1922 y 1924, Alexander Friedmann derivó una solución para las ecuaciones de Einstein para un Universo homogéneo y isótropo.

2.2.1. La métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

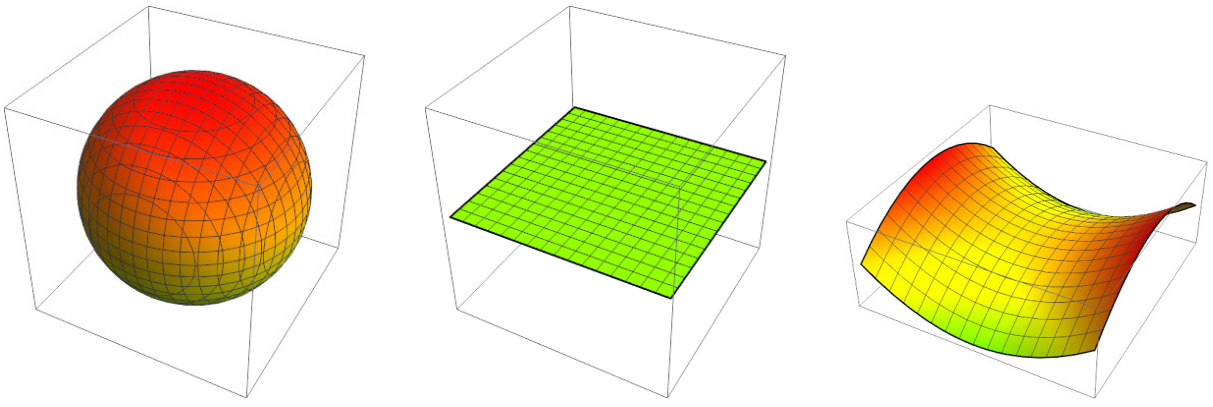
Si tenemos un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico, sus propiedades se codifican en el elemento de línea de Friedmann, el cual está dado en coordenadas esféricas por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2\right), \tag{2.11}$$

donde $a(t)$ es el *factor de escala* el cual es una función que parametriza la expansión del Universo y k es el parámetro de curvatura del Universo. El significado del parámetro de curvatura k se detalla en la siguiente tabla

Curvatura	Geometría	Suma de ángulos	Longitud de circunferencia	Tipo de Universo
$k > 0$	Esférica	$> 180°$	$< 2\pi r$	Cerrado
$k = 0$	Plana	$= 180°$	$= 2\pi r$	Plano
$k < 0$	Hiperbólica	$< 180°$	$> 2\pi r$	Abierto

Tabla 2.1: Interpretación del parámetro de curvatura k.



(a) **(b)**

Figura 2.5: Diferentes tipos de geometría en un espacio bidimensional: (a) Esférica, (b) Plana, (c) Hiperbólica

A partir del elemento de línea (2.11) podemos obtener el tensor metrico $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

2.2.2. Los símbolos de Christoffel

Usando la ecuación (1.14) y el tensor métrico de Friedmann (2.12) hallamos todos los símbolos de Christoffel diferentes de cero:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \\ \Gamma^0_{22} &= r^2 a\dot{a}, \\ \Gamma^0_{33} &= r^2 a\dot{a} sen^2(\theta), \\ \Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2 20 = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} &= \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{kr}{1-kr^2}, \\ \Gamma^1_{22} &= r(-1+kr^2), \\ \Gamma^1_{33} &= r(-1+kr^2) sen^2(\theta), \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\,cos(\theta) sen(\theta), \\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} &= cot(\theta), \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2.3. El tensor de curvatura de Riemann

Usando la expresión para el tensor de curvatura (1.15) y los símbolos de Christoffel podemos obtener todas las componentes diferentes de cero de este tensor, las cuales son

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} & R^1_{010} = R^2_{020} = R^3_{030} &= -\frac{\ddot{a}}{a} \\ R^0_{110} &= -\frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} & R^1_{212} = R^3_{232} &= r^2(k+\dot{a}^2) \\ R^0_{202} &= r^2 a\ddot{a} & R^1_{221} = R^3_{223} &= -r^2(k+\dot{a}^2) \\ R^0_{220} &= -r^2 a\ddot{a} & R^1_{313} = R^2_{323} &= r^2(k+\dot{a}^2)\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\ R^0_{303} &= r^2 a\ddot{a}\,\mathrm{sen}^2(\theta) & R^1_{331} = R^2_{332} &= -r^2(k+\dot{a}^2)\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\ R^0_{330} &= -r^2 a\ddot{a}\,\mathrm{sen}^2(\theta) & R^2_{112} = R^3_{113} &= -\frac{k+\dot{a}^2}{1-kr^2} \\ R^1_{001} = R^2_{002} = R^3_{003} &= \frac{\ddot{a}}{a} & R^2_{121} = R^3_{131} &= \frac{k+\dot{a}^2}{1-kr^2} \end{aligned}$$

2.2.4. El tensor de Ricci

Usando la expresión para el tensor de Ricci (1.16) junto a las componentes diferentes de cero del tensor de curvatura de Riemann, obtenemos todas las componentes no nulas del tensor de Ricci

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \tag{2.14}$$
$$R_{11} = \frac{2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1 - kr^2}, \tag{2.15}$$
$$R_{22} = r^2[2(k + \dot{a}^2) + a\ddot{a}], \tag{2.16}$$
$$R_{33} = r^2[2(k + \dot{a}^2) + a\ddot{a}]\,\mathrm{sen}^2(\theta). \tag{2.17}$$

2.2.5. El escalar de Ricci

Usando la expresión para el tensor de Ricci (1.17) obtenemos

$$R = 6\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right). \tag{2.18}$$

2.2.6. El tensor de Einstein

Utilizando la expresión para el tensor de Einstein (1.20) con las expresiones obtenidas para el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, conseguimos las componentes diferentes de cero para el tensor de Einstein en la métrica de Friedmann

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2}, \\ G_{11} &= -\frac{k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{1 - kr^2}, \\ G_{22} &= -r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}), \\ G_{33} &= -r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\,\mathrm{sen}^2(\theta). \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.2.7. Tensor energía-momento para la métrica de Friedmann

Para una partícula relativista, las componentes de su cuadrivelocidad [13] están dada por

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(c, \bar{v}). \tag{2.20}$$

El fluído cosmológico se mueve junto a la expansión del Universo debido a que es comóvil las componentes espaciales serán

$$u^i = u_i = 0. \tag{2.21}$$

Esto implica que $\bar{v} = 0$, de esta manera las componentes de la cuadrivelocidad (en unidades naturales con $c = 1$) son

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

La cuadrivelocidad se puede escribir como

$$u^\mu u_\mu = u^0 u_0 + u^i u_i = 1, \tag{2.22}$$

por lo que

$$\begin{aligned} u_0 u_0 =& g_{0\alpha} u^\alpha u_0, \\ =& g_{00} u^0 u_0, \\ =& g_{00}. \end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta que debido a la isotropía del Universo, el tensor métrico debe ser diagonal. Usando las ecuaciones (1.21), (2.21) y (2.23) podemos expresar las componentes del tensor energía-momento como

$$T_{00} = g_{00}\rho, \tag{2.23}$$
$$T_{ii} = -\, g_{ii} p, \tag{2.24}$$
$$T_{ij} = 0. \tag{2.25}$$

Usando el tensor métrico de Friedmann (2.12) obtenemos en tensor energía-momento para la métrica de Friedmann

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)p}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a^2(t) p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) a^2(t) p \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

2.2.8. Ecuaciones de campo de Einstein para la métrica FLRW

Utilizando la ecuación de Einstein (1.18) en unidades naturales ($c = 1$)

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.27}$$

con las ecuaciones (2.26) y (2.19) obtenemos cuatro ecuaciones de campo

$$\frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2} = 8\pi G\rho, \tag{2.28}$$
$$-\frac{k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{1 - kr^2} = 8\pi G \frac{a^2 p}{1 - kr^2}, \tag{2.29}$$
$$-r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) = 8\pi G r^2 a^2 p, \tag{2.30}$$
$$-r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) \operatorname{sen}^2\theta = 8\pi G r^2 a^2 \operatorname{sen}^2\theta p. \tag{2.31}$$

Podemos notar que solamente la ecuación (2.28) y (2.29) son independientes. Al reescribir la ecuación (2.28) obtenemos la **ecuación de Friedmann**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \tag{2.32}$$

A partir de la ecuación de Friedmann podemos definir el **parámetro de Hubble** como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{2.33}$$

Utilizando la ecuación (2.29) y (2.32) se obtiene la **ecuación de aceleración**.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{2.34}$$

Ambas ecuaciones son muy importantes en la Cosmología pues describen la dinámica de un Universo homogéneo e isotrópico.

2.2.9. La ecuación del fluído cosmológico

Si queremos resolver las ecuaciones de Friedmann necesitamos de otra ecuación que describa como evoluciona la densidad ρ y la presión p con el tiempo, esta ecuación se llama **ecuación del fluído**. Para derivar la ecuación del fluido tomemos en cuenta a la primera ley de la Termodinámica

$$dE + pdV = TdS, \tag{2.35}$$

Si tomamos una región del Universo cuyo volúmen es $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, la energía contenida en este volúmen es $E = mc^2$ y tomando en cuenta la relación entre el volúmen y la densidad podemos expresar la energía como

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 c^2. \tag{2.36}$$

El cambio en la energía será

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2, \tag{2.37}$$

y en el volúmen

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a \frac{da}{dt}. \tag{2.38}$$

Si asumimos que la expansión es reversible, tenemos que $dS = 0$ y reemplazando las ecuaciones (2.37) y (2.38) en (2.35) se obtiene

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \tag{2.39}$$

esta última ecuación es conocida como **ecuación del fluído cosmológico**, pero aún no podemos resolver esta ecuación debido a que no sabemos cual es la relación que existe entre la densidad ρ y la presión p. Si especificamos la presión p diremos de que esta lleno nuestro Universo, para ello supondremos que existe una presión única asociada a cada densidad, de manera que la presión es una función que depende de la densidad $p = p(\rho)$, esta relación es llamada **ecuación de estado**. Una vez hemos especificado la ecuación de estado necesitaremos la ecuación de Friedmann y la ecuación del fluido cosmológico para estudiar la evolución del Universo.
Podemos suponer una relación lineal para la ecuación de estado de la forma [1]

$$p = w\rho, \tag{2.40}$$

que se puede expresar de la siguiente manera

$$w = \frac{p}{\rho}. \tag{2.41}$$

Si reescribimos la ecuación de aceleración (2.34) tomando en cuenta a (2.40) obtenemos

$$\ddot{a} = -4\pi G a \left(w + \frac{1}{3} \right) \rho. \tag{2.42}$$

Es importante notar que
Si $w > -\frac{1}{3}$ entonces $\ddot{a} < 0 \rightarrow$ Expansión desacelerada
Si $w < -\frac{1}{3}$ entonces $\ddot{a} > 0 \rightarrow$ Expansión acelerada

2.3. Componentes del fluído cosmológico

Para estudiar como evoluciona el Universo necesitamos tener una idea acerca de su contenido, para ello especificamos una relación entre la densidad de masa ρ y la presión p, la cual conocemos como ecuación de estado. Consideremos las siguientes componentes

2.3.1. Materia

En cosmología, la materia o *dust* hace referencia a la materia no relativista, es decir, todo aquello que se mueve con velocidades mucho menores comparadas con la de la luz. Podemos decir que la materia en este contexto representa a todas las galaxias presentes en el Universo, al polvo interestelar y a la materia oscura, que es un tipo de materia exótica que se caracteriza por no interactuar de forma electromagnética. La materia oscura es importante porque permite explicar las curvas de velocidad de algunas galaxias y también, la formación de estructuras en el Universo [17].
A escalas cosmológicas, la materia es arrastrada debido a la expansión del Universo y su presión, denotada por p_m, es nula

$$p_m = 0. \tag{2.43}$$

Teniendo en cuenta esto y reemplazando en (2.41) obtenemos que

$$\omega_m = 0. \tag{2.44}$$

La ecuación del fluído cosmológico (2.39) para la materia toma la forma

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \tag{2.45}$$

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0, \tag{2.46}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0, \tag{2.47}$$

esto implica que ρa^3 es una constante, por lo que podemos decir

$$\rho \propto \frac{1}{a^3}. \tag{2.48}$$

La densidad de energía de materia en el presente esta denotada por ρ_{m0} y tomando en cuenta la expansión del Universo, la densidad de energía disminuirá a medida que transcurra el tiempo y la materia se irá diluyendo, el volúmen del Universo crece como a^3 y la densidad de energía decrece como $1/a^3$ por lo que

$$\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{a^3}. \tag{2.49}$$

2.3.2. Radiación

La radiación hace referencia a todas las componentes del Universo que se muevan a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, es decir, que sean relativistas. La presión ejercida por la radiación es denotada por p_r y se relaciona con la densidad [18] según

$$p_r = \frac{\rho_r c^2}{3}, \tag{2.50}$$

por lo que su ecuación de estado (2.41) será

$$\omega_r = \frac{1}{3}. \tag{2.51}$$

Tomando en cuenta esto en la ecuación (2.39) se tiene que

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0. \tag{2.52}$$

Al igual que la materia, mientras el Universo se expande, la densidad de energía de la radiación se diluirá, en este caso, hay dos contribuciones, la primera se debe al propio incremento del volúmen del Universo debido a la expansión, lo que genera que esta densidad de energía se diluya en un factor de $1/a^3$, y la segunda se debe a la disminución de la energía de los fotones de la radiación debido al corrimiento al rojo cosmológico por lo que esta densidad de energía se reducirá en un factor adicional de $1/a$, por lo que la

densidad de energía de radiación decrece en un factor de $1/a^4$. Si denotamos como ρ_{r0} a la densidad de energía de radiación del presente, tendremos que la densidad de energía de la radiación ρ_r esta dada por

$$\rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4}. \tag{2.53}$$

2.3.3. Constante cosmológica

Si analizamos la ecuación de la aceleración del Universo (2.34)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \tag{2.54}$$

podemos notar que la densidad ρ y la presión p son ambas positivas, así que, si el Universo solamente posee materia y radiación, la ecuación de aceleración nos dice que $\ddot{a} < 0$, y esto signifique que, si el Universo se expande hoy, la expansión debe ser desacelerada. Sin embargo, en 1998 mediante mediante observaciones cosmológicas a los desplazamientos al rojo de supernovas tipo IA [16] se demostró que, contrario a lo que se esperaba, el Universo se expande de forma acelerada, es decir

$$\ddot{a} > 0. \tag{2.55}$$

Esta expansión acelerada del Universo es actualmente uno de los misterios mas importantes para la cosmología.
Para resolver este problema se ha planteado diferentes teorías que buscan explicar esta expansión acelerada del Universo, podemos mencionar las siguientes

- **Gravedad modificada:** Estas teorías modifican la teoría de la gravedad de Einstein [11] con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento del Universo diferentes a las ya analizadas. Estas ecuaciones si permitirían aceleraciones positivas aún cuando el Universo solo este compuesto de materia y radiación.
- **Energía oscura:** Se puede explicar la expansión acelerada del Universo si asumimos que existe una componente adicional al contenido del Universo, esta componente exótica es denominada *energía oscura* y se comportaría de manera diferente a la materia y radiación ordinaria.

La energía oscura en el modelo cosmológico estándar, es modelada como un fluido y se representa por Λ [1].
La constante cosmológica tiene una densidad de energía constante dada por

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{2.56}$$

y una presión negativa dada por

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}, \tag{2.57}$$

donde Λ representa a la constante cosmológica. Reemplazando la densidad de energía (2.56) y la presión (2.57) en la ecuación de estado (2.41) para la constante cosmológica con $c = 1$ se obtiene

$$\omega = -1. \tag{2.58}$$

Al introducir la constante cosmológica en la ecuación de Friedmann (2.32), la densidad total ρ estaría compuesta por 3 componentes $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ y la ecuación de Friedmann toma la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}, \tag{2.59}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m + \rho_r + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) - \frac{k}{a^2}, \tag{2.60}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \tag{2.61}$$

Por otro lado, la ecuación de la aceleración (2.34) se tiene que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}[\rho_m + \rho_r + 3(p_m + p_r)] + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.62}$$

Si analizamos esta última ecuación podemos notar que la presencia de la constante cosmológica Λ hace posible que el Universo pueda expandirse de forma acelerada si la constante cosmológica Λ toma un valor adecuado.

Pese a que la constante cosmológica es una buena alternativa para poder modelar y explicar la expansión acelerada del Universo [14], la interpretación de su naturaleza aún se encuentra en debate [19]. Una posible interpretación sobre la naturaleza de esta constante cosmológica es que esta conectada con la energía que posee el propio vacio. Según la teoría cuántica de campos, si esta teoría fuese correcta, se esperaría que el valor experimental obtenido para la constante cosmológica Λ debería coincidir con el valor obtenido para la energía del vacío, pero estas observaciones han mostrado que no es así y que incluso, el valor de la energía predicha según la teoría cuántica de campos es alrededor de 120 ordenes de magnitud mayor a la energía observada de la constante cosmológica. Por ello, la naturaleza exótica de la constante cosmológica esta aún en debate, por lo que la explicación para la expansión acelerada del Universo sigue siendo un misterio para los físicos.

Capítulo 3

Inflación cósmica

Pese al éxito del modelo estándar de la Cosmología moderna este presentaba algunos problemas que no podía explicar, tales como el problema de la planitud, el problema del horizonte y el problema de los monopolos magnéticos. La teoría inflacionaria fue desarrollada en 1981 por el físico estadounidense Alan Guth y de forma independiente por Andrei Linde. El modelo inflacionario de Guth [20] presentaba algunos problemas que fueron resueltos por Andrei Linde [21] y de forma independiente por Andreas Albrecht y Paul Steinhardt [22] en un nuevo modelo llamado *nueva inflación* o *inflación slow-roll*. La inflación *slow roll* propone que la expansión acelerada del Universo primigenio se debió a la presencia de un campo escalar, este campo escalar es llamado *inflatón*, este campo estaba en la cima de su potencial para luego caer lentamente, generando así un periodo de expansión acelerada que resolvería los problemas que presentaba la teoría del Big Bang [6] y que mencionamos anteriormente.

3.1. Los problemas de la teoría del Big Bang clásico

Según el modelo cosmológico estándar el Universo observable se origino hace aproximadamente 13 800 millones de años, en el denominado "Big Bang". Sin embargo este modelo presenta algunos problemas a los cuales no puede responder, dos de estos problemas importantes son el problema de la planitud y el problema del horizonte.

3.1.1. El problema de la planitud del Universo

A partir de la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \tag{3.1}$$

se puede obtener la siguiente expresión

$$1 - \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = -(aH)^{-2}k. \tag{3.2}$$

La densidad crítica ρ_c es la densidad que provoca que el Universo sea plano, para ello

hacemos que el parámetro de curvatura sea nulo, es decir $k = 0$ en (3.2) y obtenemos

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{3.3}$$

Usando la ecuación (3.1.1) en (3.2) obtenemos

$$1 - \frac{\rho}{\rho_c} = -(aH)^{-2}k, \tag{3.4}$$

el término $\frac{\rho}{\rho_c}$ es conocido como el **parámetro de densidad** del Universo el cual se representa por $\Omega(a)$, de esta forma la ecuación anterior se puede expresar como

$$1 - \Omega(a) = -(aH)^{-2}k. \tag{3.5}$$

Esta ecuación nos muestra una relación entre el parámetro de densidad y la curvatura del Universo.

- Si $\Omega(a) < 1$
  Se tiene que $k < 0$ y el Universo es abierto.
- Si $\Omega(a) = 1$
  Se tiene que $k = 0$ y el Universo es plano.
- Si $\Omega(a) > 1$
  Se tiene que $k > 1$ y el Universo es cerrado.

  Las observaciones actuales muestran que el Universo es aproximadamente plano [23] por lo que $\Omega(a) \approx 1$.

El valor de $k = 0$ es un punto inestable y a medida que transcurre el tiempo el parámetro de densidad se aleja de la unidad, esto quiere decir que en el pasado el parámetro de densidad $\omega(a)$ estaba más próximo a la unidad, esto a su vez implica que el Universo debió ser perfectamente plano en sus orígenes. No existe algún motivo por el que se pueda suponer que el Universo debió empezar así, sobretodo considerando que la planitud es un punto muy inestable y cualquier pequeña variación haría que el Universo tenga una marcada curvatura en el presente.

3.1.2. El problema del horizonte

Este es un problema importante en Cosmología y hace referencia a la comunicación entre regiones diferentes del Universo. La luz viaja con una velocidad constante y esto a su vez fija una distancia límite, esta distancia que ha recorrido la luz desde del Big Bang da lugar a una región conocida como universo observable. Esta es la región que podemos observar y siempre es una distancia finita independientemente de si el Universo en su totalidad es finito o infinito. Cuando observamos en direcciones diferentes en el Universo notamos una isotropía en el fondo cósmico de microondas con una temperatura de aproximadamente $2.724K$ en todas las direcciones como se observa en la figura (3.1) con unas muy pequeñas variaciones . Pero, ¿qué implica que exista una isotropía en el fondo cósmica de microondas?

Que el fondo cósmico de microondas este a la misma temperatura en todas las direcciones es una característica del equilibrio térmico, pero para que exista equilibrio térmico entre dos regiones del Universo implica que estas regiones han tenido que interactuar para luego avanzar hacia el equilibrio térmico. La luz que observamos ha estado viajando hacia nosotros desde la época del desacoplamiento, dado que la luz nos acaba de llegar no es posible que haya llegado hasta el lado opuesto del cielo, por lo que no hubo tiempo para que dos regiones en lados opuestos del cielo interactuen de alguna manera.

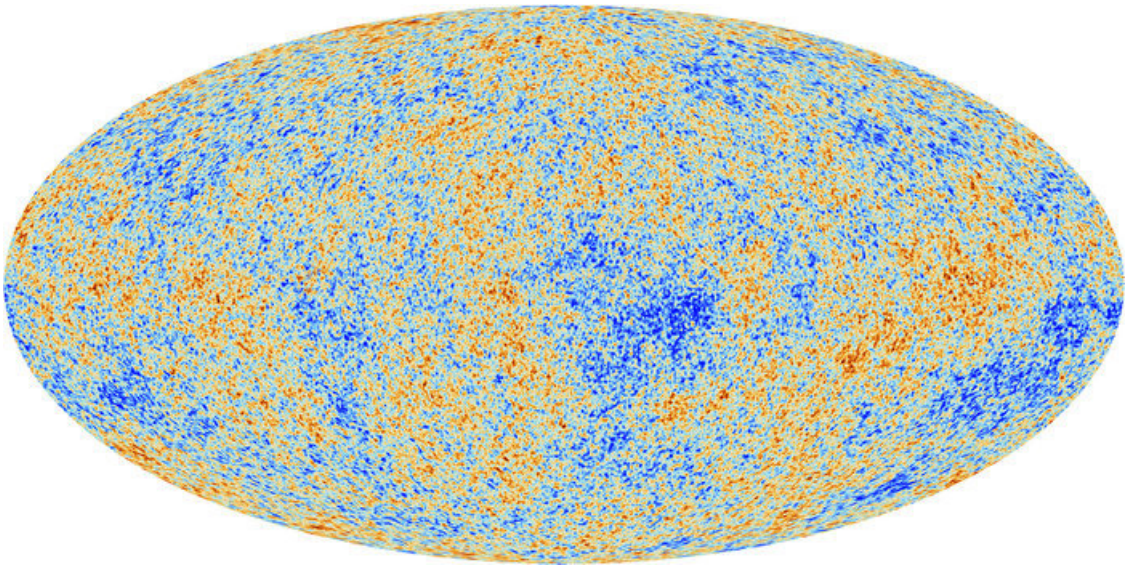


Figura 3.1: El fondo cósmico de microondas muestra una gran isotropía. Las anisotropias existentes están en el orden de diez partes por millón. [24]

3.2. El inflatón

Para que el Universo atraviese por un periodo de expansión acelerada, se debe cumplir la siguiente condición

$$w = \frac{p}{\rho} < -1/3. \tag{3.6}$$

Existen distintos modelos inflacionarios [25], los más sencillos plantean que existía un campo escalar que permeaba el Universo temprano y que sería el responsable de un periodo de expansión acelerada muy breve, para luego dar paso a la evolución del Universo según el modelo estándar cosmológico.

3.2.1. Ecuación de movimiento del inflatón

En relatividad general, la accion de Einstein-Hilbert en unidades naturales esta dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_m, \tag{3.7}$$

$\mathcal{L}_m$ representa al lagrangiano de materia y energía presente en el espacio-tiempo. Se modela al inflatón como un campo escalar que esta minimamente acoplado a la gravedad con lagrangiano [26] dado por

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi).$$

Al aplicar el principio variacional a la acción de Einstein-Hilbert con respecto al campo ϕ obtenemos la ecuación de movimiento del campo

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{16\pi G}\delta_\phi \int d^4x\sqrt{-g}R + \delta_\phi \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)\right] \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) + \delta(V(\phi))\right] \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}[\delta(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\delta(\partial_\nu\phi)] + \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right] \\
&= \int d^4x\left[-\sqrt{-g}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}[2(\partial_\mu\delta\phi)\partial_\nu\phi] + \sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right] \\
&= \int d^4x\left[-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(\partial_\mu\delta\phi) + \sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right] \\
&= \int d^4x\left[-\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\delta\phi\right) + \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)\delta\phi + \sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right] \\
&= -\int d^4x\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\delta\phi) + \int d^4x\left[\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right]\delta\phi \\
&= -\oint_\Omega d^3x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\delta\phi\Sigma_\mu + \int d^4x\left[\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right]\delta\phi \\
&= \int d^4x\left[\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right]\delta\phi, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

de (3.8) obtenemos la ecuación de movimiento del inflatón en un espacio-tiempo curvo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \qquad (3.9)$$

Para hallar la ecuación de movimiento del inflatón sobre el fondo de Friedmann, utilizamos el tensor métrico de FLRW

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{pmatrix}, \qquad (3.10)$$

la inversa de este tensor métrico está dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{-a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-a^2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-a^2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

y su determinante

$$g = -\frac{a^6 r^4 \,\mathrm{sen}^2\,\theta}{1-kr^2}. \tag{3.12}$$

Utilizando estos resultados en (3.9) se obtiene

$$0 = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \,\mathrm{sen}\,\theta}\partial_\mu \left[\frac{a^3 r^2 \,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{1-kr^2}} g^{\mu\nu}\partial_\nu \phi\right] + \frac{\partial V}{\partial \phi}. \tag{3.13}$$

Consideraremos al inflatón como un campo homogéneo, es decir, que solo evoluciona en el tiempo, por lo que se ha de cumplir

$$\partial_r \phi = \partial_\theta \phi = \partial_\varphi \phi = 0. \tag{3.14}$$

Tomando en cuenta esta consideración en la ecuación (3.13) obtenemos la ecuación de movimiento del inflatón sobre el fondo de FLRW

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \tag{3.15}$$

donde $H = \dfrac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble.

