Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones elípticas indefinidas vía el método de la variedad de Nehari

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Alejandro Rossini ESPINOZA PENADILLO

ASESOR

Dr. Yony Raúl SANTARIA LEUYACC

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Espinoza, A. (2026). *Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones elípticas indefinidas vía el método de la variedad de Nehari*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Alejandro Rossini Espinoza Penadillo
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10506193
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0001-1484-9182
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Yony Raúl Santaria Leuyacc
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42159219
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-8279-7460
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Yolanda Silvia Santiago Ayala
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445705
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Félix Gregorio Pariona Vilca
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07366081
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional

Grupo de investigación	DYNAMICAL SYSTEMS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS
Agencia de financiamiento	Esta investigación fue financiada por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos – RR N° 05753-R-21 con código de Proyecto B21140091 - PCONFIGI 2021
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024-2025
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela
S/N cuadra 34Teléfono: 619-7000,
Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail:
eapmat@unmsm.edu.peLima - Perú

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 18:04. horas del lunes 12 de enero del 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (PRESIDENTA), Mg. Félix Gregorio Pariona Vilca (MIEMBRO) y el Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "EXISTENCIA DE INFINITAS SOLUCIONES PARA UNA CLASE DE ECUACIONES ELÍPTICAS INDEFINIDAS VÍA EL MÉTODO DE LA VARIEDAD DE NEHARI" presentado por el señor Bachiller ALEJANDRO ROSSINI ESPINOZA PENADILLO, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, la presidenta invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ....Bueno..... con un calificativo promedio de .....dieciseis..... (.16.).

A continuación, la presidenta del Jurado, Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala, manifestó que el señor Bachiller ALEJANDRO ROSSINI ESPINOZA PENADILLO, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 19:03. horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
PRESIDENTA

Mg. Félix Gregorio Pariona Vilca
MIEMBRO

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N° 000298-2026-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es **"Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones elípticas indefinidas vía método de la variedad de Nehari"**, presentado por el bachiller Espinoza Penadillo Alejandro Rossini para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 19% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Firmado digitalmente por:
SANTARIA LEUYACC Yony
Raúl FAU 20148092282 soft
Motivo:
Fecha: 06/03/2026 11:26:39-0500

Lima, 06 de marzo de 2026

Firma del Asesor
Nombres y Apellidos del asesor: Yony Raúl Santaria Leuyacc
DNI: 42159219

Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones elípticas indefinidas vía el método de la variedad de Nehari

Alejandro Rossini Espinoza Penadillo

Tesis presentada consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad nacional mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

.....

Dra. Yolanda Santiago Ayala
Presidente del Jurado

.....

Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca
Miembro del Jurado

.....

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
Miembro asesor

LIMA- PERÚ
FEBRERO 2026

FICHA CATALOGRÁFICA

ALEJANDRO ROSSINI ESPINOZA PENADILLO,

Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones elípticas indefinidas vía el método de la variedad de Nehari, (Lima) 2024.

V, 57 p., 29,7 cm (UNMSM, Licenciada, Matemática, 2026). Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor, el Dr. Yony Santaria Leuyacc, por su valiosa orientación, paciencia y apoyo constante que hicieron posible la culminación de la presente tesis. Del mismo modo, extiendo mi gratitud a todas las personas que, de una u otra manera, me brindaron su apoyo durante el transcurso de mis estudios.

Índice general

Agradecimientos **I**

Índice general **III**

Resumen **IV**

Abstract **V**

Introducción **VI**

I Preliminares **1**
1.1 Espacios de Sobolev 1
1.1.1 Inmesiones continuas y compactas 2
1.2 El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ 4
1.3 Teoría de los puntos críticos 5

II Variedad de Nehari **8**
2.1 Configuración abstracta 8
2.2 Estructura geométrica y definición de la variedad de Nehari 11
2.3 Correspondencia y funcional asociado 15

III Aplicaciones de la variedad de Nehari en ecuaciones elípticas **23**
3.1 Ecuaciones elípticas con el operador laplaciano en dominios acotados 23
3.2 Ecuaciones elípticas con el operador p-laplaciano en dominios acotados 29
3.3 Ecuaciones elípticas con el operador laplaciano en $\mathbb{R}^N$ 33

IV Variedad de Nehari generalizada **40**
4.1 Configuración abstracta 40

V Aplicaciones de la variedad generalizada de Nehari **47**
5.1 Ecuaciones elípticas: el caso indefinido 47

Conclusiones **54**

Resumen

Este trabajo estudia la existencia de infinitas soluciones no triviales para ecuaciones elípticas no lineales mediante el método variacional basado en la variedad de Nehari. Dicho método permite obtener soluciones de tipo ground state a través de la minimización del funcional de energía sobre una restricción natural. Se consideran ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, $N \geq 2$, y $\lambda < \lambda_1$, siendo λ_1 el primer autovalor de $-\Delta$ en Ω. También se analiza su versión asociada al operador p-laplaciano. Además, se estudia el problema en todo el espacio

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0, & |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{$\mathcal{R}$}$$

con V un potencial continuo. Asimismo, se aborda la variedad de Nehari generalizada propuesta por Szulkin y Weth, que extiende el método clásico a problemas indefinidos mediante una descomposición ortogonal del espacio de Hilbert y un funcional del tipo $\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u)$. Esta versión generalizada de la variedad de Nehari se emplea para garantizar la existencia de soluciones de tipo ground state para el problema $(\mathcal{P})$ para el caso $\lambda \geq \lambda_1$.

Palabras clave: Variedad generalizada de Nehari, Problemas elípticos, Métodos variacionales, Ecuación de Schrödinger.

Abstract

This work studies the existence of infinitely many nontrivial solutions for nonlinear elliptic equations through the variational method based on the Nehari manifold. This approach allows obtaining ground state solutions by minimizing the energy functional over a natural constraint. We consider equations of the form

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain, $N \geq 2$, and $\lambda < \lambda_1$, with λ_1 being the first eigenvalue of $-\Delta$ in Ω. The version associated with the p-Laplacian operator is also analyzed. Moreover, the problem is studied in the whole space

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0, & |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{$\mathcal{R}$}$$

with V a continuous potential. Furthermore, the generalized Nehari manifold proposed by Szulkin and Weth is addressed, which extends the classical method to indefinite problems through an orthogonal decomposition of the Hilbert space and a functional of the form $\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u)$. This generalized version of the Nehari manifold is employed to guarantee the existence of ground state-type solutions for problem $(\mathcal{P})$ in the case $\lambda \geq \lambda_1$.

Keywords: Generalized Nehari manifold, Elliptic problems, Variational methods, Schrödinger equation.

Introducción

El presente trabajo estudia la existencia de soluciones no triviales para ecuaciones y sistemas elípticos mediante el método variacional basado en la *variedad de Nehari*, introducido originalmente por Z. Nehari en [18, 19]. Este método constituye una herramienta eficaz en la teoría de puntos críticos, pues permite obtener soluciones de tipo *ground state* a través de una minimización restringida del funcional de energía asociado.

Sea E un espacio de Banach real y $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ un funcional de energía. La variedad de Nehari se define como

$$\mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\} : \Phi'(u)u = 0\},$$

y representa una restricción natural para la búsqueda de puntos críticos no triviales de Φ. Sea

$$c := \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u),$$

si c se alcanza en algún $u_0 \in \mathcal{N}$, con u_0 es un punto crítico de Φ, entonces u_0 es llamado solución de energía mínima o solución de tipo *ground state* de $\Phi'(u) = 0$.

En el **Capítulo I** se presentan los resultados preliminares necesarios. Se introducen los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ y sus principales propiedades, en particular las inmersiones continuas y compactas. Además, se describe el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ y se resumen los conceptos básicos de la *teoría de puntos críticos*, que serán esenciales para el estudio variacional de las ecuaciones no lineales.

En el **Capítulo II** se desarrolla la noción de *variedad de Nehari* en un marco abstracto. Se analiza su estructura geométrica y se establecen las condiciones bajo las cuales este conjunto puede ser tratado como una variedad diferenciable. Asimismo, se construye el funcional asociado y se demuestra que los puntos críticos sobre la variedad corresponden a soluciones no triviales del problema.

En el **Capítulo III** se aplican los resultados teóricos al estudio de *ecuaciones elípticas* en distintos contextos. Primero, se analiza el caso del operador laplaciano en dominios acotados:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, y $\lambda < \lambda_1$, sinedo λ_1 es el primer autovalor de $-\Delta$ en Ω, el funcional asociado es

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx.\right.$$

Luego, se extiende el estudio al operador p-laplaciano, es decir, se analiza el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \lambda|u|^{p-2}u = f(x,u), & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $2 \leq p < N$, $N \geq 3$. Finalmente, se analiza el problema en $\mathbb{R}^N$, dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0, & |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{0.2}$$

donde V es un potencial continuo. En cada caso se demuestra la existencia de un estado fundamental mediante la minimización del funcional sobre $\mathcal{N}$, siguiendo los resultados de [2, 5, 17, 22, 25, 26].

En el **Capítulo IV** se introduce la *variedad de Nehari generalizada*, propuesta por Andrzej Szulkin y Tobias Weth [23, 24], la cual extiende el método clásico al caso de *problemas indefinidos*. Se parte de una descomposición ortogonal de un espacio de Hilbert

$$E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-,$$

y se estudia el funcional de la forma

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u),$$

lo que permite abordar ecuaciones donde el origen no es un mínimo local, sino un punto de silla.

Finalmente, en el **Capítulo V** se presentan las *aplicaciones de la variedad de Nehari*

generalizada a ecuaciones elípticas indefinidas. Se analiza nuevamente el problema elíptico (0.1), para el caso donde $\lambda \geq \lambda_1$. También, se considera la ecuación de Schrödinger no lineal

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

donde f es superlineal y subcrítica, y tanto V como f son periódicos en x. Se analiza el caso en que 0 pertenece a una brecha espectral del operador $-\Delta+V$, demostrando que los estados fundamentales se obtienen minimizando Φ sobre la variedad $\mathcal{M}$. Los resultados presentados se basan en [23, 24].

En conjunto, los capítulos desarrollan un recorrido desde los fundamentos funcionales hasta las aplicaciones más generales del método de Nehari, mostrando su potencia para establecer la existencia de soluciones en diversos tipos de ecuaciones elípticas no lineales.

Capítulo I

Preliminares

En este capítulo presentamos diversos resultados preliminares sobre espacios de Sobolev, así como de la teoría de los puntos críticos. Los cuales serán utilizados en la presente tesis.

1.1. Espacios de Sobolev

En esta sección, se definirán los espacios funcionales que utilizaremos en las ecuaciones a estudiar, es decir, los espacios Sobolev y estableceremos sus principales propiedades, para mayor referencia consultar [1, 3, 8].

Definición 1.1. *Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$ y $p \in [1, +\infty)$. Se define el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : |\nabla u| \in L^p(\Omega) \right\},$$

donde $\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N})$, siendo $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ la i-ésima derivada en el sentido débil de u.

Definición 1.2. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < +\infty$ entonces definimos su norma como*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \left(|u|^p + |\nabla u|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.3. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < +\infty$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [1, Theorem 3.3]. □

Teorema 1.4. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$ es reflexivo.*

Demostración. Ver [1, Theorem 3.6]. □

Teorema 1.5. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < +\infty$ es separable.*

Demostración. Ver [1, Theorem 3.6]. □

Definición 1.6. *El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ se define como:*

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}.$$

Por consiguiente,

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \big\{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists (u_n) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \textit{tal que } u_n \to u \textit{ en } W^{1,p}(\Omega)\big\}.$$

Definición 1.7. *Se denota por $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ al espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ y está definido como:*

$$(W_0^{1,p}(\Omega))' = \big\{f : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}; f \textit{es lineal y continua}\big\}.$$

Sean $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$ y $x \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$f(x) = \langle f, x\rangle_{W',W}.$$

La norma definida sobre el dual $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ se define como:

$$\|f\|_{W'} = \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x \in W_0^{1,p}(\Omega)}} \frac{\langle f, x\rangle_{W',W}}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x \in W_0^{1,p}(\Omega)}} \langle f, x\rangle_{W',W}.$$

1.1.1. Inmesiones continuas y compactas

En esta parte estableceremos dos resultados muy importantes en los espacios de Sobolev, que son las inmersiones continuas y compactas.

Definición 1.8. *Sean X, Y dos espacios de Banach. X está inmerso continuamente en Y, denotado por $X \overset{cont}{\hookrightarrow} Y$, cuando la aplicación inclusión i*

$$\begin{aligned} i : X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

es continua, en decir, existe $C > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$, para todo $x \in X$.

Teorema 1.9 (Inmersiones continuas de Sobolev)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto regular acotado, es decir, es un conjunto abierto, acotado y con frontera $\partial\Omega$ suficientemente suave. Entonces las siguientes inmersiones son continuas:*

(i) Si $p < N$ y $p \in [1, \infty)$, entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad \text{para todo} \quad q \in [1, p^*].$$

donde $p^* = \frac{pN}{N-p}$.

(ii) Si $p = N$ y $p \in (1, \infty)$, entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad \text{para todo} \quad q \in [1, +\infty)\,.$$

Demostración. Ver [1, Theorem 4.12]. □

Definición 1.10. *Sean X, Y dos espacios de Banach. X está inmerso compactamente en Y, denotado $X \overset{comp}{\hookrightarrow} Y$, cuando la aplicación inclusión i*

$$\begin{aligned} i : X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

es lineal y compacta, es decir, si la sucesión (u_n) converge débilmente a u en X, es decir, $u_n \rightharpoonup u$ en X, entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) que converge fuertemente a u en Y, es decir, $u_{n_k} \to u$ en Y.

Teorema 1.11 (Inmersiones compactas de Rellich-Kondrachov)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado. Entonces las siguientes inmersiones son compactas:*

(i) Si $p < N$ y $p \in [1, \infty)$, entonces

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad \text{para todo} \quad q \in [1, p^*).$$

(ii) Si $p = N$ y $p \in (1, \infty)$, entonces

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad \text{para todo} \quad q \in [1, +\infty)\,.$$

(iii) Si $p > N$, entonces

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \text{para todo} \quad 0 < \gamma < 1 - \frac{N}{p}.$$

Demostración. Ver [1, Theorem 6.3]. □

Observación 1. *$W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, además es un espacio de Banach de tal manera que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de $W^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema 1.12 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado con $1 \leq p < \infty$, entonces existe una constante $C = C(\Omega, p, N) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{para todo} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Ver [3, Proposition 8.13]. □

Observación 2. *Utilizando desigualdad de Poincaré, para Ω acotada finito, se obtiene una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ que es equivalente a la norma sobre $W^{1,p}(\Omega)$, definida como*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left[\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right]^{1/p} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

1.2. El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

El espacio de Sobolev $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ es definido como:

$$H^1(\Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega) : \ |\nabla u| \in L^2(\Omega)\Big\}.$$

El espacio $H^1(\Omega)$ está equipado con el producto interior dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2}, \tag{1.1}$$

donde se induce la norma

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2) \, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Definición 1.13. *El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ se define como:*

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Utilizando la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$, para Ω acotada, se puede considerar

el producto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx, \tag{1.3}$$

y cuya norma inducida por este producto interno es

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

1.3. Teoría de los puntos críticos

A continuación, resumimos algunos resultados de la teoría de los puntos críticos y describimos brevemente un marco variacional para los problemas que consideraremos. Para mayor referencia ver [2, 6, 21, 25].

