Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Solución del problema del agente viajero asimétrico bajo el enfoque del problema de asignación

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Investigación de Operaciones y Sistemas

AUTOR

Gabriel José SOLARI CARBAJAL

ASESOR

Esther BERGER VIDAL

Lima, Perú

2019



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Solari, G. (2019). *Solución del problema del agente viajero asimétrico bajo el enfoque del problema de asignación*. Tesis para optar el grado de Magíster en Investigación de Operaciones y Sistemas. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código ORCID del autor	0000-0002-7888-7268
DNI o pasaporte del autor	DNI Nº 25471272
Código ORCID del asesor	0000-0001-5282-6793
DNI o pasaporte del asesor	DNI Nº 08766040
Grupo de investigación	—
Agencia financiadora	—
Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación	Lugar. País: Perú, Departamento: Lima, Provincia: Lima, Distrito: Cercado de Lima Coordenadas geográficas. Latitud: -12.060343 Longitud: -77.082099 Lugar. País: Perú, Provincia: Callao, Distrito: Ventanilla Coordenadas geográficas. Latitud: -11.890189 Longitud: -77.109924
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2016-2018
Disciplinas OCDE	Matemáticas aplicadas http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 14:40 horas del día martes veintitrés de abril del dos mil diecinueve, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Luis Alberto Oré Luján e integrado por los siguientes miembros, Mg. Sonia Esther Castro Ynfantes (Jurado Informante), Mg. Paulo César Olivares Taipe (Jurado Evaluador), Mg. José Carlos Oré Luján (Jurado Evaluador), y la Mg. Esther Berger Vidal como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO ASIMÉTRICO BAJO EL ENFOQUE DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN» presentada por el Bachiller **Gabriel José Solari Carbajal** para optar el Grado Académico de Magíster en Investigación de Operaciones y Sistemas.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller **Gabriel José Solari Carbajal** respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller **Gabriel José Solari Carbajal** aprobado con el calificativo de ..17.. DIECISIETE

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Investigación de Operaciones y Sistemas** al **Bachiller Gabriel José Solari Carbajal**.

Siendo las 15:50 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Sonia Esther Castro Ynfantes
Miembro

Dr. Luis Alberto Oré Luján
Presidente

Mg. José Carlos Oré Luján
Miembro

Mg. Paulo César Olivares Taipe
Miembro

Mg. Esther Berger Vidal
Miembro Asesor

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO ASIMÉTRICO BAJO EL ENFOQUE DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

Br. GABRIEL JOSÉ SOLARI CARBAJAL

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado Académico de Magister en Investigación de Operaciones y Sistemas.

Aprobada por:

……
Dr. Luis Alberto Oré Luján

……
MSc. Sonia Esther Castro Ynfantes

……
MSc. José Carlos Oré Luján

……
MSc. Paulo César Olivares Taipe

LIMA – PERÚ
2019

DEDICATORIA

A Lorenzo y Julia, porque siempre fueron unos padres maravillosos y me brindaron un cariño incondicional. A mis hermanos Lorenzo, Cecilia, Aldo, Rosa, Giovanna, Ángel, Julia y Giannina, mis sobrinos Giulianna, Claudia, Ariadne, Ainoha y Stéfano con quienes mantengo una armonía familiar increíble.

A mi esposa Virginia por su amor y apoyo constante, a mis hijos Giulissa, Alessandra y Gabriel, mi yerno Santiago y mi nieto Santiago, que son mi motivación constante.

AGRADECIMIENTO

A MSc. Esther Berger Vidal por su apoyo en el desarrollo de esta investigación, a MSc. María Manyari Monteza por su motivación constante, a Lic. Alicia Riojas Cañari por ser la abogada del diablo en el presente trabajo.

Mi agradecimiento, también, a las autoridades, docentes, personal administrativo y alumnos de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y mi agradecimiento póstumo al Dr. Agripino García Armas, quien me brindó su apoyo para que desarrolle esta maestría .

INDICE GENERAL

CARÁTULA ii
PÁGINA DE ACEPTACIÓN DE LA TESIS iii
ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS iv
DEDICATORIA v
AGRADECIMIENTO vi
ÍNDICE GENERAL vii
LISTA DE CUADROS xi
LISTA DE FIGURAS xvii
RESUMEN xix
ABSTRACT xx

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN 1
1.1. Situación Problemática 1
1.1.1. El Problema de Asignación (PA) 1
1.1.2. El Problema del Agente Viajero (PAV) 1
1.1.3. Planteamiento del problema 4
1.2. Formulación del problema 6
1.2.1. Problema general 6
1.2.2. Problemas específicos 6
1.3. Justificación de la investigación 7
1.3.1. Justificación teórica 7
1.3.2. Justificación práctica 7
1.4. Objetivos de la investigación 8
1.4.1. Objetivo general 8
1.4.2. Objetivos específicos 8
1.5. Formulación de las hipótesis 9
1.5.1. Hipótesis general 9
1.5.2. Hipótesis específicas 9
1.6. Definición de las variables 10

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO 12
2.1. Marco filosófico o epistemológico de la investigación 12
2.2. Antecedentes de la investigación 16
2.3. Bases teóricas 18
2.3.1. Investigación Operativa 18

2.3.2. Combinación lineal convexa, conjuntos convexos 19
2.3.3. El problema general de la Programación Matemática 20
2.3.4. Problema de Programación Lineal Entera y Binaria 22
2.3.5. Grafos, ciclos y caminos 42
2.3.6. Heurística y metaheurística 44
2.3.7. El Problema de Asignación (PA) 45
2.3.8. El Problema del Agente Viajero (PAV) 55

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA 91
3.1. Introducción 91
3.2. Revisión del Problema de Asignación 91
3.3. Eliminación de sub ciclos 95
3.3.1. Definición de la variable u_j 95
3.3.2. Características de la variable u_j 96
3.3.3. La estructura formada por $(u_j - u_i)$ 98
3.3.4. Ciudades consecutivas y no consecutivas 99
3.3.5. Relación entre x_{ij} (o x_{ji}) y $(u_j - u_i)$ 99
3.4. Estudio de casos 102
3.4.1. Formación de sub ciclos 102
3.4.2. Formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) 104
3.5. Propuestas de formulaciones para las relaciones débiles entre x_{ij} (o x_{ji}) y $(u_j - u_i)$ 110
3.5.1. Propuesta 01: Para $(u_j - u_i) \geq 1$ y la ciudad i se conecta con la ciudad j 111
3.5.2. Propuesta 02: Para $(u_j - u_i) \geq 1$ y la ciudad j se conecta con la ciudad i 116
3.5.3. Propuesta 03: Para $(u_j - u_i) \leq -1$ y la ciudad j se conecta con la ciudad i 122
3.5.4. Propuesta 04: Para $(u_j - u_i) \leq -1$ y la ciudad i se conecta con la ciudad j 128
3.6. Propuestas de formulaciones para las relaciones fuertes entre x_{ij} (o x_{ji}) y $(u_j - u_i)$ 134
3.6.1. Propuesta 05: Para $(u_j - u_i) = 1$ y la ciudad i se conecta con la ciudad j 134
3.6.2. Propuesta 06: Para $(u_j - u_i) = 1$ y la ciudad j se conecta con la ciudad i 142
3.6.3. Propuesta 07: Para $(u_j - u_i) = -1$ y la ciudad j se conecta con la ciudad i 150

3.6.4. Propuesta 08: Para $(u_j - u_i) = -1$ y la ciudad i se conecta con la ciudad j 158

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y DISCUSIÓN 167
4.1. Análisis, interpretación y discusión de resultados 167
4.1.1. Generador de Problemas del PA, PAV y PAVA..... 167
4.1.2. Relación débil entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$ 171
4.1.3. Relación fuerte entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$ 173
4.2. Análisis de resultados de las formulaciones..... 174
4.2.1. Formulación MTZ del PAV..... 174
4.2.2. Formulación de la Propuesta 01 177
4.2.3. Formulación de la Propuesta 02 179
4.2.4. Formulación de la Propuesta 03 181
4.2.5. Formulación de la Propuesta 04 183
4.2.6. Formulación de la Propuesta 05 185
4.2.7. Formulación de la Propuesta 06 187
4.2.8. Formulación de la Propuesta 07 189
4.2.9 Formulación de la Propuesta 08 191
4.3. Pruebas de hipótesis 193
4.3.1. Tipo y diseño de la investigación 193
4.3.2. Unidad de análisis 193
4.3.3. Población de estudio 194
4.3.4. Tamaño de muestra 194
4.3.5. Selección de muestra y técnicas de recolección de datos 196
4.3.6. Análisis e interpretación de la información 196
4.4. Presentación de resultados 199
4.4.1. Las relaciones entre las variables de la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA 199
4.4.2. La formulación del PA no se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV 201
4.4.3. Las relaciones entre las variables de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA 203
4.4.4. Las relaciones entre las variables de la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA como una relación débil entre las variables 204
4.4.5. Las relaciones entre las variables de la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA como una relación fuerte entre las variables 206

4.4.6. Se pueden comprobar las soluciones de las formulaciones propuestas del PAVA con soluciones óptimas obtenidas por revisión exhaustiva de diferentes problemas 208

CONCLUSIONES 209
RECOMENDACIONES 211
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS 213
ANEXOS 218
A. Cuadros de análisis de las formulaciones MTZ y de las Propuestas 218
B. Programas de las formulaciones de las Propuestas en GAMS 225
C. Resultados de los programas de las Propuestas 247
D. Programa generador de problemas y soluciones del PA y PAV 274

LISTA DE CUADROS

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.01 Matriz de costos de un PAV simétrico 3
1.02 Matriz de costos de un PAV asimétrico 3
1.03 Total de recorridos para un PAV y un PAVA de 21 a 30 ciudades 4

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.01 Ejemplo 2.02: Solución por el Método de Ramificación y Acotamiento 28
2.02 Ejemplo 2.02: Tablero óptimo por el Método Simplex 29
2.03 Ejemplo 2.02: Adición del primer corte 31
2.04 Ejemplo 2.02: Tablero óptimo del primer corte 32
2.05 Ejemplo 2.02: Adición del segundo corte 32
2.06 Ejemplo 2.02: Tablero óptimo del segundo corte 33
2.07 Ejemplo 2.03: Solución por el Método de Revisión Exhaustiva 35
2.08 Ejemplo 2.03: Solución por el Método de Ramificación y Acotamiento 36
2.09 Ejemplo 2.03: Solución por el Método Aditivo de Egon Balas 41
2.10 Matriz de costos de un PA 46
2.11 Matriz de variables de decisión de un PA 49
2.12 Soluciones del PAV por heurísticas y metaheurísticas 57
2.13 Clasificación de las formulaciones del PAV 90

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

3.01 Formulación del PA 93
3.02 Número de variables y restricciones del PA 95
3.03 Determinación de la estructura $(u_j - u_i)$ 98
3.04 Resultados de x_{ij} en la formulación MTZ 106
3.05 Formulación MTZ 107
3.06 Número de variables y restricciones de la formulación MTZ 108
3.07 Ejemplo 3.01: Matriz de costos 108
3.08 Ejemplo 3.01: Número de variables y restricciones de la formulación MTZ 110
3.09 Resultados de x_{ij} en la restricción de la Propuesta 01 112

3.10 Formulación de la Propuesta 01 113
3.11 Número de variables y restricciones de la Propuesta 01 ... 113
3.12 Ejemplo 3.02: Matriz de costos 114
3.13 Ejemplo 3.02: Número de variables y restricciones de la Propuesta 01 116
3.14 Resultados de x_{ji} en la restricción de la Propuesta 02..... 118
3.15 Formulación de la Propuesta 02 119
3.16 Número de variables y restricciones de la Propuesta 02 ... 119
3.17 Ejemplo 3.03: Matriz de costos 120
3.18 Ejemplo 3.03: Número de variables y restricciones de la Propuesta 02 122
3.19 Resultados de x_{ji} en la restricción de la Propuesta 03..... 124
3.20 Formulación de la Propuesta 03 125
3.21 Número de variables y restricciones de la Propuesta 03 ... 125
3.22 Ejemplo 3.04: Matriz de costos 126
3.23 Ejemplo 3.04: Número de variables y restricciones de la Propuesta 03 128
3.24 Resultados de x_{ij} en la restricción de la Propuesta 04..... 130
3.25 Formulación de la Propuesta 04 131
3.26 Número de variables y restricciones de la Propuesta 04 ... 131
3.27 Ejemplo 3.05: Matriz de costos 132
3.28 Ejemplo 3.05: Número de variables y restricciones de la Propuesta 04 134
3.29 Resultados de x_{ij} en la primera restricción de la Propuesta 05 136
3.30 Resultados de x_{ij} en la segunda restricción de la Propuesta 05 137
3.31 Resultados de x_{ij} en la primera y segunda restricción de la Propuesta 05..... 138
3.32 Formulación de la Propuesta 05 139
3.33 Número de variables y restricciones de la Propuesta 05 ... 140
3.34 Ejemplo 3.06: Matriz de costos 140
3.35 Ejemplo 3.06: Número de variables y restricciones de la Propuesta 05 142
3.36 Resultados de x_{ji} en la primera restricción de la Propuesta 06 144
3.37 Resultados de x_{ji} en la segunda restricción de la Propuesta 06 145
3.38 Resultados de x_{ji} en la primera y segunda restricción de la Propuesta 06..... 146
3.39 Formulación de la Propuesta 06 147

3.40. Número de variables y restricciones de la Propuesta 06 ... 148
3.41 Ejemplo 3.07: Matriz de costos ... 148
3.42 Ejemplo 3.07: Número de variables y restricciones de la Propuesta 06 ... 150
3.43 Resultados de x_{ji} en la primera restricción de la Propuesta 07 ... 152
3.44 Resultados de x_{ji} en la segunda restricción de la Propuesta 07 ... 153
3.45 Resultados de x_{ji} en la primera y segunda restricción de la Propuesta 07 ... 154
3.46 Formulación de la Propuesta 07 ... 155
3.47 Número de variables y restricciones de la Propuesta 07 ... 156
3.48 Ejemplo 3.08: Matriz de costos ... 156
3.49 Ejemplo 3.08: Número de variables y restricciones de la Propuesta 07 ... 158
3.50 Resultados de x_{ij} en la primera restricción de la Propuesta 08 ... 160
3.51 Resultados de x_{ij} en la segunda restricción de la Propuesta 08 ... 161
3.52 Resultados de x_{ij} en la primera y segunda restricción de la Propuesta 08 ... 162
3.53 Formulación de la Propuesta 08 ... 163
3.54 Número de variables y restricciones de la Propuesta 08 ... 164
3.55 Ejemplo 3.09: Matriz de costos ... 164
3.56 Ejemplo 3.09: Número de variables y restricciones de la Propuesta 08 ... 166

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.01 Ejemplo 4.01: Problema generado por el programa ... 168
4.02 Ejemplo 4.01: Problema propuesto para verificación de formulaciones ... 169
4.03 Ejemplo 4.01: Solución exhaustiva del problema generado ... 170
4.04 Ejemplo 4.01: Solución óptima del problema propuesto ... 170
4.05 Relación débil entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$ ... 172
4.06 Relación fuerte entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$ ... 174
4.07 Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación MTZ ... 175
4.08 Resumen de los resultados del programa MTZ ... 175

4.09 Solución óptima del programa MTZ 176

4.10 Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 01 177

4.11 Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 01 178

4.12 Solución óptima del programa de la Propuesta 01 178

4.13 Relación entre las variables x_{ji} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 02 179

4.14 Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 02 180

4.15 Solución óptima del programa de la Propuesta 02 180

4.16 Relación entre las variables x_{ji} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 03 181

4.17 Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 03 182

4.18 Solución óptima del programa de la Propuesta 03 182

4.19 Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 04 183

4.20 Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 04 184

4.21 Solución óptima del programa de la Propuesta 04 184

4.22 Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 05 185

4.23 Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 05 186

4.24 Solución óptima del programa de la Propuesta 05 186

4.25 Relación entre las variables x_{ji} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 06 187

4.26 Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 06 188

4.27 Solución óptima del programa de la Propuesta 06 188

4.28 Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 07 189

4.29 Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 07 190

4.30 Solución óptima del programa de la Propuesta 07 190

4.31 Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 08 191

4.32 Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 08 192

4.33 Solución óptima del programa de la Propuesta 08 192
4.34 Proporciones de las formulaciones del PAVA bajo el enfoque del PA 201
4.35 Proporción de utilizar la formulación del PA como formulación del PAV 203
4.36 Proporción de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA 204
4.37 Proporciones de las formulaciones del PAVA bajo el enfoque del PA como relación débil entre variables 206
4.38 Proporciones de las formulaciones del PAVA bajo el enfoque del PA como relación fuerte entre variables 207

ANEXOS

A.01 Análisis de Formulación MTZ 218
A.02 Análisis de la restricción de la Propuesta 01 219
A.03 Análisis de la restricción de la Propuesta 02 219
A.04 Análisis de la restricción de la Propuesta 03 220
A.05 Análisis de la restricción de la Propuesta 04 220
A.06 Análisis de las restricciones de la Propuesta 05 221
A.07 Análisis de las restricciones de la Propuesta 06 222
A.08 Análisis de las restricciones de la Propuesta 07 223
A.09 Análisis de las restricciones de la Propuesta 08 224
B.01 Programa de la formulación MTZ 225
B.02 Programa de la formulación de la Propuesta 01 227
B.03 Programa de la formulación de la Propuesta 02 229
B.04 Programa de la formulación de la Propuesta 03 231
B.05 Programa de la formulación de la Propuesta 04 233
B.06 Programa de la formulación de la Propuesta 05 235
B.07 Programa de la formulación de la Propuesta 06 238
B.08 Programa de la formulación de la Propuesta 07 241
B.09 Programa de la formulación de la Propuesta 08 244
C.01 Resultados del programa MTZ 247
C.02 Resultados del programa de la Propuesta 01 250
C.03 Resultados del programa de la Propuesta 02 253
C.04 Resultados del programa de la Propuesta 03 256
C.05 Resultados del programa de la Propuesta 04 259
C.06 Resultados del programa de la Propuesta 05 262
C.07 Resultados del programa de la Propuesta 06 265
C.08 Resultados del programa de la Propuesta 07 268
C.09 Resultados del programa de la Propuesta 08 271
D.01 Pantalla inicial del programa 274
D.02 Definición de la dimensión de la matriz de adyacencia 275

D.03 Generación de valores aleatorios para el llenado de la matriz de adyacencia 275
D.04 Pantalla inicial de la solución exhaustiva 276
D.05 Generación de la dimensión de la solución exhaustiva 277
D.06 Generación de la solución exhaustiva 277
D.07 Solución exhaustiva 278
D.08 Proceso de ordenamiento de la solución exhaustiva 279
D.09 Solución exhaustiva ordenada de menor a mayor 280

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.01. Problema del Agente Viajero Asimétrico de dimensión n .. 2
1.02. Sub ciclos y ciclo hamiltoniano 5

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.01. Espacio de soluciones factibles del EC 24
2.02. Espacio de soluciones factibles del PPLE 25
2.03. Grafo bipartito del PA..... 47
2.04. Grafo del PA 47

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

3.01. Conectar la ciudad i con las ciudades j y k 93
3.02. Conectar las ciudades i y k con la ciudad j 93
3.03. Formación de sub ciclos..... 94
3.04. Sub ciclo en un PAVA de dimensión n 94
3.05. Posición de la ciudad j en la secuencia 95
3.06. Ciclo hamiltoniano 97
3.07. Relaciones entre x_{ij} (o x_{ji}) y $(u_j - u_i)$ 100
3.08. Formación de sub ciclos..... 103
3.09. Proyección de la secuencia en la Propuesta 01..... 111
3.10. Proyección de la secuencia en la Propuesta 02..... 116
3.11. Proyección de la secuencia en la Propuesta 03..... 122
3.12. Proyección de la secuencia en la Propuesta 04..... 128
3.13. Proyección de la secuencia en la Propuesta 05..... 135
3.14. Proyección de la secuencia en la Propuesta 06..... 143
3.15. Proyección de la secuencia en la Propuesta 07..... 151
3.16. Proyección de la secuencia en la Propuesta 08..... 159

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.01. Ejemplo 4.01: Ubicación de las ciudades en la solución óptima por revisión exhaustiva 171
4.02. Conexión de la ciudad i con la ciudad j, para $(u_j - u_i) \geq 1$ 172
4.03. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa MTZ 176

4.04. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 01 179
4.05. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 02 181
4.06. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 03 183
4.07. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 04 185
4.08. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 05 187
4.09. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 06 189
4.10. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 07 191
4.11. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 08 193

RESUMEN

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO ASIMÉTRICO BAJO EL ENFOQUE DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

Br. GABRIEL JOSÉ SOLARI CARBAJAL

2019

Orientador: MSc. Esther Berger Vidal
Grado obtenido: Magister en Investigación de Operaciones y Sistemas

……

En la primera parte de este trabajo de investigación se estudian el Problema de Asignación y el Problema del Agente Viajero. Se revisan los modelamientos matemáticos de ambos problemas y se busca una relación entre ellos.

Posteriormente se desarrollan nuevas metodologías de formulación del Problema del Agente Viajero Asimétrico. Se utiliza un software para comprobar las soluciones de los modelamientos propuestos y se comprueban con la solución exhaustiva. Se generan diferentes problemas como comprobación de los modelamientos matemáticos propuestos.

PALABRAS CLAVES:

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN
PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO
OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA
PROGRAMACIÓN LINEAL
PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA MIXTA

ABSTRACT

SOLUTION OF THE ASYMMETRIC TRAVELING SALESMAN PROBLEM UNDER THE APPROACH OF THE ASSIGNMENT PROBLEM

BSc. GABRIEL JOSÉ SOLARI CARBAJAL

2019

Counselor: MSc. Esther Berger Vidal
Degree: Master in Operations Research and Systems

……

In the first part of this research the Assignment Problem and Traveling Salesman Problem is studied are studied. Mathematical modeling of both problems is reviewed and a relationship between them is sought.

Subsequently, new methodologies for the formulation of the Traveling Salesman Problem are developed. Commercial software is used to check the solutions of the proposed models and they are checked with the exhaustive solution. Different problems are generated as verification of the proposed mathematical models.

KEYS WORDS:

ASSIGNMENT PROBLEM
TRAVELING SALESMAN PROBLEM
COMBINATORIAL OPTMIZATION
LINEAR PROGRAMMING
MIXED INTEGER PROGRAMMING

“Si no hubiera problemas, ya estaríamos en uno”
G. Solari C.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1. Situación Problemática

1.1.1. El Problema de Asignación (PA)

El PA es uno de los primeros problemas de optimización combinatoria que se estudió.

El PA se define como sigue: “Consiste en asignar n equipos a n tareas, donde cada equipo es asignado a una sola tarea y cada tarea es asignada a un sólo equipo y el costo de asignación es el menor posible”.

El método de solución de mayor difusión del PA fue desarrollado por Harold W. Kuhn basado en los aportes de los matemáticos húngaros Dénes König y Janö Egerváry, Kuhn denominó al algoritmo el Método Húngaro, tomado de Schrijver (2005).

1.1.2. El Problema del Agente Viajero (PAV)

El PAV es uno de los problemas de optimización combinatoria que se ha estudiado con mayor intensidad. Todavía no se conoce un método de solución exacto del caso general para un “número elevado” de ciudades en un tiempo razonable. Por esta razón es considerado representativo de problemas cuya solución pertenece al dominio de extrema complejidad.

Para una dimensión n, el PAV se define como sigue: “Un agente viajero visita $(n-1)$ ciudades, partiendo de una ciudad preestablecida, debiendo

retornar a la ciudad de origen, visitando las restantes ciudades una sola vez, determinando el ciclo de menor costo".

El PAV, según los costos de viaje entre las ciudades, puede ser considerado como simétrico o asimétrico. El PAV es simétrico cuando el costo de ir de la ciudad i a la ciudad j es igual al costo de ir de la ciudad j a la ciudad i y es asimétrico cuando estos costos son diferentes. Se denominará, en adelante, al Problema del Agente Viajero Asimétrico como PAVA (ver Figura 1.01).

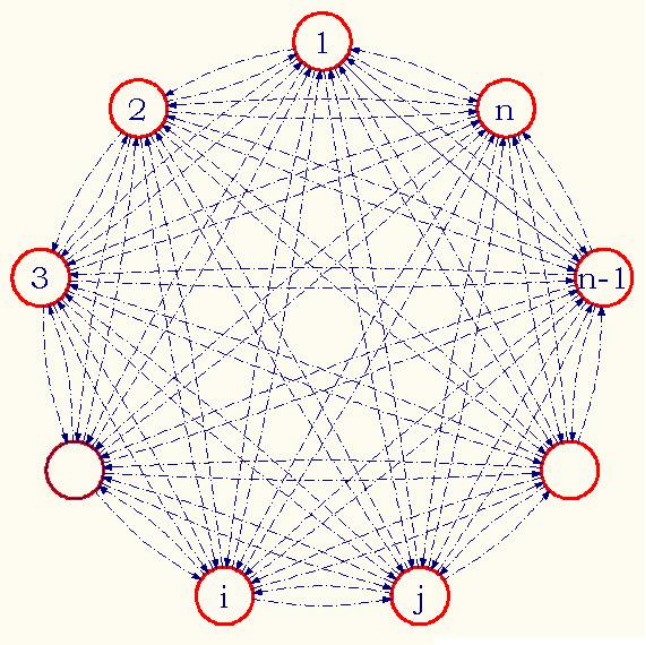


***Figura 1.01*. Problema del Agente Viajero Asimétrico de dimensión n**
Fuente propia.

Una matriz de costos del PAV simétrico, donde $c_{ij} = c_{ji} \quad \forall i \neq j$, para n ciudades, se muestra en el Cuadro 1.01:

Cuadro 1.01

Matriz de costos de un PAV simétrico

	1	2	3	⋯	n-1	n
1	c_{11}	c_{21}	c_{31}	⋯	$c_{(n-1)1}$	c_{n1}
2	c_{21}	c_{22}	c_{32}	⋯	$c_{(n-1)2}$	c_{n2}
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	⋯	$c_{(n-1)3}$	c_{n3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
n-1	$c_{(n-1)1}$	$c_{(n-1)2}$	$c_{(n-1)3}$	⋯	$c_{(n-1)(n-1)}$	$c_{n(n-1)}$
n	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	⋯	$c_{n(n-1)}$	c_{nn}

Fuente propia.

Una matriz de costos del PAV asimétrico, donde $c_{ij} \neq c_{ji} \quad \forall i \neq j$, para n ciudades, se muestra en el Cuadro 1.02:

Cuadro 1.02

Matriz de costos de un PAV asimétrico

	1	2	3	⋯	n-1	n
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	⋯	$c_{1(n-1)}$	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	⋯	$c_{2(n-1)}$	c_{2n}
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	⋯	$c_{3(n-1)}$	c_{3n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
n-1	$c_{(n-1)1}$	$c_{(n-1)2}$	$c_{(n-1)3}$	⋯	$c_{(n-1)(n-1)}$	$c_{(n-1)n}$
n	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	⋯	$c_{n(n-1)}$	c_{nn}

Fuente propia.

La extrema complejidad del PAV y del PAVA no ha permitido desarrollar métodos exactos que proporcionen soluciones óptimas del problema. Para un PAV simétrico de n ciudades, $(n \geq 3)$, se tienen $(n-1)!/2$ rutas posibles, para el PAV asimétrico de igual dimensión, $(n \geq 2)$, se tienen $(n-1)!$ rutas posibles. La solución por revisión exhaustiva es computacionalmente costosa, ver el Cuadro 1.03, donde se observa que al incrementar ciudades al problema, se incrementa el número de soluciones de forma factorial.

Cuadro 1.03
Total de recorridos para un PAV y un PAVA de 21 a 30 ciudades

RECORRIDOS POSIBLES		
CIUDADES	**PAV SIMÉTRICO**	**PAV ASIMÉTRICO**
21	1 216 451 004 088 320 000	2 432 902 008 176 640 000
22	25 545 471 085 854 700 000	51 090 942 171 709 400 000
23	562 000 363 888 804 000 000	1 124 000 727 777 610 000 000
24	12 926 008 369 442 500 000 000	25 852 016 738 885 000 000 000
25	310 224 200 866 620 000 000 000	620 448 401 733 239 000 000 000
26	7 755 605 021 665 490 000 000 000	15 511 210 043 331 000 000 000 000
27	201 645 730 563 303 000 000 000 000	403 291 461 126 606 000 000 000 000
28	5 444 434 725 209 180 000 000 000 000	10 888 869 450 418 400 000 000 000 000
29	152 444 172 305 857 000 000 000 000 000	304 888 344 611 714 000 000 000 000 000
30	4 420 880 996 869 850 000 000 000 000 000	8 841 761 993 739 700 000 000 000 000 000

Fuente propia.

Los procedimientos de solución alternativos, pertenecen al campo de los métodos heurísticos y metaheurísticos, estas técnicas buscan buenas soluciones en un tiempo razonable, pero no garantizan la solución óptima, tomado de Martí (2003).

1.1.3. Planteamiento del problema

En la presente investigación se estudia la relación entre el PA y el PAV dado que las matrices de costos de ambos problemas, para n tareas,

equipos y ciudades, son de dimensión $n \times n$ y la solución es un vector binario de dimensión n, donde exactamente n variables toman el valor uno.

Según Schrijver (2005), Julia Robinson en 1949, en un "intento sin éxito" para solucionar el PAV, lo consideró como una relajación del PA, para lo cual ella encontró un método de reducción de ciclo. La relación es que la solución del PA requiere de una permutación óptima, y la solución del PAV requiere una permutación cíclica óptima, conocida como un ciclo hamiltoniano, (ver Figura 1.02).

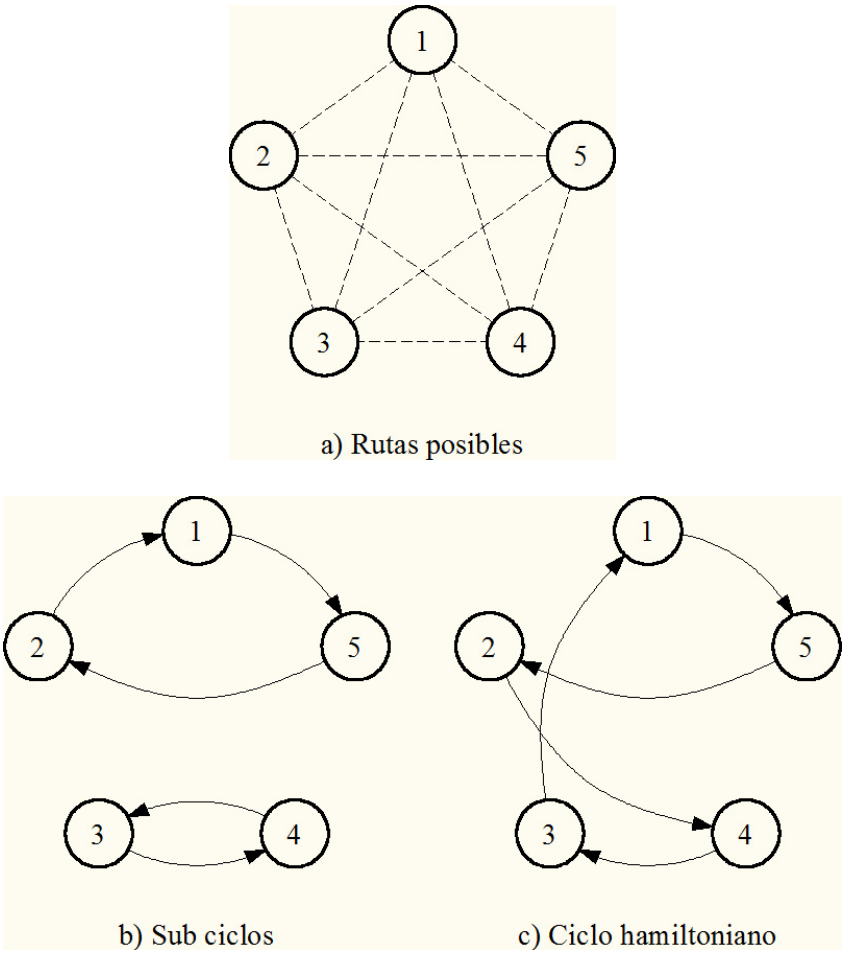


***Figura 1.02*. Sub ciclos y ciclo hamiltoniano**
Fuente propia.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Se pueden determinar las relaciones entre las variables, que permitan la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA?

1.2.2. Problemas específicos

a. ¿Es posible probar que la formulación del PA no se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV?

b. ¿Se pueden determinar las relaciones entre las variables de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA?

c. ¿Se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación débil entre las variables?

d. ¿Se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación fuerte entre las variables?

e. ¿Se pueden comprobar las soluciones de las formulaciones propuestas del PAVA con soluciones óptimas obtenidas por revisión exhaustiva de diferentes problemas?

1.3. Justificación de la investigación

1.3.1. Justificación teórica

En Burkard, Dell'Amico y Martello (2009) se describe que Harold W. Kuhn, en 1955, presentó el Método Húngaro para resolver el PA y que esta solución se considera en la clase de algoritmos de tiempo Polinómico (P).

Según Puget (2013), los algoritmos de solución del PAVA y en general del PAV se consideran que pertenecen al dominio de problemas cuya solución es de extrema complejidad, o a la clase de algoritmos de tiempo No Polinómico (NP) de la categoría difícil (NP-Hard).

En Clay Mathematics Institute (2012) se menciona que la relación entre los algoritmos P y NP fue estudiada por Stephen Cook y Leonid Levin, de forma independiente; en 1971, formulando el problema: P versus NP. En el año 2000 el Clay Mathematics Institute incluyó este problema cómo uno de los siete problemas del milenio, cuya solución aún está pendiente.

En esta investigación se estudia la relación entre las formulaciones matemáticas del PA y del PAV, lo que nos lleva al estudio de como la solución de un problema en la clase de algoritmos de tiempo Polinómico (P) se transforma para resolver un siguiente problema de la clase de algoritmos de tiempo No Polinómico (NP).

1.3.2. Justificación práctica

Dado que el incremento del número de soluciones que se genera al aumentar el número de ciudades del PAV, es factorial, no es práctico plantear una solución óptima por revisión exhaustiva conforme se indica en el Cuadro 1.03. En un PAVA de n ciudades se tienen $(n-1)!$ ciclos

hamiltonianos y para $(n+1)$ ciudades se tienen $n!$ ciclos hamiltonianos, por lo que incrementar una ciudad equivale a incrementar $(n-1)[(n-1)!]$ ciclos hamiltonianos.

Por esta razón se busca algoritmos de solución del PAV para un número elevado de ciudades en un tiempo razonable, pero no está garantizada la solución óptima. Estos algoritmos pertenecen al campo de las heurísticas y metaheurísticas.

Dado que estas técnicas no garantizan la solución óptima; en problemas donde no se conoce la solución óptima del problema no es posible estudiar la calidad de la técnica. En cambio la formulación matemática del PAV proporciona soluciones óptimas que nos ayudan a estudiar la calidad de las heurísticas y metaheurísticas, al nivel que permita la tecnología.

1.4. Objetivos de la investigación

1.4.1. Objetivo general

El objetivo general de la presente investigación es determinar las relaciones entre las variables, que permitan la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA.

1.4.2. Objetivos específicos

Se determinaron los siguientes objetivos específicos:

a. Probar que la formulación del PA no se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV.

b. Determinar las relaciones entre las variables de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA.

c. Formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación débil entre las variables.

d. Formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación fuerte entre las variables.

e. Comprobar las soluciones de las formulaciones propuestas del PAVA con soluciones óptimas obtenidas por revisión exhaustiva de diferentes problemas.

1.5. Formulación de las hipótesis

1.5.1. Hipótesis general

Se formula la hipótesis nula general como:

H_0 : Si es posible determinar las relaciones entre las variables, que permitan la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA.

1.5.2. Hipótesis específicas

Se desarrollaron las siguientes hipótesis específicas:

a. Se formula la hipótesis nula específica (a) como:

H_0 : Si es posible probar que la formulación del PA no se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV.

b. Se formula la hipótesis nula específica (b) como:

H_0 : Si se pueden determinar las relaciones entre las variables de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA.

c. Se formula la hipótesis nula específica (c) como:

H_0 : Si se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación débil entre las variables.

d. Se formula la hipótesis nula específica (d) como:

H_0 : Si se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación fuerte entre las variables.

e. Se formula la hipótesis nula específica (e) como:

H_0 : Si se pueden comprobar las soluciones de las formulaciones propuestas del PAVA con soluciones óptimas obtenidas por revisión exhaustiva de diferentes problemas.

1.6. Definición de las variables

Las variables utilizadas en la investigación son:

Variable 1

x_{ij} Es una variable binaria que representa:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad i está conectada con la ciudad j} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Variable 2

u_j Es una variable entera que se define como la posición que ocupa la ciudad j en la secuencia.

Relación entre las variables

Las relaciones entre las variables que se estudiarán serán de la forma:

$$G(x_{ij}) + H(u_i, u_j) = K$$

donde:

$G(.)$ y $H(.)$ son funciones lineales.

K es una constante.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1. Marco filosófico o epistemológico de la investigación

Relación entre la Matemática y la Ciencia:

La matemática se inicia como la necesidad de interpretar el mundo que habitábamos, en Martín, Peña y Rodríguez (2004) se afirma: “El estudio de las matemáticas surge de la necesidad de resolver problemas de números y medida y del deseo de comprender el universo que habita, los métodos empleados primero fueron intuitivos y empíricos” (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.1).

“La Matemática es ciencia porque tiene: su objeto, sus leyes y categorías, sus métodos, carácter universal y dialéctico” (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.1).

1. Objeto de la Matemática

“El objeto de la Matemática ha sido estudiado por varios autores, destacaremos lo señalado por Engels en el Anti–during: “las matemáticas puras versan sobre las formas del espacio y las relaciones cuantitativas del mundo real y por tanto sobre una materia muy real”. La generalidad de su contenido así como sus aplicaciones ha sido la causa de que en los últimos años se vuelva la atención hacia la determinación del objeto de la Matemática” (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.2).

“Un análisis incompleto sobre el objeto genera graves errores; la explicación está en que los conceptos primarios de la matemática surgieron

del mundo real, así que la posible ampliación es completamente natural" (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.3).

"La definición del objeto de la matemática dada por Engels conserva su actualidad, ya que el círculo de las relaciones cuantitativas y las formas espaciales estudiadas por la matemática se amplía considerablemente" (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.3).

2. Leyes y categorías de la Matemática

"La Matemática se desarrolla por las mismas leyes dialécticas que rigen el resto del conocimiento humano y por tanto en ella están presentes las contradicciones generales de ese conocimiento; su gran contradicción radica en que su objeto siendo tan abstracto e idealizado, tiende a ser separado cada vez más de su contenido objetivo, lo cual no puede realizarse sin la consideración de este mismo contenido. La Matemática estudia un sistema cualitativamente determinado de leyes, crea sus propios conceptos para reflejar los objetos y fenómenos que estudia, se suscribe al campo de investigación" (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.3).

"La Matemática en su conjunto se da en el ordenamiento por el principio de jerarquía de estructuras, de las más simples a las más complejas, de las más generales a las particulares (o viceversa). Se diferencia del resto de las ciencias por el carácter universal y dialéctico de sus métodos, estudia las propiedades del mundo objetivo, pero realiza este estudio con sus métodos específicos, los cuales están condicionados por el mismo objeto de la Matemática" (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.4).

3. Métodos de la Matemática

"El método es la manera de alcanzar un objetivo (responde al cómo) y desde el punto de vista filosófico es el modo de reproducir en el pensar el objeto que se estudia" (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.4).

“La Matemática tiene su origen en los fenómenos de la realidad objetiva y mediante abstracciones, idealizaciones, generalizaciones u otros procedimientos específicos, conduce a conceptos, proposiciones, estructuras, sistemas de ideas que a menudo están muy lejos de su origen en la realidad; suministra un sistema de pensamiento y simbología que permite representar de forma ventajosa proposiciones de otras ciencias; tiene que abstraerse totalmente del contenido para investigar las propiedades de los objetos y descubrir las relaciones entre ellos, en la práctica los métodos generalmente no se presentan en forma pura” (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.4).

“El proceso de abstracción está constituido por una serie de operaciones del pensamiento como diferenciación, comparación, se prescinde de aquellas otras propiedades del objeto menos su propiedad general, se generalizan aquellas formas semejantes en los diferentes objetos y se forma el concepto” (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.5).

“Sobre los métodos inductivos y deductivos hay que considerar que están indisolublemente ligados, que aunque muchos plantean que la Matemática es una ciencia deductiva hay que tener muy presente los razonamientos inductivos, el carácter heurístico sobre todo en la enseñanza y aprovechar las ventajas del método problemático” (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.5).

“La inducción y deducción no agotan todos los posibles métodos generales de investigación entre ellos ocupa un lugar especial la analogía, la cual está muy ligada a la abstracción de la identificación” (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.5).

4. Carácter universal y dialéctico de la Matemática

“La Matemática contribuye a fomentar la idea que:

- El mundo es cognoscible.
- Al igual que en otras ciencias, la práctica es el criterio de la verdad.
- El desarrollo de la Matemática está estrechamente ligado al desarrollo de la sociedad y se produce dialécticamente"

(Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.7).

"La vía del pensamiento matemático se eleva de lo concreto a lo abstracto y de éste nuevamente a lo concreto, está por tanto en correspondencia con la vía dialéctica del conocimiento planteado por Lenin" (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.7).

"La validez de las teorías matemáticas se confirma mediante la posibilidad de aplicarlas en procedimientos técnicos, económicos, sociales u otras ramas del saber" (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.7).

Factores que determinan este proceso en la actualidad

Los principales factores que describen Martín, Peña y Rodríguez (2004) son:

- "Creciente exigencia de la producción material.
- Factor social (el papel del hombre puede ser elevado radicalmente ya que la automatización lo libera de realizar un trabajo mecánico y uniforme)"

(Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.8-9).

"Por una parte la Matemática, como ciencia, ha comenzado a combinar los métodos deductivos con los métodos experimentales, dignos de las ciencias naturales, ya que las potencialidades computacionales le permiten investigar y hacer pronósticos imposibles en tiempos anteriores. El uso de métodos numéricos y de modelos discretos desplaza cada vez más al uso de métodos exactos y de modelos continuos en la llamada Matemática Aplicada" (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.8-9).

“La Matemática es una ciencia cada vez más abstracta pero continúa estudiando las relaciones objetivas del mundo real, para ello se vale de diferentes métodos los cuales deben conjugarse de una manera armónica, el hecho que los métodos matemáticos (axiomático, modelación, probabilístico, etc.) hoy son considerados métodos científicos generales, la Matemática es y seguirá siendo una ciencia particular” (Martín, Peña y Rodríguez, 2004, p.8-9).

Parte importante de las Matemáticas Aplicadas la constituye la Programación Matemática. La formulación matemática es convertir una realidad en un modelo matemático bajo la estructura de la Programación Matemática y utilizar las técnicas de solución que se conocen.

En la presente investigación el aporte sobre el conocimiento está dado por la ampliación de las formulaciones matemáticas del PAVA bajo la forma de la Programación Matemática utilizando la deducción y se procederá a la experimentación con técnicas conocidas donde se verificará este conocimiento.

2.2. Antecedentes de la investigación

En Öncan, Altinel y Laporte (2009), se revisan 24 formulaciones existentes del PAVA, clasificándolas en 7 categorías. Se estudian las relaciones existentes entre ellas y se presenta nuevas relaciones. Esta revisión comparativa y análisis ilustra claramente la riqueza de los modelos disponibles para el PAVA, también se concluye que existe un vacío de relaciones entre las formulaciones, lo que deja pendiente futuras investigaciones.

En Roberti y Toth (2012), se estudian los modelos matemáticos más efectivos y los algoritmos exactos propuestos para encontrar la solución óptima del PAVA. Se presenta por primera vez el modelo fundamental de

Programación Lineal Entera, propuesto por Dantzig, Fulkerson y Johnson, se derivan sus relajaciones clásicas (asignación, r-arborescencia de extensión más corta, programación lineal), y se describen los algoritmos más efectivos de ramificación-y-acotamiento y ramificación-y-corte. Se presentan y analizan las formulaciones polinómicas propuestas para el PAVA. Los algoritmos y formulaciones considerados finalmente se comparan experimentalmente en un conjunto de instancias de referencia.

En Padberg y Sung (1991), se propone una técnica de transformación que permite derivar la descripción lineal de la imagen X de un poliedro Z bajo una transformación lineal afín de la descripción lineal (dada) de Z. Este resultado se utiliza para comparar analíticamente varias formulaciones del PAVA con la formulación estándar debido a Dantzig, Fulkerson y Johnson, que se muestran como "formulaciones más débiles" en un entorno preciso. También aplicamos esta técnica de transformación para simetrizar formulaciones y mostrar, en particular, que la simetría de la formulación asimétrica estándar resulta en la estándar para la versión simétrica del PAV.

En Castañeda (2000), se realizó un estudio comparativo del PAV con distintos métodos de solución. Se implementaron tres métodos exactos: Búsqueda Exhaustiva Ingenua, Ramificación y Acotamiento Ingenuo y Una Mejor Ramificación y Acotamiento y los métodos aproximados: Dos Optimal, Adaptación Prim, Híbrido Dos Optimal-Prim y Red Neuronal de Hopfield.

En Rodríguez (2003), se resuelve el PAV para 10 ciudades con un algoritmo de manipulación genética que buscó mejorar el Algoritmo Genético tanto en rapidez como en eficacia.

En Castro (1999), se resuelve el PAV utilizando un Algoritmo Genético con edades. Se eliminó el proceso de selección, utilizándose la estrategia de asignación de edades lineal.

En Román (2011), se resuelve un problema de optimización combinatoria usando Algoritmos Genéticos Paralelos en un procesador multi-hilos. Como problema de prueba se resuelve el PAV.

En Wolff (2011), se desarrollan y comparan modelos “que permitan la programación de intervenciones quirúrgicas electivas en pabellones durante intervalos de tiempo específicos” Wolff (2011), con la finalidad de optimizar “el uso del recurso pabellón, reducción de los tiempos de espera de los pacientes y hacer un uso eficiente de los recursos humanos necesarios” Wolff (2011).

En Alarcón (2009), se “presenta un estudio del problema de asignación de árbitros a partidos de un campeonato de fútbol” Alarcón (2009). El problema se abordó mediante “un modelo programación lineal entera” Alarcón (2009), que “incorpora metas de partidos por dirigir y distancias por recorrer, además de novedosas restricciones que buscan hacer la asignación lo más justa y equitativa posible para todos los actores involucrados” Alarcón (2009).