3.2.2. Tensor energía-momento del inflatón

Para un lagrangiano de materia $\mathcal{L}$ el tensor energía-momento [27] esta dado por

$$T_{\mu\nu} = -2\left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\right]. \tag{3.16}$$

Tomando en cuenta el lagrangiano del campo escalar (3.7) se obtiene

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{\phi}^2 + g_{\mu\nu} V(\phi). \tag{3.17}$$

Tomando en cuenta que el campo escalar es homogéneo, se cumple que $\partial_r\phi = \partial_\theta\phi = \partial_\varphi\phi = 0$, por lo tanto las componentes del tensor energía-momento las cuales son:

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \tag{3.18}$$

$$T_{11} = \frac{a^2}{1-kr^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right], \tag{3.19}$$

$$T_{22} = \frac{a^2r^2}{1-kr^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right], \tag{3.20}$$

$$T_{33} = \frac{a^2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{1-kr^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right] \tag{3.21}$$

3.2.3. Ecuaciones de Friedmann en presencia del campo escalar

Las ecuaciones de Friedmann antes obtenidas ahora sufrirán una modificación debido a la presencia del inflatón. Teniendo en cuenta la ecuación de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{3.22}$$

Usando las ecuaciones (2.19)junto a las componentes obtenidas del tensor energía-momento (3.18)- (3.21) se tiene:

$$\frac{3(k+\dot{a}^2)}{a^2} = 8\pi G\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right], \tag{3.23}$$

$$-\frac{k+\dot{a}^2+2a\ddot{a}}{1-kr^2} = 8\pi G\frac{a^2}{1-kr^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right], \tag{3.24}$$

$$-r^2(k+\dot{a}^2+2a\ddot{a}) = 8\pi G r^2a^2\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right], \tag{3.25}$$

$$-r^2(k+\dot{a}^2+2a\ddot{a})\,\mathrm{sen}^2(\theta) = 8\pi G r^2a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right]. \tag{3.26}$$

Al analizar las ecuaciones, observamos que el inflatón tiene un comportamiento similar a un fluído ideal cuya densidad y presión están dadas por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \tag{3.27}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \tag{3.28}$$

3.2.4. Inflación slow-roll

Según la ecuación (2.42) para que la expansión acelerada ocurra ($\ddot{a} > 0$) se debe cumplir la condición $w < -1/3$. Usando las expresiones para la densidad (3.27) y para la presión (3.28) del inflatón en la ecuación de estado (2.41)

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} = \frac{T - V}{T + V} < -\frac{1}{3}. \tag{3.29}$$

Esta condición se cumple siempre que

$$V > 2T, \tag{3.30}$$

esto nos dice que el Universo se acelerará en presencia del campo escalar siempre que se cumpla esta condición.
En la ecuación (3.29) es importante notar que w no es constante, sino que evoluciona junto al campo escalar, por ello, es de esperar que bajo ciertas condiciones se cumpla la condición $w < -1/3$, permitiendo así que el campo escalar inflatón genere una etapa de expansión acelerada durante un periodo breve de tiempo, luego de este periodo el Universo dejaría de expandirse aceleradamente y continuaría evolucionando según el modelo estándar de la Cosmología.
El modelo de inflación slow-roll propone que en los instantes iniciales del Universo, el campo escalar estaba en la cima de su energía potencial y las fluctuaciones cuánticas, provocaron que su potencial empezara a caer, convirtiendo su energía potencial en energía cinética que genere un periodo de expansión acelerada. Si consideramos que la energía cinética inicial es demasiado pequeña en comparación a la energía potencial ($\dot{\phi} \ll V(\phi)$), se cumplirá que

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \approx \frac{-V(\phi)}{V(\phi)} = -1 < -\frac{1}{3}, \tag{3.31}$$

Permitiendo al Universo expandirse aceleradamente. Este periodo de expansión acelerada llegará a su fin cuando

$$\frac{1}{2}\dot{\phi} \approx V(\phi). \tag{3.32}$$

Al terminar el periodo inflacionario inicia una etapa durante la cual el campo escalar oscila alrededor del mínimo de su potencial y toda la energía interna del campo se transformará en todas las partículas del modelo estándar [28], este periodo se denomina el *recalentamiento*. Posterior a esta etapa, el Universo evoluciona según el modelo estándar de la Cosmología. Esta etapa del recalentamiento aún no se comprende del todo bien y es un área activa de investigación [29]. Podemos observar de manera gráfica como evoluciona el campo escalar en la figura (3.2).

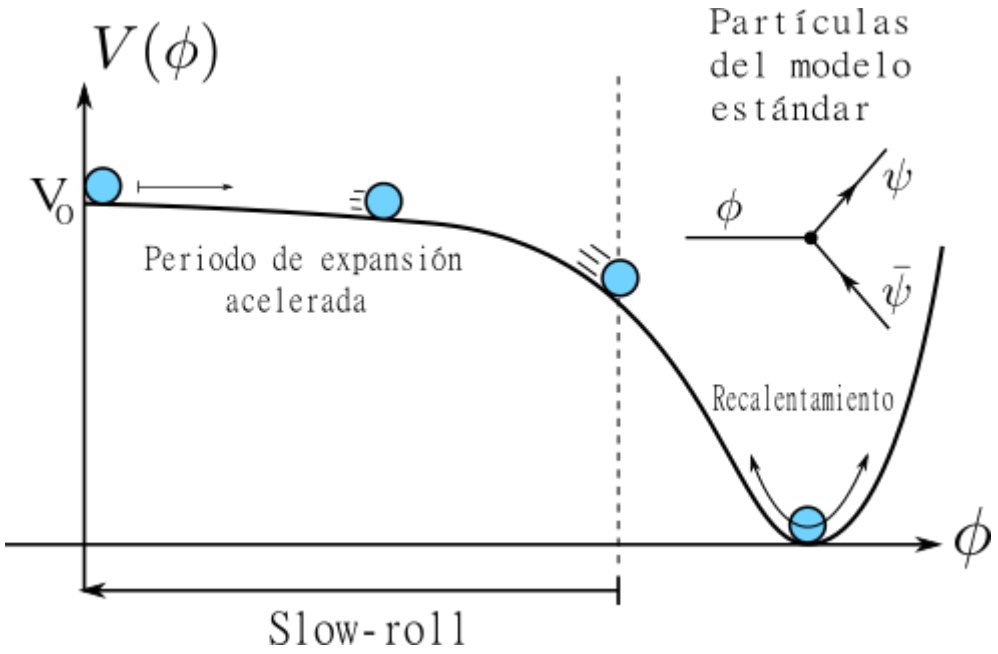


Figura 3.2: Representación esquemática de la evolución temporal del campo escalar. La dinámica del campo escalar se asemeja al deslizamiento de una partícula sobre una superficie con rozamiento. Su energía potencial cae y oscila en torno a su mínimo produciendose el recalentamiento que daría nacimiento a todas las partículas del modelo estandar.

3.2.5. Campo escalar masivo

En las ecuaciones (3.27) y (3.28) podemos notar la dependencia de la forma del potencial $V(\phi)$. Para un primer estudio del mecanismo de inflación asumiremos un potencial $V(\phi) \propto \phi^2$, el cual describe un oscilador armónico. Nuestro potencial $V(\phi)$ es

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{3.33}$$

Al reemplazar este potencial en la ecuación (3.15) obtenemos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \tag{3.34}$$

3.2.6. Número de e-folds

Para medir la *cantidad de inflación*, se utiliza un parámetro llamado *número de e-folds* y se representa por N

$$N = ln\left[\frac{a(t_f)}{a(t_i)}\right], \tag{3.35}$$

donde $a(t_i)$ representa el tiempo en el que inicia el periodo inflacionario y $a(t_f)$ el tiempo en el que finaliza. La ecuación (3.35) implica que

$$a(t_f) = e^N a(t_i). \tag{3.36}$$

El número de e-folds determina que tanto se expandió el Universo durante la inflación. Las observaciones cosmológicas sugieren que el número de e-folds durante el periodo inflacionario debió ser mayor a 60 [23].

$$N \geq 60. \tag{3.37}$$

Capítulo 4

Universo anisotrópico

El modelo cosmológico estándar ΛCDM tiene como hipótesis principal la homogeneidad e isotropía del espacio, este modelo ha sido respaldado por varias observaciones experimentales por lo que es considerado como un modelo válido, sin embargo, presenta ciertos problemas tales como las anomalías en el fondo cósmico de microondas y otros que han motivado a la búsqueda de alternativas mediante el estudio de otros modelos cosmológicos que no consideren a la isotropía del espacio en sus hipótesis [30], uno de estos modelos son los de Bianchi, en especial en esta tesis estudiaremos el modelo de Bianchi tipo I que modela un Universo que es homogéneo pero no isotrópico [31], [32], [33].

4.1. Modelo cosmológico de Bianchi tipo I

La métrica de Bianchi tipo I en coordenadas cartesianas [31] (en unidades naturales), está dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2dx^2 - b(t)^2dy^2 - c(t)^2dz^2, \tag{4.1}$$

donde $a(t),\ b(t)$ *y* $c(t)$ son los *factores de escala* y son las funciones que parametrizan la expansión del Universo. Esta métrica se reduce a la de Friedmann para el caso de $k = 0$ y cuando $a(t) = b(t) = c(t)$.
A partir del elemento de línea de Bianchi I, podemos obtener el tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c(t) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

4.1.1. Los símbolos de Christoffel

Usando la expresión (1.14) y el tensor métrico (4.2) obtenemos todos los símbolos de Christoffel no nulos para la métrica de Bianchi I:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= a\dot{a}, \\
\Gamma^0_{22} &= b\dot{b}, \\
\Gamma^0_{33} &= c\dot{c}, \\
\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} &= \frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} &= \frac{\dot{b}}{b}, \\
\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} &= \frac{\dot{c}}{c}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.2. El tensor de curvatura de Riemann

Usando la definición del tensor de Riemann (1.15) y los símbolos de Christofell obtenidos previamente, obtenemos las componentes distintas de cero de este tensor

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= a\ddot{a} \\
R^0_{110} &= -a\ddot{a} \\
R^0_{202} &= b\ddot{b} \\
R^0_{220} &= -b\ddot{b} \\
R^0_{303} &= c\ddot{c} \\
R^0_{330} &= -c\ddot{c} \\
R^1_{001} &= \frac{\ddot{a}}{a} \\
R^1_{010} &= -\frac{\ddot{a}}{a} \\
R^1_{212} &= \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} \\
R^1_{221} &= -\frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} \\
R^1_{313} &= \frac{c\dot{a}\dot{c}}{a} \\
R^1_{331} &= -\frac{c\dot{a}\dot{c}}{a} \\
R^2_{002} &= \frac{\ddot{b}}{b}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
R^2_{020} &= -\frac{\ddot{b}}{b} \\
R^2_{112} &= -\frac{a\dot{a}\dot{b}}{b} \\
R^2_{121} &= \frac{a\dot{a}\dot{b}}{b} \\
R^2_{323} &= \frac{c\dot{b}\dot{c}}{b} \\
R^2_{332} &= -\frac{c\dot{b}\dot{c}}{b} \\
R^3_{003} &= \frac{\ddot{c}}{c} \\
R^3_{030} &= -\frac{\ddot{c}}{c} \\
R^3_{113} &= -\frac{a\dot{a}\dot{c}}{c} \\
R^3_{131} &= \frac{a\dot{a}\dot{c}}{c} \\
R^3_{223} &= -\frac{b\dot{b}\dot{c}}{c} \\
R^3_{232} &= \frac{b\dot{b}\dot{c}}{c}
\end{aligned}$$

4.1.3. El tensor de Ricci

Usando expresión para el tensor de Ricci (1.16) junto a las componentes para el tensor de Riemann, obtenemos las componentes para este tensor

$$R_{00} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}\right), \tag{4.4}$$

$$R_{11} = a\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{c} + \ddot{a}\right), \tag{4.5}$$

$$R_{22} = b\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{a} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{c} + \ddot{b}\right), \tag{4.6}$$

$$R_{33} = c\left(\frac{\dot{a}\dot{c}}{a} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{b} + \ddot{c}\right). \tag{4.7}$$

4.1.4. El escalar de Ricci

Usando la expresión para el escalar de Ricci (1.17), obtenemos esta expresión en la métrica de Bianchi I

$$R = -\frac{2}{abc}\left(a\dot{b}\dot{c} + c(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b}) + b(\dot{a}\dot{c} + a\ddot{c})\right). \tag{4.8}$$

4.1.5. El tensor de Einstein

Usando la expresión para el tensor de Einstein (1.19) junto a las componentes que obtuvimos para el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, obtenemos las componentes distintas de cero para el tensor de Einstein

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{c\dot{a}\dot{b} + \dot{c}(b\dot{a} + a\dot{b})}{abc}, \\ G_{11} &= -\frac{a^2(\dot{b}\dot{c} + c\ddot{b} + b\ddot{c})}{bc}, \\ G_{22} &= -\frac{b^2(\dot{a}\dot{c} + c\ddot{a} + a\ddot{c})}{ac}, \\ G_{33} &= -\frac{c^2(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b})}{ab}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.1.6. Tensor energía-momento para la métrica de Bianchi I

Usando las expresiones (2.23)-(2.25) con las componentes del tensor métrico (4.2) obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2P \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

4.1.7. Ecuaciones de campo de Einstein para Bianchi I

Reemplazando las ecuaciones (4.9) y (4.10) en la ecuación de campo de Einstein (2.27) obtenemos cuatro ecuaciones de campo no nulas:

$$\frac{c\dot{a}\dot{b} + \dot{c}(b\dot{a} + a\dot{b})}{abc} = 8\pi G\rho, \tag{4.11}$$

$$-\frac{a^2(\dot{b}\dot{c} + c\ddot{b} + b\ddot{c})}{bc} = 8\pi G a^2 P, \tag{4.12}$$

$$-\frac{b^2(\dot{a}\dot{c} + c\ddot{a} + a\ddot{c})}{ac} = 8\pi G b^2 P, \tag{4.13}$$

$$-\frac{c^2(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b})}{ab} = 8\pi G c^2 P. \tag{4.14}$$

4.1.8. Anisotropía

El parámetro de Hubble para la métrica de Friedmann estaba definido por la ecuación (2.8), en el caso de la métrica de Bianchi I ahora tenemos 3 factores de escala que no necesariamente son iguales, por ello definimos de manera similar

$$H = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right), \tag{4.15}$$

$$3H = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}. \tag{4.16}$$

La ecuación (4.11) podemos expresarla como

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = 8\pi G\rho, \tag{4.17}$$

usando la identidad algebraica $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$ en la ecuación (4.16) obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}\right). \tag{4.18}$$

Despejando la expresión y teniendo en cuenta las ecuaciones (4.17)-(4.16)

$$2\underbrace{\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}+\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}\right)}_{8\pi G\rho}=\underbrace{\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}\right)^2}_{3H}-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2-\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2-\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2,$$

$$16\pi G\rho = 9H^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2-\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2-\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2,$$

$$6H^2 = 16\pi G\rho+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2+\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2-3H^2,$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2+\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2-3H^2\right],$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2+\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2-6H^2+3H^2\right],$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2+\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2-2H(3H)+3H^2\right],$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2+\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^2-2H\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}\right)+3H^2\right],$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}-H\right)^2+\left(\frac{\dot{b}}{b}-H\right)^2+\left(\frac{\dot{c}}{c}-H\right)^2\right],$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}-H\right)^2,$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho+\frac{3}{8\pi G}\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}-H\right)^2\right],$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho+\rho_{anis}\right),$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{total}, \tag{4.19}$$

donde

$$\rho_{anis} = \frac{3}{8\pi G}\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}-H\right)^2, \tag{4.20}$$

es la densidad de energía de la anisotropía. Para el caso $a(t)=b(t)=c(t)$ la densidad de anisotropía es nula ($\rho_{anis}=0$) y se recupera la ecuación de Friedmann con $k=0$ (2.32).

4.2. Ecuaciones dinámicas para el modelo cosmológico de Bianchi I

4.2.1. La ecuación de aceleración

Recordemos las ecuaciones de Einstein obtenidas para la métrica de Bianchi tipo I (4.11) - (4.14), las cuales pueden ser expresadas como:

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}=8\pi G\rho, \tag{4.21}$$

$$-\frac{\ddot{b}}{b}-\frac{\ddot{c}}{c}-\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}=8\pi GP, \tag{4.22}$$

$$-\frac{\ddot{c}}{c}-\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}=8\pi GP, \tag{4.23}$$

$$-\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\ddot{b}}{b}-\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}=8\pi GP. \tag{4.24}$$

Multiplicando la ecuación (4.21) por $3abc$ y las ecuaciones (4.22)-(4.23)-(4.24) por $-abc$ obtenemos [34]:

$$3\dot{a}\dot{b}c+3a\dot{b}\dot{c}+3\dot{a}b\dot{c}=3(8\pi G\rho abc), \tag{4.25}$$

$$ac\ddot{b}+ab\ddot{c}+a\dot{b}\dot{c}=-8\pi GPabc, \tag{4.26}$$

$$ab\ddot{c}+\ddot{a}bc+\dot{a}\dot{c}b=-8\pi GPabc, \tag{4.27}$$

$$bc\ddot{a}+a\ddot{b}c+\dot{a}\dot{b}c=-8\pi GPabc. \tag{4.28}$$

Al sumar las ecuaciones (4.25)-(4.26)-(4.27) y (4.28) obtenemos

$$4\dot{a}\dot{b}c+4a\dot{b}\dot{c}+4\dot{a}b\dot{c}+2\ddot{a}bc+2a\ddot{b}c+2ab\ddot{c}=3(8\pi G)(\rho-P)abc. \tag{4.29}$$

Si definimos [32] $\tau=abc$, entonces

$$\dot{\tau}=ab\dot{c}+a\dot{b}c+\dot{a}bc, \tag{4.30}$$

$$\ddot{\tau}=2\dot{a}\dot{b}c+2a\dot{b}\dot{c}+2\dot{a}b\dot{c}+\ddot{a}bc+a\ddot{b}c+ab\ddot{c}. \tag{4.31}$$

Al usar la expresión (4.31) en la ecuación (4.29) obtenemos

$$\begin{aligned}2\ddot{\tau}&=3(8\pi G)\tau(\rho-P),\\ \frac{\ddot{\tau}}{\tau}&=\frac{3\kappa}{2}(\rho-P),\end{aligned} \tag{4.32}$$

donde $\kappa=8\pi G$. Esta ecuación es una generalización de la ecuación de aceleración de Friedmann, en particular si tomamos $a(t)=b(t)=c(t)$, recuperamos la ecuación de aceleración (2.34).

4.2.2. Ecuación de densidad

La ecuación (4.32) se puede expresar como [34]

$$\frac{d\dot{\tau}}{dt} = \frac{3\kappa}{2}(\rho - P)\tau. \tag{4.33}$$

Ademas, consideremos que

$$\frac{d\dot{\tau}}{dt}d\tau = d\dot{\tau}\frac{d\tau}{dt} = d\dot{\tau}\dot{\tau}, \tag{4.34}$$

al reemplazar (4.34) en la ecuación (4.33) obtenemos

$$\dot{\tau}d\dot{\tau} = \frac{3\kappa}{2}(\rho - P)\tau d\tau. \tag{4.35}$$

La ecuación de conservación de energía para la métrica de Bianchi tipo I (1.24) puede ser expresada como

$$d\rho = -\frac{1}{\tau}\rho d\tau - \frac{1}{\tau}P d\tau. \tag{4.36}$$

Al multiplicar la ecuación (4.36) por τ^2 obtenemos

$$\tau^2 d\rho = -\tau\rho d\tau - P\tau d\tau, \tag{4.37}$$

$$P\tau d\tau = -\tau^2 d\rho - \tau\rho d\tau, \tag{4.38}$$

reemplazando (4.38) en la ecuación (4.35) obtenemos

$$\dot{\tau}d\dot{\tau} = \frac{3\kappa}{2}[2\rho\tau d\tau + \tau^2 d\rho], \tag{4.39}$$

pero

$$d(\rho\tau^2) = 2\rho\tau d\tau + \tau^2 d\rho, \tag{4.40}$$

al reemplazar (4.40) en (4.39) se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{\tau}d\dot{\tau} &= \frac{3\kappa}{2}d(\rho\tau^2), \\
\int \dot{\tau}d\dot{\tau} &= \int \frac{3\kappa}{2}d(\rho\tau^2), \\
\frac{\dot{\tau}^2}{2} &= \frac{3\kappa}{2}\rho\tau^2 + C, \\
\dot{\tau}^2 &= 3\kappa\rho\tau^2 + C.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

El termino C es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales. La ecuación (4.41) representa la ecuación de densidad de forma generalizada. Para el caso de $a(t) = b(t) = c(t)$, recuperamos la ecuación de Friemann (2.32) con $k = 0$ y $C = 0$.

Teniendo en cuenta que $\tau = abc$ también se puede expresar a la ecuación (4.41) como

$$(\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c})^2 = 3\kappa\rho(abc)^2 + C. \tag{4.42}$$

Esta ecuación es importante pues nos permitirá implementar el mecanismo de rebote cosmológico más adelante.

4.3. Ecuaciones de Bianchi I en presencia de campo escalar

En esta sección, añadiremos un campo escalar ϕ al contenido de nuestro Universo anisotrópico.

4.3.1. Ecuación de movimiento del campo escalar

En el capítulo 3 obtuvimos una expresión para la ecuación de movimiento del campo escalar para un espacio-tiempo curvo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \tag{4.43}$$

El tensor métrico para Bianchi tipo I es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

y la inversa $g^{\mu\nu}$ es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Al hallar el determinante se obtiene:

$$g = -a^2b^2c^2, \tag{4.46}$$

reemplazando el determinante en la ecuación (4.43) obtenemos

$$\frac{1}{abc}\partial_\mu\left[abcg^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \tag{4.47}$$

Asumiremos que el campo escalar es homogéneo, el valor que toma solo cambia con el tiempo mientras que se mantiene constante en todo el espacio, matemáticamente esto

implica que:

$$\partial_x\phi = \partial_y\phi = \partial_z\phi = 0. \tag{4.48}$$

De esta forma (4.47) es:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{abc}\partial_\mu\left[abcg^{\mu 0}\partial_0\phi\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0,\\
\frac{1}{abc}\partial_0\left[abcg^{00}\partial_0\phi\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0,\\
\frac{1}{abc}\partial_0\left[abc\partial_0\phi\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0,\\
\frac{1}{abc}\left[\partial_0(abc)\partial_0\phi + abc\partial_0(\partial_0\phi)\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0,\\
\frac{1}{abc}\left[\left(\partial_0 a(bc) + a\partial_0(bc)\right)\partial_0\phi + abc\ddot{\phi}\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0,\\
\frac{1}{abc}\left[\left(\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c}\right)\dot{\phi} + abc\ddot{\phi}\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0,\\
\left(\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c}\right)\dot{\phi} + abc\ddot{\phi} + abc\frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0,\\
\ddot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\dot{b}}{b}\dot{\phi} + \frac{\dot{c}}{c}\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} &= 0.
\end{aligned}$$

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = 0. \tag{4.49}$$

Si definimos A como

$$A = (abc)^{1/3}, \tag{4.50}$$

derivando A obtenemos:

$$\dot{A} = \frac{1}{3}(abc)^{-2/3}(\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c}). \tag{4.51}$$

Dividiendo por A :

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{1}{3}\frac{(\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c})}{(abc)^{2/3}(abc)^{1/3}} = \frac{1}{3}\frac{(\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c})}{abc}, \tag{4.52}$$

pero la ecuación (4.52) resulta ser igual a la ecuación (4.15) y por ello

$$H = \frac{\dot{A}}{A}. \tag{4.53}$$

Reemplazando la expresión (4.16) en (4.49) obtenemos la ecuación de movimiento del

inflatón en el fondo de Bianchi I:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \tag{4.54}$$

4.3.2. Tensor de energía-momento

En el capítulo 3 obtuvimos una expresión para el tensor energía-momento:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{\phi}^2 + g_{\mu\nu} V(\phi). \tag{4.55}$$

Dado que la métrica de Bianchi I es simétrica, las únicas componentes no nulas son las componentes de la diagonal.
La componente T_{00} en el fondo de Bianchi I es

$$\begin{aligned} T_{00} &= \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{00} \dot{\phi}^2 + g_{00} V(\phi), \\ T_{00} &= \dot{\phi}^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \\ T_{00} &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi). \end{aligned} \tag{4.56}$$

La componente T_{11} es

$$\begin{aligned} T_{11} &= \cancelto{0}{\partial_1 \phi \partial_1 \phi} - \frac{1}{2} g_{11} \dot{\phi}^2 + g_{11} V(\phi), \\ T_{11} &= -\frac{1}{2}(-a^2)\dot{\phi}^2 - a^2 V(\phi), \\ T_{11} &= a^2 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right). \end{aligned} \tag{4.57}$$

La componente T_{22} es

$$\begin{aligned} T_{22} &= \cancelto{0}{\partial_2 \phi \partial_2 \phi} - \frac{1}{2} g_{22} \dot{\phi}^2 + g_{22} V(\phi), \\ T_{22} &= -\frac{1}{2}(-b^2)\dot{\phi}^2 - b^2 V(\phi), \\ T_{22} &= b^2 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right). \end{aligned} \tag{4.58}$$

La componente T_{33} es

$$\begin{aligned} T_{33} &= \cancel{\partial_3\phi\partial_3\phi}^{0} - \frac{1}{2}g_{33}\dot{\phi}^2 + g_{33}V(\phi), \\ T_{33} &= -\frac{1}{2}(-c^2)\dot{\phi}^2 - c^2V(\phi), \\ T_{33} &= c^2\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)\right). \end{aligned} \tag{4.59}$$

4.3.3. Ecuaciones de Bianchi I

Utilizando (4.9) y las ecuaciones (4.56)-(4.59)en la ecuacion (1.18) obtenemos las componentes no nulas de las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica de Bianchi I y en presencia del inflatón.
La componente T_{00} es

$$\begin{aligned} G_{00} &= 8\pi G T_{00}, \\ \frac{c\dot{a}\dot{b} + (b\dot{a} + a\dot{b})\dot{c}}{abc} &= 8\pi G\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right). \end{aligned}$$

La componente T_{11} es

$$\begin{aligned} G_{11} &= 8\pi G T_{11}, \\ -\frac{\cancel{a^2}(\dot{b}\dot{c} + c\ddot{b} + b\ddot{c})}{bc} &= 8\pi G\cancel{a^2}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right). \\ -\frac{(\dot{b}\dot{c} + c\ddot{b} + b\ddot{c})}{bc} &= 8\pi G\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)\right). \end{aligned}$$

La componente T_{22} es

$$\begin{aligned} G_{22} &= 8\pi G T_{22}, \\ -\frac{\cancel{b^2}(\dot{a}\dot{c} + c\ddot{a} + a\ddot{c})}{ac} &= 8\pi G\cancel{b^2}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right), \\ -\frac{(\dot{a}\dot{c} + c\ddot{a} + a\ddot{c})}{ac} &= 8\pi G\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)\right). \end{aligned}$$

La componente T_{33} es

$$\begin{aligned} G_{33} &= 8\pi G T_{33}, \\ -\frac{\cancel{c^2}(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b})}{ab} &= 8\pi G \cancel{c^2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right), \\ -\frac{(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b})}{ab} &= 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de campo en presencia del campo escalar son:

$$\frac{c\dot{a}\dot{b} + (b\dot{a} + a\dot{b})\dot{c}}{abc} = 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) \tag{4.60}$$

$$-\frac{(\dot{b}\dot{c} + c\ddot{b} + b\ddot{c})}{bc} = 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right) \tag{4.61}$$

$$-\frac{(\dot{a}\dot{c} + c\ddot{a} + a\ddot{c})}{ac} = 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right) \tag{4.62}$$

$$-\frac{(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b})}{ab} = 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right) \tag{4.63}$$

Al comparar estas ecuaciones con las ecuaciones (4.11)-(4.14) vemos que el campo escalar tiene el comportamiento de un fluido ideal con densidad de energía

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{4.64}$$

y presión

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \tag{4.65}$$

La densidad ρ y presión p están relacionadas con la energía potencial y cinética

$$\rho = T + U \tag{4.66}$$

$$p = T - U, \tag{4.67}$$

la energía cinética se representa por T y la potencial por U, ambas están dadas por

$$T = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \tag{4.68}$$

$$U = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{4.69}$$

Capítulo 5

Big Bounce en presencia de un campo escalar

Un Universo con big bounce se caracteriza por tener una etapa sucesiva de contracción y expansión, durante la contracción el Universo disminuye su volúmen hasta tener un radio mínimo, para luego producir un rebote o *Big Bounce* que detiene la contracción del Universo y lo obliga a expandirse.