Definición 1.14. *Sea E un espacio de Banach y $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ un funcional. Decimos que $u \in E$ es un punto crítico de Φ si $\Phi'(u) = 0$. El valor correspondiente $c = \Phi(u)$ es un valor crítico o un nivel crítico.*

Definición 1.15. *Sea E un espacio de Banach y $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ un funcional. Una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ se llama sucesión de Palais-Smale ((PS)-sucesión) si $(\Phi(u_n))$ está acotada y $\Phi'(u_n) \to 0$ en E'.*

Definición 1.16 (Condición de Palais-Smale)**.** *Sea E un espacio de Banach y $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ un funcional. Decimos que el funcional Φ satisface la condición de Palais-Smale si cada sucesión de Palais-Smale tiene una subsucesión convergente.*

Observación 1.17.

(i) Si $\Phi(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ y $\Phi'(u_n) \to 0$, entonces (u_n) es una $(PS)_c$-sucesión, o sucesión de Palais-Smale en el nivel c relacionada a Φ. Análogamente, decimos que el funcional Φ satisface la condición de Palais-Smale en el nivel c ($(PS)_c$-condición) si cada sucesión de Palais-Smale en el nivel c ($(PS)_c$-sucesión) tiene una subsucesión convergente.

(ii) Resulta inmediato evidenciar que si el funcional Φ satisface ((PS)-condición), entonces satisface ($(PS)_c$-condición) para todo $c \in \mathbb{R}$, ya que toda sucesión convergente en $\mathbb{R}$ es acotada. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general.

(iii) Podemos ver que si una subsucesión de una sucesión de Palais-Smale converge a u, entonces u es un punto crítico. En efecto, sea $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una subsucesión

de una sucesión de Palais-Smale, entonces $(\Phi(u_n))$ *está acotada y* $\Phi'(u_n) \to 0$. *Luego,* $\Phi'(u_{n_k}) \to 0$ *y como* $u_{n_k} \to u$, *entonces por la continuidad de* Φ' *tenemos* $\Phi'(u_{n_k}) \to \Phi'(u)$. *Así tenemos que,* $\Phi'(u) = 0$. *Por lo tanto,* u *es un punto crítico de* Φ.

Sea E un espacio de Banach tal que la esfera unitaria S en E es una subvariedad de clase (al menos) $\mathcal{C}^1$ y sea $\Phi \in \mathcal{C}^1(S, \mathbb{R})$.

Teorema 1.18. *Si* Φ *está acotada inferiormente y satisface la condición de Palais-Smale, entonces* $c := \inf_S \Phi$ *se alcanza y es un valor crítico de* Φ.

Demostración. Aplicamos el principio variacional de Ekeland [25], dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in S$, tal que,

$$\Phi(x_\epsilon) \leq \inf_S \Phi + \epsilon$$

y

$$\Phi(x_\epsilon) < \Phi(x) + \epsilon\|x - x_\epsilon\|, \quad \forall\ x \in S,\ x \neq x_\epsilon.$$

Entonces, elegimos,

$$x = x_\epsilon + ty, \quad t > 0,\ y \in S.$$

Luego,

$$\Phi(x_\epsilon) - \Phi(x_\epsilon + ty) < \epsilon t\|y\|.$$

Así tenemos,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(x_\epsilon) - \Phi(x_\epsilon + ty)}{t} \leq \epsilon \qquad \text{(dado que } \|y\| = 1)$$

Entonces

$$-\Phi'(x_\epsilon)(y) \leq \epsilon, \quad \forall\ y \in S.$$

Luego,

$$\Phi'(x_\epsilon)(y) \leq \epsilon, \quad \forall\ y \in S, \qquad \text{(cambiando } y \text{ por } -y)$$

Así,

$$\|\Phi'(x_\epsilon)\| = \sup_{y\in S} |\Phi'(x_\epsilon)(y)| \leq \epsilon.$$

Ahora, tomando $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, $x_\epsilon = x_n$, tenemos,

$$\inf_S \Phi \leq \Phi(x_n) \leq \inf_S \Phi + \frac{1}{n} \quad , \quad \|\Phi'(x_n)\| \leq \frac{1}{n}$$

Entonces

$$\Phi(x_n) \to \inf_S \Phi := c \ \ , \ \ \Phi^{'}(x_n) \to 0 \text{ en } S^*, \ \text{ cuando } \ n \to +\infty$$

Luego, como Φ satisface la condición de Palais-Smale (o condición $(PS)_c$), existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $x_0 \in S$ tal que $x_{n_k} \to x_0$ en S.
Como $\Phi \in \mathcal{C}^1(S,\mathbb{R})$ y $\Phi^{'} \in \mathcal{C}(S, S^*)$ siendo ambos continuos, obtenemos

$$\Phi(x_0) = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_{n_k}) = c,$$

y

$$\Phi^{'}(x_0) = \lim_{k\to\infty} \Phi^{'}(x_{n_k}) = 0.$$

Y el resultado se sigue. □

Teorema 1.19. *Si E es de dimensión infinita, $\Phi \in \mathcal{C}^1(S,\mathbb{R})$ está acotada inferiormente, Φ es par y satisface la condición de Palais-Smale, entonces Φ tiene infinitos pares de puntos críticos.*

Demostración. La demostración puede encontrarse en [21]. □

Teorema 1.20 (Principio Variacional de Ekeland)**.** *Sea $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ acotada inferiormente. Si φ satisface la condición $(PS)_c$ con $c := \inf_X \varphi$, entonces toda sucesión minimizante para φ contiene una subsucesión convergente. En particular, existe un minimizador para φ.*

Demostración. Véase [25, Cololllary 2.5] □

Capítulo II

Variedad de Nehari

En este capítulo desarrollamos la noción de la variedad de Nehari, introducida por Z. Nehari en [18, 19], la cual constituye una herramienta fundamental en el estudio variacional de ecuaciones elípticas no lineales. Su uso permite caracterizar soluciones no triviales, en particular aquellas de energía mínima o de tipo ground state, mediante la restricción del funcional de energía a un subconjunto adecuado del espacio funcional.

2.1. Configuración abstracta

Sea E un espacio de Banach real y uniformemente convexo, $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ y $\Phi(0) = 0$. Denotaremos por $S := S_1(0)$.

Definición 2.1. *Se dice que una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ es una función de normalización si $\varphi(0) = 0$, φ es estrictamente creciente y $\varphi(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$.*

Asumiremos las siguientes condiciones :

(A_1) Existen una función de normalización φ, y un funcional $\psi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ definido por

$$u \mapsto \psi(u) := \int_0^{\|u\|} \varphi(t)\, dt,$$

Además, se cumple que $J := \psi'$ está acotada en conjuntos acotados y

$$J(w)w = 1, \qquad \text{para todo } \ w \in S.$$

(A_2) Para cada $w \in E \setminus \{0\}$ existe s_w tal que si $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$, entonces $\alpha'_w(s) > 0$ para $0 < s < s_w$ y $\alpha'_w(s) < 0$ para $s > s_w$.

(A_3) Existe $\delta > 0$ tal que $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$ y para cada subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset S$ existe una constante $C_{\mathcal{W}} > 0$ tal que $s_w \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

Observación 2.2.

(i) La aplicación J definida en (A_1) es llamada la aplicación de dualidad correspondiente a φ.

(ii) Una condición suficiente para que (A_1) se cumpla es que $\|\cdot\| \in \mathcal{C}^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. En efecto, tomando $\varphi(t) = t$, tenemos que existe una función de normalización φ tal que

$$u \mapsto \psi(u) := \int_0^{\|u\|} \varphi(t)\, dt = \int_0^{\|u\|} t\, dt = \frac{\|u\|^2}{2} \in \mathcal{C}^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R}).$$

(iii) Aquí estaremos principalmente interesados en dos casos: E es un espacio de Hilbert y E es el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado y $p > 1$.

- *En el primer caso, es decir, cuando E es un espacio de Hilbert, definimos $\varphi(t) := t$ entonces J es la aplicación de dualidad usual entre E y E^*. En efecto, como*

$$\psi(u) := \int_0^{\|u\|} \varphi(t)\, dt.$$

Entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos

$$\psi'(u) = \varphi(\|u\|)\frac{\langle u, \cdot \rangle}{\|u\|}.$$

Luego $\psi'(u) = \langle u, \cdot \rangle$, para todo $u \in E$ entonces $\psi'(u)v = \langle u, v \rangle$. Por lo tanto,

$$J(u)v = \langle u, v \rangle, \quad \text{para todo } \ v \in E.$$

- *En el segundo caso, es decir, cuando $E = W_0^{1,p}(\Omega)$, definimos $\varphi(t) := t^{p-1}$. El funcional asociado está dado por*

$$\psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx.$$

Para $w, v \in E$ consideremos la aplicación puntual

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & \xi & \to & F(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi \end{array}$$

Entonces, usando [25, Proposición 1.2], se obtiene

$$J(w)v = \psi'(w)v = \int_\Omega F(\nabla w) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \cdot \nabla v \, dx. \tag{2.1}$$

Además,

(a) Acotación en conjuntos acotados. Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes p y $p' = \frac{p}{p-1}$ se obtiene

$$|J(w)v| \leq \big\||\nabla w|^{p-1}\big\|_{L^{p'}} \|\nabla v\|_{L^p} = \|w\|^{p-1}\|v\|.$$

Entonces,

$$\|J(w)\|_{E^*} \leq \|w\|^{p-1},$$

y por lo tanto J es efectivamente un funcional bien definido, y es acotado en conjuntos acotados.

(b) Continuidad de J. Sea (w_n) una sucesión en E con $w_n \to w$ en E. Entonces

$$\begin{aligned} \|J(w_n) - J(w)\|_{E^*} &= \sup_{\|v\|\leq 1} \left| \int_\Omega (F(\nabla w_n) - F(\nabla w)) \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \|F(\nabla w_n) - F(\nabla w)\|_{L^{p'}}. \end{aligned}$$

Como F es continua, $\nabla w_n \to \nabla w$ en L^p implica que $F(\nabla w_n) \to F(\nabla w)$ en $L^{p'}$. Además, dado que se cumple

$$|F(\xi) - F(\eta)|^{p'} \leq C\,(|\xi|^p + |\eta|^p),$$

aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada se cumple que

$$\|F(\nabla w_n) - F(\nabla w)\|_{L^{p'}} \to 0, \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty.$$

En consecuencia, $\|J(w_n) - J(w)\|_{E^*} \to 0$ y J es continua.

Por consiguiente, para $E = W_0^{1,p}(\Omega)$ *con* $\psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p$, *se tiene*

$$J(w)v = \int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \cdot \nabla v \, dx,$$

y J *define un elemento de* E^* *para cada* $w \in E$, *siendo además continua y acotada en conjuntos acotados.*

2.2. Estructura geométrica y definición de la variedad de Nehari

Lema 2.3. *Supongamos que se cumple la hipótesis* (A_1). *Entonces la esfera* $S \subset E$ *es una subvariedad de clase* $\mathcal{C}^1$ *de codimensión 1 y el espacio tangente a* S *en el punto* w *es*

$$T_w(S) = \{z \in E : J(w)z = 0\}.$$

Demostración. Por hipótesis, tenemos $\psi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $J = \psi'$. Afirmamos que

$$\psi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(t)\, dt\right) = S$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(t)\, dt\right) &= \left\{u \in E \setminus \{0\} : \psi(u) = \int_0^1 \varphi(t)\, dt\right\} \\
&= \left\{u \in E \setminus \{0\} : \int_0^{\|u\|} \varphi(t)\, dt = \int_0^1 \varphi(t)\, dt\right\} \\
&= \{u \in E \setminus \{0\} : \|u\| = 1\} \\
&= S.
\end{aligned}$$

Notamos también que, si

$$w \in \psi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(t)\, dt\right) = S,$$

entonces de la hipótesis (A_1). tenemos que $J(w)w = 1$ para todo $w \in S$, luego $J(w) \neq 0$, para todo $w \in S$, probando así que $\int_0^1 \varphi(t)\, dt$ es un valor regular de ψ. Así, S es una subvariedad de clase C^1 y codimensióm 1 en E. Dado $w \in S$, el

espacio tangente a S en w, denotado por $T_w(S)$ es el núcleo del funcional $\psi'(w)$. Por lo tanto,

$$T_w(S) = \{z \in E : J(w)z = 0\}.$$

□

Definición 2.4. *Sean E un espacio de Banach real y $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ un funcional. El conjunto*

$$\mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\} : \Phi'(u)u = 0\},$$

es llamado variedad de Nehari.

Se observa de la definición que si $u \neq 0$ es un punto crítico de Φ, entonces $\Phi'(u) = 0$, esto es $\Phi'(u)v = 0$ para todo $v \in E$. Luego, en particular $\Phi'(u)u = 0$, por consiguiente, $\mathcal{N}$ contiene todos los puntos críticos $u \in E$.

Definición 2.5. *Decimos que $u_0 \in E$ es una solución de tipo ground state si $\Phi'(u_0) = 0$ y*

$$\Phi(u_0) = \text{ínf}\{\Phi(u); u \in E \setminus \{0\} \text{ y } \phi'(u) = 0\},$$

donde $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es un funcional de energía, esta solución también es llamada solución fundamental o solución de energía mínima.

Observación 2.6.

(i) De (A_2) obtenemos que $sw \in \mathcal{N}$ si y solo si $s = s_w$. En efecto, sea $sw \in \mathcal{N}$ y supongamos que $s \neq s_w$, entonces

(1) Si $0 < s < s_w$, tenemos $\alpha_w^{'}(s) = \Phi^{'}(sw)w = s^{-1}\Phi^{'}(sw)sw > 0$ y esto nos dá una contradicción ya que $\Phi^{'}(sw)sw = 0$.