2.3. Bases teóricas

2.3.1. Investigación Operativa

En Gaglani (2011) se define: Investigación Operativa, Investigación de Operaciones o simplemente IO es el uso de modelos matemáticos, estadísticos y algoritmos para ayudar en la toma de decisiones. Se utiliza con mayor frecuencia para analizar sistemas complejos del mundo real, generalmente con el objetivo de mejorar u optimizar el rendimiento. La IO es una rama interdisciplinaria de la matemática aplicada y ciencia formal que utiliza métodos tales como modelos matemáticos, estadísticos y algoritmos para llegar a soluciones óptimas o casi óptimas para problemas complejos. Normalmente se trata de optimizar los máximos (por ejemplo, ganancias, rendimiento de la línea de montaje, rendimiento de los cultivos, ancho de

banda, etc.) o mínimos (por ejemplo, pérdida, riesgo, etc.) de alguna función objetivo. La IO ayuda a la administración a alcanzar sus objetivos utilizando métodos científicos.

2.3.2. Combinación lineal convexa; conjuntos convexos

Sea X_1, X_2 puntos en $S \subseteq R^n$.

Definición. El conjunto $L = \{ X \mid X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2 \}$, para $\lambda \in R$, se define como una recta en R^n que pasa por X_1 y X_2.

Si $\lambda \geq 0$, al conjunto $L^+ = \{ X \mid X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2 \}$ se le denomina semirrecta que se origina en el punto X_1 (Mital, 1984).

a. Combinación lineal convexa

Al limitar λ a $0 \leq \lambda \leq 1$, se obtiene el conjunto de puntos que pertenecen al segmento de recta entre X_1 y X_2.

Definición. Se define el punto $X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$, para $0 \leq \lambda \leq 1$, como la combinación lineal convexa de X_1 y X_2.

Se trata de cualquier punto que se encuentra en el segmento de recta que une X_1 con X_2 (Mital, 1984).

b. Conjunto convexo

Definición. Se dice que un conjunto $K \subseteq R^n$ es convexo si la combinación lineal convexa de dos puntos cualesquiera en K, pertenece a

K. En otras palabras, el conjunto K es convexo si $X_1, X_2 \in K \Rightarrow X \in K$, donde $X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$, para $0 \leq \lambda \leq 1$ (Mital, 1984).

c. Combinación lineal convexa

Definición. X se denomina combinación lineal convexa de los puntos X_i, $1 \leq i \leq m$, $X_i \in R^n$ y λ_i son números reales no negativos, tales que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, sí:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m$$

Algunos teoremas importantes sobre este tema:

Teorema. Para que un conjunto K sea convexo, es necesario y suficiente que cada combinación lineal convexa de puntos en K pertenezca a K.

Teorema. La intersección de dos puntos convexos es un conjunto convexo.

La demostración de ambos teoremas se encuentra en Mital (1984).

2.3.3. El problema general de la Programación Matemática

En Mital (1984) se describe: La Programación Matemática, mediante un proceso llamado formulación, construye el modelo matemático y busca la solución. En el modelo matemático se tienen variables $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ de valor real en R^n, que son controlables y parámetros sobre los cuales no hay control y que se consideran como

constantes. Las limitaciones sobre X, son funciones $g_i(X),\ 1 \le i \le m$, llamadas restricciones y son de la forma:

$$g_i(X) \le 0 \qquad 1 \le i \le p \qquad 2.01$$
$$g_i(X) \ge 0 \qquad p+1 \le i \le r \qquad 2.02$$
$$g_i(X) = 0 \qquad r+1 \le i \le m \qquad 2.03$$

Las condiciones:

$$X \ge 0 \qquad 2.04$$

Las ecuaciones 2.04, son referidas como restricciones de no negatividad, y aparecen ya sea porque los valores negativos de las variables carecen de sentido o bien porque es necesario replantear el modelo matemático por algún mecanismo de solución. El conjunto S, ($S \subseteq R^n$), formado por el conjunto de ecuaciones 2.01, 2.02, 2.03 y 2.04, contiene todos los puntos de X que satisfacen todas las restricciones y se conoce como región factible (Mital, 1984).

Para determinar el comportamiento más ventajoso de un sistema se utiliza una función $f(X)$ de valor real llamada función objetivo (Mital, 1984).

El valor X^*, de la variable X, que hace que la función $f(X^*)$ sea óptima, se denomina el valor óptimo de X o solución óptima. Por lo general, el valor óptimo de $f(X)$ es el máximo o mínimo de $f(X)$ bajo el conjunto de restricciones de las ecuaciones 2.01, 2.02, 2.03 y 2.04.

Si S es un conjunto convexo y $f(X)$ y $g_i(X)$ son funciones convexas, el problema pertenece a la Programación Convexa. Si $f(X)$ y $g_i(X)$ son funciones lineales, el problema pertenece a la Programación Lineal, además, si las variables X son enteras el problema pertenece a la Programación Lineal Entera, o Programación Lineal Binaria si $X \in \{0, 1\}$.

2.3.4. Problema de Programación Lineal Entera y Binaria

Problema de Programación Lineal Entera (PPLE). Para resolver problemas utilizando Programación Lineal es posible la presencia de variables de decisión cuyo único comportamiento válido es que sean enteras, determinar el número de alumnos, operarios o vehículos, calcular el uso de aulas, máquina o talleres son sólo unos ejemplos de esta necesidad.

Los PPLE requieren de sus propias técnicas de resolución.

En 1958, R. Gomory, desarrolla el primer algoritmo de solución de un PPLE, conocido como "Método de los Planos de Corte de Gomory". "En 1960, A. Lang y A. Doig, a partir del método de Gomory desarrollaron el método de Branch and Bound, también conocido como método de Ramificación y Acotamiento" (Docio, 2015, p. 5). Se consideró esta técnica como la más efectiva, pero los planos de corte tuvieron un resurgimiento en forma de facetas y caracterizaciones poliédricas.

"A pesar de los avances en el campo de la PPLE y la solución, mediante los algoritmos descritos, esté teóricamente garantizada, otros factores como el número de variables y de restricciones restan eficacia a los procedimientos de obtención del óptimo" (Docio, 2015, p. 5). "En estos casos otros tipos de métodos, como los algoritmos heurísticos, proporcionan una buena aproximación a la solución del PPLE" (Docio, 2015, p. 5).

Definición. Un PPLE presenta el siguiente formato:

$$\text{Optimizar } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Sujeto a:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n (\leq, =, \geq) b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n (\leq, =, \geq) b_2$$
$$\vdots$$

$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n \,(\leq, =, \geq)\, b_m$$
$$x_j \text{ entero} \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Definición. El Equivalente Continuo (EC) de un PPLE se define como:

$$\text{Optimizar } Z = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_n\, x_n$$

Sujeto a:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \,(\leq, =, \geq)\, b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \,(\leq, =, \geq)\, b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n \,(\leq, =, \geq)\, b_m$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

“El EC es el relajamiento del PPLE. Un PPLE y su EC tienen la misma estructura, sólo los diferencia el hecho de que en el segundo, las variables no están sujetas a valores enteros” (Solari, 2013, p. 6).

Ejemplo 2.01

Dado el siguiente conjunto de restricciones:

$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$2\, x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \text{ enteros} \geq 0$$

El espacio de soluciones factible del EC, se muestra en la Figura 2.01:

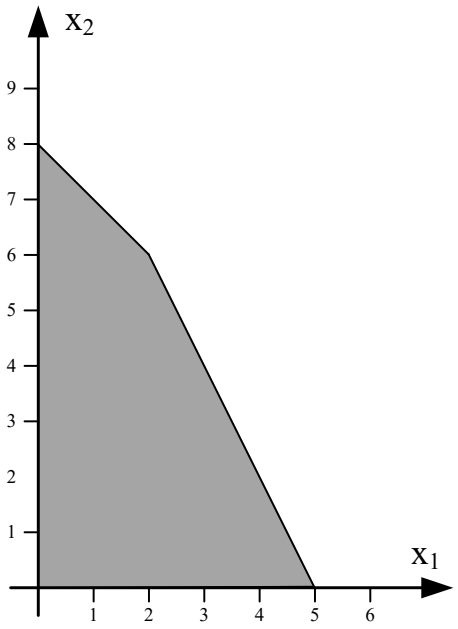


***Figura 2.01*. Espacio de soluciones factibles del EC**
Fuente Solari (2013).

El espacio de soluciones factibles del PPLE se muestra en la Figura 2.02:

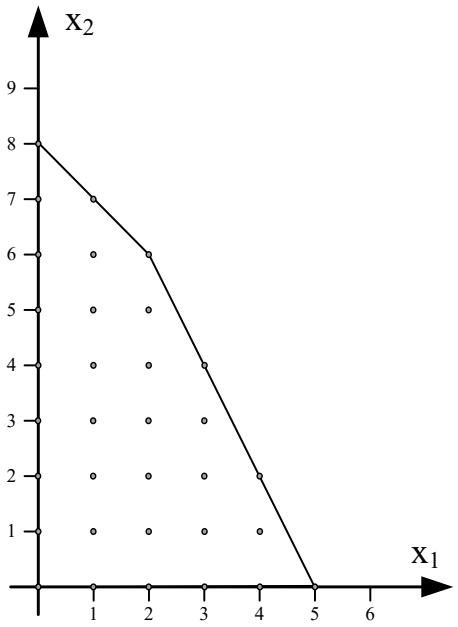


***Figura 2.02*. Espacio de soluciones factibles del PPLE**
Fuente Solari (2013).

a. Observaciones

1. En Solari (2013) se afirma: “El espacio de soluciones factibles de un PPLE está formado por puntos aislados (…). El espacio de soluciones factibles de un PPLE no es un conjunto convexo (…), por lo que no se puede hablar de puntos extremos” (p. 12).
2. Si el problema es de minimización, el valor óptimo del PPLE es mayor o igual que el valor óptimo del EC, ($Z^*_{PPLE} \geq Z^*_{EC}$). Si el problema es de maximización, el valor óptimo del PPLE es menor o igual que el valor óptimo del EC, ($Z^*_{PPLE} \leq Z^*_{EC}$).
3. Si la solución óptima del EC es no factible, entonces también lo es el PPLE.

b. Dificultades que se pueden presentar si se redondea una solución de un PPLE

1. La solución redondeada es no factible.
2. "La solución redondeada es factible, pero no es óptima" (Solari, 2013, p. 19).

c. Métodos de solución del PPLE

1. Método de Ramificación y Acotamiento
2. Métodos de los Planos de Corte

1. Método de Ramificación y Acotamiento

Este método consiste en insertar diferentes restricciones de acotamiento en el EC (proceso de Acotamiento) y resolviendo los problemas se obtienen soluciones óptimas, no necesariamente enteras, con las cuales se construye un árbol de decisiones (proceso de Ramificación), y se continúa siguiendo la dirección de las ramas que tengan el mejor valor óptimo hasta obtener la mejor solución con valor óptimo entero.

Procedimiento. Resolver el EC del PPLE, esto puede dar lugar a las siguientes posibilidades.

a1. Si la solución óptima obtenida es entera, entonces fin del proceso y ésta será la solución del PPLE.

a2. En caso contrario tomamos una de las variables cuyo valor no es entero y generamos dos restricciones. Sea $x_i = r$, donde $r \notin Z$, se generan:

$$x_i \leq \|r\| \quad \text{y} \quad x_i \geq \|r\| + 1$$

donde $\|r\|$ es el máximo entero de r.

a3. Resolver el EC insertando la restricción $x_i \leq \|r\|$ y ubicamos el resultado en una de las ramas del árbol.

Luego resolvemos el EC considerando la restricción $x_i \geq \|r\| + 1$ y ubicamos el resultado en la otra rama del árbol.

a4. Si alguna solución es entera y no existe otra rama con mejor valor óptimo, entonces ir a **a1**.

En caso contrario ir a **a2** en la rama que tenga el mejor valor óptimo hasta el momento (Solari, 2013).

Ejemplo 2.02

Dado el siguiente PPLE:

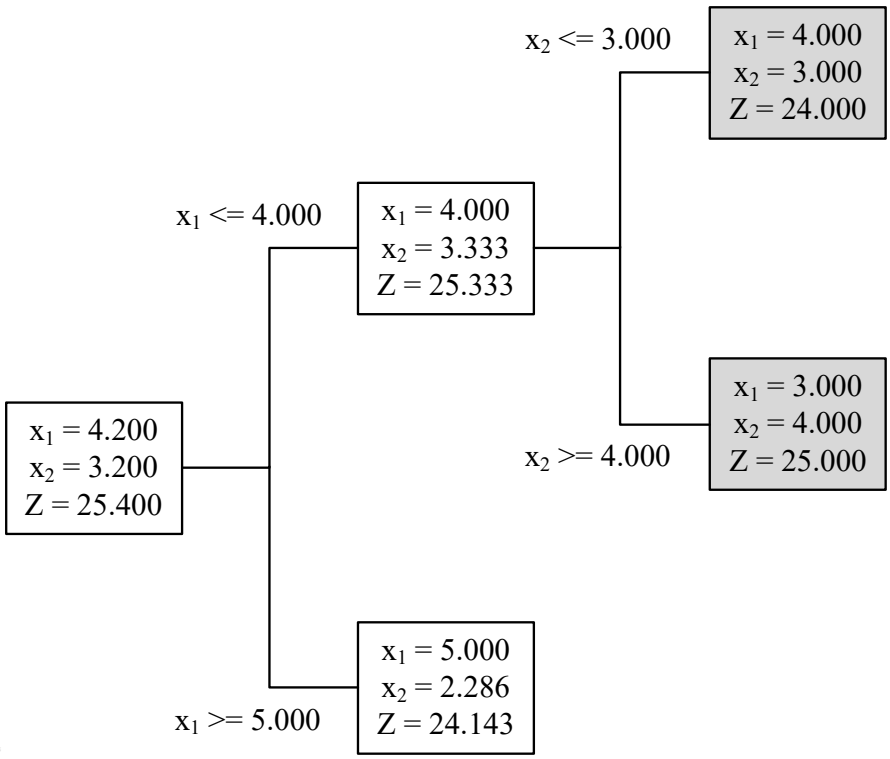
$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$8x_1 + 7x_2 \leq 56$$
$$x_i \geq 0, \text{ enteros} \quad i = 1,2$$

En el Cuadro 2.01 se muestra la solución del problema por Ramificación y Acotamiento:

Cuadro 2.01
Ejemplo 2.02: Solución por el Método de Ramificación y Acotamiento



Fuente propia.

La solución óptima resulta: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ y $Z = 25$, dado que no hay ramal que mejore este resultado.

2. Métodos de los Planos de Corte

Los métodos de planos de corte parten de la resolución del EC asociado al PPLE y tienen como objetivo lograr, mediante la incorporación de restricciones o planos de corte, que las variables de decisión óptimas sean enteras. Estas nuevas restricciones, restringen la región factible del EC sin suprimir soluciones enteras. La estructura de los cortes garantiza que la solución de estos problemas converge a la solución del PPLE.

Podemos distinguir entre, algoritmo fraccional de Gomory y el algoritmo todo entero de Gomory, en función de las características del problema (Docio, 2015).

Procedimiento. Los métodos de los planos de corte resuelven el PPLE de la siguiente manera :

a1. Resolver el EC, si la solución óptima del problema resulta entera, fin del proceso y ésta será la solución del PPLE. En caso contrario ir al paso **a2** (Solari, 2013).

a2. Se elige una de las variables de decisión que debería ser entera y a partir de ella se construye el plano de corte .

a3. Se añade el plano de corte a la solución óptima anterior y se resuelve nuevamente el problema. Si la solución óptima obtenida sigue sin ser entera ir al paso **a2**, debemos repetir los pasos anteriores hasta que dichas variables sean enteras. Si las variables de decisión resultan enteras, fin del proceso, pues se ha conseguido el objetivo (Docio, 2015).

Aplicando el método al Ejemplo 2.02. El Cuadro 2.02 muestra el tablero Simplex óptimo del problema, como se observa la solución es no entera :

Cuadro 2.02
Ejemplo 2.02: Tablero óptimo por el Método Simplex

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	Sol.
Z	1	0	0	11/10	1/10	127/5
x_2	0	0	1	4/5	-1/5	16/5
x_1	0	1	0	-7/10	3/10	21/5

Fuente propia.

A partir del Cuadro 2.02 se obtienen las siguientes ecuaciones:

1. $Z + \frac{11}{10} x_3 + \frac{1}{10} x_4 = \frac{127}{5}$
2. $x_2 + \frac{4}{5} x_3 - \frac{1}{5} x_4 = \frac{16}{5}$
3. $x_1 - \frac{7}{10} x_3 + \frac{3}{10} x_4 = \frac{21}{5}$

Tomando la primera ecuación para mostrar el procedimiento de generación de un plano de corte:

$$(1+0)Z + (1+\frac{1}{10})x_3 + (0+\frac{1}{10})x_4 = (25+\frac{2}{5})$$

Se han separado los coeficientes en una parte entera y otra parte fraccionaria, la parte fraccionaria debe ser mayor o igual a cero.

Se distribuye hacia la derecha de la igualdad la parte con coeficientes enteros y hacia la izquierda la parte con coeficientes fraccionarios:

$$Z + x_3 + 25 = -\frac{1}{10} x_3 - \frac{1}{10} x_4 + \frac{2}{5}$$

Por construcción la parte derecha de la igualdad es entera, por lo que la parte izquierda también lo debe ser y de aquí se genera el plano de corte:

1. $-\frac{1}{10} x_3 - \frac{1}{10} x_4 + \frac{2}{5} \leq 0$

De la misma manera se generan los planos de corte para las restantes ecuaciones:

2. $-\frac{4}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5} \leq 0$

3. $-\frac{3}{10}x_3 - \frac{3}{10}x_4 + \frac{1}{5} \leq 0$

Se utiliza el tercer plano de corte para construir la siguiente restricción, (seleccionado en forma arbitraria):

$$-\frac{3}{10}x_3 - \frac{3}{10}x_4 + s_1 \leq -\frac{1}{5}$$

En el Cuadro 2.03 se muestra el tablero Simplex con el plano de corte adicional:

Cuadro 2.03

Ejemplo 2.02: Adición del primer corte

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Sol.
Z	1	0	0	11/10	1/10	0	127/5
x_2	0	0	1	4/5	-1/5	0	16/5
x_1	0	1	0	-7/10	3/10	0	21/5
s_1	0	0	0	-3/10	-3/10	1	-1/5

Fuente propia.

Utilizando el método Simplex Dual se obtiene los resultados del Cuadro 2.04:

Cuadro 2.04

Ejemplo 2.02: Tablero óptimo del primer corte

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Sol.
Z	1	0	0	1	0	1/3	76/3
x_2	0	0	1	1	0	-2/3	10/3
x_1	0	1	0	-1	0	1	4
x_4	0	0	0	1	1	-10/3	2/3

Fuente propia.

La solución óptima aún no es entera. Con la cuarta ecuación se construye el segundo plano de corte:

$$-\frac{2}{3}s_1 + \frac{2}{3} \leq 0$$

En el Cuadro 2.05 se muestra la adición de la nueva restricción:

Cuadro 2.05

Ejemplo 2.02: Adición del segundo corte

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Sol.
Z	1	0	0	1	0	1/3	0	76/3
x_2	0	0	1	1	0	-2/3	0	10/3
x_1	0	1	0	-1	0	1	0	4
x_4	0	0	0	1	1	-10/3	0	2/3
s_2	0	0	0	0	0	-2/3	1	-2/3

Fuente propia.

La solución óptima aplicando el método Simplex Dual se muestra en el Cuadro 2.06:

Cuadro 2.06

Ejemplo 2.02: Tablero óptimo del segundo corte

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_1	Sol.
Z	1	0	0	1	0	0	1/2	25
x_2	0	0	1	1	0	0	-1	4
x_1	0	1	0	-1	0	0	3/2	3
x_4	0	0	0	1	1	0	-5	4
s_1	0	0	0	0	0	1	-3/2	1

Fuente propia.

La solución óptima ahora es entera y resulta: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$ y $Z = 25$.

Se observa que todas las variables y el valor óptimo Z son enteros, en un problema general esto no tiene que tomar esta forma.

Problema de Programación Lineal Binaria (PPLB). Los PPLB son problemas de Programación Lineal con variables de decisión cuyo comportamiento es 0 o 1, seleccionar un proyecto para invertir o no, añadir un nuevo puesto de trabajo o no, utilizar horas extra o no, son ejemplos de estos casos.

En 1965, E. Balas desarrolló el método de Enumeración Implícita para variables binarias (Docio, 2015).

a. Métodos de solución del PPLB

1. Método de Revisión Exhaustiva
2. Método de Ramificación y Acotamiento para el PPLB
3. Método Aditivo de Egon Balas

1. Método de Revisión Exhaustiva

Dado que las variables sólo toman los valores 0 y 1, puede revisarse todas las soluciones y determinar la solución óptima por comparación. El número de soluciones posibles está dado por 2^n, donde n es el número de variables, (Solari, 2013).

Ejemplo 2.03

Dado el siguiente PPLB:

$$\text{Max } Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\le 10 \\ x_3 + x_4 &\le 1 \\ -x_1 + x_3 &\le 0 \\ -x_2 + x_4 &\le 0 \end{aligned}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,3,4$$

Para este caso se tienen $2^4 = 16$ soluciones posibles, algunas soluciones serán no factibles, pero en este método se deben revisar la totalidad de soluciones. Las soluciones factibles serán evaluadas en la función objetivo, para luego seleccionar la solución óptima (Solari, 2013).

En el Cuadro 2.07 se muestran las 16 posibles soluciones del problema:

Cuadro 2.07
Ejemplo 2.03: Solución por el Método de Revisión Exhaustiva

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Factible	Si	No	No	No	Si	Si	No	No	Si	No	No	No	Si	No	No	No
Z	0	--	--	--	5	9	--	--	9	--	--	--	14	--	--	--

Fuente propia.

La solución óptima resulta: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ y $Z = 14$.

2. Método de Ramificación y Acotamiento para el PPLB

Este método se basa en aplicar el método de Ramificación y Acotamiento al PPLB, y tiene los siguientes pasos:

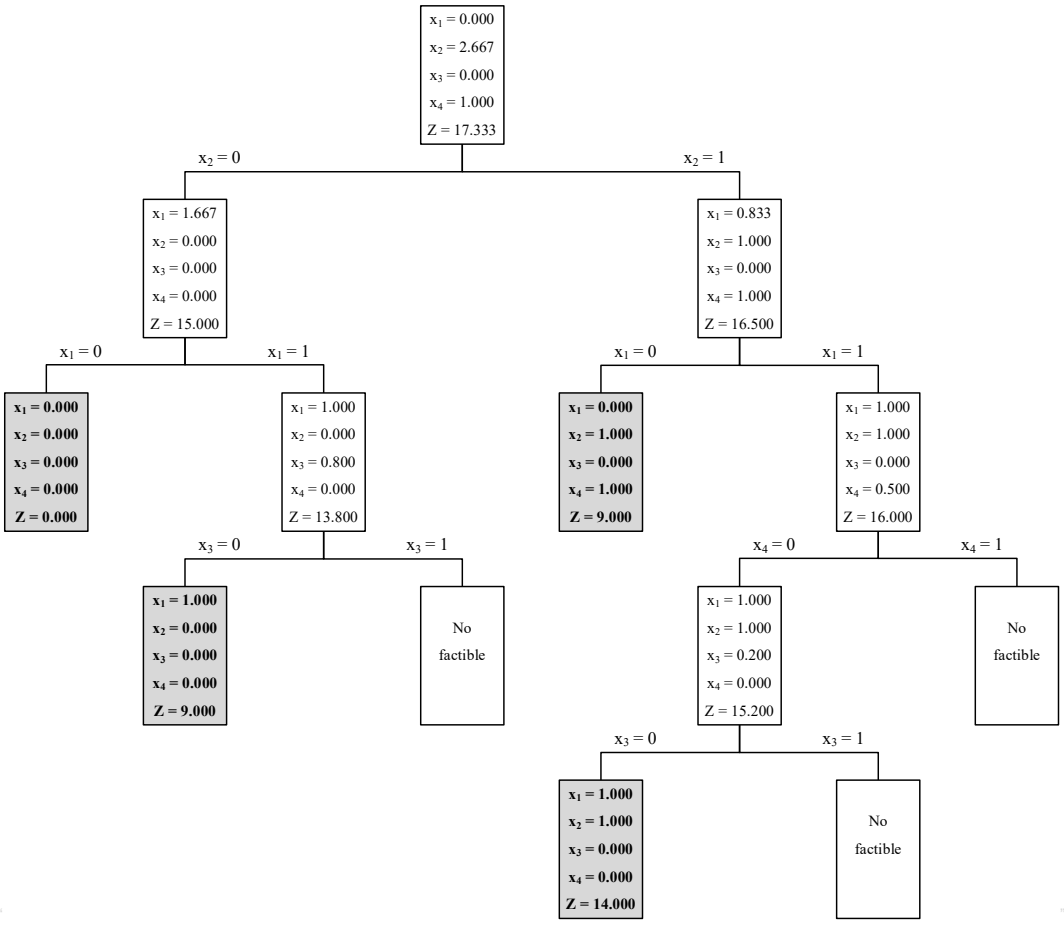
a1. Resolver el EC del PPLB y si en la solución óptima, todas las variables son binarias entonces fin del proceso y ésta será la solución óptima del PPLB.

a2. Si alguna variable x_i es no binaria, se restringe su comportamiento a $x_i = 0$ y $x_i = 1$, (Acotamiento) y se añaden al modelo estas restricciones por separado, obteniéndose 2 nuevas formulaciones, (Ramificación).

a3. Resolver las formulaciones obtenidas por Ramificación, si alguna variable resulta no binaria, regresar al paso a2, y si todas las variables son binarias entonces fin del proceso y seleccionar la solución óptima del PPLB, entre todas las soluciones binarias que se hayan obtenido.

Para el Ejemplo 2.03, se obtuvo la solución por Ramificación y Acotamiento y se muestra en el Cuadro 2.08:

Cuadro 2.08
Ejemplo 2.03: Solución por el Método de Ramificación y Acotamiento



Fuente propia.

La solución óptima resulta: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ y $Z = 14$.

3. Método Aditivo de Egon Balas

Para aplicar el método aditivo de Egon Balas, el modelo del PPLB debe cumplir con las siguientes características (Chinneck, 2015, Solari, 2013):

a1. La función objetivo debe ser de Minimización, en caso de Maximización, utilizar la siguiente regla de equivalencia:

$$\text{Maximizar}(Z) = \text{Minimizar}(W = -Z)$$

a2. Las m restricciones son todas desigualdades de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$, para $i = 1,2,\ldots,m$.

a3. Todas las variables x_i, donde $i = 1,2,\ldots,n$, son binarias (solo pueden tomar el valor de 0 o 1).

a4. Los coeficientes de la función objetivo deben ser no negativos, si algún c_i es negativo, entonces se cambia x_i por su complemento:

$$x_i = 1 - \overline{x_i}$$

donde $\overline{x_i}$ es una variable binaria.

a5. Las variables se ordenan de acuerdo con los coeficientes de la función objetivo, de modo que $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

Las claves de cómo funciona el algoritmo de Balas se encuentran en su estructura especial:

b1. La optimización de la función objetivo es de minimización y todos los coeficientes son no negativos, por lo que es preferible que a las variables se les asigne el valor cero para obtener el menor valor de Z.

b2. Si al asignar cero a todas las variables y la solución resulta no factible, entonces se asigna uno a la variable que tiene el menor índice, si el resultado es una solución factible, ésta es la solución óptima del PPLB. Esto se debe a que las variables están ordenadas de modo que las primeras en la lista incrementan el valor de Z en la menor cantidad.

Se define la Función de Delimitación (FD) como aquel valor que analiza el costo de la siguiente solución más barata que podría proporcionar una solución viable y se calcula de la siguiente manera:

$$FD = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} c_j x_j + c_{N+1} & \text{Si } x_N = 0 \\ \sum_{j=1}^{N} c_j x_j & \text{Si } x_N = 1 \end{cases}$$

Siendo x_N la variable actual. Una solución será FACTIBLE si satisface a todas las restricciones, será INFACTIBLE si por lo menos una restricción no se satisface y será IMPOSIBLE si ya no es posible conseguir una solución factible a partir de la solución planteada. La solución factible nos indica que debemos detener el proceso por esta rama, la solución óptima se busca entre todas las soluciones factibles. La solución infactible se puede convertir en factible cuando se agreguen las variables faltantes, por lo que se continúa por esta rama si la función de delimitación es menor. La solución imposible es una solución infactible, que no cambiará este estado aun agregando las variables faltantes, esta solución detiene el proceso descartando esta rama.

Para el Ejemplo 2.03 planteado:

$$\text{Max } Z = 9\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + 4\,x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 &\le 10 \\ x_3 + x_4 &\le 1 \\ -x_1 + x_3 &\le 0 \\ -x_2 + x_4 &\le 0 \\ x_i \in \{0,1\}, \quad i &= 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Paso 1. El sentido de la función objetivo debe ser minimizar:

$$\text{Maximizar}(Z) = \text{Minimizar}(W = -Z)$$

$$\text{Min } W = -9\,x_1 - 5\,x_2 - 6\,x_3 - 4\,x_4$$

Paso 2. Los coeficientes de la función objetivo deben ser no negativos:

$$x_1 = 1 - \overline{x_1},\ x_2 = 1 - \overline{x_2},\ x_3 = 1 - \overline{x_3},\ x_4 = 1 - \overline{x_4}$$

$$\text{Min } W = -9\,(1 - \overline{x_1}) - 5\,(1 - \overline{x_2}) - 6\,(1 - \overline{x_3}) - 4\,(1 - \overline{x_4})$$

$$\text{Min } W = 9\,\overline{x_1} + 5\,\overline{x_2} + 6\,\overline{x_3} + 4\,\overline{x_4} - 24$$

y las restricciones quedan:

$$\begin{aligned} -6\,\overline{x_1} - 3\,\overline{x_2} - 5\,\overline{x_3} - 2\,\overline{x_4} &\le -6 \\ -\overline{x_3} - \overline{x_4} &\le -1 \\ \overline{x_1} - \overline{x_3} &\le 0 \\ \overline{x_2} - \overline{x_4} &\le 0 \\ \overline{x_i} \in \{0,1\}, \quad i &= 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Paso 3. Las restricciones deben ser de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i$:

$$\begin{aligned} 6\overline{x_1} + 3\overline{x_2} + 5\overline{x_3} + 2\overline{x_4} &\geq 6 \\ \overline{x_3} + \overline{x_4} &\geq 1 \\ -\overline{x_1} + \overline{x_3} &\geq 0 \\ -\overline{x_2} + \overline{x_4} &\geq 0 \\ \overline{x_i} \in \{0,1\}, \quad i &= 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Paso 4. Ordenar los coeficientes de la función objetivo de menor a mayor:

$$y_1 = \overline{x_4},\ y_2 = \overline{x_2},\ y_3 = \overline{x_3},\ y_4 = \overline{x_1}$$

$$\text{Min } W = 4\,y_1 + 5\,y_2 + 6\,y_3 + 9\,y_4$$

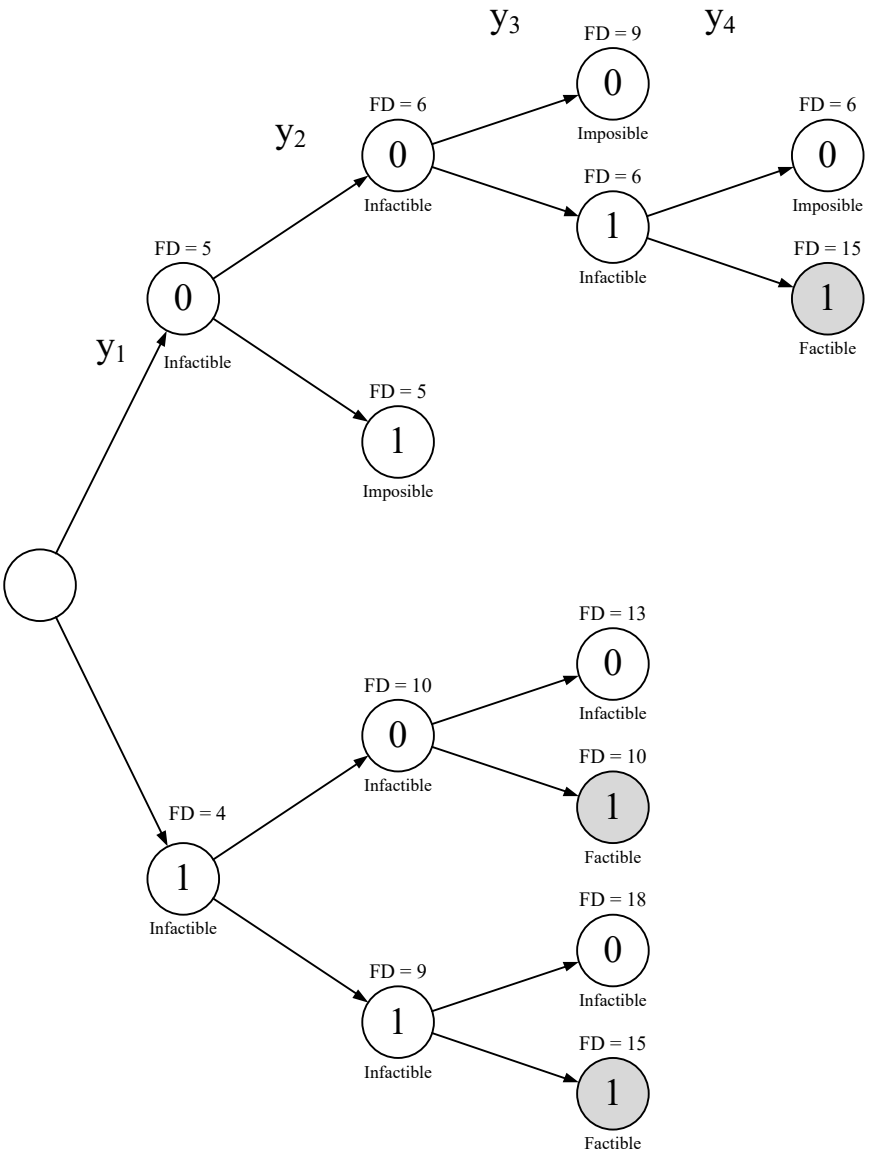
sujeto a

$$\begin{aligned} 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 6y_4 &\geq 6 \\ y_1 + y_3 &\geq 1 \\ y_3 - y_4 &\geq 0 \\ y_1 - y_2 &\geq 0 \\ y_i \in \{0,1\}, \quad i &= 1,2,3,4 \end{aligned}$$

El Cuadro 2.09 muestra los resultados de aplicar el Método Aditivo de Balas al Ejemplo 2.03 :

Cuadro 2.09

Ejemplo 2.03: Solución por el Método Aditivo de Egon Balas



Fuente propia.

La solución resultante es:

$$y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = 1,\ y_4 = 0$$

$$\overline{x_4} = 1,\ \overline{x_2} = 0,\ \overline{x_3} = 1,\ \overline{x_1} = 0$$

$$x_4 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_1 = 1$$

La solución óptima del problema es: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ y $Z = 14$.

2.3.5. Grafos, ciclos y caminos

Sea un grafo $G = (V, A, C)$ donde V es el conjunto de vértices, A es el conjunto de aristas o arcos y C es la matriz de costos (c_{ij}), donde c_{ij} es el costo o distancia de la arista (i, j) (Martí, 2003).

Se tienen las siguientes definiciones:

a. Grafo bipartito

Un grafo es bipartito si sus vértices en V se pueden repartir en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 de tal forma que $V_1 \cap V_2 = \phi$ y $V_1 \bigcup V_2 = V$, y que todas las aristas tengan un extremo en cada uno de esos conjuntos.

Un pareo perfecto es un pareo en el cual cada vértice tiene exactamente una arista incidiendo en él.

b. Vértices adyacentes

En un grafo, decimos que los vértices v_1 y v_2 son adyacentes si existe una arista que los une.

c. Aristas adyacentes

En un grafo, decimos que las aristas a_1 y a_2 son adyacente si tienen un único vértice en común.

d. Camino

Un camino o cadena es una sucesión de aristas adyacentes $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ en donde el vértice final de cada arista coincide con el vértice inicial de la siguiente arista. También puede representarse por la sucesión de vértices utilizados $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$.

e. Camino simple

Un camino es simple si no utiliza más de una vez cada vértice.

f. Camino elemental

Un camino es elemental si no utiliza más de una vez cada arista. Todo camino simple es un camino elemental, pero no todo camino elemental es un camino simple.

g. Ciclo

Un ciclo es un camino $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ donde el vértice final de la arista a_k coincide con el vértice inicial de la arista a_1.

h. Ciclo simple

Un ciclo es simple si lo es el camino que lo define. En un ciclo simple el vértice inicial se utiliza dos veces.

i. Sub ciclo

Un sub ciclo es un ciclo simple que no pasa por todos los vértices.

j. Tour o ciclo hamiltoniano

Un tour o ciclo hamiltoniano es un ciclo simple que pasa por todos los vértices .

2.3.6. Heurística y metaheurística

Tenemos las siguientes definiciones:

a. Heurística

“Un método heurístico es un procedimiento para resolver un problema de optimización bien definido mediante una aproximación intuitiva, en la que la estructura del problema se utiliza de forma inteligente para obtener una buena solución” (Martí, 2003, p.2).

Principales razones para utilizar métodos heurísticos:

- Cuando “el problema es de una naturaleza tal que no se conoce ningún método exacto para su resolución” (Martí, 2003, p.3).
- Cuando “existe un método exacto para resolver el problema, pero su uso es computacionalmente muy costoso” (Martí, 2003, p.3).
- “El método heurístico es más flexible que el método exacto, permitiendo, por ejemplo, la incorporación de condiciones de difícil modelización” (Martí, 2003, p.3).
- El método heurístico se utiliza como parte de un procedimiento global que garantiza el óptimo de un problema. Existen dos posibilidades :
  - “El método heurístico proporciona una buena solución inicial de partida” (Martí, 2003, p.3).
  - “El método heurístico participa en un paso intermedio del procedimiento, como por ejemplo las reglas de selección de la

variable a entrar en la base en el método Simplex" (Martí, 2003, p.3).

b. Metaheurística

"Los procedimientos Metaheurísticos son una clase de métodos aproximados que están diseñados para resolver problemas difíciles de optimización combinatoria, donde los métodos heurísticos clásicos no son efectivos" (Martí, 2003, p.5). "Los procedimientos Metaheurísticos proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos combinando diferentes conceptos derivados de la inteligencia artificial, la evolución biológica y los mecanismos estadísticos" (Martí, 2003, p.5).

2.3.7. El Problema de Asignación (PA)

De Burkard, Dell'Amico y Martello (2009), Hillier y Lieberman (2010), Schrijver (2005) y Taha (2012), se resume:

a. Definición

El PA es uno de los problemas más famosos en Programación Lineal y en Optimización Combinatoria. En este problema se estudia la asignación de n equipos a n tareas, donde cada equipo es asignado a una sola tarea y cada tarea será asignada a un sólo equipo y el costo de asignación es el menor posible.

Dada una matriz de costos $C = (c_{ij})$ de dimensión $n \times n$, se busca determinar n celdas de C, una en cada fila y una en cada columna, de manera que la suma de costos correspondientes de las celdas seleccionadas sea un mínimo, ver el Cuadro 2.10:

Cuadro 2.10

Matriz de costos de un PA

EQUIPOS \ TAREAS	1	2	⋯	j	⋯	n-1	n
1	c_{11}	c_{12}	⋯	c_{1j}	⋯	c_{1n-1}	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	⋯	c_{2j}	⋯	c_{2n-1}	c_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮
i	c_{i1}	c_{i2}	⋯	c_{ij}	⋯	c_{in-1}	c_{in}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮
n-1	c_{n-11}	c_{n-12}	⋯	c_{n-1j}	⋯	c_{n-1n-1}	c_{n-1n}
n	c_{n1}	c_{n2}	⋯	c_{nj}	⋯	c_{nn-1}	c_{nn}

Fuente propia.

El PA también puede ser estudiado como un grafo bipartito $G = (U, V; E)$, donde un vértice i de U (equipos), se parea con un vértice j de V (tareas) mediante una conexión de E de costo c_{ij}, como se muestra en la Figura 2.03. El problema consiste en encontrar el pareo perfecto de mínimo costo.

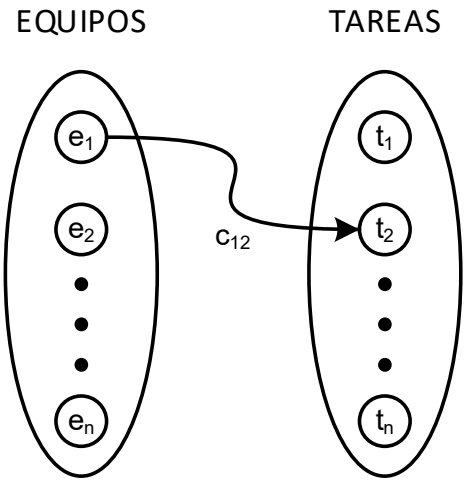


***Figura 2.03*. Grafo bipartito del PA**
Fuente propia.

En forma general, el problema está sujeto al número de equipos, tareas y los costos de asignación. Los costos de asignación son los costos que cada equipo requiere para realizar cada una de las tareas, la Figura 2.04 muestra las asignaciones posibles y sus respectivos costos.

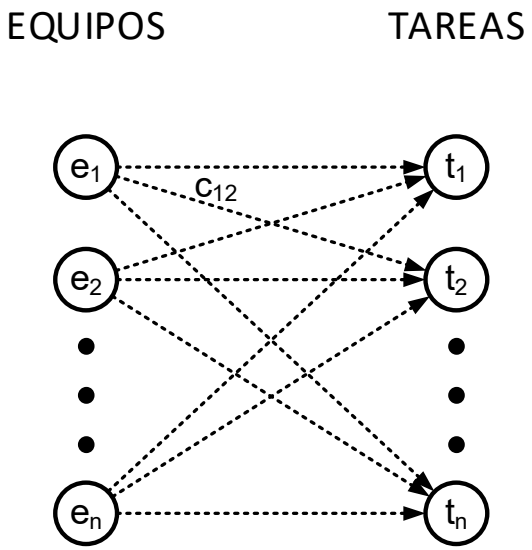


***Figura 2.04*. Grafo del PA**
Fuente propia.

Este problema es un caso particular del Problema de Transporte, donde la oferta o_i en cada punto de origen es la unidad y la demanda d_j en cada punto de destino también es la unidad:

$$o_i = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$d_j = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

b. Problema balanceado

Un PA esta balanceado cuando se tiene el mismo número de equipos y tareas.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{j=1}^{n} t_j$$

c. Objetivo del PA

El objetivo de este problema es determinar el mínimo costo para asignar las tareas a los equipos.

d. Formulación del problema

Formulando el problema como un Problema de Programación Lineal (PPL) para el caso del problema balanceado, tenemos:

d1. Variables de decisión

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el equipo i es asignado a la tarea j} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

En el Cuadro 2.11 se distribuyen las variables de decisión:

Cuadro 2.11
Matriz de variables de decisión de un PA

EQUIPOS \ TAREAS	1	2	⋯	j	⋯	n-1	n
1	x_{11}	x_{12}	⋯	x_{1j}	⋯	x_{1n-1}	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	⋯	x_{2j}	⋯	x_{2n-1}	x_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮
i	x_{i1}	x_{i2}	⋯	x_{ij}	⋯	x_{in-1}	x_{in}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮
n-1	x_{n-11}	x_{n-12}	⋯	x_{n-1j}	⋯	x_{n-1n-1}	x_{n-1n}
n	x_{n1}	x_{n2}	⋯	x_{nj}	⋯	x_{nn-1}	x_{nn}

Fuente propia.

d2. Restricciones

1. Cada equipo realiza una sola tarea:

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = 1 \qquad \text{equipo 1}$$
$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = 1 \qquad \text{equipo 2}$$
$$\vdots$$
$$x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} = 1 \qquad \text{equipo n}$$

2. Cada tarea es realizada por un sólo equipo:

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} = 1 \qquad \text{tarea 1}$$
$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} = 1 \qquad \text{tarea 2}$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} = 1 \qquad \text{tarea n}$$

3. Por condición de la variable :

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

d3. Función objetivo

4. Minimizar el costo de asignación de tareas:

$$\text{Min } Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{ij}x_{ij} + \cdots + c_{nn}x_{nn}$$

d4. El modelo

El modelo resulta:

$$\text{Min } Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{ij}x_{ij} + \cdots + c_{nn}x_{nn}$$

Sujeto a:

Por equipos	Por tareas
$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = 1$	$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} = 1$
$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = 1$	$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} = 1$
$\vdots$	$\vdots$
$x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} = 1$	$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} = 1$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

e. Solución del PA

Los métodos conocidos para resolver un PA son:

1. Método de Enumeración Exhaustiva
2. Método Simplex
3. Método de Transporte
4. Método Húngaro

El método de Enumeración Exhaustiva se utiliza en problemas de pocas variables, no siendo posible su uso para problemas de mayor dimensión porque se deben analizar todas las soluciones posibles. “La utilización del método Simplex o los métodos del Problema de Transporte, no resultan eficientes para resolver el PA, por lo cual se utiliza el método denominado Método Húngaro” (Solari, 2013b, p.6).

El Método Húngaro fue desarrollado por Harold W. Kuhn en 1955, basado en los aportes de los matemáticos húngaros: Dénes König y Janö Egerváry.

En 1956 Ford y Fulkerson informaron que para obtener la solución óptima para una matriz de un PA para una matriz de costos de dimensión $20 \text{ x } 20$ con cálculo manual, utilizando el método Simplex les tomó más de una hora y con el Método Húngaro unos treinta minutos, (Schrijver, 2005, p.10).

f. Método Húngaro: Características

1. El Método Húngaro busca la solución de mínimo costo sobre una matriz de costos equivalente con valores no negativos. Se alcanza la solución óptima cuando se tienen n celdas con valor cero, uno en cada fila y uno en cada columna y el costo de asignación toma el valor cero. La solución obtenida se implanta en la matriz de costos original.

2. Se garantiza la solución óptima.

3. El problema planteado debe estar balanceado:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{j=1}^{n} t_j$$

4. **Teorema.** "La solución óptima no varía si a la matriz de costos original se le incrementa un valor k a cada celda, pero el valor óptimo Z se incrementa en nk" (Solari, 2013b, p.8).

   Demostración. Todas las soluciones del PA contienen n celdas, por lo tanto el valor de todas las soluciones se incrementa en nk y la región factible estará constituida por las mismas soluciones con valor incrementado en nk, de aquí se tiene que la solución óptima seguirá siendo la misma y su valor se incrementa en nk.

5. **Teorema.** "La solución óptima no varía si a la matriz de costos original se le incrementa un valor k a cada celda de una fila (o columna), pero el valor óptimo Z se incrementa en k" (Solari, 2013b, p.8).

   Demostración. Todas las soluciones del PA contienen n celdas, una en cada fila y una en cada columna, por lo tanto el valor de todas las soluciones se incrementa en k y la región factible estará constituida por las mismas soluciones con valor incrementado en k, de aquí se tiene que la solución óptima seguirá siendo la misma y su valor se incrementa en k.

g. Método Húngaro: Procedimiento

1. **Reducción por filas**. "Determinar el mínimo valor de cada fila y restarlo a todas las celdas de su correspondiente fila. Este paso garantiza un cero en cada fila" (Solari, 2013b, p.8).