5.1. Etapas del Big Bounce

Tendremos las siguientes etapas:

- **Contracción del Universo**
  El volúmen del Universo disminuye ($\dot{a} < 0$), haciendo que $H < 0$ con lo que el termino $3H\dot{\phi}$ en (3.15) también es negativo y actuará como un agente que incrementará la amplitud del campo escalar.

- **Bounce o rebote**
  El Universo se detiene, en este instante $\dot{a} = 0$, haciendo que $H = 0$.

- **Expansión del Universo**
  Posterior al Bounce, el Universo empieza a incrementar su volumen ($\dot{a} > 0$) por lo que ahora $H > 0$ haciendo que el termino $3H\dot{\phi}$ en (3.15) se comporte como un termino que amortigua, reduciendo la amplitud del campo escalar.

5.1.1. Implementación del Bounce

Para simular el rebote cosmológico realizaremos la siguiente modificación a la ecuación de Friedmann (2.32) [35] sin curvatura ($k = 0$) y unidades naturales ($c = 1, G = 1$)

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right), \tag{5.1}$$

donde $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} \approx 2.435 \times 10^{18} GeV/c^2$ es la masa reducida de Planck y la constante σ representa la *escala energética del rebote*, estas modificaciones son motivadas por las teorías de gravedad cuántica o la teoría de branas [36]. A medida que el Universo se contrae, la densidad ρ se aproxima a σ, en algún momento se cumplirá que $\rho = \sigma$ por lo que en la ecuación (5.1) se tendrá que $H = 0$ que implica $\dot{a} = 0$ y se produce el rebote cosmológico o *Bounce*. Posterior al Bounce, el Universo empieza a expandirse y ρ disminuye a medida que el Universo se expande.

5.2. Simulación numérica del Bounce

Las ecuaciones que utilizaremos para simular el periodo inflacionario posterior a un rebote cosmológico o Bounce son la ecuación de campo escalar (3.33) y la ecuación de Friedmann modificada (5.1) las cuales pueden reescribirse como

$$a\ddot{a} + 3\dot{a}\dot{\phi} + am^2\phi = 0 \tag{5.2}$$

$$\dot{a} = \pm\sqrt{\frac{\rho}{3m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)}a. \tag{5.3}$$

Para simular como evoluciona el Universo en presencia del inflatón, será necesario establecer las condiciones iniciales para resolver las ecuaciones diferenciales mencionadas anteriormente. Para ello, vamos a asumir que en un instante $t = t_0$, el Universo está contrayéndose, es decir $\dot{a} < 0$ y el factor de escala en este instante toma el valor de $a_0 = 1$, por otro lado, en este mismo instante inicial, el inflatón está en el fondo de su potencial, por lo que $\phi = 0$, además la energía cinética del inflatón es muy pequeña en comparación con la masa de Planck ($\dot{\phi} \ll m_p^2$), esto implica, que la densidad de energía inicial será mucho menor a la escala energética a la cual se produce el rebote.

5.2.1. Condiciones iniciales

Asumiremos que el Universo esta en una etapa de contracción con $\dot{a} < 0$, las condiciones iniciales en $t = 0$ serán

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ \phi_0 &= 0, \\ \dot{\phi}_0 &= 1 \times 10^{-4} m_p^2 \ll m_p^2, \\ m &= 1 \times 10^{-6} m_p, \\ \sigma &= 3.06 \times 10^{-2} m_p^4. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Al resolver las ecuaciones diferenciales (5.2 y (5.3)) con estas condiciones iniciales se obtiene que

$$\dot{a}_0 = -0.0000408248, \tag{5.5}$$

esta condición será necesaria más adelante para poder realizar a simulación para la métrica de Bianchi I en el caso isotrópico. Con estas condiciones iniciales podemos comparar la densidad inicial del Universo ρ_0 y la escala energética del rebote σ, teniendo en cuenta que

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\dot{\phi_0}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2. \tag{5.6}$$

Al reemplazar por los valores fijados para las condiciones iniciales obtenemos que

$$\rho_0 = 5 \times 10^{-9}, \tag{5.7}$$

por lo que se cumple

$$\rho_0 \ll \sigma. \tag{5.8}$$

En todas las gráficas el eje horizontal representará el tiempo medido en unidades del tiempo de rebote o bounce t_b. El tiempo de rebote representa el tiempo que le toma al Universo en contraerse y que la densidad total de energía es igual a la escala energética del rebote ($\rho = \sigma$), momento en el cual el Universo deja de contraerse e invierte su dinámica para entrar a una etapa de expansión. Mientras que el Universo se contrae, la densidad de energía del Universo aumentará hasta que en cierto momento será igual a la escala energética del rebote ($\rho = \sigma$), momento en el cual se dará el Bounce o rebote cosmológico.

5.3. Periodo cinético

Durante este periodo el Universo empieza a contraerse debido a la presencia del campo escalar o inflatón y a medida que se contrae el Universo, el campo escalar crece (5.1). Además, dadas las condiciones iniciales, la densidad de energía total es mucho menor comparado con la escala energética del rebote, por lo que la dinámica del Universo durante este periodo es aproximadamente igual a la cosmología usual de Friedmann

$$\begin{aligned} H^2 =& \frac{\rho}{3m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right), \\ H^2 \approx& \frac{\rho}{3m_p^2}. \end{aligned}$$

Las densidades de energía crecen de forma monótona teniendo mayor dominancia la energía cinética como se observa en la grafica (5.2a), durante el periodo cinético la densidad total de energía esta muy alejada de la escala energética del rebote (5.2b).

$$\rho \ll \sigma, \tag{5.9}$$

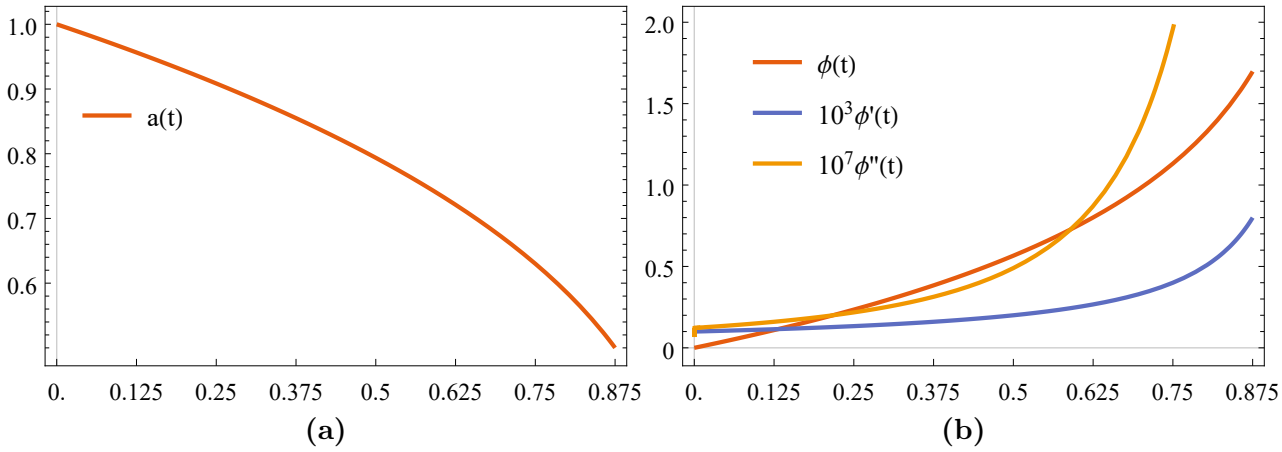


Figura 5.1: (a) Evolución temporal del factor de escala a medida que el Universo se contrae. (b) Evolución temporal del inflatón durante el periodo cinético. Se ha multiplicado la velocidad del campo por 10^3, mientras que la aceleración por 10^7.

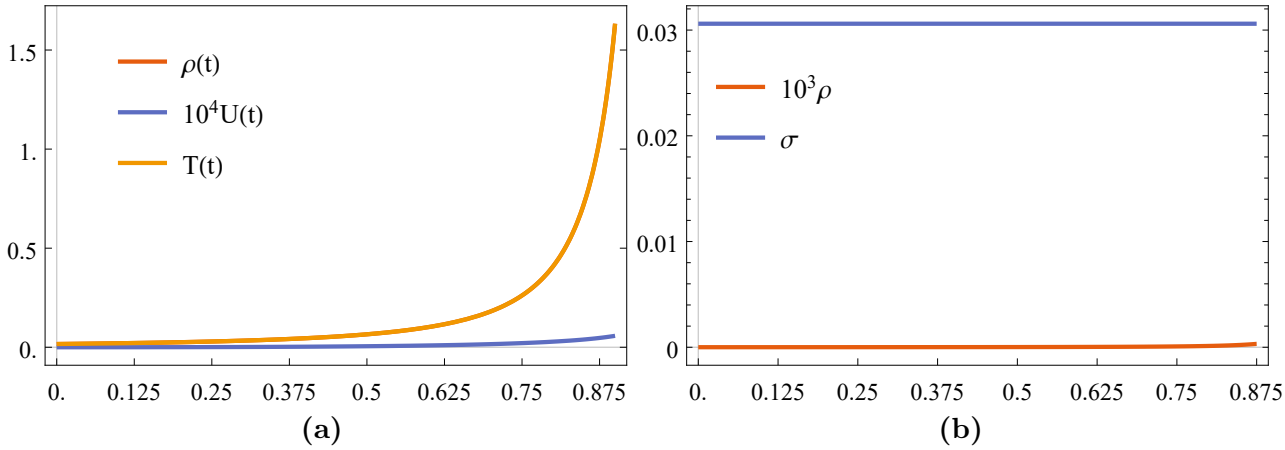


Figura 5.2: (a) Evolución temporal de las energías cinética, potencial y total. Podemos notar que durante el periodo cinético, la energía cinética domina sobre la potencial. (b) Durante el periodo cinético la densidad total de energía es mucho menor a la escala energética del rebote. El eje horizontal esta parametrizado en función del tiempo de rebote t_b.

5.4. Periodo previo al Bounce

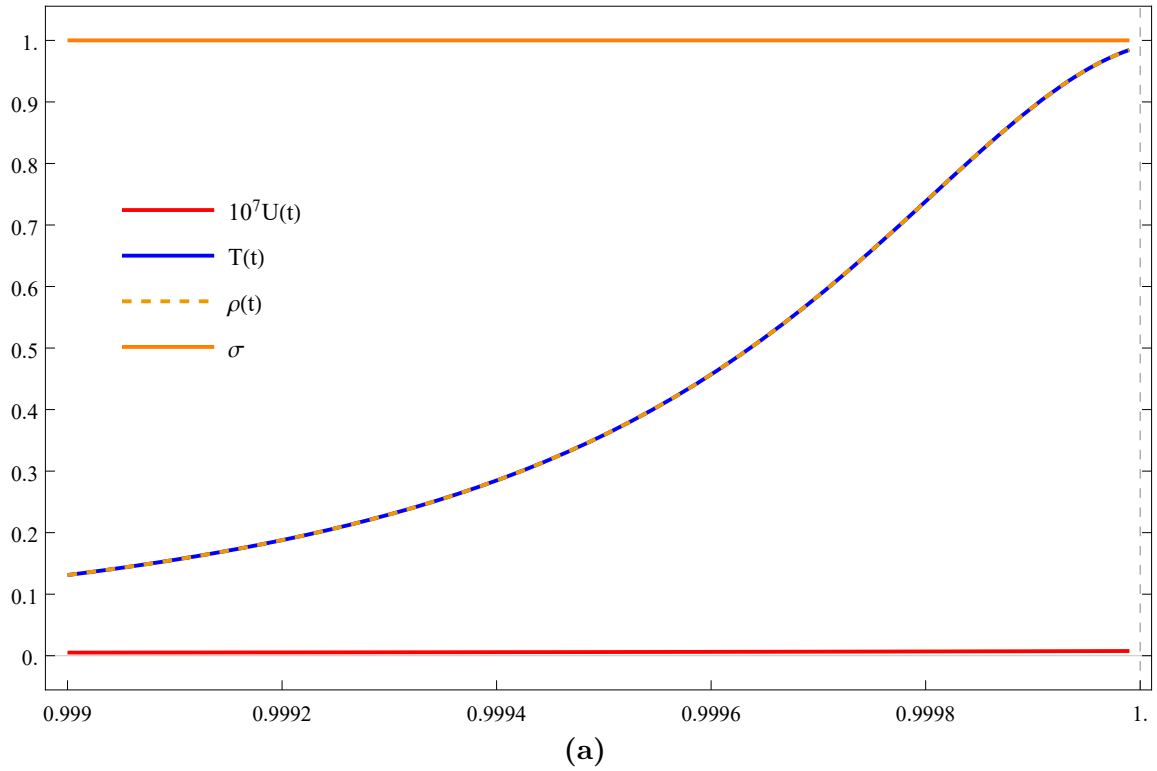
Durante este periodo la energía potencial del campo, es mucho menor a la densidad de energía total ($U \ll \rho$) como se observa en la gráfica 5.3, mientras que la densidad de energía del campo aumenta debido a que el Universo se contrae, eventualmente se cumple

$$\rho \sim \sigma.$$

El periodo cinético llegará a su fin y el termino $\frac{\rho}{\sigma}$ ya no puede ser despreciado dando

inicio así al periodo previo al Bounce, por lo que tenemos

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right). \tag{5.10}$$



(a)

Figura 5.3: (a) La energía potencial es mucho menor que la densidad total de energía. Mientras el Universo se contrae, la densidad total de energía aumenta y se aproxima más al valor de la escala energética del rebote σ.

En la figura 5.3 se observa la evolución temporal de las energías a medida que nos acercamos al instante del rebote. En la figura 5.4 se detalla la evolución del campo escalar, su velocidad y aceleración previo al bounce.

5.5. Periodo inflacionario

Durante la contracción del Universo ($\dot{a} < 0$), el factor de escala decrece hasta tomar un valor mínimo en el instante del rebote, posterior a este instante el Universo entra a un periodo de expansión en el cual su tamaño crece ($\dot{a} > 0$). La dinámica del Universo en los instantes previos y posterior al rebote son diferentes debido a la presencia del campo escalar o inflatón. Antes del instante del rebote se cumple que $H < 0$, por lo que el termino $3H\dot{\phi}$ en la ecuación de campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi^2 = 0, \tag{5.11}$$

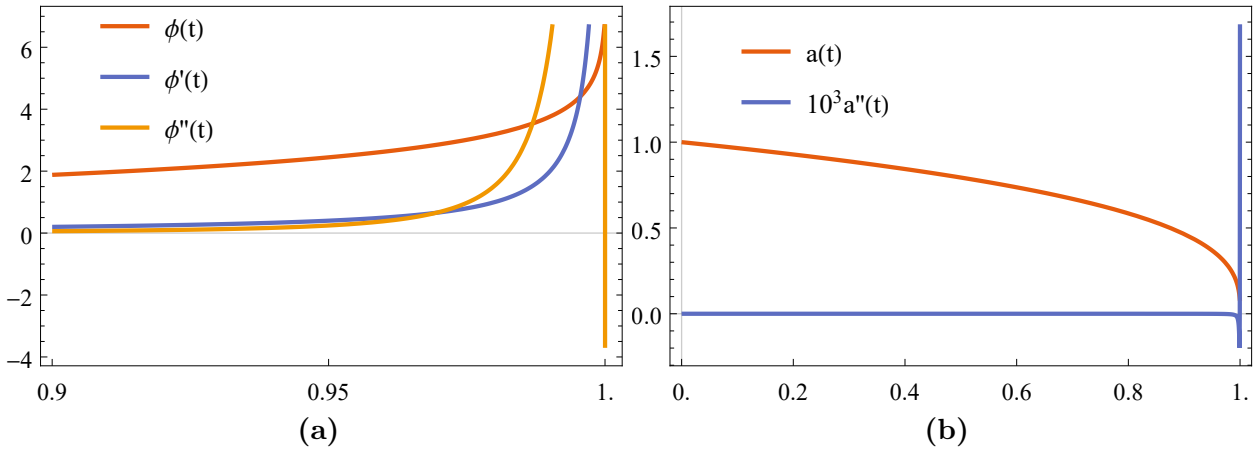


Figura 5.4: (a)Evolución temporal del campo escalar y sus derivadas durante el periodo previo al rebote. El campo escalar y su velocidad crecen monótonamente mientras que la aceleración disminuye bruscamente. La velocidad del campo ha sido multiplicada por 2×10^2 y la aceleración por 5×10^4 (b) El factor de escala tomará un valor mínimo y en ese instante su aceleración se incrementa abruptamente dando paso a un periodo de expansión acelerada.

incrementa la energía del campo escalar, por este motivo durante la etapa de contracción del Universo la densidad de energía total aumentaba y la energía cinética era mucho mayor a la energía potencial ($U \ll T$) y a su vez, la que aporta la mayor contribución a la densidad total de energía.

5.5.1. Inicio del periodo inflacionario

Posterior al instante del rebote, la dinámica del Universo cambia y este empieza a expandirse ($\dot{a} > 0$), por lo que $H > 0$ y este actuará como un término de amortiguamiento en la ecuación (5.11) por lo que la velocidad del campo escalar disminuira progresivamente. Además, como la energía cinética depende del cuadrado de la velocidad del campo ($T = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$), esta también empezará a disminuir desde el valor máximo que había alcanzado en el instante del rebote, hasta tomar un mínimo valor $T_i \approx 0$, en un tiempo t_i en el cual se cumpla que $\dot{\phi} \approx 0$.

Mientras la energía cinética disminuye, la energía potencial $U = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ del campo escalar crece. En el instante t_i en el que la energía cinética llegue a su mínimo ($\dot{\phi} = 0$), la energía potencial llegará a su máximo valor U_i y posterior a ello comenzará a decrecer, es decir en este instante se cumplirá que

$$U_i \gg T_i. \tag{5.12}$$

Tomando en consideración (5.12), la densidad de energía en el instante t_i puede expresarse como

$$\rho = T + U \approx U, \tag{5.13}$$

y la presión

$$p = T - U \approx -U. \tag{5.14}$$

Si analizamos la ecuación de estado definida en (2.41) tomando en cuenta (5.13) y (5.14) en el instante t_i tenemos que

$$\frac{p}{\rho} \approx \frac{-U}{U} \approx -1 < -\frac{1}{3} \tag{5.15}$$

Que es la condición necesaria para un periodo de expansión acelerada del Universo analizada en la ecuación (2.42). Es decir, la presencia del campo escalar inflatón induce un periodo de expansión acelerada después de un Big Bounce, el inicio de este periodo inflacionario inicia en el instante $t = t_i$ en el cual se cumple la condición (5.12).

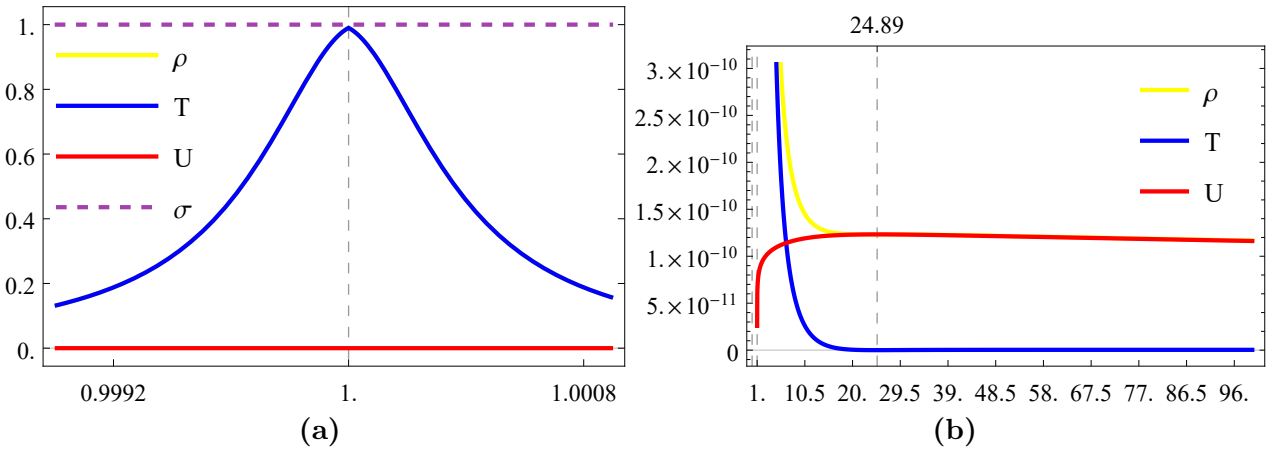


Figura 5.5: (a) Evolución temporal de las energías en el instante del rebote, la energía cinética toma su máximo valor en el instante del rebote t_b, para luego disminuir progresivamente hasta que eventualmente en el tiempo t_i se tendrá que $T_i \approx 0$. (b) Evolución temporal de las energías posterior al rebote. Cuando la energía cinética llegue a su mínimo valor, la energía potencial del campo escalar tomará su máximo valor en el instante t_i, en este instante se cumple la condición $U_i \gg T_i$ por lo que el Universo se expande aceleradamente. El tiempo t_i representa el tiempo en cual el periodo inflacionario empieza.

5.5.2. Fin del periodo inflacionario

El instante de tiempo t_i marca el inicio del periodo inflacionario, en este instante, la energía cinética toma su mínimo valor mientras que la energía potencial alcanza su máximo valor, posterior a este instante la energía potencial empieza a disminuir progresivamente debido a la expansión del Universo. Eventualmente en un tiempo t_f se cumplirá que

$$U_f \approx T_f, \tag{5.16}$$

por lo que la ecuación (5.15) deja de ser válida y en este instante t_f el Universo deja de expandirse aceleradamente ($\ddot{a} = 0$). La duración de este periodo inflacionario Δt es

$$\Delta t = t_f - t_i. \tag{5.17}$$

Los valores de los instantes inicial y final del periodo inflacionario obtenidos numéricamente son

$$t_i = 24.8941 t_b \tag{5.18}$$
$$t_f = 2267.53 t_b, \tag{5.19}$$

tomando en cuenta estos datos, el periodo inflacionario tuvo una duración de

$$\Delta t = t_f - t_i = 2242.64 t_b. \tag{5.20}$$

Los factores de escala al inicio y final del periodo inflacionario son

$$a_i = a(t_i) = 5.04389 \tag{5.21}$$
$$a_f = a(t_f) = 7.11508 \times 10^{27}. \tag{5.22}$$

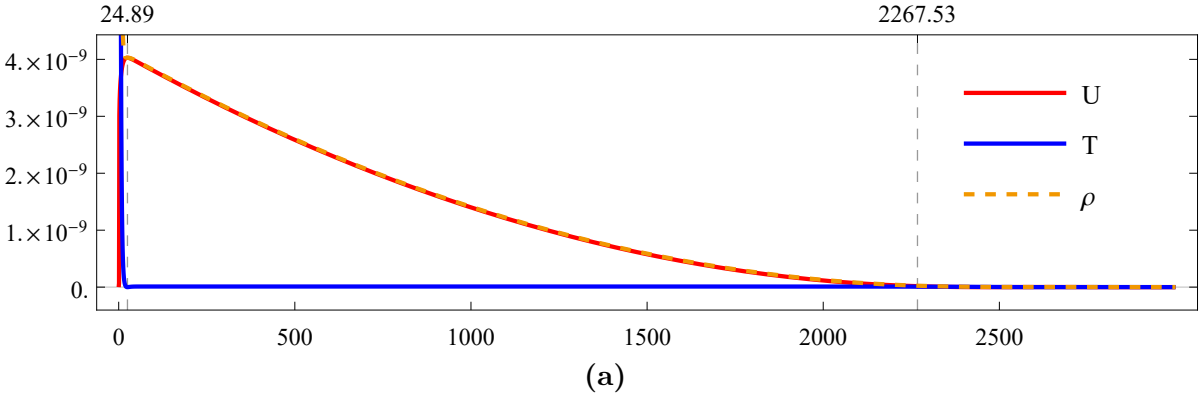
El Universo aumento su tamaño en un factor de

$$\frac{a_f}{a_i} = 1.41063 \times 10^{27}. \tag{5.23}$$

El número de e-folds definido en (3.35) será

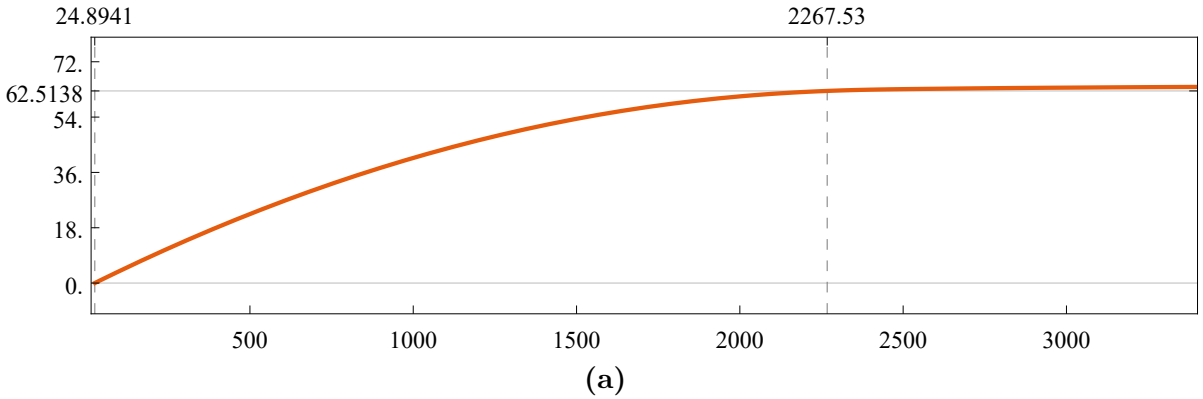
$$N = ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) = 62.5138, \tag{5.24}$$

según observaciones cosmológicas, para solucionar los problemas presentes en el modelo estándar de la cosmología, este periodo inflacionario debió tener una duración de $t \sim 10^{-35}$ y su número de e-folds con $N \geq 60$ [23]. Por lo que las condiciones iniciales elegidas fueron adecuadas para simular un periodo inflacionario en la etapa temprana del Universo.



(a)

Figura 5.6: (a) Evolución temporal de las energía potencial, cinética y total durante el periodo inflacionario. Durante este periodo , la energía potencial domina sobre la energía cinética ($U \gg T$) lo que ocasiona este periodo de expansión acelerada.



(a)

Figura 5.7: (a) Evolución temporal del número de e-folds. Para las condiciones iniciales dadas se obtuvo $N = 62.5138 > 60$. Al terminar el periodo inflacionario, el Universo continua expandiéndose a una tasa menor.

Capítulo 6

Big Bounce en Universo anisotrópico

En el capítulo anterior estudiamos la dinámica del Big Bounce en un Universo homogéneo e isótropico. Observamos que la presencia de un campo escalar o inflatón, genera un periodo inflacionario de manera natural después de un Big Bounce. En este capítulo se analizará si es posible producir un periodo inflacionario en un Universo que es homogéneo pero no isotrópico, el cual ahora estará descrito por la métrica de Bianchi tipo I.

