Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Topología del problema de migración de datos

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Matemática Pura

AUTOR

Wilman Francisco CUBA RAMOS

ASESOR

Dr. César Augusto IPANAQUÉ ZAPATA

Lima, Perú

2023



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Cuba, W. (2023). *Topología del problema de migración de datos.* [Tesis de doctorado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Wilman Francisco Cuba Ramos
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06510129
URL de ORCID	
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	César Augusto Ipanaqué Zapata
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	45870854
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-2558-894X
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Josué Alonso Aguirre Enciso
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41341744
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445739
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Juan Elmer Villanueva Zevallos
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10009112
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.2. Topología y Geometría
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	No aplica
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.056445 Longitud: -77.085994
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Octubre 2022 - Junio 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADOUNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR

Siendo las 10:00 horas del día miércoles 20 de setiembre de dos mil veintitrés, en el Aula 105 de la Facultad de Ciencias Matemáticas, se reunió el Jurado Evaluador de tesis, presidido por el Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso e integrado por los siguientes miembros: Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (Jurado Informante) y el Dr. César Augusto Ipanaqué Zapata como Asesor; y con la participación del Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos (Jurado Externo), para la sustentación de la tesis titulada: **«TOPOLOGÍA DEL PROBLEMA DE MIGRACIÓN DE DATOS»,** presentada por el Magister **WILMAN FRANCISCO CUBA RAMOS**, para optar el **Grado Académico de Doctor en Matemática Pura**.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido al Magister **WILMAN FRANCISCO CUBA RAMOS**, el calificativo de 19 (Excelente).

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Doctor en Matemática Pura** al Magister **WILMAN FRANCISCO CUBA RAMOS.**

Siendo las 11:07 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso
PRESIDENTE

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
MIEMBRO

Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos
MIEMBRO EXTERNO

Dr. César Augusto Ipanaqué Zapata
ASESOR

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo **César Augusto Ipanaqué Zapata** en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° **001043-2023-D-FCM/UNMSM** de la tesis, cuyo título es **Topología del Problema de Migración de Datos**, presentado por el magíster **Wilman Francisco Cuba Ramos** para optar el grado de **Doctor en Matemática Pura**

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de **1** % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor _____

DNI: 45870854

Nombres y apellidos del asesor: César Augusto Ipanaqué Zapata

Dedicatoria

A la memoria del profesor Dr. **Pedro Celso Contreras Chamorro**, quien me abrió el camino y a todos aquellos que me ayudaron en este arduo trabajo.

Reconocimiento

Mi reconocimiento muy especial al profesor Dr. **César Augusto Ipanaque Zapata**, de quién recibí su invalorable apoyo durante el desarrollo de este trabajo, como profesor y asesor.

Asimismo, al Dr. **Alfonso Pérez Salvatierra**, decano de la Facultad de Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, quien fue mi primer profesor en el Doctorado, quien a mi como a muchos, me ha brindado siempre su ayuda franca.

Y por último, al profesor Dr. **Josué Alonso Aguirre Enciso**, quien no solo fue mi profesor los últimos dos años de mi doctorado, sino que tambien me relacionó con el mundo de la topología, sin lo cual, este trabajo no habría sido posible.

Índice general

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN **1**
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 1
1.1.1 Situación Problemática 1
1.1.2 Formulación del Problema 2
1.1.3 Justificación de la Investigación 3
1.1.4 Objetivos de la Investigación 4

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO **5**
2.1 Antecedentes de Investigación 5
2.2 Bases Teóricas 5
2.2.1 Teoría de grafos 5
2.2.2 Conceptos de Topología Algebraica 17

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA **21**
3.1 Diseño Metodológico 21
3.2 Método de investigación 23
3.3 Población y muestra 23
3.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado 23
3.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de información . . 23
3.6 Análisis y procesamiento de datos 23
3.7 Aspectos Éticos en Investigación. 23
3.8 Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa. 24
3.9 Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental. 24

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y DISCUSIÓN **25**
4.1 Análisis, interpretación y discusión de resultados 25
4.2 Presentación de resultados 25

4.2.1 Complejidad $C(G;H)$ 25
4.2.2 Número seccional de un homomorfismo 40

CONCLUSIONES **51**

RECOMENDACIONES **52**

Resumen: En este trabajo presentaremos las siguientes nociones que nos permitirán estudiar la topología del problema de migración de datos:

(1) *Complejidad*. Se introduce esta noción como una medida matemática para el problema de la migración de datos.

(2) *Número seccional de un homomorfismo*. Este invariante numérico esta relacionado con la complejidad, en particular la complejidad es una cota inferior para el número seccional.

Palabras clave: Grafo, complejidad, homomorfismo de grafos, isomorfismo de grafos, migración, casi-migración, sección transversal, número seccional, complejo celular, coloración, número cromático.

TOPOLOGY OF THE DATA MIGRATION PROBLEM

In this paper we will present the following notions that will allow us to study the topology of the data migration problem.

(1) *Complexity*. This notion is introduced as a mathematical measure for the problem of data migration.

(2) *Sectional number of a homomorphism*. This numerical invariant is related to the complexity, for instance the complexity is a lower bound for the sectional number.

Keywords: Graph, complexity, graph homomorphism, graph isomorphism, migration, quasi-migration, cross section, sectional number, cell complex, coloration, chromatic number.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1. Situación Problemática

En la actualidad, el mapeo de base de datos [5, pg. 4] con fines de migración de un sistema a otro es una área de frecuente trabajo en el área computacional, sin embargo implica un nivel de especialización muy alto sobre todo cuando se trata de sistemas muy complejos y grandes (cada vez en mayor número), lo que se traduce en altos costos [15], [12], [9]. De allí la importancia y necesidad de investigar nuevas áreas que ofrezcan perspectivas amplias de solución con costos mas asequibles a los presupuestos. Por ejemplo, el trabajo [14] usa la maquinaria de Teoría de Categorías para estudiar el problema de migración. El autor en base a su larga experiencia con sistemas de migraciones, ha reconocido las masivas ventajas adicionales que ganaría el mapeo en el marco de migraciones, abriendo el ámbito de la Matemática con apoyo de disciplinas como la Topología Algebraica, en particular la Teoría de Grafos. Esta tesis prueba la viabilidad de este desarrollo por venir.

Este trabajo introduce desde el punto de vista del autor las siguientes relevantes innovaciones:

- El mapeo de estructuras de datos de un sistema G a un sistema H (migración), se hace en base a tablas y relaciones entre tablas. En este trabajo se hará uso de la Topología Algebraica, en particular Teoría de Grafos, asociando las tablas a los vértices del grafo y las relaciones a los ejes (aristas) correspondientes. De esta manera, el mapeo se hará del grafo representando al sistema G al grafo representando al sistema H. De este modo la migración tiene a su disposición aquellas propiedades que son inherentes a los grafos cuando sean relevantes. Entre ellas se

puede mencionar el concepto de homomorfismo de grafos, el cual es fundamental para determinar la forma de la migración.

- Introducción del concepto de la complejidad para estudiar la topología y combinatoria del problema de migración.

Las ideas primigenias resultan de la larga experiencia industrial del autor en proyectos de migración de datos.

1.1.2. Formulación del Problema

Problema general: ¿De qué modo se puede hacer un mapeo de una estructura de datos a otra estructura utilizando herramientas matemáticas?

Problemas específicos:

i) ¿De qué modo se puede estudiar la existencia de homomorfismo entre dos grafos dados a través de invariantes tales como: grado o índice de un vértice y número cromático?

ii) ¿Es posible definir un invariante numérico que permita medir la dificultad del problema de existencia de homomorfismos de grafos?

iii) ¿Es posible definir la menor cantidad de homomorfismos de grafos locales entre dos grafos dados?

iv) ¿Es posible estudiar el problema inverso de una migración?

Este trabajo pretende desarrollar una nueva metodología para que a través de los grafos y sus propiedades se pueda estudiar el problema de migración. En general, no siempre es posible encontrar una migración de datos. En este trabajo presentamos y usamos un invariante numérico (llamado complejidad para el problema de migración) como herramienta de apoyo para evaluar la topología del problema de migración. Además, este invariante numérico permite conocer *casi*-migraciones *óptimas* de datos. El aporte de una nueva metodología con herramientas matemáticas no convencionales, debe hacer posible la ampliación de los resultados en esta nueva corriente. De donde se desprende que, este trabajo solo se limitará a estudiar un contexto definido del problema que es el estudio del homomorfismo de grafos usando la complejidad para realizar casi-migraciones de una estructura de datos a otra estructura.

1.1.3. Justificación de la Investigación

Mapeo de estructuras de datos con fines de migración en la computación es una actividad con grandes desafíos [15], [12], [9]. Actualmente, las migraciones tienen en general las siguientes desventajas:

- son altamente empíricas.
- se basan en el ensayo y el error.
- generan enormes costos.
- implementación por personal altamente calificado debido a su complejidad.

Frente a esta situación, es un gran desafío encontrar herramientas, en particular herramientas matemáticas, para resolver el problema de migración.

Una base de datos [5, pg. 4] está conformada por tablas y columnas. Matemáticamente se puede pensar que una base de datos es un grafo [3, pg. 4], cuyos vértices son las tablas y cuyos ejes son determinados por las columnas [14, Example 2.1.1, pg. 34]. Todo grafo es un complejo CW [6, pg. 83]. Una migración básicamente lleva tablas en tablas y columnas en columnas. Así, una migración es un homomorfismo de grafos entre los grafos de las bases de datos dadas.

Técnicamente un contexto del problema de migración está dado de la siguiente forma [15], [12], [9]:

- Se define una funcionalidad (ejemplo: Administración de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos en Lima-Perú).
- Para la funcionalidad definida se implementa un sistema o base de datos G (equivalente a un grafo G).
- Después de un tiempo el sistema G necesita ser remplazado total o parcialmente con el sistema H (equivalente a un grafo H). El sistema H puede ser una versión mejorada de G o incluso de un proveedor completamente diferente. Notar que G y H implementan la misma funcionalidad con modelos propios.
- El sistema G (equivalente a un grafo G) se migra al sistema H (equivalente a un grafo H). En este caso los sistemas (o subsistemas) pueden tener de manera inherente estructuras equivalentes debido a que la funcionalidad es común. Este trabajo estudia el modo de mapear los elementos del sistema G a los elementos del sistema H a través de

migraciones (equivalentemente, homomorfismos de grafos), ya sea de forma total o parcial, que puedan existir entre los dos sistemas.

Las siguientes ventajas se hacen evidentes:

- proceso predecible y sobre todo confiable (no empírico).
- resultados inmediatos con las relaciones correspondientes (no se necesita ensayo y error).
- costos asequibles.
- personal altamente calificado necesario solo para validación.

El concepto de complejidad que se presentará en este trabajo, será la herramienta central en base a la cual se desarrollará este trabajo. Dados dos grafos (dirigidos o no), con esta herramienta se estudiará la menor cantidad de subgrafos de G que cubran G, de modo que sus partes puedan ser mapeadas mediante un homomorfismo de grafos en el grafo H. Este enfoque es parte de la teoría de categoría seccional [13], [18], la cual es un tema propio de la Topología Algebraica.

1.1.4. Objetivos de la Investigación

Objetivo General

Objetivo central de este trabajo es el estudio de la existencia de homomorfismo entre dos grafos dados. En caso que exista encontrar tal homomorfismo.

Objetivos Específicos

(1) Estudiar la existencia de homomorfismo entre dos grafos dados a través de invariantes tales como: índice o grado de un vértice y número cromático.

(2) Definir el concepto de complejidad entre dos grafos para medir el problema de existencia de homomorfismos de grafos entre ellos.

(3) Diseñar homomorfismos de grafos óptimos.

(4) Definir el concepto de número seccional de un homomorfismo de grafos para estudiar el problema inverso de una migración.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de Investigación

El problema de la existencia de un homomorfismo de grafos es un problema difícil [8] y propio de la Teoría de Grafos [2],[4]. Sin embargo en el contexto de migraciones como se plantea en este trabajo, de acuerdo al levantamiento bibliográfico hecho por el autor los antecedentes encontrados no son despreciables. Se puede en este caso citar el trabajo [14], el cual presenta un estudio que define un lenguaje de definición de base datos usando categorías que permitan la migración de datos.

2.2. Bases Teóricas

En este trabajo usamos las siguientes teorías:

- Teoría de Grafos, entre ellos los conceptos de grafos (dirigidos o no), subgrafos, homomorfismo de grafos, homomorfismo inyectivo de grafos, isomorfismo, homomorfismo restricción, índice de un vértice y número cromático.
- De la Topología Algebraica usaremos CW complejos, aplicación celular, grupo fundamental, cobertura, número seccional, sección transversal.

En esta sección, se presentan los conceptos básicos ha ser utilizados en este trabajo.

2.2.1. Teoría de grafos

En esta sección vamos a presentar una revisión de la teoría de grafos. Empezaremos recordando el concepto de grafo dirigido y no dirigido.

Definición 2.2.1. [7, pg. 1]

i) Un *grafo dirigido* G es un conjunto finito $V = V(G)$, cuyos elementos son llamados *vértices*, junto con una relación binaria $E = E(G) \subset V \times V$. Los elementos $(u, v) \in E$ son llamados *arcos* de G.

ii) Un grafo dirigido $G = (V, E)$ es llamado *simétrico* (respectivamente, *reflexivo*) si la relación E es simétrica (respectivamente, reflexiva).

iii) Un *grafo no dirigido* (o simplemente un *grafo*) G es un conjunto $V = V(G)$, cuyos elementos son llamados *vértices*, junto con un conjunto $E = E(G)$ de *ejes* o *aristas*, cada uno de los cuales es un conjunto de vértices con uno o dos elementos.

Tendremos también en cuenta la siguiente observación.

Observación 2.2.2. [7, pg. 1]

1. Note que, un grafo dirigido simétrico se puede considerar como un grafo no dirigido.

2. Una arista de un grafo (no dirigido) es llamado un *lazo* cuando tal arista tiene un único vértice. En el caso de un grafo dirigido, una arco (u, v) es llamado un *lazo* cuando $u = v$.

3. Por convención uv representa el arco (u, v) o el eje $\{u, v\}$ dependiendo del contexto.

4. Si $uv \in E(G)$ diremos que u y v son *adyacentes* o *vecinos*.

5. Si G es un grafo (no dirigido), note que $uv = vu$.

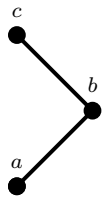
6. Si uv es un arco en un grafo dirigido diremos que u y v son *adyacentes en la dirección de u para v* o que u es un *vecino entrante* de v y v un *vecino saliente* de u.

7. El número de vecinos de v (distintos de v) es llamado el *grado* o *índice* de v, denotado por $\deg(v)$.

8. El número de vecinos entrantes (respectivamente salientes) de v es llamado el *grado entrante* (respectivamente, *grado saliente*) de v, denotado por $\text{indeg}(v)$ (respectivamente, $\text{outdeg}(v)$). El *grado total* de v está dado por $\deg(v) = \text{indeg}(v) - \text{outdeg}(v)$.

Para fijar ideas presentamos el siguiente ejemplo de grafo (no dirigido) junto con los grados de cada uno de sus vértices.

Ejemplo 2.2.3. Considere el grafo no dirigido G dado por $V(G) = \{a, b, c\}$ y $E(G) = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$.

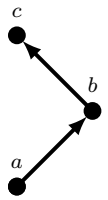


G

Tenemos $\deg(a) = 1, \deg(b) = 2$ y $\deg(c) = 1$.

Ahora, presentamos un ejemplo de un grafo dirigido junto con los respectivos grados de sus vértices.

Ejemplo 2.2.4. Considere el grafo dirigido G dado por $V(G) = \{a, b, c\}$ y $E(G) = \{(a, b), (b, c)\}$.



G

Tenemos

$$\begin{aligned} \text{indeg}(a) &= 0, \\ \text{outdeg}(a) &= 1, \\ \deg(a) &= -1. \\ \text{indeg}(b) &= 1, \\ \text{outdeg}(b) &= 1, \\ \deg(b) &= 0. \\ \text{indeg}(c) &= 1, \\ \text{outdeg}(c) &= 0, \\ \deg(c) &= 1. \end{aligned}$$

Un grafo (no dirigido) sin lazos G es llamado *completo* si cada vértice es adyacente a todos los otros vértices. El grafo completo de n vértices es denotado por K_n.

Ahora, recordamos el concepto de subgrafo.

Definición 2.2.5. [7, pg. 2]

1) Sean G, H grafos (dirigidos o no). Decimos que G es un *subgrafo* de H si $V(G) \subset V(H)$ y $E(G) \subset E(H)$.

