Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Modelos logísticos de la teoría de respuesta al ítem con función de enlace asimétrico para el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Estadística Matemática

AUTOR

Roberto Carlos EVARISTO BRONCANO

ASESOR

Dra. Doris Albina GÓMEZ TICERÁN

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Evaristo, R. (2025). *Modelos logísticos de la teoría de respuesta al ítem con función de enlace asimétrico para el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Roberto Carlos Evaristo Broncano
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	45829401
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9010-3641
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Doris Albina Gómez Ticerán
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	08575257
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9253-3661
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Roger Pedro Norabuena Figueroa
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41493243
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Ofelia Roque Paredes
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06243124
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Olga Lidia Solano Dávila
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09118212
Miembro del jurado 3	
Nombres y apellidos	Rosa Ysabel Adriazola Cruz

Tipo de documento	DNI

Número de documento de identidad	06826398
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.2.6. Análisis de Datos y Modelamiento de Problemas de la Sociedad (Empresa, Instituciones, Población locales, regionales y nacionales)
Grupo de investigación	Modelos Aplicados a la Investigación Científica (Moca)
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Centro poblado: No aplica Urbanización: No aplica Manzana y lote: No aplica Calle: Avenida Carlos Germán Amézaga, número 375 Latitud: −12.0565 Longitud: −77.0844
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2018 - 2024
URL de disciplinas OCDE	Estadísticas, Probabilidad https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.03

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 11:00 horas del día jueves catorce de agosto de dos mil veinticinco, en el Laboratorio 2 de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, el Jurado Examinador de tesis, presidido por el Dr. Roger Pedro Norabuena Figueroa e integrado por los siguientes miembros: Dra. Ofelia Roque Paredes (Jurado Informante), Dra. Olga Lidia Solano Dávila (Jurado Evaluador), Dra. Rosa Ysabel Adriazola Cruz (Jurado Evaluador) y la Dra. Doris Albina Gómez Ticerán como Miembro Asesor; se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «MODELOS LOGÍSTICOS DE LA TEORÍA DE RESPUESTA AL ÍTEM CON FUNCIÓN DE ENLACE ASIMÉTRICO PARA EL ESTUDIO DE SATISFACCIÓN DEL CLIMA ORGANIZACIONAL EN UNA ENTIDAD FINANCIERA» presentado por el Br. Roberto Carlos Evaristo Broncano, para optar el Grado Académico de Magister en Estadística Matemática.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Bachiller **ROBERTO CARLOS EVARISTO BRONCANO**, el calificativo de 18 MUY BUENO

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Examinador recomienda que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Magíster en Estadística Matemática** al Bachiller **ROBERTO CARLOS EVARISTO BRONCANO.**

Siendo las 12:10 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Roger Pedro Norabuena Figueroa
Presidente

Dra. Ofelia Roque Paredes
Miembro

Dra. Olga Lidia Solano Dávila
Miembro

Dra. Rosa Ysabel Adriazola Cruz
Miembro

Dra. Doris Albina Gómez Ticerán
Miembro Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **DORIS ALBINA GÓMEZ TICERAN** en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 001235-2024-UPG-VDIP-FCM/UNMSM, de fecha 13 de setiembre de 2024, de la tesis, cuyo título es: "**Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem con Función de Enlace Asimétrico para el Estudio de Satisfacción del Clima Organizacional en una Entidad Financiera"**, presentado por el bachiller **ROBERTO CARLOS EVARISTO BRONCANO**, para optar el grado académico de Magíster en Estadística Matemática, CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el **7** % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado académico de Magíster.

Lima, 20 de mayo de 2025

Firma del Asesor 

Nombres y Apellidos del asesor: **DORIS ALBINA GÓMEZ TICERAN**

DNI: **08575257**

Dedicatoria

Este trabajo de tesis está dedicado a las personas más importantes en mi vida, mis padres. Gracias a su apoyo y buenos consejos pude afrontar los retos con éxito, y juntos estamos cosechando lo que sembraron en un inicio.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por esta vida con muchas adversidades pero también con oportunidades que permitieron el crecimiento como persona y profesional.

En segundo lugar, agradezco a mis padres por su apoyo en mi formación académica.

Finalmente, agradezco a la Dra. Doris Albina Gómez Ticerán por su constante apoyo en el desarrollo de la presente tesis.

Índice General

Dedicatoria ii
Agradecimientos iii
Resumen xiii
Abstract xiv
Índice General iv
Lista de Tablas vii
Lista de Figuras x
Capítulo I. Introducción 1
1.1. Situación Problemática 1
1.2. Formulación del Problema 4
1.2.1. Problema General 6
1.2.2. Problemas Específicos 6
1.3. Justificación de la Investigación 7
1.3.1. Justificación Teórica 7
1.3.2. Justificación Práctica 8
1.4. Objetivos de la Investigación 9
1.4.1. Objetivo General 9
1.4.2. Objetivos Específicos 9
Capítulo II. Marco Teórico 10
2.1. Antecedentes 10
2.1.1. Antecedentes Internacionales 10
2.1.2. Antecedentes Nacionales 14
2.2. Bases Teóricas de la TRI 18
2.2.1. Variables Latentes 18
2.2.2. Modelo de Variables Latentes 18
2.2.3. Teoría Clásica de los Tests 19
2.2.4. Teoría de Respuesta al Ítem 23
2.2.5. Modelo TRI para Respuestas Dicotómicas 30
2.2.6. Modelo Rasch 36
2.2.7. Modelo Logístico de Dos Parámetros de la TRI 38
2.2.8. Modelo Logístico de Exponente Positivo de la TRI 39
2.2.9. Modelo Logístico de Exponente Positivo Recíproco de la TRI 41
2.2.10. Estimación Máxima Verosimilitud de los Parámetros TRI 43

2.2.11. Estimación Bayesiana de los Parámetros TRI 47
2.2.12. Estimación Bayesiana de los Modelos LPE y RLPE.....54
2.3. Bases Teóricas del Clima Organizacional.....56
2.3.1. Fundamentos Generales del Clima Organizacional.....56
2.4. Marco Conceptual 61
2.4.1. Modelos TRI en el Análisis de Clima Organizacional 61
2.4.2. Indicadores de Medición.....63
2.4.3. Glosario de Términos.....65
Capítulo III. Metodología.....67
3.1. Tipo y Diseño de Investigación.....67
3.1.1. Tipo de Investigación.....67
3.1.2. Diseño de Investigación.....67
3.2. Unidad de Análisis 67
3.3. Población de Estudio.....67
3.4. Tamaño de Muestra.....68
3.5. Técnica e Instrumento de Recolección de Datos 68
3.5.1. Técnicas de Recolección de Datos.....68
3.5.2. Instrumento de Recolección de Datos 68
3.6. Técnicas de Análisis e Interpretación de la Información 69
3.6.1. Estudio de Simulación 70
3.6.2. Análisis de la ECO.....72
Capítulo IV. Resultados y Discusión 76
4.1. Resultados de Simulación 76
4.1.1. Análisis del Parámetro del Individuo.....76
4.1.2. Análisis del Parámetro Dificultad de los Ítems 77
4.1.3. Análisis del Parámetro Discriminación de los Ítems 79
4.1.4. Análisis del Parámetro Penalización de los Ítems 80
4.1.5. Discusión de los Resultados de la Simulación.....81
4.2. Resultados del Caso de Aplicación 82
4.2.1. Análisis Exploratorio 82
4.2.2. Análisis Descriptivo de los Ítems 84
4.2.3. Análisis del Caso Mediante la TCT 86
4.2.4. Análisis del Caso Mediante la TRI 87
4.2.5. Discusión de los Resultados del Caso de Aplicación 97
4.3. Cumplimiento de los objetivos.....99