2. **Reducción por columnas**. “Determinar el mínimo valor de cada columna y restarlo a todas las celdas de su correspondiente columna. Este paso garantiza un cero en cada columna” (Solari, 2013b, p.8).

3. **Cubrimiento de ceros**. “Con el mínimo número de rectas cubrir los ceros de la matriz reducida. Empezar por la fila o columna que tenga el mayor número de ceros.
   Si el número de rectas resulta igual a n (número de equipos o tareas) se ha llegado a la solución óptima, pasar al paso 5, de lo contrario pasar al paso 4” (Solari, 2013b, p.9).

4. **Reducción posterior**. “Localizar la celda no cubierta que contenga el menor costo. Restar este valor a las celdas no cubiertas y sumarlo a las celdas que se encuentren en la intersección de las rectas.
   Regresar al paso 3” (Solari, 2013b, p.9).

5. **Localización de la solución óptima**. “Determinar las filas o columnas que tengan un único valor cero y asignar la celda localizada a la solución, eliminar las filas y columnas de las celdas asignadas. Repetir este procedimiento tantas veces sea necesario” (Solari, 2013b, p.8).
   “En caso de filas o columnas con más de un valor cero, seleccionar arbitrariamente.
   La asignación localizada de valor cero, implantarla en la matriz de costos original y determinar el valor óptimo” (Solari, 2013b, p.9).

h. Justificación del Método Húngaro

1. Con la Reducción por filas y la Reducción por columnas se obtiene una matriz equivalente a la matriz original con por lo menos n celdas con valor cero. Después del cubrimiento mínimo se verifica si las celdas con valor cero forman una solución. Si el número de rectas del cubrimiento es menor de n aún no se consigue la asignación óptima,

esto se debe a que algunas celdas con valor cero coinciden en la misma fila o columna.

2. Con la Reducción posterior se localiza el menor valor de las celdas no cubiertas y se resta este valor a todas las celdas de la matriz de costos y se añade a todas las celdas de las filas y columnas cubiertas, esto garantiza que se tiene una matriz de costos equivalente a la original, pero con una celda con valor cero, fuera del cubrimiento.

i. Consideraciones suplementarias en el Problema de Asignación

"Aquí se observan algunos problemas que ocurren con el modelo original. En los casos siguientes se realizan cambios sobre el modelo a fin de utilizar el mismo procedimiento resolutivo" (Solari, 2013b, p.10).

1. **El problema está desbalanceado**. "Si se tienen más tareas que equipos, añadir equipos ficticios igual a la diferencia:

$$\text{Equipos ficticios} = \text{Tareas} - \text{Equipos}$$

Si se tienen más equipos que tareas, añadir tareas ficticias igual a la diferencia:

$$\text{Tareas ficticias} = \text{Equipos} - \text{Tareas}$$

El costo de asignación de los equipos o tareas ficticias es igual a cero" (Solari, 2013b, p.10).

2. **Soluciones múltiples**. "Si en la solución óptima del Problema de Asignación se tienen otras posibles asignaciones con valor cero, éstas constituyen soluciones alternativas óptimas" (Solari, 2013b, p.11).

3. **Caso de maximización**. “Si los valores de la matriz de costos del Problema de Asignación son beneficios, la función objetivo es de maximización.

   Multiplicar por (-1) a la matriz de costos y restarle a cada celda el mayor valor negativo obtenido. Continuar con el procedimiento de solución” (Solari, 2013b, p.12).

4. **Asignaciones prohibidas**. “Si se requiere que en la solución del problema no se encuentre la variable x_{ij} $(x_{ij} = 0)$, se coloca como costo de asignación c_{ij} un valor muy grande representado por M:” (Solari, 2013b, p.12).

$$c_{ij} = M$$

2.3.8. El Problema del Agente Viajero (PAV)

En este acápite sobre el Problema del Agente Viajero tenemos:

a. Introducción

“Este problema, también conocido como Traveling Salesman Problem (TSP), ha sido uno de los más estudiados en Investigación Operativa, por lo que merece una atención especial. Cuando la teoría de la Complejidad Algorítmica se desarrolló, el PAV fue uno de los primeros problemas en estudiarse, probando Karp en 1972 que pertenece a la clase de los problemas difíciles (NP-hard)” (Martí, 2003, p.8).

“Desde los métodos de Ramificación y Acotación hasta los basados en la Combinatoria Poliédrica, pasando por los procedimientos Metaheurísticos, todos han sido inicialmente probados en el PAV, convirtiéndose éste en una prueba obligada para validar cualquier técnica de resolución de problemas enteros o combinatorios. La librería TSPLIB (Reinelt, 1991) de dominio

público contiene un conjunto de ejemplos del PAV con la mejor solución obtenida hasta la fecha y, en algunos casos, con la solución óptima" (Martí, 2003, p.8).

b. Definición

El Problema del Agente Viajero, para una dimensión n, puede enunciarse del siguiente modo:

Un agente viajero visita $(n-1)$ ciudades, partiendo de una ciudad preestablecida, debiendo retornar a la ciudad de origen, visitando las restantes ciudades una sola vez, determinando el ciclo de menor costo.

c. Soluciones

"Los métodos constructivos son procedimientos iterativos que, en cada paso, añaden un elemento hasta completar una solución. Usualmente son métodos deterministas y están basados en seleccionar, en cada iteración, el elemento con mejor evaluación. Estos métodos son muy dependientes del problema que resuelven" (Martí, 2003, p.14).

El Cuadro 2.12 muestra las soluciones del PAV utilizando heurísticas y metaheurísticas:

Cuadro 2.12
Soluciones del PAV por heurísticas y metaheurísticas

Año	Equipo de investigación	Tamaño del caso	Nombre
1,954	G. Dantzig, R. Fulkerson y S. Johnson	49 ciudades	dantzig42
1,971	M. Held y R. M. Karp	64 ciudades	64 random points
1,975	P. M. Camerini, L. Fratta y F. Maffioli	67 ciudades	67 random points
1,977	M. Grötschel	120 ciudades	gr120
1,980	H. Crowder y M. W. Padberg	318 ciudades	lin318
1,987	M. Padberg y G. Rinaldi	532 ciudades	att532
1,987	M. Grötschel y O. Holland	666 ciudades	gr666
1,987	M. Padberg y G. Rinaldi	2,392 ciudades	pr2392
1,994	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal y W. Cook	7,397 ciudades	pla7397
1,998	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal y W. Cook	13,509 ciudades	usa13509
2,001	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal y W. Cook	15,112 ciudades	d15112
2,004	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook y K. Helsgaun	24,978 ciudades	sw24798

Fuente UWaterloo (2016).

d. Breve reseña sobre los principales aportes al PAV

El estudio de los circuitos hamiltonianos en un grafo se remonta a los trabajos de T. P. Kirkman en 1856, W. R. Hamilton en 1856-1858 y A. Kowalewski en 1917 (Schrijver, 2005).

Las raíces matemáticas del PAV no son claras. G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson y S. Johnson en 1954 afirmaron “El PAV parece haber sido discutido de manera informal en reuniones de matemáticos durante muchos años” (Schrijver, 2005).

H. Müller-Merbach en 1983 afirmó que el PAV se formuló en un manual en 1832. Este manual no contiene el desarrollo matemático. Trata de un recorrido a lo largo de 45 ciudades alemanas y la trayectoria de 1832 podría ser óptima; el manual sugiere cinco recorridos por Alemania (uno de ellos en parte de Suiza), pero no todos cumplen los requerimientos del PAV (Schrijver, 2005).

1932

El matemático y economista Karl Menger presentó el PAV entre sus colegas en Viena en la década de 1920. En 1932 Menger publicó "Das botenproblem", en Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums. Este volumen contiene una declaración de un problema planteado por Karl Menger, el 5 de febrero de 1930, en un coloquio matemático en Viena. Menger lo llamó el "Messenger Problem", un problema encontrado por los mensajeros postales, así como por muchos viajeros (Cummings, 2016).

1940

P. C. Mahalanobis publicó "A sample survey of the acreage under jute in Bengal", el autor analiza algunos aspectos de las soluciones de PAV a través de ubicaciones elegidas al azar en un plano euclidiano. Este trabajo estuvo relacionado con un estudio de tierras agrícolas en Bengal que tuvo lugar en 1938, donde uno de los principales costos para llevar a cabo el estudio fue el transporte de hombres y equipos de un punto del estudio a otro. Este trabajo parece independiente de los esfuerzos liderados por Merill Flood en aplicaciones del PAV que tuvieron lugar varios años antes (UWaterloo, 2016).

1942

R. J. Jessen publicó "Statistical investigation of a sample survey for obtaining farm facts", el título sugiere que este informe trata un problema

similar a la aplicación estudiada por Mahalanobis; si este es el caso, puede haber un caso para referirse al PAV como el "problema del agricultor viajero"; no se tiene mayor información sobre la investigación (UWaterloo, 2016).

1948

El matemático Merill M. Flood hizo popular el PAV entre sus colegas de la Corporación RAND. Con los años el problema se hizo famoso como el prototipo de problema difícil en la optimización combinatoria (Schrijver, 2005).

1949

Julia Robinson publicó "On the Hamiltonian Game (a traveling-salesman problem)", proporcionando un método para resolver un problema relacionado con el PAV; a pesar de que el problema era muy conocido en ese momento, no parece existir referencia anterior en la literatura sobre la descripción del nombre "Traveling Salesman Problem" (UWaterloo, 2016). Robinson comentó que la relación entre el PA y el PAV: es que el PA requiere una permutación óptima, y el PAV una permutación cíclica óptima (Schrijver, 2005).

1954

George B. Dantzig, R. Fulkerson y S. Johnson publicaron "Solution of a large-scale traveling-salesman problem" (UWaterloo, 2016). Su enfoque sigue siendo una herramienta para la solución de casos no triviales del PAV con más de cientos de ciudades; a lo largo de los años, ha evolucionado aún más a través de los trabajos de M. Grötschel, S. Hong, M. Jünger, P. Miliotis, D. Naddef, M. Padberg, W. R. Pulleyblank, G. Reinelt y G. Rinaldi (Cummings, 2016). I. Heller publicó "The travelling salesman's problem: part 1 -- basic facts" (UWaterloo, 2016); un informe de 88 páginas que contiene

muchos resultados básicos sobre el politopo del PAV asimétrico; Heller describió este trabajo como "un conjunto de hechos y herramientas, por lo tanto, un documento de trabajo en el sentido literal de la palabra" (Cummings, 2016).

1955

I. Heller publicó "On the travelling salesman's problem", este manuscrito discute sistemas lineales para el politopo del PAV y algunas relaciones vecinas para el politopo asimétrico del PAV (UWaterloo, 2016). H. W. Kuhn publicó "On certain convex polyhedra", el autor anuncia una descripción completa del politopo asimétrico de PAV de 5 ciudades. (Se discuten varias correcciones en Kuhn [1991]) (UWaterloo, 2016). G. Morton y A. H. Land publicaron "A contribution to the `travelling-salesman' problem", la parte principal del documento discute un enfoque de programación lineal para el PAV, pero también contiene varias discusiones secundarias; los autores presentan su versión de 3-opt; en otra discusión presentan el problema del enrutamiento capacitado; los autores también dan varias referencias que datan de 1942; llamaron al PAV el problema de la camioneta de lavandería (UWaterloo, 2016). R. Z. Norman publicó "On the convex polyhedra of the symmetric traveling salesman problem", el resumen anuncia descripciones completas de los politopos del PAV para n ciudades, $n \leq 7$ (el sistema para $n = 7$ fue demostrado insuficiente por Boyd y Cunningham [1991], Fleischmann [1988] y Naddef y Rinaldi [1992]) (UWaterloo, 2016). J. T. Robacker publicó "Some experiments on the traveling-salesman problem", el autor realiza pruebas computacionales del método Dantzig-Fulkerson-Johnson a mano en 10 instancias; también describe la heurística de inserción más barata, dándole crédito a A. W. Boldyreff (UWaterloo, 2016).

1956

Merrill M. Flood publicó "The travelling-salesman problem", en la que describió algunos métodos heurísticos para la obtención de buenos

recorridos (Cummings, 2016). J. B. Kruskal publicó "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem", éste es el famoso algoritmo de Kruskal para calcular árboles de extensión mínima; el autor escribe que el cálculo de los árboles de expansión mínima es interesante porque ese problema "en la superficie está estrechamente relacionado con el PAV" (UWaterloo, 2016).

1957

L. L. Barachet publicó "Graphic solution of the travelling-salesman problem", en este trabajo se describe un esquema de enumeración para el cálculo de recorridos casi óptimos y observaciones realizadas sobre la estructura de recorridos óptimos para problemas geométricos; el documento también detalla un recorrido para una instancia de 10 ciudades que se resolvió a mano para demostrar la viabilidad del método para pequeñas instancias (Cummings, 2016).

1958

F. Bock publicó "An algorithm for solving 'traveling-salesman' and related network optimization problems", se describe un algoritmo 3-Opt y un esquema de cálculo de un recorrido óptimo. El algoritmo fue probado en los ejemplos de Robacker y Barachet, y en un nuevo problema de 10 ciudades. Todas las pruebas se llevaron a cabo en el Computador IBM 650 (Cummings, 2016). G. A. Croes publicó "A method for solving traveling-salesman problems", se propone una variante de 3-opt, junto con un esquema de enumeración para calcular un recorrido óptimo; el autor resolvió el ejemplo de 42 ciudades de Dantzig-Fulkerson-Johnson en 70 horas a mano; También resolvió varios de los ejemplos de Robacker en un tiempo promedio de 25 minutos por ejemplo (UWaterloo, 2016). W. L. Eastman publicó "Linear programming with pattern constraints", se describe un algoritmo de ramificación y acotamiento que utiliza el problema de asignación para obtener límites inferiores; el paso de ramificación elige una

sub secuencia desde la solución al problema de asignación y considera, a su vez, establecer $x_e = 0$ para cada arista e en el sub ciclo; el algoritmo se prueba en ejemplos que tienen hasta 10 ciudades (UWaterloo, 2016). M. J. Rossman y R. J. Twery publicaron "A solution to the travelling salesman problem", los autores anuncian un algoritmo de enumeración implícito para el PAV; el algoritmo se utilizó para resolver una instancia de 13 ciudades a mano (UWaterloo, 2016).

1959

George B. Dantzig, D. R. Fulkerson, y S. M. Johnson publicaron "On a linear-programming, combinatorial approach to the travelling-salesman problem", en esta publicación se proporciona una aplicación paso a paso del Dantzig-Fulkerson-Johnson para un ejemplo de diez ciudades (Cummings, 2016). W. Riley III publicó "A new approach to the traveling-salesman problem", el autor anuncia un algoritmo para el PAV; escribe: "El algoritmo emplea el concepto de cambio mínimo básico que se puede hacer en una ruta determinada; se determina que los exámenes sucesivos de subconjuntos particulares de estos cambios mínimos forman la ruta óptima (mínima o máxima) rápidamente"; Los detalles del algoritmo no se dan en el resumen (UWaterloo, 2016).

1960

R. Bellman publicó "Combinatorial processes and dynamic programming", en este trabajo Bellman utiliza el PAV como un ejemplo de un problema combinatorio que puede ser resuelto a través de la programación dinámica (Cummings, 2016). R. Bellman escribió "De ello se desprende que con las máquinas actuales, sería posible resolver los problemas de este tipo de una manera directa para $n \leq 17$" (UWaterloo, 2016). M. F. Dacey publicó "Selection of an initial solution for the traveling-salesman problem", donde anunció una nueva heurística para el PAV; Dacey señaló que cuando la heurística se aplicó a 10 casos de Robacker las soluciones encontradas

fueron en promedio un 4,8 por ciento mayores que las soluciones óptimas (UWaterloo, 2016). F. Lambert publica "The traveling-salesman problem; donde resuelve un ejemplo de 5 ciudades utilizando planos de corte de Gomory (UWaterloo, 2016). C. E. Miller, A. W. Tucker, y R. A. Zemlin publicaron "Integer programming formulation of traveling salesman problems", donde los autores presentan una formulación de programación entera para el PAV e informan su experiencia computacional en la resolución de varios problemas pequeños utilizando el algoritmo de planos de corte de Gomory (UWaterloo, 2016). W. Riley publica "Micro-analysis applied to the travelling salesman problem", ésta es una continuación de un trabajo anterior del autor; no se dan los detalles de su método (UWaterloo, 2016).

1961

E. L. Arnoff y S. S. Sengupta publicaron "Mathematical programming", es un estudio del trabajo computacional sobre el PAV que se realizó en la década de 1950 (UWaterloo, 2016). H. Müller-Merbach publicó "Die ermittlung des kürzesten rundreiseweges mittels linear programmierung", se propone un algoritmo para el PAV asimétrico; está ilustrado en un ejemplo de 7 ciudades (UWaterloo, 2016). B. Thüring publicó "Zum problem der exakten ermittlung des kürzesten rundreiseweges", un algoritmo del PAV que se describe e ilustra en un ejemplo de 10 ciudades (UWaterloo, 2016).

1962

R. Bellman publicó "Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem", se dan algunas observaciones adicionales sobre algoritmos de programación dinámica para el PAV (UWaterloo, 2016). R. H. Gonzales publicó "Solution to the traveling salesman problem by dynamic programming on the hypercube", el autor resolvió instancias hasta 10 ciudades usando programación dinámica; las pruebas se llevaron a cabo en una computadora IBM 1620 (UWaterloo, 2016). M. Held y R. M. Karp publicaron "A dynamic programming approach to sequencing problems", los

autores describen el algoritmo de programación dinámica para resolver instancias pequeñas y encontrar soluciones aproximadas a instancias más grandes; Se utilizó el algoritmo exacto para resolver instancias de 13 ciudades en una computadora IBM 7090. El algoritmo de aproximación (también programado para el IBM 7090) encontró la solución óptima para el ejemplo Dantzig-Fulkerson-Johnson de 42 ciudades en dos de cinco ensayos, y también se probó en una nueva instancia de 48 ciudades (UWaterloo, 2016).

1963

F. Bock publicó "Mathematical programming solution of traveling salesman examples", el autor da un bosquejo de un algoritmo basado en programación lineal para el PAV; El documento contiene la conocida cita de 1930 de Karl Menger que describe el problema del camino hamiltoniano (UWaterloo, 2016). J. D. C. Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney y C. Karel publicaron "An algorithm for the traveling salesman problem", los autores acuñan el término branch-and-bound (ramificación y acotamiento); utilizan un método de límite combinatorio en su algoritmo, y se ramifican en los bordes que están dentro o no en el recorrido. Su algoritmo se implementó en una computadora IBM 7090; su éxito más citado es la solución de un conjunto de problemas asimétricos de 30 ciudades que tienen longitudes de aristas aleatorias; también informan que las instancias de 10 ciudades se pueden resolver en menos de 1 hora a mano (UWaterloo, 2016). V. I. Mudrov publicó "A method of solution of the traveling salesman problem by means of integer linear programming (the problem of finding the Hamiltonian paths of shortest length in a complete graph)", ésta es una revisión de un artículo escrito en ruso; el documento contiene una formulación de programación entera del PAV; el autor propone utilizar esta formulación junto con el algoritmo de planos de corte de Gomory para resolver instancias del PAV (UWaterloo, 2016).

1964

R. L. Karg y G. L. Thompson publicaron "A heuristic approach to solving travelling salesman problems", se describe la heurística de inserción más barata, junto con una propuesta para usarla para mejorar subsecciones de recorridos. Los autores emplean sus métodos heurísticos en varias instancias grandes, incluida una instancia de 57 ciudades con datos tomados de un atlas de carreteras (UWaterloo, 2016). W. Suurballe publicó "Network algorithm for the traveling salesman problema, el autor anuncia un algoritmo de enumeración para calcular todos los recorridos óptimos de instancias del PAV (UWaterloo, 2016). El documento detalla una solución heurística para instancias de un máximo de 105 ciudades (Cummings, 2016).

1965

S. Lin publicó "Computer solutions of the traveling salesman problem", éste es un documento importante en métodos heurísticos para el PAV; el autor define los k-optimal circuitos y ofrece una manera eficiente de implementar 3-opt (extendiendo el trabajo de Croes); los resultados computacionales se dan para instancias con hasta 105 ciudades; el documento también incluye una discusión sobre la probabilidad de obtener recorridos óptimos a través de pruebas repetidas de la heurística (UWaterloo, 2016). S. Reiter y G. Sherman publicaron "Discrete optimizing", se propone un algoritmo de búsqueda local para el PAV y se prueba en problemas de la literatura; la instancia más grande considerada es el ejemplo de 57 ciudades de Karg y Thompson; en cada caso, el algoritmo pudo producir un recorrido al menos tan bueno como los recorridos que se informaron en documentos anteriores (UWaterloo, 2016). N. P. Salz publicó "The NORMA: a possible basis for a theory for the traveling-salesman problem", se propone un marco para estudiar el PAV (UWaterloo, 2016).

1966

R. E. Gomory publicó "The traveling salesman problem", el artículo de Gomory incluye descripciones muy agradables de los métodos de Dantzig, Fulkerson y Johnson [1954], Held y Karp [1962], y Little, Murty, Sweeney y Karel [1963]; el documento también incluye el texto de una hermosa discusión entre Gomory, J. Edmonds y H. W. Kuhn, sobre el uso de métodos de programación lineal para resolver problemas combinatorios (UWaterloo, 2016). E. L. Lawler y D. E. Wood publicaron "Branch-and-bound methods: a survey", el documento incluye descripciones de los algoritmos de ramificación y acotamiento de Eastman [1958] y Little, Murty, Sweeney y Karel [1963]; los autores sugieren el uso de árboles de expansión mínima como límite inferior en un algoritmo de ramificación y acotamiento para el PAV (UWaterloo, 2016). G. T. Martin publicó "Solving the traveling salesman problem by integer linear programming", el autor describe un algoritmo de plano de corte para el PAV. El algoritmo agrega desigualdades específicas para el PAV (su forma no se menciona en el texto, pero por el contexto parecería que son desigualdades de sub ciclo), así como planos de corte del método de formas enteras de Gomory. El problema de Dantzig-Fulkerson-Johnson se resolvió usando 9 cortes del PAV y 10 cortes de Gomory; el autor escribe: "La programación avanzada puede reducir significativamente el tamaño del modelo final y el número de iteraciones, pero varias computadoras actuales resuelven estos problemas en cinco a diez minutos" (UWaterloo, 2016). G. T. Martin publicó "Solving the traveling salesman problem by integer linear programming", esta es una versión completa del trabajo anterior (UWaterloo, 2016). H. Müller-Merbach publicó "Drei neue methoden zur lösung des traveller sales problem, teil 1", el autor describe algunos métodos enumerativos para el PAV (UWaterloo, 2016). H. Müller-Merbach publicó "Drei neue methoden zur lösung des traveller sales problem, teil 2", continuación del documento anterior (UWaterloo, 2016). S. M. Roberts y B. Flores publicaron "An engineering approach to the traveling salesman problem", los autores presentan una heurística enumerativa para

el PAV; usando este algoritmo obtuvieron un recorrido para el ejemplo de 57 ciudades de Karg y Thompson, con un costo igual al mejor recorrido encontrado por Karg y Thompson (UWaterloo, 2016). N. P. Salz publicó "The NORMA: a theory for the traveling salesman problem", algunos resultados adicionales sobre el marco de referencia del autor para estudiar el PAV (UWaterloo, 2016). D. Shapiro publicó "Algorithms for the solution of the optimal cost traveling salesman problem" en su tesis de doctorado, el autor describe un algoritmo similar al algoritmo de ramificación y acotamiento de Eastman, pero con algunas ideas adicionales para mejorar el rendimiento en instancias simétricas (UWaterloo, 2016).

1967

B. Fleischmann publicó "Computational experience with the algorithm of Balas", este documento incluye resultados computacionales para instancias del PAV de 6 y 7 ciudades.

1968

M. Bellmore y G. L. Nemhauser publicaron "The traveling salesman problem: a survey", los autores presentan un extenso estudio de algoritmos para el PAV; escriben "si los autores se enfrentaran con el problema de encontrar una solución a un problema particular del PAV, usaríamos la programación dinámica para problemas con 13 ciudades o menos, el algoritmo de ramificación y acotamiento de Shapiro para problemas más grandes (hasta aproximadamente 70-100 ciudades para problemas asimétricos y hasta 40 ciudades para problemas simétricos) y el algoritmo '3-opt' de Shen Lin para problemas que no pueden ser manejados por el algoritmo de Shapiro" (UWaterloo, 2016). P. Pfluger publicó "Diskussion der modellwahl am beispiel des travelling-salesman problems", el autor da una breve descripción de los algoritmos PAV de Bellman [1962], Held y Karp [1962], Eastman [1958] y Little, Murty, Sweeney y Karel [1963] (UWaterloo, 2016).

1969

A. M. Issac y E. Turban publicaron " Some comments on the traveling salesman problem", este documento contiene una breve encuesta de algunos métodos heurísticos de PAV que no fueron cubiertos en Bellmore y Nemhauser [1968] (UWaterloo, 2016). T. C. Raymond publica "Heuristic algorithm for the traveling-salesman problem", este autor desarrolla algunas extensiones de la heurística de Karg y Thompson para el PAV; se informan resultados computacionales para instancias que tienen hasta 57 ciudades (UWaterloo, 2016).

1970

M. Held y R. M. Karp publicaron "The travelling-salesman problem and minimum spanning trees", este documento que introdujo la relajación del 1-tree del PAV y la idea de usar pesos en los nodos para mejorar el acotamiento propuesto por el óptimo 1-tree (UWaterloo, 2016). H. Müller-Merbach publica el libro “Optimale Reihenfolgen”, este libro incluye un capítulo extenso sobre el PAV. El tratamiento cubre los algoritmos exactos y heurísticos (incluidas las pruebas computacionales) (UWaterloo, 2016).

1971

M. Bellmore y J. Malone publicaron "Pathology of traveling-salesman subtour-elimination algorithms", los autores presentan un análisis de la eficacia del uso de la relajación de la asignación para el PAV, que explica en parte el éxito que algoritmos anteriores tenían en la solución de casos asimétricos aleatorios; se proponen utilizar el problema 2-factor como la relajación para problemas simétricos, y probaron esta idea en problemas euclidianos aleatorios que tenían hasta 20 nodos (utilizando un código de b-matching escrito por Edmonds y Johnson) (UWaterloo, 2016). M. Held y R. M. Karp publicaron "The traveling-salesman problem and minimum spanning

trees: part II", se presenta un método iterativo eficiente para calcular un buen límite de 1-tree (usando pesos de nodo). Los autores incorporaron esto en un algoritmo de ramificación y acotamiento y resolvieron, entre otros, la instancia de 42 ciudades de Dantzig, Fulkerson y Johnson [1954], la instancia de 57 ciudades de Karg y Thompson [1964], y un modelo aleatorio euclidiano de 64 ciudades. Estos resultados computacionales fueron los mejores reportados hasta ese momento (UWaterloo, 2016). P. Krolak, W. Felts y G. Marble publicaron "A man-machine approach toward solving the traveling salesman problem", una excelente publicación que describe un enfoque práctico para encontrar buenas soluciones a casos de PAV geométricos, involucrando visitas generadas por humanos, relajando el problema de asignación, insertando nodos 2-opt, y una "rutina de mejora por región" (en el que el ser humano identifica una región en el recorrido actual que parece subóptima, y la subrutina es llamada para optimizar esa región y lo pega en el recorrido completo) (UWaterloo, 2016).

1972

N. Christofides publica "Bounds for the travelling-salesman problem" (UWaterloo, 2016). S. Hong publica "A linear programming approach for the traveling salesman problem", ésta es su tesis de Ph.D., el autor utiliza un algoritmo dual para resolver el problema de programación lineal relajado; Hong usa algoritmos basados en programación lineal para el PAV. Sus pruebas computacionales se llevaron a cabo en instancias euclidianas aleatorias que tienen hasta 20 ciudades. En 60 casos que se probaron, 59 fueron resueltos sin ramificaciones y el caso restante requirió un sólo ramal. Casos más grandes no fueron probados debido a las dificultades de su solución (UWaterloo, 2016). H. Steckhan y R. Thome publican "Vereinfachungen der Eastmanischeen branch-bound-lösung für symmetrische traveling salesman probleme", donde se dan algunas observaciones sobre el algoritmo de ramificación y acotamiento de Eastman [1958]; se dan resultados computacionales para casos hasta 10 ciudades (UWaterloo, 2016).

1973

S. Lin y B. W. Kernighan publicaron "An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem" (UWaterloo, 2016).

1974

K. Helbig Hansen y J. Krarup, publicaron "Improvements of the Held-Karp algorithm for the symmetric traveling-salesman problem", se dieron mejoras en el algoritmo de Held-Karp para el PAV simétrico, probaron su versión en la instancia de 57 ciudades de Karg y Thompson (1964) y un conjunto de instancias que tenían longitudes aleatorias (UWaterloo, 2016). M. Held, P. Wolfe y H. P. Crowder publicaron "Validation of subgradient optimization", se examinó en detalle el algoritmo de Held y Karp [1971]; la publicación incluye algunos resultados computacionales para el caso de 42 ciudades de Dantzig, Fulkerson, y Johnson [1954] (UWaterloo, 2016). P. M. Camerini, L. Fratta y F. Maffioli publicaron "On improving relaxation methods by modified gradient techniques" (UWaterloo, 2016).

1975

W. Schiebel, G. Unger y J. Terno publicaron "A cutting plane algorithm for the travelling salesman problem" (UWaterloo, 2016).

1976

P. Miliotis publicó "Integer programming approaches to the travelling salesman problem", donde el autor aplica programación entera para el PAV e implementó un algoritmo de ramificación y corte usando desigualdades de sub secuencias (UWaterloo, 2016).

1977

M. S. Bazaraa y J. J. Goode publicaron "The traveling salesman problem: a duality approach" (UWaterloo, 2016). La tesis de M. Grötschel, “Polyedrische Charackterisierungen kombinatorischer Optimierungsprobleme”, contiene gran parte de la obra poliédrica sobre el PAV que el autor llevó a cabo en forma conjunta con M. Padberg; también proporciona la solución para una instancia de 120 ciudades por medio de un algoritmo de planos de corte (UWaterloo, 2016). T. H. C. Smith y G. L. Thompson publicaron "A LIFO implicit enumeration search algorithm for the symmetric traveling salesman problem using Held and Karp's 1-tree relaxation" (UWaterloo, 2016).

1978

M. Grötschel y M. Padberg publicaron "On the symmetric traveling salesman problem: theory and computation" (UWaterloo, 2016). P. Miliotis publicó "Using cutting planes to solve the symmetric travelling salesman problem" (UWaterloo, 2016).

1979

R. E. Burkard publicó "Travelling salesman and assignment problems: a survey" (UWaterloo, 2016). A. Land publicó "The solution of some 100-city travelling salesman problems" (UWaterloo, 2016).

1980

H. Crowder y M. W. Padberg publicaron "Solving large-scale symmetric travelling salesman problems to optimality", este trabajo mejora el estudio de Padberg y Hong [1980], incluyendo la adición de nuevas etapas de planos de corte (UWaterloo, 2016). M. Grötschel publicó "On the symmetric

travelling salesman problem: solution of a 120-city problem", esta es la publicación del estudio computacional descrito en Grötschel [1977] (UWaterloo, 2016). D. J. Houck, J. C. Picard, M. Queyranne y R. R. Vemuganti publicaron "The travelling salesman problem as a constrained shortest path problem: theory and computational experience" (UWaterloo, 2016). M. W. Padberg y S. Hong publicaron "On the symmetric travelling salesman problem: a computational study", se describe un algoritmo de plano de corte (UWaterloo, 2016).

1982

J. Mohan publicó "A study in parallel computation - the traveling salesman problem" (UWaterloo, 2016). T. Volgenant y R. Jonker publicaron "A branch and bound algorithm for the symmetric traveling salesman problem based on the 1-tree relaxation", se describió una variación del algoritmo de Held-Karp, junto con los resultados de cálculo para un número de casos pequeños (UWaterloo, 2016).

1983

B. Gavish y K. N. Srikanth publicaron "Algorithms for solving large-scale symmetric traveling salesman problems to optimality" (UWaterloo, 2016). T. Volgenant y R. Jonker publicaron "The symmetric traveling salesman problem and edge exchanges in minimal 1-trees" (UWaterloo, 2016).

1984

R. Jonker y T. Volgenant publicaron "Nonoptimal edges for the symmetric traveling salesman problem" (UWaterloo, 2016).

1985

B. Fleischmann publicó "A cutting plane procedure for the travelling salesman problem on road networks", aquí se construye una relajación de la Programación Lineal utilizando cortes específicos del PAV descritos en el documento; si no se encuentra dicho corte, entonces se añadirá un corte de Gomory. Los resultados computacionales se dieron para un número de casos del PAV (UWaterloo, 2016).

1987

O. A. Holland publicó "Schnittebenenverfahren für travelling-salesman und verwandte probleme", fue su Tesis Doctoral (UWaterloo, 2016). M. Grötschel y O. Holland publicaron "A cutting plane algorithm for minimum perfect 2-matchings" (UWaterloo, 2016). M. Padberg y G. Rinaldi publicaron "Optimization of a 532-city symmetric traveling salesman problem by branch and cut" (UWaterloo, 2016).

1988

G. Carpaneto, M. Fischetti y P. Toth publicaron "New lower bounds for the symmetric travelling salesman problem" (UWaterloo, 2016).

1989

J. Rost y E. Maehle publicaron "Implementation of a parallel branch-and-bound algorithm for the travelling salesman problem" (UWaterloo, 2016).

1990

T. H. C. Smith y T. W. S. Meyer publicaron "Lower bounds for the symmetric travelling salesman problem from lagrangean relaxations"

(UWaterloo, 2016). T. Volgenant y R. Jonker publicaron "Fictitious upper bounds in an algorithm for the symmetric traveling salesman problem" (UWaterloo, 2016). M. Padberg y G. Rinaldi publicaron "An efficient algorithm for the minimum capacity cut problem" (UWaterloo, 2016). M. Padberg y G. Rinaldi publicaron "Facet identification for the symmetric traveling salesman polytope" (UWaterloo, 2016).

1991

M. Grötschel y O. Holland publicaron "Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems" (UWaterloo, 2016). M. Padberg y G. Rinaldi publicaron "A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems" (UWaterloo, 2016).

1992

S. Tschöke, M. Räcke, R. Lüling y B. Monien publicaron "Solving the traveling salesman problem with a parallel branch-and-bound algorithm on a 1024 processor network" (UWaterloo, 2016).

1993

J. M. Clochard y D. Naddef publicaron "Using path inequalities in a branch and cut code for the symmetric traveling salesman problem" (UWaterloo, 2016).

1994

M. Jünger, S. Thienel, y G. Reinelt publicaron "Provably good solutions for the traveling salesman problem" (UWaterloo, 2016).

1995

D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal y W. Cook, publicaron "Finding cuts in the PAV (A preliminary report)", donde hacen una descripción detallada de varios algoritmos de separación para desenmarañar y agrupar árboles; estos algoritmos fueron utilizados por los autores para resolver una serie de casos de la librería TSPLIB, incluyendo el pcb3038, fnl4461 y pla7392 (UWaterloo, 2016). T. Christof y G. Reinelt publicaron "Parallel cutting plane generation for the PAV-Extended Abstract" (UWaterloo, 2016). M. Jünger, G. Reinelt y G. Rinaldi publicaron "The traveling salesman problem" (UWaterloo, 2016). M. Jünger y P. Stömer publicaron "Solving large-scale traveling salesman problems with parallel branch-and-cut" (UWaterloo, 2016). S. Tschöke, R. Lüling y B. Monien publicaron "Solving the traveling salesman problem with a parallel branch-and-bound algorithm on a 1024 processor network" (UWaterloo, 2016).

e. Formulaciones existentes del PAVA

En Öncan, Altinel y Laporte (2007), se revisan 24 formulaciones existentes del PAVA, que se clasificaron en 7 categorías.

Muchas formulaciones del PAVA consisten en un PA y restricciones de eliminación de sub ciclos. Se utilizan variables binarias para indicar si el arco en estudio pertenece a la solución óptima o no. El modelo básico es el siguiente:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (2.05)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (2.06)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.07}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{2.08}$$

$$x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{2.09}$$

$$\{(i, j) : x_{ij} = 1 / i, j = 2, \ldots, n\} \quad \text{no contiene sub ciclos} \tag{2.10}$$

En esta formulación, las restricciones de asignación (2.06) y (2.07) aseguran que cada vértice incide en un arco de salida y un arco entrante. Restricciones (2.10) rompen sub ciclos en el conjunto $\{2, \ldots, n\}$. Junto con (2.06) y (2.07) también eliminan sub ciclos que contienen el vértice 1, y las restricciones de eliminación de sub ciclos para $i = 1$ se vuelven redundantes. Para ser precisos con la notación, se tiene en cuenta que el poliedro proyectado $TP(F)$ de una formulación PAVA, F se establece en el espacio de las variables x_{ij} (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

1. Formulación de Dantzig, Fulkerson y Johnson (DFJ)

En 1954, G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson y S. M. Johnson, en su publicación: “Solutions of a large-scale traveling-salesman problem”, formularon las siguientes restricciones de eliminación de sub ciclo:

$$\sum_{i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq \{2, \ldots, n\}, \quad 2 \leq |S| \leq n - 1 \tag{2.11}$$

Estas desigualdades son un aspecto que define M. Grötschel y M. Padberg (en: Teoría del Poliedro, New York, 1985) y se pueden agregar gradualmente a la formulación a través de un esquema de ramificación y acotamiento, que resulta en una solución óptima. En la práctica, se requieren relativamente pocas restricciones de eliminación de sub ciclos (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

2. Desigualdades de empaquetado de circuitos (CP)

Las siguientes desigualdades se conocen como circuito empaquetado o simplemente desigualdades del circuito:

$$\sum_{(i,j)\in C} x_{ij} \le |C| - 1, \quad \text{para todos los circuitos } D_C = (V_C, C),$$

$$V_C \subseteq \{2,\ldots,n\} \tag{2.12}$$

La formulación obtenida reemplazando las desigualdades (2.10) por las desigualdades del circuito (2.12) es una formulación válida para el PAVA, tomado del documento de 1985 de los editores E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan y D. B. Shymoys, "The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization", donde se incluyó el trabajo de M. Grötschel y M. Padberg, "Polyhedral theory". (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

3. Formulación de Miller, Tucker y Zemlin (MTZ)

La primera formulación extendida conocida del PAVA se debe a C. E. Miller, A. W. Tucker y R. A. Zemlin, que en 1960 publicaron: "Integer programming formulations and travelling salesman problems". Originalmente se propuso para un Problema de Enrutamiento de Vehículos (VRP) donde el número de vértices de cada ruta es limitado. Utiliza variables u_i para definir el orden en que se visita cada vértice i en un recorrido. Las restricciones de eliminación de sub ciclo de la formulación de MTZ son las siguientes:

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \le n-2, \quad i,j = 2,\ldots,n \tag{2.13}$$

$$1 \le u_i \le n-1, \quad i = 2,\ldots,n \tag{2.14}$$

Las variables u_i no están restringidas en el documento original. Los límites expresados en (2.14) se introdujeron después, y no afectan el límite PL obtenido en $P(MTZ)$ (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

4. Formulación de Desrochers y Laporte (DL)

M. Desrochers y G. Laporte en 1991 publicaron: "Improvements and extensions to the Miller–Tucker–Zemlin subtour elimination constraints". La representación polinómica compacta del $P(MTZ)$ se extiende por lo general a una serie de variantes del VRP. Otra ventaja de la formulación MTZ es que las restricciones de eliminación de sub ciclo (2.13) y (2.14) se pueden incorporar en otros tipos de formulaciones junto con restricciones más fuertes. Motivados por estos hechos, Desrochers y Laporte mejoraron las restricciones de eliminación del sub ciclo (2.13) y (2.14) para obtener las formas más fuertes:

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} + (n-3)x_{ji} \le n-2, \quad i,j = 2,\ldots,n. \tag{2.15}$$

$$1 + (n-3)x_{i1} + \sum_{j=2}^{n} x_{ji} \le u_i \le n-1-(n-3)x_{1i} - \sum_{j=2}^{n} x_{ij}, \quad i = 2,\ldots,n \tag{2.16}$$

Los autores han demostrado que las desigualdades (2.15) son aspectos definidos; también han demostrado que (2.16) son desigualdades válidas, sobre esto último Driscoll ha demostrado que son aspectos definitorios, véase el documento de P. J. Driscoll, de 1995, "A new hierarchy of relaxation for 0–1 mixed integer problems with application to some specially structured problems". (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

5. Formulación de Sherali y Driscoll (SD)

H. D. Sherali y P. J. Driscoll, en el 2002, publicaron: "On tightening the relaxations of Miller–Tucker–Zemlin formulations for asymmetric traveling

salesman problems", donde han fortalecido las relajaciones de la formulación de MTZ para el PAVA. Los autores aplican sólo una versión parcial de primer nivel de la técnica de Reformulación-Linealización (RLT), a una reformulación no lineal de las restricciones de eliminación del sub ciclo del MTZ. Las nuevas variables y_{ij} suponen un valor distinto de cero que representa el orden del arco (i, j) en el recorrido. Sus $O(n^2)$ restricciones de eliminación de sub ciclo se presentan a continuación, (Para más detalles de la técnica RLT véase H. D. Sherali y W. P. Adam, de 1999, "A reformulation–linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems"):

$$\sum_{j=2}^{n} y_{ij} + (n-1)x_{i1} = u_i, \quad i = 2,\ldots,n \tag{2.17}$$

$$\sum_{i=2}^{n} y_{ij} + 1 = u_j, \quad j = 2,\ldots,n \tag{2.18}$$

$$x_{ij} \le y_{ij} \le (n-2)x_{ij}, \quad i, j = 2,\ldots,n \tag{2.19}$$

$$u_j + (n-2)x_{ij} - (n-1)(1-x_{ji}) \le y_{ij} + y_{ji} \le u_j - (1-x_{ji}),$$
$$i, j = 2,\ldots,n \tag{2.20}$$

$$1 + (1-x_{1j}) + (n-3)x_{j1} \le u_j \le (n-1) - (n-3)x_{1j} - (1-x_{j1}),$$
$$j = 2,\ldots,n \tag{2.21}$$

(Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

6. Formulación de Gavish y Graves (GG)

Una amplia clase de formulaciones extendidas de PAVA se conocen como formulaciones de flujo de productos, de A. Langevin, F. Soumis y J. Desrosiers, de 1990, en: "Classification of travelling salesman problem formulations", donde las variables adicionales representan los flujos de productos a través de los arcos y satisfacen restricciones adicionales de conservación de flujo. Estos modelos pertenecen a tres clases: flujo de

productos únicos (SCF), flujo de dos productos (TCF) y formulaciones de flujo de múltiples productos (MCF).

La formulación más antigua de SCF se debe a B. Gavish y S. C. Graves, de 1978, en: “The travelling salesman problem and related problems”. Las variables continuas no negativas g_{ij} describen el flujo de un producto único al vértice 1 desde cualquier otro vértice. Un conjunto de $O(n^2)$ restricciones de eliminación de sub ciclo está dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ji} - \sum_{j=2}^{n} g_{ij} = 1, \quad i = 2,\ldots,n \tag{2.22}$$

$$0 \le g_{ij} \le (n-1)x_{ij}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 2,\ldots,n \tag{2.23}$$

Una interpretación similar a la dada para las variables adicionales u_i de la formulación MTZ también se puede aplicar a las variables g_{ij}. Estos se pueden ver como el número de arcos incluidos en el camino desde el vértice 1 y el arco (i, j) en el recorrido óptimo, de L. Gouveia y J. M. Pires, de 1999, en: “The asymmetric travelling salesman problem and a reformulation of the Miller–Tucker–Zemlin constraints”.

Como ejemplo de la formulación TCF, podemos mencionar la formulación FCG, debida a G. Finke, A. Claus y E. Gunn, de 1984, “A two commodity network flow approach to the travelling salesman problem”. A. Langevin, F. Soumis y J. Desrosiers, de 1990, “Classification of travelling salesman problem formulations”, han demostrado que las formulaciones FCG y GG son equivalentes (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

7. Formulación de Flujo de Múltiples Productos (MCF)

R. T. Wong, en 1980 en el documento: “Integer programming formulations of the traveling salesman problem”, fue el primero en formular el

PAVA como un modelo de MCF utilizando variables no negativas adicionales para describir el flujo de $2(n-1)$ productos entre el vértice 1 y los otros vértices k, es decir, productos k que toman el valor $w_{ij}^{(k,1)}$, $k = 2,\ldots,n$ y productos l tomando el valor $w_{ij}^{(1,l)}$, $l = 2,\ldots,n$. La variable de flujo $w_{ij}^{(1,l)}$ es igual a uno si y solo si el producto que va de 1 a l fluye en el arco (i,j). La variable de flujo $w_{ij}^{(k,1)}$ es igual a uno si y solo si el producto que va de k a 1 fluye en el arco (i,j). Sus $O(n^3)$ restricciones de eliminación de sub ciclo se definen de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^{(1,l)} - \sum_{j=1}^{n} w_{ji}^{(1,l)} = 0, \quad i, l = 2,\ldots,n, \quad i \neq l \tag{2.24}$$

$$\sum_{j=2}^{n} w_{1j}^{(1,l)} - \sum_{j=2}^{n} w_{j1}^{(1,l)} = 1, \quad l = 2,\ldots,n \tag{2.25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^{(1,i)} - \sum_{j=1}^{n} w_{ji}^{(1,i)} = -1, \quad i = 2,\ldots,n \tag{2.26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^{(k,1)} - \sum_{j=1}^{n} w_{ji}^{(k,1)} = 0, \quad i, k = 2,\ldots,n, \quad i \neq k \tag{2.27}$$

$$\sum_{j=2}^{n} w_{1j}^{(k,1)} - \sum_{j=2}^{n} w_{j1}^{(k,1)} = -1, \quad k = 2,\ldots,n \tag{2.28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^{(i,1)} - \sum_{j=1}^{n} w_{ji}^{(i,1)} = 1, \quad i = 2,\ldots,n \tag{2.29}$$

$$0 \leq w_{ij}^{(1,l)} \leq x_{ij}, \quad i, j = 1,\ldots,n, \quad l = 2,\ldots,n \tag{2.30}$$

$$0 \leq w_{ij}^{(k,1)} \leq x_{ij}, \quad i, j = 1,\ldots,n, \quad k = 2,\ldots,n \tag{2.31}$$

Tener en cuenta que solo las variables x_{ij} están sujetas a integralidad, ya que las variables $w_{ij}^{(1,l)}$ y $w_{ij}^{(k,1)}$ son enteras siempre que las x_{ij} lo sean, porque la matriz de flujo para los productos k y l es totalmente unimodular.