2) Sea G un grafo (no dirigido). Un *clique* en G es un subgrafo completo de G.

Dado un grafo (dirigido o no) G, para cada subconjunto $S \subset V(G)$, el *subgrafo inducido* por S, denotado por $G[S]$, es el grafo (dirigido o no) con vértices S y vértices adyacentes si ellos son adyacentes en G [3, pg. 49].

Otro concepto que usaremos en este trabajo es la unión de grafos.

Definición 2.2.6. [3, pg. 29] Dado un grafo (dirigido o no) G y una familia $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subgrafos de G, denotaremos por $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ a la *unión* de $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, el cual es el grafo con conjunto de vértices $V\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V(G_\lambda)$ y conjunto de arcos(respectivamente, ejes) $E\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E(G_\lambda)$. Note que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ es un subgrafo de $G\left[\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V(G_\lambda)\right]$.

Análogamente, para el caso de la intersección, podemos dar la siguiente definición.

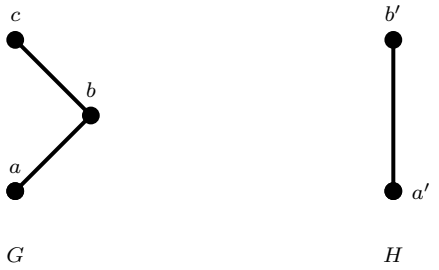
Definición 2.2.7. Dado un grafo (dirigido o no) G y una familia $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subgrafos de G, denotaremos por $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ a la *intersección* de $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, el cual es el grafo con conjunto de vértices $V\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(G_\lambda)$ y conjunto de ejes $E\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E(G_\lambda)$.

Ahora, recordemos el concepto de homomorfismo de grafos, ya que es clave para este trabajo.

Definición 2.2.8. [7, pg. 3] Sean G y H grafos (dirigidos o no). Un *homomorfismo* de G en H, denotado por $f : G \to H$, (lo denotaremos abreviadamente $G \to H$) es una aplicación $f : V(G) \to V(H)$ tal que $f(u)f(v) \in E(H)$ siempre que $uv \in E(G)$.

A seguir, veamos un ejemplo de homomorfismo entre grafos no dirigidos.

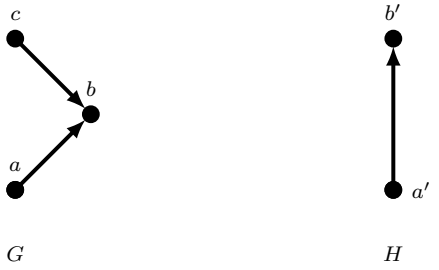
Ejemplo 2.2.9. Considere los grafos no dirigidos G y H, dados por $V(G) = \{a, b, c\}$, $E(G) = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$, $V(H) = \{a', b'\}$ y $E(H) = \{\{a', b'\}\}$.



La aplicación $f : V(G) \to V(H)$, dada por $f(a) = a' = f(c)$ y $f(b) = b'$, es un homomorfismo de G en H, ya que $f(a)f(b) = \{f(a), f(b)\} = \{a', b'\} = a'b' \in E(H)$ y $f(c)f(b) = a'b' \in E(H)$.

Ahora, veamos un ejemplo de homomorfismo entre grafos dirigidos.

Ejemplo 2.2.10. Considere los grafos dirigidos G y H, dados por $V(G) = \{a, b, c\}$, $E(G) = \{(a, b), (c, b)\}$, $V(H) = \{a', b'\}$ y $E(H) = \{(a', b')\}$.



La aplicación $f : V(G) \to V(H)$, dada por $f(a) = a' = f(c)$ y $f(b) = b'$, es un homomorfismo de G en H, ya que $f(a)f(b) = (f(a), f(b)) = (a', b') = a'b' \in E(H)$ y $f(c)f(b) = a'b' \in E(H)$.

Note que, homomorfismos de grafos preservan adyacencia, mientras que homomorfismos de grafos dirigidos también preservan las direcciones de los arcos. Así, un homomorfismo de grafos dirigidos $f : G \to H$ es también un homomorfismo de los grafos subyacentes. El regreso no es verdad.

El siguiente ejemplo permite recordar dos ejemplos estándar de homomorfismos: el homomorfismo identidad y el homomorfismo inclusión.

Ejemplo 2.2.11. Sea G un grafo (dirigido o no).

1) Dado un grafo G, el *homomorfismo identidad* $1_G : G \to G$ está definido por $1_G(v) = v$, para cualquier vértice $v \in V(G)$.

2) Dado K subgrafo de G, el *homomorfismo inclusión* $incl_K : K \hookrightarrow G$ está definido por $incl_K(v) = v$, para cualquier vértice $v \in V(K)$.

La imagen homomórfica de un homomorfismo está dada en la siguiente definición.

Definición 2.2.12. [7, pg. 9] Sea $f : G \to H$ un homomorfismo entre grafos (dirigidos o no). El grafo (respectivamente, grafo dirigido) con vértices $\{f(v)\}_{v \in V(G)}$, y ejes (respectivamente, arcos) $\{f(u)f(v)\}_{uv \in E(G)}$, es llamado la *imagen homomórfica* de G mediante f y es denotado por $f(G)$.

Note que, $f(G)$ es un subgrafo de H y $f : G \to f(G)$ es un homomorfismo sobreyectivo. Además, si $f : G \to H$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $H = f(G)$.

La noción de la imagen inversa de un subgrafo será útil para nuestros fines, así que lo presentamos en la siguiente definición.

Definición 2.2.13. Sean G y H (grafos dirigidos o no). Dada una aplicación $f\colon V(G) \to V(H)$ y un subgrafo K de H. Denotemos por $f^{-1}(K)$ el *grafo imagen inversa* de K *mediante* f, el cual es el grafo con conjunto de vértices $V = f^{-1}(V(K))$ y dos vértices $v_1, v_2 \in V$ son adyacentes si ellos son adyacentes en G y los vértices $f(v_1), f(v_2) \in V(K)$ son adyacentes en K.

Note que, $f^{-1}(K)$ es un subgrafo de G y la aplicación restricción $f_| : f^{-1}(V(K)) \to V(K)$ es un homomorfismo, el cual será denotado por $f_{|K} : f^{-1}(K) \to K$.

Observación 2.2.14. [7, pg. 3]

(1) Un homomorfismo de G en H es también llamado una *H-coloración* de G.

(2) Cuando exista un homorfismo $f : G \to H$ escribiremos $G \to H$ y en caso que no exista escribiremos $G \not\to H$.

(3) Cuando $G \to H$ diremos que G es *homomorfo* a H o que G es *H-coloreable*.

Note que, la composición $f \circ g$ de homomorfismos $g : G \to H$ y $f : H \to K$ es un homomorfismo de G en K. Denotaremos por $\mathrm{Hom}(G, H)$ al conjunto de todos los homomorfismos $f : G \to H$ y $\hom(G, H)$ denota el número de elementos de $\mathrm{Hom}(G, H)$ (ver [7, pg. 3]).

También, observe que, para H un grafo sin lazos (o un grafo dirigido irreflexivo) y $f : G \to H$, tenemos que $f(u)f(v) \in E(H)$ implica que $f(u) \neq f(v)$, ya que los ejes de H consisten de dos elementos distintos.

Definición 2.2.15. [7, pg. 4] Sea G un grafo.

a) Un *paseo* en G es una secuencia de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_k$ de G tal que v_{i-1} y v_i son adyacentes, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Un paseo es *cerrado* si $v_0 = v_k$.

b) Un *camino* en G es un paseo en el cual todos los vértices son distintos.

c) El entero k es llamado la *longitud* del paseo, respectivamente del camino.

Ejemplo 2.2.16. [7, pg. 4] El grafo con vértices $0, 1, \ldots, k$ y ejes $01, 12, \ldots, (k-1)k$ es llamado el camino P_k. Note que P_k tiene $k+1$ vértices y k ejes.

Un grafo G es llamado un *árbol* si cualesquier dos vértices están conectados por un único camino. Por ejemplo, el camino P_k es un árbol.

Lema 2.2.17. [7, Proposition 1.1, pg. 4] Sea G un grafo. Una aplicación $f : V(P_k) \to G$ es un homomorfismo de P_k en G si, y solamente si, la secuencia $f(0), f(1), \ldots, f(k)$ es un paseo en G.

Demostración. Supongamos que $f : V(P_k) \to G$ es un homomorfismo de P_k en G. Sea $i = 1, 2, \ldots, k$ y note que $(i-1)i \in E(P_k)$, luego $f(i-1)f(i) \in E(G)$. Así, $f(0), f(1), \ldots, f(k)$ es un paseo en G.

Recíprocamente, supongamos que la secuencia $f(0), f(1), \ldots, f(k)$ es un paseo en G. Sea $i = 1, 2, \ldots, k$ y note que $f(i-1)f(i) \in E(G)$, luego $f : V(P_k) \to G$ es un homomorfismo de P_k en G. □

El Lema 2.2.17 muestra que homomorfismos de G en H aplican caminos en G para paseos en H y así no aumentan longitudes.

Definición 2.2.18. [7, pg. 4] Sea G un grafo. Sean $u, v \in V(G)$, la *distancia* de u para v está dado

$$\mathrm{d}_G(u, v) = \text{mín}\{k : \text{ existe un camino } v_0, v_1, \ldots, v_k \text{ en } G \text{ con } v_0 = u \text{ y } v_k = v\}.$$

Proposición 2.2.19. [7, Corollary 1.2, pg. 4] Si $f : G \to H$ es un homomorfismo, entonces $\mathrm{d}_H(f(u), f(v)) \leq \mathrm{d}_G(u, v)$, para cualesquier vértices $u, v \in G$.

Demostración. Supongamos que $k = \mathrm{d}_G(u, v)$ y considere el camino $v_0, v_1, \ldots, v_k$ en G con $v_0 = u$ y $v_k = v$. Por el Lema 2.2.17, tenemos que $f(v_0), f(v_1), \ldots, f(v_k)$ es un paseo de longitud k en H. Como cada paseo de $f(u)$ para $f(v)$ contiene un camino de $f(u)$ para $f(v)$, obtenemos que $\mathrm{d}_H(f(u), f(v)) \leq k$. Así, $\mathrm{d}_H(f(u), f(v)) \leq \mathrm{d}_G(u, v)$. □

Definición 2.2.20. [7, pg. 4] Sea G un grafo. Un *ciclo* en G es una secuencia de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de G tal que v_{i-1} y v_i son adyacentes, para cada $i = 2, \ldots, k$, y v_1 es adyacente a v_k.

Note que, tal ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_k$ es el paseo cerrado

$$u_0 = v_1, u_1 = v_2, \ldots, u_{k-1} = v_k, u_k = v_1,$$

de longitud k. Así, diremos que el ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tiene longitud k.

Ejemplo 2.2.21. [7, pg. 4]

(i) El grafo con vértices $0, 1, \ldots, k-1$ y ejes $01, 12, \ldots, (k-2)(k-1), (k-1)0$ es llamado el ciclo C_k. Note que C_k tiene k vértices y k ejes.

(ii) Note que un ciclo C_k, con k impar, no tiene paseos cerrados de longitud impar menor que k. Así, todo paseo cerrado con longitud impar en C_k, con k impar, tiene longitud mayor o igual a k.

Lema 2.2.22. [7, Proposition 1.3, pg. 4] Sea G un grafo. Una aplicación $f : V(C_k) \to G$ es un homomorfismo de C_k en G si, y solamente si, la secuencia $f(0), f(1), \ldots, f(k-1), f(0)$ es un paseo cerrado en G.

Demostración. Supongamos que $f : V(C_k) \to G$ es un homomorfismo de C_k en G. Sea $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y note que $(i-1)i \in E(C_k)$ y $(k-1)0 \in E(C_k)$, luego $f(i-1)f(i) \in E(G)$ y $f(k-1)f(0) \in E(G)$. Así, $f(0), f(1), \ldots, f(k-1), f(0)$ es un paseo cerrado en G.

Recíprocamente, supongamos que la secuencia $f(0), f(1), \ldots, f(k-1), f(0)$ es un paseo cerrado en G. Sea $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y note que $f(i-1)f(i) \in E(G)$, $f(k-1)f(0) \in E(G)$ luego $f : V(C_k) \to G$ es un homomorfismo de C_k en G. □

La siguiente afirmación caracteriza la existencia de un homomorfismo entre ciclos impares.

Proposición 2.2.23. [7, Corollary 1.4, pg. 4] Tenemos que $C_{2k+1} \to C_{2\ell+1}$ si, y solamente si, $\ell \leq k$.

Demostración. Supongamos que existe $f : C_{2k+1} \to C_{2\ell+1}$, luego por el Lema 2.2.22, $f(0), f(1), \ldots, f(2k), f(0)$ es un paseo cerrado de longitud impar $2k+1$ en $C_{2\ell+1}$. Entonces, $2k+1 \geq 2\ell+1$ (ver Ítem (ii) del Ejemplo 2.2.21) y así $\ell \leq k$.

Supongamos que $k = \ell + m$ y considere $f : C_{2k+1} \to C_{2\ell+1}$ dada por

$$f(j) = \begin{cases} j, & \text{para } 0 \leq j \leq 2\ell; \\ 2\ell - 1, & \text{para } j = 2\ell + n \text{ con } 1 \leq n \leq 2m, \ n \text{ impar}; \\ 2\ell, & \text{para } j = 2\ell + n \text{ con } 1 \leq n \leq 2m, \ n \text{ par}. \end{cases}$$

□

Note que, todo homomorfismo $f : G \to H$ induce una aplicación $f^{\#} : E(G) \to E(H)$ dada por $f^{\#}(uv) = f(u)f(v)$ para todo $uv \in E(G)$.

Definición 2.2.24. [7, pg. 4] Sea $f : G \to H$ un homomorfismo.

(i) f es *vértice-inyectivo* (respectivamente, *vértice-sobreyectivo*, *vértice-biyectivo*) si la aplicación $f : V(G) \to V(H)$ es inyectiva (respectivamente, sobreyectiva, biyectiva).

(ii) f es *eje-inyectivo* (respectivamente, *eje-sobreyectivo*, *eje-biyectivo*) si la aplicación $f^{\#} : E(G) \to E(H)$ es inyectiva (respectivamente, sobreyectiva, biyectiva).

(iii) f es un *homomorfismo inyectivo* (respectivamente, *homomorfismo sobreyectivo*, *homomorfismo biyectivo*) si $f : V(G) \to V(H)$ es vértice-inyectivo y eje-inyectivo (respectivamente, vértice-sobreyectivo y eje-sobreyectivo, vértice-biyectivo y eje-biyectivo).

Diremos que G es *isomorfo* a H si existe un homomorfismo biyectivo $h : G \to H$ cuya inversa $h^{-1} : V(H) \to V(G)$ es un homomorfismo.

Note que $f : G \to H$ es un homomorfismo inyectivo si, y solamente si, f es vértice-inyectivo. Además, $h : G \to H$ es un isomorfismo si, y solamente si, h es un homomorfismo biyectivo.

La siguiente afirmación muestra una condición necesária para la existencia de un homomorfismo inyectivo en términos de los grados.

Proposición 2.2.25.

(1) Sean G y H grafos. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo inyectivo, entonces $\deg(v) \leq \deg(f(v))$, para cada $v \in V(G)$.

(2) Sean G y H grafos dirigidos. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo inyectivo, entonces, para cada $v \in V(G)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{indeg}(v) &\leq \operatorname{indeg}(f(v)), \\ \operatorname{outdeg}(v) &\leq \operatorname{outdeg}(f(v)). \end{aligned}$$

Demostración.

(1) Sea $v \in V(G)$. Si $\deg(v) = 0$, o sea, v es un vértice aislado, entonces, es claro que $\deg(v) = 0 \leq \deg(f(v))$. Supongamos que $\deg(v) = n \geq 1$, i.e., existen $v_1, \ldots, v_n \in V(G)$ tales que $v_i v \in E(G)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Como f es un homomorfismo de grafos, tenemos que $f(v_i)f(v) \in E(H)$. Además, como f es inyectivo, sigue que $\deg(f(v)) \geq n = \deg(v)$. Por lo tanto, concluimos que $\deg(v) \leq \deg(f(v))$, para cada $v \in V(G)$.