6.1. Ecuaciones que describen la dinámica en Bianchi I

Para poder simular numéricamente el Big Bounce en un Universo anisotrópico debemos tener en cuenta que en la métrica de Bianchi I los factores de escala $a(t), b(t)$ y $c(t)$ son diferentes y junto al campo escalar $\phi(t)$ tenemos en total cuatro variables, por lo que necesitamos también cuatro ecuaciones diferenciales independientes para poder resolver nuestro sistema. Este sistema de ecuaciones diferenciales tiene que también permitir implementar el rebote cosmológico de la misma forma en que se implemento en la sección anterior. La primera ecuación diferencial será la ecuación de movimiento del inflatón para Bianchi I (4.47) que ha sido escrita de manera diferente para efectos del calculo numérico. Para simular el rebote necesitamos una ecuación análoga a la utilizada en (5.1), para ello se realiza una modificación a la ecuación (4.42). Para las dos ecuaciones diferenciales restantes debemos tener en cuenta que, al realizar la modificación para implementar el rebote en la ecuación (4.42), no sabemos como afecta ello a las ecuaciones (4.12)-(4.14), pero se puede prescindir de ello eliminando a la presión P combinandola con adecuadamente con las ecuaciones restantes, para dicho fin podemos realizar la resta entre la ecuación (4.26) y (4.27), y también la ecuación (4.26) con (4.28). Las ecuaciones

a utilizar serán:

$$abc\ddot{\phi} + (\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c})\dot{\phi} + abc\frac{\partial U}{\partial \phi} = 0, \tag{6.1}$$

$$\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} = \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)}abc, \tag{6.2}$$

$$-\dot{a}\dot{c}b - \ddot{a}bc + a\dot{b}\dot{c} + ac\ddot{b} = 0, \tag{6.3}$$

$$-a\dot{b}\dot{c} - ab\ddot{c} + \dot{a}\dot{b}c + bc\ddot{a} = 0. \tag{6.4}$$

Podemos notar la presencia de derivadas de segundo orden de los factores de escala, por lo que a diferencia de nuestra solución en la métrica de Friedmann, ahora también se tendrá que considerar condiciones iniciales para $\dot{a}(t_0), \dot{b}(t_0)$ y $\dot{c}(t_0)$. Estas condiciones iniciales no pueden ser aleatorias, sino que estarán restringidas. Para ello, podemos reescribir la ecuación (4.21) en la forma

$$\dot{a}\dot{b}c + a\dot{b}\dot{c} + \dot{a}b\dot{c} = 8\pi G\rho(abc), \tag{6.5}$$

esta ecuación debe ser modificada para implementar el rebote cosmológico, de la misma manera que se hizo con la ecuación de Friedmann

$$\dot{a}\dot{b}c + a\dot{b}\dot{c} + \dot{a}b\dot{c} = \frac{8\pi G\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)(abc). \tag{6.6}$$

6.2. Validación del modelo

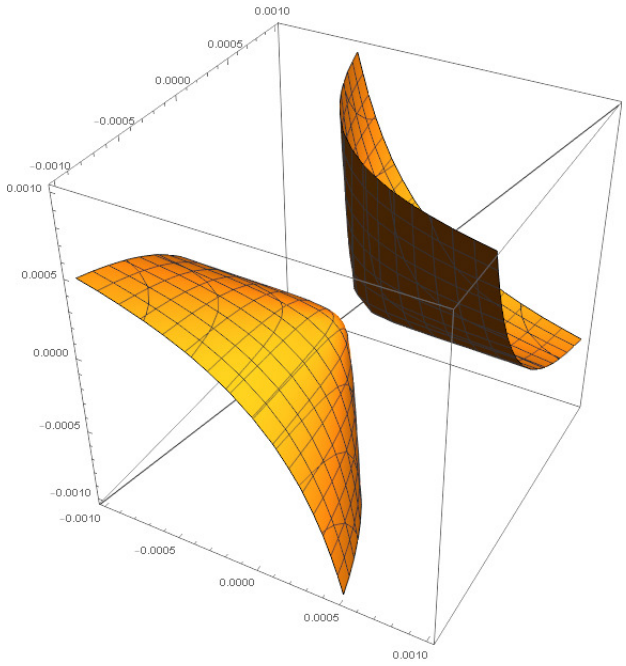
Debido a la mayor complejidad de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales para la métrica de Bianchi, debemos realizar una validación de nuestro simulación numérica para así tener fiabilidad de los resultados obtenidos. Para ello, tomaremos las condiciones iniciales que se tomaron para la solución de Friedmann analizada en (5.4), es de esperar que al usar las mismas condiciones iniciales se debe obtener resultados similares o muy cercanos a estos valores (con pequeñas variaciones debido la complejidad del sistema de ecuaciones y al método numérico elegido para resolverlo).

6.2.1. Condiciones iniciales

Para obtener nuevamente los resultados obtenidos con la métrica de Friedmann, debemos considerar que $a(t_0) = b(t_0) = c(t_0)$ por lo que también se ha de cumplir que $\dot{a}(t_0) = \dot{b}(t_0) = \dot{c}(t_0)$, además se ha de tener en cuenta que los valores iniciales para las primeras derivadas de los factores de escala estarán restringidas por la ecuación (6.6). Las condiciones iniciales serán las mismas que se usaron en (5.4) además de (5.5)

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
b_0 &= 1, \\
c_0 &= 1, \\
\dot{a}_0 &= -0.0000408248, \\
\dot{b}_0 &= -0.0000408248, \\
\dot{c}_0 &= -0.0000408248, \\
\phi_0 &= 0, \\
\dot{\phi}_0 &= 1 \times 10^{-4} m_p^2 \ll m_p^2, \\
m &= 1 \times 10^{-6} m_p, \\
\sigma &= 3.06 \times 10^{-2} m_p^4.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (6.6) se obtiene una gráfica cuya superficie representa los valores de $\dot{a}(t_0), \dot{b}(t_0)$ y $\dot{c}(t_0)$ que se pueden considerar en las condiciones iniciales. Al considerar que $a(t_0) = b(t_0) = c(t_0)$ en la ecuación (6.6) y resolverla, se obtiene las condiciones iniciales de las primeras derivadas de los factores de escala y que coinciden con el valor obtenido en la sección anterior (5.5).



(a)

Figura 6.1: La superficie representa el conjunto de valores iniciales para $\dot{a}, \dot{b}$ y $\dot{c}$. Si $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c}$ obtenemos las condiciones iniciales para la métrica de Friedmann que están siendo representadas gráficamente como la intersección de la superficie y la recta.

6.3. Simulación numérica y comparación con el modelo de Friedmann

Al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales de Friedmann, se obtiene las correspondientes gráficas de la evolución temporal de los factores de escala, energías cinética y potencial observándose los mismos resultados que fueron obtenidos para la métrica de Friedmann en la sección anterior.

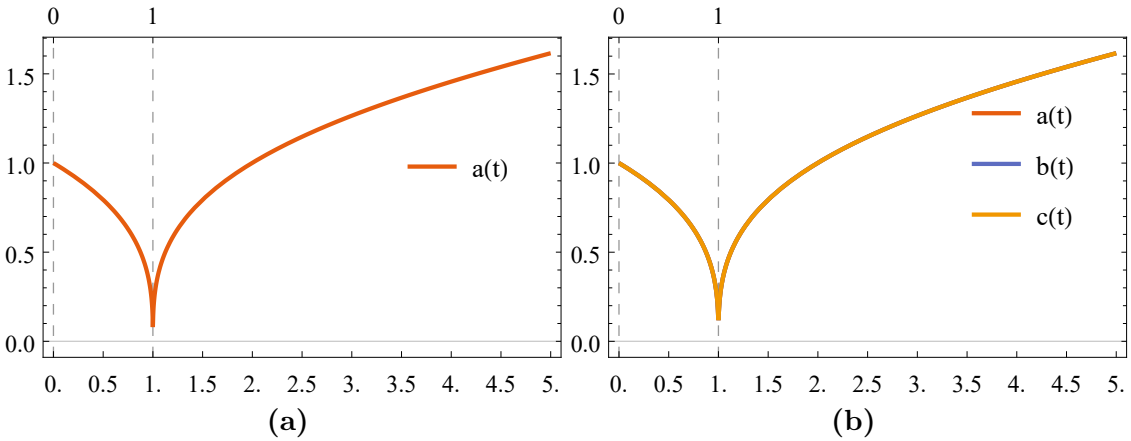


Figura 6.2: (a) Evolución temporal del factor de escala en función del tiempo para la métrica de Friedmann (b) Evolución temporal de los factores de escala $a(t), b(t)$ y $c(t)$ para la métrica de Bianchi (Considerando que $a(t) = b(t) = c(t)$)

6.3.1. Periodo inflacionario

También podemos observar las similitud en las gráficas de las energías cinética, potencial y total durante el periodo inflacionario. La figura 6.3 muestra la evolución temporal de la densidad de energía total, cinética y potencial que se obtuvo en la sección anterior

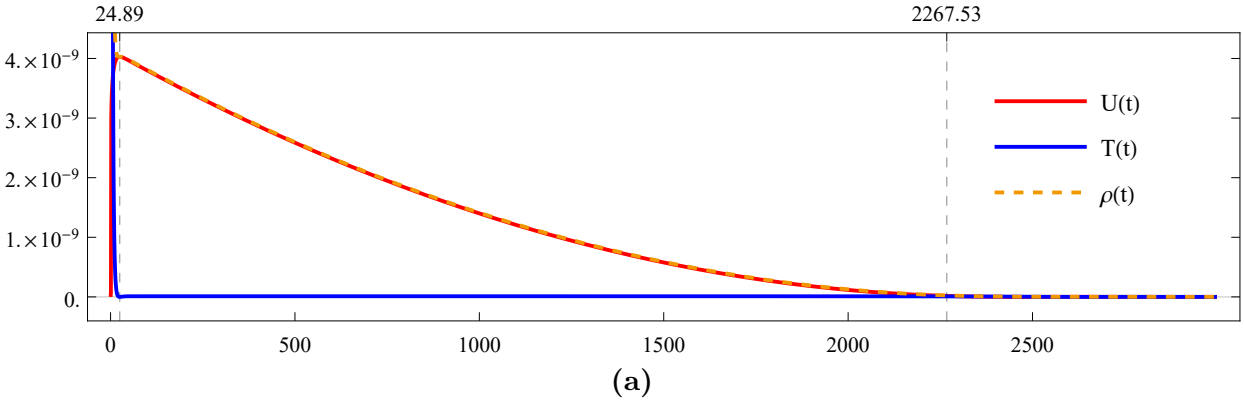
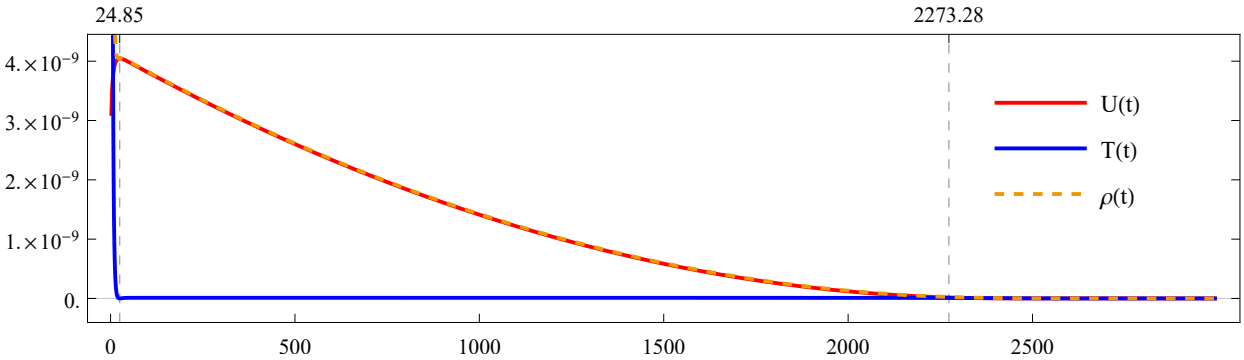


Figura 6.3: Evolución temporal de las energías, total, cinética y potencial en la métrica de Friedmann.

La figura 6.4 muestra la evolución temporal de la energía total, cinética y potencial en la métrica de Bianchi I, para obtener los mismos resultados que se obtuvieron con la métrica de Friedmann que nos permitan validar nuestro sistema de ecuaciones diferenciales debemos considerar que $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c}$. Podemos observar la gran similitud con los resultados obtenidos en la métrica de Friedmann.



(a)

Figura 6.4: Evolución temporal de las energías, total, cinética y potencial en la métrica de Bianchi I considerando homegeneidad ($\dot{a} = \dot{b} = \dot{c}$).

6.3.2. Número de e-folds

Los valores de los instantes inicial y final del periodo inflacionario obtenidos numéricamente son

$$t_i = 24.85 tb \tag{6.8}$$
$$t_f = 2273.28 tb. \tag{6.9}$$

El tiempo de duración del periodo inflacionario es

$$\Delta t = t_f - t_i = 22.48.43 tb. \tag{6.10}$$

Los factores de escala al inicio del periodo inflacionario

$$a_i = a(t_i) = 5.04601 \tag{6.11}$$
$$b_i = b(t_i) = 5.04601 \tag{6.12}$$
$$c_i = c(t_i) = 5.04601, \tag{6.13}$$

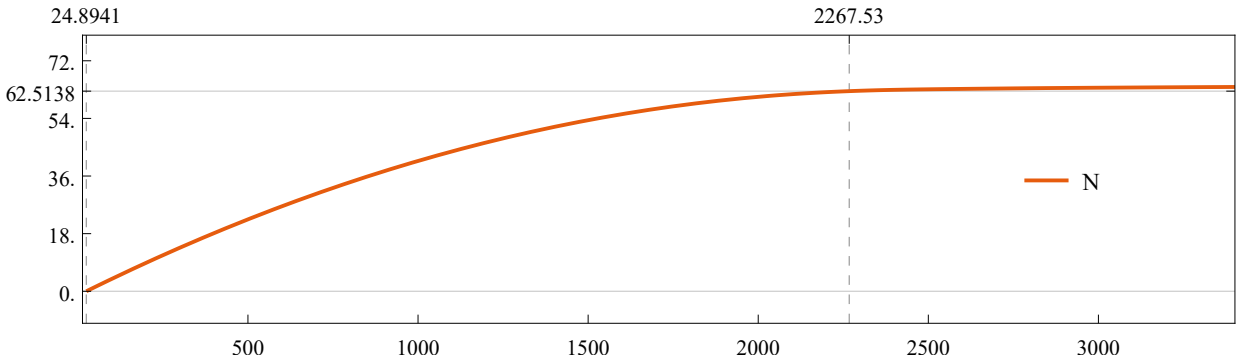
y al final de periodo inflacionario

$$a_f = a(t_f) = 9.65771 \times 10^{27} \tag{6.14}$$
$$b_f = b(t_f) = 9.65771 \times 10^{27} \tag{6.15}$$
$$c_f = c(t_f) = 9.65771 \times 10^{27}. \tag{6.16}$$

El número de e-folds será

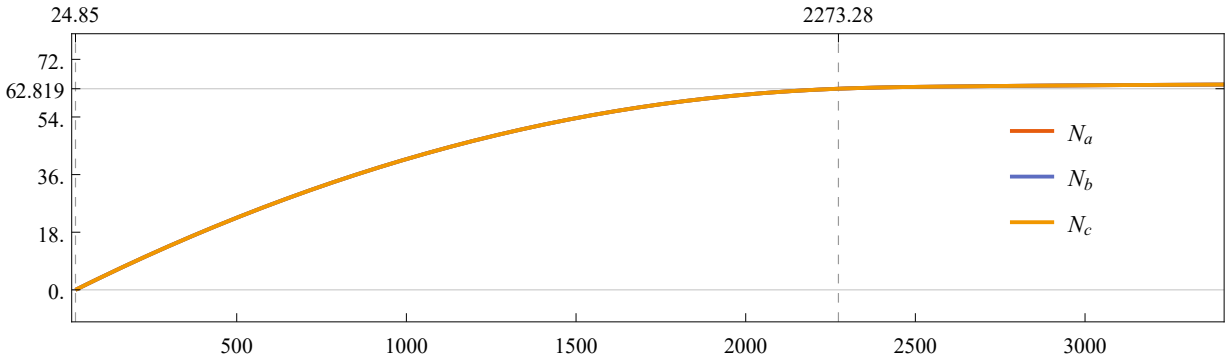
$$N = ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) = ln\left(\frac{b_f}{b_i}\right) = ln\left(\frac{c_f}{c_i}\right) = 62.819$$

La evolución temporal del número de e-folds en ambas métricas se muestran en las figuras 6.5 y 6.6



(a)

Figura 6.5: (a) Evolución temporal del número de e-folds en la métrica de Friedmann.



(a)

Figura 6.6: (a) Evolución temporal del número de e-folds en la métrica de Bianchi considerando homogeneidad.

Podemos observar la gran similitud en los resultados obtenidos entre la métrica de Friedmann y Bianchi I, las pequeñas diferencias se deben a que el sistema de ecuaciones diferenciales para la métrica de Bianchi es más complejo que las de Friedmann, por lo que la solución numérica es aproximada y no una solución exacta.

6.3.3. Anisotropía

La densidad de a anisotropía, dada por la ecuación (4.20) es del orden de 10^{-29}, es decir, su valor es muy cercano a cero como es de esperarse debido a la homogeneidad dada por $a(t) = b(t) = c(t)$.

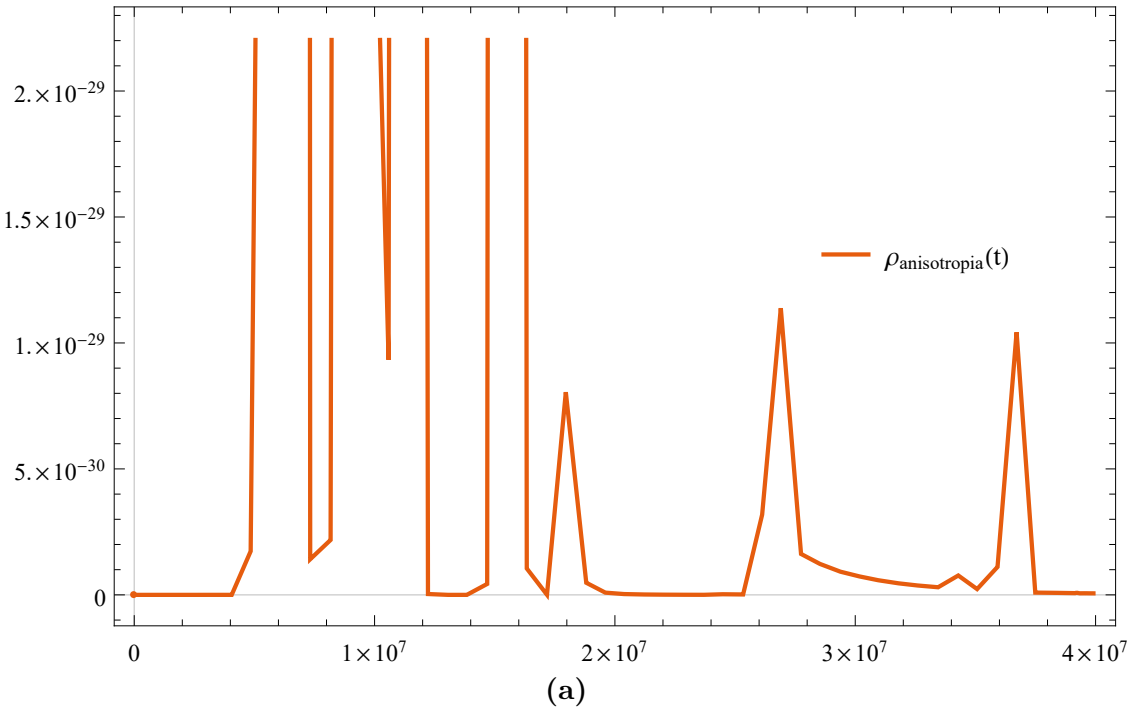


Figura 6.7: La densidad de anisotropia es del orden 10^{-29}

Podemos observar el crecimiento exponencial de los factores de escala durante el periodo inflacionario.

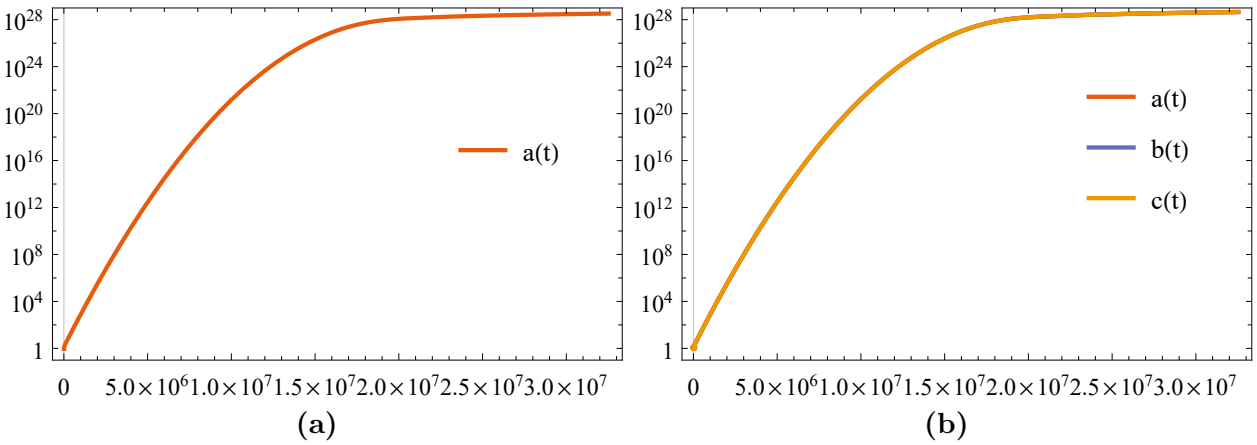
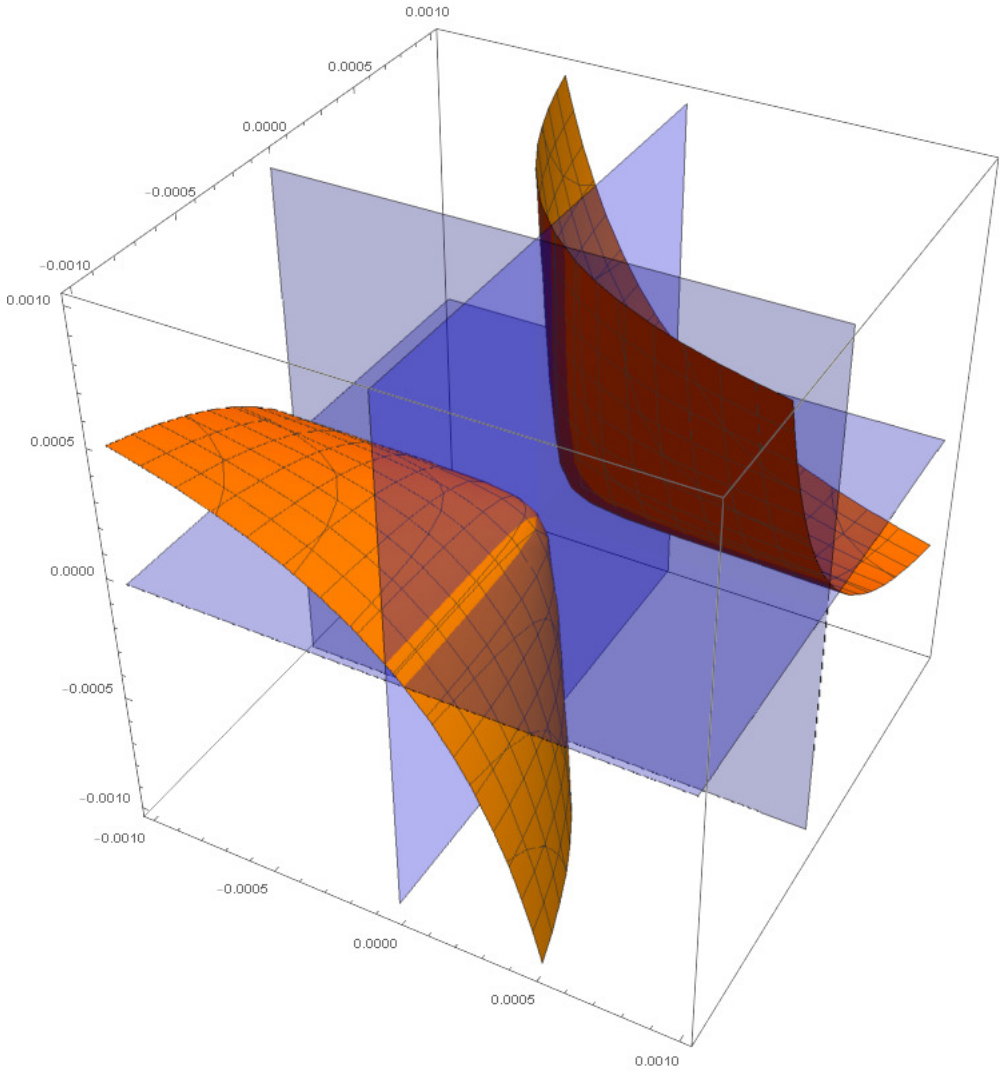


Figura 6.8: Comparación de la evolución temporal de los factores de escala. (a) En la métrica de Friedmann. (b) En la métrica de Bianchi I, se puede observar que los tres factores de escala evolucionan de la misma manera.

6.4. Inflación en universo anisotrópico

En la sección anterior comprobamos la validez de nuestra simulación numérica con la métrica de Bianchi al considerar la isotropía y obtener los mismos resultados de la métrica de Friedmann. Ahora nos planteamos analizar el caso donde no haya isotropía, para lo cual debemos considerar condiciones iniciales diferentes teniendo en cuenta que debido a la presencia de derivadas de segundo orden en nuestro sistema de ecuaciones diferenciales debemos considerar como parte de las condiciones iniciales a las derivadas de primer orden de los factores de escala que a su vez están restringidas por la ecuación (6.6) y que podemos representar gráficamente como una superficie. Las ecuaciones diferenciales que utilizaremos seran las ecuaciones (7.12) - (7.15).



(a)

Figura 6.9: (a) La superficie representa todas las posibles ternas $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ que cumplen con la ecuación (6.6) y que pueden formar parte de las condiciones iniciales. La intersección de los planos representan el valor elegido para este análisis.

6.4.1. Condiciones iniciales

Para el presente análisis se ha tomado en cuenta las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
b_0 &= 1, \\
c_0 &= 1, \\
\dot{a}_0 &= -0.000031529917915769635, \\
\dot{b}_0 &= -0.00005317663774442546, \\
\dot{c}_0 &= -0.00003923361225098041, \\
\phi_0 &= 0, \\
\dot{\phi}_0 &= 1 \times 10^{-4} m_p^2 \ll m_p^2, \\
m &= 1 \times 10^{-6} m_p, \\
\sigma &= 3.06 \times 10^{-2} m_p^4.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Al reemplazar estos valores en la densidad de energía inicial ρ_0 podemos comprobar que

$$\rho_0 \ll \sigma.$$

Nuevamente el eje horizontal de las gráficas representará el tiempo medido en unidades del tiempo de rebote t_b.