4.3.1. Objetivo General 99
4.3.2. Objetivo Específico 1 99
4.3.3. Objetivo Específico 2 99
4.3.4. Objetivo Específico 3 102
4.3.5. Objetivo Específico 4 102
Conclusiones 104
Referencias 107
Apéndice 115
Apéndice A: Hipótesis y Variables 115
Apéndice B: Explicación de la Desvianza 121
Apéndice C: Script en R para la simulación de los datos 123
Apéndice D: Estimación de Máxima Verosimilitud Conjunta 127
Apéndice E: Estructura del Programa STAN 133
Apéndice F: Análisis Exploratorio de ECO y Descriptivo de Ítems 137
Apéndice G: Resultados de la Ejecución de Modelos 141

Lista de Tablas

Tabla 1 *Posturas en la Psicología sobre las Variables Latentes* 18

Tabla 2 *Clasificación de los Modelos de Variables Latentes* 19

Tabla 3 *CCI's por cambio en los niveles de dificultad* 28

Tabla 4 *CCI's por Cambio en los Niveles de Discriminación* 28

Tabla 5 *Comparación de Modelos de Variables Latentes* 30

Tabla 6 *Derivadas del Logaritmo de la Distribución Posterior Conjunta* 52

Tabla 7 *Distribución de Colaboradores Según Organigrama* 68

Tabla 8 *Resultados de Estimación del Nivel de Habilidad* 76

Tabla 9 *Resultados de Estimación del Nivel de Dificultad* 78

Tabla 10 *Resultados de Estimación del Nivel de Discriminación* 79

Tabla 11 *Resultados de Estimación del Nivel de Penalización* 80

Tabla 12 *Descripción de los Ítems de la Dimensión Remuneración* 86

Tabla 13 *Descripción de los Ítems de la Dimensión Desarrollo* 87

Tabla 14 *Análisis de Componentes Principales (Remuneración)* 88

Tabla 15 *Análisis de Componentes Principales (Desarrollo)* 88

Tabla 16 *Estimación con los Modelos Tradicionales (Remuneración)* 90

Tabla 17 *Comparación de Modelos Tradicionales (Remuneración)* 90

Tabla 18 *Estimación de Parámetros con los Modelos Tradicionales (Desarrollo)* .92

Tabla 19 *Comparación de Modelos Tradicionales (Desarrollo)* 92

Tabla 20 *Estimación de los Modelos Bayesianos 1PL y 2PL (Remuneración)* 94

Tabla 21 *Comparación de Modelos Bayesianos Simétricos (Remuneración)* 94

Tabla 22 *Estimación de los Modelos Bayesianos 1PL y 2PL (Desarrollo)* 95

Tabla 23 *Comparación de Modelos Bayesianos Simétricos (Desarrollo)* 95

Tabla 24 *Estimación de los Modelos Bayesianos LPE y RLPE (Remuneración)* 96

Tabla 25 *Comparación de Modelos Bayesianos Asimétricos (Remuneración)* 96

Tabla 26 *Estimación de los Modelos Bayesianos LPE y RLPE (Desarrollo)*.....97

Tabla 27 *Comparación de Modelos Bayesianos Asimétricos (Desarrollo)*.....97

Tabla 28 *Comparación de Modelos Bayesianos Mediante WAIC* 97

Tabla 29 *Comparación de Modelos Simétricos y Asimétricos (Remuneración)*.....100