(2) Sea $v \in V(G)$. Si $\text{indeg}(v) = 0$, es claro que $\text{indeg}(v) = 0 \leq \text{indeg}(f(v))$. Supongamos que $\text{indeg}(v) = n \geq 1$, i.e., existen $v_1, \ldots, v_n \in V(G)$ tales que $v_i v \in E(G)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Como f es un homomorfismo de grafos dirigidos, tenemos que $f(v_i)f(v) \in E(H)$. Además, como f es inyectivo, sigue que $\text{indeg}(f(v)) \geq n = \text{indeg}(v)$. Por lo tanto, concluimos que $\text{indeg}(v) \leq \text{indeg}(f(v))$, para cada $v \in V(G)$.

Análogamente, sea $v \in V(G)$. Si $\text{outdeg}(v) = 0$, es claro que $\text{outdeg}(v) = 0 \leq \text{outdeg}(f(v))$. Supongamos que $\text{outdeg}(v) = n \geq 1$, i.e., existen $v_1, \ldots, v_n \in V(G)$ tales que $vv_i \in E(G)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Como f es un homomorfismo de grafos dirigidos, tenemos que $f(v)f(v_i) \in E(H)$. Además, como f es inyectivo, sigue que $\text{outdeg}(f(v)) \geq n = \text{outdeg}(v)$. Por lo tanto, concluimos que $\text{outdeg}(v) \leq \text{outdeg}(f(v))$, para cada $v \in V(G)$.

□

La Proposición 2.2.25 implica el siguiente resultado.

Corolario 2.2.26.

(1) Sean G y H grafos. Si existe $v \in V(G)$ tal que $\deg(v) > \deg(u)$, para todo $u \in V(H)$ entonces no existe un homomomorfismo inyectivo $G \to H$.

(2) Sean G y H grafos dirigidos. Si existe $v \in V(G)$ tal que $\text{indeg}(v) > \text{indeg}(u)$ o $\text{outdeg}(v) > \text{outdeg}(u)$, para todo $u \in V(H)$, entonces no existe un homomomorfismo inyectivo $G \to H$.

Demostración.

(1) La demostración es por contradicción. Supongamos que existe un homomorfismo inyectivo $f : G \to H$. Por hipótesis, existe $v \in V(G)$ tal que $\deg(v) > \deg(u)$, para todo $u \in V(H)$. En particular, $\deg(v) > \deg(f(v))$. Por otro lado, del Ítem (1) de la Proposición 2.2.25, tenemos que $\deg(v) \leq \deg(f(v))$. Así, $\deg(v) \leq \deg(f(v)) < \deg(v)$, lo cual es una contradicción.

(2) La demostración es por contradicción. Supongamos que existe un homomorfismo inyectivo $f : G \to H$. Por hipótesis, existe $v \in V(G)$ tal que $\text{indeg}(v) > \text{indeg}(u)$ o $\text{outdeg}(v) > \text{outdeg}(u)$, para todo $u \in V(H)$. En particular, $\text{indeg}(v) > \text{indeg}(f(v))$ o $\text{outdeg}(v) > \text{outdeg}(f(v))$. Por otro lado, del Ítem (2) de la Proposición 2.2.25, tenemos que $\text{indeg}(v) \leq \text{indeg}(f(v))$ y $\text{outdeg}(v) \leq \text{outdeg}(f(v))$. Así, $\text{indeg}(v) \leq \text{indeg}(f(v)) < \text{indeg}(v)$ o $\text{outdeg}(v) \leq \text{outdeg}(f(v)) < \text{outdeg}(v)$, lo cual es una contradicción.

□

Observación 2.2.27. [7, pg. 5] Sean G, H grafos (dirigidos o no).

(i) Denotaremos por $\text{Inj}(G, H)$ al conjunto de todos los homomorfismos inyectivos de G en H y $\text{inj}(G, H)$ denotará el número de elementos de $\text{Inj}(G, H)$.

(ii) Denotaremos por $\text{Sur}(G, H)$ al conjunto de todos los homomorfismos sobreyectivos de G en H y $\text{sur}(G, H)$ denotará el número de elementos de $\text{Sur}(G, H)$.

(iii) Denotaremos por $\text{Bij}(G, H)$ al conjunto de todos los homomorfismos biyectivos de G en H y $\text{bij}(G, H)$ denotará el número de elementos de $\text{Bij}(G, H)$.

Definición 2.2.28. [7, pg. 5] Sea G un grafo. Un *paseo de Euler* en G es un paseo $v_0, v_1, \ldots, v_k$ de G tal que $\{v_{i-1}v_i : \ i = 1, 2, \ldots, k\}$ contiene exactamente una vez cada eje de G. Un *circuito de Euler* es un paseo de Euler cerrado.

Definición 2.2.29. [7, pg. 6] Sea G un grafo dirigido.

(i) Un *paseo orientado* en G es una secuencia de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_k$ de G tal que v_{i-1} y v_i son adyacentes (en al menos una dirección) en G, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Un arco $v_{i-1}v_i \in E(G)$ es llamado un *arco hacia adelante* del paseo y un arco v_iv_{i-1} es llamado un *arco hacia atrás* del paseo.

(ii) La *longitud total* de un paseo orientado es la diferencia entre el número de arcos hacia adelante y el número de arcos hacia atrás en el paseo.

(iii) Un *paseo dirigido* en G es un paseo orientado en el cual todos sus arcos son arcos hacia adelante.

(iv) G es *conexo* si cualesquier dos vértices están unidos por un paseo orientado. G es *fuertemente conexo* si cualesquier dos vértices están unidos por un paseo dirigido en cada uno de las dos direcciones.

Ejemplo 2.2.30. [7, pg. 6]

- El grafo dirigido con vértices $0, 1, \ldots, k$ y arcos $01, 12, \ldots, (k-1)k$ es llamado el camino dirigido $\overrightarrow{P}_k$.
- El grafo dirigido con vértices $0, 1, \ldots, k-1$ y arcos $01, 12, \ldots, (k-2)(k-1), (k-1)0$ es llamado el ciclo dirigido $\overrightarrow{C}_k$.

Lema 2.2.31. [7, pg. 6] Sean G y H grafos dirigidos y $f : G \to H$ un homomorfismo. Si $v_0, v_1, \ldots, v_k$ es un paseo orientado en G entonces

$$f(v_0), f(v_1), \ldots, f(v_k)$$

es un paseo orientado en H de la misma longitud total

Demostración. Note que f preserva arcos y su orientación. □

Definición 2.2.32. [7, pg. 6] Sean G un grafo y n un entero positivo. Una *n-coloración* de G es una asignación de n colores para los vértices de G en los cuales vértices adyacentes tienen diferentes colores. El *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, es el menor entero positivo n tal que G admite una n-coloración.

Denotemos por K_n el grafo completo con vértices $1, 2, \ldots, n$, y supongamos que estos enteros positivos son usados como los colores en las n-coloraciones. Entonces, tenemos el siguiente lema.

Lema 2.2.33. [7, Proposition 1.7, pg. 7] Los homomorfismos de la forma $f : G \to K_n$ son exactamente las n-coloraciones de G.

Ejemplo 2.2.34. Para cada $n \geq 1$, tenemos que $\chi(K_n) = n$.

Proposición 2.2.35. [7, Corollary 1.8, pg. 7] Si existe un homomorfismo $G \to H$ entonces $\chi(G) \leq \chi(H)$.

Demostración. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo. Supongamos que $\chi(H) = k$ y considere $h : H \to K_k$ una k-coloración (ver Lema 2.2.33). Entonces, $h \circ f : G \to K_k$ es una k-coloración de G, luego $\chi(G) \leq k = \chi(H)$. □

Recuerde que la notación $G \not\to H$ significa que no existe un homomorfismo de G en H (ver Ítem (2) de la Obervación 2.2.14). La Proposición 2.2.35 implica el siguiente corolario.

Corolario 2.2.36. Sean G y H grafos. Si $\chi(G) > \chi(H)$ entonces $G \not\to H$.

Definición 2.2.37. Sea G un grafo. Un subconjunto de vértices de G es llamado *independiente* si no contiene pares de vértices adyacentes.

Para cerrar esta sección presentamos el siguiente resultado, ver [7, Proposition 1.10, pg. 8].

Proposición 2.2.38. Sean G, H grafos (dirigidos o no). Entonces existe un homomorfismo $G \to H$ si, y solamente si, los vértices de G pueden ser particionados en conjuntos S_x, $x \in V(H)$, tales que cumplen las siguiente condición: Si $xy \notin E(H)$ entonces $uv \notin E(G)$ siempre que $u \in S_x$ y $v \in S_y$.

Demostración. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo y considere la partición $\theta_f = \{S_x = f^{-1}(x) : \ x \in V(H)\}$. Note que, si $xy \notin E(H)$ entonces $uv \notin E(G)$ para cualesquier $u \in f^{-1}(x)$ y $v \in f^{-1}(y)$.

Ahora, supongamos que existe tal partición $\theta = \{S_x : \ x \in V(H)\}$. Definamos $f : V(G) \to V(H)$ tal que $f_{|S_x} = \overline{x}$, donde $\overline{x}$ es la aplicación constante en x, o sea, $f(u) = x$ para todo $u \in S_x$. Sea $uv \in E(G)$ y considere $u \in S_x$ y $v \in S_y$. Luego, por la condición, $f(u)f(v) = xy \in E(H)$. Así, f es un homomorfismo de G en H. □

Observación 2.2.39. Note que, la condición dada en la Proposición 2.2.38 implica lo siguiente: Si xx no es un lazo de H, entonces S_x es independiente en G.

Proposición 2.2.40. [7, pg. 8] Sea $f : G \to H$ un homomorfismo y considere la partición $\theta_f = \{f^{-1}(x) : \ x \in V(H)\}$. Tenemos:

(a) f es inyectivo si, y solamente si, la partición θ_f es trivial, o sea, $f^{-1}(x) = \{x\}$ para cada $x \in V(H)$.

(b) f es sobreyectivo si, y solamente si, $f^{-1}(x) \neq \varnothing$ para cada $x \in V(H)$, además, $xy \in E(H)$ si, y solamente si, $uv \in E(G)$ para algún $u \in f^{-1}(x)$, $v \in f^{-1}(y)$.

2.2.2. Conceptos de Topología Algebraica

En esta sección vamos a revisar algunos conceptos de la Topología Algebraica.

Para nuestros fines, usando [6, Example 0.1, pg. 6], recordemos la noción de complejo celular de dimensión 1.

Definición 2.2.41. Un *complejo celular* o *complejo CW* de dimensión 1 es un espacio topológico X construido de la siguiente manera:

(i) Empezar con un conjunto discreto $X^0 = \{e^0_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, cuyos elementos son llamados 0-*células*.

(ii) X es formado a partir de X^0 *pegando* 0-células e^0_α vía aplicaciones $\varphi_\alpha : S^0 \to X^0$ (llamadas *aplicaciones de pegado*). Esto significa, que X es el espacio cociente de la unión disjunta $X^0 \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} D^1_\alpha$ de X^0 con una colección de $D^1_\alpha = [-1, 1]$ bajo las identificaciones $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para $x \in \partial D^1_\alpha = S^0 = \{-1, 1\}$.

Observación 2.2.42.

(i) Para cada aplicación de pegado $\varphi_\alpha : S^0 \to X^0$ considere $\Phi_\alpha : D^1_\alpha \to X$ definida por la composición $D^1_\alpha \hookrightarrow X^0 \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} D^1_\alpha \xrightarrow{q} X$, donde $q : X^0 \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} D^1_\alpha \to X$ es la aplicación cociente. Denotemos por $\overline{e}^1_\alpha = \Phi_\alpha(D^1_\alpha)$ y $e^1_\alpha = \Phi_\alpha(\mathrm{int}(D^1_\alpha))$, donde $\mathrm{int}(D^1_\alpha) = (-1,1)$ es el interior topológico de $D^1_\alpha = [-1,1]$. Note que, Φ_α extiende φ_α y $\Phi_\alpha : \mathrm{int}(D^1_\alpha) \to e^1_\alpha$ es un homeomorfismo. Así, como conjunto $X = X^0 \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} e^1_\alpha$. Cada e^1_α es llamado de 1-*célula abierta*. Φ_α es llamada *aplicación característica* de la 1-célula e^1_α.

(ii) Note que, cada e^1_α es abierto en X, ya que $q^{-1}(e^1_\alpha) = \mathrm{int}(D^1_\alpha)$ es abierto en D^1_α y así en la unión disjunta $X^0 \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} D^1_\alpha$. Además, cada $\overline{e}^1_\alpha$ es cerrado en X y es llamada 1-*célula cerrada*.

Ejemplo 2.2.43. Sea G un grafo. Considere $X = X_G$ el complejo celular de dimensión 1 con 0-células los vértices $V(G)$ y las 1-células determinadas por los ejes $E(G)$. Exactamente, $X^0 = V(G)$ y para cada eje $uv \in E(G)$, considere la aplicación de pegado $\varphi_{uv} : S^0 \to X^0$ por $\varphi_{uv}(-1) = u$ y $\varphi_{uv}(1) = v$. Así,

$$X_G = \frac{V(G) \bigsqcup_{uv\in E(G)} D^1_{uv}}{x \sim \varphi_{uv}(x)}.$$

Así, cada grafo induce un complejo celular de dimensión 1, pero el regreso no es verdad (ya que pueden haber varias 1-células para un mismo par de 0-células).

Definición 2.2.44. [1, Definition 5.1.11, pg. 153], [6, pg. 7] Un *subcomplejo* de un complejo celular X es un subconjunto $A \subset X$ tal que para cada célula abierta e^n_i de X tenemos que $A \cap e^n_\alpha \neq \varnothing$ implica que $\overline{e}^n_\alpha \subset A$.

Equivalentemente, un subcomplejo es un subespacio cerrado $A \subset X$ que es la unión de células de X. Note que, la aplicación característica de cada célula en A tiene imagen contenida en A (ya que A es cerrado). En particular, la imagen de la aplicación de pegado de cada célula en A está contenido en A, y así A es un complejo celular por sí mismo. De hecho, $A = \bigcup\{\overline{e}^n_\alpha : \ e^n_\alpha \cap A \neq \varnothing\}$ (ver [1, Proposition 5.1.14, pg. 153]).

Ejemplo 2.2.45. Sea G un grafo y H un subgrafo de G. Note que X_H es un subcomplejo de X_G. De hecho, sea $e^0_u \cap X_H \neq \varnothing$, donde $e^0_u = \{u\}$ con $u \in V(G)$. Luego, $u \in X_H$ y así $\overline{e}^0_u = \{u\} \subset X_H$. Ahora, sea $e^1_{uv} \cap X_H \neq \varnothing$, donde $uv \in E(G)$. Luego, $\overline{e}^1_{uv} \subset X_H$.

Lema 2.2.46. [1, Proposition 5.1.71, Proposition 5.1.6, pg. 151] Sea X un complejo celular, entonces X es un espacio normal (así es Hausdorff) y localmente conexo por caminos. En particular, X es conexo si, y solamente si, X es conexo por caminos.

Note que un grafo G es conexo si, y solamente si, X_G es conexo. Además, un grafo G es un árbol si, y solamente si, X_G es contráctil. En este caso, se tiene que $|V(G)| = |E(G)| + 1$, para cualquier árbol G.

De [6, pg. 84], podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.2.47. Sea G un grafo.

(i) Un *árbol en* G significa un subgrafo de G que es un árbol.

(ii) Diremos que un árbol en G es *máximo* cuando contiene todos los vértices de G.

Lema 2.2.48.

(i) [6, Proposition 1A.1, pg. 84] Cada grafo conexo contiene un árbol máximo. De hecho, cualquier árbol en el grafo está contenido en un árbol máximo.

(ii) [6, Proposition 1A.2, pg. 84] Para un grafo conexo G con árbol máximo T, su grupo fundamental $\pi_1(X_G)$ es un grupo libre con base las clases $[f_\alpha]$ que corresponden a las 1-células e_α de $X_G - X_T$.

(ii) [6, Lemma 1A.3, pg. 85] Cada espacio de recubrimiento de un complejo celular de dimensión 1 es también un complejo celular de dimensión 1, con 0-células y 1-células los levantamientos de las 0-células y 1-células del complejo base.

Definición 2.2.49. [6, pg. 87] Sea π un grupo. Un espacio topológico conexo por caminos X es un $K(\pi, 1)$-*espacio* cuando $\pi_1(X) \cong \pi$ y $\pi_q(X) = 0$ para todo $q \geq 2$.

Ejemplo 2.2.50. [6, pg. 88] Todo complejo celular de dimensión 1 conexo X es un $K(\pi, 1)$-espacio, con $\pi = \pi_1(X)$.

Lema 2.2.51.

(i) [6, Proposition 1B.9, pg. 90] Sea X un complejo celular conexo y Y un $K(\pi, 1)$, entonces cada homomorfismo $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es inducido por una aplicación $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ que es única a menos de homotopía fijando x_0.