(2) Si $s > s_w$, tenemos $\alpha_w^{'}(s) = \Phi^{'}(sw)w = s^{-1}\Phi^{'}(sw)sw < 0$, análogamente como en el caso anterior se tiene una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, se tiene $s = s_w$. Recíprocamente, si $s = s_w$, entonces $\Phi^{'}(sw)sw = \Phi^{'}(s_w w)s_w w = s_w\Phi^{'}(s_w w)w = s_w\alpha_w^{'}(s_w) = 0$. Así concluimos que $sw \in \mathcal{N}$.

(ii) Si $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ la variedad de Nehari, $\mathcal{N}$, en general puede no ser una variedad topológica. Considerando $\Phi \in \mathcal{C}^2(E, \mathbb{R})$, juntamente con (A_2) y la primera parte de (A_3), tenemos que la función $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$ alcanza un máximo único s_w en $(0, +\infty)$. Entonces,

$$\alpha_w^{''}(s_w) = \Phi^{''}(s_w w)(w, w) = s_w^{-2}\Phi^{''}(u)(u, u) \leq 0,$$

donde $u = s_w w \in \mathcal{N}$.

Si $\Phi''(u)(u,u) < 0$, *para todo* $u \in \mathcal{N}$, *entonces definiendo* $G(u) := \Phi'(u)u$, *tenemos que*

$$G'(u)u = \Phi''(u)(u,u) + \Phi'(u)u = \Phi''(u)(u,u) < 0, \quad u \in \mathcal{N}.$$

Dado que $\mathcal{N} = \{u \in E \setminus \{0\} : G(u) = 0\}$, *se sigue del teorema de la función implícita que* $\mathcal{N}$ *es una variedad de clase* $\mathcal{C}^1$ *de codimensión* 1.

(iii) Definiendo la función $\varphi : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, *tal que* $\varphi(u) = \Phi'(u)u$ *tenemos*

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = \mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}.$$

Como $\Phi'(u) = \varphi$ *es contínua y el conjunto* $\{0\}$ *es cerrado, entonces* $\mathcal{N}$ *es cerrado en* E. *También tenemos que* $\mathcal{N}$ *está acotado lejos de* 0, *es decir, existe* $c > 0$ *tal que* $\|u\| \geq c$, *para todo* $u \in \mathcal{N}$. *En efecto, sea* $u \in \mathcal{N}$, *entonces*

$$\|u\| = \left\| \|u\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \big\| \|u\| w \big\| = \|s_w w\| = s_w.$$

Luego, por la primera parte de (A_3), *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|u\| = s_w > \delta$, *para todo* $w \in S$. *Tomando* $c = \delta$ *el resultado se verifica.*

(iv) De las observaciones anteriores podemos ver que $\text{ínf}_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u) > 0$. *Sea* $u \in \mathcal{N}$, *entonces*

$$\Phi(u) = \Phi(1 \cdot u) = \Phi(s_u u) \geq \Phi(su) = \alpha_u(s) > \alpha_u(0) = \Phi(0) = 0, \quad 0 < s < s_u.$$

Entonces $\Phi(u) > 0$, *para todo* $u \in \mathcal{N}$. *Luego,* $\text{ínf}_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u) > 0$.

Definimos las funciones $\widehat{m} : E \setminus \{0\} \to \mathcal{N}$ y $m : S \to \mathcal{N}$ estableciendo

$$\widehat{m}(w) := s_w w \quad \text{y} \quad m := \widehat{m}|_S.$$

Proposición 2.7. *Supongamos que* Φ *satisface* (A_2) *y* (A_3). *Entonces:*

(a) La función $\widehat{m}$ *es continua.*

(b) La función m *es un homeomorfismo entre* S *y* $\mathcal{N}$, *y la inversa de* m *está dado por* $m^{-1}(u) = u/\|u\|$.

Demostración.

(*a*) Sean w_n, $w \in E \setminus \{0\}$ tal que $w_n \to w$. Dado que

$$\Phi'(s_w w) s_w w = 0,$$

tenemos

$$\Phi'\Big(\frac{s_w}{t} tw\Big)\frac{s_w}{t} tw = 0.$$

Luego,

$$s_{tw} = \frac{s_w}{t},$$

dado que s_{tw} es único. Así, tenemos

$$\widehat{m}(tw) = s_{tw} tw = \frac{s_w}{t} tw = s_w w = \widehat{m}(w), \qquad \text{para todo } t > 0$$

Entonces podemos asumir $w_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego es suficiente mostrar que $\widehat{m}(w_n) \to \widehat{m}(w)$ cuando $n \to +\infty$, después de pasar a una subsucesión si fuera necesario.

Escribimos

$$\widehat{m}(w_n) = s_{w_n} w_n.$$

De (A_2) y (A_3), tenemos

$$\delta \leq s_{w_n} \leq C_w, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N},$$

entonces (s_{w_n}) posee una subsucesión convergente, por lo cual, denotaremos por (s_{w_n}) la subsucesión tal que $s_{w_n} \to s > 0$, cuando $n \to +\infty$. Luego,

$$s_{w_n} w_n \to sw, \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty.$$

Dado que $\mathcal{N}$ es cerrado y $s_{w_n} w_n \in \mathcal{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $sw \in \mathcal{N}$. Luego,

$$sw = s_w w = \widehat{m}(w).$$

Por lo tanto, $\widehat{m}$ es continua.

(*b*) De la parte (a), la función $m : S \to \mathcal{N}$ es continua y luego su función inversa $m^{-1}(u) = u/\|u\|$, también es continua en $\mathcal{N}$. Entonces el resultado es válido.

□

2.3. Correspondencia y funcional asociado

Consideremos ahora los funcionales $\widehat{\Psi} : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ y $\Psi : S \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\widehat{\Psi}(w) := \Phi(\widehat{m}(w)) \qquad \text{y} \qquad \Psi := \widehat{\Psi}|_S.$$

Aunque no afirmamos que $\mathcal{N}$ sea una variedad de clase $\mathcal{C}^1$, mostraremos que $\widehat{\Psi}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y existe una correspondencia uno a uno entre los puntos críticos de Ψ y los puntos críticos no triviales de Φ.

Proposición 2.8. *Supongamos que E es un espacio de Banach que satisface (A_1). Si Φ satisface (A_2) y (A_3), entonces $\widehat{\Psi} \in \mathcal{C}^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ y*

$$\widehat{\Psi}'(w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z \quad \textit{para todo } w, z \in E,\ w \neq 0.$$

Demostración. Sea $w \in E \setminus \{0\}$ y $z \in E$. De (A_2) tenemos

$$\Phi(s_w w) \geq \Phi(sw) \text{ para todo } \ s > 0,$$

y del teorema del valor medio, obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}(w + tz) - \widehat{\Psi}(w) &= \Phi(\widehat{m}(w + tz)) - \Phi(\widehat{m}(w)) \\
&= \Phi(s_{w+tz}(w + tz)) - \Phi(s_w w) \\
&\leq \Phi(s_{w+tz}(w + tz)) - \Phi(s_{w+tz} w) \\
&= \Phi'((s_{w+tz}(w + \tau_t tz))(s_{w+tz}(w + tz) - s_{w+tz} w) \\
&= \Phi'((s_{w+tz}(w + \tau_t tz))s_{w+tz} tz,
\end{aligned}$$

donde $|t|$ es lo suficientemente pequeño y $\tau_t \in (0, 1)$. Análogamente,

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}(w + tz) - \widehat{\Psi}(w) &= \Phi(\widehat{m}(w + tz)) - \Phi(\widehat{m}(w)) \\
&= \Phi(s_{w+tz}(w + tz)) - \Phi(s_w w) \\
&\geq \Phi(s_w(w + tz)) - \Phi(s_w w) \\
&= \Phi'((s_w(w + \eta_t tz)(s_w(w + tz) - s_w w) \\
&= \Phi'((s_w(w + \eta_t tz))s_w tz,
\end{aligned}$$

donde $|t|$ es lo suficientemente pequeño y $\eta_t \in (0, 1)$. Dado que la función $w \mapsto s_w w$

es continua según la Proposición 2.7, tenemos

$$\lim_{t\to 0} \widehat{m}(w+tz) = \lim_{t\to 0} s_{w+tz}(w+tz) = s_w w.$$

De la primera desigualdad y la igualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w)}{t} &\leq \lim_{t\to 0} \frac{\Phi'(s_{w+tz}(w+\tau_t tz))s_{w+tz}tz}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \Phi'(s_{w+tz}(w+\tau_t tz))s_{w+tz}z \\ &= \Phi'(s_w w)s_w z.\end{aligned}$$

Análogamente, de la segunda desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w)}{t} &\geq \lim_{t\to 0} \frac{\Phi'(s_w(w+\eta_t tz))s_w tz}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \Phi'(s_w(w+\tau_t tz))s_w z \\ &= \Phi'(s_w w)s_w z.\end{aligned}$$

Luego, combinando estas dos desigualdades, tenemos

$$\widehat{\Psi}'(w)z = \lim_{t\to 0} \frac{\widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w)}{t} = s_w\Phi'(s_w w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z.$$

Dado que $\Phi \in \mathcal{C}^1$, $\Phi'(w)z$ es lineal acotada en z y continua en w. Por lo tanto, la derivada de Gateaux de $\widehat{\Psi}$ es lineal acotada en z y continua en w. Por lo tanto, $\widehat{\Psi}$ es de clase $\mathcal{C}^1$. □

Corolario 2.9. *Supongamos que E es un espacio de Banach que satisface (A_1). Si Φ satisface (A_2) y (A_3), entonces:*

(a) $\Psi \in \mathcal{C}^1(S,\mathbb{R})$. Además, se cumple

$$\Psi'(w)z = \|m(w)\|\Phi'(m(w))z, \qquad \text{para todo } z \in T_w(S).$$

(b) Si (w_n) es una sucesión de Palais-Smale para Ψ, entonces $(m(w_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para Φ. Si $(u_n) \subset \mathcal{N}$ es una sucesión de Palais-Smale acotada para Φ, entonces $(m^{-1}(u_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para Ψ.

(c) w es un punto crítico para Ψ si y solo si $m(w)$ es un punto crítico no trivial de Φ. Además, los valores correspondientes de Ψ y Φ coinciden e $\inf_S \Psi = \inf_{\mathcal{N}} \Phi$.

(d) Si Φ es un funcional par entonces también lo es Ψ.

Demostración.

(a) Se sigue de la Proposición 2.8 que $\Psi \in \mathcal{C}^1(S, \mathbb{R})$. Además, como $w \in S$, entonces $m(w) = \widehat{m}(w)$ y $\Psi(w) = \widehat{\Psi}(w)$. Luego,

$$\Psi'(w)z = \widehat{\Psi}'(w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z = \|m(w)\|\Phi'(m(w))z, \quad w \in S,\ z \in T_wS.$$

(b) Primero notamos que por (A_1) tenemos $E = T_w(S) \oplus \mathbb{R}w$ para cada $w \in S$, y la proyección $E \to T_w(S)$, $z + tw \mapsto z$ tiene norma uniformemente acotada con respecto a $w \in S$. En efecto, J está acotada en conjuntos acotados y $J(w)(z + tw) = t$, así que si $\|z + tw\| = 1$, entonces $|t| \leq C$ para alguna constante $C > 0$ y por lo tanto

$$\|z\| \leq |t| + \|z + tw\| \leq (C + 1)\|z + tw\| \text{ para todo } w \in S, z \in T_wS \text{ y } t \in \mathbb{R}.$$

Además, por (a) tenemos

$$\|\Psi'(w)\| = \sup_{z \in T_w(S)} \frac{\Psi'(w)z}{\|z\|} = \|u\| \sup_{z \in T_w(S)} \frac{\Phi'(u)z}{\|z\|}, \tag{2.2}$$

con $u = m(w)$, y como $\Phi'(u)w = \Phi'(u)\frac{u}{\|u\|} = 0$, concluimos usando (a) de nuevo que

$$\begin{aligned}
\|\Psi'(w)\| \leq \|u\|\|\Phi'(u)\| = \|u\| \sup_{z \in T_w(S), t \in \mathbb{R}} \frac{\Phi'(u)(z + tw)}{\|z + tw\|} \\
&\leq (C + 1)\|u\| \sup_{z \in T_w(S) \setminus \{0\}} \frac{\Phi'(u)z}{\|z\|} \\
&= (C + 1)\|\Psi'(w)\|.
\end{aligned}$$

Dado que $u \in \mathcal{N}$ y $\mathcal{N}$ está acotado inferiormente por una constante positiva, con el hecho de que $\Phi(u) = \Psi(w)$, se deduce la afirmación (b).

(c) Usando (2.2), se tiene que $\Psi'(w) = 0$ si y solo si $\Phi'(m(w)) = 0$. La otra parte de la afirmación es inmediata.

(d) Si Φ es un funcional par, entonces $s_w = s_{-w}$. Por lo tanto, $\widehat{m}(-w) = -\widehat{m}(w)$ y la conclusión es consecuencia de la definición de Ψ.

□

Observación 2.10. *Notamos que el ínfimo de Φ sobre $\mathcal{N}$ tiene la siguiente caracterización minimax:*

$$c = \inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u) = \inf_{w\in E\setminus\{0\}} \max_{s>0} \Phi(sw) = \inf_{w\in S} \max_{s>0} \Phi(sw).$$

Nuestros próximos resultados dan condiciones suficientes para la existencia de soluciones de tipo ground state y de infinitos puntos críticos de Φ.

Teorema 2.11. *Sea E un espacio de Hilbert y supongamos que*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - I(u),$$

donde

(i) $I'(u) = o(\|u\|)$ *cuando* $u \to 0$,

(ii) $s \mapsto \dfrac{I'(su)u}{s}$ *es estrictamente creciente para todo* $u \neq 0$ *y* $s > 0$,

(iii) $\dfrac{I(su)}{s^2} \to +\infty$ *uniformemente para u en subconjuntos débilmente compactos de* $E \setminus \{0\}$ *cuando* $s \to +\infty$,

(iv) I' *es completamente continua.*

Entonces la ecuación $\Phi'(u) = 0$ *tiene una solución de tipo ground state. Además, si I es par, entonces esta ecuación tiene infinitos pares de soluciones.*

Demostración. Primero verificamos que (A_2) y (A_3) se cumplen. Por (i) y (iii), $\alpha_w(s) > 0$ para $s > 0$ pequeño y $\alpha_w(s) < 0$ para s grande. Dado que

$$\alpha'_w(s) = \frac{d}{ds}\Phi(sw) = s(\|w\|^2 - s^{-1}I'(sw)w),$$

se sigue de (ii) que existe un único s_w con $\alpha'_w(s_w) = 0$. Claramente, $s_w \geq \delta$ para algún $\delta > 0$ y todo $w \in S$ de acuerdo con (i), y $s_{\mathcal{W}} \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo $\mathcal{W}$ en un subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset S$ según (iii).