Tabla 30 *Comparación de Modelos Simétricos y Asimétricos (Desarrollo)* 101

Tabla 31 *Operacionalización de las Variables* 119

Tabla 32 *Matriz de Consistencia*.....120

Tabla G1 *Resultado del Modelo Rasch (Remuneración)*.....141

Tabla G2 *Ajuste de los Ítems con Rasch (Remuneración)*.....141

Tabla G3 *Información de los Ítems con Rasch (Remuneración)* 141

Tabla G4 *Resultado del Modelo 2PL (Remuneración)*.....142

Tabla G5 *Ratio de Verosimilitud del Modelo 2PL (Remuneración)*.....142

Tabla G6 *Ajuste de los Ítems con 2PL (Remuneración)* 142

Tabla G7 *Información de los Ítems con 2PL (Remuneración)* 142

Tabla G8 *Resultado del Modelo Rasch (Desarrollo)*.....143

Tabla G9 *Prueba de Ajuste de los Ítems con Rasch (Desarrollo)* 143

Tabla G10 *Información de los Ítems con Rasch (Desarrollo)*.....143

Tabla G11 *Resultado del Modelo 2PL (Desarrollo)*.....144

Tabla G12 *Ratio de Verosimilitud del Modelo 2PL (Desarrollo)* 144

Tabla G13 *Prueba de Ajuste de los Ítems con el Modelo 2PL (Desarrollo)* 144

Tabla G14 *Información de los Ítems con el Modelo 2PL (Desarrollo)*.....144

Tabla G15 *Estimación de la Dificultad del 1PL Bayesiano (Remuneración)* 145

Tabla G16 *Estimación de la Dificultad del 1PL Bayesiano (Desarrollo)*.....146

Tabla G17 *Estimación de la Dificultad del 2PL Bayesiano (Remuneración)* 147

Tabla G18 *Estimación de la Discriminación del 2PL Bayesiano (Remuneración)* 147

Tabla G19 *Estimación de la Dificultad del 2PL Bayesiano (Desarrollo)* 149

Tabla G20 *Estimación de la Discriminación del 2PL Bayesiano (Desarrollo)* 149

Tabla G21 *Estimación de la Dificultad del LPE (Remuneración)* 151

Tabla G22 *Estimación de la Discriminación del LPE (Remuneración)* 151

Tabla G23 *Estimación de la Penalización del LPE (Remuneración)* 151

Tabla G24 *Estimación de la Dificultad del LPE (Desarrollo)* 154

Tabla G25 *Estimación de la Discriminación del LPE (Desarrollo)* 154

Tabla G26 *Estimación de la Penalización del LPE (Desarrollo)* 154

Tabla G27 *Estimación de la Dificultad con RLPE (Remuneración)* 157

Tabla G28 *Estimación de la Discriminación con RLPE (Remuneración)* 157

Tabla G29 *Estimación de la Penalización con RLPE (Remuneración)* 157

Tabla G30 *Estimación de la Dificultad del RLPE (Desarrollo)* 160

Tabla G31 *Estimación de la Discriminación del RLPE (Desarrollo)* 160

Tabla G32 *Estimación de la Penalización del RLPE (Desarrollo)* 160

Lista de Figuras

Figura 1 *Evaluación del Nivel de Dificultad*.....25

Figura 2 *Aproximación de la Curva Característica del Ítem*.....27

Figura 3 *Comparación del Nivel de Dificultad en la CCI* 28

Figura 4 *Comparación del Nivel de Discriminación en la CCI*.....29

Figura 5 *Comparación de las Curvas Característica del Ítem* 30

Figura 6 *Función de Información del Ítem* 35

Figura 7 *Esquema del Clima Organizacional*.....58

Figura 8 *Preguntas Planteadas por Dimensión (Parte 1)* 59

Figura 9 *Preguntas Planteadas por Dimensión (Parte 2)* 60

Figura 10 *Preguntas Planteadas por Dimensión (Parte 3)* 61

Figura 11 *Proceso de Modelamiento de los Datos* 73

Figura 12 *Transformación de las Variables Likert a Dicotómico* 73

Figura 13 *Histograma de Puntuación de la Encuesta Clima Organizacional* 82

Figura 14 *Comparación de Puntuaciones por Dimensiones de la ECO* 83

Figura 15 *Análisis de los Ítems de la Dimensión Remuneración*.....84

Figura 16 *Satisfacción del Clima en los Ítems de la Dimensión Remuneración* 85

Figura 17 *Análisis de los Ítems de la Dimensión Desarrollo* 85

Figura 18 *Satisfacción del Clima en los Ítems de la Dimensión Desarrollo* 86

Figura 19 *Análisis Paralelo de los Ítems para Dimensión Remuneración*.....89

Figura 20 *Análisis Paralelo de los Ítems para Dimensión Desarrollo*.....89

Figura 21 *CCI's Mediante el Modelo Rasch (Remuneración)*.....91

Figura 22 *CCI's Mediante el Modelo 2PL (Remuneración)*.....91

Figura 23 *CCI's Mediante el Modelo Rasch (Desarrollo)* 92

Figura 24 *CCI's Mediante el Modelo 2PL (Desarrollo)*.....93

Figura 25 *Comparación de Parámetros (Remuneración)*.....100

Figura 26 *Comparación de Parámetros (Desarrollo)* 101

Figura 27 *Comparación de Modelos TCT y TRI (Remuneración)*.....102

Figura 28 *Comparación de Modelos TCT y TRI (Desarrollo)*.....103

Figura B1 *Explicación del Predictor Lineal Latente Zij* 121

Figura E1 *Ejemplo de Bloque de Funciones en Stan*.....133

Figura E2 *Ejemplo de Bloque de Datos en Stan*.....133

Figura E3 *Ejemplo de Bloque de Datos Transformados en Stan* 134

Figura E4 *Ejemplo de Bloque de Parámetros en Stan*.....134

Figura E5 *Ejemplo de Bloque de Parámetros Transformados en Stan* 135

Figura E6 *Ejemplo de Bloque de Modelos en Stan*.....136

Figura E7 *Ejemplo de Bloque de Cantidades Generadas en Stan*.....136

Figura G1 *Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Puesto*.....137

Figura G2 *Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Tipo de Área*.....138

Figura G3 *Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Área*.....138

Figura G4 *Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Edad* 139

Figura G5 *Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Remuneración* 140

Figura G1 *Convergencia de la Estimación con 1PL (Remuneración)* 145

Figura G2 *Convergencia de la Estimación con 1PL (Desarrollo)* 146

Figura G3 *Convergencia de la Dificultad con 2PL (Remuneración)* 147

Figura G4 *Convergencia de la Discriminación con 2PL (Remuneración)* 148

Figura G5 *Convergencia de la Dificultad con 2PL (Desarrollo)*.....149

Figura G6 *Convergencia de la Discriminación con 2PL (Desarrollo)* 150

Figura G7 *Convergencia de la Dificultad con LPE (Remuneración)*.....152

Figura G8 *Convergencia de la Discriminación con LPE (Remuneración)*.....152

Figura G9 *Convergencia de la Penalización con LPE (Remuneración)*.....153

Figura G 10 *Convergencia de la Dificultad con LPE (Desarrollo)* 155

Figura G11 *Convergencia de la Discriminación con LPE (Desarrollo)*.....155

Figura G12 *Convergencia de la Penalización con LPE (Desarrollo)*.....156

Figura G13 *Convergencia de la Dificultad con RLPE (Remuneración)* 158

Figura G14 *Convergencia de la Discriminación con RLPE (Remuneración)*.....158

Figura G15 *Convergencia de la Penalización con RLPE (Remuneración)* 159

Figura G16 *Convergencia de la Dificultad con RLPE (Desarrollo)*.....161

Figura G17 *Convergencia de la Discriminación con RLPE (Desarrollo)* 161

Figura G18 *Convergencia de la Penalización con RLPE (Desarrollo)* 162

Resumen

La presente tesis tiene por objetivo estudiar una familia de modelos estadísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), que permite modelar variables no medibles directamente, conocidas como variables latentes, para lo que se utiliza un instrumento de medición como el cuestionario estructurado con un conjunto de preguntas dicotómicas o de escala *likert*. Los modelos de la TRI permiten estimar la probabilidad que un individuo responda correctamente un ítem considerando las características del individuo y del ítem, para el proceso de estimación se utilizó la función de enlace *Logit* que se caracteriza por ser simétrico y se comparó con funciones de enlaces asimétricos como el logístico de exponente positivo y exponente positivo recíproco. Los modelos fueron aplicados a un estudio de simulación que permitió comparar el ajuste en diferentes escenarios, obteniendo que en escenarios donde las respuestas dicotómicas son desbalanceadas y en base de datos grandes los modelos con enlace asimétrico mejoraron el nivel de ajuste. Respecto al análisis de caso, estudio de la satisfacción de los colaboradores con el clima organizacional en una entidad financiera para el año 2016, se evidenció una mayor concentración de colaboradores satisfechos y un mejor ajuste de modelos logísticos con enlace asimétrico (menor WAIC), concluyendo en la importancia de aplicar estos modelos alternativos en estudios de Clima Organizacional.

Palabras clave: Variables latentes, Teoría Clásica de los Test, Teoría de Respuesta al Ítem, modelo logístico de dos parámetros, enlace asimétrico, estadística bayesiana.

Abstract

The objective of this thesis is to study a family of statistical models from Item Response Theory (IRT), which allows modeling variables that are not directly measurable, known as latent variables. For this purpose, a measurement instrument such as a structured questionnaire with a set of dichotomous or Likert-scale questions is used. IRT models enable the estimation of the probability that an individual answers an item correctly, considering both individual and item characteristics. The estimation process employs the Logit link function, known for its symmetry, and is compared with asymmetric link functions such as positive exponent logistic and reciprocal positive exponent. The models were applied to a simulation study to compare their fit in different scenarios. The results indicated that in scenarios with imbalanced dichotomous responses and large datasets, models with asymmetric links improved the level of fit. In the case analysis, examining employee satisfaction with organizational climate in a financial institution for the year 2016, there was a higher concentration of satisfied employees and a better fit of logistic models with asymmetric links (lower WAIC). This underscores the importance of applying these alternative models in Organizational Climate studies.

Keywords: Latent variables, Classical Test Theory, Item Response Theory, Two-parameter logistic model, asymmetric link, Bayesian statistics.

Capítulo I. Introducción

1.1. Situación Problemática

Las variables latentes, que sirven para representar conceptos complejos como las clases sociales o el tipo de personalidad en el contexto de las ciencias sociales y del comportamiento, no son directamente observables en la muestra ni tampoco en la población (Everitt, 1984). Este tipo de variables se refieren a construcciones hipotéticas definidas por un investigador, de acuerdo a su interés, con el fin de comprender y/o estudiar el comportamiento de variables complejas subyacentes que no son medibles directamente sino que se pueden expresar a través de otras variables observables y que pueden ser evaluadas mediante escalas de Likert o algún otro método de medición directa (ver Bollen (2002), Harman (1960, p. 12), Nunnally (1978, p. 96), Bartlett (1937, p. 97), entre otros).