(ii) [6, Proposition 1B.8, pg. 90] El tipo de homotopía de un complejo celular $K(\pi, 1)$ es únicamente determinado por π.

Definición 2.2.52. [6, pg. 348] Una aplicación continua $f : X \to Y$ entre complejos CW de dimensión 1 es llamada *celular* si $f(X^0) \subset Y^0$.

Ejemplo 2.2.53. Sean G y H grafos. Recuerde que $X_G = \dfrac{V(G) \bigsqcup_{uv \in E(G)} D^1_{uv}}{x \sim \varphi_{uv}(x)}$ y $X_H = \dfrac{V(H) \bigsqcup_{ab \in E(H)} D^1_{ab}}{y \sim \varphi_{ab}(y)}$. Un homomorfismo de grafos $f : G \to H$ induce una aplicación celular $X_f : X_G \to X_H$ dada por

$$X_f[x] = \begin{cases} [x], & \text{si } x \in D^1_{uv} = [-1, 1]; \\ [f(x)], & \text{si } x \in V(G). \end{cases}$$

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1. Diseño Metodológico

Tipo de investigación

El presente trabajo de investigación es de tipo básica, pura o fundamental.

Diseño de investigación

No experimental.

- Daremos inicio presentando definiciones y algunos resultados elementales.

- En segundo lugar introduciremos el concepto de complejidad para estudiar la topología del problema de migración (Definición 4.2.1). Observación 4.2.2 muestra que la noción de complejidad mide matemáticamente el problema de migración. En la Proposición 4.2.3 se presentan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de migraciones. El Ejemplo 4.2.4 muestra que la complejidad puede ser estrictamente menor que la complejidad inyectiva. Ejemplos 4.2.5, 4.2.6 muestran que la complejidad puede ser igual que la complejidad inyectiva. La existencia de homomomorfismos implican desigualdades entre las complejidades (Teorema 4.2.7). En particular, tenemos que la complejidad es un invariante por isomorfismos (Corolario 4.2.8). Adicionalmente, la Proposición 4.2.9 muestra que la complejidad da una obstrucción para la existencia de un homomomorfismo. Corolario 4.2.10 presenta una conexión directa entre la complejidad y el número cromático. La sub-aditividad de la complejidad es presentada en el Teorema 4.2.11. En particular, la complejidad tiene un comportamiento lineal (Corolario 4.2.12). En el Ejemplo 4.2.13 se calcula la complejidad para migrar un ciclo en K_2. En el Ejemplo 4.2.14 se calcula la complejidad para mi-

grar k_i, $i = 3, 4$, en K_2. Proposición 4.2.15 muestra que la primera desigualdad del Ítem (i) del Teorema 4.2.11 puede ser una igualdad. En el Ejemplo 4.2.16 se calcula la complejidad para migrar k_i, $i = 4, 5, 6, 7, 8$, en K_2. En general, Teorema 4.2.17 muestra la complejidad para migrar cualquier K_j en K_2. En particular, cualquier número entero positivo puede ser la complejidad del problema de migración (Corolario 4.2.18). Proposición 4.2.19 muestra una conexión fuerte entre la complejidad y el número cromático. Proposición 4.2.20 muestra que la complejidad es un invariante numérico sobreyectivo definido en el producto de la categoría de grafos. En la Proposición 4.2.21 se presentan cotas superiores e inferiores para la complejidad. Por otro lado, en el Teorema 4.2.22 se calcula la complejidad inyectiva para el problema de migración de un grafo G en K_2. Adicionalmente, Proposición 4.2.25 muestra que la complejidad de migrar desde un producto $G \times G$ o hacia un producto $H \times H$ no se altera en migrar desde G o hacia H. En particular, se muestra que la complejidad de migrar $G \times G$ en $H \times H$ coincide con la complejidad de migrar G en H (Corolario 4.2.26)..

- En la Sección 4.2.2 presentamos la noción de número seccional de un homomorfismo (Definición 4.2.27) junto con resultados básicos sobre este nuevo invariante numérico. Observación 4.2.28 muestra que toda colección transversal es una casi-migración inyectiva. En particular, la complejidad es una cota inferior para el número seccional (Proposición 4.2.29). En los Ejemplos 4.2.30, 4.2.31 y 4.2.32 calculamos las complejidades y el número seccional. Observación 4.2.33 muestra que, en casos particulares, el número seccional y las complejidades pueden ser equivalentes. Teorema 4.2.34 muestra una caracterización de cuando el número seccional es igual a 1, además presenta una condición necesaria para que el número seccional sea finito. Adicionalmente, el Ejemplo 4.2.35 muestra que el número seccional puede ser estrictamente mayor que las complejidades. Ejemplos 4.2.36, 4.2.37 muestran que el número seccional puede coincidir con las complejidades. Ejemplo 4.2.38 muestra que el número seccional puede coincidir con la complejidad inyectiva pero no con la complejidad. Notamos que el número seccional de un homomorfismo es mayor o igual que el número seccional de cualquier casi-pullback (Proposición 4.2.39). En particular, el Ejemplo 4.2.40 muestra que el número seccional de la restricción es menor o igual que el número seccional del homomomorfismo. En el Teorema 4.2.41 se presenta la sub-aditividad del número seccional. En particular, Corolario 4.2.42 muestra que bajo ciertas condiciones el número seccional está cercano del número seccional de una restricción.

Una estimativa para el número seccional de un producto está dada en el Teorema 4.2.43. En particular, Proposición 4.2.44 muestra que el número seccional de un homomomorfismo producto con la identidad no se altera. Finalmente, Teorema 4.2.45 muestra una conexión natural entre el número cromático y el número seccional. En particular, el Ejemplo 4.2.46 muestra que la mayoría de homomomorfismos su número seccional es al menos 2. Finalmente, el Teorema 4.2.47 muestra que el número seccional de un homomorfismo es una cota superior para la categoría seccional de la aplicación celular inducida.

3.2. Método de investigación

El método de investigación es básico teórico.

3.3. Población y muestra

No se aplica para este tipo de proyecto

3.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

Período Setiembre - Diciembre 2022: Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM, Lima, Perú. Período Enero - Mayo 2023: Heidelberg, Alemania.

3.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de información

No se aplica para este tipo de proyecto

3.6. Análisis y procesamiento de datos

Debido que la investigación es teórica, no se aplica el análisis y procesamiento de datos.

3.7. Aspectos Éticos en Investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en

nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

3.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

3.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Análisis, interpretación y discusión de resultados

No se aplica.

4.2. Presentación de resultados

4.2.1. Complejidad $C(G; H)$

En esta sección presentamos la noción de complejidad para estudiar la topología del problema de migración (Definición 4.2.1). Observación 4.2.2 muestra que la noción de complejidad mide matemáticamente el problema de migración. En la Proposición 4.2.3 se presentan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de migraciones. El Ejemplo 4.2.4 muestra que la complejidad puede ser estrictamente menor que la complejidad inyectiva. Ejemplos 4.2.5, 4.2.6 muestran que la complejidad puede ser igual que la complejidad inyectiva. La existencia de homomomorfismos implican desigualdades entre las complejidades (Teorema 4.2.7). En particular, tenemos que la complejidad es un invariante por isomorfismos (Corolario 4.2.8). Adicionalmente, la Proposición 4.2.9 muestra que la complejidad da una obstrucción para la existencia de un homomomorfismo. El corolario 4.2.10 presenta una conexión directa entre la complejidad y el número cromático. La sub-aditividad de la complejidad es presentada en el Teorema 4.2.11. En particular, la complejidad tiene un comportamiento lineal (Corolario 4.2.12). En el Ejemplo 4.2.13 se calcula la complejidad para migrar un ciclo en K_2. En el Ejemplo 4.2.14 se calcula la complejidad para migrar k_i, $i = 3, 4$, en K_2. La Proposición 4.2.15 muestra que la primera desigualdad del Ítem (i) del Teore-

ma 4.2.11 puede ser una igualdad. En el Ejemplo 4.2.16 se calcula la complejidad para migrar k_i, $i = 4, 5, 6, 7, 8$, en K_2. En general, Teorema 4.2.17 muestra la complejidad para migrar cualquier K_j en K_2. En particular, cualquier número entero positivo puede ser la complejidad del problema de migración (Corolario 4.2.18). La Proposición 4.2.19 muestra una conexión fuerte entre la complejidad y el número cromático. La Proposición 4.2.20 muestra que la complejidad es un invariante numérico sobreyectivo definido en el producto de la categoría de grafos. En la Proposición 4.2.21 se presentan cotas superiores e inferiores para la complejidad. Por otro lado, en el Teorema 4.2.22 se calcula la complejidad inyectiva para el problema de migración de un grafo G en K_2. Adicionalmente, la Proposición 4.2.25 muestra que la complejidad de migrar desde un producto $G \times G$ o hacia un producto $H \times H$ no se altera en migrar desde G o hacia H. En particular, se muestra que la complejidad de migrar $G \times G$ en $H \times H$ coincide con la complejidad de migrar G en H (Corolario 4.2.26).

Dados grafos G y H (dirigidos o no). Un homomorfismo $f : G \to H$ es llamado una *migración* de G en H. En general, no siempre es posible encontrar una migración (ver Corolario 2.2.36, Proposición 2.2.38). Un gran desafío en el problema de migración de datos es encontrar migraciones. Así, presentamos la siguiente definición.

Definición 4.2.1. Sean G, H grafos (dirigidos o no).

(1) La *complejidad de G a H*, denotado por, $C(G; H)$, es el menor entero positivo k tal que existen $G_1, \ldots, G_k$ subgrafos de G tales que $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$ y para cada G_i existe un homomorfismo $f_i : G_i \to H$. En caso que no exista tal k diremos que $C(G; H) = \infty$.

(2) La *complejidad inyectiva de G a H*, denotado por, $IC(G; H)$, es el menor entero positivo k tal que existen $G_1, \ldots, G_k$ subgrafos de G tales que $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$ y para cada G_i existe un homomorfismo inyectivo $f_i : G_i \to H$. En caso que no exista tal k diremos que $IC(G; H) = \infty$.

Una colección $\mathcal{M} = \{f_i : G_i \to H\}_{i=1}^{\ell}$, donde $G_1, \ldots, G_\ell$ son subgrafos de G tales que $G = G_1 \cup \cdots \cup G_\ell$ y cada $f_i : G_i \to H$ es un homomorfismo, es llamada una *casi-migración* de G en H. Una casi-migración $\mathcal{M} = \{f_i : G_i \to H\}_{i=1}^{\ell}$ es llamada *óptima* si $\ell = C(G; H)$. Observe que una casi-migración unitaria $\{f : G \to H\}$ es óptima y es una migración de G en H. Note también que toda casi-migración $\mathcal{M} = \{f_i : G_i \to H\}_{i=1}^{\ell}$ induce una aplicación $f : V(G) \to V(H)$, dada por $f(v) = f_i(v)$, donde i es el menor índice tal que $v \in V(G_i)$. Análogamente, una colección $\mathcal{M} = \{f_i : G_i \to H\}_{i=1}^{\ell}$, donde $G_1, \ldots, G_\ell$ son subgrafos de G tales que $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$ y cada $f_i : G_i \to H$

es un homomorfismo inyectivo, es llamada una *casi-migración inyectiva* de G en H. Una casi-migración inyectiva $\mathcal{M} = \{f_i : G_i \to H\}_{i=1}^{\ell}$ es llamada *óptima* si $\ell = IC(G;H)$.

Por definición tenemos la siguiente afirmación.

Observación 4.2.2.

(i) $C(G;H) \leq IC(G;H)$, para cualesquier grafos G y H, ya que toda casi-migración inyectiva es una casi-migración.

(ii) $C(G;H) = 1$ si, y solamente si, existe un homomorfismo $G \to H$. Además, $IC(G;H) = 1$ si, y solamente si, existe un homomorfismo inyectivo $G \to H$ si, y solamente si, H tiene una copia de G como subgrafo.

La Proposición 2.2.38 junto con Ítem (ii) de la Observación 4.2.2 implican la siguiente afirmación.

Proposición 4.2.3. Sean G, H grafos. Tenemos:

(1) $C(G;H) = 1$ si y solamente si los vértices de G pueden ser particionados en conjuntos S_x, $x \in V(H)$, tales que cumplen la siguiente condición: Si $xy \notin E(H)$ entonces $uv \notin E(G)$ siempre que $u \in S_x$ y $v \in S_y$.

(2) $IC(G;H) = 1$ si y solamente si los vértices de G pueden ser particionados en conjuntos unitários S_x, $x \in V(H)$, tales que cumplen la siguiente condición: Si $xy \notin E(H)$ entonces $uv \notin E(G)$ siempre que $u \in S_x$ y $v \in S_y$.

El siguiente ejemplo muestra que la complejidad puede ser estrictamente menor que la complejidad inyectiva.

Ejemplo 4.2.4. Considere los grafos dirigidos G y H, dados por $V(G) = \{a, b, c\}$, $E(G) = \{(a, b), (c, b)\}$, $V(H) = \{a', b', c'\}$ y $E(H) = \{(c', a'), (c', b')\}$.



Note que, la aplicación $f : V(G) \to V(H)$, dada por $f(a) = c' = f(c)$, $f(b) = b'$, es un homomorfismo de G en H. Luego, $C(G; H) = 1$.

Por otro lado, observe que $\text{indeg}(b) = 2$. Veamos que, $IC(G; H) = 2$. Supongamos que existe $f : G \to H$ un homomorfismo inyectivo. Luego, por la Proposición 2.2.25, $\text{indeg}(f(b)) \geq 2$. Lo cual es una contradicción, ya que en H, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{indeg}(a') &= 1, \\ \text{indeg}(b') &= 1, \\ \text{indeg}(c') &= 0. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $IC(G; H) \geq 2$. Por otro lado, consideremos G_1, G_2 subgrafos de G, dados por:

$$\begin{aligned} V(G_1) &= \{a, b\}, \\ E(G_1) &= \{(a, b)\}, \\ V(G_2) &= \{b, c\}, \\ E(G_2) &= \{(c, b)\}, \end{aligned}$$

junto con los homomorfismos inyectivos $f_1 : G_1 \to H$ y $f_2 : G_2 \to H$, definidos por:

$$\begin{aligned} f_1(a) &= c', \\ f_1(b) &= a', \\ f_2(b) &= b', \\ f_2(c) &= c'. \end{aligned}$$

Note que $G = G_1 \cup G_2$. Luego, $IC(G, H) \leq 2$. Por lo tanto, $IC(G, H) = 2$.

El siguiente ejemplo muestra que la complejidad puede ser igual que la complejidad inyectiva.

Ejemplo 4.2.5. Considere los grafos dirigidos G y H, dados por $V(G) =$

$\{a, b, c\}$, $E(G) = \{(a, b), (b, c)\}$, $V(H) = \{a', b', c'\}$ y $E(H) = \{(c', a'), (c', b')\}$.



Observe que indeg$(b) = 1$ y outdeg$(b) = 1$. Veamos que, $C(G; H) = 2$. Supongamos que existe $f : G \to H$ un homomorfismo. Note que f es inyectivo. Luego, por la Proposición 2.2.25, indeg$(f(b)) \geq 1$ y outdeg$(f(b)) \geq 1$. Lo cual es una contradicción, ya que en H, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{indeg}(a') &= 1, \\ \text{outdeg}(a') &= 0. \\ \text{indeg}(b') &= 1, \\ \text{outdeg}(b') &= 0. \\ \text{indeg}(c') &= 0, \\ \text{outdeg}(c') &= 2. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $C(G; H) \geq 2$. Por otro lado, consideremos G_1, G_2 subgrafos de G, dados por:

$$\begin{aligned} V(G_1) &= \{a, b\}, \\ E(G_1) &= \{(a, b)\}, \\ V(G_2) &= \{b, c\}, \\ E(G_2) &= \{(b, c)\}, \end{aligned}$$

junto con los homomorfismos $f_1 : G_1 \to H$ y $f_2 : G_2 \to H$, definidos por:

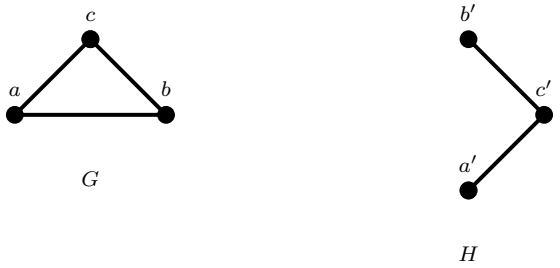
$$\begin{aligned} f_1(a) &= c', \\ f_1(b) &= a', \\ f_2(b) &= c', \\ f_2(c) &= b'. \end{aligned}$$

Note que $G = G_1 \cup G_2$. Luego, $C(G; H) \leq 2$. Por lo tanto, $C(G; H) = 2$. Además, podemos concluir que $IC(G; H) = 2$.