6.5. Periodo cinético

Debido a la presencia del inflatón, el Universo empieza a contraerse pero de forma anisotrópica por lo que cada factor de escala evoluciona de manera diferente. Mientras el Universo se contrae, el inflatón y sus derivadas crecen de forma monótona. En todas las gráficas, el eje temporal esta en multiplos del tiempo de rebote t_b. Por otro lado, dada las condiciones iniciales establecidas, durante este periodo la densidad de energía total es mucho menor a la escala energética del rebote σ, por lo que podemos aproximar por

$$\begin{aligned}
\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} &= \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)}abc, \\
\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} &\approx \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}}abc.
\end{aligned}$$

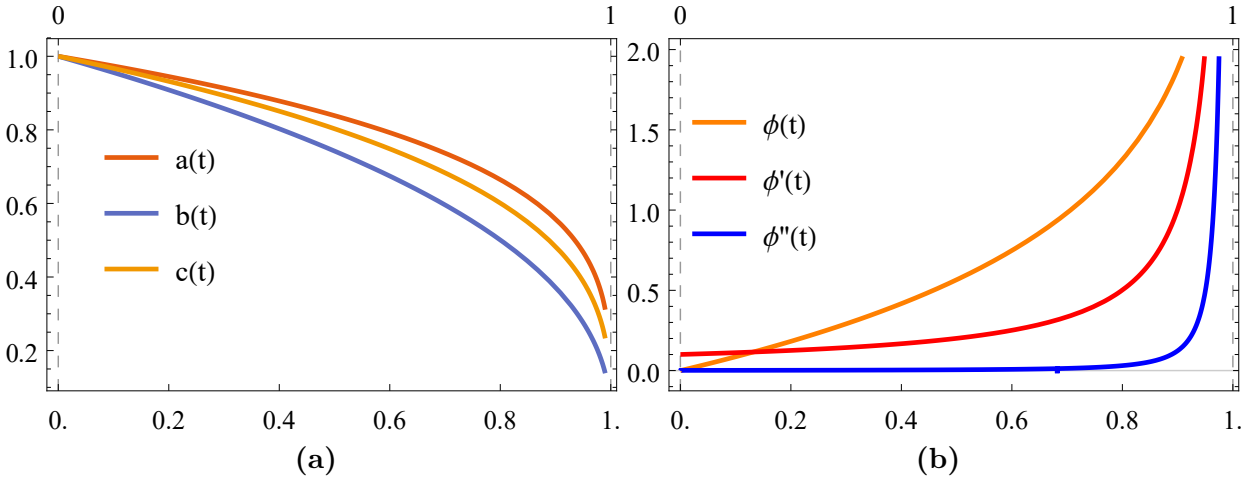


Figura 6.10: (a) Evolución temporal de los factores de escala a medida que el Universo se contrae. (b) Evolución del inflatón y sus derivadas durante el periodo cinético, todas las funciones crecen de forma monótona a medida que el Universo se contrae. La velocidad del campo se ha multiplicado por 10^3 y su aceleración por 10^5.

Las densidades de energía crecen de forma monótona, siendo la energía cinética la que más aporta a la densidad total de energía, pero durante este periodo aún la densidad total de energía se encuentra muy por debajo de la escala energética del rebote.

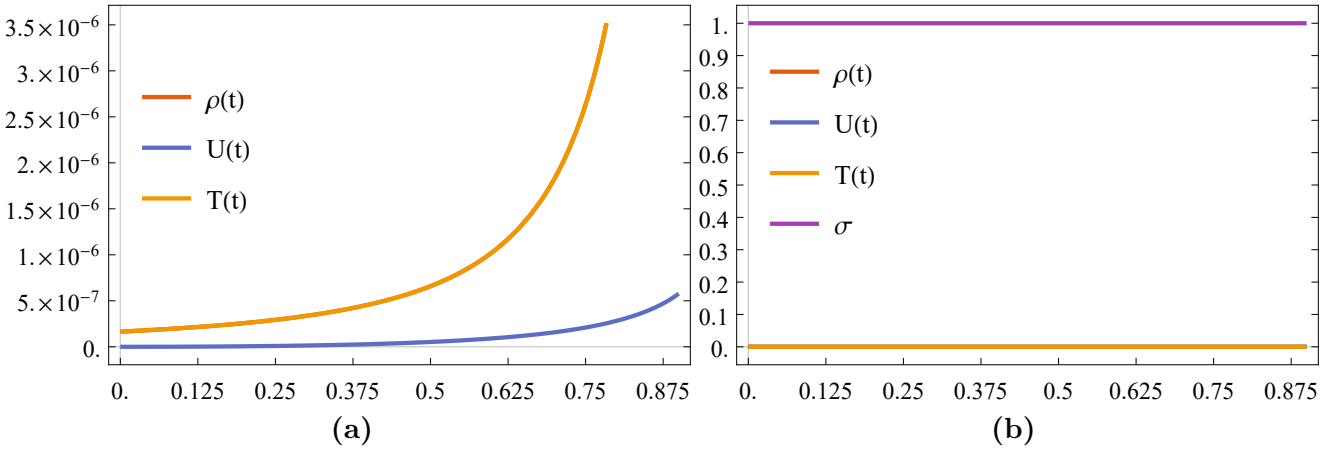


Figura 6.11: (a) Evolucion temporal de las energías durante el periodo cinético. La energía cinética domina sobre la energía potencial durante este periodo. La energía potencial ha sido multiplicada por 10^4. (b) Durante el periodo cinético la densidad total de energía es mucho menor a la escala del rebote σ.

6.6. Periodo previo al Bounce

A medida que el Universo continua contrayendose, la densidad total de energía va aumentando y en algún instante de tiempo estará muy cerca a la escala de energía en la cual se produce el rebote

$$\rho \sim \sigma.$$

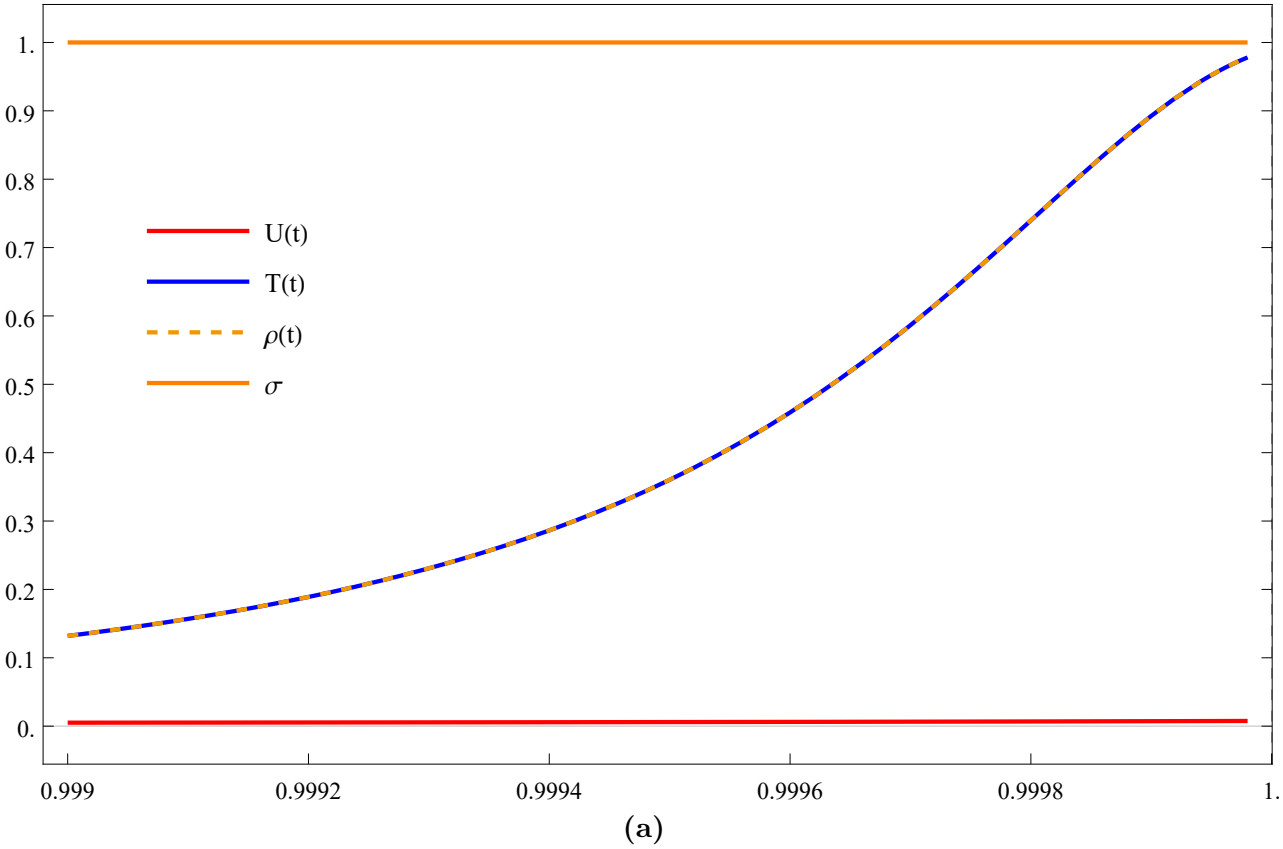


Figura 6.12: (a) Durante el periodo previo al Bounce, la energía potencial es mucho menor a la energía cinética. Mientras el Universo se contrae, la densidad total de energía se aproxima escala de energía en la que se produce el rebote. Se ha multiplicado a la energía potencial por 10^7.

A medida que el Universo se acerca al instante del rebote, los factores de escala tomarán un valor mínimo y en ese instante su aceleración crece abruptamente, iniciando el periodo de expansión acelerada, esta situación se puede ver la gráfica 6.13.

6.7. Periodo inflacionario

Cuando el Universo llega al instante del rebote t_b, los factores de escala tomarán su mínimo valor y debido a la anisotropía estos valores son diferentes. Los valores obtenidos

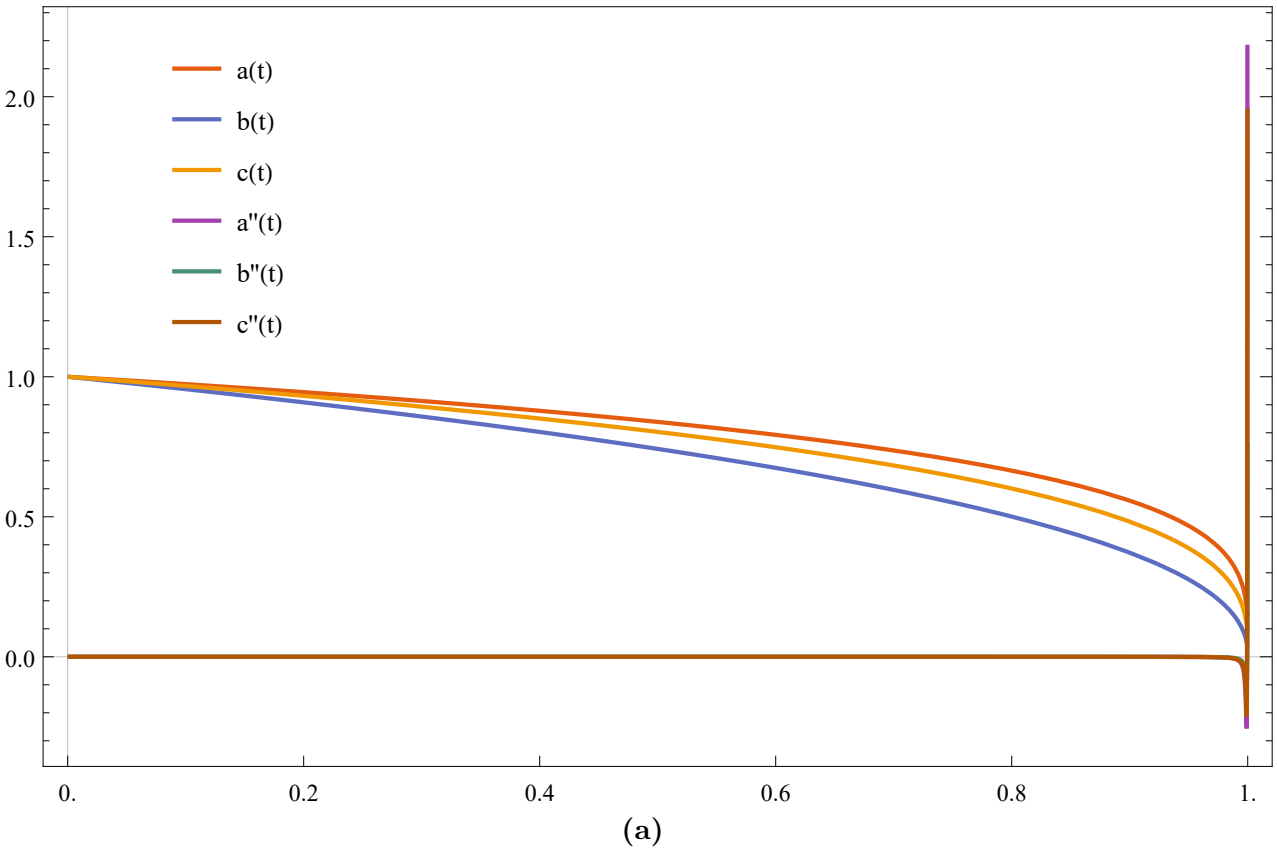
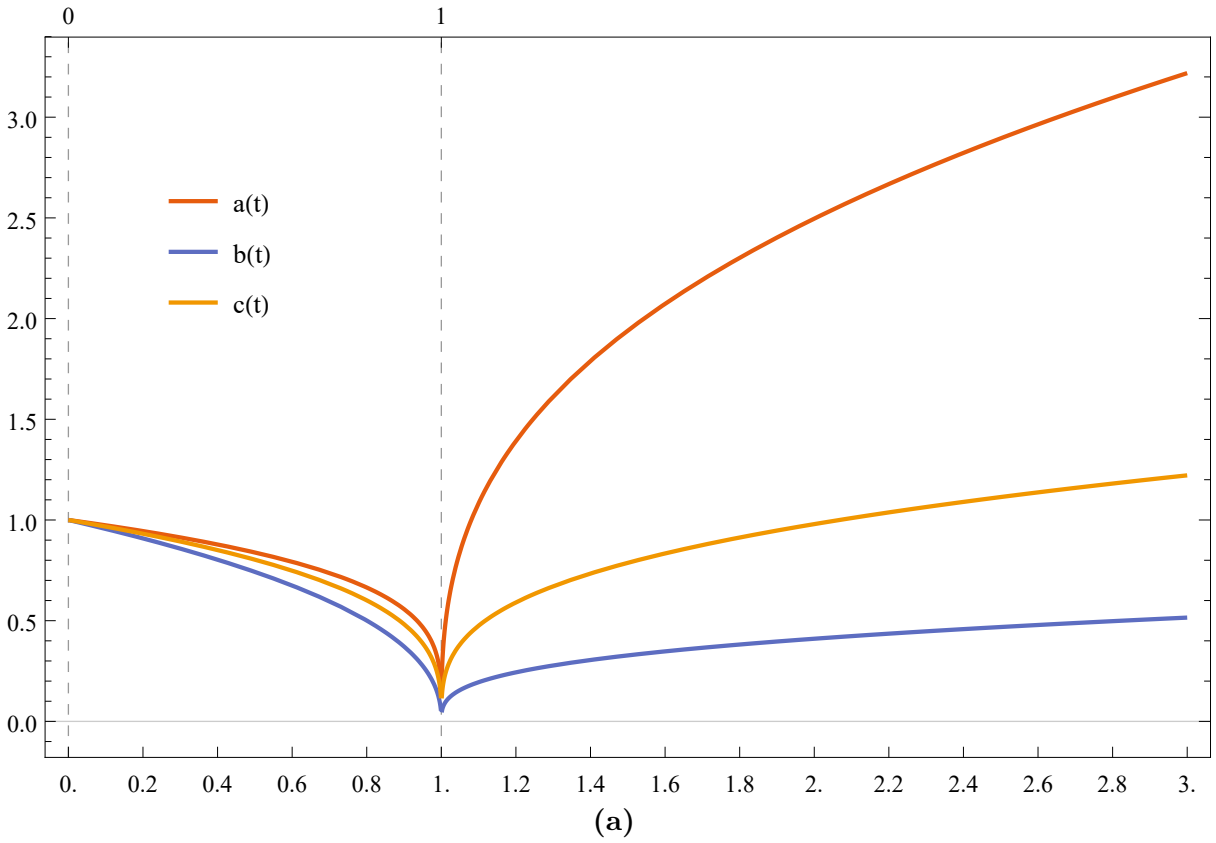


Figura 6.13: (a) Evolución temporal de los factores de escala y sus correspondientes aceleraciones en el periodo previo al Bounce cosmológico.

numéricamente para los factores de escala son

$$\begin{aligned} a(t_b) &= 0.144714, \\ b(t_b) &= 0.0329705, \\ c(t_b) &= 0.0854863. \end{aligned}$$

Posterior al instante del rebote, la dinámica del Universo cambia y este empieza a expandirse a un ritmo diferente debido a la anisotropia.



(a)

Figura 6.14: (a) Evolución temporal de los factores de escala durante el periodo previo al Bounce e instantes despues al Bounce.

6.7.1. Inicio del periodo inflacionario

Posterior al Bounce, el Universo se expande por lo que

$$\dot{a} > 0,$$
$$\dot{b} > 0,$$
$$\dot{c} > 0.$$

Ademas, de la ecuación (4.49) y (4.16) se tiene que $H > 0$ por lo que este termino actuará nuevamente como un término de amortiguamiento en la ecuación

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right)\dot{\phi} + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0, \tag{6.18}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi^2 = 0, \tag{6.19}$$

disminuyendo la velocidad del campo escalar, ademas, como la energía cinética depende del cuadrado de la velocidad del campo, también empezará a disminuir desde el máximo valor que alcanzo en el instante del rebote hasta posteriormente tomar un mínimo valor $T_i \approx 0$ en un tiempo t_i en el cual se cumpla que $\dot{\phi} \approx 0$.

En el instante t_i en el que la energía cinética llegue a su mínimo valor, la energía potencial llegará a su máximo valor U_i, posteriormente empezara a decrecer. Es importante notar que en este intervalo de tiempo se satisface

$$U_i \gg T_i. \tag{6.20}$$

Durante este periodo se puede considerar que

$$\begin{aligned} \rho =& T + U \approx U, \\ p =& T - U \approx -U, \end{aligned}$$

reemplazando estos valores en la ecuación de estado definida en (2.41) tenemos

$$\frac{p}{\rho} \approx \frac{-U}{U} \approx -1 < -\frac{1}{3}, \tag{6.21}$$

que es la condición necesaria para que se produzca un periodo de expansión acelerada del Universo. Nuevamente, la presencia del campo escalar o inflatón provoca un periodo de expansión acelerada en un Universo que presenta anisotropia. El periodo inflacionario inicia en el tiempo t_i en el cual se cumpla la condición (6.20)

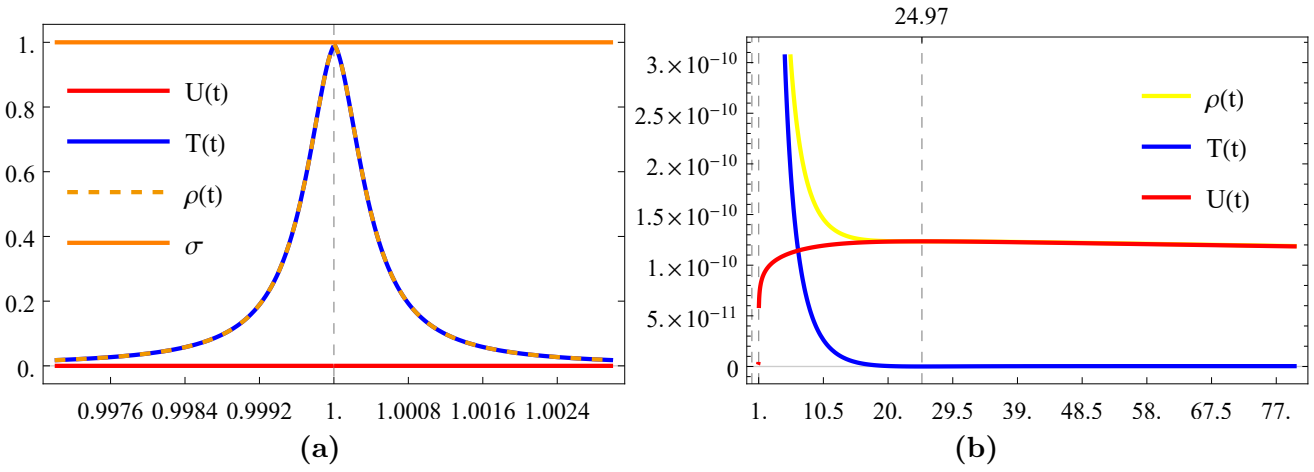


Figura 6.15: (a) El el instante del rebote, la energía cinética toma su máximo valor, luego empieza a decrecer. (b) Posterior al instante del rebote, la energía cinética empieza a disminuir hasta que eventualmente en el tiempo t_i se tendrá que $T_i \approx 0$, por otro la energía potencial alcanza su máximo valor en este mismo instante t_i. A partir de este instante t_i se tiene que $U_i \gg T_i$ y el Universo se expande aceleradamente mientras se cumpla esta condición.

6.7.2. Fin del periodo inflacionario

Posterior al instante de tiempo t_i que da inicio al periodo inflacionario, la energía potencial empieza a disminuir desde el máximo valor que había alcanzado en el instante t_i hasta que eventualmente en un tiempo t_f se cumpla que

$$U_f \approx T_f, \tag{6.22}$$

por lo que la condición para que se produzca un periodo de expansión acelerada (6.20) dejará de ser válida y el Universo dejará de expandirse aceleradamente ($\ddot{a} = 0$), por lo que el periodo inflacionario habrá llegado a su fin. Podemos cuantificar el tiempo de duración del periodo inflacionario para este modelo

$$\Delta t = t_f - t_i. \tag{6.23}$$

Los valores obtenidos numéricamente son

$$t_i = 24.9692 t_b, \tag{6.24}$$
$$t_f = 2279.17 t_b. \tag{6.25}$$

Por lo tanto, el tiempo de duración de este periodo fue

$$\Delta t = t_f - t_i = 2254.2 t_b. \tag{6.26}$$

Los factores de escala al inicio y final del periodo inflacionario respectivamente fueron

$$a(t_i) = 13.5617, \tag{6.27}$$
$$b(t_i) = 2.02104, \tag{6.28}$$
$$c(t_i) = 4.7038, \tag{6.29}$$
$$a(t_f) = 2.19896 \times 10^{28}, \tag{6.30}$$
$$b(t_f) = 3.27072 \times 10^{27}, \tag{6.31}$$
$$c(t_f) = 7.6086 \times 10^{27}. \tag{6.32}$$

El Universo aumento su tamaño de forma diferente en cada dirección debido a la anisotropia

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = 1.62144 \times 10^{27,} \tag{6.33}$$
$$\frac{b(t_f)}{b(t_i)} = 1.61834 \times 10^{27}, \tag{6.34}$$
$$\frac{c(t_f)}{c(t_i)} = 1.61754 \times 10^{27}. \tag{6.35}$$

El número de e-folds definido en (3.35) será

$$N_a = ln\left[\frac{a(t_f)}{a(t_i)}\right] = 62.6531, \tag{6.36}$$

$$N_b = ln\left[\frac{b(t_f)}{b(t_i)}\right] = 62.6512, \tag{6.37}$$

$$N_c = ln\left[\frac{c(t_f)}{c(t_i)}\right] = 62.6507. \tag{6.38}$$

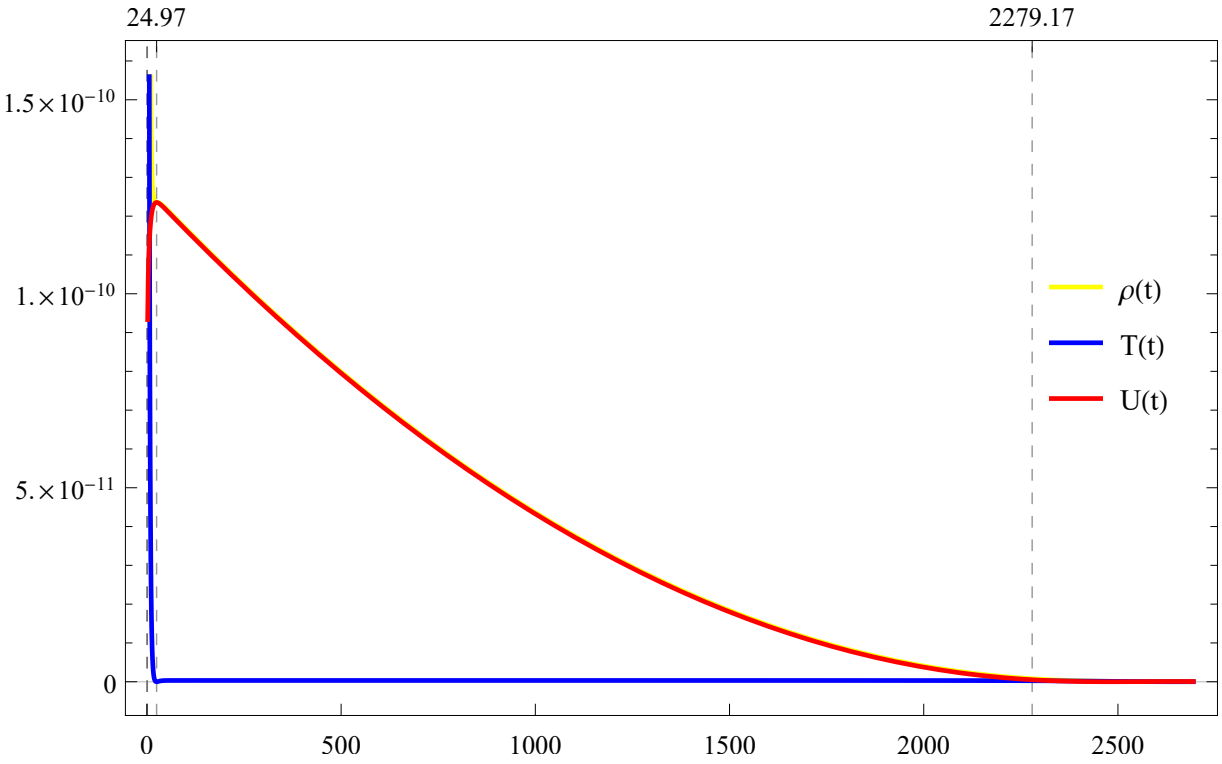


Figura 6.16: (a) Evolución temporal de la densidad de energía total, energía cinética y potencial durante el periodo inflacionario.

El Universo se expande aceleradamente durante el periodo inflacionario como lo podemos ver en la siguiente gráfica

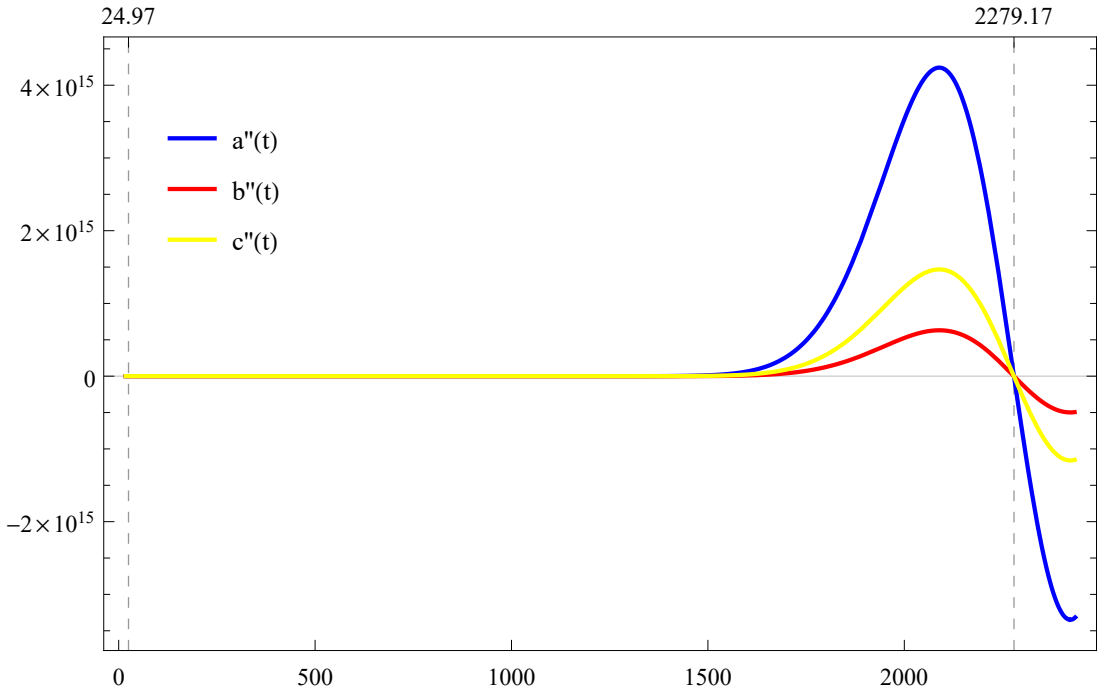


Figura 6.17: a) Evolución temporal de la aceleración de los factores de escala durante el periodo inflacionario. Cuando $\ddot{a} = \ddot{b} = \ddot{c} = 0$, el periodo inflacionario llega a su fin en el instante t_f.