Los modelos para expresar el comportamiento de variables latentes intentan explicar las propiedades estadísticas de las variables observadas en términos de las variables latentes, por ejemplo, en una evaluación de inteligencia matemática se propone un conjunto de problemas matemáticos (variables observadas) las cuales serán resueltas por los estudiantes, quienes internamente cuentan con un cierto grado de habilidad matemática (variable latente) pero no puede observarse directamente y sólo en base a sus respuestas se podrá estimar y conocer su habilidad. Sin embargo, la aplicación de estos modelos presentan un problema estadístico que consiste en la estimación óptima de los parámetros del modelo y evaluar la bondad de ajuste del modelo para muestrear datos sobre las variables observadas (Everitt, 1984).

Sin embargo, según Loehlin (2004), varios métodos estadísticos multivariados no involucran variables latentes y se centran exclusivamente en combinaciones lineales de variables observadas, por ejemplo, en la regresión

múltiple, se busca una combinación óptimamente ponderada de variables independientes medidas para prever una variable dependiente o criterio observado, o en caso del análisis discriminante, se buscan combinaciones de variables medidas que logren la mejor distinción entre miembros de grupos específicos.

Los modelos de variables latentes más importantes son los de la Teoría Clásica de los Test (en adelante TCT) y la Teoría de Respuesta al Ítem (en adelante TRI) la cual se conoce como un modelo que presenta mejoras a los supuestos débiles de la TCT. La TCT presupone una relación lineal entre la puntuación del test y la puntuación teórica del individuo que rinde el test, la cual es un supuesto fundamental para el desarrollo de la TCT pero a su vez es una desventaja ya que la puntuación total del individuo en el test depende mucho de la calidad de este instrumento. Por ejemplo, si un test que mide el rendimiento académico estudiantil tiene preguntas fáciles entonces es probable que los estudiantes alcancen una puntuación alta, por el contrario, si las preguntas son difíciles entonces los puntajes de los estudiantes serán bajos lo que representa un sesgo en la medición del rendimiento académico. Con el fin de mejorar las limitaciones de la TCT se formularon los modelos de la TRI donde las respuestas a las preguntas dependen de los ítems y también de los individuos.

Según Brzezińska (2016), la TRI es un método estadístico moderno que utiliza variables latentes diseñadas para modelar la interacción entre la habilidad de un individuo y las características del ítem (dificultad, discriminación, etc.) y las respuestas a los ítems o patrón de respuestas se tratan como variables dependientes mientras que la capacidad del individuo y las características de los ítems son las variables independientes.

Los avances en el contexto de los modelos TRI datan desde 1960 cuando Rasch propuso una función creciente de θ que depende de un solo parámetro β;

Birnbaum en el año 1968 propuso el modelo logístico de dos parámetros en el que adicionó a los modelos Rasch la característica de discriminación del ítem. Ambos modelos forman parte de modelos dicotómicos unidimensionales, que consisten en modelos aplicados a ítems de respuesta binaria (Sí/No, Satisfecho/Insatisfecho, De acuerdo/En desacuerdo, entre otros) pero que buscan estimar una sola variable latente por lo que se considera unidimensional. Respecto a los modelos aplicados a ítems politómicos, Bock en el año 1972 planteó el Modelo de Respuesta Nominal que se aplica a ítems no estructurados o categorías nominales con valores A, B, C, D y E por ejemplo; Andersen en 1977 propuso el Modelo de Crédito Parcial cuyo nombre pertenece a Masters en 1982, que se ajusta a categorías ordenadas; Samejima en 1969 propuso el Modelo de Respuesta Graduada que también se aplica a categorías ordenadas. Respecto a los modelos multidimensionales también existe una familia de modelos propuestos que pueden ser estudiados en Ackerman (1994).

Adicionalmente, las familias de modelos TRI se han enfocado en la medición de cuestionarios cuyos ítems son dicotómicos cuyo porcentaje de respuesta en cada categoría es de 50% y 50% (distribución simétrica). En esta línea los modelos que se han utilizado con mayor frecuencia son la regresión logística o regresión *probit*, siempre con enlace simétricos; sin embargo, en muchos campos de aplicación se ha demostrado que no necesariamente estos modelos son los más apropiados para expresar el comportamiento de los datos de las respuestas en los ítems de los cuestionarios.

En los casos prácticos, se ha evidenciado un desbalance en las tasas de respuestas de los ítems, por ejemplo en la medición de la Satisfacción del Clima Organizacional de una Entidad Financiera (en adelante SCOEF), que es objeto de estudio del presente trabajo de investigación. Al realizar un análisis descriptivo de

cada ítem se obtuvo que en la mayoría de las preguntas el porcentaje de respuestas positivas es mayor a la proporción de respuestas negativas, es decir, es más probable que un individuo responda de manera positiva que lo haga negativamente. Otro ejemplo de aplicación se evidencia en el campo de la educación donde Bazan (2005) en su tesis doctoral estudió la familia de modelos asimétricos en la TRI y sustentó el uso de los modelos asimétricos para el caso de aplicación que los estudiantes con un alto nivel socio económico tienden a obtener puntuaciones altas.

Según Dodonov & Dodonova (2010) los modelos asimétricos deben considerarse principalmente como un instrumento adecuado para la estimación de la asimetría de datos que podría alcanzarse mediante la comparación entre las estimaciones de los parámetros obtenidos mediante los modelos asimétrico y simétrico.

Para aquellos casos donde la probabilidad de respuesta positiva difiere significativamente de la probabilidad de respuesta negativa, se han propuesto nuevos modelos como el modelo logístico de exponente positivo (LPE), modelo logístico de exponente positivo recíproco (RLPE) o el modelo de Ogiva Normal Asimétrico. Por tanto es importante el estudio de estos modelos y proponer una metodología de análisis de datos con asimetría.

1.2. Formulación del Problema

En la actualidad, la familia de modelos de la TCT aún es aplicada en diversos estudios, inclusive se aplican otros modelos multivariados que no se enfocan en el modelamiento de variables latentes *per se*. En ese sentido, es importante el uso de los modelos de la TRI porque mejoran algunos supuestos de la TCT y se enfocan en las variables latentes.

Las áreas donde los modelos de la TRI se han enfocado son los test psicométricos y otras investigaciones científicas, pero en estudios relacionados al ámbito empresarial como la medición del CO, calidad de servicios, etc. aún se aplican los modelos de la TCT o en algunos casos sólo se limitan a los métodos descriptivos. Es así que existe una oportunidad de mejora para implementar nuevas metodologías como la TRI para el modelamiento de las variables latentes como en el caso del presente estudio de SCOEF.

La medición del CO a través de la TRI representa una metodología oportuna para el estudio de la variable latente Satisfacción del CO. Sin embargo, los planteamientos clásicos como los modelos de Rasch (1960), los modelos logísticos de Birnbaum (1968), que son los primeros modelos de la familia de la TRI y que actualmente son los más usados en determinados campos de estudio, han demostrado que no son suficientes para explicar el comportamiento de los datos en un escenario real (Bazan, 2005); por ejemplo, en el caso de las preguntas con respuestas dicotómicas estas tienden a tener un comportamiento desbalanceado en la distribución de respuestas (satisfecho/insatisfecho) de cada pregunta de una Encuesta de Clima Organizacional (en adelante ECO).