Para el caso no dirigido, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.6. Considere los grafos no dirigidos G y H, dados por

$$\begin{aligned} V(G) &= \{a, b, c\}, \\ E(G) &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}, \\ V(H) &= \{a', b', c'\}, \\ E(H) &= \{\{c', a'\}, \{c', b'\}\}. \end{aligned}$$



Veamos que $C(G; H) = 2$. Si $G \to H$, entonces, por la Proposición 2.2.35, $\chi(G) \leq \chi(H)$. Lo cual es una contradicción, ya que $\chi(G) = 3$ y $\chi(H) = 2$. Así, $C(G; H) \geq 2$.

Por otro lado, consideremos G_1, G_2 subgrafos de G, dados por:

$$\begin{aligned} V(G_1) &= \{a, b, c\}, \\ E(G_1) &= \{\{a, c\}, \{b, c\}\}, \\ V(G_2) &= \{a, b\}, \\ E(G_2) &= \{\{a, b\}\}, \end{aligned}$$

junto con los homomorfismos $f_1 : G_1 \to H$ y $f_2 : G_2 \to H$, definidos por:

$$\begin{aligned} f_1(a) &= a', \\ f_1(b) &= b', \\ f_1(c) &= c', \\ f_2(a) &= a', \\ f_2(b) &= c'. \end{aligned}$$

Note que $G = G_1 \cup G_2$. Luego, $C(G; H) \leq 2$. Por lo tanto, $C(G; H) = 2$. También, tenemos que $IC(G; H) = 2$.

El siguiente resultado muestra que la existencia de homomomorfismos implican desigualdades entre las complejidades.

Teorema 4.2.7. Si $G' \to G$ y $H' \to H$. Tenemos

(i) $C(G'; H) \leq C(G; H) \leq C(G; H')$. En particular, $C(G'; H) \leq C(G'; H') \leq C(G; H')$.

(ii) Además, si $G' \to G$ y $H' \to H$ son inyectivos, tenemos $IC(G'; H) \leq IC(G; H) \leq IC(G; H')$. En particular, $IC(G'; H) \leq IC(G'; H') \leq IC(G; H')$.

Demostración.

(i) Veamos que $C(G'; H) \leq C(G; H)$. Sea $f : G' \to G$ un homomorfismo. Supongamos que $C(G; H) = n$, luego existen $G_1, \ldots, G_n$ subgrafos de G, con $G = G_1 \cup \cdots \cup G_n$, y existen $f_1 : G_1 \to H, \ldots, f_n : G_n \to H$, homomorfismos. Para cada $i = 1, \ldots, n$, considere $G'_i = f^{-1}(G_i)$ y $f'_i = f_i \circ (f)_| : G'_i \to H$. Note que, cada G'_i es un subgrafo de G' y $G' = G'_1 \cup \cdots \cup G'_n$. Además, cada f'_i es un homomorfismo de G'_i en H. Luego, $C(G'; H) \leq n = C(G; H)$.

Ahora, veamos que $C(G; H) \leq C(G; H')$. Sean $g : H' \to H$ un homomorfismo y supongamos que $C(G; H') = n$. Sea $\{f_i : G_i \to H'\}_{i=1}^n$ una casi-migración óptima de G en H'. Luego, la colección $\{g \circ f_i : G_i \to H\}_{i=1}^n$ es una casi-migración de G en H. Así, $C(G; H) \leq n = C(G; H')$.

(ii) Veamos que $IC(G'; H) \leq IC(G; H)$. Sea $f : G' \to G$ un homomorfismo inyectivo. Supongamos que $IC(G; H) = n$, luego existen $G_1, \ldots, G_n$ subgrafos de G, con $G = G_1 \cup \cdots \cup G_n$, y existen $f_1 : G_1 \to H, \ldots, f_n : G_n \to H$, homomorfismos inyectivos. Para cada $i = 1, \ldots, n$, considere $G'_i = f^{-1}(G_i)$ y $f'_i = f_i \circ (f)_| : G'_i \to H$. Note que, cada G'_i es un subgrafo de G' y $G' = G'_1 \cup \cdots \cup G'_n$. Además, cada f'_i es un homomorfismo inyectivo de G'_i en H. Luego, $IC(G'; H) \leq n = IC(G; H)$.

Ahora, veamos que $IC(G; H) \leq IC(G; H')$. Sean $g : H' \to H$ un homomorfismo y supongamos que $IC(G; H') = n$. Sea $\{f_i : G_i \to H'\}_{i=1}^n$ una casi-migración inyectiva óptima de G en H'. Luego, la colección $\{g \circ f_i : G_i \to H\}_{i=1}^n$ es una casi-migración inyectiva de G en H. Así, $IC(G; H) \leq n = IC(G; H')$.

□

Por el Ítem (i) del Teorema 4.2.7, observe que, si $G' \to G$ y $G \to G'$ entonces $C(G'; H) = C(G; H)$, para cualquier grafo H. Análogamente, si

$H' \to H$ y $H \to H'$ entonces $C(G;H') = C(G;H)$, para cualquier grafo G. En particular, tenemos que la complejidad es un invariante por isomorfismos.

Corolario 4.2.8. Si G' es isomorfo a G y H' es isomorfo a H, entonces

$$C(G;H) = C(G';H') \text{ y } IC(G;H) = IC(G';H').$$

Demostración. Veamos que $C(G;H) = C(G';H')$. Por el Ítem (i) del Teorema 4.2.7 obtenemos:

$$\begin{aligned} C(G;H) &= C(G';H) \\ &= C(G';H'). \end{aligned}$$

Ahora, veamos que $IC(G;H) = IC(G';H')$. Por el Ítem (ii) del Teorema 4.2.7 obtenemos:

$$\begin{aligned} IC(G;H) &= IC(G';H) \\ &= IC(G';H'). \end{aligned}$$

□

Además, Teorema 4.2.7 implica que la complejidad da una obstrucción para la existencia de un homomomorfismo.

Proposición 4.2.9.

(1) Sean G y G' grafos (dirigidos o no). Tenemos:

   (i) Si $C(G';H) > C(G;H)$, para algún grafo H, entonces $G' \not\to G$. En particular, si $C(G';K_2) > C(G;K_2)$ entonces $G' \not\to G$.

   (ii) Si $IC(G';H) > IC(G;H)$, para algún grafo H, entonces no existe homomorfismo inyectivo de G' en G. En particular, si $IC(G';K_2) > IC(G;K_2)$ entonces no existe homomorfismo inyectivo de G' en G.

(2) Sean H y H' grafos (dirigidos o no). Tenemos:

   (i) Si $C(G;H) > C(G;H')$, para algún grafo G, entonces $H' \not\to H$.

   (ii) Si $IC(G;H) > IC(G;H')$, para algún grafo G, entonces no existe homomorfismo inyectivo de H' en H.

Demostración. Basta usar la contra-recíproca de cada una de las implicaciones del Teorema 4.2.7. □

Corolario 4.2.10. Si $C(G; K_2) > C(K_n; K_2)$ entonces $\chi(G) \geq n + 1$. Equivalentemente, si $\chi(G) \leq n$ entonces $C(G; K_2) \leq C(K_n; K_2)$.

Demostración. Por el Ítem (1)-(i) de la Proposición 4.2.9, sigue que $G \not\to K_n$. Luego, $\chi(G) \geq n + 1$. □

La siguiente afirmación muestra la sub-aditividad de la complejidad.

Teorema 4.2.11. Sean G, H grafos (dirigidos o no) y A, B subgrafos de G tales que $G = A \cup B$. Tenemos

(i) $\text{máx}\{C(A; H), C(B; H)\} \leq C(G; H) \leq C(A; H) + C(B; H)$.

(ii) $\text{máx}\{IC(A; H), IC(B; H)\} \leq IC(G; H) \leq IC(A; H) + IC(B; H)$.

Demostración.

(i) La desigualdad $\text{máx}\{C(A; H), C(B; H)\} \leq C(G; H)$ sigue del Ítem (i) del Teorema 4.2.7 aplicado a las inclusiones $A \hookrightarrow G$ y $B \hookrightarrow G$. Para ver la otra desigualdad, supongamos que $C(A; H) = m$ y $C(B; H) = k$. Sean $\{f_i : F_i \to H\}_{i=1}^m$ y $\{g_j : G_j \to H\}_{j=1}^k$ casi-migraciones óptimas de A en H y de B en H, respectivamente. Luego, la colección $\{f_1 : F_1 \to H, \ldots, f_m : F_m \to H, g_1 : G_1 \to H, \ldots, g_k : G_k \to H\}$ es una casi-migración de G en H. Así, $C(G; H) \leq m+k = C(A; H)+C(B; H)$.

(ii) La desigualdad $\text{máx}\{IC(A; H), IC(B; H)\} \leq IC(G; H)$ sigue del Ítem (ii) del Teorema 4.2.7 aplicado a las inclusiones $A \hookrightarrow G$ y $B \hookrightarrow G$. Para ver la otra desigualdad, supongamos que $IC(A; H) = m$ y $IC(B; H) = k$. Sean $\{f_i : F_i \to H\}_{i=1}^m$ y $\{g_j : G_j \to H\}_{j=1}^k$ casi-migraciones inyectivas óptimas de A en H y de B en H, respectivamente. Luego, la colección $\{f_1 : F_1 \to H, \ldots, f_m : F_m \to H, g_1 : G_1 \to H, \ldots, g_k : G_k \to H\}$ es una casi-migración inyectiva de G en H. Así, $IC(G; H) \leq m + k = IC(A; H) + IC(B; H)$.

□

Teorema 4.2.11 implica la siguiente afirmación.

Corolario 4.2.12. Sean G, H grafos y A, T subgrafos de G tales que $G = A \cup T$.

(i) Si $C(T; H) = 1$ entonces

$$C(A; H) \leq C(G; H) \leq C(A; H) + 1.$$

(ii) Si $IC(T;H) = 1$ entonces

$$IC(A;H) \leq IC(G;H) \leq IC(A;H) + 1.$$

Demostración.

(i) Como $C(T;H) = 1$ tenemos $C(A;H) = \text{máx}\{C(A;H), C(T;H)\}$ y $C(A;H) + C(T;H) = C(A;H) + 1$. Ahora, aplicando el Ítem (i) del Teorema 4.2.11, tenemos

$$\begin{aligned} C(A;H) &\leq C(G;H) \\ &\leq C(A;H) + 1. \end{aligned}$$

(ii) Como $IC(T;H) = 1$ tenemos $IC(A;H) = \text{máx}\{IC(A;H), IC(T;H)\}$ y $IC(A;H) + IC(T;H) = IC(A;H) + 1$. Ahora, aplicando el Ítem (ii) del Teorema 4.2.11, tenemos

$$\begin{aligned} IC(A;H) &\leq IC(G;H) \\ &\leq IC(A;H) + 1. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.2.13. Consideremos el ciclo C_m, $m \geq 1$, de la forma

$$\begin{aligned} V(C_m) &= \{1, 2, \ldots, m\}, \\ E(C_m) &= \{12, 23, \ldots, (m-1)m, m1\}. \end{aligned}$$

Note que $C_m = P_m \cup K_2$ y $C(P_m; K_2) = 1$, $C(K_2; K_2) = 1$. Aquí, $V(K_2) = \{1, m\}$ y $E(K_2) = \{m1\}$. Así, $C(C_m; K_2) \leq 2$ (ver Ítem (i) del Teorema 4.2.11). Veamos que

$$C(C_m; K_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } m \text{ es par;} \\ 2, & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

De hecho, para el caso $m = 2k$, consideremos la aplicación $f : V(C_{2k}) \to K_2$, dada por

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{para } i \text{ impar y } 1 \leq i \leq 2k-1; \\ 2, & \text{para } i \text{ par y } 2 \leq i \leq 2k. \end{cases}$$

Note que f es un homomorfismo de C_{2k} en K_2 y así $C(C_{2k}; K_2) = 1$.

Por otro lado, desde que $\chi(C_m) = 3$, para cualquier m impar, entonces $C(C_m; K_2) \geq 2$ (ver Corolario 2.2.36) y así $C(C_m; K_2) = 2$, para todo m impar.

Ahora, recuerde que $\chi(K_n) = n$, luego tenemos la siguiente desigualdad $C(K_n; K_2) \geq 2$, para todo $n \geq 3$ (ver Corolario 2.2.36). El siguiente ejemplo, muestra que se da la igualdad para $n \in \{3, 4\}$.

Ejemplo 4.2.14. Tenemos $C(K_n; K_2) = 2$, para $n = 3, 4$. De hecho, note que, $K_3 = K_2 \cup T_3$, donde T_3 es el árbol dado por $V(T_3) = \{1, 2, 3\}$ y $E(T_3) = \{\{3, 1\}, \{3, 2\}\}$. Note que, $C(T_3; K_2) = 1$. Luego, por el Ítem (i) del Teorema 4.2.11, tenemos:

$$C(K_3; K_2) \leq C(K_2; K_2) + C(T_3; K_2) = 1 + 1 = 2.$$

Así, $C(K_3; K_2) = 2$.

Por otro lado, note que $K_4 = C_4 \cup B$, donde B está dado por:

$$V(B) = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$E(B) = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

Observe que $C(C_4; K_2) = 1$ y $C(B; K_2) = 1$. Luego, por el Ítem (i) del Teorema 4.2.11, tenemos:

$$C(K_4; K_2) \leq C(C_4; K_2) + C(B; K_2) = 1 + 1 = 2.$$

Así, $C(K_4; K_2) = 2$.

Para $m, n \geq 1$, denotemos por $K_{m,n}$ el *grafo completo bipartido* dado por

$$V(K_{m,n}) = \{1, 2, \ldots, m, m + 1, \ldots, m + n\},$$
$$E(K_{m,n}) = \bigcup_{i=1}^{m} \{i(m + j)\}_{j=1}^{n}.$$

Note que, $C(K_{m,n}; K_2) = 1$, ya que tenemos el homomorfismo $f : K_{m,n} \to K_2$, dado por

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq i \leq m; \\ 2, & \text{si } m + 1 \leq i \leq m + n. \end{cases}$$

El siguiente resultado muestra que la primera desigualdad del Ítem (i) del Teorema 4.2.11 puede ser una igualdad.

Proposición 4.2.15. Sean G un grafo y A, B subgrafos de G tales que $V(A) \cap V(B) = \varnothing$. Entonces $C(A \sqcup B; H) = \text{máx}\{C(A; H), C(B, H)\}$ para cualquier grafo H.

Demostración. La desigualdad $\text{máx}\{C(A; H), C(B, H)\} \leq C(A \sqcup B; H)$ sigue del Ítem (i) del Teorema 4.2.11. Veamos la otra desigualdad, para ello supongamos que $m = \text{máx}\{C(A; H), C(B, H)\}$. Sean $\{f_i : A_i \to H\}_{i=1}^m$ y $\{g_i : B_i \to H\}_{i=1}^m$ casi-migraciones de A en H y de B en H, respectivamente. Note que, la colección $\{f_i \sqcup g_i : A_i \sqcup B_i \to H\}_{i=1}^m$ es una casi-migración de $A \sqcup B$ en H. Así, $C(A \sqcup B; H) \leq m = \text{máx}\{C(A; H), C(B, H)\}$. □

Observe que la hipótesis $V(A) \cap V(B) = \varnothing$ de la Proposición 4.2.15 no puede ser eliminada. Para ello, basta considerar los grafos A y B dados por $V(A) = \{1, 2, 3\}$, $E(A) = \{12, 13\}$, $V(B) = \{2, 3\}$ y $E(B) = \{23\}$. Note que, $C(A; K_2) = 1 = C(B; K_2)$ y $A \cup B = K_3$, $C(A \cup B; K_2) = 2$ (ver Ejemplo 4.2.14).

El siguiente ejemplo muestra que $C(K_n; K_2) = 3$, para $n = 5, 6, 7, 8$.