Demostraremos en el Lema 2.13 a continuación que Φ satisface la condición de Palais-Smale en $\mathcal{N}$. Asumiendo esto, sea (w_n) una sucesión de Palais-Smale para Ψ y definimos $u_n := m(w_n) \in \mathcal{N}$. Entonces (u_n) es una sucesión de Palais-Smale para Φ según el Corolario 2.9, por lo tanto $u_n \to u$, para alguna subsucesión y $w_n \to m^{-1}(u)$. Por consiguiente, Ψ satisface la condición de Palais-Smale.

Sea (w_n) una sucesión minimizante para Ψ. Por el principio variacional de Ekeland Teorema 1.20 podemos asumir $\Psi'(w_n) \to 0$, y por la condición de Palais-Smale, $w_n \to w$ después de pasar a una subsucesión. Por lo tanto, w es un minimizador para Ψ y u es una solución de tipo ground state para la ecuación $\Phi'(u) = 0$, de acuerdo con el Teorema 1.18 y el Corolario 2.9.

Supongamos ahora que el funcional Φ es par, entonces el funcional Ψ también lo es. Dado que $\inf_S \Psi > 0$, Ψ está acotada inferiormente y la segunda conclusión se sigue del Corolario 2.9 y el Teorema 1.19. □

En uno de los problemas considerados en la Sección 3.2 del Capítulo III, necesitaremos una extensión del resultado anterior a espacios de Banach. Sea $I_0 \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ par, homogénea positivamente de grado $p > 1$, es decir,

$$I_0(su) = s^p I_0(u), \qquad \text{para } \ s > 0,$$

tal que

$$c_0\|u\|^p \leq I_0(u) \leq c_0^{-1}\|u\|^p, \tag{2.3}$$

para alguna constante $c_0 > 0$.

Teorema 2.12. *Sea E un espacio de Banach uniformemente convexo que satisface (A_1) y supongamos que $\Phi(u) = I_0(u) - I(u)$, donde*

(i) $I'(u) = o(\|u\|^{p-1})$ *cuando* $u \to 0$,

(ii) $s \mapsto \dfrac{I'(su)u}{s^{p-1}}$ *es estrictamente creciente para todo* $u \neq 0$ *y* $s > 0$,

(iii) $\dfrac{I(su)}{s^p} \to +\infty$ *uniformemente para u en subconjuntos débilmente compactos de* $E \setminus \{0\}$ *cuando* $s \to +\infty$,

(iv) I' *es completamente continuo,*

(v) I_0 *es semicontinuo inferiormente débil, homogéneo positivamente de grado* p*, satisface* (2.3) *y*

$$(I_0'(v) - I_0'(w))(v - w) \geq c_1(\|v\|^{p-1} - \|w\|^{p-1})(\|v\| - \|w\|),$$

para algún $c_1 > 0$ *y todo* $v, w \in E$*.*

Entonces la ecuación $\Phi'(u) = 0$ *tiene una solución de tipo ground state. Además, si* I *es un funcional par, entonces esta ecuación tiene infinitos pares de soluciones.*

Demostración. Usando (2.3) y la homogeneidad de I_0, y usando los mismos argumentos del Teorema 2.11 aplicando minimas modificaciones. □

Notamos que mientras en el Teorema 2.11 la esfera S es una variedad C^∞, en el Teorema 2.12 S puede ser solamente de clase $\mathcal{C}^1$. Por lo tanto, es importante tener una versión del Teorema 1.19 que se aplique a S. En la siguiente sección encontraremos un problema donde $S \in \mathcal{C}^1$ pero no en $\mathcal{C}^{1,1}$.

Para completar las demostraciones de los Teoremas 2.11 y 2.12, todavía resta probar que Φ satisface la condición de Palais-Smale en $\mathcal{N}$. Además, dado que la condición (v) del Teorema 2.12 se satisface automáticamente si E es un espacio de Hilbert y $I_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$, es suficiente probar esto para el Teorema 2.12.

Lema 2.13. *Asumiendo las condiciones del Teorema 2.12. Entonces, se cumple:*

(a) Si $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *es una sucesión tal que* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(u_n) < \infty$*, entonces pasando a una subsucesión tenemos* $u_n \rightharpoonup u \neq 0$ *a medida que* $n \to \infty$*, y existe* $s_u > 0$ *tal que* $s_u u \in \mathcal{N}$ *y* $\Phi(s_u u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n)$*.*

(b) $\Phi|_{\mathcal{N}}$ *es coercitiva, es decir,* $\Phi(u_n) \to +\infty$ *cuando* $u_n \in \mathcal{N}$*,* $\|u_n\| \to +\infty$*.*

(c) Φ *satisface la condición de Palais-Smale en* $\mathcal{N}$*.*

Demostración.

(a) Sea $(u_n) \subset \mathcal{N}$ una sucesión tal que $\Phi(u_n) \leq d$ para todo n. Primero afirmamos que (u_n) está acotada. De lo contrario, $\|u_n\| \to +\infty$ y $v_n := u_n/\|u_n\| \rightharpoonup v$ en E después de pasar a una subsucesión. Supongamos $v = 0$. Dado que $u_n \in \mathcal{N}$ y $v_n \rightharpoonup 0$, para cada $s > 0$ tenemos

$$d \geq \Phi(u_n) = \Phi(s_{v_n} v_n) \geq \Phi(s v_n) \geq c_0 s^p - I(s v_n) \to c_0 s^p, \qquad \text{cuando } n \to +\infty, \tag{2.4}$$

de acuerdo, a la suposición (iv) del Teorema 2.12 implica que I es débilmente continua. Esto lleva a una contradicción al elegir $s > (d/c_0)^{1/p}$. Así que $v \neq 0$ y por lo tanto

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^p} \leq \frac{1}{c_0} - \frac{I(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^p} \to -\infty, \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty, \tag{2.5}$$

por (iii) del Teorema 2.12, se obtiene nuevamente otra contradicción. Por lo tanto, la sucesión (u_n) está acotada, así que $u_n \rightharpoonup u$, para alguna subsucesión. Si $u = 0$, como en (2.4), se cumple que

$$d \geq \Phi(u_n) \geq \Phi(su_n) \geq d_0 s^p - I(su_n) \to d_0 s^p, \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty, \tag{2.6}$$

para todo $s > 0$, donde $d_0 = c_0 \inf_{\mathcal{N}} \|u\| > 0$, lo que representa una contradicción. Por lo tanto, $u \neq 0$. Además, como $I(s_u u_n) \to I(s_u u)$, cuando $n \to +\infty$, nuevamente por la continuidad débil de I, tenemos

$$\Phi(s_u u) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \Phi(s_u u_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \Phi(u_n),$$

dado que $u_n \in \mathcal{N}$.

(b) Esto se sigue directamente de (a).

(c) Sea $(u_n) \subset \mathcal{N}$ una sucesión Palais-Smale. Por (a), $u_n \rightharpoonup u$, a menos de una subsucesión. Además,

$$\Phi'(u_n) = I_0'(u_n) - I'(u_n) \to 0 \text{ e } I'(u_n) \to I'(u), \qquad \text{cuando } n \to +\infty,$$

por lo tanto por (v) del Teorema 2.12, se cumple

$$o(1) = [I_0'(u_n) - I_0'(u)](u_n - u) \geq c_1(\|u_n\|^{p-1} - \|u\|^{p-1})(\|u_n\| - \|u\|).$$

Se sigue que $\|u_n\| \to \|u\|$ y por lo tanto $u_n \to u$ por la convexidad uniforme de E. Así que Φ satisface la condición de Palais-Smale en $\mathcal{N}$.

□

Observación 2.14. *Es fácil ver que la prueba del Lema 2.13 sigue siendo válida si la condición de que I_0 satisface (v) del Teorema 2.12 se reemplaza por la condición*

más general de que I_0 puede escribirse como la suma de un funcional que satisface (v) y un funcional con derivada completamente continua.

Capítulo III

Aplicaciones de la variedad de Nehari en ecuaciones elípticas

En este capítulo se analizan soluciones de tipo *ground state* para algunos problemas elípticos. En particular, se consideran ecuaciones que involucran el operador Laplaciano y el operador p-Laplaciano en dominios acotados, así como un problema formulado en $\mathbb{R}^N$. Los resultados presentados ilustran cómo la variedad de Nehari permite identificar soluciones no triviales de energía mínima y se basan en los desarrollos teóricos expuestos en [2, 5, 17, 22, 25, 26].

3.1. Ecuaciones elípticas con el operador laplaciano en dominios acotados

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$, un dominio acotado y consideremos el problema elíptico de la forma:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Aquí $\lambda < \lambda_1$, donde λ_1 denota el primer valor propio de Dirichlet de $-\Delta$ en Ω y $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisface la restricción de crecimiento

$$|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{q-1}) \qquad \text{para algún } a > 0 \text{ y } 2 < q < 2^*, \tag{3.2}$$

donde $2^* := 2N/(N-2)$ si $N \geq 3$ y $2^* := +\infty$ para $N = 2$. Dado que $\lambda < \lambda_1$,

podemos introducir una norma equivalente en $E \equiv H_0^1(\Omega)$ definiendo

$$\|u\|^2 := \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)\, dx.$$

Sea $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda u^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx \equiv \frac{1}{2}\|u\|^2 - I_1(u) - I(u),$$

donde

$$I_1(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda u^2\, dx, \quad I(u) := \int_\Omega F(x,u)\, dx, \quad F(x,u) := \int_0^u f(x,s)\, ds$$

Teorema 3.1. *Supongamos que f es continua y satisface* (3.2)*. Entonces:*

(i) $\Phi \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega);\mathbb{R})$ *y* $\Phi'(u) = 0$ *si y solo si* $u \in H_0^1(\Omega)$ *es una solución de* (3.1)*.*

(ii) Los funcionales I e I_1 son débilmente continuos, es decir, si $u_n \rightharpoonup u$, entonces $I(u_n) \to I(u)$ e $I_1(u_n) \to I_1(u)$.

(iii) Los operadores I' e I_1' son completamente continuos (o continuos de débil a fuerte), es decir, si $u_n \rightharpoonup u$, entonces $I'(u_n) \to I'(u)$ e $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$.

(iv) Si $f(x,u) = o(u)$ uniformemente en x cuando $u \to 0$, entonces $I'(u) = o(\|u\|)$ e $I(u) = o(\|u\|^2)$ cuando $u \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración.

(i) La demostración de la parte (i) pueden encontrarse en [2, 5, 17, 22, 25, 26].

(ii)-(iii) La continuidad débil de I, I_1 y la continuidad completa de I, I_1' son consecuencias de la inmersión compacta del teorema de Rellich–Kondrachov $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $1 \le r < 2^*$, así como del hecho de que el operador $u \mapsto f(x,u)$ es continuo de $L^q(\Omega)$ a $L^{q/(q-1)}(\Omega)$ (véase [25, Theorem A.2]).

(iv) Para probar la afirmación (iv), como $f(x,u) = o(u)$ uniformemente en x cuando $u \to 0$, entonces, usando (3.2), para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x,u)| \le \varepsilon|u| + C_\varepsilon|u|^{q-1}.$$

Luego,

$$|F(x,u)| \leq \int_0^{|u|} |f(x,s)|\,ds \leq \int_0^{|u|} \left(\varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{q-1}\right) ds = \varepsilon\frac{|u|^2}{2} + C_\varepsilon\frac{|u|^q}{q}.$$

Por lo tanto, integrando en Ω se obtiene

$$\left|\int_\Omega F(x,u)\,dx\right| \leq \varepsilon\frac{\|u\|_2^2}{2} + C_\varepsilon\frac{\|u\|_q^q}{q}.$$

Dado que las inmersiones $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ son continuas, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_2 \leq C\|u\|$ y$\|u\|_q \leq C\|u\|$. Así, existen $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que

$$\left|\int_\Omega F(x,u)\,dx\right| \leq \varepsilon C_1\|u\|^2 + C_2\|u\|^q.$$

Como $I(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$, se deduce que

$$|I(u)| \leq C_1\varepsilon\|u\|^2 + C_2\|u\|^q = o(\|u\|^2),$$

pues $q > 2$ y ε puede elegirse arbitrariamente pequeño.

Dado que se cumple

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u)v\,dx, \qquad \text{para todo } \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $v = u$ y aplicando nuevamente la estimación de $f(x,u)$,

$$|\langle I'(u), u\rangle| \leq \varepsilon\|u\|_2^2 + C_\varepsilon\|u\|_q^q \leq C(\varepsilon\|u\|^2 + \|u\|^q).$$

En consecuencia,

$$\|I'(u)\| \leq C(\varepsilon\|u\| + \|u\|^{q-1}) = o(\|u\|),$$

cuando $u \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$, lo que completa la demostración.

□

Por el Teorema 3.1, el funcional Φ asociado al problema (3.1), satisface $\Phi \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$, I' es completamente continuo y los puntos críticos de Φ son soluciones de (3.1). El

siguiente resultado sobre la existencia y multiplicidad de soluciones de (3.1) está esencialmente contenido en [16]. Sin embargo, señalamos que en [16] se impusieron suposiciones más fuertes sobre f para el resultado de multiplicidad con el fin de aplicar la teoría del punto crítico en $\mathcal{N}$.

Teorema 3.2. *Suponga que* $\lambda < \lambda_1$, f *satisface* (3.2) *y*

(i) $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente en* x *cuando* $u \to 0$,

(ii) $u \mapsto \dfrac{f(x,u)}{|u|}$ *es estrictamente creciente en* $(-\infty, 0)$ *y* $(0, +\infty)$,

(iii) $\dfrac{F(x,u)}{u^2} \to +\infty$ *uniformemente en* x *cuando* $|u| \to +\infty$.

Entonces la ecuación (3.1) *tiene una solución de tipo ground state. Además, si* f *es impar en* u, *entonces* (3.1) *tiene infinitos pares de soluciones.*

Demostración. Nuestro objetivo es usar el Teorema 2.11. Se sigue de (i) y del Teorema 3.1 que $I'(u) = o(\|u\|)$ cuando $u \to 0$, y de la condición (ii) el mapeo $s \mapsto I'(su)u/s$ es estrictamente creciente si $u \neq 0$ y $s > 0$. A continuación verificamos la condición (iii) del Teorema 2.11. Sea $\mathcal{W} \subset E \setminus \{0\}$ débilmente compacto y sea $(u_n) \subset \mathcal{W}$. Es suficiente mostrar que si $s_n \to \infty$ a medida que $n \to +\infty$, entonces también lo hace una subsucesión de $I(s_n u_n)/s_n^2$. Pasando a una subsucesión, $u_n \rightharpoonup u \in E \setminus \{0\}$ y $u_n(x) \to u(x)$ casi en todas partes. Dado que $|s_n u_n(x)| \to \infty$ si $u(x) \neq 0$, una aplicación del lema de Fatou da como resultado

$$\frac{I(s_n u_n)}{s_n^2} = \int_\Omega \frac{F(x, s_n u_n)}{(s_n u_n)^2} u_n^2 dx \to +\infty, \qquad \text{como } \ n \to +\infty,$$

donde $F \geq 0$ es consecuencia de las condiciones (i) y (ii) anteriores. Finalmente, (iv) del Teorema 2.11 es garantizado por el Teorema 3.1.