De hecho, la variable x_{ij} puede interpretarse como la capacidad vinculada al arco (i, j).

A. Langevin, en 1988 en: “Planification des tournées de véhicules”, y R. J. Loulou, en 1988 en: “On multicommodity flow formulations for the TSP”, propusieron modificaciones del modelo Wong MCF (WONG). La formulación de Langevin (LANGEVIN) es una restricción de WONG. La formulación de Loulou (LOULOU) es una restricción de LANGEVIN y WONG. Por lo tanto, WONG, LOULOU y LANGEVIN son equivalentes.

Otra formulación de MCF propuesta por A. Claus (CLAUS), en 1984 en: “A new formulation for the travelling salesman problem”, utiliza sólo $(n-1)$ productos. A. Langevin, F. Soumis y J. Desrosiers, en 1990 en su publicaron: “Classification of travelling salesman problem formulations”, observaron que se puede obtener CLAUS de WONG al eliminar la mitad de las variables de flujo y las restricciones relacionadas. Claus usa solo variables de flujo no negativas $w_{ij}^{(k,1)}$ y todas las restricciones en las que aparecen. Por lo tanto, las restricciones de eliminación del sub ciclo de Claus consisten en (2.27)-(2.29) y (2.31) (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

8. Formulación de Fox, Gavish y Graves (FGG)

Las siguientes formulaciones aprovechan la relación entre el PAVA y la programación de máquinas. Considere el problema de programar una máquina con n trabajos programados. La máquina está en el estado inicial que se denota por trabajo 1. Suponemos que la máquina volverá a estar en ese estado después de procesar todos los trabajos $(n-1)$ restantes. Un conjunto de $(n-1)$ trabajos, denotado por $2,\ldots,n$, se deben realizar en una sola máquina y se incurre en un costo de configuración cuando el trabajo j se procesa inmediatamente después del trabajo i en la posición k-ésima. El objetivo es determinar una secuencia más barata de los n

trabajos. Este problema se conoce como PAV Dependiente del Tiempo (TDTSP), una generalización del PAV estándar donde el costo de un arco determinado depende de su posición en el recorrido.

K. R. Fox, B. Gavish y S. C. Graves, en 1980 publicaron: “An n-constraint formulation of the (time-dependent) traveling salesman problema”, donde han propuesto tres formulaciones dependientes del tiempo. El que se presenta a continuación tiene cuatro conjuntos de restricciones y se indica como FGG4 en la secuela. Sea r_{ijk} una variable igual a 1 si y solo si el vértice j se visita inmediatamente después del vértice i en la posición k-ésima. El modelo FGG4 es:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\, r_{ijk} \tag{2.32}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ijk} = 1, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.33}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ijk} = 1, \quad j = 1,\ldots,n \tag{2.34}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ijk} = 1, \quad k = 1,\ldots,n \tag{2.35}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{n} k\, r_{ijk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k\, r_{jik} = 1, \quad i = 2,\ldots,n \tag{2.36}$$

$$r_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i, j, k = 1,\ldots,n \tag{2.37}$$

Fox, Gavish y Graves han notado que las restricciones (2.35) no son necesarias y pueden ser eliminadas. Su segunda formulación, concretamente FGG3, consiste en la función objetivo (2.32) y las restricciones (2.33), (2.34), (2.36) y (2.37).

La tercera formulación de Fox, Gavish y Graves, denotada por FGG2, es más compacto que la formulación FGG4. Utiliza (2.38) como una agregación de restricciones (2.33)-(2.35):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ijk} = n \qquad (2.38)$$

Para garantizar la validez de la formulación FGG2, Fox, Gavish y Graves asumen que $r_{ij1} = r_{jin}$ para $i = 2,\ldots,n$, $r_{1ik} = 0$ para $k = 2,\ldots,n$ y $r_{i1k} = 0$ para $k = 1,\ldots,n-1$ (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

9. Formulación de Gouveia y Pires (GP)

L. Gouveia y J. M. Pires, en 1999 publicaron: "The asymmetric travelling salesman problem and a reformulation of the Miller–Tucker–Zemlin constraints"; primero propusieron formulaciones generalizadas del MTZ. Han demostrado que estas formulaciones son más fuertes que la formulación MTZ. Después han ideado formulaciones aún más fuertes al generalizar CLAUS (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

9a. Generalizaciones de la formulación MTZ

En su primera extensión de la formulación MTZ, Gouveia y Pires, han demostrado que el conjunto de desigualdades:

$$x_{ij} + v_{ki} - v_{kj} \le 1, \quad i, j, k = 2,\ldots,n \qquad (2.39)$$

$$x_{ij} - v_{ij} \le 0, \quad i, j = 2,\ldots,n \qquad (2.40)$$

$$x_{ij} + v_{ji} \le 1, \quad i, j = 2,\ldots,n \qquad (2.41)$$

elimina los sub ciclos y, junto con las restricciones (2.06)-(2.09), proporciona una formulación válida de PAVA. Las variables adicionales v_{ij}

indican si el vértice i está en la ruta del vértice 1 al vértice j. Esta primera formulación de Gouveia y Pires se denomina formulación GP1. Recuerde que las variables u_i de la formulación MTZ se pueden interpretar como el número de vértices intermedios en la trayectoria desde el vértice 1 al vértice i del recorrido óptimo. Estas variables están relacionadas con las nuevas variables v_{ij} de la siguiente manera:

$$u_i = \sum_{k=2}^{n} v_{ki}, \quad i = 2, \ldots, n \tag{2.42}$$

Las restricciones (2.39) se pueden reescribir de dos maneras diferentes (Gouveia y Pires):

$$x_{ji} + x_{ij} + v_{ki} - v_{kj} \leq 1, \quad i, j, k = 2, \ldots, n \tag{2.43}$$

$$x_{kj} + x_{ik} + x_{ij} + v_{ki} - v_{kj} \leq 1, \quad i, j, k = 2, \ldots, n \tag{2.44}$$

Las nuevas formulaciones, llamadas GP2 y GP3, obtenidas al reemplazar (2.39) primero con (2.43) y luego con (2.44), respectivamente, son válidas para el PAVA. En su cuarta formulación, llamada GP4, Gouveia y Pires, consideran las restricciones (2.43) y (2.44) junto con las restricciones (2.06)-(2.09), (2.40) y (2.41) (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

9b. Generalizaciones de la formulación de CLAUS

L. Gouveia y J. M. Pires, en el 2001, en el artículo: “The asymmetric travelling salesman problem: on generalizations of disaggregated Miller–Tucker–Zemlin constraints”, han considerado una versión equivalente de CLAUS. Aunque ambas formulaciones son equivalentes y producen el mismo límite de PL, el orden de indexación de las variables de flujo de productos es diferente. Usan f_{kij} en lugar de $w_{ij}^{(k,1)}$, que solo afecta su interpretación. A saber, $f_{kij} = 1$ indica que el arco (i, j) está en la ruta

desde el vértice $k = 2, \ldots, n$ al vértice 1. Su formulación de MCF consiste en las restricciones de asignación (2.06), (2.07), restricciones de integralidad (2.09) y las siguientes restricciones de eliminación de sub ciclos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{kji} - \sum_{i=1}^{n} f_{kij} = 0, \quad j, k = 2, \ldots, n, \quad j \neq k \tag{2.45}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{jji} = 1, \quad j = 2, \ldots, n \tag{2.46}$$

$$f_{kij} \leq x_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad k = 2, \ldots, n \tag{2.47}$$

$$f_{kij} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad k = 2, \ldots, n \tag{2.48}$$

Gouveia y Pires han declarado que las variables v_{ij} están relacionadas con las nuevas variables f_{kij} de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{kij} = v_{ki}, \quad i, k = 2, \ldots, n \tag{2.49}$$

También es interesante observar que el lado izquierdo de (2.49) cuenta el número de arcos que dejan el vértice i en la trayectoria del vértice k al vértice 1.

Gouveia y Pires tienen desigualdades generalizadas (2.43) y (2.44), respectivamente, como sigue:

$$\sum_{p, q \in S} x_{pq} + v_{ki} - v_{kj} \leq |S| - 1, \quad i, j, k = 2, \ldots, n,$$
$$S \subseteq \{2, \ldots, n\}, \quad |S| \geq 2, \quad k \notin S, \quad i, j \in S \tag{2.50}$$

$$v_{ki} + \sum_{m \in S} (x_{im} + x_{km}) + \sum_{m \in S} (x_{mj} + x_{mk}) + \sum_{p, q \in S} x_{pq} + x_{ik} + x_{kj} + x_{ij} \leq 1 + |S| + v_{kj}$$
$$i, j, k = 2, \ldots, n, \quad S \subset V \setminus \{1, i, j, k\}, \tag{2.51}$$

Tomar en cuenta que para $|S| = 2$ las restricciones (2.50) se reducen a (2.43) y, para $|S| = 0$ las restricciones (2.51) se reducen a (2.44). En consecuencia, la formulación GP5 se obtiene reemplazando las desigualdades (2.44) de GP3 con las desigualdades (2.51) y GP6 se obtiene reemplazando las desigualdades (2.43) de la formulación GP2 con las desigualdades (2.50).

Finalmente, observando que las desigualdades (2.43) y la transformación lineal (2.49) no son redundantes para el poliedro $P(CLAUS)$, Gouveia y Pires han propuesto la formulación GP7 que consiste en (2.06)-(2.09), (2.07) y (2.45)-(2.49). También han generalizado aún más la formulación de GP7 al reemplazar las restricciones (2.43) de la formulación de GP7 por (2.50). Por lo tanto, la formulación GP8 consiste de (2.06)-(2.09) y (2.45)-(2.50) (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

10. Formulación de Sarin, Sherali y Bhootra (SSB)

S. C. Sarin, H. D. Sherali y A. Bhootra, en el 2005, en el artículo: "New tighter polynomial length formulations for the asymmetric travelling salesman problem with and without precedence constraints", han propuesto las siguientes $O(n^3)$ restricciones para el PAVA. Sea $d_{ij} = 1$ si y sólo si el vértice i precede (no necesariamente inmediatamente) al vértice j en un recorrido, y sea:

$$d_{ij} \geq x_{ij}, \quad i, j = 2, \ldots, n \tag{2.52}$$

$$d_{ij} + d_{ji} = 1, \quad i, j = 2, \ldots, n \tag{2.53}$$

$$d_{ij} + d_{jk} + d_{ki} \leq 2, \quad i, j, k = 2, \ldots, n \tag{2.54}$$

Por lo tanto, la formulación SSB1 consiste en las desigualdades (2.06)-(2.09) y (2.52)-(2.54). Tener en cuenta que las variables auxiliares han

determinado una relación de precedencia entre los vértices y desempeñan el mismo papel que las variables v_{ij} de Gouveia y Pires. Es decir, $v_{ij} = d_{ij}$.

Sarin, Sherali y Bhootra han propuesto dos formulaciones más fuertes, a saber, SSB2 (L1ATSPxy) y SSB3 (SL1ATSPxy), que son extensiones de tamaño polinómico de la formulación SSB1, reemplazando (2.54) con una de las siguientes desigualdades, respectivamente:

$$(d_{ij} + x_{ji}) + d_{jk} + d_{ki} \leq 2, \quad i, j, k = 2, \ldots, n \tag{2.55}$$

$$3(d_{ij} + d_{jk} + d_{ki}) + x_{ji} + x_{kj} + x_{ik} \leq 6, \quad i, j, k = 2, \ldots, n \tag{2.56}$$

Las desigualdades (2.55) también han sido discutidas por I. K. Altınel, T. Öncan y A. T. Ünal, en el 2005 en el documento: “New extended inequalities with precedence variables for the asymmetric travelling salesman problem”. Para ajustar aún más las relajaciones PL de las formulaciones SSB2 y SSB3, Sarin, Sherali y Bhootra han incluido las siguientes restricciones para ambas formulaciones SSB2 y SSB3:

$$x_{1j} + x_{j1} \leq 1, \quad j = 2, \ldots, n \tag{2.57}$$

(Öncan, Altinel y Laporte, 2007)

11. Formulación de Sherali, Sarin y Tsai (SST)

La última formulación del PAVA que se conoce se debe a H. D. Sherali, S. C. Sarin y P. F. Tsai, que en el 2006 publicaron: “A class of lifted path and flow-based formulations for the asymmetric travelling salesman problem with and without precedence constraints”. Comenzaron con las siguientes restricciones de camino mejorado:

$$d_{ij} \geq x_{1i}, \quad i, j = 2, \ldots, n \tag{2.58}$$

$$d_{ji} \geq x_{i1}, \quad i, j = 2, \ldots, n \tag{2.59}$$

$$-(1-x_{ik}) \le d_{ij} - d_{kj} \le 1 - x_{ik}, \quad i,j,k = 2,\ldots,n \tag{2.60}$$

combinaron las restricciones (2.52) y (2.53) para obtener las restricciones de eliminación de sub ciclo de la formulación SST1 (llamada ATSP0).

Estos autores también han aplicado un RLT (Técnicas de Reformulación Lineal) de primer orden a la formulación SST1 y derivaron las siguientes restricciones:

$$0 \le t_{ij}^{k} \le x_{ik}, \quad i,j,k = 2,\ldots,n, \quad i,k \ne j \tag{2.61}$$

$$\sum_{k=2;k\ne j}^{n} t_{ij}^{k} + x_{ij} = d_{ij}, \quad i,j = 2,\ldots,n \tag{2.62}$$

$$x_{1k} + \sum_{i=2;i\ne j}^{n} t_{ij}^{k} = d_{kj}, \quad k,j = 2,\ldots,n \tag{2.63}$$

que se muestran más rigurosas que las restricciones de eliminación del sub ciclo MCF. Sherali, Sarin y Tsai han propuesto varias formulaciones mejoradas que son más estrictas que las SSB1 y SSB2. En aras de la concisión, los autores solo presentaron SST2 (llamado ATSP6) que rinde los límites más estrictos. La formulación SST2 se define con desigualdades (2.06)-(2.09), (2.53), (2.55), (2.58), (2.59) y (2.61)-(2.63) (Öncan, Altinel y Laporte, 2007).

12. Resumen de las formulaciones enumeras por Öncan, Altinel y Laporte

El Cuadro 2.13, muestra 24 formulaciones enumeradas por Öncan, Altinel y Laporte, clasificadas en 7 categorías:

Cuadro 2.13

Clasificación de las formulaciones del PAV

Categoría	Formulación	Variables	Restricciones
Tamaño exponencial	DFJ	$O(n^2)$	$O(2^n)$
	GP5, GP6, GP8		
	CP		
Basado en Miller–Tucker–Zemlin	MTZ	$O(n^2)$	$O(n^2)$
	DL		
	SD		
Flujo único	GG	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Dos flujos	FCG	$O(n^2)$	$O(n)$
Múltiples flujos	WONG	$O(n^3)$	$O(n^3)$
	CLAUS		
	LANGEVIN		
	LOULOU		
	GP7		
	SST2		
Dependiente del tiempo	FGG2, FGG3, FGG4	$O(n^3)$	$O(n)$
Basado en variables precedentes	GP1, GP2, GP3, GP4	$O(n^2)$	$O(n^3)$
	SSB1, SSB2, SSB3		
	SST1		

Fuente Öncan, Altinel y Laporte (2009).

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

3.1. Introducción

La solución óptima del PAV consiste en localizar el ciclo hamiltoniano de menor costo en una matriz de costos dada. En la presente investigación para evitar la formación de sub ciclos en la solución, se añadieron variables enteras a la formulación del PA, que indican la posición que toma cada ciudad en la secuencia.

Se generaron relaciones entre las variables binarias del PA y las variables enteras consiguiendo eliminar los sub ciclos.

Se estudió la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) para el PAV, bajo las relaciones encontradas y se determinó una relación débil por relajamiento entre las variables.

Se plantearon formulaciones bajo las relaciones débiles y fuertes entre las variables. Se utilizó el software GAMS para comprobar las formulaciones. Como medida de verificación se desarrolló un software que determina la solución óptima por revisión exhaustiva de los casos planteados.

3.2. Revisión del Problema de Asignación

Se define la variable binaria x_{ij}, como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el equipo i es asignado a la tarea j} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

La formulación matemática del PA se muestra en el Cuadro 3.01:

Cuadro 3.01

Formulación del PA

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.01)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.02)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Fuente Burkard, R., Dell'Amico, M., & Martello, S. (2009).

Se observó que:

a. El conjunto de restricciones 3.01 del Cuadro 3.01, nos indica que el equipo i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se debe asignar sólo a una de las n tareas. Si la solución del PA se toma como un camino, lo indicado en la Figura 3.01, resulta $x_{ij} + x_{ik} = 1 + 1 = 2$, lo que viola las restricciones 3.01, por lo que no es posible, que estando en la ciudad i, se visite dos o más ciudades.

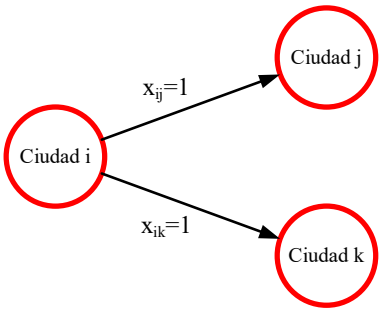


***Figura 3.01*. Conectar la ciudad i con las ciudades j y k**
Fuente propia.

b. El conjunto de restricciones 3.02 del Cuadro 3.01, nos indica que la tarea j $(j=1,2,\ldots,n)$ debe ser realizada por un sólo equipo. Si la solución del PA se toma como un camino, lo indicado en la Figura 3.02, resulta $x_{ij}+x_{kj}=1+1=2$, lo que viola las restricciones 3.02, por lo que no es posible que una ciudad j sea visitada desde dos o más ciudades.

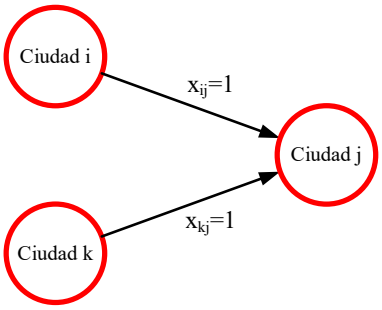


***Figura 3.02.* Conectar las ciudades i y k con la ciudad j**
Fuente propia.

c. La solución del PA, tomada como un camino, no restringe que desde una ciudad i se retorne a la ciudad inicial quedando aún ciudades por visitar, como se muestra en la Figura 3.03. Esto origina la presencia de sub ciclos. La solución óptima obtenida de la región factible formada por las restricciones de la formulación del PA no garantiza la

formación de un ciclo hamiltoniano, por lo que no es posible utilizar la formulación del .PA como formulación del PAV. Note que en la Figura 3.03, desde la ciudad i no se puede retornar a una ciudad diferente a la ciudad inicial por las consideraciones de la observación (b).

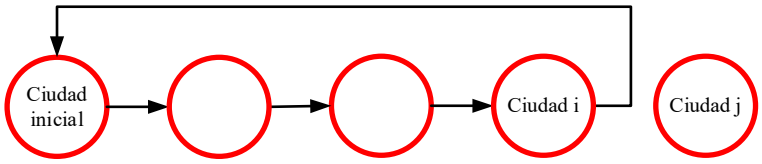
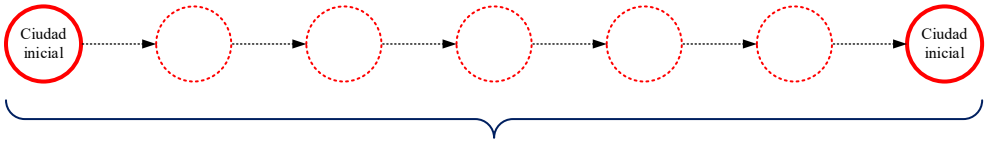


***Figura 3.03*. Formación de sub ciclos**
Fuente propia.

La formación de un sub ciclo con la ciudad inicial, genera otros sub ciclos entre las restantes ciudades, se observa la formación de sub ciclos en la Figura 3.04:



Ciclo con menos de n ciudades: Sub ciclo

***Figura 3.04*. Sub ciclo en un PAVA de dimensión n**
Fuente propia.

Para evitar la formación de sub ciclos se planteó la adición de nuevas restricciones, que garanticen la formación de un ciclo hamiltoniano.

El Cuadro 3.02 describe el número de variables y restricciones requeridas por la formulación del PA:

Cuadro 3.02
Número de variables y restricciones del PA

Variables binarias	n^2
Variables enteras	0
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	0
Restricciones de sub ciclos	0
Total de restricciones	$2n$

Fuente propia.

3.3. Eliminación de sub ciclos

3.3.1. Definición de la variable u_j

La variable u_j queda definida a partir de la Figura 3.05:

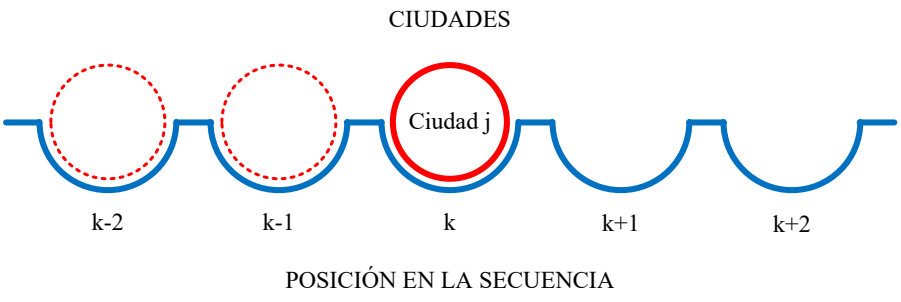


***Figura 3.05*. Posición de la ciudad j en la secuencia**
Fuente propia.

Se definió u_j como la posición que ocupa la ciudad j en la secuencia. Si se tiene $u_j = k$, nos indica que la ciudad j toma la posición k en la secuencia.

3.3.2. Características de la variable u_j

La variable u_j tiene las siguientes características:

a. u_j es entero

b. $u_j \in \{1,2,\ldots,n\} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

De esta característica se tiene:

$$1 \le u_j \le n \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

c. $u_i \neq u_j, \ \forall i \neq j$

Dos ciudades diferentes no pueden ocupar la misma posición. De esta característica se tiene:

$$u_j - u_i \neq 0, \ \forall i \neq j$$

De las características (a) y (b) se tiene:

$$\begin{cases} u_j - u_i \ge 1 & \text{si } u_j > u_i \\ u_j - u_i \le -1 & \text{si } u_j < u_i \end{cases}$$

De donde se propuso:

$$(u_j - u_i)^2 \ge 1 \qquad \forall i \neq j$$

o en forma desarrollada:

$$u_i^2 + u_j^2 - 2u_i u_j \geq 1 \qquad \forall i \neq j$$

d. $u_1 = 1$

Asumido. Para un ciclo hamiltoniano dado, como el que se indica en la Figura 3.06, la ciudad de inicio y de llegada puede ser cualquiera de las n ciudades y la secuencia y el costo no varían.

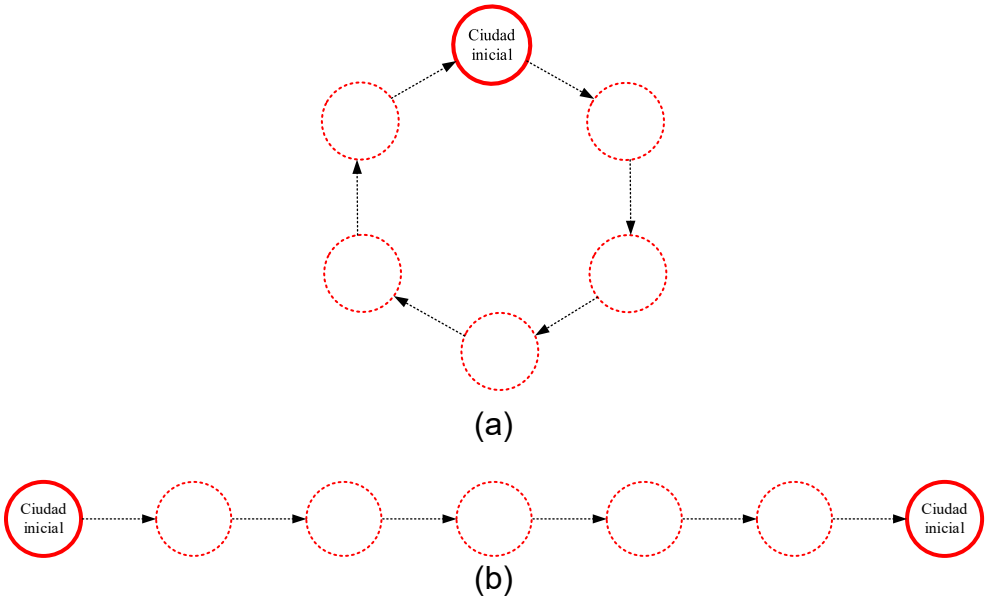


Figura 3.06. **Ciclo hamiltoniano**
Fuente propia.

Para no comparar ciclos iguales con diferentes ciudades de inicio, se establece una ciudad de inicio cualquiera.

Según esta consideración, la característica (b) cambia a:

$$2 \leq u_j \leq n \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

3.3.3. La estructura formada por $(u_j - u_i)$

Se estableció la estructura $(u_j - u_i)$, que representa el número de posiciones que se necesita desde la ciudad i para alcanzar la posición de la ciudad j. En el Cuadro 3.03 se muestra la generación de la estructura $(u_j - u_i)$ en una matriz de costos dada.

Cuadro 3.03

Determinación de la estructura $(u_j - u_i)$

	1	2	3	⋯	j	⋯	n-1	n
1	u_1-u_1	u_2-u_1	u_3-u_1	⋯	u_j-u_1	⋯	u_{n-1}-u_1	u_n-u_1
2	u_1-u_2	u_2-u_2	u_3-u_2	⋯	u_j-u_2	⋯	u_{n-1}-u_2	u_n-u_2
3	u_1-u_3	u_2-u_3	u_3-u_3	⋯	u_j-u_3	⋯	u_{n-1}-u_3	u_n-u_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮
i	u_1-u_i	u_2-u_i	u_3-u_i	⋯	u_j-u_i	⋯	u_{n-1}-u_i	u_n-u_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮
n-1	u_1-u_{n-1}	u_2-u_{n-1}	u_3-u_{n-1}	⋯	u_j-u_{n-1}	⋯	u_{n-1}-u_{n-1}	u_n-u_{n-1}
n	u_1-u_n	u_2-u_n	u_3-u_n	⋯	u_j-u_n	⋯	u_{n-1}-u_n	u_n-u_n

Fuente propia.

El conjunto de resultados posibles de la estructura $(u_j - u_i)$, se desarrolla a partir de los valores posibles de u_i y u_j:

$$u_i, u_j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$$

De dónde se obtiene:

$$(u_j - u_i) \in \{-(n-1), -(n-2), \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, (n-2), (n-1)\}$$

3.3.4. Ciudades consecutivas y no consecutivas

Se estudió que dos ciudades serán consecutivas si ocupan las posiciones k y $(k+1)$, las posibilidades son:

a. La ciudad i está en la posición k y la ciudad j en $k+1$:

$$(u_j - u_i) = (k+1) - k = 1$$

b. La ciudad j está en la posición k y la ciudad i en $k+1$:

$$(u_j - u_i) = k - (k+1) = -1$$

En ciudades consecutivas se tiene:

$$(u_j - u_i) = 1 \quad \vee \quad (u_j - u_i) = -1$$

En ciudades no consecutivas se tiene:

$$(u_j - u_i) \neq 1 \quad \wedge \quad (u_j - u_i) \neq -1$$

3.3.5. Relación entre x_{ij} (o x_{ji}) y $(u_j - u_i)$

La relación entre las variables binarias del PA y las variables enteras para la eliminación de sub ciclos $(u_j - u_i)$ se muestran en la Figura 3.07, donde se determina que la variable x_{ij} (o x_{ji}) será uno si u_i y u_j son ciudades consecutivas.

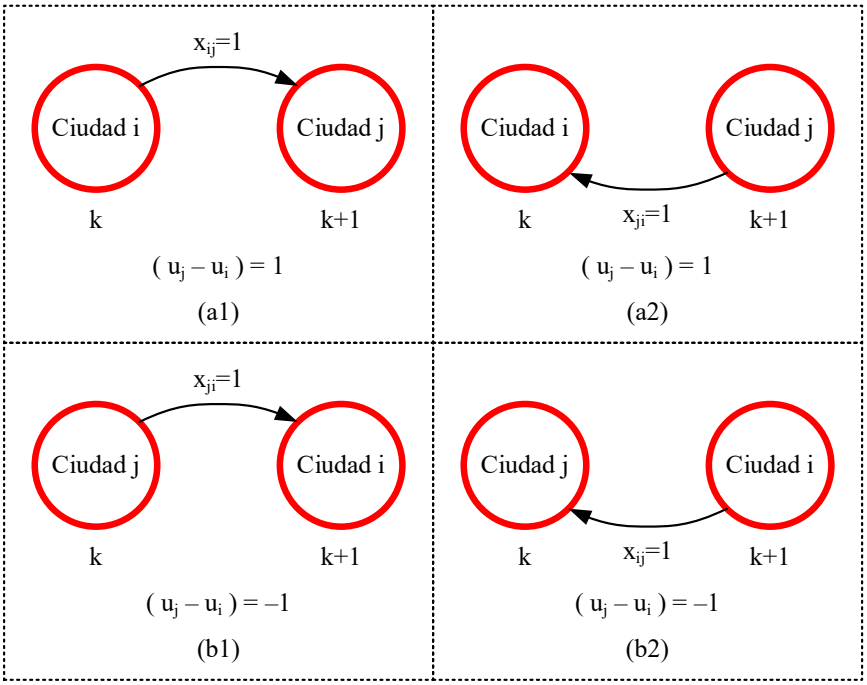


***Figura 3.07*. Relaciones entre x_{ij} (o x_{ji}) y $(u_j - u_i)$**

Fuente propia.

En la Figura 3.07 se observa que estando en una ciudad previa i y se visita una ciudad consecutiva j, no se debe volver a la ciudad previa i, porque $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$.

Para encontrar las relaciones entre x_{ij} y $(u_j - u_i)$, se estudiaron las alternativas descritas en la Figura 3.07, como posibilidades independientes:

a. Para $(u_j - u_i) = 1$:

a1. Desde la ciudad i se visita la ciudad j.

Si las ciudades i y j son consecutivas:

$$(u_j - u_i) = 1 \Rightarrow x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad i se conecta con la ciudad j} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Si las ciudades i y j no son consecutivas:

$$(u_j - u_i) \neq 1 \Rightarrow x_{ij} = 0$$

a2. Desde la ciudad j se visita la ciudad i.

Si las ciudades i y j son consecutivas:

$$(u_j - u_i) = 1 \Rightarrow x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad j se conecta con la ciudad i} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Si las ciudades i y j no son consecutivas:

$$(u_j - u_i) \neq 1 \Rightarrow x_{ji} = 0$$

b. Para $(u_j - u_i) = -1$

b1. Desde la ciudad j se visita la ciudad i:

Si las ciudades i y j son consecutivas:

$$(u_j - u_i) = -1 \Rightarrow x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad j se conecta con la ciudad i} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Si las ciudades i y j no son consecutivas:

$$(u_j - u_i) \neq -1 \Rightarrow x_{ji} = 0$$

b2. Desde la ciudad i se visita la ciudad j:

Si las ciudades i y j son consecutivas:

$$(u_j - u_i) = -1 \Rightarrow x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad i se conecta con la ciudad j} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Si las ciudades i y j no son consecutivas:

$$(u_j - u_i) \neq -1 \Rightarrow x_{ij} = 0$$

3.4. Estudio de casos

3.4.1. Formación de sub ciclos

En el acápite 3.2, observación (c), se explicó cómo se origina la presencia de sub ciclos. En la Figura 3.08 se muestran sub ciclos de diferentes distancias.

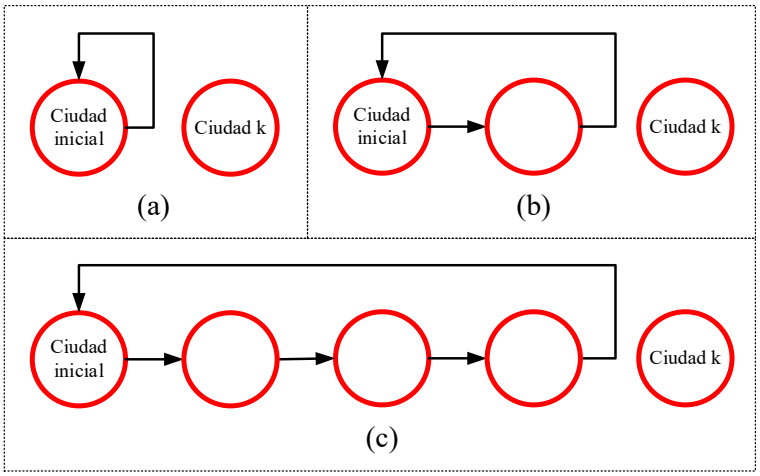


Figura 3.08. **Formación de sub ciclos**
Fuente propia.

Casos de formación de sub ciclos:

a. **La distancia a la ciudad inicial es menor de uno.** Caso (a) de la Figura 3.08, en esta opción se tiene $(u_1 - u_1) = 0$, lo que implica que no son ciudades consecutivas, por lo tanto $x_{11} = 0$, es decir no es posible esta conexión.

b. **La distancia a la ciudad inicial es uno.** Caso (b) de la Figura 3.08, en esta opción se tiene $(u_j - u_1) = 1$, lo que implica que las ciudades 1 y j son ciudades consecutivas, pero la doble conexión $x_{1j} = 1$ y $x_{j1} = 1$ no es posible por: $x_{1j} + x_{j1} \leq 1$.

c. **Distancia a la ciudad inicial es mayor de uno.** Caso (c) de la Figura 3.08, en esta opción se obtiene $(u_j - u_1) \geq 2$, lo que implica que las ciudades 1 y j no son ciudades consecutivas, por lo tanto $x_{1j} = 0$, es decir no es posible esta conexión.

3.4.2. Formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)

Esta formulación fue diseñada por Miller, Tucker y Zemlin. Fue presentada por Miller en 1960.

Para esta formulación se utiliza la formulación del PA y se añaden las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
& u_1 = 1 \\
& 2 \le u_i \le n && i \neq 1 \\
& u_i - u_j + 1 \le (n-1)(1 - x_{ij}) && i \neq 1,\ j \neq 1 \\
& u_i \text{ entero}
\end{aligned}
$$

La formulación MTZ restringe el comportamiento de la variable binaria x_{ij} a $x_{ij} = 0$, para valores $(u_j - u_i) \le 0$. En esta formulación se busca la eliminación de sub ciclos descartando las trayectorias en retroceso, como se observa en el Cuadro 3.04.

Principales ventajas encontradas en la formulación MTZ:

a. Según Pataki (2003), es de tamaño reducido, se necesita n variables adicionales y aproximadamente $\frac{n^2}{2}$ restricciones adicionales.

b. En Letchford, Nasiri y Theis (2013), se menciona que esta formulación es compacta y sólo tiene $O(n^2)$ variables y $O(n^2)$ restricciones.

c. En Pataki (2003), se menciona, que si es preferible visitar la ciudad i al comienzo de la gira, se puede modelar fácilmente agregando un término $-\alpha u_i$ con $\alpha > 0$ al objetivo.

Principales desventajas encontradas en el MTZ:

a. Sobre el número de restricciones necesarias para evitar la formación de sub ciclos, Martí afirma que: “Se han encontrado restricciones alternativas para evitar la formación de subtours que suponen la incorporación de una cantidad polinómica de restricciones” (Martí, 2003, p.10). Así mismo afirma: “La resolución óptima del problema ha resultado poco eficiente, salvo para ejemplos relativamente pequeños, dado el elevado tiempo de computación requerido” (Martí, 2003, p.10).

b. En Letchford, Nasiri y Theis (2013) se menciona que Padberg y Sung en 1991 publicaron: “An analytical comparision of different formulations of the traveling salesman problem”, donde muestran que la relajación lineal del MTZ produce un límite inferior extremadamente débil.

Se estudió el comportamiento del MTZ para determinar las relaciones que tienen las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$.

La estructura $(u_j - u_i)$, considerando $i \neq 1$ y $j \neq 1$, generó el siguiente intervalo:

$$u_i, u_j \in \{2,3,\ldots,n\}$$
$$(u_j - u_i) \in \{-(n-2),-(n-3),\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots,(n-3),(n-2)\}$$

La restricción: $u_i - u_j + 1 \leq (n-1)(1-x_{ij})$ se reordena a:

$$(n-1)x_{ij} - (u_j - u_i) \leq (n-2) \qquad i = 2,3,\ldots,n,\ j = 2,3,\ldots,n$$

El estudio desarrollado de la formulación MTZ se ingresó y estudió en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.04:

Cuadro 3.04

Resultados de x_{ij} en la formulación MTZ

$(n-1)x_{ij}-(u_j-u_i) \le (n-2)$			Resultados posibles de x_{ij}	
Selección de				
x_{ij}		(u_j-u_i)		
0	1	$-(n-2)$	0	--
0	1	$-(n-3)$	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	--
0	1	-1	0	--
0	1	0	0	--
0	1	1	0	1
0	1	2	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	1
0	1	$(n-2)$	0	1

Fuente propia.

Los resultados del Cuadro 3.04, se resumen en:

a. Si $(u_j-u_i)\ge 1 \Rightarrow x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{Si la ciudad i se conecta con j}\\ 0 & \text{Si la ciudad i no se conecta con j}\end{cases}$

b. Si $(u_j-u_i)\le 0 \Rightarrow x_{ij}=0$

c. Se observa que el intervalo donde la variable $x_{ij}\in\{0,1\}$, no incluye el valor $(u_j-u_i)=0$.

Como se menciona en Letchford, Nasiri y Theis (2013), la relación entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ es débil, dado que se deja abierta la posibilidad de seleccionar $x_{ij} = 1$ en ciudades no consecutivas al relajar $(u_j - u_i) = 1$ a $(u_j - u_i) \geq 1$.

Para las corridas del algoritmo MTZ se utilizó la formulación indicada en el Cuadro 3.05:

Cuadro 3.05

Formulación MTZ

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$(n-1)\, x_{ij} - (u_j - u_i) \leq (n-2) \qquad i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.06 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación MTZ.

Cuadro 3.06
Número de variables y restricciones de la formulación MTZ

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$n^2 - 3n + 2$
Total de restricciones	$n^2 + n + 1$

Fuente propia.

Ejemplo 3.01

En el Cuadro 3.07 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.07
Ejemplo 3.01: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	60	75	75	54
2	52	52	51	56
3	70	57	67	57
4	61	75	59	59

Fuente propia.

La formulación MTZ correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.01 resulta:

$$\text{Min } Z = 75\,x_{12} + 75\,x_{13} + 54\,x_{14} + 52\,x_{21} + 51\,x_{23} + 56\,x_{24} + 70\,x_{31} + \\ + 57\,x_{32} + 57\,x_{34} + 61\,x_{41} + 75\,x_{42} + 59\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

Restricciones MTZ

$$3x_{23} - (u_3 - u_2) \leq 2$$
$$3x_{24} - (u_4 - u_2) \leq 2$$
$$3x_{32} - (u_2 - u_3) \leq 2$$
$$3x_{34} - (u_4 - u_3) \leq 2$$
$$3x_{42} - (u_2 - u_4) \leq 2$$
$$3x_{43} - (u_3 - u_4) \leq 2$$

Restricciones de inicialización MTZ

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \geq 2$$
$$u_3 \geq 2$$
$$u_4 \geq 2$$
$$u_2 \leq 4$$
$$u_3 \leq 4$$
$$u_4 \leq 4$$

x_{ij} binario

u_j entero

El Cuadro 3.08 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación del Ejemplo 01:

Cuadro 3.08
Ejemplo 3.01: Número de variables y restricciones de la formulación MTZ

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	6
Total de restricciones	21

Fuente propia.

3.5. Propuestas de formulaciones para las relaciones débiles entre x_{ij} (o x_{ji}) y $(u_j - u_i)$

Las relaciones que se añadieron a la formulación del PA se les denominó débiles por relajamiento de $(u_j - u_i) = 1$ a $(u_j - u_i) \geq 1$ o $(u_j - u_i) = -1$ a $(u_j - u_i) \leq -1$, y se denominaron fuertes a las relaciones que utilizaron $(u_j - u_i) = 1$ o $(u_j - u_i) = -1$.

En la presente investigación se propusieron formulaciones bajo relaciones débiles y fuertes para todos los casos presentados. En Solari (2017) se expuso una formulación bajo una relación fuerte entre las variables.

3.5.1. Propuesta 01: Para $(u_j - u_i) \geq 1$ y la ciudad i se conecta con la ciudad j

En la Figura 3.09, se observó la disposición de las ciudades i y j y la relación con la variable x_{ij}, donde se determina que la secuencia de ciudades se dirige desde la ciudad 1 a la última ciudad de la secuencia.

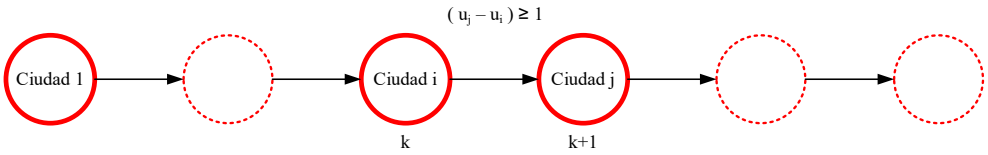


***Figura 3.09*. Proyección de la secuencia en la Propuesta 01**
Fuente propia.

Para el análisis de esta propuesta se consideró:

$$\text{Si } (u_j - u_i) \geq 1 \Rightarrow x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad i se conecta con j} \\ 0 & \text{Si la ciudad i no se conecta con j} \end{cases}$$

$$\text{Si } (u_j - u_i) \leq 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$$

La restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$(n+1)\, x_{ij} - (u_j - u_i) \leq n \qquad \begin{array}{l} i = 2,3,\ldots,n \\ j = 2,3,\ldots,n \\ \forall i \neq j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ij} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.09:

Cuadro 3.09

Resultados de x_{ij} en la restricción de la Propuesta 01

$(n+1)\,x_{ij} - (u_j - u_i) \leq n$			Resultados posibles de x_{ij}	
Selección de				
x_{ij}		$(u_j - u_i)$		
0	1	$-(n-2)$	0	--
0	1	$-(n-3)$	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	--
0	1	-1	0	--
0	1	0	0	--
0	1	1	0	1
0	1	2	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	1
0	1	$(n-2)$	0	1

Fuente propia.

El modelo de la Propuesta 01 se describe en el Cuadro 3.10:

Cuadro 3.10

Formulación de la Propuesta 01

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$(n+1)\, x_{ij} - (u_j - u_i) \leq n \qquad i = 2, 3, \ldots, n,\ j = 2, 3, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.11 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación de la Propuesta 01:

Cuadro 3.11

Número de variables y restricciones de la Propuesta 01

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$n^2 - 3n + 2$
Total de restricciones	$n^2 + n + 1$

Fuente propia.

Ejemplo 3.02

En el Cuadro 3.12 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.12

Ejemplo 3.02: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	50	50	76	56
2	58	70	59	55
3	61	63	52	64
4	52	76	51	59

Fuente propia.

La formulación de la Propuesta 01 correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.02 resulta:

$$\text{Min } Z = 50\,x_{12} + 76\,x_{13} + 56\,x_{14} + 58\,x_{21} + 59\,x_{23} + 55\,x_{24} + 61\,x_{31} + \\ + 63\,x_{32} + 64\,x_{34} + 52\,x_{41} + 76\,x_{42} + 51\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

Restricciones de la Propuesta 01

$$5x_{23} - (u_3 - u_2) \leq 4$$
$$5x_{24} - (u_4 - u_2) \leq 4$$
$$5x_{32} - (u_2 - u_3) \leq 4$$
$$5x_{34} - (u_4 - u_3) \leq 4$$
$$5x_{42} - (u_2 - u_4) \leq 4$$
$$5x_{43} - (u_3 - u_4) \leq 4$$

Restricciones de inicialización

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \geq 2$$
$$u_3 \geq 2$$
$$u_4 \geq 2$$
$$u_2 \leq 4$$
$$u_3 \leq 4$$
$$u_4 \leq 4$$

$$x_{ij} \text{ binario}$$
$$u_j \text{ entero}$$

El Cuadro 3.13 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación:

Cuadro 3.13
Ejemplo 3.02: Número de variables y restricciones de la Propuesta 01

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	6
Total de restricciones	21

Fuente propia.

3.5.2. Propuesta 02: Para $(u_j - u_i) \geq 1$ y la ciudad j se conecta con la ciudad i

En la Figura 3.10, se observó la disposición de las ciudades i y j y la relación con la variable x_{ji}, donde se determina que la secuencia de ciudades se dirige desde la última ciudad de la secuencia a la ciudad 1.

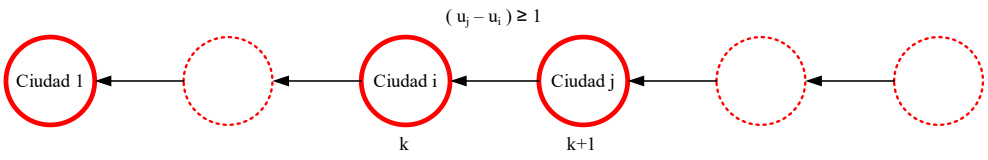


***Figura 3.10*. Proyección de la secuencia en la Propuesta 02**
Fuente propia.

Para el análisis de esta propuesta se consideró:

$$\text{Si } (u_j - u_i) \geq 1 \Rightarrow x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad j se conecta con i} \\ 0 & \text{Si la ciudad j no se conecta con i} \end{cases}$$

$$\text{Si } (u_j - u_i) \leq 0 \Rightarrow x_{ji} = 0$$

La restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$(n+1)\, x_{ji} - (u_j - u_i) \leq n \qquad \begin{array}{l} i = 2,3,\ldots,n \\ j = 2,3,\ldots,n \\ \forall i \neq j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ji} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.14:

Cuadro 3.14

Resultados de x_{ji} en la restricción de la Propuesta 02

$(n+1)\,x_{ji} - (u_j - u_i) \le n$			Resultados posibles de x_{ji}	
Selección de				
x_{ji}		$(u_j - u_i)$		
0	1	$-(n-2)$	0	--
0	1	$-(n-3)$	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	--
0	1	-1	0	--
0	1	0	0	--
0	1	1	0	1
0	1	2	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	1
0	1	$(n-2)$	0	1

Fuente propia.

El modelo de la Propuesta 02 se describe en la Cuadro 3.15:

Cuadro 3.15

Formulación de la Propuesta 02

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$(n+1)\, x_{ji} - (u_j - u_i) \leq n \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

$$j = 2,3,\ldots,n,\ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad j = 2,3,\ldots,n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.16 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación de la Propuesta 02:

Cuadro 3.16

Número de variables y restricciones de la Propuesta 02

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$n^2 - 3n + 2$
Total de restricciones	$n^2 + n + 1$

Fuente propia.