Ejemplo 4.2.16. Tenemos $C(K_n; K_2) = 3$, para $n = 5, 6, 7, 8$. De hecho, note que, $K_5 = (K_2 \sqcup K_3) \cup K_{3,2}$. Note que, $C(K_{3,2}; K_2) = 1$ y $C(K_2 \sqcup K_3; K_2) = C(K_3; K_2) = 2$. Luego, por el Ítem (i) del Teorema 4.2.11, tenemos:

$$C(K_5; K_2) \leq C(K_2 \sqcup K_3; K_2) + C(K_{3,2}; K_2) = 2 + 1 = 3.$$

Así, $C(K_5; K_2) \leq 3$. Supongamos que $\{f_1 : G_1 \to K_2, f_2 : G_2 \to K_2\}$ es una casi-migración de K_5 en K_2. Como $K_5 = G_1 \cup G_2$, entonces una copia de K_3 es un subgrafo de G_1 o G_2. Lo cual es una contradicción, ya que $C(K_3; K_2) = 2$. Por lo tanto, $C(K_5; K_2) \geq 3$ y así $C(K_5; K_2) = 3$.

Análogamente, $K_6 = (K_3 \sqcup K_3) \cup K_{3,3}$, $K_7 = (K_3 \sqcup K_4) \cup K_{4,3}$ y $K_8 = (K_4 \sqcup K_4) \cup K_{4,4}$.

Los Ejemplos 4.2.14 y 4.2.16 motivan a enunciar y probar el siguiente resultado.

Teorema 4.2.17. Para cada $m \geq 1$, tenemos $C(K_j; K_2) = m$, para todo $2^{m-1} + 1 \leq j \leq 2^m$.

Demostración. Aplicaremos inducción en $m \geq 1$. Para $m = 1$, se cumple de forma inmediata. Supongamos que vale para k, con $1 \leq k \leq m$. Veamos que vale para $m + 1$, o sea, para $2^m + 1 \leq j \leq 2^{m+1}$ veamos que la igualdad $C(K_j; K_2) = m + 1$ se cumple. De hecho, note que

$$K_j = \begin{cases} (K_\ell \sqcup K_\ell) \cup K_{\ell,\ell}, & \text{si } j = 2\ell; \\ (K_{\ell-1} \sqcup K_\ell) \cup K_{\ell,\ell-1}, & \text{si } j = 2\ell - 1. \end{cases}$$

Usando Ítem (i) del Teorema 4.2.11 junto con la Proposición 4.2.15, obtenemos $C(K_j; K_2) \leq C(K_\ell; K_2) + 1$. Note que $2^m + 1 \leq j \leq 2^{m+1}$ implica que $2^{m-1} + 1 \leq \ell \leq 2^m$. Luego, por la hipótesis de inducción, $C(K_\ell; K_2) = m$ y así $C(K_j; K_2) \leq m + 1$, para todo $2^m + 1 \leq j \leq 2^{m+1}$.

Por otro lado, sea $2^m + 1 \leq j \leq 2^{m+1}$. Supongamos que existe $\{f_i : G_i \to K_2\}_{i=1}^m$ una casi-migración de K_j en H. Como $K_j = G_1 \cup \cdots G_m$, entonces existen $i_1, \ldots, i_{m-1} \in \{1, \ldots, m\}$ distintos tales que $K_\ell \subset G_{i_1} \cup \cdots G_{i_{m-1}}$. Lo cual es una contradicción, ya que $C(K_\ell; K_2) = m$. Por lo tanto, $C(K_j; K_2) \geq m + 1$ y así $C(K_j; K_2) = m + 1$, para todo $2^m + 1 \leq j \leq 2^{m+1}$. □

El siguiente resultado muestra que la complejidad puede ser cualquier número natural.

Corolario 4.2.18. Para cada $m \geq 1$, existen grafos G y H tales que $C(G; H) = m$.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 4.2.17 a los grafos $G = K_{2^m}$ y $H = K_2$. □

La siguiente afirmación muestra una conexión entre la complejidad y el número cromático.

Proposición 4.2.19. Sea G un grafo. Si $C(G; K_2) > m$ entonces $\chi(G) \geq 2^m + 1$. Equivalentemente, si $\chi(G) \leq 2^m$ entonces $C(G; K_2) \leq m$.

Demostración. Sigue del Corolario 4.2.10 junto con el Teorema 4.2.17. □

Consideremos $\mathcal{G}$ la categoría de grafos y como morfismos los homomorfismos. Denotemos por $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ el producto cartesiano de $\mathcal{G}$ con ella misma. Definamos el siguiente invariante numérico $C(-;-) : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{N},\ (G, H) \mapsto C(G; H)$. El Corolario 4.2.18 muestra la siguiente afirmación.

Proposición 4.2.20. El invariante numérico $C(-;-) : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{N},\ (G, H) \mapsto C(G; H)$, es sobreyectivo.

Teorema 4.2.17 junto con el Ítem (i) del Teorema 4.2.7 implican la siguiente afirmación.

Proposición 4.2.21.

(i) Sea H un grafo tal que $E(H) \neq \varnothing$. Si $2^{m-1} + 1 \leq j \leq 2^m$, entonces $C(K_j; H) \leq m$.

(ii) Sea G un grafo que contiene un clique K_j, para algún $2^{m-1}+1 \leq j \leq 2^m$. Entonces $C(G; K_2) \geq m$.

Note que, si G es un grafo con lazos y H un grafo sin lazos, entonces $C(G;H) = \infty$. En particular, $C(G;K_n) = \infty$ para todo grafo con lazos G y cualquier $n \geq 1$.

Para el caso de complejidad inyectiva tenemos:

Teorema 4.2.22. Sea G un grafo sin vértices aislados con $E(G) \neq \varnothing$. Tenemos

$$IC(G;K_2) = \begin{cases} \infty, & \text{si } G \text{ tiene lazos;} \\ |E(G)|, & \text{si } G \text{ no tiene lazos.} \end{cases}$$

En particular, $IC(K_n;K_2) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, para todo $n \geq 2$.

Demostración. El caso G con lazos es inmediato. Veamos el caso G sin lazos. Observe que $IC(G;K_2) \leq |E(G)|$, ya que para cada eje $e = uv \in E(G)$, consideramos el subgrafo $L_e = L$, dado por $V(L) = \{u,v\}$ y $E(L) = \{uv\}$. Definamos el homomomorfismo inyectivo $f_e = f : L \to K_2$ por $f(u) = 1$ y $f(v) = 2$. Así, la colección $\{f_e : L_e \to K_2\}_{e \in E(G)}$ es una casi-migración inyectiva de G en K_2.

Por otro lado, observe que, si $\{f_\ell : G_\ell \to K_2\}_\ell^m$ es una casi-migración inyectiva de G en K_2, sin pérdida de generalidad, ya que G no tiene vértices aislados, podemos asumir que cada G_ℓ es un eje de G. Luego, $m \geq |E(G)|$ y así $IC(G;K_2) \geq |E(G)|$. Por lo tanto, $IC(G;K_2) = |E(G)|$. □

Observación 4.2.23. Para un grafo G con $E(G) = \varnothing$, denote por $m = \dfrac{|V(G)|}{2}$, note que $IC(G;K_2) = \lceil m \rceil$, donde $\lceil m \rceil$ es el menor entero mayor o igual que m.

Para cerrar esta sección, presentaremos la desigualdad del producto. Recordemos que, dados los grafos G_1 y G_2 (dirigidos o no), el *grafo producto* $G_1 \times G_2$ está dado por $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ y dos vértices $u = (u_1,u_2), v = (v_1,v_2) \in V(G_1 \times G_2)$ son adyacentes si $u_1v_1 \in V(G_1)$ y $u_2v_2 \in V(G_2)$. Además, dados dos homomorfismos $f_1 : G_1 \to H_1$ y $f_2 : G_2 \to H_2$, la aplicación producto $f_1 \times f_2 : V(G_1) \times V(G_2) \to V(H_1) \times V(H_2), (f_1 \times f_2)(u_1,u_2) = (f_1(u_1), f_2(u_2))$, es un homomorfismo de $G_1 \times G_2$ en $H_1 \times H_2$. Note que, si A es subgrafo de G_1 y B es subgrafo de G_2 entonces $A \times B$ es subgrafo de $G_1 \times G_2$. Además, cada proyección $p_j : G_1 \times G_2 \to G_j, p_j(u_1,u_2) = u_j$, es un homomorfismo, $j = 1,2$. Adicionalmente, el homomorfismo diagonal $D_G : G \to G \times G, D_G(u) = (u,u), \forall u \in V(G)$, es inyectivo. En particular, $C(G;G \times G) = 1$ y $IC(G;G \times G) = 1$.

El Teorema 4.2.24 presenta la desigualdad del producto para las complejidades.

Teorema 4.2.24. Sean G_1, G_2, H_1 y H_2 grafos (dirigidos o no). Tenemos

(i) $\max\{C(G_1 \times G_2; H_1), C(G_1 \times G_2; H_2)\} \leq C(G_1 \times G_2; H_1 \times H_2) \leq \min\{C(G_1; H_1) \cdot C(G_2; H_2), C(G_1; H_1 \times H_2), C(G_2; H_1 \times H_2)\}$.

(ii) $IC(G_1 \times G_2; H_1 \times H_2) \leq IC(G_1; H_1) \cdot IC(G_2; H_2)$.

Demostración.

(i) Sean $m = C(G_1; H_1)$, $n = C(G_2; H_2)$ y consideremos $\mathcal{M}_1 = \{f_{i,1} : G_{i,1} \to H_1\}_{i=1}^{m}$, $\mathcal{M}_2 = \{f_{j,2} : G_{j,2} \to H_2\}_{j=1}^{n}$ casi-migraciones óptimas de G_1 en H_1 y de G_2 en H_2, respectivamente. Tenemos que $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \{f_{i,1} \times f_{j,2} : G_{i,1} \times G_{j,2} \to H_1 \times H_2\}_{i,j}^{m,n}$ es una casi-migración de $G_1 \times G_2$ en $H_1 \times H_2$. Luego, $C(G_1 \times G_2; H_1 \times H_2) \leq m \cdot n = C(G_1; H_1) \cdot C(G_2; H_2)$.

Las otras desigualdades siguen del Ítem (i) del Teorema 4.2.7 aplicado a cada proyección $G_1 \times G_2 \to G_j$ y $H_1 \times H_2 \to H_j$.

(ii) Sean $m = C(G_1; H_1)$, $n = C(G_2; H_2)$ y consideremos $\mathcal{M}_1 = \{f_{i,1} : G_{i,1} \to H_1\}_{i=1}^{m}$, $\mathcal{M}_2 = \{f_{j,2} : G_{j,2} \to H_2\}_{j=1}^{n}$ casi-migraciones inyectivas óptimas de G_1 en H_1 y de G_2 en H_2, respectivamente. Tenemos que $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \{f_{i,1} \times f_{j,2} : G_{i,1} \times G_{j,2} \to H_1 \times H_2\}_{i,j}^{m,n}$ es una casi-migración inyectiva de $G_1 \times G_2$ en $H_1 \times H_2$. Luego, $IC(G_1 \times G_2; H_1 \times H_2) \leq m \cdot n = IC(G_1; H_1) \cdot IC(G_2; H_2)$.

□

Adicionalmente, tenemos la siguiente afirmación.

Proposición 4.2.25. Sean G y H grafos (dirigidos o no). Tenemos

(i) $C(G; H \times H) = C(G; H)$. Además, $C(G \times G; H) = C(G; H)$.

(ii) $IC(G; H \times H) \leq IC(G; H)$. Además, $IC(G; H) \leq IC(G \times G; H)$.

Demostración.

(i) Sigue de aplicar el Ítem (i) del Teorema 4.2.7 a una de las proyecciones junto con el homomorfismo diagonal.

(ii) Sigue de aplicar el Ítem (ii) del Teorema 4.2.7 al homomorfismo diagonal.

□

En particular, la Proposición 4.2.25 implica el siguiente resultado.

Corolario 4.2.26. Sean G y H grafos (dirigidos o no). Tenemos

$$C(G \times G; H \times H) = C(G; H).$$

Demostración. Por el Ítem (i) de la Proposición 4.2.25, tenemos:

$$C(G \times G; H \times H) = C(G \times G; H) = C(G; H).$$

□

4.2.2. Número seccional de un homomorfismo

En esta sección presentamos la noción de número seccional de un homomorfismo (Definición 4.2.27) junto con resultados básicos sobre este nuevo invariante numérico. Observación 4.2.28 muestra que toda colección transversal es una casi-migración inyectiva. En particular, la complejidad es una cota inferior para el número seccional (Proposición 4.2.29). En los Ejemplos 4.2.30, 4.2.31 y 4.2.32 calculamos las complejidades y el número seccional. Observación 4.2.33 muestra que, en casos particulares, el número seccional y las complejidades pueden ser equivalentes. Teorema 4.2.34 muestra una caracterización de cuando el número seccional es igual a 1, además presenta una condición necesaria para que el número seccional sea finito. Adicionalmente, el Ejemplo 4.2.35 muestra que el número seccional puede ser estrictamente mayor que las complejidades. Los ejemplos 4.2.36, 4.2.37 muestran que el número seccional puede coincidir con las complejidades. El ejemplo 4.2.38 muestra que el número seccional puede coincidir con la complejidad inyectiva pero no con la complejidad. Notamos que el número seccional de un homomorfismo es mayor o igual que el número seccional de cualquier casi-pullback (Proposición 4.2.39). En particular, el Ejemplo 4.2.40 muestra que el número seccional de la restricción es menor o igual que el número seccional del homomomorfismo. En el Teorema 4.2.41 se presenta la sub-aditividad del número seccional. En particular, Corolario 4.2.42 muestra que bajo ciertas condiciones el número seccional está cercano del número seccional de una restricción. Una estimativa para el número seccional de un producto está dada en el Teorema 4.2.43. En particular, Proposición 4.2.44 muestra que el número seccional de un homomomorfismo producto con la identidad no se altera. Finalmente, Teorema 4.2.45 muestra una conexión natural entre el número cromático y el número seccional. En particular, el Ejemplo 4.2.46 muestra que la mayoría de homomomorfismos su número seccional es al menos 2. Finalmente, el Teorema 4.2.47 muestra que el número seccional de un homomorfismo es una cota superior para la categoría seccional de la aplicación celular inducida.

Desde el punto de vista de la Teoría de Categoría Seccional [13], la cual es propia de la Topología Algebraica, las aplicaciones más simples son las aplicaciones que tienen secciones transversales. Una forma de medir el número mínimo de secciones transversales de una aplicación $f\colon X \to Y$ es mediante la menor cardinalidad de las cubiertas abiertas finitas de Y tal que cada miembro de la cubierta admite una sección transversal local de f. Este invariante numérico se conoce como el *número seccional* de f, véase [11],[18].

Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo. Una *sección transversal* o *sección* de ϕ es un homomorfismo $s : H \to G$, tal que $\phi \circ s = 1_H$. Además, dado un subgrafo $K \subset H$, una *sección local* de ϕ sobre K es una sección del homomorfismo restricción $\phi_| : \phi^{-1}(K) \to K$, es decir, un homomorfismo $s : K \to G$, tal que $\phi \circ s$ es el homomorfismo inclusión $K \hookrightarrow H$. Note que s es inyectivo.

Note que, si $\phi : G \to H$ admite una sección, entonces $IC(H;G) = C(H;G) = 1$. En particular, si $C(H;G) \geq 2$, entonces ningún homomorfismo $G \to H$ admite una sección. Así, es natural introducir la siguiente definición.

Definición 4.2.27. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo. El *número seccional* de ϕ, denotado por $\sec(\phi)$, es el menor entero m tal que existen m subgrafos $H_1, H_2, \ldots, H_m$ de H que cumplan las siguientes condiciones:

a) $H = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_m$.

b) Cada H_i admite una sección local para ϕ.

Establecemos $\sec(\phi) = \infty$ si no existe tal entero m.

Una colección $\mathcal{S} = \{s_i : H_i \to G\}_{i=1}^{\ell}$, donde cada H_i es un subgrafo de H, $H = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_\ell$ y cada $s_i : H_i \to G$ es una sección local de ϕ, es llamada una *colección transversal* para ϕ. Diremos que una colección transversal $\mathcal{S} = \{s_i : H_i \to G\}_{i=1}^{\ell}$ para ϕ es *óptima* si $\ell = \sec(\phi)$. Toda colección transversal $\mathcal{S} = \{s_i : H_i \to G\}_{i=1}^{\ell}$ induce una aplicación $s : V(H) \to V(G)$, dada por $s(v) = s_i(v)$, donde i es el menor índice tal que $v \in V(H_i)$. Note que, tal aplicación $s : V(H) \to V(G)$ cumple $\phi \circ s = 1_{V(H)}$. En particular, s es una aplicación inyectiva y ϕ es vértice-sobreyectiva.