En la literatura de la TRI, se han formulado otros modelos como el modelo LPE (Samejima, 2000) o el modelo RLPE (Bolfarine y Bazán, 2010) que permiten modelar el efecto de la asimetría en la distribución de respuestas. A pesar de que este tipo de modelos representan una solución a dichos problemas, la formulación de la función de verosimilitud es tan compleja para solucionarlo analíticamente por lo que

se han desarrollado métodos de estimación bayesianos como el método de Monte Carlo Markov Chain (MCMC)[1].

1.2.1. *Problema General*

¿Cuál es la mejora que proporcionan los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera respecto de los modelos con función de enlace simétrico?

1.2.2. *Problemas Específicos*

Problema Específico 1. ¿Cuáles son los escenarios donde los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico presentan mejores resultados a comparación de los modelos logísticos de la TRI con enlace simétrico?.

Problema Específico 2. ¿Existen diferencias en la estimación de los parámetros de la TRI al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera?.

Problema Específico 3. ¿Cuál es la diferencia en el nivel de ajuste al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera?.

Problema Específico 4. ¿Cuál es la diferencia entre los parámetros estimados mediante los enfoques de la TCT y de la TRI en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera?.

---

[1] MCMC se emplea con el propósito de aproximar distribuciones de probabilidad posteriores, mediante la realización de una aproximación numérica. Este método utiliza simulaciones para generar una cadena de muestras que converge hacia la distribución deseada (Matsuura, 2023).

1.3. Justificación de la Investigación

1.3.1. *Justificación Teórica*

La propuesta teórica de los modelos de TRI se ha enfocado al estudio de los modelos logísticos que suponen una distribución homogénea en las respuestas dicotómicas de cada ítem del cuestionario. Sin embargo, gracias al avance computacional, en las últimas décadas se han formulado nuevos modelos que permiten explicar el efecto de la asimetría en la distribución de los datos con el fin de proponer mejores modelos de TRI a los casos prácticos que se dan en la realidad. Por esa razón, es que en la presente tesis se presentan los resultados del estudio detallado de este tipo de modelos y también se analizan los métodos de estimación alternativos para estos modelos.

Adicionalmente, la familia de modelos de la TRI forma parte de los modelos propuestos para el modelamiento de variables latentes continuas. La SCOEF es una variable latente y continua porque:

Latente. La variable SCOEF no se puede medir ni observar directamente como otro tipo de variables como la altura, el peso, etc. Para realizar una medición objetiva se recurre a la realización de una ECO cuyo instrumento es un cuestionario que contiene un conjunto de preguntas, cada una de las cuales representa una variable observable o también conocida como variable manifiesta.

Continua. La variable SCOEF se mide a través de una escala continua donde el individuo que realiza el test puede tomar cualquier valor en un intervalo dado. Dependiendo de la capacidad del individuo para realizar el test va tener una puntuación que represente el grado de SCOEF donde trabaja. Dicha puntuación puede ser diferente de otros individuos que rinden el test, incluso un individuo puede

tener una puntuación intermedia entre uno que está más satisfecho y otro que está menos satisfecho.

1.3.2. *Justificación Práctica*

Los modelos asimétricos deben considerarse principalmente como una alternativa adecuada para la estimación de la asimetría de datos, para aquellos casos donde la probabilidad de respuesta positiva difiere significativamente de la probabilidad de respuesta negativa. Por tanto, es importante el estudio de los modelos probabilísticos de la TRI y proponer una metodología de análisis de datos con asimetría, de tal forma que se obtengan mejores estimaciones y/o resultados en el estudio de la SCOEF.

El estudio del CO es útil para todas las empresas que ven como parte fundamental de su éxito empresarial a sus colaboradores. Incluso, las organizaciones consideran dentro de su plan estratégico la ECO con lo que el área de recursos humanos tiene un rol importante en la organización, porque no sólo se encarga de realizar la encuesta sino también tomar acciones en base a los resultados, con el fin de buscar una mejora continua.

Con la medición del CO se tendrá más claro la percepción de los colaboradores respecto a la empresa. Con este conocimiento se pueden tomar medidas para mejorar los atributos críticos y así la entidad pueda crecer como organización teniendo a sus colaboradores satisfechos. Con una adecuada medición del clima se puede lograr los siguientes:

(a) conocer los factores satisfactorios e insatisfactorios para los colaboradores de una empresa,

(b) identificar las fortalezas y las debilidades de la empresa o áreas,

(c) planificar las acciones para mejorar como organización,

(d) comparar los resultados con los de otras empresas con fines de *Benchmarking* y

(e) comparar el CO en los diferentes departamentos o áreas.

1.4. Objetivos de la Investigación

1.4.1. *Objetivo General*

Determinar la mejora que proporcionan los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera respecto de los modelos con función de enlace simétrico.

1.4.2. *Objetivos Específicos*

Objetivo Específico 1: Determinar mediante un estudio de simulación los escenarios donde los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico presentan mejores resultados a comparación de los modelos logísticos de la TRI con enlace simétrico.

Objetivo Específico 2: Determinar las diferencias en la estimación de los parámetros de la TRI al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.

Objetivo Específico 3: Determinar la diferencia en el nivel de ajuste al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.

Objetivo Específico 4: Determinar la diferencia entre los parámetros estimados mediante los enfoques de la TCT y de la TRI en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.

Capítulo II. Marco Teórico

2.1. Antecedentes

2.1.1. *Antecedentes Internacionales*

Zeigenfuse et al. (2020) realizaron una publicación en la Revista de Psicología Matemática titulada *"An item response theory model of matching test performance"*. El objetivo de su investigación fue desarrollar un marco metodológico para extender los modelos TRI dicotómicos a pruebas de emparejamiento que se caracterizan por tener dos conjuntos de ítems que deben relacionarse entre sí a través de un atributo. En el aspecto metodológico, se debe precisar que estos modelos alternativos para el escenario planteado se sustentan porque no se cumple con la independencia local que es un supuesto característico de los modelos tradicionales de la TRI, como el modelo Rasch, ya que la respuesta del individuo a una pregunta depende de sus respuestas a las demás preguntas; con respecto a los datos se utilizó una evaluación de un curso de psicología en la Universidad de California que se aplicó a 114 estudiantes; luego se aplicó el modelo propuesto y se comparó con el modelo logístico de tres parámetros. Respecto a la conclusión, demostraron que a través de un ejemplo empírico que su propuesta metodológica de pruebas de emparejamiento proporciona una buena descripción del comportamiento en las pruebas de emparejamiento.

Liu et al. (2019) realizaron una publicación en la Revista de la Sociedad Estadística de Korea titulada *"A comparison of Monte Carlo methods for computing marginal likelihoods of item response theory models"*. El objetivo de su investigación fue aplicar los métodos de Monte Carlo a los modelos TRI a través de las probabilidades marginales. En el aspecto metodológico se utilizó el método propuesto para los modelos TRI de un parámetro con el enlace logístico y el modelo

TRI logístico de dos parámetros para un conjunto de datos de examen de inglés; utilizaron el indicador WAIC y el indicador DIC para comparar los modelos. Respecto a la conclusión, el modelo 2PL resultó mejor en los tres criterios de comparación del modelo bayesiano para los datos del examen de inglés.