La evolución temporal del número de e-folds para cada factor de escala se muestra en la siguiente figura

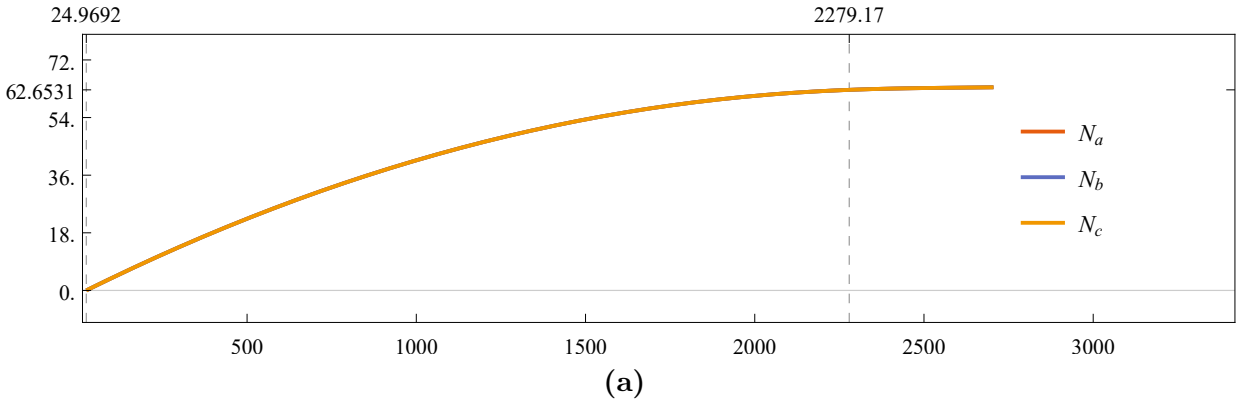


Figura 6.18: (a) Evolución temporal del número de e-folds para cada factor de escala.

Podemos observar el crecimiento exponencial del Universo durante el periodo inflacionario

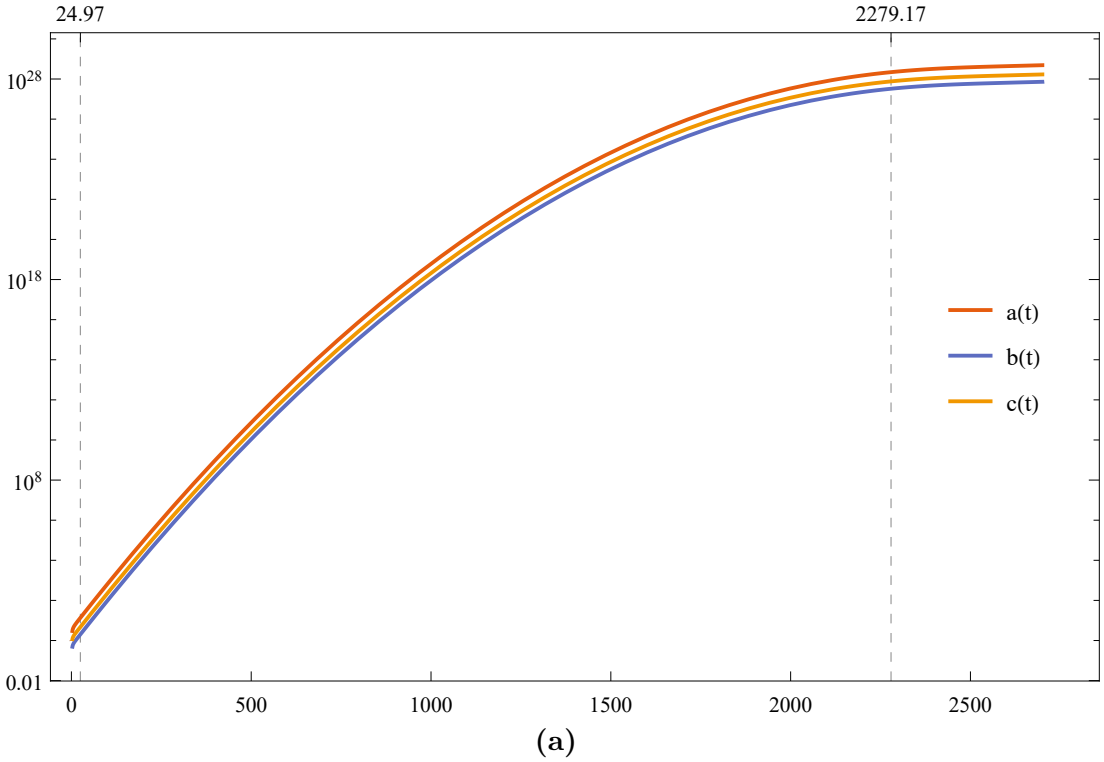


Figura 6.19: (a) Evolución temporal de los factores de escala para la métrica de Bianchi anisotrópica. Luego de este periodo, el Universo se expande a una tasa menor.

Capítulo 7

Cosmología cíclica anisotrópica

Se dice que un Universo es cíclico cuando atraviesa por periodos sucesivos de contracción y expansión [37]. Durante el periodo de contracción, el volúmen del Universo disminuye hasta tener un radio mínimo, para luego producir un rebote cosmológico o *Big Bounce* que detiene su contracción y obliga al Universo a expandirse. El mecanismo para poder simular el rebote cosmológico o Bounce, ya fue estudiado en la sección previa mediante la implementación de un campo escalar con un potencial de tipo cuadrático, este potencial por si mismo no es capaz de simular el retorno del Universo por lo que durante este capítulo analizaremos algunos mecanismos para poder simular el retorno del Universo.

7.1. Etapas del Universo cíclico

Para simular el Universo cíclico utilizaremos la ecuación de Bianchi modificada

$$\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} = \pm\sqrt{\frac{3(8\pi G)\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)}abc, \tag{7.1}$$

teniendo en cuenta que

$$H = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right). \tag{7.2}$$

De la ecuación (7.2) se tiene que

$$\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} = 3Habc, \tag{7.3}$$

tomando en cuenta el volúmen del Universo τ se definió como $\tau = abc$, podemos expresar la ecuación (7.3) como

$$\dot{\tau} = 3Habc. \tag{7.4}$$

En un Universo cíclico tendremos las siguientes etapas:

- **Contracción del Universo**
  El volúmen del Universo disminuye

$$\dot{a} < 0,$$
$$\dot{b} < 0,$$
$$\dot{c} < 0,$$

  por lo que $\dot{\tau} < 0$, haciendo que $H < 0$ en la ecuación (7.4) con lo que el termino $3H\dot{\phi}$ en (3.15) también es negativo y actuará como un agente que incrementa la amplitud del campo.

- **Rebote o bounce**
  El Universo detiene su contracción, por lo que

$$\dot{a} = 0,$$
$$\dot{b} = 0,$$
$$\dot{c} = 0,$$

  por lo que $\dot{\tau} = 0$, haciendo que $H = 0$ en la ecuación (7.4)

- **Expansión del Universo**
  Posterior al Bounce, el Universo empieza a incrementar su volumen

$$\dot{a} > 0,$$
$$\dot{b} > 0,$$
$$\dot{c} > 0,$$

  por lo que ahora $\dot{\tau} > 0$ haciendo que $H > 0$ en la ecuación (7.4), por lo que el termino $3H\phi$ en (3.15) actuará actúa como un termino que amortigua por lo que se reduce la amplitud del inflatón.

- **Retorno del Universo**
  El Universo continua expandiéndose hasta alcanzar un tamaño máximo, instante en el cual se detiene

$$\dot{a} = 0,$$
$$\dot{b} = 0,$$
$$\dot{c} = 0,$$

  por lo que $H = 0$. Cuando el Universo alcanza su tamaño máximo, el Universo se detiene y empieza un nuevo periodo de contracción, iniciándose asi un nuevo ciclo.

El instante del retorno podrá ser simulado de dos diferentes maneras y que se detallarán a continuación

7.2. Potencial tipo Higgs

En las secciones anteriores utilizamos el potencial de tipo cuadrático para generar el periodo inflacionario, pero este potencial no permite que eventualmente el Universo deje de expandirse y vuelva a contraerse, por lo que una alternativa para poder simular el instante del retorno es usar el potencial de Higgs en nuestras ecuaciones. El potencial Higgs tiene la forma

$$V = \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{7.5}$$

La presencia del término negativo en la energía potencial es importante ya que esto permite simular el retorno del Universo. La dinámica del campo escalar o inflatón está dada por su ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \tag{7.6}$$

La densidad de energía ρ y su presión p están dadas por

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{7.7}$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{7.8}$$

7.2.1. Análisis del rebote y retorno del Universo

El rebote y retorno del Universo se dan en el instante en el cual se cumple que $H = 0$ en la ecuación (7.1), es decir

$$0 = \frac{3(8\pi G)\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right). \tag{7.9}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones. La primera solución

$$\rho = \sigma, \tag{7.10}$$

la cual representa al instante en el cual se produce el rebote, la misma que analizamos en detalle en secciones anteriores. Por otro lado, la solución

$$\rho = 0, \tag{7.11}$$

es la solución que representa el instante del retorno del Universo.

7.2.2. Simulación numérica

Para realizar la simulación numérica del Universo cíclico utilizaremos las siguientes ecuaciones:

$$abc\ddot{\phi} + (\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c})\dot{\phi} + abc\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \tag{7.12}$$

$$\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} = \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}(1 - \frac{\rho}{\sigma})}abc, \tag{7.13}$$

$$-\dot{a}\dot{c}b - \ddot{a}bc + a\dot{b}\dot{c} + ac\ddot{b} = 0, \tag{7.14}$$

$$-a\dot{b}\dot{c} - ab\ddot{c} + \dot{a}\dot{b}c + bc\ddot{a} = 0. \tag{7.15}$$

Debido a la presencia de derivadas de segundo orden para los factores de escala, será necesario establecer también las condiciones iniciales para las derivadas de primer orden de los factores de escala $(\dot{a}(t_0), \dot{b}(t_0), \dot{c}(t_0))$. Estas condiciones iniciales para las derivadas de los factores de escala no son aleatorias sino que están restringidas por la ecuación

$$\dot{a}\dot{b}c + a\dot{b}\dot{c} + \dot{a}b\dot{c} = \frac{8\pi G\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)(abc). \tag{7.16}$$

Las cuales pueden ser visualizadas gráficamente como una superficie.

7.2.3. Condiciones iniciales

Para realizar esta simulación numérica se ha tomado en consideración las siguientes condiciones iniciales

$$a_0 = 1, \tag{7.17}$$

$$b_0 = 1, \tag{7.18}$$

$$c_0 = 1, \tag{7.19}$$

$$\dot{a_0} = -0.0000399651780288178, \tag{7.20}$$

$$\dot{b_0} = -0.00003850435345741656, \tag{7.21}$$

$$\dot{c_0} = -0.00004410522904417951, \tag{7.22}$$

$$\phi_0 = 0, \tag{7.23}$$

$$\dot{\phi_0} = 1 \times 10^{-4} m_p^2 \ll m_p^2, \tag{7.24}$$

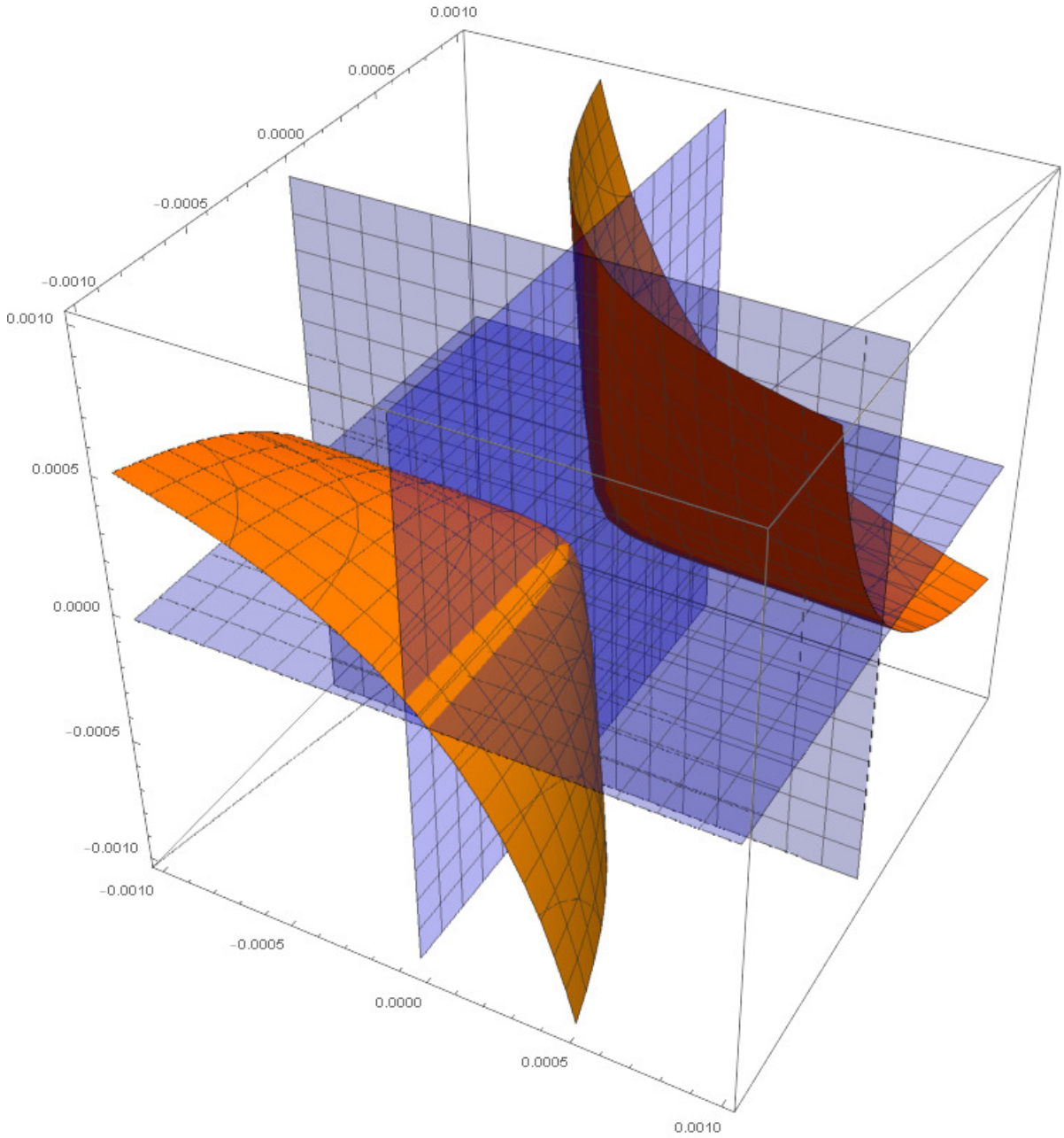
$$m = 1 \times 10^{-4} m_p, \tag{7.25}$$

$$\lambda = 1 \times 10^{-3}, \tag{7.26}$$

$$\sigma = 1 \times 10^{-4} m_p^4. \tag{7.27}$$

Tomando en consideración estas condiciones iniciales, podemos analizar la gráfica de la ecuación (7.16).

Si consideramos el caso isotrópico, es decir $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c}$ en la ecuación (7.16) y las otras



(a) Gráfica de las condiciones iniciales para las derivadas de los factores de escala

Figura 7.1: La intersección entre la superficie y los tres planos representan el conjunto de condiciones iniciales para $\dot{a}, \dot{b}$ y $\dot{c}$ definidas en (7.27) las cuales representan condiciones iniciales para un Universo con anisotropia. Por otro lado, la intersección de la recta con la superficie representa $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c}$, es decir, representan el caso isotrópico.

condiciones iniciales definidas en (7.27) se obtiene

$$3\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right), \tag{7.28}$$

$$\dot{a} = \pm\sqrt{\frac{8\pi G}{3m_p^2}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)}, \tag{7.29}$$

de las que se obtienen dos soluciones

$$\dot{a} = \dot{b} = \dot{c} = \pm 0.0000408238. \tag{7.30}$$

La solución positiva implica que nuestro Universo empieza en un periodo de expansión, mientras que la solución negativa implica que nuestro Universo empieza contrayéndose. Para los cálculos realizados durante este capítulo se considerará que el Universo empieza contrayéndose. Estas condiciones iniciales para la isotropía del espacio se pueden ver gráficamente como la intersección de la recta y la superficie en la figura 7.1

7.2.4. Evolución temporal de los factores de escala

El Universo inicialmente empieza contrayéndose, a medida que se contrae, la densidad total de energía se acerca a la escala energética del rebote. El eje horizontal representará el tiempo expresado en múltiplos del tiempo en el que se da el primer rebote del Universo t_{b1}.

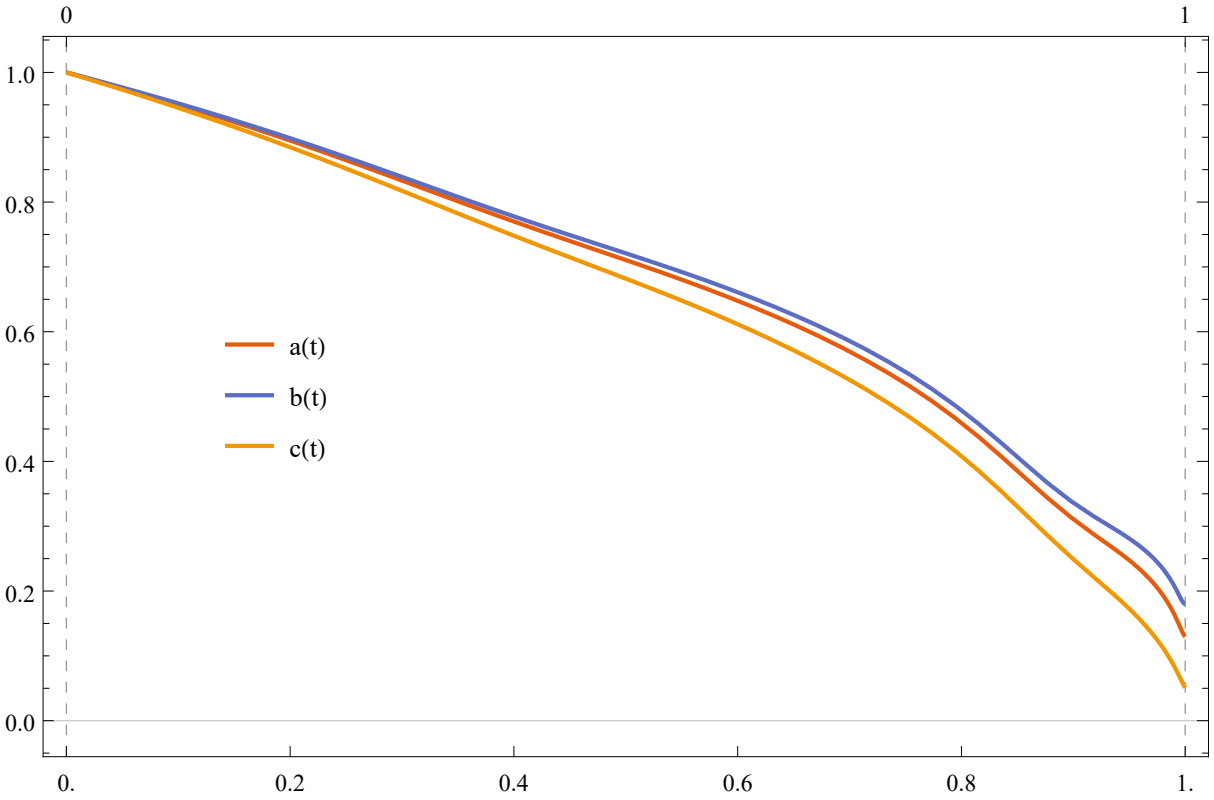


Figura 7.2: Evolución de los factores de escala durante la etapa de contracción del Universo.

Cuando la densidad total de energía es igual a la escala energética del rebote, el Universo se detiene y se produce el *Bounce* o rebote cosmológico, la dinámica del Universo cambia y empieza a expandirse. A medida que el Universo se expande la densidad total de energía se diluye hasta que eventualmente se cumplirá la condición (7.11) y el Universo se detendrá en el tiempo t_{r1}, que representa el instante de tiempo del primer retorno del Universo.

$$t_{r1} = 28.748 t_{b1}.$$

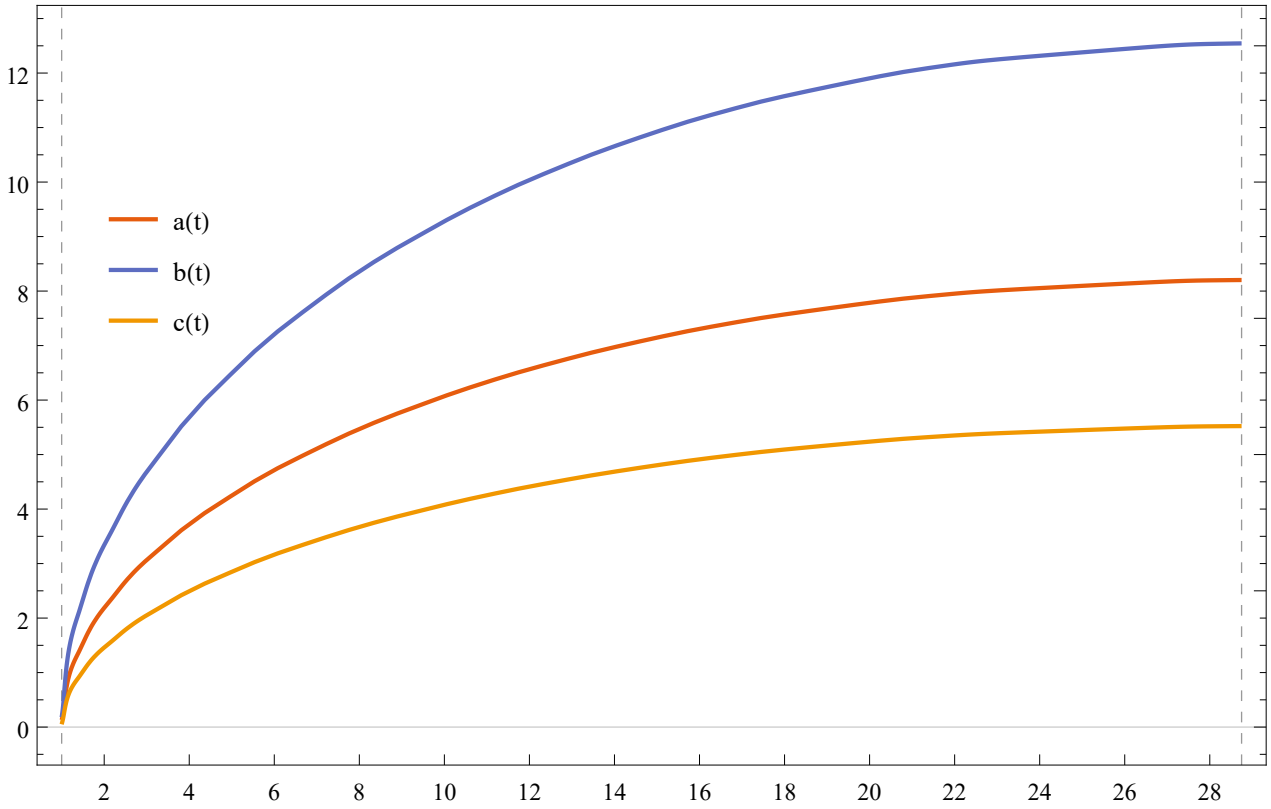


Figura 7.3: Evolución temporal del factor de escala en el periodo de expansión. El instante del primer retorno del Universo se da en $t_{r1} = 28.748 t_{b1}$

Posterior a este instante el Universo nuevamente empieza a contraerse y los factores de escala disminuyen de forma monótona hasta que eventualmente se volverá a cumplir la condición (7.10) y el Universo nuevamente rebotará.
El valor numérico obtenido para el tiempo en el que se da este segundo rebote es

$$t_{b2} = 56.543 t_{b1}.$$

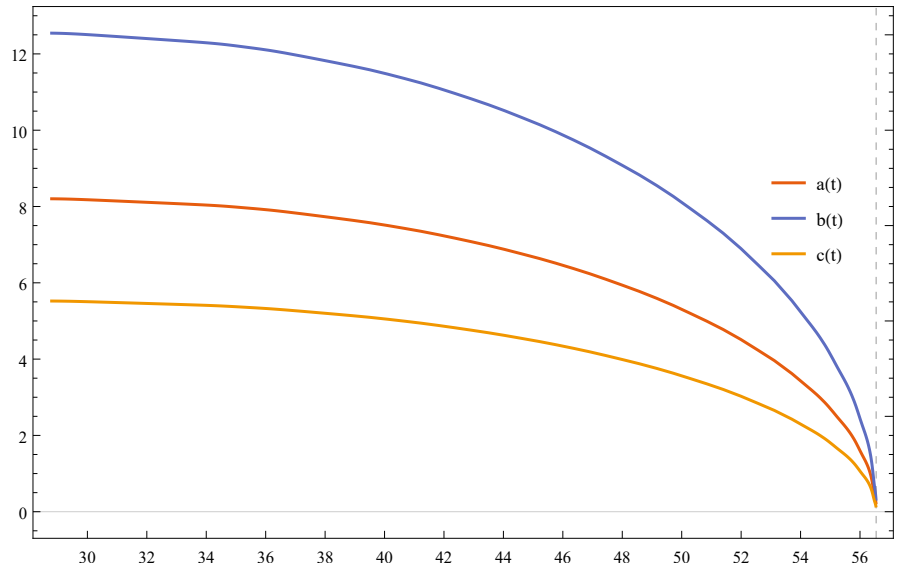


Figura 7.4: Evolución temporal de los factores de escala durante la etapa de contracción. El instante del segundo rebote se da en $t_{b2} = 56.543 t_{b1}$