Observación 4.2.28. Sea $\mathcal{S} = \{s_i : H_i \to G\}_{i=1}^{\ell}$ una colección transversal para ϕ. Note que, cada $s_i : H_i \to G$ es inyectivo, luego $\mathcal{S} = \{s_i : H_i \to G\}_{i=1}^{\ell}$ es una casi-migración inyectiva de H en G. Así, toda colección transversal es una casi-migración inyectiva.

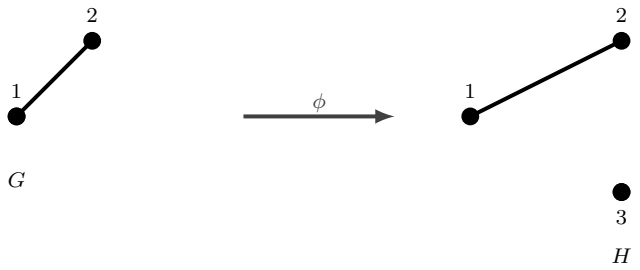
En particular, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.2.29. Tenemos que $C(H;G) \leq IC(H;G) \leq \text{sec}(\phi)$, para cualquier homomorfismo $\phi : G \to H$.

Demostración. Sigue del Ítem (i) de la Observación 4.2.2 junto con la Observación 4.2.28. □

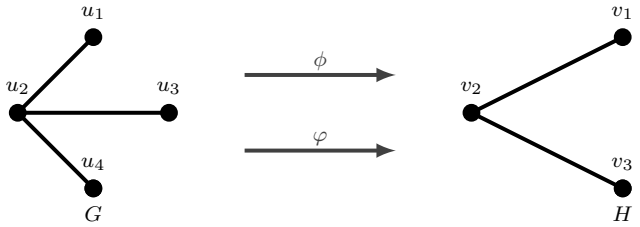
El siguiente ejemplo muestra que las desigualdades en la Proposición 4.2.29 pueden ser estrictas.

Ejemplo 4.2.30. Considere los grafos G y H dados por $G = K_2$ y $V(H) = \{1, 2, 3\}$ y $E(H) = \{12\}$. Sea $\phi : G \to H$ dado por $\phi(1) = 1$ y $\phi(2) = 2$.



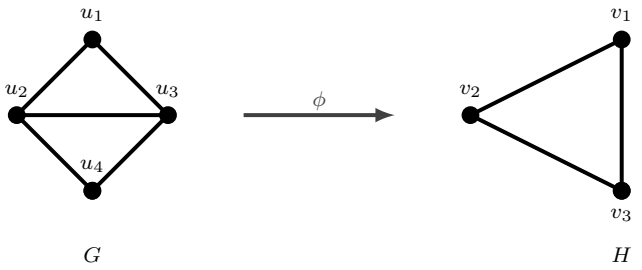
Note que, $C(H, G) = 1$, ya que $h : H \to G$, dada por $h(1) = 1$ y $h(2) = 2 = h(3)$, es una migración. Además, $IC(H;G) = 2$ y $\text{sec}(\phi) = \infty$.

Ejemplo 4.2.31. Dados los grafos de la siguiente figura:



Considere los homomorfismos ϕ y φ dados por $\phi(u_1) = v_1 = \phi(u_4)$, $\phi(u_2) = v_2$, $\phi(u_3) = v_3$ y $\varphi(u_1) = \varphi(u_3) = \varphi(u_4) = v_1$, $\varphi(u_2) = v_2$, respectivamente. La aplicación s definida por $s(v_j) = u_j$ para $j = 1, 2, 3$ es una sección transversal de ϕ y por lo tanto $\text{sec}(\phi) = 1$. Sin embargo, note que $\text{sec}(\varphi) = \infty$ porque no hay un subgrafo K de H que admita una sección transversal local a φ con $v_3 \in V(K)$. Además, observe que $C(H;G) = IC(H;G) = 1$.

Ejemplo 4.2.32. Dados los grafos de la siguiente figura:



Considere el homomorfismo ϕ dado por $\phi(u_1) = v_1 = \phi(u_4)$, $\phi(u_2) = v_2$ y $\phi(u_3) = v_3$. La aplicación s definida por $s(v_j) = u_j$ para $j = 1, 2, 3$ es una sección transversal de ϕ y por lo tanto $\text{sec}(\phi) = 1$. Además, $C(H; G) = IC(H; G) = 1$.

Decimos que un homomorfismo $\phi : G \to H$ es *localmente seccionable* si $E(H) = \varnothing$ o para cada arista $uv \in E(H)$ existe un subgrafo K de H con $uv \in E(K)$ y K admite una sección local de ϕ. Tenga en cuenta que, por definición, si $\text{sec}(\phi) < \infty$ entonces ϕ es localmente seccionable.

Observación 4.2.33. Sea G un grafo.

a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $E(G) = \varnothing$.
- $\text{sec}(\phi) = \infty$, para cualquier homomorfismo $\phi : G \to K_2$.
- $C(K_2; G) = \infty$.
- $IC(K_2; G) = \infty$.

b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $E(G) \neq \varnothing$.
- $\text{sec}(\phi) = 1$, para cualquier homomorfismo $\phi : G \to K_2$.
- $C(K_2; G) = 1$.
- $IC(K_2; G) = 1$.

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.34. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo.

i) Tenemos que $\text{sec}(\phi) = 1$ si, y solo si, existe un subgrafo H' de G tal que la restricción $\phi_| : H' \to H$ es un isomorfismo de grafos.

ii) Si $\text{sec}(\phi) < \infty$, entonces $\phi(G) = H$. En particular, ϕ es vértice-sobreyectiva, es decir, la función $\phi\colon V(G) \to V(H)$ es sobreyectiva.

Demostración.

i) Supongamos que $\text{sec}(\phi) = 1$ entonces existe un homomorfismo $s\colon H \to G$ con $\phi \circ s = 1_H$. En particular, s es inyectivo y $s(H)$ es un subgrafo de G. Además, $s\colon H \to S(H)$ es un isomorfismo de grafos cuya inversa es la restricción $\phi_|\colon S(H) \to H$. Así, $H' = s(H)$ es un subgrafo de G tal que la restricción $\phi_|\colon H' \to H$ es un isomorfismo de grafos.

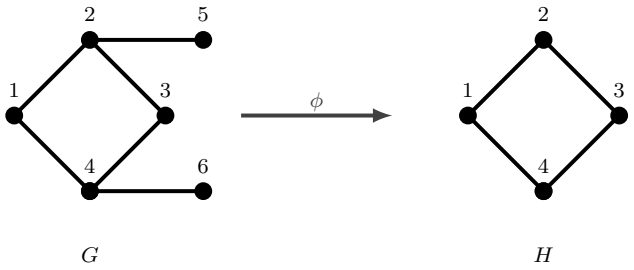
   Ahora, supongamos que existe un subgrafo H' de G tal que la restricción $\phi_|\colon H' \to H$ es un isomorfismo de grafos. Sea $\sigma\colon H \to H'$ el inverso de $\phi_|\colon H' \to H$. Entonces $s\colon H \to G$ dado por $s = incl_{H'} \circ \sigma$ es una sección transversal de ϕ.

ii) Supongamos que $\text{sec}(\phi) < \infty$. Probaremos por contradicción. Supongamos que $\phi(G)$ es un subgrafo propio de H. El caso, ϕ no es sobreyectiva implica fácilmente que $\text{sec}(\phi) = \infty$ que es una contradicción. Supondremos que ϕ es sobreyectiva. Entonces, hay dos vértices $v_1, v_2 \in V(H) = \phi(V(G))$ que son adyacentes en H sin embargo no hay vértices $u_1, u_2 \in V(G)$ que son adyacentes en G y $\phi(u_1) = v_1, \phi(u_2) = v_2$. Considere el subgrafo K de H donde $V(K) = \{v_1, v_2\}$ y $E(K) = \{v_1v_2\}$ y tenga en cuenta que no hay una sección transversal local $s : K \to G$ de ϕ. Entonces, ϕ no es localmente seccionable y, por lo tanto, $\text{sec}(\phi) = \infty$, lo cual es una contradicción.

□

El siguiente ejemplo muestra también que la complejidad inyectiva es estrictamente menor que el número seccional, con número seccional finito.

Ejemplo 4.2.35. Considere los grafos dados en la siguiente figura,

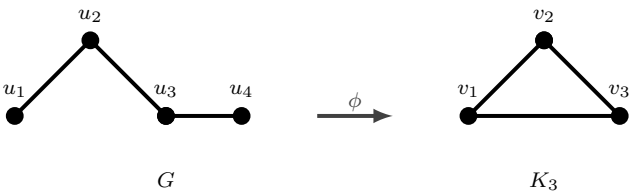


junto con el homomorfismo $\phi : G \to H$, definido por $\phi(1) = \phi(3) = 1, \phi(2) = 2, \phi(4) = 4, \phi(5) = \phi(6) = 3$. Note que,

$$C(H; G) = IC(H; G) = 1 \text{ y } \text{sec}(\phi) = 2,$$

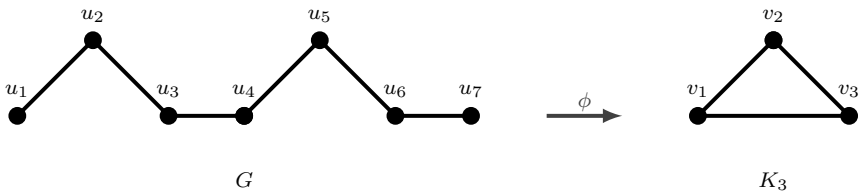
ya que en G no existe un subgrafo H' tal que la restricción $\phi_| : H' \to H$ sea un isomorfismo y existen secciones locales $s_1 : H_1 \to G$, $s_2 : H_2 \to G$ de ϕ, donde $V(H_1) = \{1, 2, 3, 4\}, E(H_1) = \{14, 12, 23\}, V(H_2) = \{3, 4\}$, $E(H_2) = \{34\}, s_1(1) = 1, s_1(2) = 2, s_1(3) = 5, s_1(4) = 4$ y $s_2(3) = 6, s_2(4) = 4$.

Ejemplo 4.2.36. Considere los grafos de la siguiente figura:



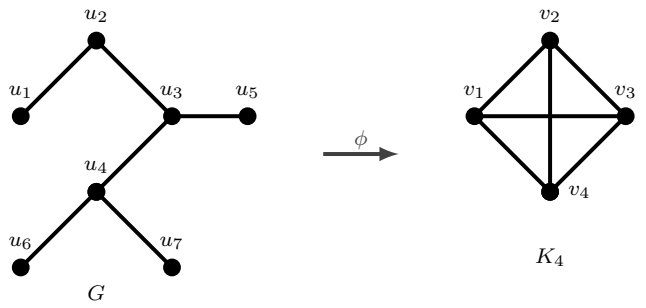
considere el homomorfismo ϕ dado por $\phi(u_1) = v_1 = \phi(u_4)$, $\phi(u_2) = v_2$ y $\phi(u_3) = v_3$. Note que G no admite una copia de K_3, por lo tanto, $\text{sec}(\phi) \geq 2$, ver Teorema 4.2.34) ítem i). Sean H_1, H_2 subgrafos de K_3 dados por $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(H_1) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ y $V(H_2) = \{v_1, v_3\}$, $E(H_2) = \{v_1v_3\}$. Note que $K_3 = H_1 \cup H_2$. Además, las aplicaciones $s_1 : H_1 \to G$, $s_1(v_j) = u_j$ con $j = 1, 2, 3$ y $s_2 : H_2 \to G$, $s_2(v_1) = u_4$, $s_2(v_3) = u_3$ son secciones transversales locales para ϕ. Por lo tanto, $\text{sec}(\phi) = 2$. Note que, $C(K_3; G) = IC(K_3; G) = 2$.

Ejemplo 4.2.37. Considere los grafos de la siguiente figura:



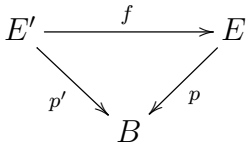
Considere el homomorfismo ϕ dado por $\phi(u_1) = \phi(u_4) = \phi(u_7) = v_1$, $\phi(u_2) = \phi(u_5) = v_2$ y $\phi(u_3) = \phi(u_6) = v_3$. Note que G no admite una copia de K_3, por lo tanto, $\text{sec}(\phi) \geq 2$, ver Teorema 4.2.34) ítem i). Sean H_1, H_2 subgrafos de K_3 dados por $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(H_1) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ y $V(H_2) = \{v_1, v_3\}$, $E(H_2) = \{v_1v_3\}$. Observe que $K_3 = H_1 \cup H_2$. Además, las aplicaciones $s_1 : H_1 \to G$, $s_1(v_j) = u_j$ para $j = 1, 2, 3$ y $s_2 : H_2 \to G$, $s_2(v_1) = u_4$, $s_2(v_3) = u_3$ son secciones transversales locales para ϕ. Por lo tanto, $\text{sec}(\phi) = 2$. Note que, $C(K_3; G) = IC(K_3; G) = 2$.

Ejemplo 4.2.38. Dados los grafos de la siguiente figura:



Considere el homomorfismo ϕ dado por $\phi(u_1) = \phi(u_5) = \phi(u_6) = v_1$, $\phi(u_2) = \phi(u_7) = v_2$, $\phi(u_3) = v_3$ y $\phi(u_4) = v_4$. Supongamos que existen H_1, H_2 subgrafos de K_4 tales que $K_4 = H_1 \cup H_2$ junto con las secciones transversales locales $s_1 : H_1 \to G$ y $s_2 : H_2 \to G$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_4 \in H_1$. Entonces $s_1(v_4) = u_4$ e $\deg(v_4) = 3 = \deg(u_4)$. Entonces, tenemos un ciclo C en H_2, donde $V(C) = \{v_1, v_2, v_3\}$ and $E(C) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$. Lo cual es una contradicción, ya que G no tiene ciclos. Por lo tanto, $\text{sec}(\phi) \geq 3$. Por otro lado, sean F_1, F_2, F_3 subgrafos de K_4 dados por $V(F_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(F_1) = \{v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4\}$, $V(F_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(F_2) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ y $V(F_3) = \{v_1, v_3\}$, $E(F_3) = \{v_1v_3\}$. Note que $K_4 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Además, las aplicaciones $\sigma_1 : F_1 \to G$, $\sigma_1(v_4) = u_4$, $\sigma_1(v_1) = u_6$, $\sigma_1(v_3) = u_3$, $\sigma_1(v_2) = u_7$, $\sigma_2 : F_2 \to G$, $\sigma_2(v_j) = u_j$ para $j = 1, 2, 3$ y $\sigma_3 : F_3 \to G$, $\sigma_3(v_1) = u_5$, $\sigma_3(v_3) = u_3$ son secciones transversales locales para ϕ. Por lo tanto, $\text{sec}(\phi) = 3$. Note que, $C(K_4; G) = 2$ y $IC(K_4; G) = 3$.

Note que, si el siguiente diagrama



conmuta, entonces $\text{sec}(p') \geq \text{sec}(p)$, ya que si $\{s_i : B_i \to E'\}_{i=1}^{\ell}$ es una colección de secciones locales para p' entonces $\{f \circ s_i : B_i \to E\}_{i=1}^{\ell}$ es una colección de secciones locales para p (esto es un análogo de [13, Proposition 6, pg. 70] en la categoría de grafos y homomorfismos).

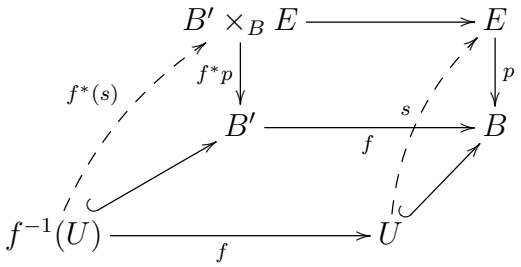
Dados homomorfismos $p : E \to B$ y $f : B' \to B$, consideremos

$$B' \times_B E = (B' \times E) \left[V(B') \times_{V(B)} V(E)\right]$$

el subgrafo inducido por $V(B') \times_{V(B)} V(E) = \{(u_1, u_2) \in V(B') \times V(E) : f(u_1) = p(u_2)\}$. Note que, las proyecciones $f^*p : B' \times_B E \to B',\ (u_1, u_2) \to u_1,\ \pi_2 : B' \times_B E \to E,\ (u_1, u_2) \to u_2$, son homomorfismos de $B' \times_B E$ en B' y $B' \times_B E$ en E, respectivamente. La proyección $f^*p : B' \times_B E \to B',\ (u_1, u_2) \to u_1$, es conocida como el *Pullback canónico* determinado por p respecto a f.