Díaz (2018) realizó su tesis para obtener el grado de Magister en Ciencias Estadísticas titulada *"Distribuciones asimétricas para el trazo latente en modelos de Teoría de respuesta al ítem con múltiples poblaciones"*. El objetivo de su investigación fue aplicar un modelo de la TRI con distribución normal asimétrica sobre datos provenientes de una prueba académica, considerando que la población tenías múltiples segmentos. En el aspecto metodológico se utilizaron datos recolectados por un laboratorio latinoamericano que evalúa la calidad educativa, donde estudió la habilidad académica relacionados con el lenguaje, matemática y los factores asociados con estudiantes de tercer y cuarto grado; para el análisis, se realizó un estudio de simulación y para su implementación se utilizó Stan. Respecto a la conclusión, se encontró que el algoritmo de simulación se especificó correctamente donde los parámetros de los datos simulados se ajustaron adecuadamente con la estimación de los parámetros al aplicar los modelos asimétricos.

León (2017) realizó su tesis para obtener el grado de Magister en Ciencias Estadísticas titulada *"Modelo TRI Logístico para un Trazo Latente que sigue una Distribución Asimétrica"*. El objetivo de su investigación fue proponer una metodología de estimación para variables latentes con distribución $Gamma(\alpha, \beta)$ considerando que estas variables presentan comportamientos asimétricos. En el aspecto metodológico, la investigación se abordó desde un estudio de simulación de datos y también se aplicó la metodología propuesta en un instrumento de medición para el proceso de admisión a una universidad; por el lado del *software* se utilizó R

con la aplicación del paquete ltm. Respecto a la conclusión, se evidenció un mejor ajuste al considerar modelos asimétricos en la estimación de los parámetros.

Dávila et al. (2015) realizaron una publicación en la Revista de Investigación Educativa titulada *"Un modelo de regresión logística asimétrico que puede explicar la probabilidad de éxito en el rendimiento académico"*. El objetivo de su investigación fue identificar los factores que influyeron en la probabilidad de éxito en un curso de matemáticas empresariales mediante la aplicación de modelos de regresión logística. En el aspecto metodológico, inicialmente se aplicó la regresión logística tradicional y luego la regresión logística asimétrica bayesiana a través del *software* WingBUGS. Respecto a la conclusión, se evidenció la existencia de asimetría en los datos y la aplicación de la regresión logística con enlace asimétrico permitió identificar variables significativas para influir en el rendimiento académico.

Aldana & Valbuena (2013) realizaron una publicación en la Fundación Universitaria Konraf Lorenz de Bogotá titulada *"Relaciones Empíricas Entre los Estimativos de la Teoría Clásica de los Test y la Teoría de Respuesta al Ítem"*. El objetivo de su investigación fue comparar empíricamente entre las estimaciones psicométricas propuestas por la TCT y la TRI. En el aspecto metodológico, se realizó un estudio psicométrico de naturaleza no experimental donde se utilizó un test que evalúa conocimientos de psicología que estaba conformada por 50 preguntas y se evaluó a 373 individuos; luego, se estimaron los parámetros de dificultad y de discriminación mediante ambas teorías, para la TRI se utilizó el modelo Rasch con la máxima verosimilitud marginal mediante el software BILOG MG 3.0. Respecto a la conclusión, a pesar que los modelos TRI presentan una ventaja teórica respecto a la TCT, técnica y metodológicamente no se tuvieron diferencias incluso la TCT podría

ser mejor; por lo que propuso un marco metodológico que integre ambas teorías para analizar distintas poblaciones e instrumentos.

Dodonov & Dodonova (2010) realizaron una publicación en la Revista Procedia Social and Behavioral Sciences titulada *"Asymmetric item characteristic curve in item response theory: model construction and application"*. El objetivo de su investigación fue comparar los modelos simétricos y asimétricos en el contexto de la TRI. En el aspecto metodológico, presentó el modelo logístico de dos parámetros Power en datos obtenidos de una prueba de inteligencia Matrices Progresivas Avanzadas de Raven y la comparó con el modelo logístico de dos parámetros. Respecto a la conclusión, el modelo asimétrico resultó mejor en el modelamiento de los datos, aunque sigue siendo más complicado para el análisis de los ítems a comparación de los modelos simétricos. Sin embargo, en presencia de ítems con curvas características asimétricas la aplicación de los modelos asimétricos ayudaría a evitar más errores en el análisis de pruebas, así como en la construcción de pruebas en las pruebas adaptativas.

Bazán (2005) realizó su tesis para obtener el grado de doctor en la Universidad de Sao Paulo titulada *"Uma familia de modelo de resposta ao ítem normal assimétrica"*. El objetivo de su investigación fue proponer modelos alternativos que se caracterizan por ser mejores en ítems cuyas respuestas son desbalanceadas, en el contexto de la TRI, a comparación de los modelos tradicionales de naturaleza simétrica. En el aspecto metodológico, propuso los modelos con función de enlace probit generalizada asimétrica y también desarrolló la inferencia bayesiana basada en la método MCMC aplicado al campo de la educación, donde se analizó un test educacional para detectar diferencias en el dominio educativo debido al nivel socioeconómico, partiendo de la hipótesis que los

estudiantes con un alto nivel socio-económico tienden a obtener puntuaciones altas, por lo que justifican el uso de una distribución asimétrica. Respecto a la conclusión, demostró que los modelos probit asimétrico generalizados son más flexibles para modelos de respuesta binaria que presentan distribuciones asimétricas y que el modelo TRI-NA es más fácil de implementar utilizando usando la metodología propuesta a comparación del enlace probit asimétrico de Chen et al (1999).

Courville (2004) realizó su tesis para obtener el grado de doctor en la Universidad de Texas A&M titulada *"An empirical comparison of item response theory and classical test theory item/person statistics"*. El objetivo de su investigación fue comparar dos modelos de variables latentes que son la TCT y la TRI respondiendo a dos temas centrales: ¿qué tan comparables son las estadísticas de los ítems e individuos?, ¿cuán invariantes son las estadísticas de los ítems de cada marco de medición en las muestras de los examinados?. En el aspecto metodológico se utilizaron datos de una evaluación académica en las áreas de inglés, matemáticas, lectura y ciencias; las técnicas de comparación fueron calcular la correlación entre las estimaciones que resulten de evaluar cada técnica. Respecto a la conclusión, los dos marcos de medición obtienen estadísticas de ítems e individuos similares. Por otra parte, aunque los defensores de la Teoría de la Respuesta del Ítem han centrado sus argumentos en el uso en la propiedad de la invariancia, las estadísticas de la TCT, para esta muestra, son apenas invariantes.

2.1.2. *Antecedentes Nacionales*

Menacho & Cano (2020) realizaron una publicación en la Revista de Anales Científicos titulada *"Evaluación de pruebas informatizadas aplicando la teoría clásica de los test y la teoría de respuesta al ítem"*. El objetivo de su investigación fue aplicar las teorías de TCT y TRI midiendo las características psicométricas y

estadísticas para el estudio de la confiabilidad y validez del *test*. En el aspecto metodológico se utilizaron datos recolectados de un test que consta de 30 preguntas, que fueron aplicadas a los estudiantes de un curso de estadística, se aplicaron las metodologías de la TCT y la TRI para estimar la dificultad y discriminación. Respecto a la conclusión, cuando se aplicó la TCT se encontraron preguntas muy fáciles pero cuando se estimó la discriminación no se encontraron preguntas para retirarse; por el lado delo modelo TRI con tres parámetros se retiraron cinco ítems y ninguna con el índice de dificultad.