Ejemplo 3.03

En el Cuadro 3.17 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.17

Ejemplo 3.03: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	78	61	74	60
2	71	76	72	59
3	55	60	64	57
4	75	58	64	54

Fuente propia.

La formulación de la Propuesta 02 correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.03 resulta:

$$\text{Min } Z = 61\,x_{12} + 74\,x_{13} + 60\,x_{14} + 71\,x_{21} + 72\,x_{23} + 59\,x_{24} + 55\,x_{31} + \\ + 60\,x_{32} + 57\,x_{34} + 75\,x_{41} + 58\,x_{42} + 64\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

Restricciones de la Propuesta 02

$$5x_{32} - (u_3 - u_2) \leq 4$$
$$5x_{42} - (u_4 - u_2) \leq 4$$
$$5x_{23} - (u_2 - u_3) \leq 4$$
$$5x_{43} - (u_4 - u_3) \leq 4$$
$$5x_{24} - (u_2 - u_4) \leq 4$$
$$5x_{34} - (u_3 - u_4) \leq 4$$

Restricciones de inicialización

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \geq 2$$
$$u_3 \geq 2$$
$$u_4 \geq 2$$
$$u_2 \leq 4$$
$$u_3 \leq 4$$
$$u_4 \leq 4$$

$$x_{ij} \text{ binario}$$
$$u_j \text{ entero}$$

El Cuadro 3.18 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación:

Cuadro 3.18
Ejemplo 3.03: Número de variables y restricciones de la Propuesta 02

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	6
Total de restricciones	21

Fuente propia.

3.5.3. Propuesta 03: Para $(u_j - u_i) \leq -1$ y la ciudad j se conecta con la ciudad i

En la Figura 3.11, se observó la disposición de las ciudades i y j y la relación con la variable x_{ji}, donde se determina que la secuencia de ciudades se dirige desde la ciudad 1 a la última ciudad de la secuencia.

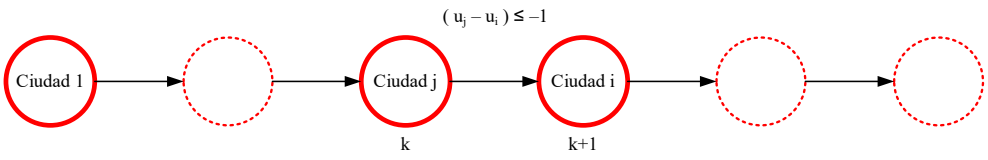


Figura 3.11. **Proyección de la secuencia en la Propuesta 03**
Fuente propia.

Para el análisis de esta propuesta se consideró:

$$\text{Si } (u_j - u_i) \leq -1 \Rightarrow x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad j se conecta con i} \\ 0 & \text{Si la ciudad j no se conecta con i} \end{cases}$$

$$\text{Si } (u_j - u_i) \geq 0 \Rightarrow x_{ji} = 0$$

La restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$(n+1)\, x_{ji} + (u_j - u_i) \leq n \qquad \begin{array}{l} i = 2,3,\ldots,n \\ j = 2,3,\ldots,n \\ \forall i \neq j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ji} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.19:

Cuadro 3.19

Resultados de x_{ji} en la restricción de la Propuesta 03

$(n+1)x_{ji}+(u_j-u_i)\leq n$			Resultados posibles de x_{ji}	
Selección de				
x_{ji}		(u_j-u_i)		
0	1	$-(n-2)$	0	1
0	1	$-(n-3)$	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	1
0	1	-1	0	1
0	1	0	0	--
0	1	1	0	--
0	1	2	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	--
0	1	$(n-2)$	0	--

Fuente propia.

El modelo de la Propuesta 03 se describe en la Cuadro 3.20:

Cuadro 3.20

Formulación de la Propuesta 03

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$(n+1)\, x_{ji} + (u_j - u_i) \leq n \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

$$j = 2, 3, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.21 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación de la Propuesta 03:

Cuadro 3.21

Número de variables y restricciones de la Propuesta 03

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$n^2 - 3n + 2$
Total de restricciones	$n^2 + n + 1$

Fuente propia.

Ejemplo 3.04

En el Cuadro 3.22 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.22

Ejemplo 3.04: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	77	58	73	80
2	65	77	75	50
3	54	54	65	50
4	68	50	74	70

Fuente propia.

La formulación de la Propuesta 03 correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.04 resulta:

$$\text{Min } Z = 58\,x_{12} + 73\,x_{13} + 80\,x_{14} + 65\,x_{21} + 75\,x_{23} + 50\,x_{24} + 54\,x_{31} + \\ + 54\,x_{32} + 50\,x_{34} + 68\,x_{41} + 50\,x_{42} + 74\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$.

$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$

$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$

$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$

$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$

Restricciones de la Propuesta 03

$$5x_{32} + (u_3 - u_2) \leq 4$$
$$5x_{42} + (u_4 - u_2) \leq 4$$
$$5x_{23} + (u_2 - u_3) \leq 4$$
$$5x_{43} + (u_4 - u_3) \leq 4$$
$$5x_{24} + (u_2 - u_4) \leq 4$$
$$5x_{34} + (u_3 - u_4) \leq 4$$

Restricciones de inicialización

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \geq 2$$
$$u_3 \geq 2$$
$$u_4 \geq 2$$
$$u_2 \leq 4$$
$$u_3 \leq 4$$
$$u_4 \leq 4$$

$$x_{ij} \text{ binario}$$
$$u_j \text{ entero}$$

El Cuadro 3.23 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación:

Cuadro 3.23
Ejemplo 3.04: Número de variables y restricciones de la Propuesta 03

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	6
Total de restricciones	21

Fuente propia.

3.5.4. Propuesta 04: Para $(u_j - u_i) \leq -1$ y la ciudad i se conecta con la ciudad j

En la Figura 3.12, se observó la disposición de las ciudades i y j y la relación con la variable x_{ij}, donde se determina que la secuencia de ciudades se dirige desde la última ciudad de la secuencia a la ciudad 1.

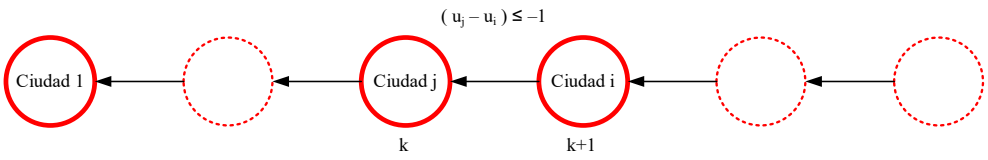


Figura 3.12. **Proyección de la secuencia en la Propuesta 04**
Fuente propia.

Para el análisis de esta propuesta se consideró:

Si $(u_j - u_i) \leq -1 \Rightarrow x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad i se conecta con j} \\ 0 & \text{Si la ciudad i no se conecta con j} \end{cases}$

Si $(u_j - u_i) \geq 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$

La restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$(n+1)\,x_{ij} + (u_j - u_i) \leq n \qquad \begin{array}{l} i = 2,3,\ldots,n \\ j = 2,3,\ldots,n \\ \forall i \neq j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ij} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.24:

Cuadro 3.24

Resultados de x_{ij} en la restricción de la Propuesta 04

$(n+1)\,x_{ij}+(u_j-u_i)\le n$			Resultados posibles de x_{ij}	
Selección de				
x_{ij}		(u_j-u_i)		
0	1	$-(n-2)$	0	1
0	1	$-(n-3)$	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	1
0	1	-1	0	1
0	1	0	0	--
0	1	1	0	--
0	1	2	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	--
0	1	$(n-2)$	0	--

Fuente propia.

El modelo de la Propuesta 04 se describe en la Cuadro 3.25:

Cuadro 3.25

Formulación de la Propuesta 04

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \ .$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$(n+1)\, x_{ij} + (u_j - u_i) \leq n \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

$$j = 2, 3, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad \forall j \geq 2 \qquad \forall j \leq n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.26 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación de la Propuesta 04:

Cuadro 3.26

Número de variables y restricciones de la Propuesta 04

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$n^2 - 3n + 2$
Total de restricciones	$n^2 + n + 1$

Fuente propia.

Ejemplo 3.05

En el Cuadro 3.27 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.27

Ejemplo 3.05: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	73	71	67	56
2	71	68	79	69
3	80	57	70	59
4	52	73	65	77

Fuente propia.

La formulación de la Propuesta 04 correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.05 resulta:

$$\text{Min } Z = 71\,x_{12} + 67\,x_{13} + 56\,x_{14} + 71\,x_{21} + 79\,x_{23} + 69\,x_{24} + 80\,x_{31} + \\ + 57\,x_{32} + 59\,x_{34} + 52\,x_{41} + 73\,x_{42} + 65\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

Restricciones de la Propuesta 04

$$5x_{23} + (u_3 - u_2) \leq 4$$
$$5x_{24} + (u_4 - u_2) \leq 4$$
$$5x_{32} + (u_2 - u_3) \leq 4$$
$$5x_{34} + (u_4 - u_3) \leq 4$$
$$5x_{42} + (u_2 - u_4) \leq 4$$
$$5x_{43} + (u_3 - u_4) \leq 4$$

Restricciones de inicialización

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \geq 2$$
$$u_3 \geq 2$$
$$u_4 \geq 2$$
$$u_2 \leq 4$$
$$u_3 \leq 4$$
$$u_4 \leq 4$$

$$x_{ij} \text{ binario}$$
$$u_j \text{ entero}$$

El Cuadro 3.28 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación:

Cuadro 3.28
Ejemplo 3.05: Número de variables y restricciones de la Propuesta 04

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	6
Total de restricciones	21

Fuente propia.

3.6. Propuestas de formulaciones para las relaciones fuertes entre x_{ij} (o x_{ji}) y $(u_j - u_i)$

Las relaciones entre las variables binarias x_{ij} y las variables enteras $(u_j - u_i)$ son fuertes si se tiene $(u_j - u_i) = 1$ o $(u_j - u_i) = -1$. Se estudiaron ambos casos.

3.6.1. Propuesta 05: Para $(u_j - u_i) = 1$ y la ciudad i se conecta con la ciudad j

En la Figura 3.13, se observó la disposición de las ciudades i y j y la relación con la variable x_{ij}, donde se determina que la secuencia de ciudades se dirige desde la ciudad 1 a la última ciudad de la secuencia.

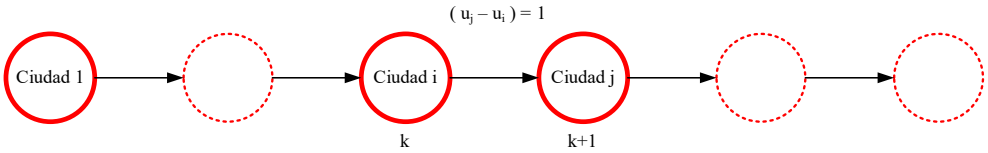


Figura 3.13. **Proyección de la secuencia en la Propuesta 05**
Fuente propia.

Para el análisis de esta propuesta se consideró:

$$\text{Si } (u_j - u_i) = 1 \Rightarrow x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad i se conecta con j} \\ 0 & \text{Si la ciudad i no se conecta con j} \end{cases}$$

$$\text{Si } (u_j - u_i) \neq 1 \Rightarrow x_{ij} = 0$$

La primera restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$(n+1)\,x_{ij} - (u_j - u_i) \leq n \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ \forall i \neq j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ij} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.29:

Cuadro 3.29

Resultados de x_{ij} en la primera restricción de la Propuesta 05

$(n+1)\,x_{ij} - (u_j - u_i) \le n$			Resultados posibles de x_{ij}	
Selección de				
x_{ij}		$(u_j - u_i)$		
0	1	$-(n-2)$	0	--
0	1	$-(n-3)$	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	--
0	1	-1	0	--
0	1	0	0	--
0	1	1	0	1
0	1	2	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	1
0	1	$(n-2)$	0	1

Fuente propia.

La segunda restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$n\,x_{ij} + (u_j - u_i) \le (n+1) \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ \forall i \ne j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ij} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.30:

Cuadro 3.30

Resultados de x_{ij} en la segunda restricción de la Propuesta 05

$n\,x_{ij} + (u_j - u_i) \leq (n+1)$			Resultados posibles de x_{ij}	
Selección de				
x_{ij}		$(u_j - u_i)$		
0	1	$-(n-2)$	0	1
0	1	$-(n-3)$	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	1
0	1	-1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	2	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	--
0	1	$(n-2)$	0	--

Fuente propia.

Los resultados posibles para x_{ij} para la primera y segunda restricción se resumen en el Cuadro 3.31:

Cuadro 3.31

Resultados de x_{ij} en la primera y segunda restricción de la Propuesta 05

$(u_j - u_i)$	Restricción 1 x_{ij}		Restricción 2 x_{ij}		Resultados posibles de x_{ij}	
$-(n-2)$	0	--	0	1	0	--
$-(n-3)$	0	--	0	1	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-2	0	--	0	1	0	--
-1	0	--	0	1	0	--
0	0	--	0	1	0	--
1	0	1	0	1	0	1
2	0	1	0	--	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$(n-3)$	0	1	0	--	0	--
$(n-2)$	0	1	0	--	0	--

Fuente propia.

El modelo de la Propuesta 05 se describe en la Cuadro 3.32:

Cuadro 3.32

Formulación de la Propuesta 05

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$(n+1)\, x_{ij} - (u_j - u_i) \leq n \qquad i = 2,3,\ldots,n;\ j = 2,3,\ldots,n,\ \forall i \neq j$$

$$n\, x_{ij} + (u_j - u_i) \leq (n+1) \qquad i = 2,3,\ldots,n;\ j = 2,3,\ldots,n,\ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad \forall j \geq 2 \qquad \forall j \leq n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.33 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación de la Propuesta 05:

Cuadro 3.33
Número de variables y restricciones de la Propuesta 05

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$2n^2 - 6n + 4$
Total de restricciones	$2n^2 - 2n + 3$

Fuente propia.

Ejemplo 3.06

En el Cuadro 3.34 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.34
Ejemplo 3.06: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	65	67	79	71
2	60	50	71	80
3	73	73	56	54
4	78	74	68	76

Fuente propia.

La formulación de la Propuesta 05 correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.06 resulta:

$$\text{Min } Z = 67\,x_{12} + 79\,x_{13} + 71\,x_{14} + 60\,x_{21} + 71\,x_{23} + 80\,x_{24} + 73\,x_{31} + \\ + 73\,x_{32} + 54\,x_{34} + 78\,x_{41} + 74\,x_{42} + 68\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

Restricciones: de la primera restricción de la Propuesta 05

$$5x_{23} - (u_3 - u_2) \le 4$$
$$5x_{24} - (u_4 - u_2) \le 4$$
$$5x_{32} - (u_2 - u_3) \le 4$$
$$5x_{34} - (u_4 - u_3) \le 4$$
$$5x_{42} - (u_2 - u_4) \le 4$$
$$5x_{43} - (u_3 - u_4) \le 4$$

Restricciones: de la segunda restricción de la Propuesta 05

$$4x_{23} + (u_3 - u_2) \le 5$$
$$4x_{24} + (u_4 - u_2) \le 5$$
$$4x_{32} + (u_2 - u_3) \le 5$$
$$4x_{34} + (u_4 - u_3) \le 5$$
$$4x_{42} + (u_2 - u_4) \le 5$$
$$4x_{43} + (u_3 - u_4) \le 5$$

Restricciones de inicialización

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \ge 2$$
$$u_3 \ge 2$$
$$u_4 \ge 2$$

$u_2 \leq 4$
$u_3 \leq 4$
$u_4 \leq 4$

x_{ij} binario
u_j entero

El Cuadro 3.35 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación:

Cuadro 3.35
Ejemplo 3.06: Número de variables y restricciones de la Propuesta 05

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	12
Total de restricciones	27

Fuente propia.

3.6.2. Propuesta 06: Para $(u_j - u_i) = 1$ y la ciudad j se conecta con la ciudad i

En la Figura 3.14, se observó la disposición de las ciudades i y j y la relación con la variable x_{ji}, donde se determina que la secuencia de ciudades se dirige desde la última ciudad de la secuencia a la ciudad 1.

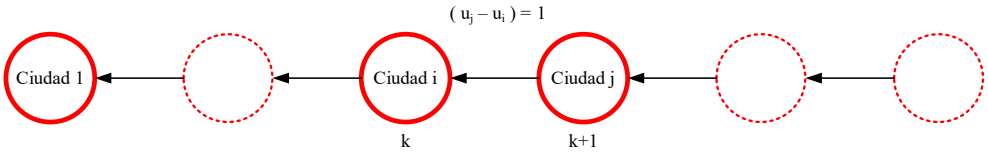


Figura 3.14. **Proyección de la secuencia en la Propuesta 06**
Fuente propia.

Para el análisis de esta propuesta se consideró:

$$\text{Si } (u_j - u_i) = 1 \Rightarrow x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{la ciudad j se conecta con i} \\ 0 & \text{la ciudad j no se conecta con i} \end{cases}$$

$$\text{Si } (u_j - u_i) \neq 1 \Rightarrow x_{ji} = 0$$

La primera restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$(n+1)\,x_{ji} - (u_j - u_i) \leq n \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ \forall i \neq j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ji} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.36:

Cuadro 3.36

Resultados de x_{ji} en la primera restricción de la Propuesta 06

$(n+1)\,x_{ji} - (u_j - u_i) \le n$			Resultados posibles de x_{ji}	
Selección de				
x_{ji}		$(u_j - u_i)$		
0	1	$-(n-2)$	0	--
0	1	$-(n-3)$	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	--
0	1	-1	0	--
0	1	0	0	--
0	1	1	0	1
0	1	2	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	1
0	1	$(n-2)$	0	1

Fuente propia.

La segunda restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$n\,x_{ji} + (u_j - u_i) \le (n+1) \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ \forall i \ne j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ji} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.37:

Cuadro 3.37

Resultados de x_{ji} en la segunda restricción de la Propuesta 06

$n\,x_{ji} + (u_j - u_i) \leq (n+1)$			Resultados posibles de x_{ji}	
Selección de				
x_{ji}		$(u_j - u_i)$		
0	1	$-(n-2)$	0	1
0	1	$-(n-3)$	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	1
0	1	-1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	2	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	--
0	1	$(n-2)$	0	--

Fuente propia.

Los resultados posibles para x_{ji} para la primera y segunda restricción se resumen en el Cuadro 3.38:

Cuadro 3.38
Resultados de x_{ji} en la primera y segunda restricción de la Propuesta 06

$(u_j - u_i)$	Restricción 1 x_{ji}		Restricción 2 x_{ji}		Resultados posibles de x_{ji}	
$-(n-2)$	0	--	0	1	0	--
$-(n-3)$	0	--	0	1	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-2	0	--	0	1	0	--
-1	0	--	0	1	0	--
0	0	--	0	1	0	--
1	0	1	0	1	0	1
2	0	1	0	--	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$(n-3)$	0	1	0	--	0	--
$(n-2)$	0	1	0	--	0	--

Fuente propia.

El modelo de la Propuesta 06 se describe en la Cuadro 3.39:

Cuadro 3.39

Formulación de la Propuesta 06

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$(n+1)\, x_{ji} - (u_j - u_i) \leq n \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

$$j = 2,3,\ldots,n,\ \forall i \neq j$$

$$n\, x_{ji} + (u_j - u_i) \leq (n+1) \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

$$j = 2,3,\ldots,n,\ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad \forall j \geq 2 \qquad \forall j \leq n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.40 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación de la Propuesta 06:

Cuadro 3.40
Número de variables y restricciones de la Propuesta 06

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$2n^2 - 6n + 4$
Total de restricciones	$2n^2 - 2n + 3$

Fuente propia.

Ejemplo 3.07

En el Cuadro 3.41 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.41
Ejemplo 3.07: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	71	58	52	69
2	58	77	54	58
3	66	79	55	54
4	58	55	67	65

Fuente propia.

La formulación de la Propuesta 06 correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.07 resulta:

$$\text{Min } Z = 58\,x_{12} + 52\,x_{13} + 69\,x_{14} + 58\,x_{21} + 54\,x_{23} + 58\,x_{24} + 66\,x_{31} + \\ + 79\,x_{32} + 54\,x_{34} + 58\,x_{41} + 55\,x_{42} + 67\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

Restricciones: de la primera restricción de la Propuesta 06

$$5x_{32} - (u_3 - u_2) \le 4$$
$$5x_{42} - (u_4 - u_2) \le 4$$
$$5x_{23} - (u_2 - u_3) \le 4$$
$$5x_{43} - (u_4 - u_3) \le 4$$
$$5x_{24} - (u_2 - u_4) \le 4$$
$$5x_{34} - (u_3 - u_4) \le 4$$

Restricciones: de la segunda restricción de la Propuesta 06

$$4x_{32} + (u_3 - u_2) \le 5$$
$$4x_{42} + (u_4 - u_2) \le 5$$
$$4x_{23} + (u_2 - u_3) \le 5$$
$$4x_{43} + (u_4 - u_3) \le 5$$
$$4x_{24} + (u_2 - u_4) \le 5$$
$$4x_{34} + (u_3 - u_4) \le 5$$

Restricciones de inicialización

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \ge 2$$
$$u_3 \ge 2$$
$$u_4 \ge 2$$

$u_2 \leq 4$
$u_3 \leq 4$
$u_4 \leq 4$

x_{ij} binario
u_j entero

El Cuadro 3.42 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación:

Cuadro 3.42
Ejemplo 3.07: Número de variables y restricciones de la Propuesta 06

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	12
Total de restricciones	27

Fuente propia.

3.6.3. Propuesta 07: Para $(u_j - u_i) = -1$ y la ciudad j se conecta con la ciudad i

En la Figura 3.15, se observó la disposición de las ciudades i y j y la relación con la variable x_{ji}, donde se determina que la secuencia de ciudades se dirige desde la ciudad 1 a la última ciudad de la secuencia.

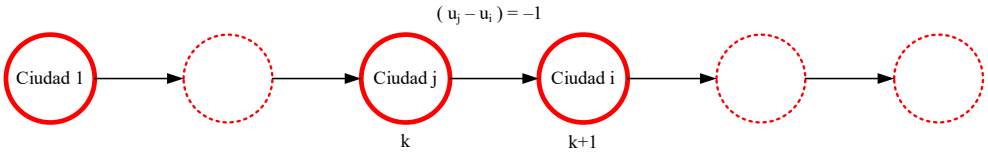


Figura 3.15. **Proyección de la secuencia en la Propuesta 07**
Fuente propia.

Para el análisis de esta propuesta se consideró:

$$\text{Si } (u_j - u_i) = -1 \Rightarrow x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad j se conecta con i} \\ 0 & \text{Si la ciudad j no se conecta con i} \end{cases}$$

$$\text{Si } (u_j - u_i) \neq -1 \Rightarrow x_{ji} = 0$$

La primera restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$n\,x_{ji} - (u_j - u_i) \leq (n+1) \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ \forall i \neq j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ji} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.43:

Cuadro 3.43

Resultados de x_{ji} en la primera restricción de la Propuesta 07

$n\,x_{ji} - (u_j - u_i) \le (n+1)$			Resultados posibles de x_{ji}	
Selección de				
x_{ji}		$(u_j - u_i)$		
0	1	$-(n-2)$	0	--
0	1	$-(n-3)$	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	--
0	1	-1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	2	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	1
0	1	$(n-2)$	0	1

Fuente propia.

La segunda restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$(n+1)\,x_{ji} + (u_j - u_i) \le n \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ \forall i \ne j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ji} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.44:

Cuadro 3.44

Resultados de x_{ji} en la segunda restricción de la Propuesta 07

$(n+1)\,x_{ji}+(u_j-u_i)\le n$			Resultados posibles de x_{ji}	
Selección de				
x_{ji}		(u_j-u_i)		
0	1	$-(n-2)$	0	1
0	1	$-(n-3)$	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	1
0	1	-1	0	1
0	1	0	0	--
0	1	1	0	--
0	1	2	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	--
0	1	$(n-2)$	0	--

Fuente propia.

Los resultados posibles para x_{ji} para la primera y segunda restricción se resumen en el Cuadro 3.45:

Cuadro 3.45
Resultados de x_{ji} en la primera y segunda restricción de la Propuesta 07

$(u_j - u_i)$	Restricción 1 x_{ji}		Restricción 2 x_{ji}		Resultados posibles de x_{ji}	
$-(n-2)$	0	--	0	1	0	--
$-(n-3)$	0	--	0	1	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-2	0	--	0	1	0	--
-1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	--	0	--
1	0	1	0	--	0	--
2	0	1	0	--	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$(n-3)$	0	1	0	--	0	--
$(n-2)$	0	1	0	--	0	--

Fuente propia.

El modelo de la Propuesta 07 se describe en la Cuadro 3.46:

Cuadro 3.46

Formulación de la Propuesta 07

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\ \forall i \neq j$$

$$n\, x_{ji} - (u_j - u_i) \leq (n+1) \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

$$j = 2,3,\ldots,n,\ \forall i \neq j$$

$$(n+1)\, x_{ji} + (u_j - u_i) \leq n \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

$$j = 2,3,\ldots,n,\ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad \forall j \geq 2 \qquad \forall j \leq n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.47 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación de la Propuesta 07:

Cuadro 3.47
Número de variables y restricciones de la Propuesta 07

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$2n^2 - 6n + 4$
Total de restricciones	$2n^2 - 2n + 3$

Fuente propia.

Ejemplo 3.08

En el Cuadro 3.48 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.48
Ejemplo 3.08: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	58	54	68	72
2	73	52	52	51
3	53	74	74	61
4	68	63	72	65

Fuente propia.

La formulación de la Propuesta 07 correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.08 resulta:

$$\text{Min } Z = 54\,x_{12} + 68\,x_{13} + 72\,x_{14} + 73\,x_{21} + 52\,x_{23} + 51\,x_{24} + 53\,x_{31} + \\ + 74\,x_{32} + 61\,x_{34} + 68\,x_{41} + 63\,x_{42} + 72\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

Restricciones: de la primera restricción de la Propuesta 07

$$4x_{32} - (u_3 - u_2) \le 5$$
$$4x_{42} - (u_4 - u_2) \le 5$$
$$4x_{23} - (u_2 - u_3) \le 5$$
$$4x_{43} - (u_4 - u_3) \le 5$$
$$4x_{24} - (u_2 - u_4) \le 5$$
$$4x_{34} - (u_3 - u_4) \le 5$$

Restricciones: de la segunda restricción de la Propuesta 07

$$5x_{32} + (u_3 - u_2) \le 4$$
$$5x_{42} + (u_4 - u_2) \le 4$$
$$5x_{23} + (u_2 - u_3) \le 4$$
$$5x_{43} + (u_4 - u_3) \le 4$$
$$5x_{24} + (u_2 - u_4) \le 4$$
$$5x_{34} + (u_3 - u_4) \le 4$$

Restricciones de inicialización

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \ge 2$$
$$u_3 \ge 2$$
$$u_4 \ge 2$$

$u_2 \leq 4$
$u_3 \leq 4$
$u_4 \leq 4$

x_{ij} binario
u_j entero

El Cuadro 3.49 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación:

Cuadro 3.49
Ejemplo 3.08: Número de variables y restricciones de la Propuesta 07

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	12
Total de restricciones	27

Fuente propia.

3.6.4. Propuesta 08: Para $(u_j - u_i) = -1$ y la ciudad i se conecta con la ciudad j

En la Figura 3.16, se observó la disposición de las ciudades i y j y la relación con la variable x_{ij}, donde se determina que la secuencia de ciudades se dirige desde la última ciudad de la secuencia a la ciudad 1.

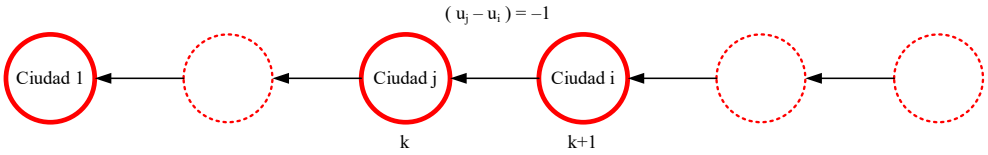


Figura 3.16. **Proyección de la secuencia en la Propuesta 08**
Fuente propia.

Para el análisis de esta propuesta se consideró:

$$\text{Si } (u_j - u_i) = -1 \Rightarrow x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ciudad i se conecta con j} \\ 0 & \text{Si la ciudad i no se conecta con j} \end{cases}$$

$$\text{Si } (u_j - u_i) \neq -1 \Rightarrow x_{ij} = 0$$

La primera restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$n\,x_{ij} - (u_j - u_i) \leq (n+1) \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ \forall i \neq j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ij} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.50:

Cuadro 3.50

Resultados de x_{ij} en la primera restricción de la Propuesta 08

$n\,x_{ij} - (u_j - u_i) \le (n+1)$			Resultados posibles de x_{ij}	
Selección de				
x_{ij}		$(u_j - u_i)$		
0	1	$-(n-2)$	0	--
0	1	$-(n-3)$	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	--
0	1	-1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	2	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	1
0	1	$(n-2)$	0	1

Fuente propia.

La segunda restricción que se propuso para estas condiciones fue:

$$(n+1)\,x_{ij} + (u_j - u_i) \le n \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ \forall i \ne j,\ u_1 = 1 \end{array}$$

Los resultados posibles de x_{ij} para esta restricción se ingresaron y estudiaron en una hoja de cálculo (ver Anexo A) y se resume en el Cuadro 3.51:

Cuadro 3.51

Resultados de x_{ij} en la segunda restricción de la Propuesta 08

$(n+1)x_{ij}+(u_j-u_i)\leq n$			Resultados posibles de x_{ij}	
Selección de				
x_{ij}		(u_j-u_i)		
0	1	$-(n-2)$	0	1
0	1	$-(n-3)$	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	-2	0	1
0	1	-1	0	1
0	1	0	0	--
0	1	1	0	--
0	1	2	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	$(n-3)$	0	--
0	1	$(n-2)$	0	--

Fuente propia.

Los resultados posibles para x_{ij} para la primera y segunda restricción se resumen en el Cuadro 3.52:

Cuadro 3.52
Resultados de x_{ij} en la primera y segunda restricción de la Propuesta 08

$(u_j - u_i)$	Restricción 1 x_{ij}		Restricción 2 x_{ij}		Resultados posibles de x_{ij}	
$-(n-2)$	0	--	0	1	0	--
$-(n-3)$	0	--	0	1	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-2	0	--	0	1	0	--
-1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	--	0	--
1	0	1	0	--	0	--
2	0	1	0	--	0	--
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$(n-3)$	0	1	0	--	0	--
$(n-2)$	0	1	0	--	0	--

Fuente propia.

El modelo de la Propuesta 08 se describe en la Cuadro 3.53:

Cuadro 3.53

Formulación de la Propuesta 08

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \ .$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$n\, x_{ij} - (u_j - u_i) \leq (n+1) \qquad i = 2,3, \ldots, n$$

$$j = 2, 3, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$(n+1)\, x_{ij} + (u_j - u_i) \leq n \qquad i = 2,3, \ldots, n$$

$$j = 2, 3, \ldots, n, \ \forall i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad u_j \text{ entero} \qquad u_1 = 1$$

$$2 \leq u_j \leq n \qquad \forall j \geq 2 \qquad \forall j \leq n$$

Fuente propia.

El Cuadro 3.54 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación de la Propuesta 08:

Cuadro 3.54
Número de variables y restricciones de la Propuesta 08

Variables binarias	$n^2 - n$
Variables enteras	n
Total de variables	n^2
Restricciones de asignación	$2n$
Restricciones de inicialización	$2n - 1$
Restricciones de sub ciclos	$2n^2 - 6n + 4$
Total de restricciones	$2n^2 - 2n + 3$

Fuente propia.

Ejemplo 3.09

En el Cuadro 3.55 se muestra una matriz de costos de un PAV:

Cuadro 3.55
Ejemplo 3.09: Matriz de costos

	1	2	3	4
1	60	75	75	54
2	52	52	51	56
3	70	57	67	57
4	61	75	59	59

Fuente propia.

La formulación de la Propuesta 08 correspondiente a la matriz dada en el Ejemplo 3.09 resulta:

$$\text{Min } Z = 75\,x_{12} + 75\,x_{13} + 54\,x_{14} + 52\,x_{21} + 51\,x_{23} + 56\,x_{24} + 70\,x_{31} + \\ + 57\,x_{32} + 57\,x_{34} + 61\,x_{41} + 75\,x_{42} + 59\,x_{43}$$

s.a.

Restricciones: desde la ciudad i se visita una sola ciudad j

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

Restricciones: la ciudad j es visitada desde una sola ciudad i

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

Restricciones: de la primera restricción de la Propuesta 08

$$4x_{23} - (u_3 - u_2) \le 5$$
$$4x_{24} - (u_4 - u_2) \le 5$$
$$4x_{32} - (u_2 - u_3) \le 5$$
$$4x_{34} - (u_4 - u_3) \le 5$$
$$4x_{42} - (u_2 - u_4) \le 5$$
$$4x_{43} - (u_3 - u_4) \le 5$$

Restricciones: de la segunda restricción de la Propuesta 08

$$5x_{23} + (u_3 - u_2) \le 4$$
$$5x_{24} + (u_4 - u_2) \le 4$$
$$5x_{32} + (u_2 - u_3) \le 4$$
$$5x_{34} + (u_4 - u_3) \le 4$$
$$5x_{42} + (u_2 - u_4) \le 4$$
$$5x_{43} + (u_3 - u_4) \le 4$$

Restricciones de inicialización

$$u_1 = 1$$
$$u_2 \ge 2$$
$$u_3 \ge 2$$
$$u_4 \ge 2$$

$u_2 \leq 4$
$u_3 \leq 4$
$u_4 \leq 4$

x_{ij} binario
u_j entero

El Cuadro 3.56 describe el número de variables y restricciones requerido por la formulación:

Cuadro 3.56
Ejemplo 3.09: Número de variables y restricciones de la Propuesta 08

Variables binarias	12
Variables enteras	4
Total de variables	16
Restricciones de asignación	8
Restricciones de inicialización	7
Restricciones de sub ciclos	12
Total de restricciones	27

Fuente propia.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Análisis, interpretación y discusión de resultados

4.1.1. Generador de Problemas del PA, PAV y PAVA

Para realizar el análisis de las formulaciones propuestas y la calidad de los resultados, se diseñó, para esta investigación, un programa generador de matrices de costos de problemas PA y PAV, véase el Anexo D. El programa determina las soluciones de cada problema por revisión exhaustiva, si las herramientas tecnológicas lo permite, y las ordena por costo y por tipo, de esta manera se conoce la solución óptima.

El programa determina los valores de cada celda de la matriz de costos utilizando un generador uniforme entero entre los valores predefinidos por el usuario (mínimo y máximo). Al reiniciar el programa el generador repite la secuencia de valores aleatorios, por lo que se considera que el generador es seudoaleatorio.

También es posible ingresar valores de forma manual o generar una matriz simétrica.

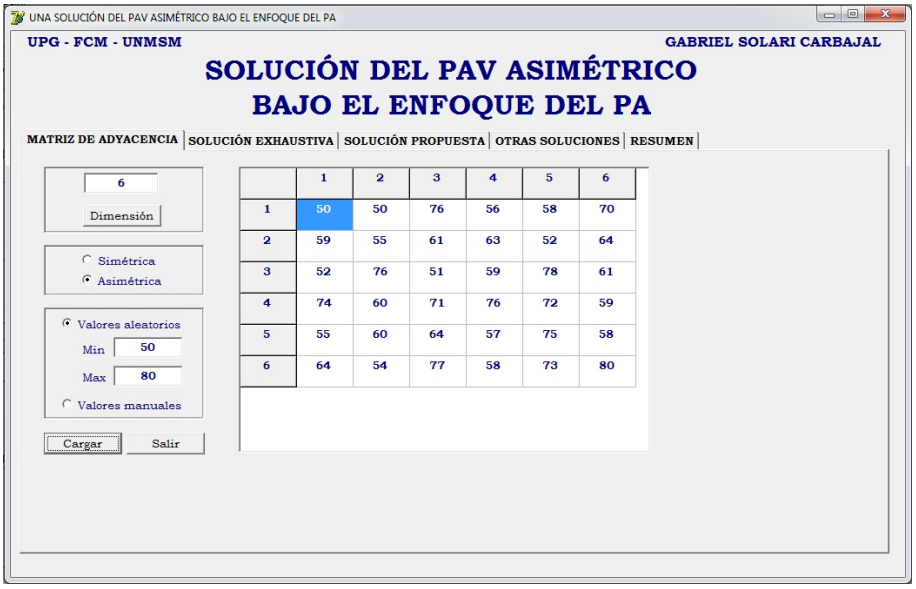
Para construir la matriz exhaustiva se utilizó el algoritmo recursivo, generador de permutaciones, de Heap, luego se determinó el costo de cada permutación y se determinó cuáles cumplen con los requerimientos de ser camino hamiltoniano.

Las formulaciones propuestas se utilizaron para resolver los problemas generados y las soluciones fueron comparadas con la solución óptima obtenida por revisión exhaustiva.

Ejemplo 4.01

En el Cuadro 4.01 se muestra la generación de una matriz de costos de un PA y de un PAV:

Cuadro 4.01
Ejemplo 4.01: Problema generado por el programa



Fuente propia.

En el Cuadro 4.02 se muestra la matriz generada por el programa:

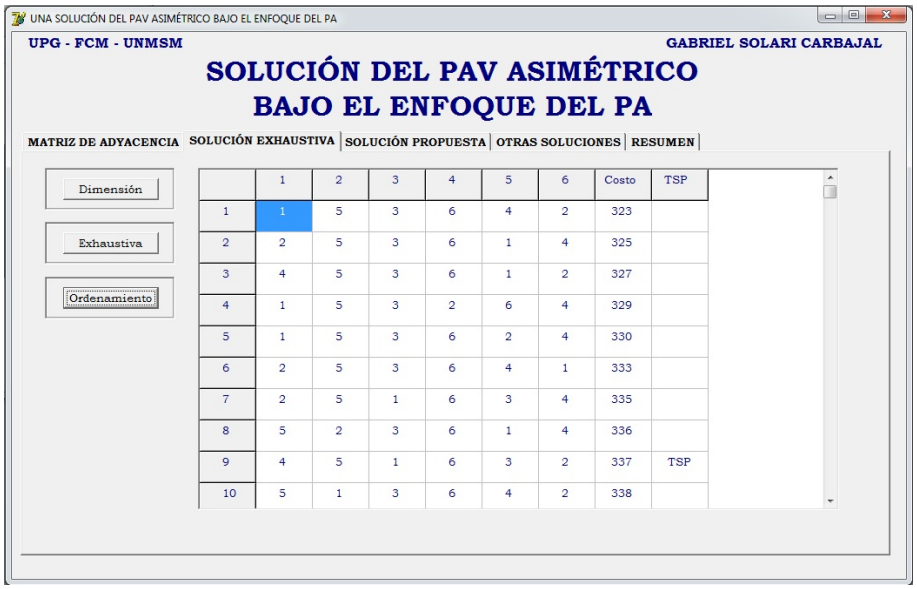
Cuadro 4.02
Ejemplo 4.01: Problema propuesto para verificación de formulaciones

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	56	58	70
2	59	55	61	63	52	64
3	52	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	59
5	55	60	64	57	75	58
6	64	54	77	58	73	80

Fuente propia.

La solución óptima por revisión exhaustiva del problema propuesto se muestra en el Cuadro 4.03, se observa que todas combinaciones son soluciones del PA y la óptima es la número uno. La solución óptima del PAV está ubicada en la posición 9.

Cuadro 4.03
Ejemplo 4.01: Solución exhaustiva del problema generado



	1	2	3	4	5	6	Costo	TSP
1	1	5	3	6	4	2	323	
2	2	5	3	6	1	4	325	
3	4	5	3	6	1	2	327	
4	1	5	3	2	6	4	329	
5	1	5	3	6	2	4	330	
6	2	5	3	6	4	1	333	
7	2	5	1	6	3	4	335	
8	5	2	3	6	1	4	336	
9	4	5	1	6	3	2	337	TSP
10	5	1	3	6	4	2	338	

Fuente propia.

La distribución de las celdas de la solución óptima del PAV sobre la matriz de costo se muestra en el Cuadro 4.04:

Cuadro 4.04
Ejemplo 4.01: Solución óptima del problema propuesto

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

La secuencia de las ciudades en la solución hallada se muestra en la Figura 4.01.

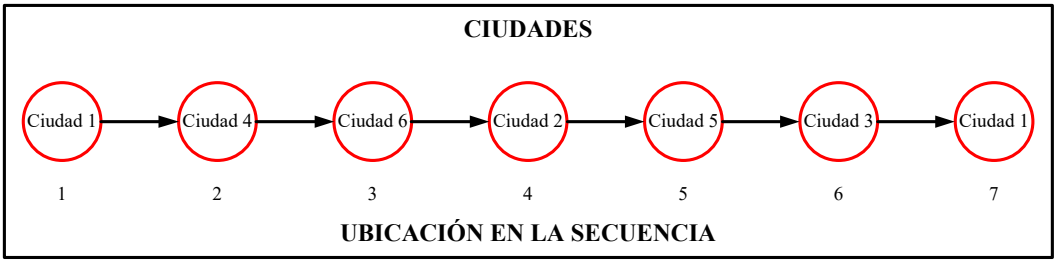


***Figura 4.01*. Ejemplo 4.01: Ubicación de las ciudades en la solución óptima por revisión exhaustiva**
Fuente propia.

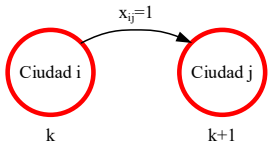
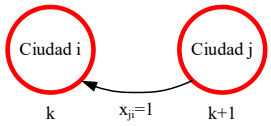
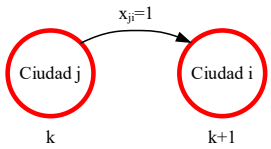
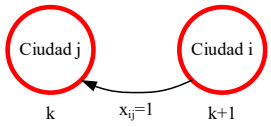
4.1.2. Relación débil entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$

La relación débil entre las variables binarias x_{ij} y las variables enteras $(u_j - u_i)$, tiene como objetivo disminuir el número de restricciones. Estas relaciones han sido planteadas y revisadas en las formulaciones propuestas del acápite 3.5., (pág. 110).

Las alternativas de las relaciones débiles se presentan en el Cuadro 4.05:

Cuadro 4.05

Relación débil entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ij}
	$(u_j - u_i) \geq 1$	$x_{ij} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \leq 0$	$x_{ij} = 0$
	$(u_j - u_i) \geq 1$	$x_{ji} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \leq 0$	$x_{ji} = 0$
	$(u_j - u_i) \leq -1$	$x_{ji} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \geq 0$	$x_{ji} = 0$
	$(u_j - u_i) \leq -1$	$x_{ij} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \geq 0$	$x_{ij} = 0$

Fuente propia.

A manera de ejemplo se selecciona la primera alternativa del Cuadro 4.05 y se representa en la Figura 4.02.:

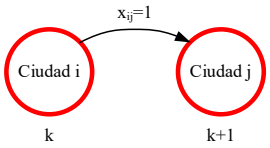


Figura 4.02. **Conexión de la ciudad i con la ciudad j, para $(u_j - u_i) \geq 1$**

Fuente propia.

Se llega a las expresiones del Cuadro 4.05 por relajo de las siguientes condiciones:

$$(u_j - u_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{ij} \in \{0, 1\}$$
$$(u_j - u_i) \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x_{ij} = 0$$

De donde se puede escribir:

$$(u_j - u_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{ij} \in \{0, 1\}$$
$$(u_j - u_i) \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x_{ij} = 0$$
$$(u_j - u_i) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{ij} = 0$$

Se relajó este sistema a la forma:

$$(u_j - u_i) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_{ij} \in \{0, 1\}$$
$$(u_j - u_i) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{ij} = 0$$

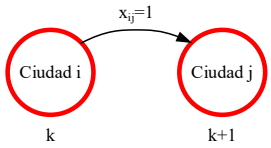
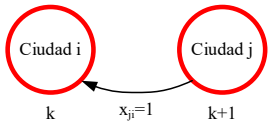
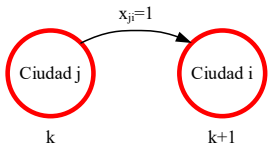
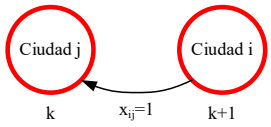
4.1.3. Relación fuerte entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$

La relación fuerte entre las variables binarias x_{ij} y las variables enteras $(u_j - u_i)$, tiene como objetivo determinar la solución óptima del problema considerando todas las restricciones. Estas relaciones han sido planteadas y revisadas en las formulaciones propuestas del acápite 3.6., (pág. 134).

Las alternativas de las relaciones fuertes se presentan en el Cuadro 4.06:

Cuadro 4.06

Relación fuerte entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ij}
	$(u_j - u_i) = 1$	$x_{ij} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \neq 1$	$x_{ij} = 0$
	$(u_j - u_i) = 1$	$x_{ji} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \neq 1$	$x_{ji} = 0$
	$(u_j - u_i) = -1$	$x_{ji} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \neq -1$	$x_{ji} = 0$
	$(u_j - u_i) = -1$	$x_{ij} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \neq -1$	$x_{ij} = 0$

Fuente propia.

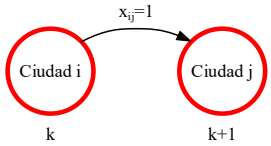
4.2. Análisis de resultados de las formulaciones

4.2.1. Formulación MTZ del PAV

En el acápite 3.4.2., (pág. 104), se revisó la formulación MTZ bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en el acápite 3.3.5. (pág. 99), y se resume en el Cuadro 4.07:

Cuadro 4.07

Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación MTZ

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ij}
	$(u_j - u_i) \geq 1$	$x_{ij} \in \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \leq 0$	$x_{ij} = 0$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa MTZ, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.08 y se ilustran en el Cuadro 4.09 y la Figura 4.03.