El Teorema 2.11 demuestra que la ecuación (3.1) tiene una solución de tipo ground state y, si f es impar en u, entonces (3.1) tiene infinitos pares de soluciones. □

Observación 3.3. *Se puede demostrar que cada solución de tipo ground state* u_0 *es positiva o negativa. De hecho, si* u *es una solución que cambia de signo, entonces definimos* $u^+ := \max\{u, 0\}$ *y* $u^- := \min\{u, 0\}$ *para denotar la parte positiva y negativa de* u, *respectivamente. Multiplicando* (3.1) *por* $u^\pm$ *e integrando, vemos que* $u^\pm \in \mathcal{N}$. *Por lo tanto,*

$$\Phi(u) = \Phi(u^+) + \Phi(u^-) \geq 2c.$$

Por consiguiente, $u_0 \geq 0$ o $u_0 \leq 0$ y por la desigualdad de Harnack (véase [7]), se deduce que $u_0 > 0$ o $u_0 < 0$ en Ω.

Ejemplo 3.4. *Una funcion que satisface las condiciones del Teorema 3.2 es dado por $f : \Omega \times \mathbb{R}$ definido por*

$$f(x,u) = |u|^{q-2}u, \qquad \textit{donde} \;\; 2 < q < 2^*.$$

A continuación añadimos un resultado sobre la existencia de soluciones que cambian de signo con menor energía. Para esto definimos

$$\mathcal{N}_{sc} := \{u \in E : u^{\pm} \in \mathcal{N}\} \qquad \text{y} \qquad c_{sc} := \inf_{u \in \mathcal{N}_{sc}} \Phi(u),$$

donde, como en la Observación 3.3, u^+ y u^- son las partes positiva y negativa de u. Dado que $u^{\pm} \in \mathcal{N}$, vemos que toda solución que cambia de signo de (3.1) se encuentra en $\mathcal{N}_{sc}$.

El siguiente resultado de existencia se debe a Liu y Wang [16].

Teorema 3.5. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2, el problema* (3.1) *admite una solución de menor energía que cambia de signo, es decir, una solución $u \in \mathcal{N}_{sc}$ con $\Phi(u) = c_{sc} \geq 2c$.*

Demostración. Sea $(u_n) \subset \mathcal{N}_{sc}$ una sucesión de funciones tal que $\Phi(u_n) \to c_{sc}$ cuando $n \to \infty$. Dado que

$$\Phi(u_n) = \Phi(u_n^+) + \Phi(u_n^-) \qquad \text{y} \qquad \Phi(u_n^{\pm}) \geq c > 0 \quad \text{para todo} \;\; n \in \mathbb{N},$$

vemos que $\Phi(u_n^{\pm})$ está acotado. Por lo tanto, por la parte (a) del Lema 2.13, se cumple

$$u_n^+ \rightharpoonup u_1 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad u_n^- \rightharpoonup u_2 \neq 0 \qquad \text{cuando} \;\; n \to +\infty.$$

Por lo tanto,

$$u_n \rightharpoonup \tilde{u} := u_1 + u_2 \qquad \text{cuando} \;\; n \to +\infty.$$

Dado que podemos asumir convergencia puntual casi en todas partes a lo largo de una subsucesión, se deduce que $u_1 \cdot u_2 \equiv 0$. Además, para

$$u := s_{u_1}u_1 + s_{u_2}u_2 = u^+ + u^-.$$

Luego, por la parte (a) del Lema 2.13, se cumple

$$2c \leq \Phi(u) = \Phi(s_{u_1}u_1) + \Phi(s_{u_2}u_2) \leq \liminf_{n\to\infty}[\Phi(u_n^+) + \Phi(u_n^-)] = c_{sc}.$$

Dado que $u \in N_{sc}$, concluimos que $\Phi(u) = c_{sc}$.

Usando el lema de deformación cuantitativa, véase [25, Lema 2.3], ahora demostraremos que $\Phi'(u) = 0$. Se sigue de la hipótesis (ii) del Teorema 3.2 que, para $s, t > 0$ y al menos uno de $s, t \neq 1$, se cumple

$$\Phi(su^+ + tu^-) = \Phi(su^+) + \Phi(tu^-) < \Phi(u^+) + \Phi(u^-) = c_{sc}. \tag{3.3}$$

Si $\Phi'(u) \neq 0$, entonces existen $\delta > 0$ y $\mu > 0$ tales que

$$\|v - u\| \leq 3\delta,$$

lo que implica que

$$\|\Phi'(v)\| \geq \mu.$$

Sea $D = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ y $g(s,t) = su^+ + tu^-$. Usando (3.3) que $\Phi(g(s,t)) = c_{sc}$ si y solo si $s = t = 1$ y $\Phi(g(s,t)) < c_{sc}$ en caso contrario. Por lo tanto,

$$\beta := \max_{\partial D} \Phi \circ g < c_{sc}.$$

Para $\epsilon := \min\left\{\frac{c_{sc}-\beta}{4}, \frac{\mu\delta}{8}\right\}$, y el Lema 2.3 de [25] proporciona una función de deformación η tal que

(a) $\eta(1, v) = v$ si $v \notin \Phi^{-1}([c_{sc} - 2\epsilon, c_{sc} + 2\epsilon])$,

(b) $\Phi(\eta(1, v)) \leq c_{sc} - \epsilon$ para todo $v \in E$ con $\|v - u\| \leq \delta$ y $\Phi(v) \leq c_{sc} + \epsilon$.

(c) $\Phi(\eta(1, v)) \leq \Phi(v)$ para todo $u \in E$.

Por consiguiente,

$$\max_{(s,t)\in D} \Phi(\eta(1, g(s,t))) < c_{sc}. \tag{3.4}$$

Mostraremos que $\eta(1, g(D)) \cap \mathcal{N}_{sc} \neq \emptyset$, lo que contradice la definición de c_{sc}. Definamos $h(s,t) := \eta(1, g(s,t))$ y

$$\Psi_0(s,t) := (\Phi'(su^+)u^+, \Phi'(tu^-)u^-),$$

$$\Psi_1(s,t) := \left(\frac{1}{s}\Phi'(h^+(s,t))h^+(s,t), \frac{1}{t}\Phi'(h^-(s,t))h^-(s,t)\right).$$

Dado que $\Phi'(su^\pm)u^\pm > 0$ si $0 < s < 1$ y $\Phi'(su^\pm)u^\pm < 0$ si $s > 1$, la fórmula para el producto de grado ahora cumple $\deg(\Psi_0, D, 0) = 1$. De (3.4) y de la propiedad (a) de η se deduce que $g = h$ en ∂D. Consecuentemente, $\Psi_1 = \Psi_0$ sobre ∂D y $\deg(\Psi_1, D, 0) = \deg(\Psi_0, D, 0) = 1$. Por lo tanto, $\Psi_1(s,t) = 0$ para algún $(s,t) \in D$, luego, $\eta(1, g(s,t)) = h(s,t) \in \mathcal{N}_{sc}$. Por lo tanto, concluimos que u es un punto crítico para Φ. □

3.2. Ecuaciones elípticas con el operador p-laplaciano en dominios acotados

A continuación, consideramos un problema de valor en la frontera relacionado con el p-Laplaciano, es decir, nuestro problema de valor en la frontera ahora es dado por

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \lambda|u|^{p-2}u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 3$, $2 < p < N$, $f \in \mathcal{C}(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y el operador p-laplaciano es definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

Usando el resultado dado en [4, Remark 6] se cumple que

$$\lambda_1 := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p \, dx},$$

es alcanzado y es el primer valor propio de Dirichlet del p-Laplaciano.

El funcional de Euler-Lagrange asociado al problema (3.5) es
$\Phi : W_0^{1,P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda|u|^p \, dx - \int_\Omega F(x,u) \, dx \equiv \frac{1}{p}\|u\|^p - I_1(u) - I(u),$$

donde

$$I_1(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda|u|^p\,dx, \quad I(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx, \quad F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds.$$

Si $\lambda < \lambda_1$, entonces se cumple que:

$$I_0(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega (|\nabla u|^p - \lambda|u|^p)\,dx \equiv \frac{1}{p}\|u\|^p - I_1(u),$$

es positivamente p-homogéneo y satisface (2.3). Asumiremos que el crecimiento de f está dado por

$$|f(x,u)| \le a(1+|u|^{q-1}) \qquad \text{para algún } a>0 \text{ y } p<q<p^*, \tag{3.6}$$

Teorema 3.6. *Supongamos que f es continua y satisface* (3.6)*. Entonces:*

(i) $\Phi \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega);\mathbb{R})$ *y* $\Phi'(u)=0$ *si y solo si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *es una solución de* (3.5)*.*

(ii) Los funcionales I y I_1 son debílmente continuos.

(iii) Los operadores I' y I_1' son completamente continuos.

(iv) Si $f(x,u) = o(|u|^{p-1})$ uniformemente en x cuando $u \to 0$, entonces $I'(u) = o(\|u\|^{p-1})$ e $I(u) = o(\|u\|^p)$ cuando $u \to 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración.

(i) La demostración de los enunciados anteriores es muy similar a la de los correspondientes en el Teorema 3.1 y se detallan en [5], donde se demuestra que el funcional asociado al problema p-laplaciano

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda|u|^p\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx,$$

es de clase $\mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega);\mathbb{R})$ y que $\Phi'(u)=0$ si y solo si u es solución débil de (3.5).

(ii)-(iii) La continuidad débil de I e I_1 y la completa continuidad de I' e I_1' se deducen de la compacidad de la inmersión de Rellich–Kondrachov:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad \text{para } 1 \le r < p^*,$$

y de la continuidad del operador $u \mapsto f(x,u)$ de $L^q(\Omega)$ a $L^{q/(q-1)}(\Omega)$, bajo la hipótesis de crecimiento (3.6). Así, si $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$, se tiene

$$I(u_n) \to I(u), \qquad I_1(u_n) \to I_1(u),$$

y además

$$I'(u_n) \to I'(u), \qquad I_1'(u_n) \to I_1'(u).$$

Esto se debe a que el término no lineal $\int_\Omega f(x,u_n)\, v\, dx$ converge gracias a la continuidad de Nemytskii (véase [25, Theorem A.2]).

(iv) Sea $f(x,u) = o(|u|^{p-1})$ uniformemente en x cuando $u \to 0$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x,u)| \le \varepsilon |u|^{p-1} + C_\varepsilon |u|^{q-1},$$

con $p < q < p^*$. Integrando entre 0 y u, se obtiene

$$|F(x,u)| \le \int_0^{|u|} (\varepsilon |s|^{p-1} + C_\varepsilon |s|^{q-1})\, ds = \varepsilon \frac{|u|^p}{p} + C_\varepsilon \frac{|u|^q}{q}.$$

Integrando sobre Ω, se tiene

$$\left| \int_\Omega F(x,u)\, dx \right| \le \varepsilon \frac{\|u\|_p^p}{p} + C_\varepsilon \frac{\|u\|_q^q}{q}.$$

Usando las inmersiones continuas $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$\left| \int_\Omega F(x,u)\, dx \right| \le \varepsilon C_1 \|u\|^p + C_2 \|u\|^q.$$

Por tanto, como

$$I(u) = \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

se obtiene

$$|I(u)| \le \varepsilon C_1 \|u\|^p + C_2 \|u\|^q = o(\|u\|^p),$$

ya que $q > p$ y ε puede elegirse arbitrariamente pequeño.

De igual modo,

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u)v\,dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Tomando $v = u$, se deduce

$$|\langle I'(u), u\rangle| \leq \varepsilon\|u\|_p^p + C_\varepsilon\|u\|_q^q \leq C(\varepsilon\|u\|^p + \|u\|^q),$$

lo que implica

$$\|I'(u)\| \leq C(\varepsilon\|u\|^{p-1} + \|u\|^{q-1}) = o(\|u\|^{p-1}),$$

cuando $u \to 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto completa la demostración.

□

A continuación enunciamos el resultado de existencia.

Teorema 3.7. *Supongamos que* $\lambda < \lambda_1$ *y* $f \in \mathcal{C}(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisface* (3.6). *Además, se cumple:*

(i) $f(x,u) = o(|u|^{p-1})$ *uniformemente en* x *cuando* $u \to 0$,

(ii) $u \mapsto \dfrac{f(x,u)}{|u|^{p-1}}$ *es estrictamente creciente en* $(-\infty, 0)$ *y* $(0, +\infty)$,

(iii) $\dfrac{F(x,u)}{|u|^p} \to +\infty$ *uniformemente en* x *cuando* $|u| \to +\infty$.

Entonces, la ecuación (3.5) *tiene una solución de tipo ground state. Además, si* f *es impar en* u, *entonces* (3.5) *tiene infinitos pares de soluciones.*

Demostración. Aplicaremos el Teorema 2.12 al funcional $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda|u|^p\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \equiv I_0(u) - I(u),$$

donde

$$I_0(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda|u|^p\,dx \equiv \psi(u) - I_1(u)$$

e $I(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$. Entonces usando (2.1) se cumple la condición (A_1) con

$$\psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p \qquad \text{y} \qquad J = \psi'.$$

De manera similar a la demostración del Teorema 3.2, las condiciones (i)-(iii) del Teorema 2.12 se satisfacen. Además, tanto I' como I_1' son completamente continuos según el Teorema 3.6, por lo que (iv) también se cumple. Utilizando la Observación 2.14 la condición (v) también es válida, por lo tanto, resta mostrar que J satisface

$$(J(v) - J(w))(v-w) \geq (\|v\|^{p-1} - \|w\|^{p-1})(\|v\| - \|w\|) \quad \text{para } \ v, w \in E,$$

lo cual es válido, véase [5, Pág. 501]. □

Observación 3.8. *De igual forma como el Teorema 3.5, aquí también se puede mostrar que existe una solución de signo cambiante de menor energía con $c_{sc} \geq 2c$ y cada solución de tipo ground state satisface $u \geq 0$ o $u \leq 0$.*

3.3. Ecuaciones elípticas con el operador laplaciano en $\mathbb{R}^N$

Consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty, \end{cases} \tag{3.7}$$

donde $N \geq 2$, V es un potencial continuo y acotado, f una no linealidad continua y satisfaciendo la siguiente condición de crecimiento:

$$|f(x,u)| \leq a(|u| + |u|^{q-1}) \qquad \text{para algún } a > 0 \text{ y } 2 < q < 2^*. \tag{3.8}$$

Tenemos que la norma usual en $H^1(\mathbb{R}^N)$ es dada por

$$\|u\|^2 := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right)\,dx.$$

Entonces, el funcional $\Phi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ es definido por

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\, dx.$$

Teorema 3.9. *Supongamos que V y f son continuos, V está acotado y f satisface* (3.8)*. Entonces:*

(i) $\Phi \in \mathcal{C}^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *y* $\Phi'(u) = 0$ *si y sólo si* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *es una solución de* (3.7)*.*

(ii) Si $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente en* x *cuando* $u \to 0$*, entonces* $I'(u) = o(\|u\|)$ *e* $I(u) = o(\|u\|^2)$ *cuando* $u \to 0$ *en* $H^1(\mathbb{R}^N)$*.*

Demostración. Una demostración de que Φ es de clase $\mathcal{C}^1$ y $\Phi'(u) = 0$ si y sólo si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ es una solución de (3.7) puede encontrarse en [25]. Para probar la afirmación (ii) se procede de manera similar a la demostración a la parte (iv) del Teorema 3.1. □

Note que Φ es de clase $\mathcal{C}^1$ y los puntos críticos de Φ corresponden a soluciones de (3.7), de acuerdo al Teorema 3.9.