Rivera (2019) presentó su tesis para obtener el grado de magister en estadística en la Pontificia Universidad Católica del Perú titulada *"El Modelo de Respuesta Modelo Secuencial con aplicación a la medición del rendimiento estudiantil"*. El objetivo de su investigación fue presentar y estudiar el modelo de respuesta nominal. En el aspecto metodológico se realizó un estudio de simulación y también un análisis de caso a una sub prueba de Comprensión Lectora del Concurso de Nombramiento que se aplicó a 1,641 docentes. Respecto a la conclusión, en la simulación se obtuvo al modelo bayesiano como una alternativa adecuada para sustituir al método clásico a pesar de la lentitud en el proceso de estimación; en el caso del análisis de caso, la aplicación del modelo bayesiano resultó mejor porque se tuvo mayor información de los ítems entre otros.

Mejía (2018) presentó su tesis para obtener el grado de magister en estadística en la Pontificia Universidad Católica del Perú titulada *"Modelo Secuencial con aplicación a la medición del rendimiento estudiantil"*. El objetivo de su investigación fue presentar un modelo alternativo de la TRI para aplicarlos en datos politómicos ordinales. En el aspecto metodológico el estudio de investigación se abordó desde la simulación de datos donde se encontró un ajuste adecuado de los

parámetros, también se aplicó la metodología propuesta sobre una prueba de escritura del Ministerio de Educación que se aplicó a estudiantes del sexto grado del país; para la aplicación del modelo se utilizaron los métodos MCMC implementados en los *software* R y WinBUGS. Respecto a la conclusión, en la simulación se obtuvo los resultados esperados y en la aplicación se pudo determinar que el *test* tiene *ítems* con niveles de dificultades bajas y que los estudiantes no deberían tener problemas para responder correctamente.

Malaspina (2016) presentó su tesis para obtener el grado de magister en estadística en la Pontificia Universidad Católica del Perú titulada *"Modelos de Teoría de Respuesta al Ítem Multidimensional con una aplicación psicológica"*. El objetivo de la investigación fue estudiar un modelo multidimensional logístico compensatorio de dos parámetros aplicado a ítems dicotómicos. En el aspecto metodológico se utilizó el método MCMC que se implementó en el *software* R y R2WinBUGS y se aplicó a un estudio de simulación y a una aplicación de un test que mide la actitud de los estudiantes respecto a la estadística. Respecto a la conclusión, se obtuvieron diferencias en la comparación de las dos teorías para la discriminación de las preguntas y para la puntuación obtenida de las dos dimensiones, mientras que en el resto no se obtuvieron diferencias significativas.

Tarazona (2013) presentó su tesis para obtener el grado de magister en estadística en la Pontificia Universidad Católica del Perú titulada *"Modelos Alternativos de Respuesta Graduada con Aplicaciones en la Calidad de Servicios"*. El objetivo de su investigación fue estudiar los modelos politómicos de respuesta graduada que forma parte de la familia de modelos de la TRI y su aplicación a una Encuesta de Calidad de Servicios. En el aspecto metodológico se aplicaron los modelos de respuesta graduada logísticos con enlace simétrico y asimétrico en una

evaluación de la satisfacción de clientes en la atención al cliente que se comunicaron con el *Call Center*. Respecto a la conclusión, el modelo de naturaleza asimétrica es mejor y ofrece mejor información respecto al análisis tradicional.

Flores (2012) presentó su tesis para obtener el grado de magister en estadística en la Pontificia Universidad Católica del Perú titulada *"Modelos Testlet logísticos y logísticos de Exponente positivo para pruebas de Comprensión de textos"*. El objetivo de su investigación fue presentar un modelo alternativo con enlace asimétrico para datos binarios en evaluaciones de comprensión de textos, cuya estructura es responder preguntas de un texto determinado, donde no se cumple el supuesto de independencia local. En el aspecto metodológico se desarrollaron estudios de simulación en los que se muestra que cuando se tiene *testlets*, los modelos *Testlet* recuperan mejor los parámetros respecto a los modelos TRI; en la aplicación se utilizaron los datos recolectados de una evaluación académica de estudiantes de segundo grado de primaria. Respecto a la conclusión, los modelos tradicionales de la TRI sobreestimaron el nivel de habilidad de los estudiantes respecto a los modelos propuestos.

Chíncaro (2010) presentó su tesis para obtener el grado de magister en estadística en la Pontificia Universidad Católica del Perú titulada *"Modelo de Rasch dicotómico con aplicación a la Educación"*. El objetivo de su investigación fue modelar la probabilidad de responder correctamente al ítem en función a sus parámetros mediante el uso de los modelos de Rasch aplicado a la educación. En el aspecto metodológico se mostraron diferentes métodos de estimación desde la perspectiva clásica y bayesiana. Respecto a la conclusión, en el estudio de simulación y en el caso de aplicación se determinó que los modelos bayesianos tuvieron mejores niveles de estimación.

2.2. Bases Teóricas de la TRI

2.2.1. *Variables Latentes*

Las variables latentes son construcciones hipotéticas que no pueden ser medidos directamente (MacCallum & Austin, 2000). La variable manifiesta se registra a simple vista, su presencia no requiere más que de la observación o detección directa, mientras que las variables latentes son construcciones teóricas que deben ser inferidas a partir de las variables manifiestas Corral (2001).

Desde el punto de vista de la psicología, el significado de las variables latentes es objeto de controversia entre las posiciones mentalistas y naturalistas. Por tanto, según Corral (2001) las principales consideraciones por cada postura se definen en la Tabla 1.

Tabla 1

Posturas en la Psicología sobre las Variables Latentes

Postura mentalista	Postura naturalista
Naturaleza interna: Las variables latentes representan estados o procesos internos que surgen en el cerebro.	No es externo ni interno: Las variables latentes ocurren en coordenadas espacio-temporales y pueden darse como cualquier otro evento físico o químico.
No observable: son fenómenos privados. Al no existir una forma de acceder directamente al registro de variables latentes el investigador debe encontrar un camino indirecto, observando sus variables manifiestas.	Observabilidad: las variables latentes son observables. Para inferir una latente se observan conjuntos de objetos, eventos y las relaciones que se establecen entre ellos.
Autonomía de lo latente: Las variables latentes y las manifiestas existen de manera sepa- rada y su relación es de causalidad. Por ejemplo, un sujeto dormirá mucho y comerá poco a causa de su depresión (variable latente).	Las variables latentes no son autónomas con respecto a sus indicadores: Al concebir lo la- tente como el producto de una relación entre eventos entonces se considera que la variable latente depende de sus indicadores

2.2.2. *Modelo de Variables Latentes*

Los modelos de variables latentes son modelos estadísticos que permiten analizar y representar la relación existente entre un conjunto de variables observables con un conjunto de variables latentes. En general, la relación existente se sustenta en que las respuestas de las variables observables son el resultado de la posición del

individuo en la escala de las variables latentes. Según Bartholomew et al. (2011), existen diferentes modelos que dependen de los tipos de las variables observables y las variables latentes (ver Tabla 2).

Tabla 2

Clasificación de los Modelos de Variables Latentes

Variable observable	Variable latente	
	Continua	Categórica
Continua	Análisis factorial	Análisis de los perfiles latentes
Categórica	Modelo de las variables latentes	Modelo de las clases latentes

En el presente trabajo se presentan los modelos para analizar variables latentes que corresponden a los modelos de la TCT y la TRI. Respecto a la TCT se propone unos fundamentos generales ya que el trabajo se enfoca en los modelos TRI.