Cuadro 4.08

Resumen de los resultados del programa MTZ

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .         1.000     1.000    56.000
---- VAR x25              .         1.000     1.000    52.000
---- VAR x31              .         1.000     1.000    52.000
---- VAR x46              .         1.000     1.000    59.000
---- VAR x53              .         1.000     1.000    64.000
---- VAR x62              .         1.000     1.000    54.000
---- VAR u1               .         1.000   100.000      EPS
---- VAR u2               .         4.000   100.000      EPS
---- VAR u3               .         6.000   100.000      EPS
---- VAR u4               .         2.000   100.000      EPS
---- VAR u5               .         5.000   100.000      EPS
---- VAR u6               .         3.000   100.000      EPS
---- VAR Z               -INF     337.000     +INF        .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.09

Solución óptima del programa MTZ

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

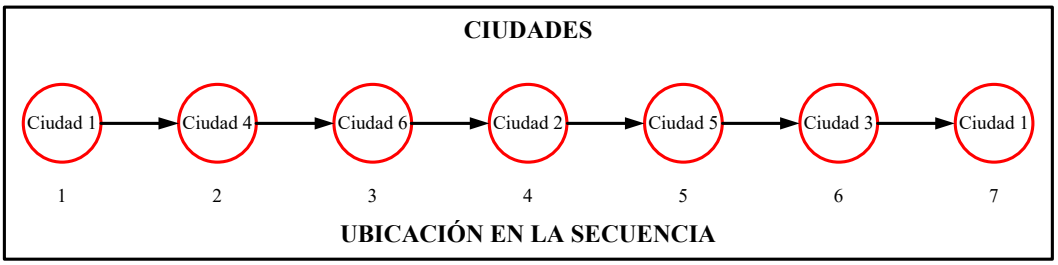


***Figura 4.03*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa MTZ**

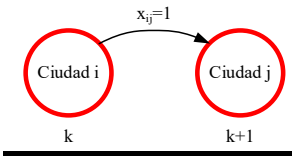
Fuente propia.

De la comparación de la solución óptima del programa MTZ con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa del MTZ nos lleva a la solución óptima del problema .

4.2.2. Formulación de la Propuesta 01

En el acápite 3.5.1., (pág. 111), se revisó la formulación de la Propuesta 01 bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en los acápites 3.3.5. (pág. 99) y 3.5. (pág. 110), y se resume en el Cuadro 4.10:

Cuadro 4.10
Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 01

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ij}
	$(u_j - u_i) \geq 1$	$x_{ij} = \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \leq 0$	$x_{ij} = \{0\}$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa de la Propuesta 01, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.11 y se ilustran en el Cuadro 4.12 y la Figura 4.04.

Cuadro 4.11
Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 01

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .          1.000      1.000     56.000
---- VAR x25              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x31              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x46              .          1.000      1.000     59.000
---- VAR x53              .          1.000      1.000     64.000
---- VAR x62              .          1.000      1.000     54.000
---- VAR u1               .          1.000    100.000       EPS
---- VAR u2               .          4.000    100.000       EPS
---- VAR u3               .          6.000    100.000       EPS
---- VAR u4               .          2.000    100.000       EPS
---- VAR u5               .          5.000    100.000       EPS
---- VAR u6               .          3.000    100.000       EPS
---- VAR Z              -INF       337.000      +INF          .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.12
Solución óptima del programa de la Propuesta 01

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

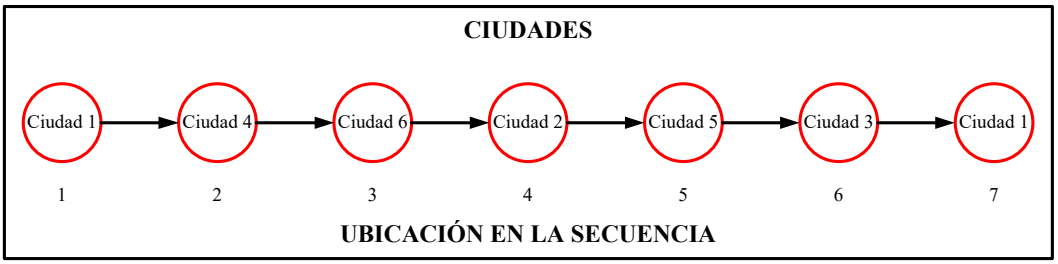


***Figura 4.04*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 01**

Fuente propia.

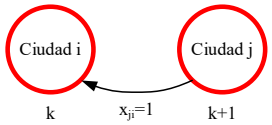
De la comparación de la solución óptima del programa de la Propuesta 01 con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa de la Propuesta 01 nos lleva a la solución óptima del problema.

4.2.3. Formulación de la Propuesta 02

En el acápite 3.5.2., (pág. 116), se revisó la formulación de la Propuesta 02 bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en los acápites 3.3.5. (pág. 99) y 3.5. (pág. 110), y se resume en el Cuadro 4.13:

Cuadro 4.13

Relación entre las variables x_{ji} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 02

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ji}
	$(u_j - u_i) \geq 1$	$x_{ji} = \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \leq 0$	$x_{ji} = \{0\}$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa de la Propuesta 02, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.14 y se ilustran en el Cuadro 4.15 y la Figura 4.05.

Cuadro 4.14
Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 02

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .          1.000      1.000     56.000
---- VAR x25              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x31              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x46              .          1.000      1.000     59.000
---- VAR x53              .          1.000      1.000     64.000
---- VAR x62              .          1.000      1.000     54.000
---- VAR u1               .          1.000    100.000       EPS
---- VAR u2               .          4.000    100.000       EPS
---- VAR u3               .          2.000    100.000       EPS
---- VAR u4               .          6.000    100.000       EPS
---- VAR u5               .          3.000    100.000       EPS
---- VAR u6               .          5.000    100.000       EPS
---- VAR Z              -INF       337.000      +INF          .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.15
Solución óptima del programa de la Propuesta 02

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

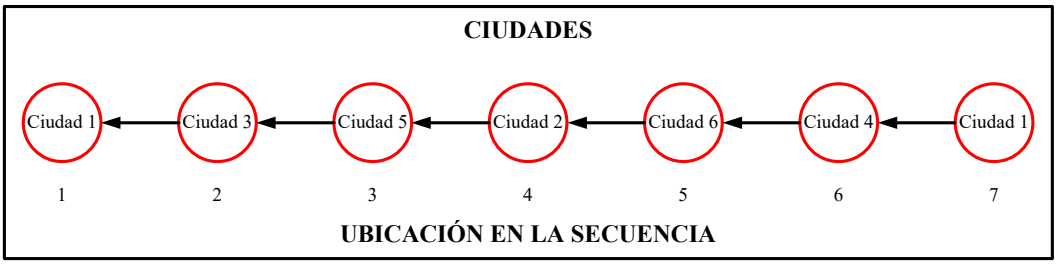


***Figura 4.05*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 02**

Fuente propia.

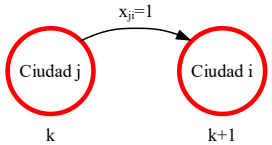
De la comparación de la solución óptima del programa de la Propuesta 02 con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa de la Propuesta 02 nos lleva a la solución óptima del problema .

4.2.4. Formulación de la Propuesta 03

En el acápite 3.5.3., (pág. 122), se revisó la formulación de la Propuesta 03 bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en los acápites 3.3.5. (pág. 99) y 3.5. (pág. 110), y se resume en el Cuadro 4.16:

Cuadro 4.16

Relación entre las variables x_{ji} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 03

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ji}
	$(u_j - u_i) \leq -1$	$x_{ji} = \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \geq 0$	$x_{ji} = \{0\}$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa de la Propuesta 03, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.17 y se ilustran en el Cuadro 4.18 y la Figura 4.06.

Cuadro 4.17
Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 03

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .          1.000      1.000     56.000
---- VAR x25              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x31              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x46              .          1.000      1.000     59.000
---- VAR x53              .          1.000      1.000     64.000
---- VAR x62              .          1.000      1.000     54.000
---- VAR u1               .          1.000    100.000       EPS
---- VAR u2               .          4.000    100.000       EPS
---- VAR u3               .          6.000    100.000       EPS
---- VAR u4               .          2.000    100.000       EPS
---- VAR u5               .          5.000    100.000       EPS
---- VAR u6               .          3.000    100.000       EPS
---- VAR Z              -INF       337.000      +INF          .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.18
Solución óptima del programa de la Propuesta 03

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

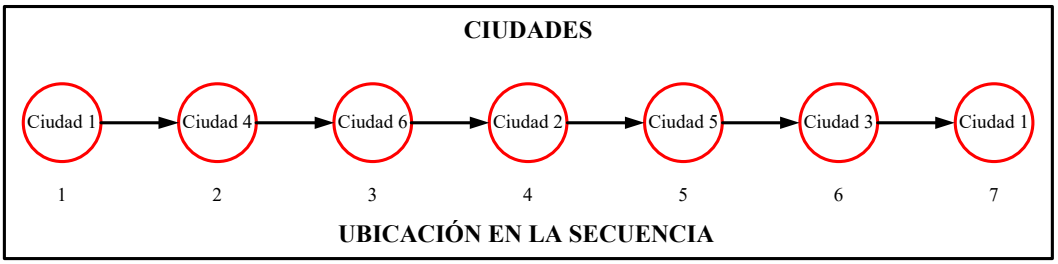


***Figura 4.06*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 03**

Fuente propia.

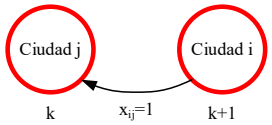
De la comparación de la solución óptima del programa de la Propuesta 03 con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa de la Propuesta 03 nos lleva a la solución óptima del problema .

4.2.5. Formulación de la Propuesta 04

En el acápite 3.5.4., (pág. 128), se revisó la formulación de la Propuesta 04 bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en los acápites 3.3.5. (pág. 99) y 3.5. (pág. 110), y se resume en el Cuadro 4.19:

Cuadro 4.19

Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 04

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ij}
	$(u_j - u_i) \leq -1$	$x_{ij} = \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \geq 0$	$x_{ij} = \{0\}$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa de la Propuesta 04, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.20 y se ilustran en el Cuadro 4.21 y la Figura 4.07.

Cuadro 4.20
Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 04

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .          1.000      1.000     56.000
---- VAR x25              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x31              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x46              .          1.000      1.000     59.000
---- VAR x53              .          1.000      1.000     64.000
---- VAR x62              .          1.000      1.000     54.000
---- VAR u1               .          1.000    100.000       EPS
---- VAR u2               .          4.000    100.000       EPS
---- VAR u3               .          2.000    100.000       EPS
---- VAR u4               .          6.000    100.000       EPS
---- VAR u5               .          3.000    100.000       EPS
---- VAR u6               .          5.000    100.000       EPS
---- VAR Z              -INF       337.000      +INF          .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.21
Solución óptima del programa de la Propuesta 04

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

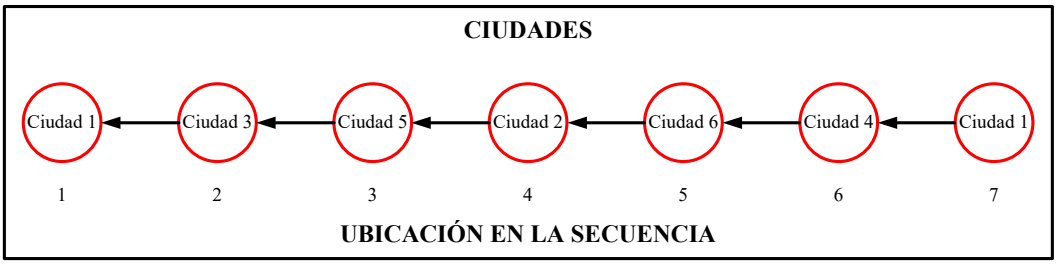


***Figura 4.07*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 04**

Fuente propia.

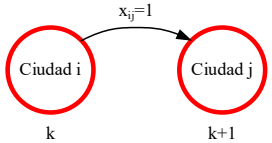
De la comparación de la solución óptima del programa de la Propuesta 04 con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa de la Propuesta 04 nos lleva a la solución óptima del problema.

4.2.6. Formulación de la Propuesta 05

En el acápite 3.6.1., (pág. 134), se revisó la formulación de la Propuesta 05 bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en los acápites 3.3.5. (pág. 99) y 3.6. (pág. 134), y se resume en el Cuadro 4.22:

Cuadro 4.22

Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 05

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ij}
	$(u_j - u_i) = 1$	$x_{ij} = \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \neq 1$	$x_{ij} = \{0\}$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa de la Propuesta 05, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.23 y se ilustran en el Cuadro 4.24 y la Figura 4.08.

Cuadro 4.23
Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 05

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .          1.000      1.000     56.000
---- VAR x25              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x31              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x46              .          1.000      1.000     59.000
---- VAR x53              .          1.000      1.000     64.000
---- VAR x62              .          1.000      1.000     54.000
---- VAR u1               .          1.000    100.000       EPS
---- VAR u2               .          4.000    100.000       EPS
---- VAR u3               .          6.000    100.000       EPS
---- VAR u4               .          2.000    100.000       EPS
---- VAR u5               .          5.000    100.000       EPS
---- VAR u6               .          3.000    100.000       EPS
---- VAR Z               -INF      337.000      +INF         .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.24
Solución óptima del programa de la Propuesta 05

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

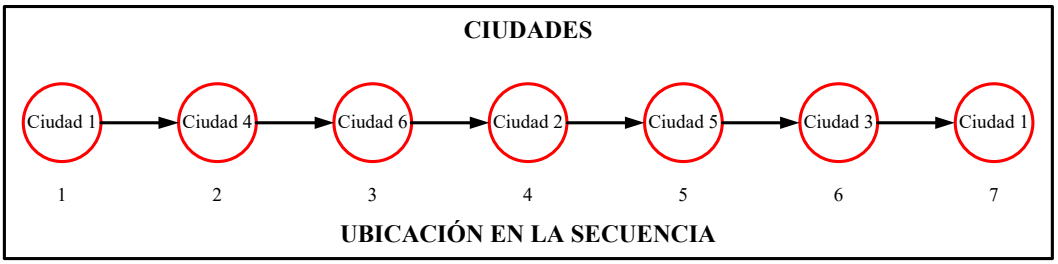


***Figura 4.08*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 05**

Fuente propia.

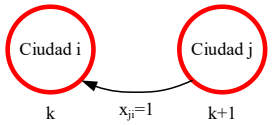
De la comparación de la solución óptima del programa de la Propuesta 05 con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa de la Propuesta 05 nos lleva a la solución óptima del problema.

4.2.7. Formulación de la Propuesta 06

En el acápite 3.6.2., (pág. 142), se revisó la formulación de la Propuesta 06 bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en los acápites 3.3.5. (pág. 99) y 3.6. (pág. 134), y se resume en el Cuadro 4.25:

Cuadro 4.25

Relación entre las variables x_{ji} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 06

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ji}
	$(u_j - u_i) = 1$	$x_{ji} = \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \neq 1$	$x_{ji} = \{0\}$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa de la Propuesta 06, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.26 y se ilustran en el Cuadro 4.27 y la Figura 4.09.

Cuadro 4.26
Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 06

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .          1.000      1.000     56.000
---- VAR x25              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x31              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x46              .          1.000      1.000     59.000
---- VAR x53              .          1.000      1.000     64.000
---- VAR x62              .          1.000      1.000     54.000
---- VAR u1               .          1.000    100.000       EPS
---- VAR u2               .          4.000    100.000       EPS
---- VAR u3               .          2.000    100.000       EPS
---- VAR u4               .          6.000    100.000       EPS
---- VAR u5               .          3.000    100.000       EPS
---- VAR u6               .          5.000    100.000       EPS
---- VAR Z               -INF      337.000      +INF         .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.27
Solución óptima del programa de la Propuesta 06

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

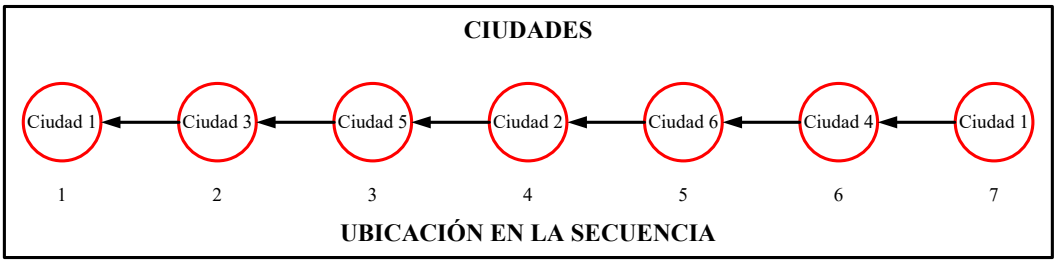


***Figura 4.09*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 06**

Fuente propia.

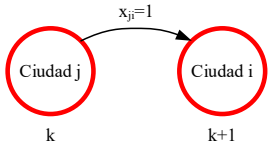
De la comparación de la solución óptima del programa de la Propuesta 06 con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa de la Propuesta 06 nos lleva a la solución óptima del problema.

4.2.8. Formulación de la Propuesta 07

En el acápite 3.6.3., (pág. 150), se revisó la formulación de la Propuesta 07 bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en los acápites 3.3.5. (pág. 99) y 3.6. (pág. 134), y se resume en el Cuadro 4.28:

Cuadro 4.28

Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 07

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ij}
	$(u_j - u_i) = -1$	$x_{ji} = \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \neq -1$	$x_{ji} = \{0\}$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa de la Propuesta 07, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.29 y se ilustran en el Cuadro 4.30 y la Figura 4.10.

Cuadro 4.29
Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 07

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .          1.000      1.000     56.000
---- VAR x25              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x31              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x46              .          1.000      1.000     59.000
---- VAR x53              .          1.000      1.000     64.000
---- VAR x62              .          1.000      1.000     54.000
---- VAR u1               .          1.000    100.000       EPS
---- VAR u2               .          4.000    100.000       EPS
---- VAR u3               .          6.000    100.000       EPS
---- VAR u4               .          2.000    100.000       EPS
---- VAR u5               .          5.000    100.000       EPS
---- VAR u6               .          3.000    100.000       EPS
---- VAR Z              -INF       337.000      +INF          .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.30
Solución óptima del programa de la Propuesta 07

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

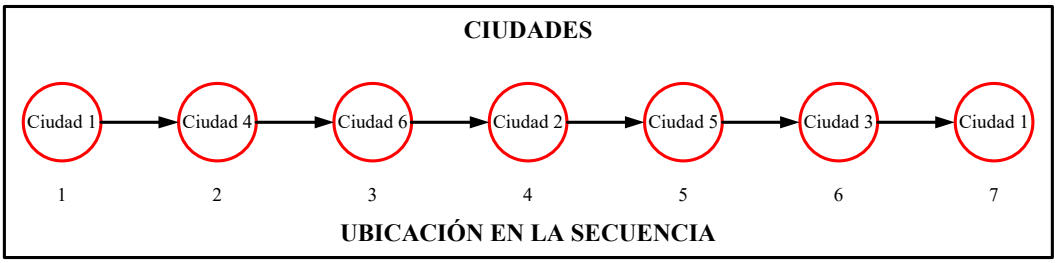


***Figura 4.10*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 07**

Fuente propia.

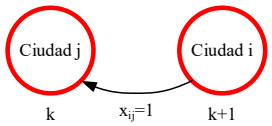
De la comparación de la solución óptima del programa de la Propuesta 07 con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa de la Propuesta 07 nos lleva a la solución óptima del problema.

4.2.9. Formulación de la Propuesta 08

En el acápite 3.6.4., (pág. 158), se revisó la formulación de la Propuesta 08 bajo las relaciones entre las variables x_{ij} y $(u_j - u_i)$ encontradas en los acápites 3.3.5. (pág. 99) y 3.6. (pág. 134), y se resume en el Cuadro 4.31:

Cuadro 4.31

Relación entre las variables x_{ij} y las variables $(u_j - u_i)$ de la formulación de la Propuesta 08

Relación	$(u_j - u_i)$	x_{ij}
	$(u_j - u_i) = -1$	$x_{ij} = \{0, 1\}$
	$(u_j - u_i) \neq -1$	$x_{ij} = \{0\}$

Fuente propia.

El resumen de los resultados del programa de la Propuesta 08, (se puede ver completo en el Anexo C), se muestran en el Cuadro 4.32 y se ilustran en el Cuadro 4.33 y la Figura 4.11.

Cuadro 4.32
Resumen de los resultados del programa de la Propuesta 08

```
Best possible:          337.000000
Absolute gap:             0.000000
Relative gap:             0.000000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR x14              .          1.000      1.000     56.000
---- VAR x25              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x31              .          1.000      1.000     52.000
---- VAR x46              .          1.000      1.000     59.000
---- VAR x53              .          1.000      1.000     64.000
---- VAR x62              .          1.000      1.000     54.000
---- VAR u1               .          1.000    100.000       EPS
---- VAR u2               .          4.000    100.000       EPS
---- VAR u3               .          2.000    100.000       EPS
---- VAR u4               .          6.000    100.000       EPS
---- VAR u5               .          3.000    100.000       EPS
---- VAR u6               .          5.000    100.000       EPS
---- VAR Z              -INF       337.000      +INF          .
```

Fuente propia.

Cuadro 4.33
Solución óptima del programa de la Propuesta 08

	1	2	3	4	5	6
1	50	50	76	**56**	58	70
2	59	55	61	63	**52**	64
3	**52**	76	51	59	78	61
4	74	60	71	76	72	**59**
5	55	60	**64**	57	75	58
6	64	**54**	77	58	73	80

Fuente propia.

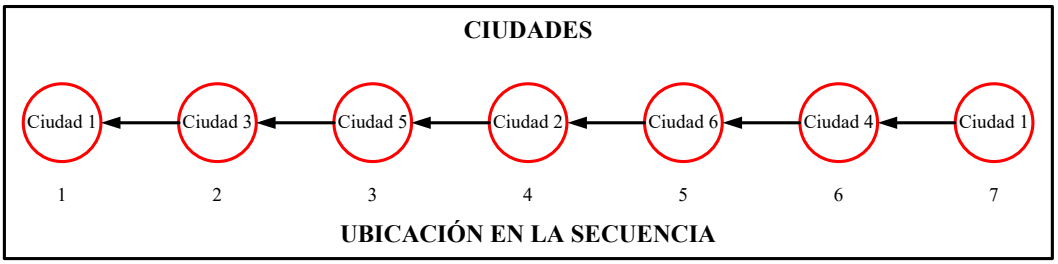


***Figura 4.11*. Ubicación de las ciudades en la solución óptima del programa de la Propuesta 08**

Fuente propia.

De la comparación de la solución óptima del programa de la Propuesta 08 con la solución óptima por revisión exhaustiva, se determina que el programa de la Propuesta 08 nos lleva a la solución óptima del problema.

4.3. Pruebas de hipótesis

4.3.1. Tipo y diseño de la investigación

Para este acápite se utilizó el material bibliográfico de Lind, Marchal y Wathen (2012).

En la presente investigación se utilizó el método deductivo para desarrollar las formulaciones del PAVA y se utilizó el tipo de investigación experimental, prospectiva, transversal y analítica para comprobar cada propuesta.

4.3.2. Unidad de análisis

Se definió la unidad de análisis a las matrices de costos del PA y del PAV.

4.3.3. Población de estudio

Por limitaciones tecnológicas se determinó que la generación de matrices de costos de dimensión $6 \text{ x } 6$, era lo apropiado para la presente investigación.

Se trabajó con matrices de dimensión $n \text{ x } n$, cuyos costos fueron generados de forma independiente mediante una distribución uniforme discreta, por lo que la población queda determinada por:

$$\text{Población} = (\text{Cota}_{\text{máx}} - \text{Cota}_{\text{mín}} + 1)^{n^2}$$

Dónde:

$\text{Cota}_{\text{máx}}$ = Cota máxima de la distribución uniforme discreta

$\text{Cota}_{\text{mín}}$ = Cota mínima de la distribución uniforme discreta

n = Dimensión de la matriz de costos

Se generaron matrices de costos de dimensión $6 \text{ x } 6$ con valores entre 50 y 80, por lo que la población del estudio quedó en:

$$\text{Población} = (80 - 50 + 1)^{36} = 4.88676 \text{x} 10^{53}$$

Bajo estas consideraciones, se determinó que la población de estudio es infinita.

4.3.4. Tamaño de muestra

La fórmula de cálculo para el tamaño de la muestra cuando la población es infinita es:

$$N = \frac{Z^2 \, p \, q}{e^2}$$

Donde:

N = Tamaño de la muestra

Z = Variable estándar con media igual a 0 y varianza igual a 1, se obtiene de la tabla de la Distribución Normal acumulada, para un nivel de confianza dado.

p = Porcentaje de la población que tiene el atributo deseado, expresado en decimales.

q = Porcentaje de la población que no tiene el atributo deseado, expresado en decimales, $(q = 1 - p)$. Si no hay indicación del porcentaje de la población que tiene el atributo deseado se asume $p = 50\%$ y $q = 50\%$.

e = Error de estimación máximo aceptado

Para los valores:

$Z = 1.96$ (Nivel de confianza del 95%)

$p = 0.5$

$q = 0.5$

$e = 0.05$ (Error de estimación del 5%)

$$N = \frac{1.96^2 \, x \, 0.5 \, x \, 0.5}{0.05^2}$$

$$N = 384.16$$

El tamaño de la muestra resultó de 385 matrices de costos.

4.3.5. Selección de muestra y técnicas de recolección de datos

La investigación se considera prospectiva por lo que se generaron 385 matrices de costos de dimensión $6 \text{ x } 6$ de forma independiente, los costos fueron seleccionados mediante una distribución uniforme discreta con valores entre 50 y 80. Para ello se construyó un programa generador que determina el valor óptimo del PA y del PAVA por revisión exhaustiva, para cada caso.

4.3.6. Análisis e interpretación de la información

Dada una matriz de costos, se comparó la solución óptima obtenida por revisión exhaustiva con la solución obtenida de resolver las formulaciones propuestas, si ambas soluciones coinciden el resultado es un éxito y si ambas soluciones son diferentes el resultado es un fracaso, por lo que el experimento se consideró como un ensayo de Bernoulli.

Dado que el experimento se repitió para el tamaño de muestra $N = 385$, se realizó el estudio considerando una distribución Binomial.

El caso en estudio satisface las condiciones binomiales:

- Sólo hay dos posibles resultados. Que la solución obtenida de la formulación del PAVA coincida con la solución óptima o no.
- La probabilidad de un éxito es la misma para cada prueba.
- Las pruebas son independientes.
- Los datos de la muestra son el resultado de conteos.

Se puede utilizar la aproximación a la distribución Normal de la distribución Binomial, pero se debe verificar:

$$N\pi \geq 5 \quad \text{y} \quad N(1-\pi) \geq 5$$

Donde:

$\pi =$ Proporción poblacional

$\mathrm{N} =$ Tamaño de la muestra, para esta investigación se ha determinado en $\mathrm{N} = 385$.

De donde se obtiene:

$$\pi \in \{ 0.013, 0.987 \}$$

Dado que el interés de la investigación es obtener el mayor número de éxitos, se tomó el mayor valor del intervalo de la proporción poblacional por ser el de mayor exigencia.

Al cumplir las condiciones de una relación se siguieron los siguientes pasos:

Paso 1. **Se seleccionó el nivel de significancia**. El nivel de significancia se estableció en 0.05, de tablas se obtuvo 1.96. Ésta es la probabilidad de rechazar una hipótesis verdadera.

Paso 2. **Se determinó el intervalo de confianza**. El Intervalo de confianza (IC) se determinó con la siguiente fórmula:

$$\mathrm{IC} = \pi \pm \mathrm{z} \sqrt{\frac{\pi (1 - \pi)}{\mathrm{N}}}$$

Del intervalo de confianza se utilizó el límite inferior $\mathrm{IC}_{\mathrm{LI}}$

$$\mathrm{IC}_{\mathrm{LI}} = \pi - \mathrm{z} \sqrt{\frac{\pi (1 - \pi)}{\mathrm{N}}}$$

$$IC_{LI} = 0.987 - 1.96\sqrt{\frac{0.987\,(1.000 - 0.987)}{385}}$$

$$IC_{LI} = 0.981$$

Paso 3. **Se determinó la proporción muestral p**. La proporción muestral p se determinó de la siguiente manera:

$$p = \frac{X}{N}$$

Donde:

$p =$ Proporción de la muestra.

$X =$ Número de éxitos.

$N =$ Tamaño de la muestra.

Paso 4. **Se establecieron las hipótesis nula y alternativa**. Se considera que la solución de la formulación propuesta del PAVA siempre debe ser la solución óptima del problema, por lo que se considera que proporción de la muestra p debe ser mayor o igual a la cota inferior del IC_{LI}, por lo tanto la hipótesis nula, H_0, se define como:

$$H_0: \quad p \geq IC_{LI}$$
$$H_A: \quad p < IC_{LI}$$

La prueba es de una cola.

Paso 5: Formulación de la regla de decisión. La regla de decisión que se diseñó para la presente investigación es que rechazamos la hipótesis nula H_0 y aceptamos la hipótesis alternativa H_A si el valor calculado de la

proporción muestral p es menor al límite inferior del intervalo de confianza IC_{LI}, de otra forma no se rechaza H_0.

4.4. Presentación de resultados

Se generaron 385 matrices de costos. La generación de los costos se realizó mediante una distribución uniforme discreta de parámetros 50 y 80, $U(50,80)$. Se determinó la solución óptima del PA y del PAVA mediante revisión exhaustiva de todos los caminos hamiltonianos.

Se determinó la solución óptima de cada matriz de costos utilizando el programa GAMS para cada formulación propuesta.

Los resultados, en todos los casos, coincidieron con la solución óptima obtenida por revisión exhaustiva del PAVA.

4.4.1. Las relaciones entre las variables de la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA

Se formuló la hipótesis nula general como:

H_0 : Si es posible determinar las relaciones entre las variables, que permita la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA.

Se formuló la hipótesis alternativa general como:

H_A : No es posible determinar las relaciones entre las variables, que permita la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA.

Estas hipótesis se reescribieron como:

$$H_0: \quad p \geq 0.981$$

$$H_A: \quad p < 0.981$$

Se considera como éxito si la solución de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) y de las propuestas, coincide con la solución óptima obtenida por revisión exhaustiva del PAVA y se considera fracaso si las soluciones no coinciden.

Es todos los casos de la muestra, las soluciones coinciden. Haciendo cálculos para obtener la proporción de la muestra:

$$p = \frac{385}{385} = 1.00$$

En el Cuadro 4.34 se muestra las proporciones obtenidas del MTZ y de las propuestas:

Cuadro 4.34
Proporciones de las formulaciones del PAVA bajo el enfoque del PA

Descripción	Número de experimentos	Éxitos		Fracasos		Proporción de la muestra (p)
		Cant.	%	Cant.	%	
MTZ	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 01	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 02	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 03	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 04	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 05	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 06	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 07	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 08	385	385	100%	0	0%	1.000

Fuente propia.

De los resultados mostrados en el Cuadro 4.34, se concluye que no se rechaza la hipótesis nula H_0.

4.4.2. La formulación del PA no se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV

Se formuló la hipótesis nula específica (a) como:

H_0 : Si es posible probar que la formulación del PA no se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV.

Se formuló la hipótesis alternativa específica (a) como:

H_A : No es posible probar que la formulación del PA no se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV.

Para este caso utilizaremos:

H_0 : Si es posible probar que la formulación del PA se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV.

H_A : No es posible probar que la formulación del PA se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV.

Estas hipótesis se reescribieron como:

$$H_0: \ p \geq 0.981$$
$$H_A: \ p < 0.981$$

Se considera como éxito si la solución de la formulación del PA, coincide con la solución óptima obtenida por revisión exhaustiva del PAV y se considera fracaso si las soluciones no coinciden.

En 69 casos de la muestra las soluciones coinciden. Haciendo cálculos para obtener la proporción de la muestra:

$$p = \frac{69}{385} = 0.179$$

En el Cuadro 4.35 se muestra la proporción obtenida utilizando la formulación del PA como formulación del PAV:

Cuadro 4.35
Proporción de utilizar la formulación del PA como formulación del PAV

Descripción	Número de experimentos	Éxitos		Fracasos		Proporción de la muestra (p)
		Cant.	%	Cant.	%	
PA	385	385	100%	0	0%	1.000
PAVA	385	69	17.9%	316	82.1%	0.179

Fuente propia.

De los resultados mostrados en el Cuadro 4.35, se concluye que se rechaza la hipótesis nula H_0.

4.4.3. Las relaciones entre las variables de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA

Se formuló la hipótesis nula específica (b) como:

H_0 : Si se pueden determinar las relaciones entre las variables de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA.

Se formuló la hipótesis alternativa específica (b) como:

H_A : No se pueden determinar las relaciones entre las variables de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA.

Estas hipótesis se reescribieron como:

$$H_0: \ p \geq 0.981$$

$$H_A: \ p < 0.981$$

Se considera como éxito si la solución de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ), coincide con la solución óptima obtenida por revisión exhaustiva del PAVA y se considera fracaso si las soluciones no coinciden.

Es todos los casos de la muestra las soluciones coinciden. Haciendo cálculos para obtener la proporción de la muestra:

$$p = \frac{385}{385} = 1.00$$

En el Cuadro 4.36 se muestra las proporciones obtenidas del MTZ:

Cuadro 4.36
Proporción de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAV bajo el enfoque del PA

Descripción	Número de experimentos	Éxitos		Fracasos		Proporción de la muestra (p)
		Cant.	%	Cant.	%	
MTZ	385	385	100%	0	0%	1.000

Fuente propia.

De los resultados mostrados en el Cuadro 4.36, se concluye que no se rechaza la hipótesis nula H_0.

4.4.4. Las relaciones entre las variables de la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA como una relación débil entre las variables

Se formuló la hipótesis nula específica (c) como:

H_0 : Si se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación débil entre las variables.

Se formuló la hipótesis alternativa específica (c) como:

H_A : No se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación débil entre las variables.

Estas hipótesis se reescribieron como:

$$H_0: \ p \geq 0.981$$
$$H_A: \ p < 0.981$$

Se considera como éxito si la solución de la formulación propuesta como relación débil entre las variables, coincide con la solución óptima obtenida por revisión exhaustiva del PAVA y se considera fracaso si las soluciones no coinciden.

Es todos los casos de la muestra las soluciones coinciden. Haciendo cálculos para obtener la proporción de la muestra:

$$p = \frac{385}{385} = 1.00$$

En el Cuadro 4.37 se muestra las proporciones obtenidas de las propuestas como relación débil entre variables:

Cuadro 4.37
Proporciones de las formulaciones del PAVA bajo el enfoque del PA como relación débil entre variables

Descripción	Número de experimentos	Éxitos		Fracasos		Proporción de la muestra (p)
		Cant.	%	Cant.	%	
Propuesta 01	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 02	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 03	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 04	385	385	100%	0	0%	1.000

Fuente propia.

De los resultados mostrados en el Cuadro 4.37, se concluye que no se rechaza la hipótesis nula H_0.

4.4.5. Las relaciones entre las variables de la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA como una relación fuerte entre las variables

Se formuló la hipótesis nula específica (d) como:

H_0 : Si se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación fuerte entre las variables.

Se formuló la hipótesis alternativa específica (d) como:

H_A : No se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación fuerte entre las variables.

Estas hipótesis se reescribieron como:

$$H_0: \quad p \geq 0.981$$

$$H_A: \quad p < 0.981$$

Se considera como éxito si la solución de la formulación propuesta como relación fuerte entre las variables, coincide con la solución óptima obtenida por revisión exhaustiva del PAVA y se considera fracaso si las soluciones no coinciden.

Es todos los casos de la muestra las soluciones coinciden. Haciendo cálculos para obtener la proporción de la muestra:

$$p = \frac{385}{385} = 1.00$$

En el Cuadro 4.38 se muestra las proporciones obtenidas de las propuestas como relación fuerte entre variables:

Cuadro 4.38
Proporciones de las formulaciones del PAVA bajo el enfoque del PA como relación fuerte entre variables

Descripción	Número de experimentos	Éxitos		Fracasos		Proporción de la muestra (p)
		Cant.	%	Cant.	%	
Propuesta 05	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 06	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 07	385	385	100%	0	0%	1.000
Propuesta 08	385	385	100%	0	0%	1.000

Fuente propia.

De los resultados mostrados en el Cuadro 4.38, se concluye que no se rechaza la hipótesis nula H_0.

4.4.6. Se pueden comprobar las soluciones de las formulaciones propuestas del PAVA con soluciones óptimas obtenidas por revisión exhaustiva de diferentes problemas

Se formuló la hipótesis nula específica (e) como:

H_0 : Si se pueden comprobar las soluciones de las formulaciones propuestas del PAVA con soluciones óptimas obtenidas por revisión exhaustiva de diferentes problemas.

Se formuló la hipótesis alternativa específica (e) como:

H_A : No se pueden comprobar las soluciones de las formulaciones propuestas del PAVA con soluciones óptimas obtenidas por revisión exhaustiva de diferentes problemas.

Si existe un único ciclo hamiltoniano, éste será la solución óptima del PAV. En una matriz de costos completa de dimensión $n \times n$, existen $(n-1)!$ ciclos hamiltonianos, y de estas soluciones se localiza un mínimo por revisión exhaustiva que se utilizó como medida de comparación. Por esta razón no es posible rechazar la hipótesis nula H_0 en una matriz completa.

CONCLUSIONES

La presente investigación tuvo como objetivo el estudio y diseño de formulaciones del PAVA bajo el enfoque del PA. En los acápites 3.3.5. (pág. 99), 4.1.2. (pág. 171) y 4.1.3. (pág. 173), se determinaron las relaciones entre las variables binarias x_{ij} (o x_{ji}) y las variables enteras $(u_j - u_i)$. Estas relaciones tienen como finalidad la eliminación de sub ciclos. Las relaciones sirvieron de base para la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA, las principales conclusiones que se obtuvieron fueron:

1. En el acápite 4.4.1. (pág. 199), se determina, que no es posible rechazar la hipótesis nula H_0. Sobre la base de los resultados de la muestra, se afirma que si es posible determinar las relaciones entre las variables, que permita la formulación del PAVA bajo el enfoque del PA. Con las formulaciones propuestas se obtuvo el 100% de soluciones óptimas.

2. En el acápite 4.4.2. (pág. 201), se determina, que no es posible rechazar la hipótesis nula H_0. Sobre la base de los resultados de la muestra, se afirma que si es posible probar que la formulación del PA no se puede utilizar para determinar la solución óptima del PAV. Por lo que es necesario añadir variables y restricciones a la formulación del PA para obtener la formulación del PAVA que proporcione soluciones óptimas del problema.

3. En el acápite 4.4.3. (pág. 203), se determina, que no es posible rechazar la hipótesis nula H_0. Sobre la base de los resultados de la muestra, se afirma que si se puede determinar las relaciones entre las

variables de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) del PAVA bajo el enfoque del PA. Con la formulación de MTZ se obtuvo el 100% de soluciones óptimas.

4. En el acápite 4.4.4. (pág. 204), se determina, que no es posible rechazar la hipótesis nula H_0. Sobre la base de los resultados de la muestra, se afirma que si se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación débil entre las variables. Con las formulaciones propuestas, como relación débil entre las variables, se obtuvo el 100% de soluciones óptimas.

5. En el acápite 4.4.5. (pág. 206), se determina, que no es posible rechazar la hipótesis nula H_0. Sobre la base de los resultados de la muestra, se afirma que si se puede formular el PAVA bajo el enfoque del PA como una relación fuerte entre las variables. Con las formulaciones propuestas, como relación fuerte entre las variables, se obtuvo el 100% de soluciones óptimas.

6. En el acápite 4.4.6. (pág. 208), se determina, que no es posible rechazar la hipótesis nula H_0. Sobre la base de los resultados de la muestra, se afirma que si se pueden comprobar las soluciones de las formulaciones propuestas del PAVA con soluciones óptimas obtenidas por revisión exhaustiva de diferentes problemas.

RECOMENDACIONES

Las principales recomendaciones para la presente investigación son:

a. Técnica

a1. Para el PAVA, en una matriz de costos completa de dimensión $n \times n$, existen $(n-1)!$ soluciones, por lo que se tiene limitaciones tecnológicas y se recomienda mejorar los algoritmos de búsqueda de soluciones óptimas por revisión exhaustiva, para problemas de mayor dimensión.

a2. Basado en la complejidad que surge por la mayor dimensión de los problemas, se recomienda utilizar programas para resolver problemas de Programación Entera Mixta de mayor capacidad o versiones profesionales.

a3. Utilizar computadoras con mayor velocidad de procesamiento, que permita resolver problemas de mayor dimensión.

b. Experimentación

b1. Experimentar con una gama de problemas de mayor dimensión y de toda índole.

b2. Considerar, como una nueva variable dependiente, el tiempo de procesamiento.

b3. Utilizar problemas provenientes de otras librerías como TSPLIB, mientras las herramientas tecnológicas lo permitan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alarcón, F. (2009). *Asignación de árbitros para un campeonato de fútbol mediante el uso de Programación Matemática*. (Tesis de Maestría inédita). Universidad de Chile, Santiago de Chile.

Burkard, R., Dell'Amico, M., & Martello, S. (2009). *Assignment Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Castañeda, C. Y. (2000). *Estudio comparativo de diversos métodos de solución del Problema del Agente Viajero (PAV)*. (Tesis de Maestría inédita). Universidad de las Américas. Puebla.

Castro, M. (1999). *Algoritmos Genéticos con Edades para resolver el Problema del Agente Viajero*. (Tesis de Maestría inédita). Universidad Autónoma de Nuevo León, Nuevo León.

Chinneck, J. W. (2015). *Practical Optimization: A Gentle Introduction* [versión electrónica]. Ontario: Carleton University. Recuperado de: www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po.html

Clay Mathematics Institute (2012). *P vs NP Problem*. Recuperado de http://www.claymath.org/millennium-problems/p-vs-np-problem

Cummings, N. (2016). *A brief History of the Travelling Salesman Problem*. Recuperado de https://www.theorsociety.com/about-or/or-

methods/heuristics/a-brief-history-of-the-travelling-salesman-problem/

Docio, M. R. (2015). *Programación Lineal Entera: Un problema de Planificación de Plantilla*. (Tesis de Grado en Economía inédita). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Gaglani, M. S. (2011). *A Study on Transportation Problem, Transshipment Problem, Assignment Problem and Supply Chain Management.* (Tesis de Doctorado inédita). Saurashtra University, Rajkot, Gujarat 360005, India.

Hillier, F., y Lieberman, G. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones.* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Letchford, A. N., Nasiriy, S. D., & Theisz, D. O. (2013). Compact Formulations of the Steiner Traveling Salesman Problem and Related Problems. *European Journal of Operational Research*.

Lind, D., Marchal, W., y Wathen, S. (2012). *Estadística aplicada a los negocios y la economía.* (15ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Martí, R. (2003). *Procedimientos Methaheurísticos en Optimización Combinatoria*. (Texto del curso de Doctorado inédito). Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Valencia y Universidad Politécnica de Cataluña.

Martín, N., Peña, A., y Rodríguez, M. (2004). Matemática y Ciencia. *Revista Varela*, 4, 15-25.
Recuperado de http://revistavarela.uclv.edu.cu/articulos/rv0702.pdf

Matai, R., Singh, S. P., & Mittal, M. L. (2010).Traveling Salesman Problem: An Overview of Applications, Formulations, and Solution Approaches. En D. Davendra Editor, *Traveling Salesman Problem, Theory and Applications,* (1-24). India. InTech.

Mital K. V. (1984). *Métodos de optimización*. México: Editorial Limusa.

Öncan, T., Altinel, I. K., & Laporte, G. (2007). A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. *Computers & Operations Research*, 36, 637-654.

Padberg, M., & Sung, T. (1991). An analytical comparison of different formulations of the travelling salesman problem. *Mathematical Programming*, 52, (1–3), 315–357.

Pataki, G. (2003). Teaching Integer Programming Formulations Using the Traveling Salesman Problem. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 45, (1), 116-123.

Puget, J. F. (2013). *No, The TSP Isn't NP Complete*. [Mensaje en un blog], IBM developer Works. Recuperado de https://www.ibm.com/developerworks/community/blogs/jfp/entry/no_the_tsp_isn_t_np_complete?lang=en

Ramos, A., Sánchez, P., Ferrer, J. M., Barquín, J., y Linares, P., (2010). *Modelos Matemáticos de Optimización* [versión electrónica]. Madrid: Universidad Pontificia Comillas. Recuperado de: https://www.gams.com/fileadmin/community/contrib/doc/modelado_en_gams.pdf

Roberti, R., & Toth, P. (2012). Models and algorithms for the Asymmetric Traveling Salesman Problem: an experimental comparison. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 1(1-2), 113-133.

Rodríguez, V. (2003). *Manipulación Genética Aplicada al Problema del Agente Viajero*. (Tesis de Maestría inédita). Instituto Politécnico Nacional. México.

Román, H. (2011). *Solución de Problemas de Optimización mediante Algoritmos Genéticos aplicando cómputo de alto rendimiento*. (Tesis de Maestría inédita). Instituto Politécnico Nacional, Tijuana.

Schrijver, A. (2005). On the history of combinatorial optimization (till 1960). *Handbook of Discrete Optimization*, 1-68.

Solari, G. (2013). *Programación Lineal Entera y Binaria*. (Apuntes de clase inédito). Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima. Recuperado de: https://www.slideshare.net/juliopari/unmsm-fisi-programacin-lineal-entera-y-binaria-io1-cl15-enterabinaria

Solari, G. (2013b). *Problema de Asignación*. (Apuntes de clase inédito). Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima. Recuperado de: https://es.slideshare.net/juliopari/unmsm-fisi-problema-de-la-asignacin-io1-cl14-asignacion

Solari, G. (2017). Formulation for the Asymmetric Traveling Salesman Problem using Mixed Integer Programming. *21st Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS)*, Quebec, Canada.

Taha, H. (2012). *Investigación de Operaciones*. (9ª ed.). México: Pearson Educación.

UWaterloo (2016). *The Traveling Salesman Problem*. [Mensaje en un blog], Canadá: Universidad de Waterloo. Recuperado de http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/

Wolff, P. (2011). *Modelos de Programación Matemática para asignación de pabellones quirúrgicos en hospitales públicos.* (Tesis de Maestría inédita). Universidad de Chile, Santiago de Chile.