Teorema 3.10. *Suponga que* $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$*,* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisface* (3.8) *y*

(i) V*,* f *son 1-periódicos en* $x_1, \ldots, x_N$ *y* $V(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*;*

(ii) $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente en* $x \in \mathbb{R}^N$ *cuando* $u \to 0$*;*

(iii) $u \mapsto \dfrac{f(x,u)}{|u|}$ *es estrictamente creciente en* $(-\infty, 0)$ *y* $(0, +\infty)$*;*

(iv) $\dfrac{F(x,u)}{u^2} \to +\infty$ *uniformemente en* $x \in \mathbb{R}^N$ *cuando* $|u| \to +\infty$*.*

Entonces, la ecuación (3.7) *tiene una solución de tipo ground state.*

Lema 3.11. *Si* f *satisface (ii) y (iii) del Teorema 3.10, entonces* $F(x,u) > 0$ *y*

$$\frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u) \qquad \text{para todo } \ u \neq 0.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^N$ fijo. Probaremos las dos afirmaciones del lema distinguiendo los casos $u > 0$ y $u < 0$.

(a) Caso $u > 0$. Por la hipótesis (iii), la función

$$\varphi_x(t) := \frac{f(x,t)}{t},$$

es estrictamente creciente en $(0,\infty)$. Por la condición (ii), se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi_x(t) = 0.$$

En consecuencia, $\varphi_x(t) > 0$ para todo $t > 0$, lo que implica que $f(x,t) > 0$ en $(0,\infty)$. En particular,

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds > 0.$$

Además, para todo $0 < s < u$, la monotonía estricta de φ_x da

$$\frac{f(x,s)}{s} < \frac{f(x,u)}{u},$$

de modo que $f(x,s) < \dfrac{f(x,u)}{u}s$. Integrando en $s \in (0,u)$ se obtiene

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds < \int_0^u \frac{f(x,u)}{u}s\,ds = \frac{1}{2}f(x,u)u.$$

(b) Caso $u < 0$. Sea $v = -u > 0$. Haciendo el cambio de variable $s = -t$, se tiene

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds = -\int_0^v f(x,-t)\,dt.$$

Por la hipótesis (iii), la función $t \mapsto f(x,t)/|t|$ es estrictamente creciente también en $(-\infty,0)$. Para todo $t \in (0,v)$ se cumple $-t \in (u,0)$ y, por la monotonía,

$$\frac{f(x,-t)}{t} > \frac{f(x,u)}{v}.$$

Multiplicando por $t > 0$, se obtiene

$$f(x,-t) > \frac{f(x,u)}{v}t.$$

Integrando

$$\int_0^v f(x,-t)\,dt > \frac{f(x,u)}{v}\int_0^v t\,dt = \frac{1}{2}f(x,u)v.$$

Por tanto,

$$F(x,u) = -\int_0^v f(x,-t)\,dt < -\frac{1}{2}f(x,u)v = \frac{1}{2}f(x,u)u.$$

Finalmente, como $f(x,s) < 0$ para $s \in (u,0)$, se tiene $\int_u^0 f(x,s)\,ds < 0$, lo que implica $F(x,u) = -\int_u^0 f(x,s)\,ds > 0$.

Combinando ambos casos concluimos que, para todo $u \neq 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$F(x,u) > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u),$$

como se quería demostrar. □

Demostración del Teorema 3.10. Observe que, usando la condición (i), V es acotado y alejado de 0, por lo tanto

$$\|u\|^2 := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)\,dx$$

define una norma equivalente a la norma de $H^1(\mathbb{R}^N)$, y el funcional asociado al problema (3.7) se puede escribir como

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\,dx \equiv \frac{1}{2}\|u\|^2 - I(u).$$

Se puede verificar que (i)-(iii) del Teorema 2.11 aún se mantienen, siguiendo los pasos de demostración que en el Teorema 3.2, teniendo en cuenta que $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ implica $u_n \to u$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto $u_n(x) \to u(x)$ casi en todo punto después de tomar una subsucesión. Por lo tanto, los resultados del Corolario 2.9 siguen siendo válidos.

Sea $(w_n) \subset S$ una sucesión minimizante para Ψ. Por el principio variacional de Ekeland podemos asumir $\Psi'(w_n) \to 0$, por lo tanto también $\Phi'(u_n) \to 0$, donde $u_n := m(w_n)$. Mostraremos que la sucesión (u_n) está acotada. Supongamos por contradicción que $\|u_n\| \to \infty$, entonces $v_n := u_n/\|u_n\| \rightharpoonup v$ en E y $v_n \to v$ casi en todo punto después de tomar una subsucesión, si fuese necesario. Por (ii) y (3.8),

para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x,u)| \leq \varepsilon|u| + C_\varepsilon|u|^{q-1}. \tag{3.9}$$

Si $v = 0$ y $v_n \to 0$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$, entonces para cada $s > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n)\,dx \to 0, \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty.$$

De acuerdo a (3.9) y por lo tanto

$$d \geq \Phi(u_n) \geq \Phi(sv_n) = \frac{s^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n)\,dx \to \frac{s^2}{2},$$

es una contradicción si se considera $s > \sqrt{2d}$. Entonces, $v_n \not\to 0$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ y de acuerdo al Lema de Lions, [25, Lemma 1.21, pág 16] se cumple que

$$\int_{B_1(y_n)} v_n^2\,dx \geq \delta, \tag{3.10}$$

para algún $\delta > 0$, $y_n \in \mathbb{R}^N$ y casi todos los $n \in \mathbb{N}$. Dado que Φ y $\mathcal{N}$ son invariantes por traslaciones de la forma $v \mapsto v(\cdot - y)$, $y \in \mathbb{Z}^N$, podemos asumir, si es necesario trasladar v_n, que la sucesión (y_n) está acotada. Dado que $v_n \to v$ en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, la desigualdad (3.10) implica $v \neq 0$ y obtenemos una contradicción dado que el lema de Fatou implica que

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x,u_n)}{u_n^2} v_n^2\,dx \to -\infty \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty.$$

Entonces la sucesión (u_n) está acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$, como este espacio es reflexivo podemos asumir $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y $u_n \to u$ casi en todo punto. Por lo tanto, u es una solución de (3.7). Si $u = 0$. Entonces $u_n \to 0$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$, lo que implica que junto con (3.9) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon|u_n|^2\,dx + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q\,dx = \epsilon\|u_n\|_2^2 + C_\epsilon\|u_n\|_q^q.$$

Usando las inmersiones de Sobolev, existen constantes $C_1 > 0$ y C_2 tales que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n\,dx \leq C_1\|u_n\|^2 + C_2\|u_n\|^q.$$

Por consiguiente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n\,dx = o(\|u_n\|).$$

Observe que

$$|\Phi'(u_n)u_n| \leq \|\Phi'(u_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))^*}\|u_n\|.$$

Así que

$$o(\|u_n\|) = \Phi'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n\,dx = \|u_n\|^2 + o(\|u_n\|). \tag{3.11}$$

Es decir,

$$\frac{o(\|u_n\|)}{\|u_n\|} = \|u_n\| + \frac{o(\|u_n\|)}{\|u_n\|}.$$

De la igualdad anterior, al tender $n \to +\infty$, se obtiene $u_n \to 0$. Sin embargo, esto es una contradicción porque $u_n \in \mathcal{N}$ y $\mathcal{N}$ está acotada inferiormente por una constante positiva. Así que se debe cumplir que $u_n \not\to 0$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$ y aplicando nuevamente el lema de Lions, vemos que (3.10) se cumple con v_n reemplazado por u_n y como antes podemos asumir, si es necesario trasladar u_n, que $u_n \rightharpoonup u \neq 0$. Por lo tanto, u es una solución no trivial del problema (3.7) y en particular, $u \in \mathcal{N}$.

Ahora mostraremos que $\Phi(u) = c := \text{ínf}_{\mathcal{N}}\,\Phi$. Dado que podemos asumir al pasar a una subsucesión que $u_n \to u$ casi en todo punto, el Lema 3.11 y el lema de Fatou implican

$$\begin{aligned}
c + o(1) &= \Phi(u_n) - \frac{1}{2}\Phi'(u_n)u_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)\,dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(x,u)u - F(x,u)\right)\,dx + o(1) \\
&= \Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi'(u)u + o(1) \\
&= \Phi(u) + o(1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al tomar límite cuando $n \to +\infty$ se cumple que $\Phi(u) \leq c$. Además, dado que $u \in \mathcal{N}$, se cumple que $c = \text{ínf}_{\mathcal{N}}\,\Phi \leq \Phi(u)$. Por lo tanto, se cumple que

$$\Phi(u) = \inf_{\mathcal{N}} \Phi.$$

Por consiguiente, u es una solución de tipo ground state para el problema (3.8). □

Observación 3.12. *De manera similar a la Observación 3.3 se cumple que* $u > 0$ *o* $u < 0$ *en* $\mathbb{R}^N$ *si* u *es una solución de tipo ground state.*

Capítulo IV

Variedad de Nehari generalizada

En este capítulo se aborda la variedad de Nehari generalizada propuesta por Andrzej Szulkin y Tobias Weth [23, 24]. Esta versión extendida permite tratar problemas elípticos indefinidos mediante la descomposición ortogonal de un espacio de Hilbert y la minimización del funcional asociado sobre la variedad correspondiente. Bajo ciertas condiciones, los minimizadores obtenidos en esta variedad constituyen soluciones de tipo ground state.

4.1. Configuración abstracta

Sea E un espacio de Hilbert y $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$. Además, suponga que exista una descomposición ortogonal

$$E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^- \equiv E^+ \oplus F,$$

tal que $\dim(E^0) < +\infty$. Escribiremos

$$u = u^+ + u^0 + u^- = u^+ + v, \qquad u^\pm \in E^\pm, \quad u^0 \in E^0, \quad v \in F.$$

En este capitulo, $u^\pm$ no denotarán la parte positiva y negativa de una función u. Sean

$$S^+ := S \cap E^+ = \{u \in E^+ : \|u\| = 1\},$$

$$E(u) := \mathbb{R}u \oplus F \equiv \mathbb{R}u^+ \oplus F \qquad \text{y} \qquad \widehat{E}(u) := \mathbb{R}^+u \oplus F \equiv \mathbb{R}^+u^+ \oplus F,$$

Hacemos las siguientes suposiciones sobre Φ:

(B_1) El funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ se puede escribir como

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u),$$

donde $I(0) = 0$,

$$\frac{1}{2}I'(u)u > I(u) > 0, \qquad \text{para todo } \ u \neq 0,$$

e I es débilmente semicontinua inferiormente.

(B_2) Para cada $w \in E \setminus F$, existe un punto crítico no trivial único $\widehat{m}(w)$ de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$. Además, $\widehat{m}(w)$ es el máximo global único de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$.

(B_3) Existe $\delta > 0$ tal que $\|\widehat{m}(w)^+\| \geq \delta$ para todo $w \in E\setminus F$, y para cada subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset E \setminus F$, existe una constante $C_{\mathcal{W}} > 0$ tal que $\|\widehat{m}(w)\| \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

Sea

$$\mathcal{M} := \{u \in E \setminus F : \Phi'(u)u = 0 \text{ y } \Phi'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in F\}.$$

Si $u \neq 0$ es un punto crítico, entonces $\Phi'(u) = 0$, entonces usando (B_1) se cumple

$$\Phi(u) = \Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi'(u)u = \frac{1}{2}I'(u)u - I(u) > 0,$$

mientras que $\Phi \leq 0$ en F. Por lo tanto, $\mathcal{M}$ contiene todos los puntos críticos no triviales de Φ y $\widehat{E}(w) \cap \mathcal{M} = \{\widehat{m}(w)\}$ siempre que $w \in E \setminus F$. Dado que $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(tw)$ para todo $t > 0$, se deduce que si $F = \{0\}$, entonces las condiciones (B_2) y (B_3) son equivalentes a las condiciones (A_2) y (A_3) y $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

El conjunto $\mathcal{M}$ es llamado variedad de Nehari generalizada, la cual fue introducida por Pankov en [20]. En particular, si $\Phi \in \mathcal{C}^2(E, \mathbb{R})$ y la restricción de $\Phi''(\widehat{m}(w))$ a $E(w)$ es definida negativa para todo $w \in E \setminus F$, entonces $\mathcal{M}$ es una variedad de clase $\mathcal{C}^1$ como se deduce del teorema de la función implícita.

Definiendo

$$\widehat{m} : E \setminus F \to \mathcal{M} \qquad \text{y} \qquad m := \widehat{m}|_{S^+} : S^+ \to \mathcal{M}.$$

Se observa que m es una biyección cuyo inverso m^{-1} está dado por

$$m^{-1}(u) = \frac{u^+}{\|u^+\|}.$$

Dado que por (B_3), $\|m(w)^+\| \geq \delta$ para todo $w \in E \setminus F$, $\mathcal{M}$ está acotado lejos de F y es cerrado. Sea

$$c := \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi(u).$$

Por la condición (B_2), se deduce que $c > 0$ y que dicho valor se alcanza. Mostraremos que si $u_0 \in \mathcal{M}$ y $\Phi(u_0) = c$, entonces u_0 es un punto crítico de Φ y, por lo tanto, debe ser una solución de tipo ground state para la ecuación $\Phi'(u) = 0$.