Posterior a este instante del rebote, el Universo cambia su dinámica y empieza a expandirse diluyendo nuevamente la densidad total de energía, por lo que eventualmente se volverá a cumplir la condición (7.11) y el Universo detendrá su expansión.
El valor numérico obtenido para este segundo instante del retorno es

$$t_{r2} = 84.4355 t_{b1}. \tag{7.31}$$

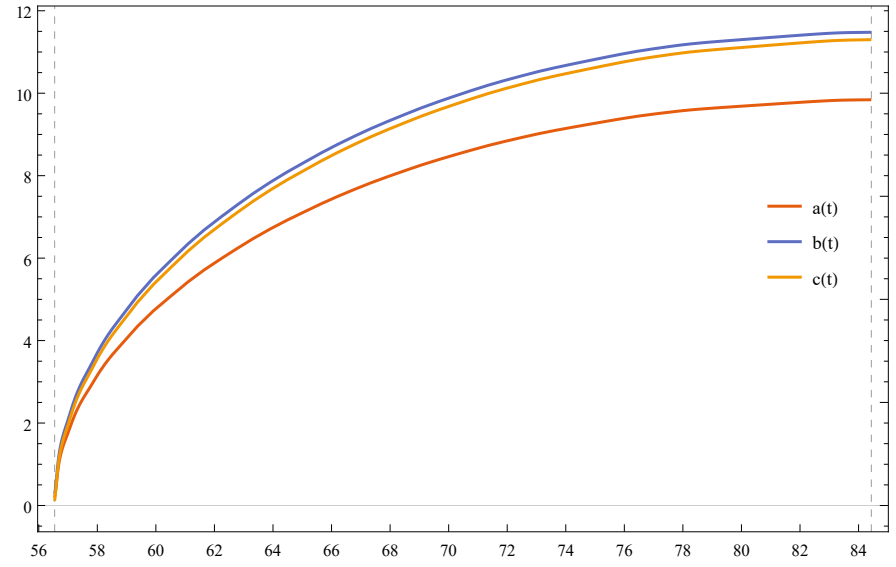


Figura 7.5: Evolución temporal de los factores de escala durante el segundo ciclo de expansión del Universo. El instante del segundo retorno del Universo se da en el tiempo $t_{r2} = 84.4355 t_{b1}$

El instante de tiempo en el que se da el tercer rebote del Universo es

$$t_{b3} = 112.075 t_{b1}.$$

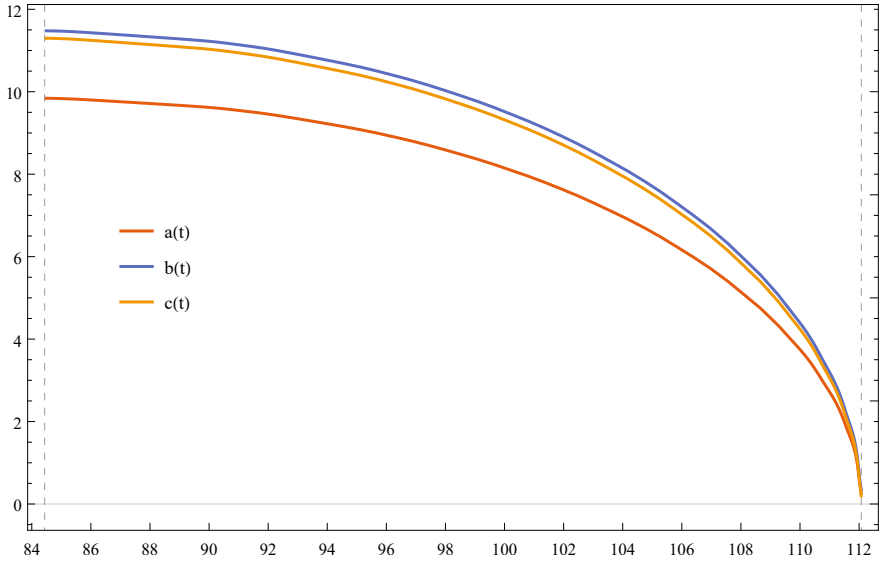


Figura 7.6: Evolución temporal de los factores de escala durante la etapa de contracción. El instante del tercer rebote del Universo se da en el tiempo $t_{b3} = 112.075 t_{b1}$

El instante de tiempo en el que se da el tercer retorno es

$$t_{r3} = 139.732 t_{b1}. \tag{7.32}$$

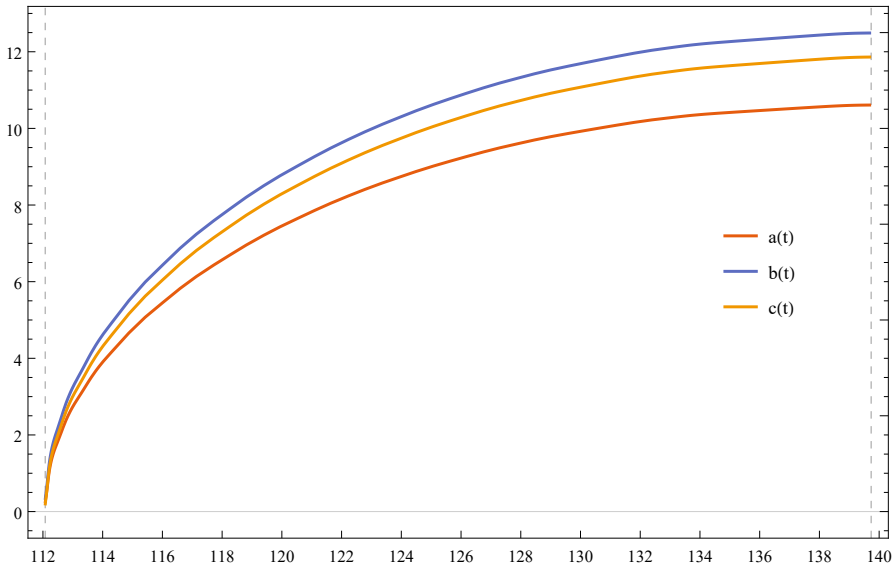


Figura 7.7: Evolución temporal de los factores de escala durante el periodo de expansión. El instante del tercer retorno se da en el tiempo $t_{r3} = 139.732 t_{b1}$

El instante de tiempo en que se da el cuarto rebote del Universo es

$$t_{b4} = 167.605 t_{b1}. \tag{7.33}$$

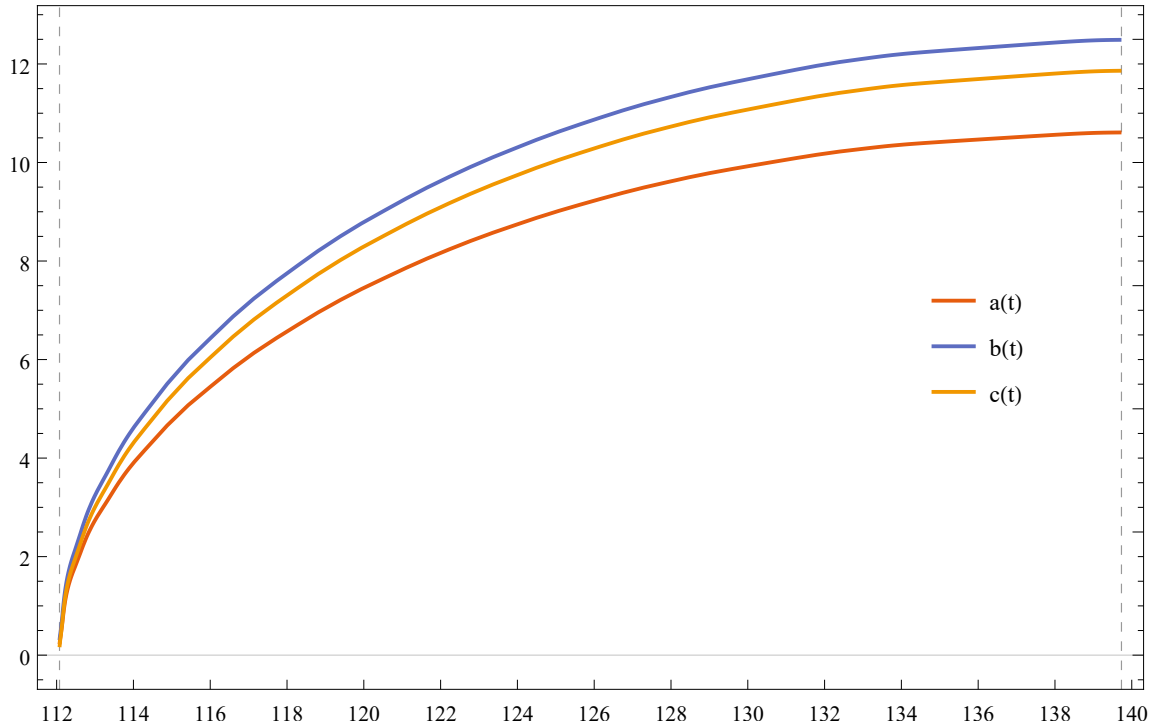


Figura 7.8: Evolución temporal de los factores de escala durante el periodo de contracción del Universo. El instante de tiempo en que se da el cuarto rebote es $t_{b4} = 167.605 t_{b1}$

Estos ciclos de contracción y expansión continúan indefinidamente y dadas las condiciones iniciales, después de cada ciclo el Universo incrementa su tamaño.

Podemos visualizar la evolución temporal de cada factor de escala durante los ciclos por los que atravesó el Universo.

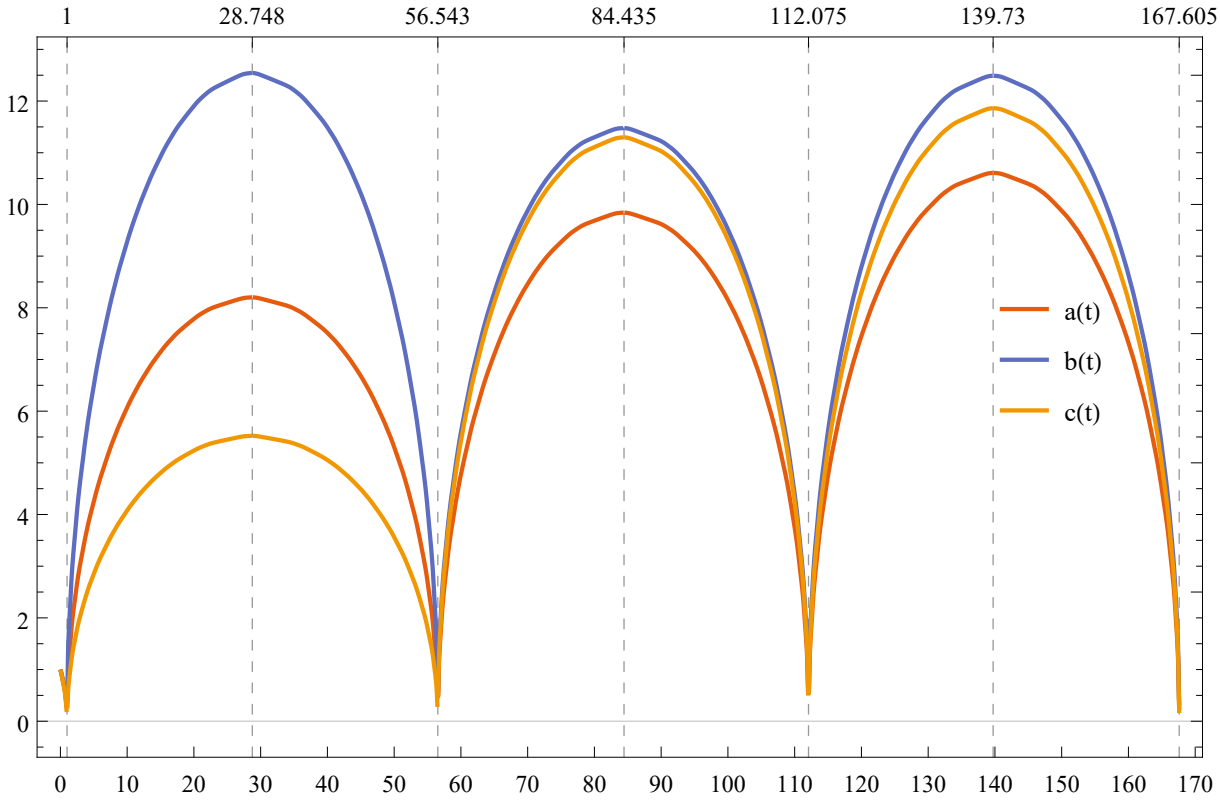


Figura 7.9: Evolución temporal de los factores de escala en un Universo anisotrópico. Después de cada ciclo el Universo incrementa su tamaño con respecto al ciclo anterior. Notamos que el tamaño máximo y mínimo del Universo cambia, para los factores de escala $a(t)$ y $c(t)$ el tamaño máximo y mínimo del Universo se incrementa, pero para el factor de escala $b(t)$ no tiene esta misma tendencia.

La evolución de la densidad de energía total, cinética y potencial se muestra en la siguiente gráfica

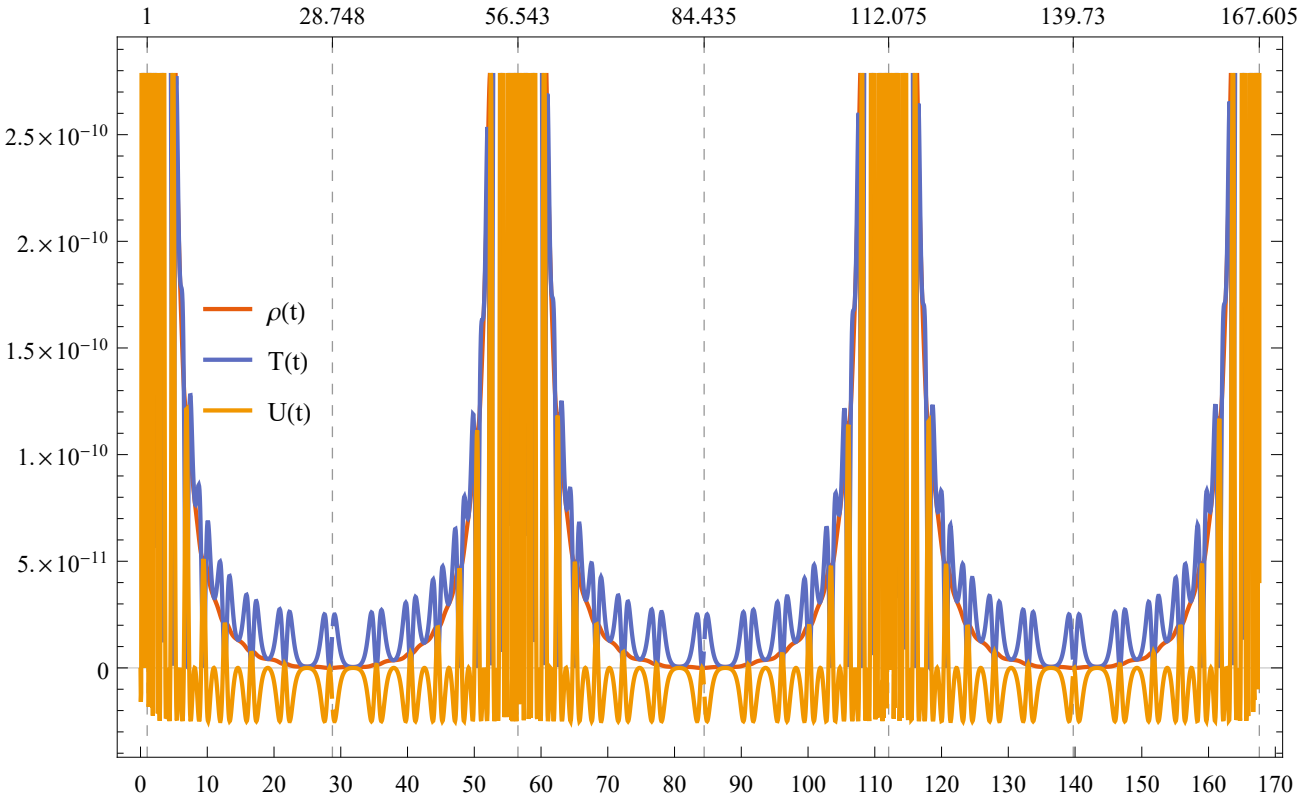


Figura 7.10: Evolución temporal de la densidad de energía total, energía cinética y potencial durante los ciclos en un Universo anisotrópico.

Podemos recuperar la isotropia si consideramos que $\dot{a}(0) = \dot{b}(0) = \dot{c}(0)$

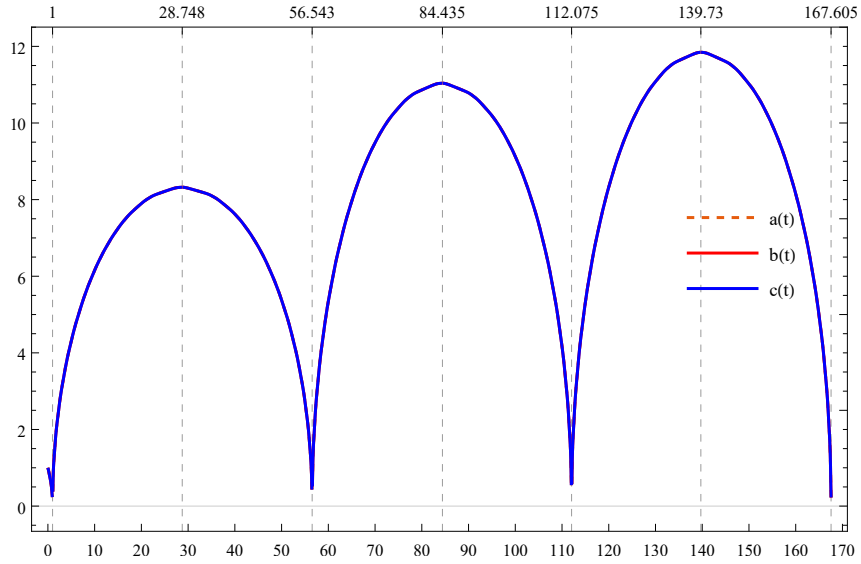


Figura 7.11: La gráfica representa la evolución temporal de los factores de escala, cuando se toma en cuenta la isotropia.

Ademas, la densidad de anisotropia es aproximadamente nula, como era de esperarse en un Universo isotrópico, tal como se ve en la figura 7.12

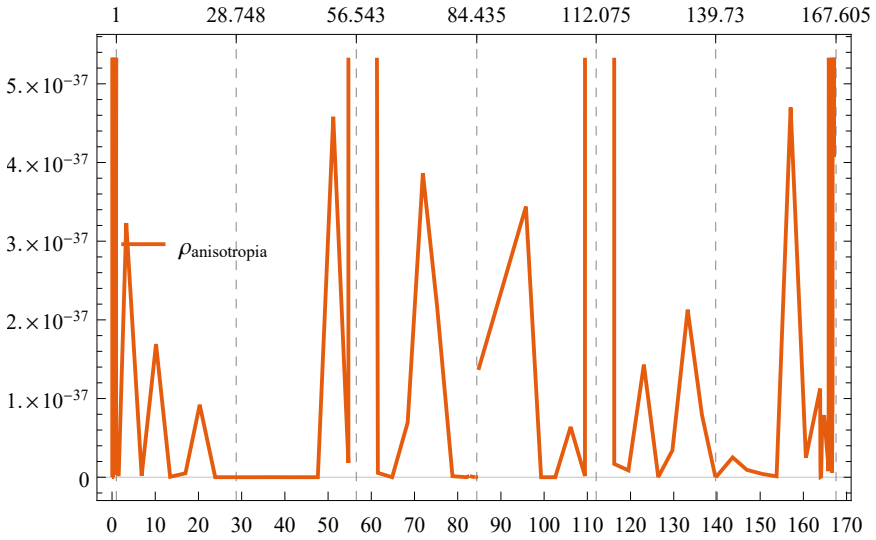


Figura 7.12: Evolución temporal de la densidad de energía de anisotropía ρ_{anis} cuando se considera $a(t) = b(t) = c(t)$, vemos que esta densidad es del orden 10^{-37} lo que es de esperarse debido a que estamos en el caso isotrópico.

7.3. Constante cosmológica negativa

Otra manera de simular el retorno del Universo es mediante la incorporación de la constante cosmológica negativa. La evolución de un Universo con constante cosmológica negativa $-\Lambda$ y rebote a la escala energética σ está dada por la ecuación modificada de Bianchi

$$\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} = \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - 3\Lambda}(abc). \tag{7.34}$$

Tomando en cuenta la expresión (7.3) se obtiene

$$3H = \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - 3\Lambda}. \tag{7.35}$$

El instante del rebote cosmológico y retorno se da en el instante que se cumple $H = 0$

$$0 = \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - 3\Lambda}, \tag{7.36}$$

$$0 = \rho^2 - \sigma\rho + \sigma\Lambda m_p^2, \tag{7.37}$$

al resolver esta ecuación se obtiene las dos soluciones

$$\rho = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma\Lambda m_p^2}}{2}. \tag{7.38}$$

A medida que el Universo se contrae, la densidad total de energía va incrementándose hasta que eventualmente alcanza a la escala de energía en la que se produce el rebote σ, momento en el que se produce el Bounce, posterior a este instante, el Universo cambia su dinámica y se expande aceleradamente, a medida que se expande la densidad de energía disminuye, por este motivo la densidad de energía del rebote será mayor a la densidad de energía del retorno, es decir $\rho_b > \rho_r$. Estas densidades están dadas por

$$\rho_b = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\Lambda m_p^2}{\sigma}}\right),$$

$$\rho_r = \frac{\sigma}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\Lambda m_p^2}{\sigma}}\right).$$

Tomando en cuenta que $\Lambda \ll \sigma$, podemos aproximar la densidad de energía en el instante que se produce el rebote a

$$\rho_b \approx \sigma - \Lambda m_p^2, \tag{7.39}$$

y la densidad de energía en el instante del retorno del Universo a

$$\rho_r \approx \Lambda m_p^2. \tag{7.40}$$

Podemos notar que estas densidades solo dependen de la escala energética en la que se produce el rebote σ y también del valor de la constante cosmológica Λ, por lo que no cambiaran durante los ciclos que atraviese el Universo, ademas, la cantidad de inflación y el tiempo de vida de cada ciclo también se mantendrá constante. Algo que caracteriza a este modelo con constante cosmológica negativa es que en cada ciclo, el tamaño mínimo del Universo crece, por lo que el tamaño máximo que alcance el Universo antes de retornar, también crecerá en cada ciclo. Veremos estos detalles en la próxima sección.

7.3.1. Simulación numérica

Para el análisis de este modelo con constante cosmológica negativa se ha considerado las siguientes ecuaciones:

$$abc\ddot{\phi} + (\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c})\dot{\phi} + abc\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \tag{7.41}$$

$$\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} = \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - 3\Lambda}abc, \tag{7.42}$$

$$-\dot{a}\dot{c}b - \ddot{a}bc + a\dot{b}\dot{c} + ac\ddot{b} = 0, \tag{7.43}$$

$$-a\dot{b}\dot{c} - ab\ddot{c} + \dot{a}\dot{b}c + bc\ddot{a} = 0. \tag{7.44}$$

Ademas, para poder validar nuestros resultados se realizó una comparación con los resultados obtenidos al considerar isotropia con la métrica de Friedmann, para lo cual se utilizó la ecuación de Friedmann modificada

$$\dot{a} = \pm a\sqrt{\frac{\rho}{3m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - \frac{\Lambda}{3}}.$$

7.3.2. Condiciones iniciales en la métrica de Friedmann

Consideraremos las siguientes condiciones iniciales

$$a_0 = 1, \tag{7.45}$$

$$b_0 = 1, \tag{7.46}$$

$$c_0 = 1, \tag{7.47}$$

$$\phi_0 = 0, \tag{7.48}$$

$$\dot{\phi}_0 = 2 \times 10^{-4} m_p^2 \ll m_p^2, \tag{7.49}$$

$$m = 0.2 \times 10^{-2} m_p, \tag{7.50}$$

$$\Lambda = 1 \times 10^{-8}, \tag{7.51}$$

$$\sigma = 1 \times 10^{-4} m_p^4. \tag{7.52}$$

7.3.3. Evolución del factor de escala para la métrica de Friedmann

En presencia del campo escalar y la constante cosmológica negativa el Universo cíclico incrementa de tamaño en cada ciclo, pero el tiempo de duración de cada ciclo y la cantidad de inflación se mantiene constante. La evolución del factor de escala se muestra a continuación.

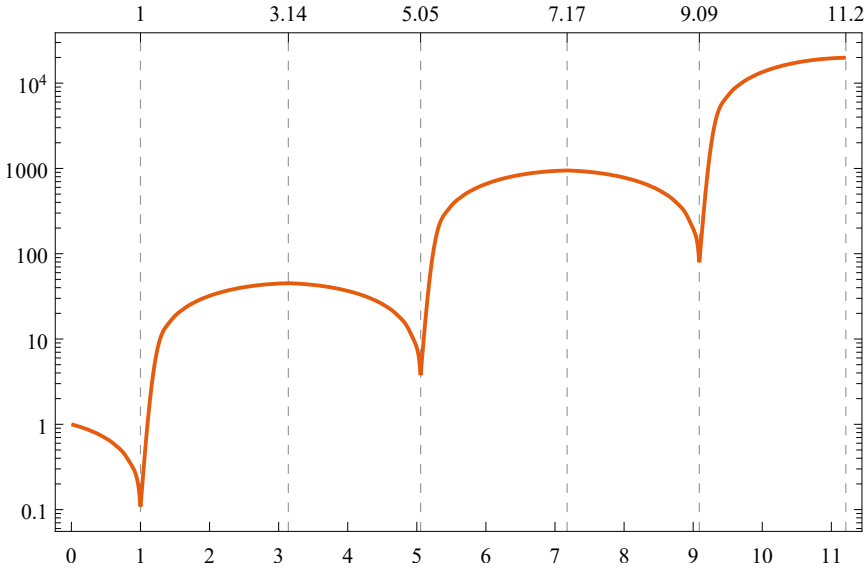


Figura 7.13: Evolución de un Universo cíclico con campo escalar y constante cosmológica negativa en Friedmann.

Ademas, el valor inicial para la derivada del factor de escala es

$$\dot{a}(0) = -0.0000577235$$

7.3.4. Condiciones iniciales en la métrica de Bianchi

Para este análisis se ha considerado las siguientes condiciones iniciales

$$a_0 = 1, \tag{7.53}$$
$$b_0 = 1, \tag{7.54}$$
$$c_0 = 1, \tag{7.55}$$
$$\dot{a_0} = -0.00005673634909937846, \tag{7.56}$$
$$\dot{b_0} = -0.00005525610091501835, \tag{7.57}$$
$$\dot{c_0} = -0.00006612627955521380, \tag{7.58}$$
$$\phi_0 = 0, \tag{7.59}$$
$$\dot{\phi_0} = 2 \times 10^{-4} m_p^2 \ll m_p^2, \tag{7.60}$$
$$m = 0.2 \times 10^{-2} m_p, \tag{7.61}$$
$$\Lambda = 1 \times 10^{-8}, \tag{7.62}$$
$$\sigma = 1 \times 10^{-4} m_p^2. \tag{7.63}$$

Tomando en consideración la ecuación (7.16) y las condiciones iniciales dadas podemos graficar la superficie con los valores posibles para las derivadas de los factores de escala. Ademas, si consideramos que el espacio es isotrópico ($\dot{a} = \dot{b} = \dot{c}$) se obtiene que

$$\dot{a} = \dot{b} = \dot{c} = \pm 0.0000577235, \tag{7.64}$$

Este valor coincide con el valor obtenido en (7.53).