ANEXOS

ANEXO A Cuadros de análisis de las formulaciones MTZ y de las Propuestas

Cuadro A.01

Análisis de la Formulación MTZ

n	=	6

N°	x_{ij}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ij}	RESTRICCIÓN $(n-1) * x_{ij} - (u_j - u_i) <= (n-2)$						x_{ij}	
	0	1									0	1
1	0	1	-5	{ 0 }	0	5	5	10	<=	4		
2	0	1	-4	{ 0 }	0	5	4	9	<=	4	0	
3	0	1	-3	{ 0 }	0	5	3	8	<=	4	0	
4	0	1	-2	{ 0 }	0	5	2	7	<=	4	0	
5	0	1	-1	{ 0 }	0	5	1	6	<=	4	0	
6	0	1	0	{ 0 }	0	5	0	5	<=	4	0	
7	0	1	1	{ 0, 1 }	0	5	-1	4	<=	4	0	1
8	0	1	2	{ 0, 1 }	0	5	-2	3	<=	4	0	1
9	0	1	3	{ 0, 1 }	0	5	-3	2	<=	4	0	1
10	0	1	4	{ 0, 1 }	0	5	-4	1	<=	4	0	1
11	0	1	5	{ 0, 1 }	0	5	-5	0	<=	4	0	1

Fuente propia

Cuadro A.02

Análisis de la restricción de la Propuesta 01

n = 6					RESTRICCIÓN									
N°	x_{ij}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ij}	$(n+1) * x_{ij} - (u_j - u_i) <= n$						x_{ij}	
	0	1									0	1
1	0	1	-5	{ 0 }	0	7	5	12	<=	6	0	
2	0	1	-4	{ 0 }	0	7	4	11	<=	6	0	
3	0	1	-3	{ 0 }	0	7	3	10	<=	6	0	
4	0	1	-2	{ 0 }	0	7	2	9	<=	6	0	
5	0	1	-1	{ 0 }	0	7	1	8	<=	6	0	
6	0	1	0	{ 0 }	0	7	0	7	<=	6	0	
7	0	1	1	{ 0, 1 }	0	7	-1	6	<=	6	0	1
8	0	1	2	{ 0, 1 }	0	7	-2	5	<=	6	0	1
9	0	1	3	{ 0, 1 }	0	7	-3	4	<=	6	0	1
10	0	1	4	{ 0, 1 }	0	7	-4	3	<=	6	0	1
11	0	1	5	{ 0, 1 }	0	7	-5	2	<=	6	0	1

Fuente propia

Cuadro A.03

Análisis de la restricción de la Propuesta 02

n = 6					RESTRICCIÓN									
N°	x_{ji}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ji}	$(n+1) * x_{ji} - (u_j - u_i) <= n$						x_{ji}	
	0	1									0	1
1	0	1	-5	{ 0 }	0	7	5	12	<=	6	0	
2	0	1	-4	{ 0 }	0	7	4	11	<=	6	0	
3	0	1	-3	{ 0 }	0	7	3	10	<=	6	0	
4	0	1	-2	{ 0 }	0	7	2	9	<=	6	0	
5	0	1	-1	{ 0 }	0	7	1	8	<=	6	0	
6	0	1	0	{ 0 }	0	7	0	7	<=	6	0	
7	0	1	1	{ 0, 1 }	0	7	-1	6	<=	6	0	1
8	0	1	2	{ 0, 1 }	0	7	-2	5	<=	6	0	1
9	0	1	3	{ 0, 1 }	0	7	-3	4	<=	6	0	1
10	0	1	4	{ 0, 1 }	0	7	-4	3	<=	6	0	1
11	0	1	5	{ 0, 1 }	0	7	-5	2	<=	6	0	1

Fuente propia

Cuadro A.04

Análisis de la restricción de la Propuesta 03

n = 6					RESTRICCIÓN											
N°	x_{ji}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ji}	$(n+1) * x_{ji} + (u_j - u_i) <= n$								x_{ji}	
	0	1											0	1
1	0	1	-5	{ 0, 1 }	0	7	-5	2	<=	6			0	1
2	0	1	-4	{ 0, 1 }	0	7	-4	3	<=	6			0	1
3	0	1	-3	{ 0, 1 }	0	7	-3	4	<=	6			0	1
4	0	1	-2	{ 0, 1 }	0	7	-2	5	<=	6			0	1
5	0	1	-1	{ 0, 1 }	0	7	-1	6	<=	6			0	1
6	0	1	0	{ 0 }	0	7	0	7	<=	6			0	
7	0	1	1	{ 0 }	0	7	1	8	<=	6			0	
8	0	1	2	{ 0 }	0	7	2	9	<=	6			0	
9	0	1	3	{ 0 }	0	7	3	10	<=	6			0	
10	0	1	4	{ 0 }	0	7	4	11	<=	6			0	
11	0	1	5	{ 0 }	0	7	5	12	<=	6			0	

Fuente propia

Cuadro A.05

Análisis de la restricción de la Propuesta 04

n = 6					RESTRICCIÓN											
N°	x_{ij}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ij}	$(n+1) * x_{ij} + (u_j - u_i) <= n$								x_{ij}	
	0	1											0	1
1	0	1	-5	{ 0, 1 }	0	7	-5	2	<=	6			0	1
2	0	1	-4	{ 0, 1 }	0	7	-4	3	<=	6			0	1
3	0	1	-3	{ 0, 1 }	0	7	-3	4	<=	6			0	1
4	0	1	-2	{ 0, 1 }	0	7	-2	5	<=	6			0	1
5	0	1	-1	{ 0, 1 }	0	7	-1	6	<=	6			0	1
6	0	1	0	{ 0 }	0	7	0	7	<=	6			0	
7	0	1	1	{ 0 }	0	7	1	8	<=	6			0	
8	0	1	2	{ 0 }	0	7	2	9	<=	6			0	
9	0	1	3	{ 0 }	0	7	3	10	<=	6			0	
10	0	1	4	{ 0 }	0	7	4	11	<=	6			0	
11	0	1	5	{ 0 }	0	7	5	12	<=	6			0	

Fuente propia

Cuadro A.06

Análisis de las restricciones de la Propuesta 05

n	=	6

Nº	x_{ij}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ij}	RESTRICCIÓN 1 $(n+1) * x_{ij} - (u_j - u_i) <= n$						x_{ij}		RESTRICCIÓN 2 $n * x_{ij} + (u_j - u_i) <= (n+1)$						x_{ij}		x_{ij}	
	0	1									0	1							0	1	0	1
1	0	1	-5	{ 0 }	0	7	5	12	<=	6	0		0	6	-5	1	<=	7	0	1	0	
2	0	1	-4	{ 0 }	0	7	4	11	<=	6	0		0	6	-4	2	<=	7	0	1	0	
3	0	1	-3	{ 0 }	0	7	3	10	<=	6	0		0	6	-3	3	<=	7	0	1	0	
4	0	1	-2	{ 0 }	0	7	2	9	<=	6	0		0	6	-2	4	<=	7	0	1	0	
5	0	1	-1	{ 0 }	0	7	1	8	<=	6	0		0	6	-1	5	<=	7	0	1	0	
6	0	1	0	{ 0 }	0	7	0	7	<=	6	0		0	6	0	6	<=	7	0	1	0	
7	0	1	1	{ 0, 1 }	0	7	-1	6	<=	6	0	1	0	6	1	7	<=	7	0	1	0	1
8	0	1	2	{ 0 }	0	7	-2	5	<=	6	0	1	0	6	2	8	<=	7	0		0	
9	0	1	3	{ 0 }	0	7	-3	4	<=	6	0	1	0	6	3	9	<=	7	0		0	
10	0	1	4	{ 0 }	0	7	-4	3	<=	6	0	1	0	6	4	10	<=	7	0		0	
11	0	1	5	{ 0 }	0	7	-5	2	<=	6	0	1	0	6	5	11	<=	7	0		0	

Fuente propia

Cuadro A.07

Análisis de las restricciones de la Propuesta 06

n = 6

Nº	x_{ji}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ji}	RESTRICCIÓN 1: $(n+1) * x_{ji} - (u_j - u_i) <= n$						x_{ji}		RESTRICCIÓN 2: $n * x_{ji} + (u_j - u_i) <= (n+1)$						x_{ji}		x_{ji}	
	0	1									0	1							0	1	0	1
1	0	1	-5	{ 0 }	0	7	5	12	<=	6	0		0	6	-5	1	<=	7	0	1	0	
2	0	1	-4	{ 0 }	0	7	4	11	<=	6	0		0	6	-4	2	<=	7	0	1	0	
3	0	1	-3	{ 0 }	0	7	3	10	<=	6	0		0	6	-3	3	<=	7	0	1	0	
4	0	1	-2	{ 0 }	0	7	2	9	<=	6	0		0	6	-2	4	<=	7	0	1	0	
5	0	1	-1	{ 0 }	0	7	1	8	<=	6	0		0	6	-1	5	<=	7	0	1	0	
6	0	1	0	{ 0 }	0	7	0	7	<=	6	0		0	6	0	6	<=	7	0	1	0	
7	0	1	1	{ 0, 1 }	0	7	-1	6	<=	6	0	1	0	6	1	7	<=	7	0	1	0	1
8	0	1	2	{ 0 }	0	7	-2	5	<=	6	0	1	0	6	2	8	<=	7	0		0	
9	0	1	3	{ 0 }	0	7	-3	4	<=	6	0	1	0	6	3	9	<=	7	0		0	
10	0	1	4	{ 0 }	0	7	-4	3	<=	6	0	1	0	6	4	10	<=	7	0		0	
11	0	1	5	{ 0 }	0	7	-5	2	<=	6	0	1	0	6	5	11	<=	7	0		0	

Fuente propia

Cuadro A.08

Análisis de las restricciones de la Propuesta 07

n = 6

Nº	x_{ji}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ji}	RESTRICCIÓN 1: $n * x_{ji} - (u_j - u_i) <= (n+1)$						x_{ji}		RESTRICCIÓN 2: $(n+1) * x_{ji} + (u_j - u_i) <= n$						x_{ji}		x_{ji}	
	0	1									0	1							0	1	0	1
1	0	1	-5	{ 0 }	0	6	5	11	<=	7	0		0	7	-5	2	<=	6	0	1	0	
2	0	1	-4	{ 0 }	0	6	4	10	<=	7	0		0	7	-4	3	<=	6	0	1	0	
3	0	1	-3	{ 0 }	0	6	3	9	<=	7	0		0	7	-3	4	<=	6	0	1	0	
4	0	1	-2	{ 0 }	0	6	2	8	<=	7	0		0	7	-2	5	<=	6	0	1	0	
5	0	1	-1	{ 0, 1 }	0	6	1	7	<=	7	0	1	0	7	-1	6	<=	6	0	1	0	1
6	0	1	0	{ 0 }	0	6	0	6	<=	7	0	1	0	7	0	7	<=	6	0		0	
7	0	1	1	{ 0 }	0	6	-1	5	<=	7	0	1	0	7	1	8	<=	6	0		0	
8	0	1	2	{ 0 }	0	6	-2	4	<=	7	0	1	0	7	2	9	<=	6	0		0	
9	0	1	3	{ 0 }	0	6	-3	3	<=	7	0	1	0	7	3	10	<=	6	0		0	
10	0	1	4	{ 0 }	0	6	-4	2	<=	7	0	1	0	7	4	11	<=	6	0		0	
11	0	1	5	{ 0 }	0	6	-5	1	<=	7	0	1	0	7	5	12	<=	6	0		0	

Fuente propia

Cuadro A.09

Análisis de las restricciones de la Propuesta 08

n = 6

Nº	x_{ij}		$(u_j - u_i)$	Resultados de x_{ij}	RESTRICCIÓN 1: $n * x_{ij} - (u_j - u_i) <= (n+1)$						x_{ij}		RESTRICCIÓN 2: $(n+1) * x_{ij} + (u_j - u_i) <= n$						x_{ij}		x_{ij}	
	0	1									0	1							0	1	0	1
1	0	1	-5	{ 0 }	0	6	5	11	<=	7	0		0	7	-5	2	<=	6	0	1	0	
2	0	1	-4	{ 0 }	0	6	4	10	<=	7	0		0	7	-4	3	<=	6	0	1	0	
3	0	1	-3	{ 0 }	0	6	3	9	<=	7	0		0	7	-3	4	<=	6	0	1	0	
4	0	1	-2	{ 0 }	0	6	2	8	<=	7	0		0	7	-2	5	<=	6	0	1	0	
5	0	1	-1	{ 0, 1 }	0	6	1	7	<=	7	0	1	0	7	-1	6	<=	6	0	1	0	1
6	0	1	0	{ 0 }	0	6	0	6	<=	7	0	1	0	7	0	7	<=	6	0		0	
7	0	1	1	{ 0 }	0	6	-1	5	<=	7	0	1	0	7	1	8	<=	6	0		0	
8	0	1	2	{ 0 }	0	6	-2	4	<=	7	0	1	0	7	2	9	<=	6	0		0	
9	0	1	3	{ 0 }	0	6	-3	3	<=	7	0	1	0	7	3	10	<=	6	0		0	
10	0	1	4	{ 0 }	0	6	-4	2	<=	7	0	1	0	7	4	11	<=	6	0		0	
11	0	1	5	{ 0 }	0	6	-5	1	<=	7	0	1	0	7	5	12	<=	6	0		0	

Fuente propia

ANEXO B Programas de las formulaciones de las Propuestas en GAMS

Cuadro B.01

Programa de la formulación MTZ

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA FORMULACION MTZ
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R: (n-1)*xij - (uj - ui) <= (n-2)
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES01, RES02, RES03, RES04, RES05, RES06
  RES07, RES08, RES09, RES10, RES11, RES12
  RES13, RES14, RES15, RES16, RES17, RES18
```

```
  RES19, RES20;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                 59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                 52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
                 74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                 55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                 64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;

* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Primera restricción
RES01  ..   (n-1)*x23 - (u3 - u2) =L= (n-2);
RES02  ..   (n-1)*x24 - (u4 - u2) =L= (n-2);
RES03  ..   (n-1)*x25 - (u5 - u2) =L= (n-2);
RES04  ..   (n-1)*x26 - (u6 - u2) =L= (n-2);

RES05  ..   (n-1)*x32 - (u2 - u3) =L= (n-2);
RES06  ..   (n-1)*x34 - (u4 - u3) =L= (n-2);
RES07  ..   (n-1)*x35 - (u5 - u3) =L= (n-2);
RES08  ..   (n-1)*x36 - (u6 - u3) =L= (n-2);

RES09  ..   (n-1)*x42 - (u2 - u4) =L= (n-2);
RES10  ..   (n-1)*x43 - (u3 - u4) =L= (n-2);
RES11  ..   (n-1)*x45 - (u5 - u4) =L= (n-2);
RES12  ..   (n-1)*x46 - (u6 - u4) =L= (n-2);

RES13  ..   (n-1)*x52 - (u2 - u5) =L= (n-2);
RES14  ..   (n-1)*x53 - (u3 - u5) =L= (n-2);
RES15  ..   (n-1)*x54 - (u4 - u5) =L= (n-2);
RES16  ..   (n-1)*x56 - (u6 - u5) =L= (n-2);

RES17  ..   (n-1)*x62 - (u2 - u6) =L= (n-2);
RES18  ..   (n-1)*x63 - (u3 - u6) =L= (n-2);
RES19  ..   (n-1)*x64 - (u4 - u6) =L= (n-2);
RES20  ..   (n-1)*x65 - (u5 - u6) =L= (n-2);

MODEL MTZ_6X6_001 /ALL/;
SOLVE MTZ_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

Cuadro B.02

Programa de la formulación de la Propuesta 01

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA PROPUESTA 01 EN GAMS
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R: (n+1)*xij - (uj - ui) <= n
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES01,  RES02,  RES03,  RES04,  RES05,  RES06
  RES07,  RES08,  RES09,  RES10,  RES11,  RES12
  RES13,  RES14,  RES15,  RES16,  RES17,  RES18
  RES19,  RES20;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                  59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                  52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
                  74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                  55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                  64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;
```

```
* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Restricciones de eliminación de sub ciclos
RES01  ..  (n+1)*x23 - (u3 - u2) =L= n;
RES02  ..  (n+1)*x24 - (u4 - u2) =L= n;
RES03  ..  (n+1)*x25 - (u5 - u2) =L= n;
RES04  ..  (n+1)*x26 - (u6 - u2) =L= n;

RES05  ..  (n+1)*x32 - (u2 - u3) =L= n;
RES06  ..  (n+1)*x34 - (u4 - u3) =L= n;
RES07  ..  (n+1)*x35 - (u5 - u3) =L= n;
RES08  ..  (n+1)*x36 - (u6 - u3) =L= n;

RES09  ..  (n+1)*x42 - (u2 - u4) =L= n;
RES10  ..  (n+1)*x43 - (u3 - u4) =L= n;
RES11  ..  (n+1)*x45 - (u5 - u4) =L= n;
RES12  ..  (n+1)*x46 - (u6 - u4) =L= n;

RES13  ..  (n+1)*x52 - (u2 - u5) =L= n;
RES14  ..  (n+1)*x53 - (u3 - u5) =L= n;
RES15  ..  (n+1)*x54 - (u4 - u5) =L= n;
RES16  ..  (n+1)*x56 - (u6 - u5) =L= n;

RES17  ..  (n+1)*x62 - (u2 - u6) =L= n;
RES18  ..  (n+1)*x63 - (u3 - u6) =L= n;
RES19  ..  (n+1)*x64 - (u4 - u6) =L= n;
RES20  ..  (n+1)*x65 - (u5 - u6) =L= n;

MODEL P01_6X6_001 /ALL/;
SOLVE P01_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

Cuadro B.03

Programa de la formulación de la Propuesta 02

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA PROPUESTA 02 EN GAMS
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R: (n+1)*xji - (uj - ui) <= n
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES01,  RES02,  RES03,  RES04,  RES05,  RES06
  RES07,  RES08,  RES09,  RES10,  RES11,  RES12
  RES13,  RES14,  RES15,  RES16,  RES17,  RES18
  RES19,  RES20;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                  59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                  52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
                  74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                  55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                  64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;
```

```
* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Restricciones de eliminación de sub ciclos
RES01  ..  (n+1)*x32 - (u3 - u2) =L= n;
RES02  ..  (n+1)*x42 - (u4 - u2) =L= n;
RES03  ..  (n+1)*x52 - (u5 - u2) =L= n;
RES04  ..  (n+1)*x62 - (u6 - u2) =L= n;

RES05  ..  (n+1)*x23 - (u2 - u3) =L= n;
RES06  ..  (n+1)*x43 - (u4 - u3) =L= n;
RES07  ..  (n+1)*x53 - (u5 - u3) =L= n;
RES08  ..  (n+1)*x63 - (u6 - u3) =L= n;

RES09  ..  (n+1)*x24 - (u2 - u4) =L= n;
RES10  ..  (n+1)*x34 - (u3 - u4) =L= n;
RES11  ..  (n+1)*x54 - (u5 - u4) =L= n;
RES12  ..  (n+1)*x64 - (u6 - u4) =L= n;

RES13  ..  (n+1)*x25 - (u2 - u5) =L= n;
RES14  ..  (n+1)*x35 - (u3 - u5) =L= n;
RES15  ..  (n+1)*x45 - (u4 - u5) =L= n;
RES16  ..  (n+1)*x65 - (u6 - u5) =L= n;

RES17  ..  (n+1)*x26 - (u2 - u6) =L= n;
RES18  ..  (n+1)*x36 - (u3 - u6) =L= n;
RES19  ..  (n+1)*x46 - (u4 - u6) =L= n;
RES20  ..  (n+1)*x56 - (u5 - u6) =L= n;

MODEL P02_6X6_001 /ALL/;
SOLVE P02_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

Cuadro B.04

Programa de la formulación de la Propuesta 03

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA PROPUESTA 03 EN GAMS
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R: (n+1)*xji + (uj - ui) <= n
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES01,  RES02,  RES03,  RES04,  RES05,  RES06
  RES07,  RES08,  RES09,  RES10,  RES11,  RES12
  RES13,  RES14,  RES15,  RES16,  RES17,  RES18
  RES19,  RES20;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                  59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                  52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
                  74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                  55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                  64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;
```

```
* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Restricciones de eliminación de sub ciclos
RES01  ..  (n+1)*x32 + (u3 - u2) =L= n;
RES02  ..  (n+1)*x42 + (u4 - u2) =L= n;
RES03  ..  (n+1)*x52 + (u5 - u2) =L= n;
RES04  ..  (n+1)*x62 + (u6 - u2) =L= n;

RES05  ..  (n+1)*x23 + (u2 - u3) =L= n;
RES06  ..  (n+1)*x43 + (u4 - u3) =L= n;
RES07  ..  (n+1)*x53 + (u5 - u3) =L= n;
RES08  ..  (n+1)*x63 + (u6 - u3) =L= n;

RES09  ..  (n+1)*x24 + (u2 - u4) =L= n;
RES10  ..  (n+1)*x34 + (u3 - u4) =L= n;
RES11  ..  (n+1)*x54 + (u5 - u4) =L= n;
RES12  ..  (n+1)*x64 + (u6 - u4) =L= n;

RES13  ..  (n+1)*x25 + (u2 - u5) =L= n;
RES14  ..  (n+1)*x35 + (u3 - u5) =L= n;
RES15  ..  (n+1)*x45 + (u4 - u5) =L= n;
RES16  ..  (n+1)*x65 + (u6 - u5) =L= n;

RES17  ..  (n+1)*x26 + (u2 - u6) =L= n;
RES18  ..  (n+1)*x36 + (u3 - u6) =L= n;
RES19  ..  (n+1)*x46 + (u4 - u6) =L= n;
RES20  ..  (n+1)*x56 + (u5 - u6) =L= n;

MODEL P03_6X6_001 /ALL/;
SOLVE P03_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

Cuadro B.05

Programa de la formulación de la Propuesta 04

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA PROPUESTA 04 EN GAMS
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R: (n+1)*xij + (uj - ui) <= n
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES01,  RES02,  RES03,  RES04,  RES05,  RES06
  RES07,  RES08,  RES09,  RES10,  RES11,  RES12
  RES13,  RES14,  RES15,  RES16,  RES17,  RES18
  RES19,  RES20;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                  59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                  52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
                  74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                  55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                  64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;
```

```
* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Restricciones de eliminación de sub ciclos
RES01  ..  (n+1)*x23 + (u3 - u2) =L= n;
RES02  ..  (n+1)*x24 + (u4 - u2) =L= n;
RES03  ..  (n+1)*x25 + (u5 - u2) =L= n;
RES04  ..  (n+1)*x26 + (u6 - u2) =L= n;

RES05  ..  (n+1)*x32 + (u2 - u3) =L= n;
RES06  ..  (n+1)*x34 + (u4 - u3) =L= n;
RES07  ..  (n+1)*x35 + (u5 - u3) =L= n;
RES08  ..  (n+1)*x36 + (u6 - u3) =L= n;

RES09  ..  (n+1)*x42 + (u2 - u4) =L= n;
RES10  ..  (n+1)*x43 + (u3 - u4) =L= n;
RES11  ..  (n+1)*x45 + (u5 - u4) =L= n;
RES12  ..  (n+1)*x46 + (u6 - u4) =L= n;

RES13  ..  (n+1)*x52 + (u2 - u5) =L= n;
RES14  ..  (n+1)*x53 + (u3 - u5) =L= n;
RES15  ..  (n+1)*x54 + (u4 - u5) =L= n;
RES16  ..  (n+1)*x56 + (u6 - u5) =L= n;

RES17  ..  (n+1)*x62 + (u2 - u6) =L= n;
RES18  ..  (n+1)*x63 + (u3 - u6) =L= n;
RES19  ..  (n+1)*x64 + (u4 - u6) =L= n;
RES20  ..  (n+1)*x65 + (u5 - u6) =L= n;

MODEL P04_6X6_001 /ALL/;
SOLVE P04_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

Cuadro B.06

Programa de la formulación de la Propuesta 05

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA PROPUESTA 05 EN GAMS
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R1: (n+1)*xij - (uj - ui) <= n
R2:     n*xij + (uj - ui) <= (n+1)
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES101, RES102, RES103, RES104, RES105, RES106
  RES107, RES108, RES109, RES110, RES111, RES112
  RES113, RES114, RES115, RES116, RES117, RES118
  RES119, RES120
  RES201, RES202, RES203, RES204, RES205, RES206
  RES207, RES208, RES209, RES210, RES211, RES212
  RES213, RES214, RES215, RES216, RES217, RES218
  RES219, RES220;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                 59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                 52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
```

```
                  74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                  55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                  64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;

* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Restricciones de eliminación de sub ciclos
* Restricción 1
RES101  ..  (n+1)*x23 - (u3 - u2) =L= n;
RES102  ..  (n+1)*x24 - (u4 - u2) =L= n;
RES103  ..  (n+1)*x25 - (u5 - u2) =L= n;
RES104  ..  (n+1)*x26 - (u6 - u2) =L= n;

RES105  ..  (n+1)*x32 - (u2 - u3) =L= n;
RES106  ..  (n+1)*x34 - (u4 - u3) =L= n;
RES107  ..  (n+1)*x35 - (u5 - u3) =L= n;
RES108  ..  (n+1)*x36 - (u6 - u3) =L= n;

RES109  ..  (n+1)*x42 - (u2 - u4) =L= n;
RES110  ..  (n+1)*x43 - (u3 - u4) =L= n;
RES111  ..  (n+1)*x45 - (u5 - u4) =L= n;
RES112  ..  (n+1)*x46 - (u6 - u4) =L= n;

RES113  ..  (n+1)*x52 - (u2 - u5) =L= n;
RES114  ..  (n+1)*x53 - (u3 - u5) =L= n;
RES115  ..  (n+1)*x54 - (u4 - u5) =L= n;
RES116  ..  (n+1)*x56 - (u6 - u5) =L= n;

RES117  ..  (n+1)*x62 - (u2 - u6) =L= n;
RES118  ..  (n+1)*x63 - (u3 - u6) =L= n;
RES119  ..  (n+1)*x64 - (u4 - u6) =L= n;
RES120  ..  (n+1)*x65 - (u5 - u6) =L= n;

* Restricción 2
RES201  ..  n*x23 + (u3 - u2) =L= (n+1);
RES202  ..  n*x24 + (u4 - u2) =L= (n+1);
RES203  ..  n*x25 + (u5 - u2) =L= (n+1);
RES204  ..  n*x26 + (u6 - u2) =L= (n+1);

RES205  ..  n*x32 + (u2 - u3) =L= (n+1);
RES206  ..  n*x34 + (u4 - u3) =L= (n+1);
RES207  ..  n*x35 + (u5 - u3) =L= (n+1);
```

```
RES208  ..  n*x36 + (u6 - u3) =L= (n+1);

RES209  ..  n*x42 + (u2 - u4) =L= (n+1);
RES210  ..  n*x43 + (u3 - u4) =L= (n+1);
RES211  ..  n*x45 + (u5 - u4) =L= (n+1);
RES212  ..  n*x46 + (u6 - u4) =L= (n+1);

RES213  ..  n*x52 + (u2 - u5) =L= (n+1);
RES214  ..  n*x53 + (u3 - u5) =L= (n+1);
RES215  ..  n*x54 + (u4 - u5) =L= (n+1);
RES216  ..  n*x56 + (u6 - u5) =L= (n+1);

RES217  ..  n*x62 + (u2 - u6) =L= (n+1);
RES218  ..  n*x63 + (u3 - u6) =L= (n+1);
RES219  ..  n*x64 + (u4 - u6) =L= (n+1);
RES220  ..  n*x65 + (u5 - u6) =L= (n+1);

MODEL P05_6X6_001 /ALL/;
SOLVE P05_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

Cuadro B.07

Programa de la formulación de la Propuesta 06

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA PROPUESTA 06 EN GAMS
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R1: (n+1)*xji - (uj - ui) <= n
R2:     n*xji + (uj - ui) <= (n+1)
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES101, RES102, RES103, RES104, RES105, RES106
  RES107, RES108, RES109, RES110, RES111, RES112
  RES113, RES114, RES115, RES116, RES117, RES118
  RES119, RES120
  RES201, RES202, RES203, RES204, RES205, RES206
  RES207, RES208, RES209, RES210, RES211, RES212
  RES213, RES214, RES215, RES216, RES217, RES218
  RES219, RES220;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                 59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                 52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
```

```
                  74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                  55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                  64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;

* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Restricciones de eliminación de sub ciclos
* Restricción 1
RES101  ..  (n+1)*x32 - (u3 - u2) =L= n;
RES102  ..  (n+1)*x42 - (u4 - u2) =L= n;
RES103  ..  (n+1)*x52 - (u5 - u2) =L= n;
RES104  ..  (n+1)*x62 - (u6 - u2) =L= n;

RES105  ..  (n+1)*x23 - (u2 - u3) =L= n;
RES106  ..  (n+1)*x43 - (u4 - u3) =L= n;
RES107  ..  (n+1)*x53 - (u5 - u3) =L= n;
RES108  ..  (n+1)*x63 - (u6 - u3) =L= n;

RES109  ..  (n+1)*x24 - (u2 - u4) =L= n;
RES110  ..  (n+1)*x34 - (u3 - u4) =L= n;
RES111  ..  (n+1)*x54 - (u5 - u4) =L= n;
RES112  ..  (n+1)*x64 - (u6 - u4) =L= n;

RES113  ..  (n+1)*x25 - (u2 - u5) =L= n;
RES114  ..  (n+1)*x35 - (u3 - u5) =L= n;
RES115  ..  (n+1)*x45 - (u4 - u5) =L= n;
RES116  ..  (n+1)*x65 - (u6 - u5) =L= n;

RES117  ..  (n+1)*x26 - (u2 - u6) =L= n;
RES118  ..  (n+1)*x36 - (u3 - u6) =L= n;
RES119  ..  (n+1)*x46 - (u4 - u6) =L= n;
RES120  ..  (n+1)*x56 - (u5 - u6) =L= n;

* Restricción 2
RES201  ..  n*x32 + (u3 - u2) =L= (n+1);
RES202  ..  n*x42 + (u4 - u2) =L= (n+1);
RES203  ..  n*x52 + (u5 - u2) =L= (n+1);
RES204  ..  n*x62 + (u6 - u2) =L= (n+1);

RES205  ..  n*x23 + (u2 - u3) =L= (n+1);
RES206  ..  n*x43 + (u4 - u3) =L= (n+1);
RES207  ..  n*x53 + (u5 - u3) =L= (n+1);
```

```
RES208  ..  n*x63 + (u6 - u3) =L= (n+1);

RES209  ..  n*x24 + (u2 - u4) =L= (n+1);
RES210  ..  n*x34 + (u3 - u4) =L= (n+1);
RES211  ..  n*x54 + (u5 - u4) =L= (n+1);
RES212  ..  n*x64 + (u6 - u4) =L= (n+1);

RES213  ..  n*x25 + (u2 - u5) =L= (n+1);
RES214  ..  n*x35 + (u3 - u5) =L= (n+1);
RES215  ..  n*x45 + (u4 - u5) =L= (n+1);
RES216  ..  n*x65 + (u6 - u5) =L= (n+1);

RES217  ..  n*x26 + (u2 - u6) =L= (n+1);
RES218  ..  n*x36 + (u3 - u6) =L= (n+1);
RES219  ..  n*x46 + (u4 - u6) =L= (n+1);
RES220  ..  n*x56 + (u5 - u6) =L= (n+1);

MODEL P06_6X6_001 /ALL/;
SOLVE P06_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

Cuadro B.08

Programa de la formulación de la Propuesta 07

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA PROPUESTA 07 EN GAMS
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R1:     n*xji - (uj - ui) <= (n+1)
R2: (n+1)*xji + (uj - ui) <= n
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES101, RES102, RES103, RES104, RES105, RES106
  RES107, RES108, RES109, RES110, RES111, RES112
  RES113, RES114, RES115, RES116, RES117, RES118
  RES119, RES120
  RES201, RES202, RES203, RES204, RES205, RES206
  RES207, RES208, RES209, RES210, RES211, RES212
  RES213, RES214, RES215, RES216, RES217, RES218
  RES219, RES220;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                 59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                 52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
```

```
                  74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                  55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                  64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;

* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Restricciones de eliminación de sub ciclos
* Restricción 1
RES101  ..  n*x32 - (u3 - u2) =L= (n+1);
RES102  ..  n*x42 - (u4 - u2) =L= (n+1);
RES103  ..  n*x52 - (u5 - u2) =L= (n+1);
RES104  ..  n*x62 - (u6 - u2) =L= (n+1);

RES105  ..  n*x23 - (u2 - u3) =L= (n+1);
RES106  ..  n*x43 - (u4 - u3) =L= (n+1);
RES107  ..  n*x53 - (u5 - u3) =L= (n+1);
RES108  ..  n*x63 - (u6 - u3) =L= (n+1);

RES109  ..  n*x24 - (u2 - u4) =L= (n+1);
RES110  ..  n*x34 - (u3 - u4) =L= (n+1);
RES111  ..  n*x54 - (u5 - u4) =L= (n+1);
RES112  ..  n*x64 - (u6 - u4) =L= (n+1);

RES113  ..  n*x25 - (u2 - u5) =L= (n+1);
RES114  ..  n*x35 - (u3 - u5) =L= (n+1);
RES115  ..  n*x45 - (u4 - u5) =L= (n+1);
RES116  ..  n*x65 - (u6 - u5) =L= (n+1);

RES117  ..  n*x26 - (u2 - u6) =L= (n+1);
RES118  ..  n*x36 - (u3 - u6) =L= (n+1);
RES119  ..  n*x46 - (u4 - u6) =L= (n+1);
RES120  ..  n*x56 - (u5 - u6) =L= (n+1);

* Restricción 2
RES201  ..  (n+1)*x32 + (u3 - u2) =L= n;
RES202  ..  (n+1)*x42 + (u4 - u2) =L= n;
RES203  ..  (n+1)*x52 + (u5 - u2) =L= n;
RES204  ..  (n+1)*x62 + (u6 - u2) =L= n;

RES205  ..  (n+1)*x23 + (u2 - u3) =L= n;
RES206  ..  (n+1)*x43 + (u4 - u3) =L= n;
RES207  ..  (n+1)*x53 + (u5 - u3) =L= n;
```

```
RES208  ..  (n+1)*x63 + (u6 - u3) =L= n;

RES209  ..  (n+1)*x24 + (u2 - u4) =L= n;
RES210  ..  (n+1)*x34 + (u3 - u4) =L= n;
RES211  ..  (n+1)*x54 + (u5 - u4) =L= n;
RES212  ..  (n+1)*x64 + (u6 - u4) =L= n;

RES213  ..  (n+1)*x25 + (u2 - u5) =L= n;
RES214  ..  (n+1)*x35 + (u3 - u5) =L= n;
RES215  ..  (n+1)*x45 + (u4 - u5) =L= n;
RES216  ..  (n+1)*x65 + (u6 - u5) =L= n;

RES217  ..  (n+1)*x26 + (u2 - u6) =L= n;
RES218  ..  (n+1)*x36 + (u3 - u6) =L= n;
RES219  ..  (n+1)*x46 + (u4 - u6) =L= n;
RES220  ..  (n+1)*x56 + (u5 - u6) =L= n;

MODEL P07_6X6_001 /ALL/;
SOLVE P07_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

Cuadro B.09

Programa de la formulación de la Propuesta 08

```
$ONTEXT
PROGRAMA DE LA PROPUESTA 08 EN GAMS
UTILIZANDO PROGRAMACION ENTERA MIXTA
R1:     n*xij - (uj - ui) <= (n+1)
R2: (n+1)*xij + (uj - ui) <= n
$OFFTEXT

* Declaración del nivel de tolerancia
OPTION
  OPTCR=0.00001;

* Declaración de la dimensión del problema
PARAMETER
  n / 6 /;

* Declaración de las variables del modelo
VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6
  Z;

* Declaración de las variables binarias
BINARY VARIABLES
       x12, x13, x14, x15, x16
  x21,      x23, x24, x25, x26
  x31, x32,      x34, x35, x36
  x41, x42, x43,      x45, x46
  x51, x52, x53, x54,      x56
  x61, x62, x63, x64, x65;

* Declaración de las variables enteras
INTEGER VARIABLES
  u1,  u2,  u3,  u4,  u5,  u6;

* Declaración de las etiquetas de la función objetivo y restricciones
EQUATIONS
  FUN_OBJ
  FILA01, FILA02, FILA03, FILA04, FILA05, FILA06
  COLU01, COLU02, COLU03, COLU04, COLU05, COLU06
  IN_U01, IN_U02, IN_U03, IN_U04, IN_U05, IN_U06
  IN_U07, IN_U08, IN_U09, IN_U10, IN_U11
  RES101, RES102, RES103, RES104, RES105, RES106
  RES107, RES108, RES109, RES110, RES111, RES112
  RES113, RES114, RES115, RES116, RES117, RES118
  RES119, RES120
  RES201, RES202, RES203, RES204, RES205, RES206
  RES207, RES208, RES209, RES210, RES211, RES212
  RES213, RES214, RES215, RES216, RES217, RES218
  RES219, RES220;

* Función objetivo y restricciones
FUN_OBJ ..  Z =E=          50*x12 + 76*x13 + 56*x14 + 58*x15 + 70*x16 +
                 59*x21 +          61*x23 + 63*x24 + 52*x25 + 64*x26 +
                 52*x31 + 76*x32 +          59*x34 + 78*x35 + 61*x36 +
```

```
                  74*x41 + 60*x42 + 71*x43 +          72*x45 + 59*x46 +
                  55*x51 + 60*x52 + 64*x53 + 57*x54 +          58*x56 +
                  64*x61 + 54*x62 + 77*x63 + 58*x64 + 73*x65;

* Restricciones de Asignación
FILA01  ..        x12 + x13 + x14 + x15 + x16 =E= 1;
FILA02  ..  x21 +       x23 + x24 + x25 + x26 =E= 1;
FILA03  ..  x31 + x32 +       x34 + x35 + x36 =E= 1;
FILA04  ..  x41 + x42 + x43 +       x45 + x46 =E= 1;
FILA05  ..  x51 + x52 + x53 + x54 +       x56 =E= 1;
FILA06  ..  x61 + x62 + x63 + x64 + x65       =E= 1;

COLU01  ..        x21 + x31 + x41 + x51 + x61 =E= 1;
COLU02  ..  x12 +       x32 + x42 + x52 + x62 =E= 1;
COLU03  ..  x13 + x23 +       x43 + x53 + x63 =E= 1;
COLU04  ..  x14 + x24 + x34 +       x54 + x64 =E= 1;
COLU05  ..  x15 + x25 + x35 + x45 +       x65 =E= 1;
COLU06  ..  x16 + x26 + x36 + x46 + x56       =E= 1;

* Restricciones de inicialización de la variable u
IN_U01  ..  u1 =E= 1;
IN_U02  ..  u2 =G= 2;
IN_U03  ..  u3 =G= 2;
IN_U04  ..  u4 =G= 2;
IN_U05  ..  u5 =G= 2;
IN_U06  ..  u6 =G= 2;
IN_U07  ..  u2 =L= n;
IN_U08  ..  u3 =L= n;
IN_U09  ..  u4 =L= n;
IN_U10  ..  u5 =L= n;
IN_U11  ..  u6 =L= n;

* Restricciones de eliminación de sub ciclos
* Restricción 1
RES101  ..  n*x23 - (u3 - u2) =L= (n+1);
RES102  ..  n*x24 - (u4 - u2) =L= (n+1);
RES103  ..  n*x25 - (u5 - u2) =L= (n+1);
RES104  ..  n*x26 - (u6 - u2) =L= (n+1);

RES105  ..  n*x32 - (u2 - u3) =L= (n+1);
RES106  ..  n*x34 - (u4 - u3) =L= (n+1);
RES107  ..  n*x35 - (u5 - u3) =L= (n+1);
RES108  ..  n*x36 - (u6 - u3) =L= (n+1);

RES109  ..  n*x42 - (u2 - u4) =L= (n+1);
RES110  ..  n*x43 - (u3 - u4) =L= (n+1);
RES111  ..  n*x45 - (u5 - u4) =L= (n+1);
RES112  ..  n*x46 - (u6 - u4) =L= (n+1);

RES113  ..  n*x52 - (u2 - u5) =L= (n+1);
RES114  ..  n*x53 - (u3 - u5) =L= (n+1);
RES115  ..  n*x54 - (u4 - u5) =L= (n+1);
RES116  ..  n*x56 - (u6 - u5) =L= (n+1);

RES117  ..  n*x62 - (u2 - u6) =L= (n+1);
RES118  ..  n*x63 - (u3 - u6) =L= (n+1);
RES119  ..  n*x64 - (u4 - u6) =L= (n+1);
RES120  ..  n*x65 - (u5 - u6) =L= (n+1);

* Restricción 2
RES201  ..  (n+1)*x23 + (u3 - u2) =L= n;
RES202  ..  (n+1)*x24 + (u4 - u2) =L= n;
RES203  ..  (n+1)*x25 + (u5 - u2) =L= n;
RES204  ..  (n+1)*x26 + (u6 - u2) =L= n;

RES205  ..  (n+1)*x32 + (u2 - u3) =L= n;
RES206  ..  (n+1)*x34 + (u4 - u3) =L= n;
RES207  ..  (n+1)*x35 + (u5 - u3) =L= n;
```

```
RES208  ..  (n+1)*x36 + (u6 - u3) =L= n;

RES209  ..  (n+1)*x42 + (u2 - u4) =L= n;
RES210  ..  (n+1)*x43 + (u3 - u4) =L= n;
RES211  ..  (n+1)*x45 + (u5 - u4) =L= n;
RES212  ..  (n+1)*x46 + (u6 - u4) =L= n;

RES213  ..  (n+1)*x52 + (u2 - u5) =L= n;
RES214  ..  (n+1)*x53 + (u3 - u5) =L= n;
RES215  ..  (n+1)*x54 + (u4 - u5) =L= n;
RES216  ..  (n+1)*x56 + (u6 - u5) =L= n;

RES217  ..  (n+1)*x62 + (u2 - u6) =L= n;
RES218  ..  (n+1)*x63 + (u3 - u6) =L= n;
RES219  ..  (n+1)*x64 + (u4 - u6) =L= n;
RES220  ..  (n+1)*x65 + (u5 - u6) =L= n;

MODEL P08_6X6_001 /ALL/;
SOLVE P08_6X6_001 USING MIP MINIMIZING Z;
```

Fuente propia.

ANEXO C Resultados de los programas de las Propuestas

Cuadro C.01

Resultados del programa MTZ

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   MTZ_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  114

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.500      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        17    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan  3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.20sec (det. 0.69 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.03 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (17 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
```

```
---- EQU IN_U02          2.000     4.000     +INF       .
---- EQU IN_U03          2.000     6.000     +INF       .
---- EQU IN_U04          2.000     2.000     +INF       .
---- EQU IN_U05          2.000     5.000     +INF       .
---- EQU IN_U06          2.000     3.000     +INF       .
---- EQU IN_U07          -INF      4.000     6.000      .
---- EQU IN_U08          -INF      6.000     6.000      .
---- EQU IN_U09          -INF      2.000     6.000      .
---- EQU IN_U10          -INF      5.000     6.000      .
---- EQU IN_U11          -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES01           -INF     -2.000     4.000      .
---- EQU RES02           -INF      2.000     4.000      .
---- EQU RES03           -INF      4.000     4.000      .
---- EQU RES04           -INF      1.000     4.000      .
---- EQU RES05           -INF      2.000     4.000      .
---- EQU RES06           -INF      4.000     4.000      .
---- EQU RES07           -INF      1.000     4.000      .
---- EQU RES08           -INF      3.000     4.000      .
---- EQU RES09           -INF     -2.000     4.000      .
---- EQU RES10           -INF     -4.000     4.000      .
---- EQU RES11           -INF     -3.000     4.000      .
---- EQU RES12           -INF      4.000     4.000      .
---- EQU RES13           -INF      1.000     4.000      .
---- EQU RES14           -INF      4.000     4.000      .
---- EQU RES15           -INF      3.000     4.000      .
---- EQU RES16           -INF      2.000     4.000      .
---- EQU RES17           -INF      4.000     4.000      .
---- EQU RES18           -INF     -3.000     4.000      .
---- EQU RES19           -INF      1.000     4.000      .
---- EQU RES20           -INF     -2.000     4.000      .

                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR x12               .         .       1.000    50.000
---- VAR x13               .         .       1.000    76.000
---- VAR x14               .       1.000     1.000    56.000
---- VAR x15               .         .       1.000    58.000
---- VAR x16               .         .       1.000    70.000
---- VAR x21               .         .       1.000    59.000
---- VAR x23               .         .       1.000    61.000
---- VAR x24               .         .       1.000    63.000
---- VAR x25               .       1.000     1.000    52.000
---- VAR x26               .         .       1.000    64.000
---- VAR x31               .       1.000     1.000    52.000
---- VAR x32               .         .       1.000    76.000
---- VAR x34               .         .       1.000    59.000
---- VAR x35               .         .       1.000    78.000
---- VAR x36               .         .       1.000    61.000
---- VAR x41               .         .       1.000    74.000
---- VAR x42               .         .       1.000    60.000
---- VAR x43               .         .       1.000    71.000
---- VAR x45               .         .       1.000    72.000
---- VAR x46               .       1.000     1.000    59.000
---- VAR x51               .         .       1.000    55.000
---- VAR x52               .         .       1.000    60.000
---- VAR x53               .       1.000     1.000    64.000
---- VAR x54               .         .       1.000    57.000
---- VAR x56               .         .       1.000    58.000
---- VAR x61               .         .       1.000    64.000
---- VAR x62               .       1.000     1.000    54.000
---- VAR x63               .         .       1.000    77.000
---- VAR x64               .         .       1.000    58.000
---- VAR x65               .         .       1.000    73.000
---- VAR u1                .       1.000   100.000      EPS
---- VAR u2                .       4.000   100.000      EPS
---- VAR u3                .       6.000   100.000      EPS
---- VAR u4                .       2.000   100.000      EPS
---- VAR u5                .       5.000   100.000      EPS
```

```
---- VAR u6              .        3.000   100.000      EPS
---- VAR Z            -INF    337.000     +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED

EXECUTION TIME       =        0.031 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI

USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                        K:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\MTZ_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\MTZ_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

Cuadro C.02

Resultados del programa de la Propuesta 01

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   P01_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  114

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.062      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        17    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan   3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.05sec (det. 0.70 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.03 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (17 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U02        2.000     4.000     +INF        .
---- EQU IN_U03        2.000     6.000     +INF        .
---- EQU IN_U04        2.000     2.000     +INF        .
---- EQU IN_U05        2.000     5.000     +INF        .
---- EQU IN_U06        2.000     3.000     +INF        .
---- EQU IN_U07        -INF      4.000     6.000       .
---- EQU IN_U08        -INF      6.000     6.000       .
---- EQU IN_U09        -INF      2.000     6.000       .
---- EQU IN_U10        -INF      5.000     6.000       .
```

```
---- EQU IN_U11          -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES01           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES02           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES03           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES04           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES05           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES06           -INF      4.000     6.000      .
---- EQU RES07           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES08           -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES09           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES10           -INF     -4.000     6.000      .
---- EQU RES11           -INF     -3.000     6.000      .
---- EQU RES12           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES13           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES14           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES15           -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES16           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES17           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES18           -INF     -3.000     6.000      .
---- EQU RES19           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES20           -INF     -2.000     6.000      .