Proposición 4.1. *Supongamos que Φ satisface (B_1)-(B_3). Entonces:*

(a) La aplicación $\widehat{m}$ es continua.

(b) La aplicación m es un homeomorfismo entre S^+ y M.

Demostración.

(a) Supongamos $(w_n) \subset E \setminus F$, $w_n \to w \notin F$. Dado que $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w^+/\|w^+\|)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $w_n \in S^+$. Luego, es suficiente mostrar que $\widehat{m}(w_n) \to \widehat{m}(w)$, cuando $n \to +\infty$, a menos para una subsucesión. Escribiendo

$$\widehat{m}(w_n) = s_n w_n + v_n, \qquad \text{donde} \;\; v_n = v_n^0 + v_n^- \in F.$$

Por (B_3), la sucesión $(\widehat{m}(w_n))$ está acotada. Entonces, tomando subsucesiones (s_n) y (v_n), tales que

$$s_n \to s \qquad \text{y} \qquad v_n \rightharpoonup v^* = v^{*0} + v^{*-}, \qquad \text{cuando} \;\; n \to +\infty.$$

Denotando por $\widehat{m}(w) = sw + v$, se sigue de la condición (B_2) que

$$\Phi(\widehat{m}(w_n)) \geq \Phi(s_n w_n + v) \to \Phi(sw + v) = \Phi(\widehat{m}(w)), \qquad \text{cuando} \;\; n \to +\infty.$$

Usando la semicontinuidad inferior débil de la norma e I,

$$\begin{aligned}
\Phi(\widehat{m}(w)) &\leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(w_n)) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} s_n^2 - \frac{1}{2} \|v_n^-\|^2 - I(\widehat{m}(w_n)) \right) \\
&\leq \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} \|v^{*-}\|^2 - I(sw + v^*) \\
&\leq \Phi(\widehat{m}(w)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las desigualdades anteriores deben ser igualdades. Se sigue que (v_n^-) es fuertemente convergente y también (v_n^0) porque $\dim(E^0) < \infty$. En consecuencia, $v_n \to v^*$ y por la propiedad de unicidad (B_2), $v^* = v$.

(b) Esto es consecuencia de (a) y el hecho de que m^{-1} es continua.

□

Sean

$$\widehat{\Psi} : E^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \widehat{\Psi}(w) := \Phi(\widehat{m}(w)) \quad \text{y} \quad \Psi := \widehat{\Psi}|_{S^+}.$$

Proposición 4.2. *Supongamos que Φ satisface $(B_1)-(B_3)$. Entonces $\widehat{\Psi} \in \mathcal{C}^1(E^+ \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ y*

$$\widehat{\Psi}'(w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z \qquad \textit{para todo} \quad w, z \in E^+, w \neq 0.$$

Demostración. Sea $w \in E^+ \setminus \{0\}$, $z \in E^+$ y escribiendo

$$\widehat{m}(w) = s_w w + v_w, \qquad \text{donde} \quad v_w \in F.$$

Como en la demostración de la Proposición 2.8, tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(w+tz) - \widehat{\Psi}(w) &= \Phi(s_{w+tz}(w+tz) + v_{w+tz}) - \Phi(s_w w + v_w) \\ &\leq \Phi(s_{w+tz}(w+tz) + v_{w+tz}) - \Phi(s_{w+tz} w + v_{w+tz}) \\ &= \Phi'(s_{w+tz} w + v_{w+tz} + \tau_t s_{w+tz} tz) s_{w+tz} tz\end{aligned}$$

para todo $|t|$ suficientemente pequeño y algún $\tau_t \in (0,1)$. Se puede verificar que también se cumple una desigualdad inversa similar. Continuando como en la prueba mencionada anteriormente, obtenemos

$$\widehat{\Psi}'(w)z = s_w \Phi'(s_w w + v_w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z.$$

□

Corolario 4.3. *Supongamos que Φ satisface $(B_1)-(B_3)$. Entonces:*

(a) $\Psi \in \mathcal{C}^1(S^+, \mathbb{R})$ y

$$\Psi'(w)z = \|m(w)^+\|\Phi'(m(w))z, \qquad \textit{para todo} \quad z \in T_w(S^+).$$

(b) Si (w_n) es una sucesión de Palais-Smale para Ψ, entonces $(m(w_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para Φ. Si $(u_n) \subset \mathcal{M}$ es una sucesión acotada de Palais-Smale para Φ, entonces $(m^{-1}(u_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para Ψ.

(c) w es un punto crítico de Ψ si y sólo si $m(w)$ es un punto crítico no trivial de Φ. Además, los valores correspondientes de Ψ y Φ coinciden e

$$\inf_{S^+} \Psi = \inf_{\mathcal{M}} \Phi.$$

(d) Si Φ es par, entonces Ψ también lo es.

Demostración. La presente demostración sigue las mismas ideas que en el Corolario 2.9, excepto que la prueba de (b), el cual necesita ser ligeramente modificada. Ahora tenemos $E = T_w(S^+) \oplus E(w)$ para todo $w \in S^+$ y, denotando $u = m(w)$, mientras que, la ecuación (2.2) se reemplaza por

$$\|\Psi'(w)\| = \sup_{z \in T_w(S^+), \|z\|=1} \Psi'(w)z = \|u^+\| \sup_{z \in T_w(S^+), \|z\|=1} \Phi'(u)z = \|u^+\| \|\Phi'(u)\|,$$

donde la última igualdad se sigue porque $\Phi'(u)v = 0$ para todo $v \in E(w)$ y $E(w)$ es ortogonal a $T_w(S^+)$. Dado que $\|u^+\| \geq \delta > 0$ para $u \in \mathcal{M}$, la conclusión de (b) es válida. □

Observación 4.4. *De manera similar a la Observación 2.10, ahora tenemos la siguiente caracterización variacional del ínfimo de Φ sobre $\mathcal{M}$:*

$$c = \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi(u) = \inf_{w \in E \setminus F} \max_{u \in \widehat{E}(w)} \Phi(u) = \inf_{w \in S^+} \max_{u \in \widehat{E}(w)} \Phi(u).$$

El siguiente resultado es la versión análoga del Teorema 2.11 para la variedad de Nehari generalizada:

Teorema 4.5. *Supongamos que el funcional Φ satisface (B_1), (B_2) y*

(i) $I'(u) = o(\|u\|)$ cuando $u \to 0$,

(ii) $\dfrac{I(su)}{s^2} \to +\infty$ uniformemente para u en subconjuntos débilmente compactos de $E \setminus \{0\}$ cuando $s \to +\infty$.

(iii) I' es completamente continuo.

Entonces la ecuación $\Phi'(u) = 0$ tiene una solución de tipo ground state. Además, si I es par, entonces esta ecuación tiene infinitos pares de soluciones.

Demostración. Mostramos primero que la condición (B_3) se cumple. Por (B_1) y (i), podemos encontrar $\rho, \eta > 0$ tal que

$$\Phi(w) \geq \eta, \qquad \text{para todo } \ w \in S_\rho(0) \cap E^+.$$

Entonces, para cualquier $w \in E \setminus F$, se cumple

$$\Phi(\widehat{m}(w)) \geq \eta.$$

Dado que $\Phi(\widehat{m}(w)^+) \geq \Phi(\widehat{m}(w))$, $\|\widehat{m}(w)^+\| \geq \delta$ para algún $\delta > 0$.

La desigualdad $\|\widehat{m}(w)\| \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo w en un conjunto compacto $\mathcal{W} \subset S^+$ es una consecuencia inmediata de (B_1), (ii) y el hecho de que $\Phi(\widehat{m}(w)) > 0$. Dado que $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w^+/\|w^+\|)$ para todo $w \in E \setminus F$, esto también es válido si $\mathcal{W}$ es un subconjunto compacto de $E \setminus F$.

También se observa que $c = \text{ínf}_{\mathcal{M}} \Phi \geq \eta > 0$. El resto de la demostración sigue los mismos argumentos de la prueba del Teorema 2.11, tomando en cuenta el Corolario 4.3 y asumiendo la Proposición 4.7 a continuación. □

Observación 4.6. *Es importante observar que no es suficiente asumir que $s \mapsto I'(su)u/s$ es creciente para todo $s > 0$ para asegurar que (B_2) se cumpla.*

Proposición 4.7. *Bajo las suposiciones del Teorema 4.5, Φ satisface la condición de Palais-Smale en $\mathcal{M}$.*

Demostración. Sea $(u_n) \subset \mathcal{M}$ una sucesión tal que $\Phi(u_n) \leq d$ para algún $d > 0$ y $\Phi'(u_n) \to 0$. Si (u_n) es no acotada, definimos $v_n := u_n/\|u_n\|$. Pasando a una subsucesión, podemos asumir $\|u_n\| \to +\infty$ y $v_n \rightharpoonup v$. Se sigue de (ii) que si $v \neq 0$, entonces

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 - \frac{I(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2}, \tag{4.1}$$

y el lado derecho anterior tiende a $-\infty$, de acuerdo a (2.5) . Por lo tanto $v = 0$. Por (4.1)) y dado que $I \geq 0$, $\|v_n^+\| \geq \|v_n^-\|$. Si $v_n^+ \to 0$, entonces también $v_n^- \to 0$ y por lo tanto

$$\|v_n^0\|^2 = 1 - \|v_n^+\|^2 - \|v_n^-\|^2 \to 1, \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty.$$

Por lo tanto, $v_n^0 \to v^0$ porque E^0 es de dimensión finita. Así que $v \neq 0$, una contradicción. Por lo tanto, $v_n^+ \not\to 0$ y así $\|v_n^+\| \geq \alpha$ para todo n y algún $\alpha > 0$, posiblemente después de pasar a una subsucesión. Para probar la acotación de (u_n) observe que

$$d \geq \Phi(u_n) \geq \Phi(sv_n^+) \geq \frac{1}{2}\alpha^2 s^2 - I(sv_n^+) \to \frac{1}{2}\alpha^2 s^2, \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty, \quad (4.2)$$

para todo $s > 0$, una contradicción nuevamente, véase (2.6). Entonces (u_n) es acotada y

$$\Phi'(u_n) = u_n^+ - u_n^- - I'(u_n) \to 0, \qquad \text{cuando } \ n \to +\infty.$$

Dado que I' es completamente continuo y $\dim(E^0) < +\infty$, (u_n) tiene una subsucesión convergente. Por lo tanto, se satisface la condición de Palais-Smale. □

Capítulo V

Aplicaciones de la variedad generalizada de Nehari

En este capítulo se abordan los mismos problemas analizados en el Capítulo 3, pero considerando el caso en que $\lambda \geq \lambda_1$, lo que hace necesaria una descomposición ortogonal del espacio funcional. Además, se estudia la ecuación de Schrödinger estacionaria no lineal $-\Delta u + V(x)u = f(x,u)$ en $\mathbb{R}^N$, donde f es una no linealidad superlineal y subcrítica. Se presta especial atención al caso en que tanto V como f son funciones periódicas en x, y el valor 0 no pertenece a un intervalo espectral del operador $-\Delta + V$. Los resultados correspondientes pueden encontrarse en [23, 24].

5.1. Ecuaciones elípticas: el caso indefinido

Ahora analizaremos nuevamente el problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, sin embargo, consideraremos el caso cuando $\lambda \geq \lambda_1$.

Sea $E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$ la descomposición ortogonal correspondiente al espectro de $-\Delta - \lambda$ en E. Más precisamente, denotemos los valores propios de Dirichlet de $-\Delta$ por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ y un conjunto ortogonal correspondiente en E, de autofunciones por $e_1, e_2, \ldots$.

Supongamos que

$$\lambda_k < \lambda = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_m < \lambda_{m+1}, \qquad \text{donde } 1 \leq k < m.$$

Entonces

$$E^- = \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\} \quad \text{y} \quad E^0 = \text{span}\{e_{k+1}, \ldots, e_m\}.$$

Observe que para los casos $k = 0$ y $k = m \geq 1$, se obtiene respectivamente $E^- = \{0\}$ y $E^0 = \{0\}$.

Sea $u = u^+ + u^0 + u^- \in E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$. En el espacio E introducimos una norma equivalente tal que

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)\, dx = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2.$$

Entonces el funcional Φ correspondiente al problema (5.1) está dada por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u), \tag{5.2}$$

donde,

$$I(u) = \int_\Omega F(x,u)\, dx.$$

El siguiente resultado dado [23] representa una extensión del Teorema 3.2 aplicable para el caso $\lambda \geq \lambda_1$:

Teorema 5.1. *Supongamos que $\lambda \geq \lambda_1$, f satisface*

$$|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{q-1}) \qquad \textit{para algún } a > 0 \textit{ y } 2 < q < 2^*,$$

y se cumplen las siguientes condiciones

(i) $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente en* x *cuando* $u \to 0$,

(ii) $u \mapsto f(x,u)/|u|$ *es estrictamente creciente en* $(-\infty, 0)$ *y* $(0, +\infty)$,

(iii) $\dfrac{F(x,u)}{u^2} \to +\infty$ *uniformemente en* x *cuando* $|u| \to +\infty$.

Entonces la ecuación (5.1) *tiene una solución de tipo ground state. Además, si f es impar en u, entonces* (5.1) *tiene infinitos pares de soluciones.*

Demostración. Tenemos que el funcional I es débilmente continuo por el Teorema 3.1, de (5.2) y del Lema 3.11 se tiene que (B_1) se cumple, y también (i) y (ii) del Teorema 4.5 como se puede observar en la demostración del Teorema 3.2. Dado que también (iii) se cumple según el Teorema 3.1, la conclusión seguirá del Teorema 4.5 si se verifica (B_2), lo cual se probará en la Proposición 5.3, mostrada a continuación. □

Lema 5.2. *Asumiendo las hipótesis del Teorema 5.1. Sean u, s, v números reales tales que $s \geq -1$ y sea $w := su + v \neq 0$. Entonces*

$$f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right]+F(x,u)-F(x,u+w)<0,$$

para todo $x \in \Omega$.