Para cualesquier homomorfismos $p : E \to B$ y $f : B' \to B$, note que cualquier sección local $s : U \to E$ de $p : E \to B$ induce una sección local del pullback canónico $f^*p : B' \times_B E \to B'$ (este es un análogo de [13, Proposition 7, pg. 71] en la categoría de grafos y homomorfisos). De hecho, $f^*(s) : f^{-1}(U) \to B' \times_B E$, está definida por

$$f^*(s)(b') = (b', (s \circ f)(b')).$$



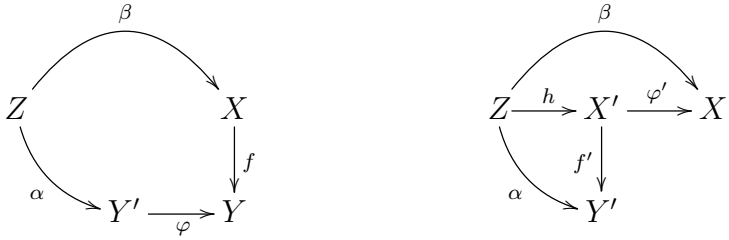
Así,

$$\operatorname{sec}(f^*p) \leq \operatorname{sec}(p). \tag{4.1}$$

De [16, Definition 3.4, pg. 40] o [17] podemos recordar la siguiente definición. Un *casi-pullback* es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[\varphi]{} & Y \end{array} \tag{4.2}$$

tal que, para cualquier diagrama conmutativo como en el lado izquierdo de (4.3), existe un homomorfismo (no necesariamente único) $h : Z \to X'$ que torna un diagrama conmutativo como en el lado derecho de (4.3).



(4.3)

Tenemos la siguiente afirmación (la cual es análoga a [16, Lemma 3.5, pg. 41] en la categoría de grafos y homomorfismos).

Proposición 4.2.39. Si (4.2) es un casi-pullback, entonces

$$\sec(f') \leq \sec(f).$$

Demostración. Como (4.2) es un casi-pullback, tenemos la siguiente igualdad $\sec(f') = \sec(\varphi^* f)$. Por otro lado, la desigualdad 4.1 dice que $\sec(\varphi^* f) \leq \sec(f)$. Así, $\sec(f') \leq \sec(f)$. □

Ejemplo 4.2.40. Dado $\phi : G \to H$ un homomorfismo y A subgrafo de H, denotemos por $incl : A \hookrightarrow H$ el homomorfismo inclusión y $\phi_{|A} : \phi^{-1}(A) \to A$ el homomorfismo restricción. Note que $V(A \times_H G) = \{(a, u) \in V(A) \times V(G) : a = \phi(u)\}$. Consideremos las siguientes aplicaciones $f : V(A \times_H G) \to V(\phi^{-1}(A)),\ (a, u) \mapsto u$, $g : V(\phi^{-1}(A)) \to V(A \times_H G),\ u \mapsto (\phi(u), u)$ y note que $g \circ f = 1_{V(A \times_H G)}$ y $f \circ g = 1_{V(\phi^{-1}(A))}$. Además, f es un homomorfismo de $A \times_H G$ en $\phi^{-1}(A)$ y g es un homomorfismo de $\phi^{-1}(A)$ en $A \times_H G$. Así, f es un isomorfismo cuya inversa es g, además los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} A \times_H G & \xrightarrow{\quad f \quad} & \phi^{-1}(A) \\ & {\scriptstyle incl^*(\phi)} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \phi_{|A}} & \\ & A & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \phi^{-1}(A) & \xrightarrow{\quad g \quad} & A \times_H G \\ & {\scriptstyle \phi_{|A}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle incl^*(\phi)} & \\ & A & \end{array}$$

son conmutativos. En particular, $\sec(\phi_{|A}) = \sec(incl^*(\phi))$, luego por Proposición 4.2.39, tenemos

$$\sec(\phi_{|A}) \leq \sec(\phi).$$

La siguiente afirmación muestra la sub-aditividad del número seccional. Dado $\phi : G \to H$ un homomorfismo y A subgrafo de H, recuerde que $\phi_{|A} : \phi^{-1}(A) \to A$ denota el homomorfismo restricción.

Teorema 4.2.41. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo y A, B subgrafos de H tales que $H = A \cup B$. Tenemos

$$\text{máx}\{\sec(\phi_{|A}), \sec(\phi_{|B})\} \leq \sec(\phi) \leq \sec(\phi_{|A}) + \sec(\phi_{|B}).$$

Demostración. La desigualdad $\text{máx}\{\sec(\phi_{|A}), \sec(\phi_{|B})\} \leq \sec(\phi)$ sigue del Ejemplo 4.2.40. Para ver la otra desigualdad, supongamos que $\sec(\phi_{|A}) = m$ y $\sec(\phi_{|B}) = k$. Sean $\{s_i : A_i \to G\}_{i=1}^m$ y $\{\sigma_j : B_j \to G\}_{j=1}^k$ colecciones de secciones locales de $\phi_{|A}$ y $\phi_{|B}$, respectivamente. Luego, la colección $\{s_1 : A_1 \to G, \ldots, s_m : A_m \to G, \sigma_1 : B_1 \to G, \ldots, \sigma_k : B_k \to G\}$ es una colección de secciones locales de ϕ. Así, $\sec(\phi) \leq m + k = \sec(\phi_{|A}) + \sec(\phi_{|B})$. □

Teorema 4.2.41 implica la siguiente afirmación.

Corolario 4.2.42. Sean $\phi : G \to H$ un homomorfismo y A, T subgrafos de H tales que $H = A \cup T$. Si $\sec(\phi_{|T}) = 1$ entonces

$$\sec(\phi_{|A}) \leq \sec(\phi) \leq \sec(\phi_{|A}) + 1.$$

Veamos la desigualdad del producto.

Teorema 4.2.43. Sean $\varphi_j : G_j \to H_j$, $j = 1, 2$, homomomorfismos. Tenemos

$$\sec(\varphi_1 \times \varphi_2) \leq \sec(\varphi_1) \cdot \sec(\varphi_2).$$

Demostración. Sean $m = \sec(\varphi_1)$, $n = \sec(\varphi_2)$ y consideremos $\mathcal{M}_1 = \{s_{i,1} : H_{i,1} \to G_1\}_{i=1}^{m}$, $\mathcal{M}_2 = \{s_{j,2} : H_{j,2} \to G_2\}_{j=1}^{n}$ colecciones de secciones locales óptimas de $\varphi_1 : G_1 \to H_1$ y $\varphi_2 : G_2 \to H_2$, respectivamente. Tenemos que $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \{s_{i,1} \times s_{j,2} : H_{i,1} \times H_{j,2} \to G_1 \times G_2\}_{i,j}^{m,n}$ es una colección de secciones locales de $\varphi_1 \times \varphi_2 : G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$. Luego, $\sec(\varphi_1 \times \varphi_2) \leq m \cdot n = \sec(\varphi_1) \cdot \sec(\varphi_2)$. □

En particular, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.44. Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo. Entonces

$$\sec(\varphi \times 1_H) = \sec(\varphi).$$

Demostración. Note que, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(1_G,\varphi)} & G \times H \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi\times 1_H} \\ H & \xrightarrow[D]{} & H \times H \end{array}$$

es un casi-pullback, donde $D : H \to H \times H, D(v) = (v, v)$, es el homomorfismo diagonal. Así, por la Proposición 4.2.39, obtenemos que $\sec(\varphi) \leq \sec(\varphi \times 1_H)$.

La otra desigualdad, sigue directamente del Teorema 4.2.43. □

Para cerrar esta sección, el siguiente resultado muestra una conexión natural entre el número cromático y el número seccional.

Teorema 4.2.45. Sea ϕ: $G \to H$ un homomorfismo. Si $\sec(\phi) = 1$ entonces $\chi(G) = \chi(H)$. De manera equivalente, si $\chi(G) < \chi(H)$ entonces $\sec(\phi) \geq 2$.

Demostración. Observe que, $\chi(G) \leq \chi(H)$. Además, del ítem i) del Teorema 4.2.34, tenemos que G admite una copia de H, entonces $\chi(G) \geq \chi(H)$ y así $\chi(G) = \chi(H)$. □

Ejemplo 4.2.46. Sean G, H grafos. Del Teorema 4.2.45, si $\chi(G) < \chi(H)$ entonces $\text{sec}(\phi) \geq 2$ para cualquier homomorfismo $\phi : G \to H$.

Finalmente, de [18] o [11] recordemos la noción de categoría seccional de una aplicación. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. La *categoría seccional* de f, denotada por $\text{secat}(f)$ es el menor entero positivo k tal que existen $U_1, \ldots, U_k$ abiertos de Y tales que $Y = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ y sobre cada U_j existe una aplicación continua $\sigma_j : U_j \to X$ con $f \circ \sigma_j$ es homotópica a la inclusión $U_j \hookrightarrow Y$.

El siguiente resultado muestra que el número seccional de un homomorfismo es una cota superior de la categoría seccional de su aplicación celular inducida.

Teorema 4.2.47. Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grafos y considere la aplicación celular $X_\varphi : X_G \to X_H$ inducida por φ (ver Ejemplo 2.2.53). Entonces

$$\text{secat}(X_\varphi) \leq \text{sec}(\varphi).$$

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{s_j : H_j \to G\}_{j=1}^k$ una colección transversal óptima para φ. Por el Ejemplo 2.2.53, cada sección local $s_j : H_j \to G$ induce una aplicación celular $X_{s_j} : X_{H_j} \to X_G$ tal que $X_\varphi \circ X_{s_j} = incl_{X_{H_j}}$, donde $incl_{X_{H_j}}$ denota la aplicación inclusión $X_{H_j} \hookrightarrow X_H$. Por [6, Proposition A.5., pg. 523], para cada subcomplejo X_{H_j} de X_H existe una vecindad abierta $N = N(X_{H_j})$ tal que X_{H_j} es un *retracto por deformación* de N, o sea, existe una aplicación continua $r : N(X_{H_j}) \to X_{H_j}$ tal que $r \circ incl_{X_{H_j}} = 1_{X_{H_j}}$ y $incl_{X_{H_j}} \circ r \simeq 1_N$. Note que, $X_{s_j} \circ r : N \to X_G$ cumple que $f \circ (X_{s_j} \circ r)$ es homotópica a la inclusión $N \hookrightarrow X_H$. Además, por el Ejemplo 2.2.45, $X_H = X_{H_1} \cup \cdots \cup X_{H_k}$, en particular $X_H = N(X_{H_1}) \cup \cdots \cup N(X_{H_k})$. Así, obtenemos que $\text{secat}(X_\varphi) \leq k = \text{sec}(\varphi)$. □

Por [10, Proposition 5.1, pg. 336], note que $\text{secat}(\psi) \in \{1, 2\}$ para cualquier aplicación continua $\psi : X \to Y$ con Y un complejo CW de dimensión 1.

CONCLUSIONES

Con este trabajo concluimos lo siguiente:

(1) Hemos estudiado la existencia de homomorfismo entre dos grafos dados. Además hemos construido tales homomorfismos.

(2) Hemos estudiado la existencia de homomorfismo entre dos grafos dados a través de invariantes tales como: índice o grado de un vértice y número cromático.

(3) Hemos presentado el concepto de complejidad entre dos grafos para medir el problema de existencia de homomorfismos de grafos entre ellos.

(4) Hemos diseñado casi-migraciones óptimas.

(5) Hemos presentado el concepto de número seccional de un homomorfismo de grafos para estudiar el problema inverso de una migración.

RECOMENDACIONES

Presentamos las siguientes recomendaciones:

(1) Aplicar la teoría desarrollada en este trabajo en aplicaciones concretas de migración de datos.

(2) Implementar en un computador los algoritmos (casi-migraciones) presentados.

(3) Encontrar nuevas estimativas para calcular las complejidades y el número seccional.

Bibliografía

[1] Aguilar, M. A., Gitler, S., Prieto, C., & Aguilar, M. A. (2002). Algebraic topology from a homotopical viewpoint (Vol. 2002). New York: Springer.

[2] Batik, R. (1997). Structure of graph homomorphisms. Doctoral dissertation, Simon Fraser University.

[3] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008). Graph Theory. Springer London.

[4] Díaz, J., Serna, M., & Thilikos, D. M. (2005). The restrictive H-coloring problem. Discrete Applied Mathematics, 145(2), 297-305.

[5] Elmasri, R. & Navathe, S. B. & Castillo, V. C. & Pérez, G. Z., & Espiga, B. G. (2007). Fundamentos de sistemas de bases de datos. Pearson educación.

[6] Hatcher, A. (2002). Algebraic Topology. Cambridge University Press.

[7] Hell, P., & Nešetřil, J. (2004). Graphs and homomorphisms (Vol. 28). OUP Oxford.

[8] Hell, P., & Nešetřil, J. (1990). *On the complexity of H-coloring*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 48(1), 92-110.

[9] Hussein, A.A. (2021). Data Migration Need, Strategy, Challenges, Methodology, Categories, Risks, Uses with Cloud Computing, and Improvements in Its Using with Cloud Using Suggested Proposed Model (DMig 1). Journal of Information Security, 12, 79-103.

[10] James, I. M. (1978). On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann. Topology, 17(4), 331-348.

[11] Pavešić, P. (2019). Topological complexity of a map. Homology, Homotopy and Applications. International Press of Boston. **21**, no. 2, 107–130. ArXiv preprint arXiv:1809.09021 (2019).

[12] Sarmah, S. S. (2018). Data migration. Science and Technology, 8(1), 1-10.

[13] Schwarz, A. S. (1966). The genus of fiber space. Amer. Math. Sci, Transl. Series 2, **55**: Eleven papers on topology and algebra, 49-140.

[14] Spivak, D. I. (2012). Functorial data migration. Information and Computation, 217, 31-51.

[15] Thalheim, B., & Wang, Q. (2013). Data migration: A theoretical perspective. Data & Knowledge Engineering, 87, 260-278.

[16] Zapata, C. A. I., & Gonçalves, D. L. (2023). Borsuk–Ulam Property and Sectional Category. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 49(4), 41.

[17] Zapata, C. A. I., & González, J. (2022). Higher topological complexity of a map. Turkish Journal of Mathematics. To appear. arXiv preprint arXiv:2212.03441.

[18] Zapata, C. A. I. & González, J. (2020). Sectional category and The Fixed Point Property. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 56(2), 559-578.

Índice alfabético

0-células, 17
1-célula abierta, 18
1-célula cerrada, 18
H-coloración, 10
H-coloreable, 10
$K(\pi, 1)$-espacio, 19
n-coloración, 16

Adyacentes, 6
Aplicaciones de pegado, 17
Aplicación característica, 18
Aplicación celular, 19
Arco hacia adelante, 15
Arco hacia atrás, 15
Arcos, 6
Aristas, 6

Camino, 10
Casi-migración, 26
Casi-migración inyectiva, 27
Casi-migración inyectiva óptima, 27
Casi-migración óptima, 26
Categoría seccional, 50
Ciclo, 11
Circuito de Euler, 15
Clique, 8
Colección transversal, 41
Colección transversal óptima, 41
Complejidad de G a H, 26
Complejidad inyectiva de G a H, 26
Complejo celular, 17
Complejo CW, 17
Conexo, 15

Distancia, 11

Eje-biyectivo, 13
Eje-inyectivo, 13
Eje-sobreyectivo, 13
Ejes, 6

Fuertemente conexo, 15

Grado de un vértice, 6
Grado entrante, 6
Grado saliente, 6
Grado total, 6
Grafo, 6
Grafo completo, 7
Grafo completo bipartido, 35
Grafo dirigido, 6
Grafo dirigido reflexivo, 6
Grafo dirigido simétrico, 6
Grafo producto, 38

Homomorfismo, 8
Homomorfismo biyectivo, 13
Homomorfismo inyectivo, 13
Homomorfismo sobreyectivo, 13
Homomorfo, 10

Imagen homomórfica, 9
Intersección de subgrafos, 8

Isomorfo, 13

Lazo, 6
Longitud, 10

Migración, 26

Número cromático, 16

Paseo, 10
Paseo cerrado, 10
Paseo de Euler, 15
Paseo dirigido, 15
Paseo orientado, 15
Pullback canónico, 47

Retracto por deformación, 50

Subcomplejo, 18
Subconjunto independiente, 16
Subgrafo, 8
Subgrafo inducido, 8

Unión de subgrafos, 8

Vecinos, 6
Vértice-biyectivo, 13
Vértice-inyectivo, 13
Vértice-sobreyectivo, 13
Vértices, 6

Árbol, 11
Árbol en G, 19
Árbol máximo, 19
índice de un vértice, 6