                         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR x12               .         .        1.000    50.000
---- VAR x13               .         .        1.000    76.000
---- VAR x14               .       1.000      1.000    56.000
---- VAR x15               .         .        1.000    58.000
---- VAR x16               .         .        1.000    70.000
---- VAR x21               .         .        1.000    59.000
---- VAR x23               .         .        1.000    61.000
---- VAR x24               .         .        1.000    63.000
---- VAR x25               .       1.000      1.000    52.000
---- VAR x26               .         .        1.000    64.000
---- VAR x31               .       1.000      1.000    52.000
---- VAR x32               .         .        1.000    76.000
---- VAR x34               .         .        1.000    59.000
---- VAR x35               .         .        1.000    78.000
---- VAR x36               .         .        1.000    61.000
---- VAR x41               .         .        1.000    74.000
---- VAR x42               .         .        1.000    60.000
---- VAR x43               .         .        1.000    71.000
---- VAR x45               .         .        1.000    72.000
---- VAR x46               .       1.000      1.000    59.000
---- VAR x51               .         .        1.000    55.000
---- VAR x52               .         .        1.000    60.000
---- VAR x53               .       1.000      1.000    64.000
---- VAR x54               .         .        1.000    57.000
---- VAR x56               .         .        1.000    58.000
---- VAR x61               .         .        1.000    64.000
---- VAR x62               .       1.000      1.000    54.000
---- VAR x63               .         .        1.000    77.000
---- VAR x64               .         .        1.000    58.000
---- VAR x65               .         .        1.000    73.000
---- VAR u1                .       1.000    100.000      EPS
---- VAR u2                .       4.000    100.000      EPS
---- VAR u3                .       6.000    100.000      EPS
---- VAR u4                .       2.000    100.000      EPS
---- VAR u5                .       5.000    100.000      EPS
---- VAR u6                .       3.000    100.000      EPS
---- VAR Z                -INF   337.000      +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED

EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI
USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
```

```
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                          K:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\P01_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\P01_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

Cuadro C.03

Resultados del programa de la Propuesta 02

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   P02_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  114

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.484      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        17    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan   3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.47sec (det. 0.70 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.03 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (17 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U02        2.000     4.000     +INF        .
---- EQU IN_U03        2.000     2.000     +INF        .
---- EQU IN_U04        2.000     6.000     +INF        .
---- EQU IN_U05        2.000     3.000     +INF        .
---- EQU IN_U06        2.000     5.000     +INF        .
---- EQU IN_U07        -INF      4.000     6.000       .
---- EQU IN_U08        -INF      2.000     6.000       .
---- EQU IN_U09        -INF      6.000     6.000       .
---- EQU IN_U10        -INF      3.000     6.000       .
```

```
---- EQU IN_U11          -INF      5.000     6.000      .
---- EQU RES01           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES02           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES03           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES04           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES05           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES06           -INF     -4.000     6.000      .
---- EQU RES07           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES08           -INF     -3.000     6.000      .
---- EQU RES09           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES10           -INF      4.000     6.000      .
---- EQU RES11           -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES12           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES13           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES14           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES15           -INF     -3.000     6.000      .
---- EQU RES16           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES17           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES18           -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES19           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES20           -INF      2.000     6.000      .

                         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR x12                .         .        1.000    50.000
---- VAR x13                .         .        1.000    76.000
---- VAR x14                .       1.000      1.000    56.000
---- VAR x15                .         .        1.000    58.000
---- VAR x16                .         .        1.000    70.000
---- VAR x21                .         .        1.000    59.000
---- VAR x23                .         .        1.000    61.000
---- VAR x24                .         .        1.000    63.000
---- VAR x25                .       1.000      1.000    52.000
---- VAR x26                .         .        1.000    64.000
---- VAR x31                .       1.000      1.000    52.000
---- VAR x32                .         .        1.000    76.000
---- VAR x34                .         .        1.000    59.000
---- VAR x35                .         .        1.000    78.000
---- VAR x36                .         .        1.000    61.000
---- VAR x41                .         .        1.000    74.000
---- VAR x42                .         .        1.000    60.000
---- VAR x43                .         .        1.000    71.000
---- VAR x45                .         .        1.000    72.000
---- VAR x46                .       1.000      1.000    59.000
---- VAR x51                .         .        1.000    55.000
---- VAR x52                .         .        1.000    60.000
---- VAR x53                .       1.000      1.000    64.000
---- VAR x54                .         .        1.000    57.000
---- VAR x56                .         .        1.000    58.000
---- VAR x61                .         .        1.000    64.000
---- VAR x62                .       1.000      1.000    54.000
---- VAR x63                .         .        1.000    77.000
---- VAR x64                .         .        1.000    58.000
---- VAR x65                .         .        1.000    73.000
---- VAR u1                 .       1.000    100.000      EPS
---- VAR u2                 .       4.000    100.000      EPS
---- VAR u3                 .       2.000    100.000      EPS
---- VAR u4                 .       6.000    100.000      EPS
---- VAR u5                 .       3.000    100.000      EPS
---- VAR u6                 .       5.000    100.000      EPS
---- VAR Z                -INF    337.000      +INF       .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED

EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI
```

```
USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                          J:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\P02\P02_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\P02_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

Cuadro C.04

Resultados del programa de la Propuesta 03

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   P03_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  114

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.110      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        17    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan  3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.08sec (det. 0.70 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.03 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (17 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U02        2.000     4.000     +INF        .
---- EQU IN_U03        2.000     6.000     +INF        .
---- EQU IN_U04        2.000     2.000     +INF        .
---- EQU IN_U05        2.000     5.000     +INF        .
---- EQU IN_U06        2.000     3.000     +INF        .
---- EQU IN_U07        -INF      4.000     6.000       .
---- EQU IN_U08        -INF      6.000     6.000       .
---- EQU IN_U09        -INF      2.000     6.000       .
---- EQU IN_U10        -INF      5.000     6.000       .
```

```
---- EQU IN_U11          -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES01           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES02           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES03           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES04           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES05           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES06           -INF     -4.000     6.000      .
---- EQU RES07           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES08           -INF     -3.000     6.000      .
---- EQU RES09           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES10           -INF      4.000     6.000      .
---- EQU RES11           -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES12           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES13           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES14           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES15           -INF     -3.000     6.000      .
---- EQU RES16           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES17           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES18           -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES19           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES20           -INF      2.000     6.000      .

                         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR x12                .         .        1.000    50.000
---- VAR x13                .         .        1.000    76.000
---- VAR x14                .       1.000      1.000    56.000
---- VAR x15                .         .        1.000    58.000
---- VAR x16                .         .        1.000    70.000
---- VAR x21                .         .        1.000    59.000
---- VAR x23                .         .        1.000    61.000
---- VAR x24                .         .        1.000    63.000
---- VAR x25                .       1.000      1.000    52.000
---- VAR x26                .         .        1.000    64.000
---- VAR x31                .       1.000      1.000    52.000
---- VAR x32                .         .        1.000    76.000
---- VAR x34                .         .        1.000    59.000
---- VAR x35                .         .        1.000    78.000
---- VAR x36                .         .        1.000    61.000
---- VAR x41                .         .        1.000    74.000
---- VAR x42                .         .        1.000    60.000
---- VAR x43                .         .        1.000    71.000
---- VAR x45                .         .        1.000    72.000
---- VAR x46                .       1.000      1.000    59.000
---- VAR x51                .         .        1.000    55.000
---- VAR x52                .         .        1.000    60.000
---- VAR x53                .       1.000      1.000    64.000
---- VAR x54                .         .        1.000    57.000
---- VAR x56                .         .        1.000    58.000
---- VAR x61                .         .        1.000    64.000
---- VAR x62                .       1.000      1.000    54.000
---- VAR x63                .         .        1.000    77.000
---- VAR x64                .         .        1.000    58.000
---- VAR x65                .         .        1.000    73.000
---- VAR u1                 .       1.000    100.000      EPS
---- VAR u2                 .       4.000    100.000      EPS
---- VAR u3                 .       6.000    100.000      EPS
---- VAR u4                 .       2.000    100.000      EPS
---- VAR u5                 .       5.000    100.000      EPS
---- VAR u6                 .       3.000    100.000      EPS
---- VAR Z                -INF    337.000      +INF       .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED

EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI
```

```
USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                          K:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\P03_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\P03_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

Cuadro C.05

Resultados del programa de la Propuesta 04

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   P04_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  114

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.047      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        17    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan  3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.03sec (det. 0.71 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.03 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (17 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U02        2.000     4.000     +INF        .
---- EQU IN_U03        2.000     2.000     +INF        .
---- EQU IN_U04        2.000     6.000     +INF        .
---- EQU IN_U05        2.000     3.000     +INF        .
---- EQU IN_U06        2.000     5.000     +INF        .
---- EQU IN_U07        -INF      4.000     6.000       .
---- EQU IN_U08        -INF      2.000     6.000       .
---- EQU IN_U09        -INF      6.000     6.000       .
---- EQU IN_U10        -INF      3.000     6.000       .
```

```
---- EQU IN_U11          -INF      5.000     6.000      .
---- EQU RES01           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES02           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES03           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES04           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES05           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES06           -INF      4.000     6.000      .
---- EQU RES07           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES08           -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES09           -INF     -2.000     6.000      .
---- EQU RES10           -INF     -4.000     6.000      .
---- EQU RES11           -INF     -3.000     6.000      .
---- EQU RES12           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES13           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES14           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES15           -INF      3.000     6.000      .
---- EQU RES16           -INF      2.000     6.000      .
---- EQU RES17           -INF      6.000     6.000      .
---- EQU RES18           -INF     -3.000     6.000      .
---- EQU RES19           -INF      1.000     6.000      .
---- EQU RES20           -INF     -2.000     6.000      .

                         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR x12               .         .        1.000    50.000
---- VAR x13               .         .        1.000    76.000
---- VAR x14               .       1.000      1.000    56.000
---- VAR x15               .         .        1.000    58.000
---- VAR x16               .         .        1.000    70.000
---- VAR x21               .         .        1.000    59.000
---- VAR x23               .         .        1.000    61.000
---- VAR x24               .         .        1.000    63.000
---- VAR x25               .       1.000      1.000    52.000
---- VAR x26               .         .        1.000    64.000
---- VAR x31               .       1.000      1.000    52.000
---- VAR x32               .         .        1.000    76.000
---- VAR x34               .         .        1.000    59.000
---- VAR x35               .         .        1.000    78.000
---- VAR x36               .         .        1.000    61.000
---- VAR x41               .         .        1.000    74.000
---- VAR x42               .         .        1.000    60.000
---- VAR x43               .         .        1.000    71.000
---- VAR x45               .         .        1.000    72.000
---- VAR x46               .       1.000      1.000    59.000
---- VAR x51               .         .        1.000    55.000
---- VAR x52               .         .        1.000    60.000
---- VAR x53               .       1.000      1.000    64.000
---- VAR x54               .         .        1.000    57.000
---- VAR x56               .         .        1.000    58.000
---- VAR x61               .         .        1.000    64.000
---- VAR x62               .       1.000      1.000    54.000
---- VAR x63               .         .        1.000    77.000
---- VAR x64               .         .        1.000    58.000
---- VAR x65               .         .        1.000    73.000
---- VAR u1                .       1.000    100.000      EPS
---- VAR u2                .       4.000    100.000      EPS
---- VAR u3                .       2.000    100.000      EPS
---- VAR u4                .       6.000    100.000      EPS
---- VAR u5                .       3.000    100.000      EPS
---- VAR u6                .       5.000    100.000      EPS
---- VAR Z                -INF   337.000      +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED

EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI
```

```
USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                          K:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\P04_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\P04_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

Cuadro C.06

Resultados del programa de la Propuesta 05

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   P05_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  146

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.062      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        24    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan  3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.05sec (det. 0.97 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.04 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (24 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U02        2.000     4.000     +INF        .
---- EQU IN_U03        2.000     6.000     +INF        .
---- EQU IN_U04        2.000     2.000     +INF        .
---- EQU IN_U05        2.000     5.000     +INF        .
---- EQU IN_U06        2.000     3.000     +INF        .
---- EQU IN_U07        -INF      4.000     6.000       .
---- EQU IN_U08        -INF      6.000     6.000       .
---- EQU IN_U09        -INF      2.000     6.000       .
---- EQU IN_U10        -INF      5.000     6.000       .
```

---- EQU IN_U11	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES101	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES102	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES103	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES104	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES105	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES106	-INF	4.000	6.000	.
---- EQU RES107	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES108	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES109	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES110	-INF	-4.000	6.000	.
---- EQU RES111	-INF	-3.000	6.000	.
---- EQU RES112	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES113	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES114	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES115	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES116	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES117	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES118	-INF	-3.000	6.000	.
---- EQU RES119	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES120	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES201	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES202	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES203	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES204	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES205	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES206	-INF	-4.000	7.000	.
---- EQU RES207	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES208	-INF	-3.000	7.000	.
---- EQU RES209	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES210	-INF	4.000	7.000	.
---- EQU RES211	-INF	3.000	7.000	.
---- EQU RES212	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES213	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES214	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES215	-INF	-3.000	7.000	.
---- EQU RES216	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES217	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES218	-INF	3.000	7.000	.
---- EQU RES219	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES220	-INF	2.000	7.000	.

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR x12	.	.	1.000	50.000
---- VAR x13	.	.	1.000	76.000
---- VAR x14	.	1.000	1.000	56.000
---- VAR x15	.	.	1.000	58.000
---- VAR x16	.	.	1.000	70.000
---- VAR x21	.	.	1.000	59.000
---- VAR x23	.	.	1.000	61.000
---- VAR x24	.	.	1.000	63.000
---- VAR x25	.	1.000	1.000	52.000
---- VAR x26	.	.	1.000	64.000
---- VAR x31	.	1.000	1.000	52.000
---- VAR x32	.	.	1.000	76.000
---- VAR x34	.	.	1.000	59.000
---- VAR x35	.	.	1.000	78.000
---- VAR x36	.	.	1.000	61.000
---- VAR x41	.	.	1.000	74.000
---- VAR x42	.	.	1.000	60.000
---- VAR x43	.	.	1.000	71.000
---- VAR x45	.	.	1.000	72.000
---- VAR x46	.	1.000	1.000	59.000
---- VAR x51	.	.	1.000	55.000
---- VAR x52	.	.	1.000	60.000
---- VAR x53	.	1.000	1.000	64.000
---- VAR x54	.	.	1.000	57.000

```
---- VAR x56             .          .         1.000    58.000
---- VAR x61             .          .         1.000    64.000
---- VAR x62             .        1.000       1.000    54.000
---- VAR x63             .          .         1.000    77.000
---- VAR x64             .          .         1.000    58.000
---- VAR x65             .          .         1.000    73.000
---- VAR u1              .        1.000     100.000      EPS
---- VAR u2              .        4.000     100.000      EPS
---- VAR u3              .        6.000     100.000      EPS
---- VAR u4              .        2.000     100.000      EPS
---- VAR u5              .        5.000     100.000      EPS
---- VAR u6              .        3.000     100.000      EPS
---- VAR Z              -INF    337.000       +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED

EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI

USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                         K:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\P05_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\P05_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

Cuadro C.07

Resultados del programa de la Propuesta 06

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   P06_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  146

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.094      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        20    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan  3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.08sec (det. 1.02 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.04 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (20 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U02        2.000     4.000     +INF        .
---- EQU IN_U03        2.000     2.000     +INF        .
---- EQU IN_U04        2.000     6.000     +INF        .
---- EQU IN_U05        2.000     3.000     +INF        .
---- EQU IN_U06        2.000     5.000     +INF        .
---- EQU IN_U07        -INF      4.000     6.000       .
---- EQU IN_U08        -INF      2.000     6.000       .
---- EQU IN_U09        -INF      6.000     6.000       .
---- EQU IN_U10        -INF      3.000     6.000       .
```

---- EQU IN_U11	-INF	5.000	6.000	.
---- EQU RES101	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES102	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES103	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES104	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES105	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES106	-INF	-4.000	6.000	.
---- EQU RES107	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES108	-INF	-3.000	6.000	.
---- EQU RES109	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES110	-INF	4.000	6.000	.
---- EQU RES111	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES112	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES113	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES114	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES115	-INF	-3.000	6.000	.
---- EQU RES116	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES117	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES118	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES119	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES120	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES201	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES202	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES203	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES204	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES205	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES206	-INF	4.000	7.000	.
---- EQU RES207	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES208	-INF	3.000	7.000	.
---- EQU RES209	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES210	-INF	-4.000	7.000	.
---- EQU RES211	-INF	-3.000	7.000	.
---- EQU RES212	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES213	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES214	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES215	-INF	3.000	7.000	.
---- EQU RES216	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES217	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES218	-INF	-3.000	7.000	.
---- EQU RES219	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES220	-INF	-2.000	7.000	.

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR x12	.	.	1.000	50.000
---- VAR x13	.	.	1.000	76.000
---- VAR x14	.	1.000	1.000	56.000
---- VAR x15	.	.	1.000	58.000
---- VAR x16	.	.	1.000	70.000
---- VAR x21	.	.	1.000	59.000
---- VAR x23	.	.	1.000	61.000
---- VAR x24	.	.	1.000	63.000
---- VAR x25	.	1.000	1.000	52.000
---- VAR x26	.	.	1.000	64.000
---- VAR x31	.	1.000	1.000	52.000
---- VAR x32	.	.	1.000	76.000
---- VAR x34	.	.	1.000	59.000
---- VAR x35	.	.	1.000	78.000
---- VAR x36	.	.	1.000	61.000
---- VAR x41	.	.	1.000	74.000
---- VAR x42	.	.	1.000	60.000
---- VAR x43	.	.	1.000	71.000
---- VAR x45	.	.	1.000	72.000
---- VAR x46	.	1.000	1.000	59.000
---- VAR x51	.	.	1.000	55.000
---- VAR x52	.	.	1.000	60.000
---- VAR x53	.	1.000	1.000	64.000
---- VAR x54	.	.	1.000	57.000

```
---- VAR x56             .         .        1.000    58.000
---- VAR x61             .         .        1.000    64.000
---- VAR x62             .       1.000      1.000    54.000
---- VAR x63             .         .        1.000    77.000
---- VAR x64             .         .        1.000    58.000
---- VAR x65             .         .        1.000    73.000
---- VAR u1              .       1.000    100.000      EPS
---- VAR u2              .       4.000    100.000      EPS
---- VAR u3              .       2.000    100.000      EPS
---- VAR u4              .       6.000    100.000      EPS
---- VAR u5              .       3.000    100.000      EPS
---- VAR u6              .       5.000    100.000      EPS
---- VAR Z              -INF    337.000     +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
                             3  PROJECTED

EXECUTION TIME       =        0.016 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI

USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                        K:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\P06_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\P06_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

Cuadro C.08

Resultados del programa de la Propuesta 07

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   P07_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  146

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.110      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        23    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan  3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.08sec (det. 0.97 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.04 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (23 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U02        2.000     4.000     +INF        .
---- EQU IN_U03        2.000     6.000     +INF        .
---- EQU IN_U04        2.000     2.000     +INF        .
---- EQU IN_U05        2.000     5.000     +INF        .
---- EQU IN_U06        2.000     3.000     +INF        .
---- EQU IN_U07        -INF      4.000     6.000       .
---- EQU IN_U08        -INF      6.000     6.000       .
---- EQU IN_U09        -INF      2.000     6.000       .
---- EQU IN_U10        -INF      5.000     6.000       .
```

---- EQU IN_U11	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES101	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES102	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES103	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES104	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES105	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES106	-INF	4.000	7.000	.
---- EQU RES107	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES108	-INF	3.000	7.000	.
---- EQU RES109	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES110	-INF	-4.000	7.000	.
---- EQU RES111	-INF	-3.000	7.000	.
---- EQU RES112	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES113	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES114	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES115	-INF	3.000	7.000	.
---- EQU RES116	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES117	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES118	-INF	-3.000	7.000	.
---- EQU RES119	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES120	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES201	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES202	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES203	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES204	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES205	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES206	-INF	-4.000	6.000	.
---- EQU RES207	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES208	-INF	-3.000	6.000	.
---- EQU RES209	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES210	-INF	4.000	6.000	.
---- EQU RES211	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES212	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES213	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES214	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES215	-INF	-3.000	6.000	.
---- EQU RES216	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES217	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES218	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES219	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES220	-INF	2.000	6.000	.

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR x12	.	.	1.000	50.000
---- VAR x13	.	.	1.000	76.000
---- VAR x14	.	1.000	1.000	56.000
---- VAR x15	.	.	1.000	58.000
---- VAR x16	.	.	1.000	70.000
---- VAR x21	.	.	1.000	59.000
---- VAR x23	.	.	1.000	61.000
---- VAR x24	.	.	1.000	63.000
---- VAR x25	.	1.000	1.000	52.000
---- VAR x26	.	.	1.000	64.000
---- VAR x31	.	1.000	1.000	52.000
---- VAR x32	.	.	1.000	76.000
---- VAR x34	.	.	1.000	59.000
---- VAR x35	.	.	1.000	78.000
---- VAR x36	.	.	1.000	61.000
---- VAR x41	.	.	1.000	74.000
---- VAR x42	.	.	1.000	60.000
---- VAR x43	.	.	1.000	71.000
---- VAR x45	.	.	1.000	72.000
---- VAR x46	.	1.000	1.000	59.000
---- VAR x51	.	.	1.000	55.000
---- VAR x52	.	.	1.000	60.000
---- VAR x53	.	1.000	1.000	64.000
---- VAR x54	.	.	1.000	57.000

```
---- VAR x56             .          .         1.000    58.000
---- VAR x61             .          .         1.000    64.000
---- VAR x62             .        1.000       1.000    54.000
---- VAR x63             .          .         1.000    77.000
---- VAR x64             .          .         1.000    58.000
---- VAR x65             .          .         1.000    73.000
---- VAR u1              .        1.000     100.000      EPS
---- VAR u2              .        4.000     100.000      EPS
---- VAR u3              .        6.000     100.000      EPS
---- VAR u4              .        2.000     100.000      EPS
---- VAR u5              .        5.000     100.000      EPS
---- VAR u6              .        3.000     100.000      EPS
---- VAR Z              -INF    337.000       +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED

EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI

USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                         K:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\P07_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\P07_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

Cuadro C.09

Resultados del programa de la Propuesta 08

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   P08_6X6_001         OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  146

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              337.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.110      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        21    2000000000

IBM ILOG CPLEX    24.8.2 r59988 Released Jan  3, 2017 WEI x86 64bit/MS
Windows
Cplex 12.7.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
MIP status(101): integer optimal solution
Cplex Time: 0.09sec (det. 1.02 ticks)
Fixing integer variables, and solving final LP...
Fixed MIP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.04 ticks)
Proven optimal solution.

MIP Solution:          337.000000    (21 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           337.000000    (0 iterations)

Best possible:         337.000000
Absolute gap:            0.000000
Relative gap:            0.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU FUN_OBJ         .         .         .        1.000
---- EQU FILA01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU FILA06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU02        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU03        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU04        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU05        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU COLU06        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U01        1.000     1.000     1.000       .
---- EQU IN_U02        2.000     4.000     +INF        .
---- EQU IN_U03        2.000     2.000     +INF        .
---- EQU IN_U04        2.000     6.000     +INF        .
---- EQU IN_U05        2.000     3.000     +INF        .
---- EQU IN_U06        2.000     5.000     +INF        .
---- EQU IN_U07        -INF      4.000     6.000       .
---- EQU IN_U08        -INF      2.000     6.000       .
---- EQU IN_U09        -INF      6.000     6.000       .
---- EQU IN_U10        -INF      3.000     6.000       .
```

---- EQU IN_U11	-INF	5.000	6.000	.
---- EQU RES101	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES102	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES103	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES104	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES105	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES106	-INF	-4.000	7.000	.
---- EQU RES107	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES108	-INF	-3.000	7.000	.
---- EQU RES109	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES110	-INF	4.000	7.000	.
---- EQU RES111	-INF	3.000	7.000	.
---- EQU RES112	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES113	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES114	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES115	-INF	-3.000	7.000	.
---- EQU RES116	-INF	-2.000	7.000	.
---- EQU RES117	-INF	7.000	7.000	.
---- EQU RES118	-INF	3.000	7.000	.
---- EQU RES119	-INF	-1.000	7.000	.
---- EQU RES120	-INF	2.000	7.000	.
---- EQU RES201	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES202	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES203	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES204	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES205	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES206	-INF	4.000	6.000	.
---- EQU RES207	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES208	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES209	-INF	-2.000	6.000	.
---- EQU RES210	-INF	-4.000	6.000	.
---- EQU RES211	-INF	-3.000	6.000	.
---- EQU RES212	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES213	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES214	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES215	-INF	3.000	6.000	.
---- EQU RES216	-INF	2.000	6.000	.
---- EQU RES217	-INF	6.000	6.000	.
---- EQU RES218	-INF	-3.000	6.000	.
---- EQU RES219	-INF	1.000	6.000	.
---- EQU RES220	-INF	-2.000	6.000	.

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR x12	.	.	1.000	50.000
---- VAR x13	.	.	1.000	76.000
---- VAR x14	.	1.000	1.000	56.000
---- VAR x15	.	.	1.000	58.000
---- VAR x16	.	.	1.000	70.000
---- VAR x21	.	.	1.000	59.000
---- VAR x23	.	.	1.000	61.000
---- VAR x24	.	.	1.000	63.000
---- VAR x25	.	1.000	1.000	52.000
---- VAR x26	.	.	1.000	64.000
---- VAR x31	.	1.000	1.000	52.000
---- VAR x32	.	.	1.000	76.000
---- VAR x34	.	.	1.000	59.000
---- VAR x35	.	.	1.000	78.000
---- VAR x36	.	.	1.000	61.000
---- VAR x41	.	.	1.000	74.000
---- VAR x42	.	.	1.000	60.000
---- VAR x43	.	.	1.000	71.000
---- VAR x45	.	.	1.000	72.000
---- VAR x46	.	1.000	1.000	59.000
---- VAR x51	.	.	1.000	55.000
---- VAR x52	.	.	1.000	60.000
---- VAR x53	.	1.000	1.000	64.000
---- VAR x54	.	.	1.000	57.000

```
---- VAR x56             .         .        1.000    58.000
---- VAR x61             .         .        1.000    64.000
---- VAR x62             .       1.000      1.000    54.000
---- VAR x63             .         .        1.000    77.000
---- VAR x64             .         .        1.000    58.000
---- VAR x65             .         .        1.000    73.000
---- VAR u1              .       1.000    100.000      EPS
---- VAR u2              .       4.000    100.000      EPS
---- VAR u3              .       2.000    100.000      EPS
---- VAR u4              .       6.000    100.000      EPS
---- VAR u5              .       3.000    100.000      EPS
---- VAR u6              .       5.000    100.000      EPS
---- VAR Z              -INF    337.000     +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
                             3  PROJECTED

EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS      2 MB  24.8.2 r59988 WEX-WEI

USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC   G871201/0000CA-ANY
      Free Demo,  202-342-0180,  sales@gams.com,  www.gams.com   DC0000

**** FILE SUMMARY

Input                         K:\TSP\TESIS\MONOGRAFIA\CORRIDAS\2    GAMS    -
PROGRAMAS\P08_6X6_001.gms
Output     C:\Users\Gabriel Solari\Documents\gamsdir\projdir\P08_6X6_001.lst
```

Fuente propia.

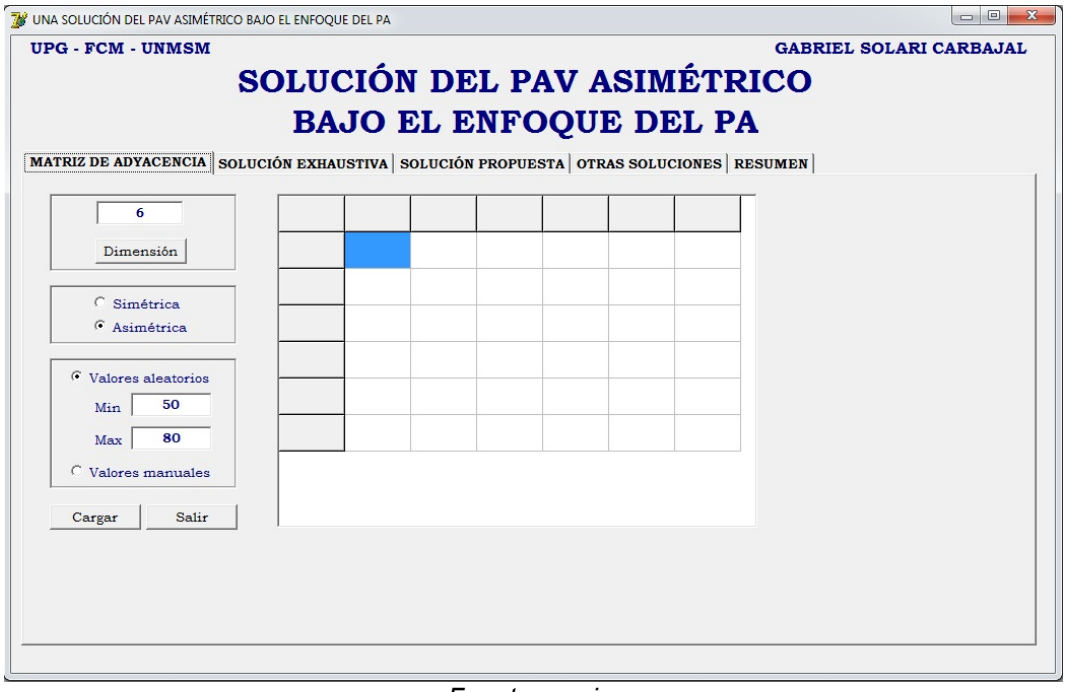
ANEXO D Programa generador de problemas y soluciones del PA y PAV

Pantalla inicial del programa para el llenado de la matriz de adyacencia, ver Cuadros D.01, D.02 y D.03, se solicita la siguiente información: dimensión, con valores simétricos o asimétricos, con ingreso de valores aleatorios o manuales.

Los valores aleatorios siguen una distribución uniforme entre (Min, Max).

Cuadro D.01

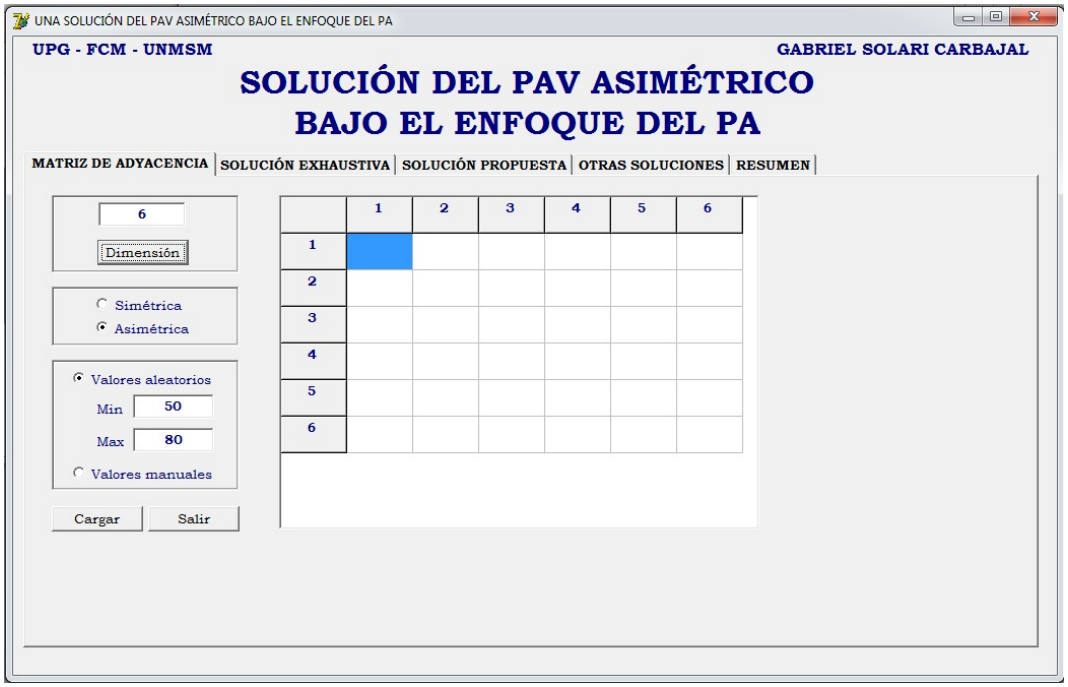
Pantalla inicial del programa



Fuente propia.

Cuadro D.02

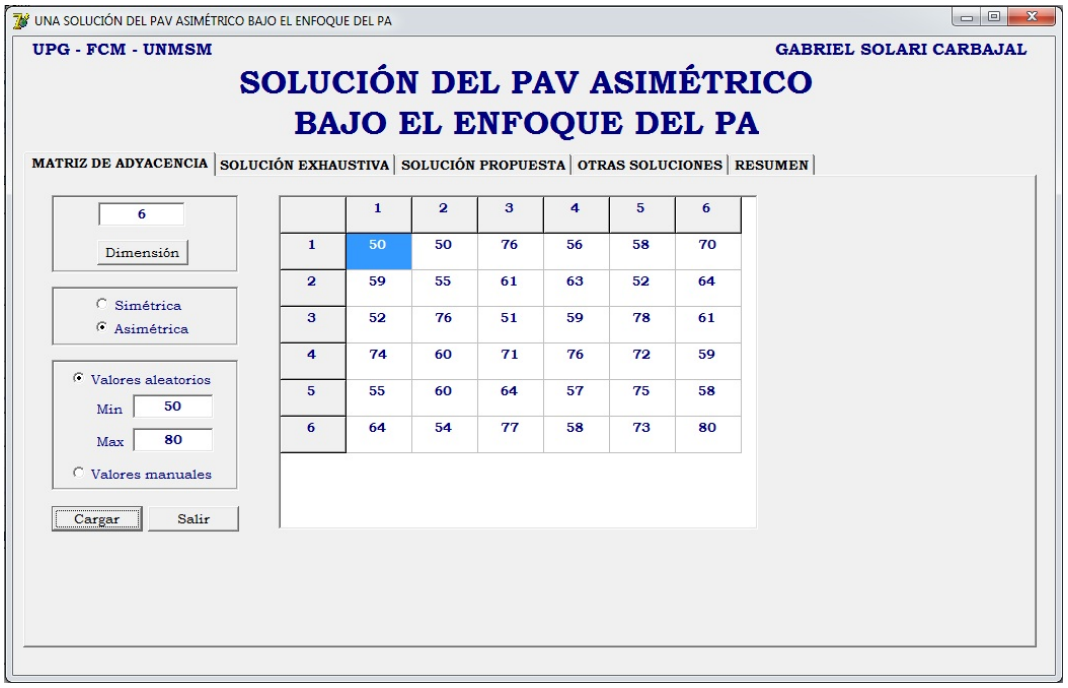
Definición de la dimensión de la matriz de adyacencia



Fuente propia.

Cuadro D.03

Generación de valores aleatorios para el llenado de la matriz de adyacencia

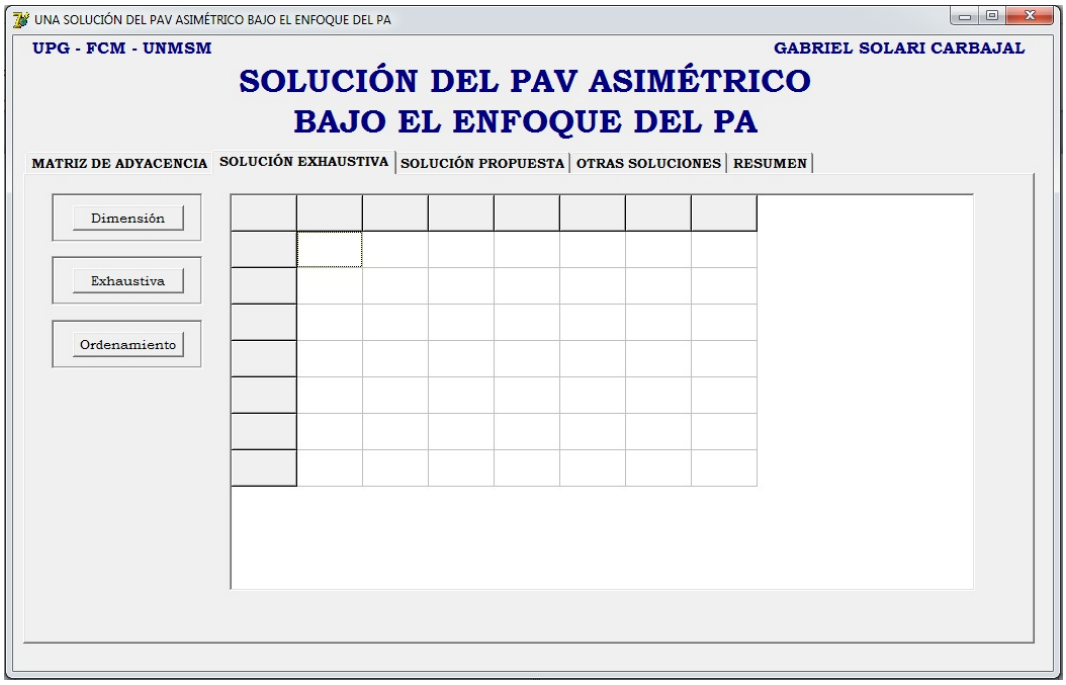


Fuente propia.

En la pantalla inicial de la solución exhaustiva, ver Cuadros D.04, D.05, D.06 y D.07, se genera: la dimensión de la matriz de la solución exhaustiva y todas las soluciones del PA y del PAV.

Cuadro D.04

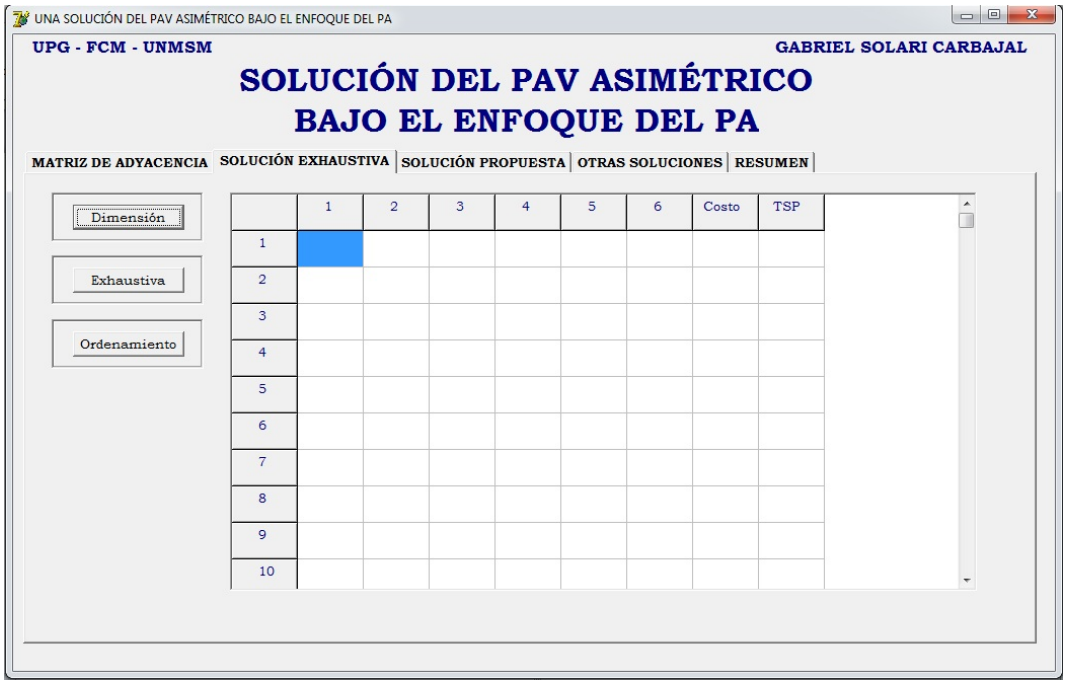
Pantalla inicial de la solución exhaustiva



Fuente propia.

Cuadro D.05

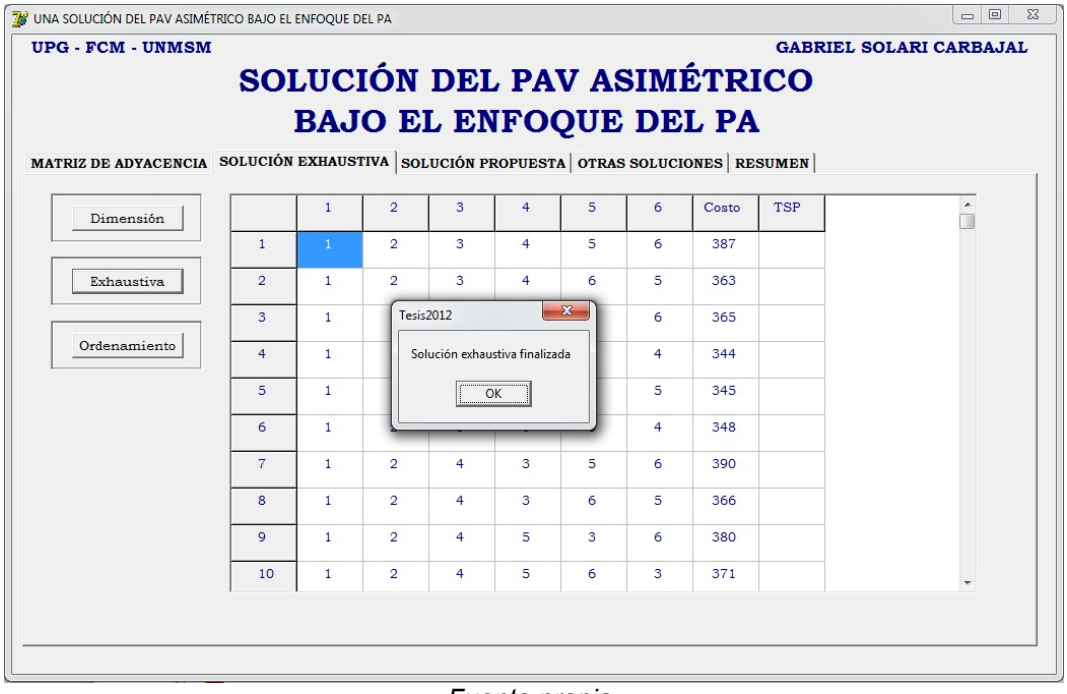
Generación de la dimensión de la solución exhaustiva



Fuente propia.

Cuadro D.06

Generación de la solución exhaustiva



Fuente propia.

Cuadro D.07

Solución exhaustiva



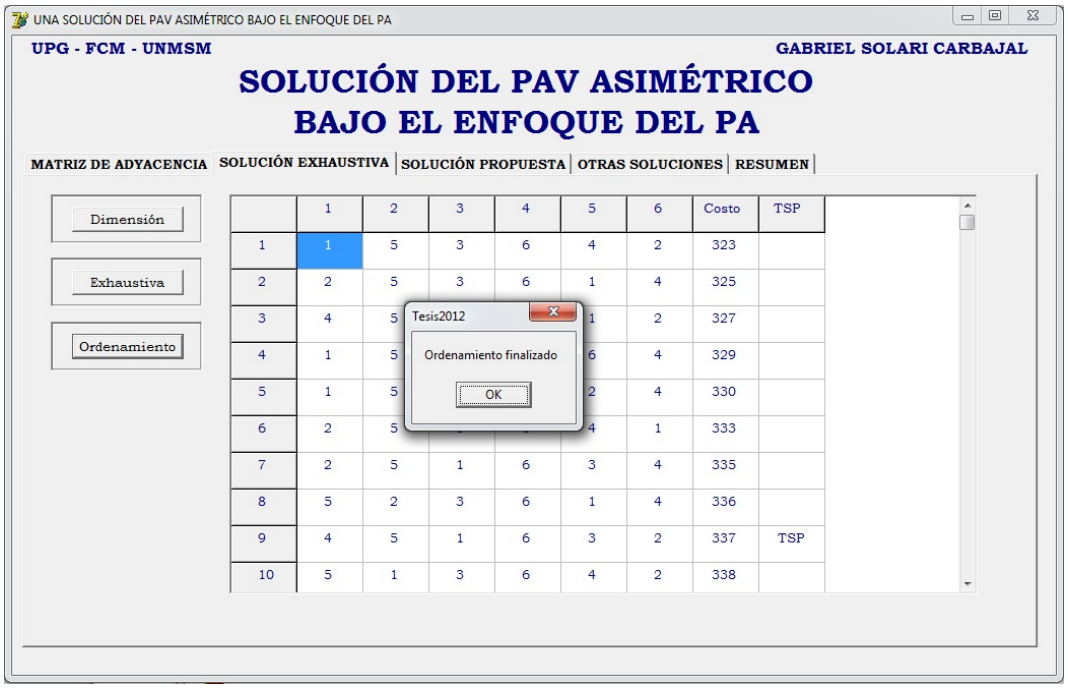
	1	2	3	4	5	6	Costo	TSP
1	1	2	3	4	5	6	387	
2	1	2	3	4	6	5	363	
3	1	2	3	5	4	6	365	
4	1	2	3	5	6	4	344	
5	1	2	3	6	4	5	345	
6	1	2	3	6	5	4	348	
7	1	2	4	3	5	6	390	
8	1	2	4	3	6	5	366	
9	1	2	4	5	3	6	380	
10	1	2	4	5	6	3	371	

Fuente propia.

Las soluciones son ordenadas de menor a mayor, localizando aquellas que representan un PAV.

Cuadro D.08

Proceso de ordenamiento de la solución exhaustiva



	1	2	3	4	5	6	Costo	TSP
1	1	5	3	6	4	2	323	
2	2	5	3	6	1	4	325	
3	4	5			1	2	327	
4	1	5			6	4	329	
5	1	5			2	4	330	
6	2	5			4	1	333	
7	2	5	1	6	3	4	335	
8	5	2	3	6	1	4	336	
9	4	5	1	6	3	2	337	TSP
10	5	1	3	6	4	2	338	

Fuente propia.

La pantalla ordenada de la solución exhaustiva, muestra la solución del PA y del PAV, ver Cuadro D.09. Para el ejemplo la solución del PA es 323, con el siguiente programa: la tarea 1 se le asigna al equipo 1, la tarea 2 al equipo 5, la tarea 3 al equipo 3, la tarea 4 al equipo 6, la tarea 5 al equipo 4 y la tarea 6 al equipo 2. Esta solución no es un PAV.

La solución del PAV es 327, con el siguiente programa: desde la ciudad 1 se visita la ciudad 4, desde la ciudad 4 se visita la ciudad 6, desde la ciudad 6 se visita la ciudad 2, desde la ciudad 2 se visita la ciudad 5, desde la ciudad 5 se visita la ciudad 3 y desde la ciudad 3 se visita la ciudad 1.

Cuadro D.09

Solución exhaustiva ordenada de menor a mayor



	1	2	3	4	5	6	Costo	TSP
1	1	5	3	6	4	2	323	
2	2	5	3	6	1	4	325	
3	4	5	3	6	1	2	327	
4	1	5	3	2	6	4	329	
5	1	5	3	6	2	4	330	
6	2	5	3	6	4	1	333	
7	2	5	1	6	3	4	335	
8	5	2	3	6	1	4	336	
9	4	5	1	6	3	2	337	TSP
10	5	1	3	6	4	2	338	

Fuente propia.