Demostración. Fijamos $x \in \Omega$ y $u, v \in \mathbb{R}$. Para $s \geq -1$ escribimos

$$z = z(s) := (1+s)u + v, \qquad \text{en particular} \quad z = u + w$$

y

$$g(s) := f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right]+F(x,u)-F(x,z).$$

Luego, nuestro objetivo es demostrar que $g(s) < 0$ siempre que $u \neq z$. Supongamos $u = 0$. Entonces $z \neq 0$ y por lo tanto $g(s) = -F(x,z) < 0$ por el Lema 3.11. En lo que sigue asumimos $u \neq 0$. Si $uz \leq 0$, dado que $v = z - (1+s)u$, se cumple

$$\begin{aligned} g(s) &= f(x,u)\left[\left(\frac{s^2}{2}+s\right)u+(s+1)(z-(s+1)u)\right]+F(x,u)-F(x,z) \\ &< f(x,u)\left[\left(\frac{s^2}{2}+s\right)u+(s+1)(z-(s+1)u)\right]+\frac{1}{2}f(x,u)u-F(x,z) \quad (5.3) \\ &= -\frac{1}{2}(s+1)^2 f(x,u)u+(s+1)f(x,u)z-F(x,z)\leq 0, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Lema 3.11 y el hecho de que $f(x,u)z \leq 0$ siempre que $uz \leq 0$. Por lo tanto, $g(s) < 0$ en este caso. Ahora supongamos $uz > 0$. Observamos que

$$g(-1) = -\frac{1}{2}f(x,u)u + F(x,u) - F(x,v) < -F(x,v) \leq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{s\to\infty} g(s) = -\infty$$

por el Lema 3.11. Además,

$$g'(s) = uz\left(\frac{f(x,u)}{u} - \frac{f(x,z)}{z}\right). \tag{5.4}$$

Supongamos que g alcanza su máximo en $[-1,\infty)$ en algún punto s con $g(s) \geq 0$. Entonces $g'(s) = 0$ y $u = z$ por (5.4) y (ii) del Teorema 5.1, por lo que

$$g(s) = -\frac{1}{2}s^2 f(x,u)u \leq 0.$$

Se sigue que $g(s)$ puede ser 0 si $u = z$ (es decir, $w = 0$) pero este valor debe ser negativo en caso contrario. □

Proposición 5.3. *Asumiendo las hipótesis del Teorema 5.1.*

(i) $\widehat{E}(w) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ *para cualquier* $w \in E \setminus (E^0 \oplus E^-) \equiv E \setminus F$.

(ii) Si $u \in \mathcal{M}$, *entonces*

$$\Phi(u+w) < \Phi(u) \quad \textit{siempre que} \quad u + w \in \widehat{E}(u),\ w \neq 0.$$

Por lo tanto, u es el máximo global único de $\Phi|_{\widehat{E}(u)}$.

Demostración.

(i) Sea $w \in E \setminus F$. Dado que $\widehat{E}(w) = \widehat{E}(w^+/\|w^+\|)$, podemos asumir $w \in S^+$. Afirmamos que $\Phi \leq 0$ en $\widehat{E}(w) \setminus B_R(0)$ siempre que R sea suficientemente grande. Procediendo por contradicción, podemos encontrar una sucesión (u_n) tal que $\|u_n\| \to +\infty$ y $\Phi(u_n) \geq 0$. Definiendo $v_n := u_n/\|u_n\|$, podemos usar (4.1) y el argumento que le sigue para concluir que $v_n \rightharpoonup 0$ y al mismo tiempo $\|v_n^+\| = \|s_n w\| = s_n$ es acotado y acotado inferiormente por una constante positiva. Pero entonces $v_n^+ \to sw$, $s > 0$, una contradicción. Por (i) del Teorema 5.1 se cumple

$$\Phi(sw) = \frac{1}{2}s^2 + o(s^2), \qquad \text{cuando} \ \ s \to 0.$$

Por lo tanto, $0 < \sup_{\widehat{E}(w)} \Phi < \infty$. Dado que Φ es débilmente semicontinuo superiormente en $\widehat{E}(w)$ y $\Phi \leq 0$ en $\widehat{E}(w) \cap F$, el supremo se alcanza en algún punto u_0 tal que $u_0^+ \neq 0$. Así, u_0 es un punto crítico de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$ y por lo tanto $u_0 \in \mathcal{M}$.

(ii) Sea

$$B(v_1, v_2) := \int_\Omega (\nabla v_1 \cdot \nabla v_2 - \lambda v_1 v_2)\, dx, \quad v_1, v_2 \in E.$$

Para $u \in \mathcal{M}$, sea $u + w \in \widehat{E}(u)$. Entonces $u + w = (1+s)u + v$, donde $s \geq -1$ y $v = v_0 + v^- \in F$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\Phi(u+w) - \Phi(u) \\
&= \frac{1}{2}\left[B(u+w, u+w) - B(u,u)\right] + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w))\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[B((1+s)u+v, (1+s)u+v) - B(u,u)\right] + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w))\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[(1+s)^2 - 1\right] B(u,u) + 2(1+s)B(u,v) + B(v,v)\right) \\
&\quad + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w))\, dx \\
&= -\frac{\|v^-\|^2}{2} + B(u, s\left(\frac{s}{2}+1\right)u + (1+s)v) + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w))\, dx \\
&= -\frac{\|v^-\|^2}{2} + \int_\Omega \left(f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u + (1+s)v\right] + F(x,u) - F(x,u+w)\right) dx.
\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado el hecho de que

$$z := s\left(\frac{s}{2}+1\right)u + (1+s)v \in E(u),$$

y por lo tanto

$$0 = \Phi'(u)z = B(u,z) - \int_\Omega f(x,u)z\, dx.$$

Dado que w es no nulo en un conjunto de medida positiva, la última integral anterior es negativa según el Lema 5.2 y por lo tanto $\Phi(u+w) < \Phi(u)$.

□

A continuación, mostraremos un resultado de [23] para la ecuación de Schrödinger no lineal

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{5.5}$$

con V tal que 0 está en el gap del espectro de $-\Delta + V$. En [23] se ha demostrado que (5.5) tiene una solución de tipo ground state, y si además, f es impar en u, entonces hay infinitas soluciones geométricamente distintas. Aquí solo probamos la

existencia de la solución de tipo ground state.

Teorema 5.4. *Supongamos que* $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisface la siguiente condición de crecimiento*

$$|f(x,u)| \leq a(|a| + |u|^{q-1}) \qquad \text{para algún } a > 0 \text{ y } 2 < q < 2^*. \tag{5.6}$$

Además, se cumple las siguientes condiciones:

(i) V, f *son 1-periódicas en* $x_1, \ldots, x_N$. *Además,*

$$0 \notin \sigma(-\Delta + V) \qquad y \qquad \sigma(-\Delta + V) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset,$$

(ii) $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente en* x *cuando* $u \to 0$,

(iii) $u \mapsto \dfrac{f(x,u)}{|u|}$ *es estrictamente creciente en* $(-\infty, 0)$ *y* $(0, +\infty)$,

(iv) $\dfrac{F(x,u)}{u^2} \to +\infty$ *uniformemente en* x *cuando* $|u| \to +\infty$.

Entonces la ecuación (5.5) *tiene una solución de tipo de ground state.*

Demostración. Sea $E = H^1(\mathbb{R}^N)$. Dado que $0 \notin \sigma(-\Delta+V)$ y $\sigma(-\Delta+V)\cap(-\infty,0) \neq \emptyset$, $E^0 = \{0\}$, $\dim E^{\pm} = \infty$ y existe una norma equivalente en E tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u), \tag{5.7}$$

donde,

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\, dx.$$

Dado que $F \geq 0$, I es débilmente semicontinuo inferiormente como se sigue fácilmente del lema de Fatou y del hecho de que si $u_n \rightharpoonup u$ en E, entonces $u_n \to u$ en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto casi en todas partes después de pasar a una subsucesión. Luego, usando el Lema 3.11 se obtiene que (B_1) se cumple, y también (B_2) por la Proposición 5.3, donde debemos considerar que la integración se realiza sobre $\mathbb{R}^N$ en lugar de Ω y $-\lambda v_1 v_2$ se reemplaza por $V(x)v_1v_2$ en la definición de la forma bilineal B.

En el contexto del Teorema 5.1 se tenia que dim $E^- < \infty$ pero este hecho no se utilizó en la demostración de la Proposición 5.3. Luego (B_3) se cumple y $c = \text{ínf}_{\mathcal{M}} \Phi > 0$ se sigue como en la demostración del Teorema 4.5.

Ahora utilizamos los resultados del Teorema 3.10 y la Proposición 4.7 de la siguiente manera. Tomamos una sucesión de Palais-Smale minimizante (w_n) para Ψ. Entonces la sucesión (u_n), donde $u_n := m(w_n)$, es una sucesión de Palais-Smale para Φ según el Corolario 4.3. Suponiendo por contradicción que $\|u_n\| \to +\infty$ y definiendo $v_n := u_n/\|u_n\|$, vemos como en (4.1) y el argumento que le sigue que $v_n \rightharpoonup 0$ después de pasar a una subsucesión y $\|v_n^+\| \geq 1/\sqrt{2}$ (porque $\|v_n^+\| \geq \|v_n^-\|$ y $\|v_n^+\|^2 + \|v_n^-\|^2 = 1$). Si $v_n^+ \to 0$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$, entonces usando (3.9) obtenemos una contradicción como en (4.2). Por lo tanto, (3.10) se cumple con v_n reemplazado por v_n^+, y nuevamente podemos asumir, posiblemente después de reemplazar v_n por $v_n(\cdot - y_n)$ para algún $y_n \in \mathbb{Z}^N$, que (y_n) es una sucesión acotada. Pero entonces $v^+ \neq 0$ y por lo tanto $v \neq 0$, una contradicción. Hemos demostrado que (u_n) está acotada. El resto del argumento es exactamente el mismo que en el Teorema 3.10 excepto que si $u_n \to 0$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$, entonces (3.11) debería escribirse como

$$o(\|u_n^+\|) = \Phi'(u_n)u_n^+ = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)u_n^+ \, dx = \|u_n^+\|^2 + o(\|u_n^+\|).$$

Por consiguiente, $u_n^+ \to 0$ en E y

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u_n^-\|^2 - I(u_n) \right) \leq \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \|u_n^+\|^2 = 0,$$

contradiciendo el hecho de que $\text{ínf}_{\mathcal{M}} \Phi > 0$. □

Conclusiones

- Se estableció la existencia de infinitas soluciones no triviales para el problema elíptico

$$-\Delta u - \lambda u = f(x,u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

usando el método variacional sobre la variedad de Nehari, que permite hallar estados fundamentales como mínimos del funcional de energía.

- El método se extendió al operador p-laplaciano $-\Delta_p u - \lambda|u|^{p-2}u = f(x,u)$, demostrando su eficacia en espacios $W_0^{1,p}(\Omega)$ y su aplicabilidad a no linealidades generales.

- Para $\Omega = \mathbb{R}^N$, se obtuvieron soluciones tipo *ground state* de $-\Delta u + V(x)u = f(x,u)$, bajo hipótesis adecuadas sobre V y f, validando el método en dominios no acotados.

- La variedad de Nehari generalizada permitió tratar problemas indefinidos mediante la descomposición $E = E^+ \oplus E^-$, asegurando soluciones aun cuando el origen no es un mínimo local.

- En conjunto, los resultados confirman que las versiones clásica y generalizada del método de Nehari constituyen una herramienta sólida y versátil para ecuaciones elípticas no lineales en dominios acotados o no acotados.

- **Perspectivas futuras:** Se sugiere extender el método variacional basado en la variedad de Nehari a sistemas acoplados y ecuaciones con crecimiento exponencial o doblemente exponencial, tal como se aborda en trabajos recientes [9–15]. Estos resultados muestran que el enfoque puede aplicarse eficazmente a sistemas de tipo Hamiltoniano, problemas biharmónicos normalizados y ecuaciones en espacios de Orlicz–Sobolev con potenciales no acotados o decaimiento radial, ampliando así el alcance del método a contextos más generales.

Bibliografía

[1] Adams, R. A., & Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev spaces. Second edition.* Pure and Applied Mathematics. Elsevier.

[2] Ambrosetti, A., & Malchiodi, A. (2007). *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104. Cambridge University Press.

[3] Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer.

[4] Dincă, G., Jebelean, P., & Mawhin, J. (2001). Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian. *Portugaliae Mathematica, 58*, 339–378.

[5] Drábek, P., & Milota, J. (2007). *Methods of nonlinear analysis: Applications to differential equations.* Birkhäuser.

[6] Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47*, 324–353.

[7] Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (1983). *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag.

[8] Kesavan, S. (1989). *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited.

[9] Leuyacc, Y. R. S., & Carlos, R. D. (2024). Ground state solutions for elliptic Kirchhoff–Boussinesq type problems with supercritical exponential growth. *Bound. Value Probl.*, 125, 2024.

[10] Leuyacc, Y. R. S., & Carlos, R. D. (2026). A class of Kirchhoff–Boussinesq equations involving logarithmic and critical growth. *Math. Methods Appl. Sci.*, 49(2), 773–786.

[11] Leuyacc, Y. R. S. (2025). Ground state solutions for Hamiltonian systems with double exponential growth. *Bound. Value Probl.*, 70, 2025.

[12] Leuyacc, Y. R. S. (2024). Quasilinear equations in Orlicz–Sobolev spaces involving critical exponential growth with unbounded and decaying radial potentials. *Mediterr. J. Math*, 21, 196.

[13] Leuyacc Y. R. S. (2024). Singular Hamiltonian elliptic systems involving double exponential growth in dimension two. *Partial Differ. Equ. Appl. Math.*, 10, 100681.

[14] Leuyacc Y. R. S.(2025). Normalized ground state solutions for a biharmonic equation involving critical exponential growth. *Boundary Value Problems*, 101, 2025.

[15] Leuyacc, Y. R. S. (2026). Singular quasilinear equation involving double exponential growth in dimension two. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2).*

[16] Liu, Z., & Wang, Z. Q. (2004). On the Ambrosetti–Rabinowitz superlinear condition. *Advances in Nonlinear Studies, 4*, 563–574.

[17] Mawhin, J., & Willem, M. (1989). *Critical point theory and Hamiltonian systems.* Springer-Verlag.

[18] Nehari, Z. (1960). On a class of nonlinear second-order differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society, 95*, 101–123.

[19] Nehari, Z. (1961). Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations. *Acta Mathematica, 105*, 141–175.

[20] Pankov, A. (2005). Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals. *Milan Journal of Mathematics, 73*, 259–287.

[21] Rabinowitz, P. H. (1986). *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. American Mathematical Society.

[22] Struwe, M. (1990). *Variational methods.* Springer-Verlag.

[23] Szulkin, A., & Weth, T. (2009). Ground state solutions for some indefinite variational problems. *Journal of Functional Analysis, 257*, 3802–3822.

[24] Szulkin, A., & Weth, T. (2010). The method of Nehari manifold. In D. Y. Gao & D. Motreanu (Eds.), *Handbook of nonconvex analysis and applications* (pp. 597–632).

[25] Willem, M. (1996). *Minimax theorems.* Birkhäuser.

[26] Zou, W., & Schechter, M. (2006). *Critical point theory and its applications.* Springer-Verlag.