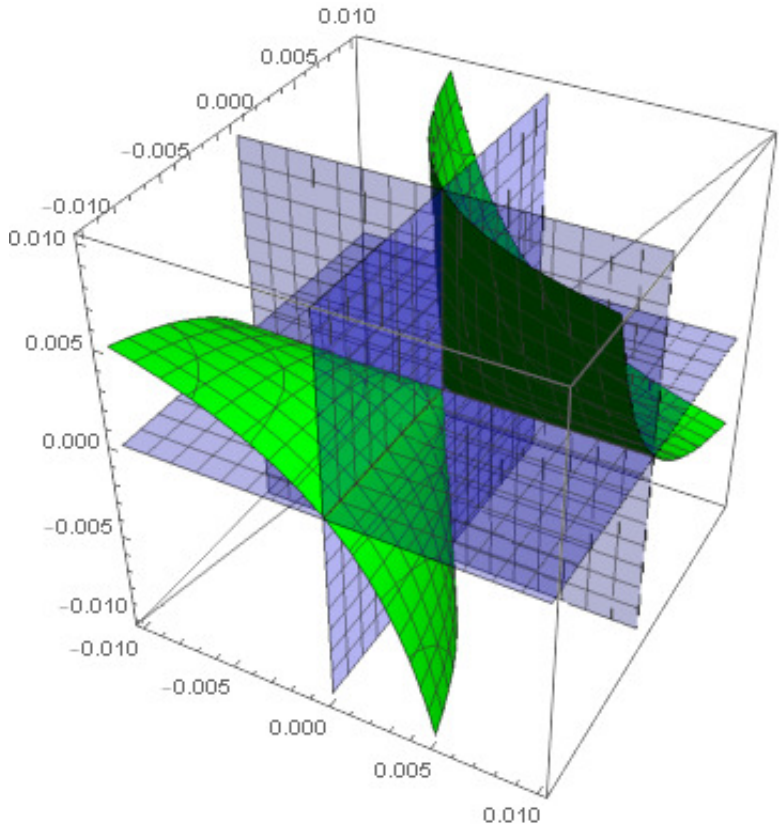


Figura 7.14: La superficie representa el conjunto de valores posibles para las derivadas de primer orden de los factores de escala. La intersección de la línea con la superficie representa el conjunto de puntos donde se cumple que $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c}$

7.3.5. Evolución temporal de los factores de escala

Para comprobar que nuestros resultados al considerar la anisotropia son válidas, podemos comparar los resultados obtenidos en la métrica de Friedmann con los resultados obtenidos en la métrica de Bianchi al considerar isotropia.
Podemos observar la similitud con la gráfica obtenida en la sección anterior por lo que tenemos certeza que nuestra simulación numérica funciona correctamente.
Si consideramos la anisotropia del espacio dadas por las condiciones iniciales establecidas en (7.63) obtenemos la siguiente gráfica que muestra como evoluciona cada factor de escala.

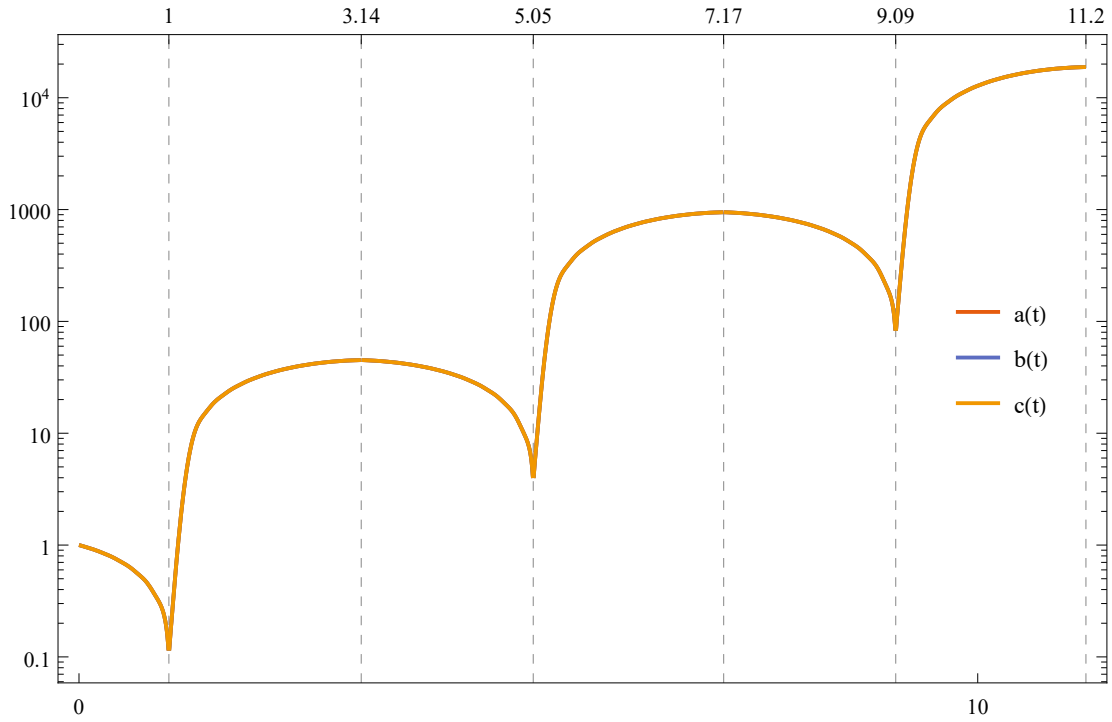


Figura 7.15: Evolución temporal de los factores de escala en la métrica de Bianchi considerando isotropia, es decir $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c}$.

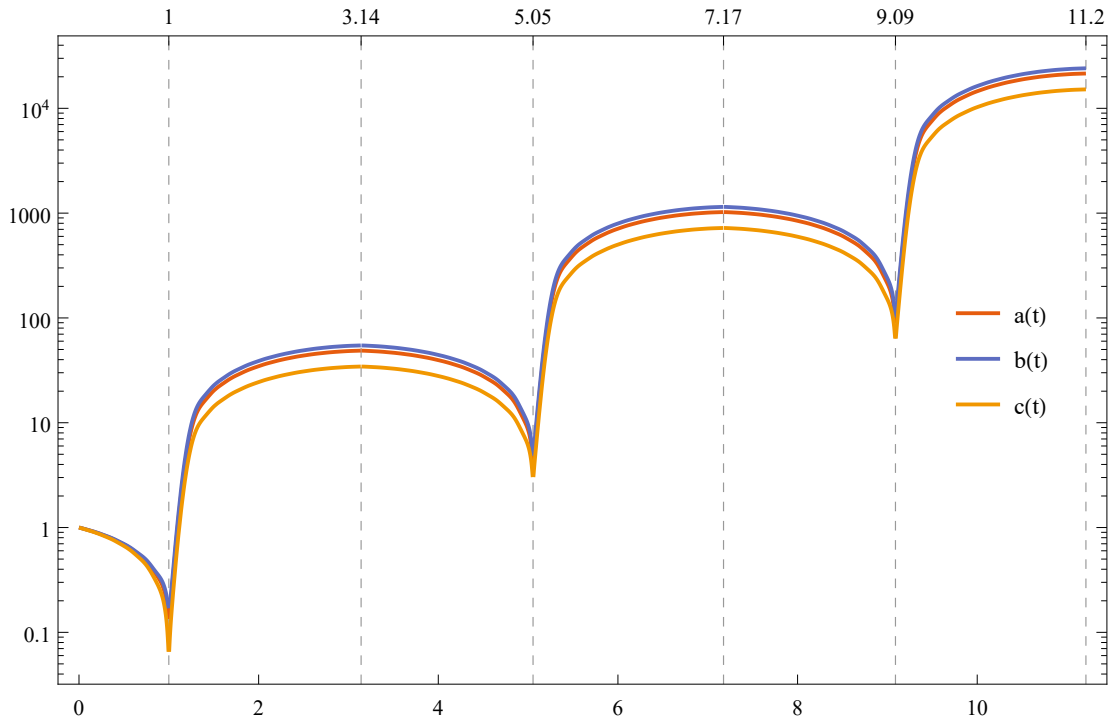


Figura 7.16: Evolución temporal de los factores de escala en un Universo anisotrópico.

Capítulo 8

Histéresis cosmológica

En la sección anterior analizamos algunos modelos cíclicos con campo escalar. En el caso del campo escalar junto a una constante cosmológica negativa se observa como la evolución del Universo es diferente en cada ciclo, incrementando de manera natural su tamaño durante cada ciclo. Este fenómeno es conocido en la literatura como "histéresis cosmológica"debido a la semejanza con la histerésis en materiales ferromagnéticos [18]. Esta histéresis cosmológica [38] se origina debido a la asimetría presente en la ecuación de movimiento del campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \tag{8.1}$$

Cuando el Universo esta en expansión, se tiene que $H > 0$, entonces $3H\dot{\phi}$ también es positivo y reducirá la energía cinética del campo, por lo que eventualmente se tendrá una mayor contribución a la energía total por parte de la energía potencial U y por lo tanto

$$p = T - U \approx -U \approx -(T + U) = -\rho, \tag{8.2}$$

y durante la contracción del Universo, se tiene que $H < 0$, entonces $3H\dot{\phi}$ ahora es negativo y en este caso se comportará como un agente que aumenta la energía cinética del campo, por lo que

$$p = T - U \approx T \approx T + U = \rho. \tag{8.3}$$

Analizando las ecuaciones (8.2) y (8.3) podemos notar que la presión se comporta de diferente manera durante la expansión y contracción del Universo. Esta asimetría en la presión genera una asimetría entre los periodos de expansión y contracción del Universo, lo que se ve reflejado en un incremento o disminución del tamaño y la energía total del Universo [39].
Para entender mejor la histerésis cosmológica, analicemos la ecuación de conservación de la energía

$$dE + pdV = 0, \tag{8.4}$$
$$pdV = -dE, \tag{8.5}$$
$$pdV = -dM. \tag{8.6}$$

Donde por convención, M representa a la energía total E del Universo. Integrando la ecuación (8.6)

$$\int pdV = -\int dM = -\delta M. \tag{8.7}$$

De la ecuación (8.7) podemos concluir que el trabajo total sobre el Universo solo depende de la variación de la energía del Universo. Analizando la ecuación (8.7) podemos notar que

- Si
$$\int pdV > 0 \rightarrow \delta M < 0.$$
La energía total del Universo disminuye.

- Si
$$\int pdV < 0 \rightarrow \delta M > 0.$$
La energía total del Universo aumenta.

Para estudiar la histerésis cosmológica en un Universo cíclico, estudiaremos el trabajo realizado por el campo escalar a lo largo de un ciclo cosmológico. Este trabajo nos indica cuanta histéresis sufrió el Universo. Supongamos que en cierto instante t_1 el Universo poseé un volúmen V_1 y en un instante t_2 posterior, el Universo tiene un volumen V_2. Durante este intervalo de tiempo, el negativo del trabajo realizado por el campo según la ecuación (8.7) es

$$-\int_{t_1}^{t_2} pdV = \delta M \,|_{t_1}^{t_2}, \tag{8.8}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} pdV = M_2 - M_1, \tag{8.9}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} pdV = \rho_2 \frac{4}{3}\pi a_2 b_2 c_2 - \rho_1 \frac{4}{3}\pi a_1 b_1 c_1, \tag{8.10}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} pdV = \frac{4}{3}\pi(\rho_2 a_2 b_2 c_2 - \rho_1 a_1 b_1 c_1). \tag{8.11}$$

el termino ρ_1 y ρ_2 representan a las densidades de energía en los instantes t_1 y t_2. Ademas, en la ecuación (8.11) podemos observar la relación que existe entre el trabajo realizado por el campo escalar y el cambio en el tamaño del Universo.
Usando la expresión (8.11) se puede hallar una ecuación para el cambio del tamaño máximo del Universo. Supongamos que en cierto instante t_1^{max} el Universo alcanza un volúmen máximo V_1^{max}, posterior a este instante, el Universo empieza a contraerse para luego rebotar y expandirse hasta alcanzar un nuevo volúmen máximo V_2^{max} en un tiempo t_2^{max}. Diremos que durante este intervalo de tiempo el Universo ha realizado un ciclo de contracción-expansión, de esta manera, el bucle de histéresis en un ciclo completo de contracción-expansión es el trabajo realizado por el campo entre dichos instantes de tiempo

$$\oint_{max} pdV = \int_{t_1^{max}}^{t_2^{max}} pdV. \tag{8.12}$$

Por lo que

$$-\oint_{max} pdV = \frac{4}{3}\pi \left[\rho_2^{max}(a_2^{max})(b_2^{max})(c_2^{max}) - \rho_1^{max}(a_1^{max})(b_1^{max})(c_1^{max})\right], \tag{8.13}$$

donde ρ_1^{max} y ρ_2^{max} representan a las densidades de energía en los dos instantes sucesivos en los que se produce el retorno del Universo. En esta ecuación podemos notar que el bucle de histéresis depende únicamente de las características que posee el Universo en los instantes en los que se produce el retorno.
Por otro lado, para el cambio en el tamaño mínimo en el Universo, el bucle de histerésis para el ciclo completo de expansión-contracción es

$$-\oint_{min} pdV = \frac{4}{3}\pi \left[\rho_2^{min}(a_2^{min})(b_2^{min})(c_2^{min}) - \rho_1^{min}(a_1^{min})(b_1^{min})(c_1^{min})\right], \tag{8.14}$$

de manera similar ρ_1^{min} y ρ_2^{min} representan a las densidad de energía en dos instantes sucesivos en los que se produce en rebote del Universo.

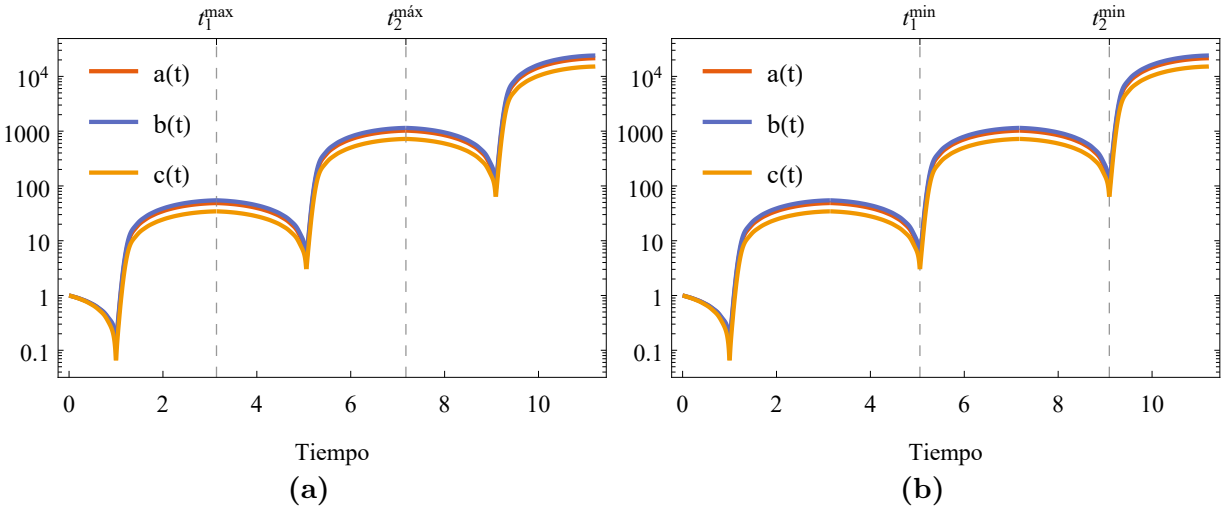


Figura 8.1: (a) Ciclo completo para contracción-expansión, la integral $\oint_{max} pdV$ esta representando al trabajo total realizado por el campo escalar entre dos máximos sucesivos entre los instantes t_1^{max} y t_2^{max}. (b) Ciclo completo de expansión-contracción entre los instantes t_1^{min} y t_2^{min}. La integral $\oint_{min} pdV$ esta representando al trabajo total hecho por el campo entre dos mínimos sucesivos.

8.1. Histéresis cosmológica en Universo con potencial Higgs

Una manera de poder simular el retorno del Universo fue mediante el potencial de tipo Higgs

$$V = \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{8.15}$$

En el instante del retorno del Universo se cumple que

$$\rho_{retorno} = 0, \tag{8.16}$$

tomando en cuenta este resultado y reemplazando en la ecuación (8.13) obtenemos que

$$-\oint_{max} pdV = 0.$$

Es decir, para dos instantes sucesivos de retorno el trabajo total realizado por el campo escalar es nulo en este ciclo, a pesar de que la presión se comporte de manera diferente durante la contracción y expansión. El Universo puede aumentar su tamaño en cada rebote y eso no implica que haya histéresis, de esta forma, la presencia de histéresis no es un requisito necesario para que el Universo pueda incrementar su tamaño máximo en cada ciclo. Por otro lado, durante el ciclo de expansión-contracción según la ecuación (8.14) tenemos que

$$-\oint_{min} pdV = \frac{4}{3}\pi\left[\rho_2^{min}(a_2^{min})(b_2^{min})(c_2^{min}) - \rho_1^{min}(a_1^{min})(b_1^{min})(c_1^{min})\right], \tag{8.17}$$

$$-\oint_{min} pdV = \frac{4\pi}{3}[\sigma(a_{2b})(b_{2b})(c_{2b}) - \sigma(a_{1b})(b_{1b})(c_{1b})], \tag{8.18}$$

$$-\oint_{min} pdV = \frac{4\pi}{3}\sigma[(a_{2b})(b_{2b})(c_{2b}) - (a_{1b})(b_{1b})(c_{1b})], \tag{8.19}$$

$$-\frac{1}{\sigma}\oint_{min} pdV = \frac{4\pi}{3}[(a_{2b})(b_{2b})(c_{2b}) - (a_{1b})(b_{1b})(c_{1b})], \tag{8.20}$$

donde a_b, b_b, c_b están representando al valor de los factores de escala en el instante en el que se produce el rebote. Según esta expresión, el cambio en el tamaño mínimo del Universo varia de manera inversa a la densidad de energía del rebote, es decir

$$\frac{4\pi}{3}[(a_{2b})(b_{2b})(c_{2b}) - (a_{1b})(b_{1b})(c_{1b})] \propto \frac{1}{\sigma}. \tag{8.21}$$

8.2. Histéresis cosmológica en Universo con constante cosmológica negativa

También analizamos el caso de un Universo cíclico con campo escalar y constante cosmológica negativa, la cual esta descrita por la ecuación

$$\dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c} = \pm\sqrt{\frac{3\rho}{m_p^2}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - 3\Lambda}(abc). \tag{8.22}$$

Tomando en cuenta la densidad de energía máxima en el instante del retorno dado por (7.40), el bucle de histéresis en el ciclo de expansión-contracción dado por la ecuación (8.13) esta dado por

$$\begin{aligned} -\oint_{max} pdV =& \frac{4}{3}\pi\left[\rho_2^{max}(a_2^{max})(b_2^{max})(c_2^{max}) - \rho_1^{max}(a_1^{max})(b_1^{max})(c_1^{max})\right], && (8.23)\\ =& \frac{4\pi}{3}\left[\Lambda m_p^2(a_{r2})(b_{r2})(c_{r2}) - \Lambda m_p^2(a_{1r})(b_{1r})(c_{1r})\right], && (8.24)\\ =& \frac{4\pi\Lambda m_p^2}{3}\left[(a_{r2})(b_{r2})(c_{r2}) - (a_{1r})(b_{1r})(c_{1r})\right]. && (8.25) \end{aligned}$$

Notamos que el cambio del tamaño máximo del Universo depende de forma inversa al valor de la constante cosmológica.

$$\frac{4\pi}{3}\left[(a_{r2})(b_{r2})(c_{r2}) - (a_{1r})(b_{1r})(c_{1r})\right] \propto \frac{1}{\Lambda m_p^2}. \tag{8.26}$$

Para el bucle de histéresis del ciclo expansión-contracción según la ecuación (8.14) y (7.39) obtenemos

$$\begin{aligned} -\oint_{min} pdV =& \frac{4}{3}\pi\left[\rho_2^{min}(a_2^{min})(b_2^{min})(c_2^{min}) - \rho_1^{min}(a_1^{min})(b_1^{min})(c_1^{min})\right] && (8.27)\\ =& \frac{4\pi}{3}\left[(\sigma - \Lambda m_p^2)(a_{b2})(b_{b2})(c_{b2}) - (\sigma - \Lambda m_p^2)(a_{b1})(b_{b1})(c_{b1})\right], && (8.28) \end{aligned}$$

factorizando σ se obtiene

$$-\oint_{min} pdV = \frac{4\pi}{3}\sigma\left(1 - \frac{\Lambda m_p^2}{\sigma}\right)[(a_{b2})(b_{b2})(c_{b2}) - (a_{b1})(b_{b1})(c_{b1})], \tag{8.29}$$

y dado que $\Lambda \ll \sigma$ se puede aproximar

$$\frac{\Lambda m_p^2}{\sigma} \approx 0. \tag{8.30}$$

Tomando en cuenta esta aproximación en la ecuación (8.29) se obtiene

$$-\oint_{min} \approx \frac{4}{3}\pi\sigma[(a_{b2})(b_{b2})(c_{b2}) - (a_{b1})(b_{b1})(c_{b1})].$$

Ademas, el incremento en el tamaño mínimo del Universo disminuirá a medida que aumente la escala energética del rebote

$$\frac{4}{3}\pi[(a_{b2})(b_{b2})(c_{b2}) - (a_{b1})(b_{b1})(c_{b1})] \propto \frac{1}{\sigma}. \tag{8.31}$$

Conclusiones

El primer resultado obtenido en la presente tesis fue mostrar la compatibilidad entre los resultados obtenidos numéricamente de la métrica de Friedmann y Bianchi I al considerar la isotropia con $a(t) = b(t) = c(t)$. Este resultado es importante ya que permitió demostrar la validez de nuestro conjunto de ecuaciones diferenciales y esto permitió realizar el estudio para el caso anisotrópico. Además, las condiciones iniciales para las derivadas de los factores de escala al inicio están restringidas por la ecuación (6.6).

Se demostró numéricamente que la presencia del campo escalar inflaton es capaz de producir de forma natural un periodo de expansión acelerada (periodo inflacionario), posterior a un big bounce en un universo anisotrópico.

Por medio de la implementación del potencial de tipo Higgs y de la constante cosmológica negativa se demostró numéricamente la evolución de un universo cíclico anisotrópico. Para el caso del potencial de Higgs se observó como el tamaño mínimo y máximo del Universo se incrementa para los factores de escala $a(t)$ y $c(t)$ mientras que para el factor de escala $b(t)$ tuvo un comportamiento diferente. Para el caso de la constante cosmológica negativa el tamaño máximo y mínimo del Universo se incrementa de forma gradual en cada ciclo.

Mediante el estudio de la histéresis cosmológica se demostró que el aumento del tamaño mínimo del Universo en el caso del potencial de Higgs y constante cosmológica negativa decrece a medida que incrementa la escala energética del rebote, para el caso de la constante cosmológica negativa se obtuvo que el cambio en el tamaño máximo del universo varia de forma inversa al valor de la constante cosmológica. Además, los incrementos del tamaño máximo y mínimo del universo depende solamente de los parámetros fundamentales de cada modelo y no de las condiciones iniciales que se establece en cada modelo.

Bibliografía

[1] Liddle, A. An introduction to modern cosmology. John Wiley & Sons, 2015.

[2] Einstein, A., Minkowski, H. The principle of relativity; original papers. 1920. URL `https://archive.org/details/principleofrelat00eins`.

[3] Mukhanov, V. Physical foundations of cosmology. Cambridge university press, 2005.

[4] Hubble, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15** (3), 168–173, 1929.

[5] Maartens, R. Is the universe homogeneous? *Phil. Trans. R. Soc. A*, **369** (1957), 5115–5137, 2011.

[6] Liddle, A. R., Lyth, D. H. Cosmological inflation and large-scale structure. Cambridge University Press, 2000.

[7] Frank Watson Dyson, A. S. E., Davidson, C. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the local eclipse of may 29, 1919, 1920.

[8] Newton, I. Principios matemáticos de la filosofia natural y su sistema del mundo. Editora Nacional, Madrid, 1982.

[9] D'Inverno, R. Introducing Einstein's Relativity. Oxford University Press, 1992.

[10] Taylor, E. F., Wheeler, J. A. Spacetime physics. Macmillan, 1992.

[11] Ryder, L. Introduction to general relativity. Cambridge University Press, 2009.

[12] Alcubierre, M., M. Bauer, Barrera, R. Analogias y conexiones en la física. Open Access with an Open Mind, 2020.

[13] Schutz, B. A first course in general relativity. Cambridge university press, 2009.

[14] Ade, P. A., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., *et al.* Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, **594**, A13, 2016.

[15] Springel, V., White, S. D., Jenkins, A., Frenk, C. S., Yoshida, N., Gao, L., *et al.* Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, **435** (7042), 629, 2005.

[16] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, **116** (3), 1009, 1998.

[17] Bertone, G., Hooper, D., Silk, J. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Physics Reports*, **405** (5-6), 279–390, 2005.

[18] Jackson, J. D. Electrodynamics. Wiley Online Library, 1975.

[19] Padilla, A. Lectures on the cosmological constant problem. *arXiv preprint arXiv:1502.05296*, 2015.

[20] Guth, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, **23** (2), 347, 1981.

[21] Linde, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, **108** (6), 389–393, 1982.

[22] Albrecht, A., Steinhardt, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Physical Review Letters*, **48** (17), 1220, 1982.

[23] Ade, P., Aghanim, N., Arnaud, M., Arroja, F., Ashdown, M., Aumont, J., *et al.* Planck 2015 results-xx. constraints on inflation. *Astronomy & Astrophysics*, **594**, A20, 2016.

[24] Wright, E. L. Theoretical overview of cosmic microwave background anisotropy. *arXiv preprint astro-ph/0305591*, 2003.

[25] Rudd, J., Whelan, K. Modeling inflation dynamics: A critical review of recent research. *Journal of Money, Credit and Banking*, **39** (s1), 155–170, 2007.

[26] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., Lasenby, A. N. General relativity: an introduction for physicists. Cambridge University Press, 2006.

[27] Carroll, S. M. Spacetime and geometry. An introduction to general relativity. Addison Wesley, 2004.

[28] Kofman, L., Linde, A., Starobinsky, A. A. Reheating after inflation. *Physical Review Letters*, **73** (24), 3195, 1994.

[29] Martin, J., Ringeval, C., Vennin, V. Observing inflationary reheating. *Physical review letters*, **114** (8), 081303, 2015.

[30] Spergel, D. e. a. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Implication for cosmology. *Astrophysics. J. Suppl.*, **170**, 377–408, 2007.

[31] Saha, B. Anisotropic cosmological models with perfect fluid and dark energy. *arXiv preprint gr-qc/0412078*, 2004.

[32] Saha, B. Anisotropic cosmological models with a perfect fluid and a λ term. *Astrophysics and space science*, **302** (1), 83–91, 2006.

[33] Akarsu, K. Bianchi type i models with anisotropic dark energy and constant deceleration parameter. *arXiv preprint gr-qc/0807.4867*, 2010.

[34] Cáceres Uribe, D. Ecuación de desvío geodésico en cosmologías de Bianchi y sus implicaciones cosmológicas. [Tesis de maestría]. 2010.

[35] Mielczarek, J., Kamionka, M., Kurek, A., Szydłowski, M. Observational hints on the big bounce. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2010** (07), 004–004, jul 2010. URL `https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2010%2F07%2F004`.

[36] Maartens, R., Koyama, K. Brane-world gravity. *Living Reviews in Relativity*, **13** (1), 5, 2010.

[37] Steinhardt, T. The cyclic universe: An informal introduction. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, **124**, 38–49, 2003.

[38] Sahni, V., Toporensky, A. Cosmological hysteresis and the cyclic universe. *Physical Review D*, **85** (12), 123542, 2012.

[39] Choudhury, S., Banerjee, S. Hysteresis in the sky. *Astroparticle Physics*, **80**, 34–89, 2016.