2.2.3. *Teoría Clásica de los Tests*

Según Traub (1997), las demostraciones de Spearman marcaron el inicio de la TCT en el año 1904, pero luego en 1966 es Melvin Novick que le da un sentido más sistemático y prácticamente termina de poner los cimientos de esta teoría.

Los principios fundamentales de la TCT se basan en que la puntuación observada del individuo en un test es el resultado de la suma del valor teórico del individuo (puntaje verdadero) y del error de medición del test (Bartolucci et al., 2015):

$$X_i = T_i + E_i \qquad \text{para} \qquad i = 1, \dots, n$$

donde:

X_i es el puntaje total obtenido por el individuo i en la medición de un test,

T_i es el puntaje verdadero del individuo i que se define como un puntaje teórico que se puede estimar mediante la medición de un test y

E_i es el error aleatorio que se incurre por el uso del test cuyos orígenes son la adivinación, problemas de administración del estudio, etc

Los supuestos de los modelos TCT que, se deducen de la relación lineal entre la puntuación teórica y empírica son:

(1) Los errores pueden afectar a la puntuación empírica de un individuo haciendo que este valor esté por arriba o por debajo de la puntuación teórica, por lo que el efecto promedio de los errores en el uso del test es cero, $E(E_i) = 0$;

(2) Se considera que X es el mejor estimador de T porque $E(X_i) = E(T_i)$.

(3) El error aleatorio alrededor de T sigue una distribución normal.

(4) Los errores aleatorios son incorrelacionados entre sí y no existe correlación entre T y E.

(5) La varianza de la puntuación total del individuo i es

$$V(X_i) = V(T_i) + V(E_i)$$

A partir de los supuestos fundamentales se obtienen otros conceptos importantes en la TCT como el índice de fiabilidad, el error de medición y la dificultad del ítem.

Índice de fiabilidad. La fiabilidad es el concepto más importante relacionado a la calidad de las puntuaciones del test ya que mide el grado de precisión entre la puntuación del test y la variable latente. Representa la consistencia general de una medición. La fiabilidad se considera como la razón entre las varianzas de las puntuaciones verdadera y empírica, fluctúa entre 0 y 1. Cuando la varianza de la puntuación verdadera es relativamente alta respecto a la varianza de la puntuación empírica, entonces la fiabilidad debería ser alta, $R = V(T_i)/V(X_i)$. Existen tres métodos para estimar el índice de fiabilidad: (i) Forma paralela o alterna que requiere

construir dos formas similares de un test con el mismo contenido que luego serán respondidos por el mismo grupo de individuos en un periodo corto de tiempo; donde la correlación entre las puntuaciones observadas de ambos test es considerado como un estimador de la fiabilidad del test; (ii) Test-retest que consiste en administrar el mismo test al mismo grupo de individuos en más de una ocasión; (iii) Análisis interno, coeficiente de consistencia interna, que es una aproximación a nivel del ítem porque considera cada ítem como un test separado, se basa en las correlaciones entre distintos ítems dentro un mismo test donde se mide si los distintos ítems producen resultados similares en el supuesto general, cuya medida más conocida es el Alfa de *Cronbach*.

El indicador Alfa de *Cronbach* es considerado el valor mínimo del índice de fiabilidad teórica. La representación matemática para la estimación del coeficiente Alpha es

$$\alpha = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{k} S_j^2}{S_X^2}\right)$$

Cuanto más se aproxime a 1 mayor es la fiabilidad del test (por lo general se consideran como buenos valores superiores a 0.7 ó 0.8).

Error estándar de medición. Indica la precisión con el cual la puntuación empírica de un individuo se aproxima a su puntuación verdadera. Está expresado en las mismas unidades de la puntuación del test, e indica el nivel de ajuste entre las puntuaciones empíricas y verdaderas. Se calcula como $S_E = S_X\sqrt{1-\alpha}$.

Dificultad del ítem. Corresponde a la proporción de individuos que responden correctamente un ítem.

Correlación Item-Test. La correlación entre la puntuación del ítem y la puntuación total es conocido como el poder de discriminación (McDonald, 1999). Se cuantifica con la correlación biserial puntual:

$$r_{bis} = \frac{M_p - M}{S_X}\sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

donde p es la proporción de individuos con una de las dos modalidades de la variable X, M_p es el promedio en X de los individuos cuya proporción es p, M es el promedio en X de todos los individuos, S_X es la desviación típica en X de todos los individuos.

Todos los coeficientes de correlación item-test varían entre -1 y 1. Los valores cercanos a 1 indican que los individuos que responden correctamente a un ítem tienden a obtener puntuaciones altas en el test general y viceversa. Los valores negativos indican que el ítem está relacionado negativamente con los otros ítems del test, lo cual no suele ser deseable ya que la mayoría de las pruebas tratan de evaluar un solo constructo. Los ítems con correlaciones bajas indican que no correlacionan con el resto de los ítems del test y que el ítem está operando aleatoriamente o todos los estudiantes dieron la misma respuesta.

Una mayor correlación entre el ítem y el test es deseable porque indica que los individuos de la capacidad alta tienden a conseguir el ítem correcto y los candidatos de la capacidad baja tienden a conseguir el ítem incorrecto. Esto significa que el ítem discriminó bien entre los individuos con mayor nivel de habilidad y aquellos con bajo nivel del constructo.

Limitaciones de la TCT. La principal limitación de la TCT es que las puntuaciones dependen de las características del *test* y viceversa, ya que según definición, la puntuación del individuo se determina como el número de preguntas con respuesta correcta, mientras que la dificultad del ítem se determina como el porcentaje de individuos que respondieron correctamente a la pregunta. Otra

limitación es que en la TCT el error de medición es una propiedad del test y se aplica igualitariamente para todos los individuos.

La TRI supera las limitaciones de la TCT considerando determinados supuestos y también aplicando una metodología basada en modelos estadísticos. Para mayor detalle de los fundamentos de la TCT se puede revisar a Steyer (2001). A continuación, se presenta los fundamentos de los modelos de la TRI.

2.2.4. *Teoría de Respuesta al Ítem*

La TRI surgió en los años cincuenta y fue presentado por Lord (1952) con la publicación de su tesis doctoral "*A theory of test scores*", en dicho trabajo presentó los fundamentos teóricos del modelo de ojiva normal, en la década de los 60's tanto Rasch (1960) como Birnbaum (1968) desarrollaron modelos logísticos que permitieron facilitar el proceso de estimación de los parámetros de la TRI.

La TRI es un nuevo enfoque de la psicometría que se basa en el análisis de los ítems que conforman el test, consiguiendo medidas invariantes entre los individuos y los instrumentos. Por ello, se considera que la TRI es una familia de modelos estadísticos donde se supone que la probabilidad de acierto de un individuo a un determinado ítem está definida en función de su nivel de la variable latente y también de las características del ítem (Muñiz, 1997). En ese sentido, también se le considera a la TRI como una distribución de probabilidades para los valores de las variables manifiestas, de tal forma que la probabilidad esté en función de la variable latente y también de las características del ítem.

Según Bond & Fox (2001), la TRI se centra en que la respuesta de la persona a una determinada pregunta está influenciada por las características del individuo (conocido como el nivel de habilidad) y las características del ítem (nivel de

dificultad, nivel de discriminación y nivel de adivinación). A continuación, se definen cado uno de las características.

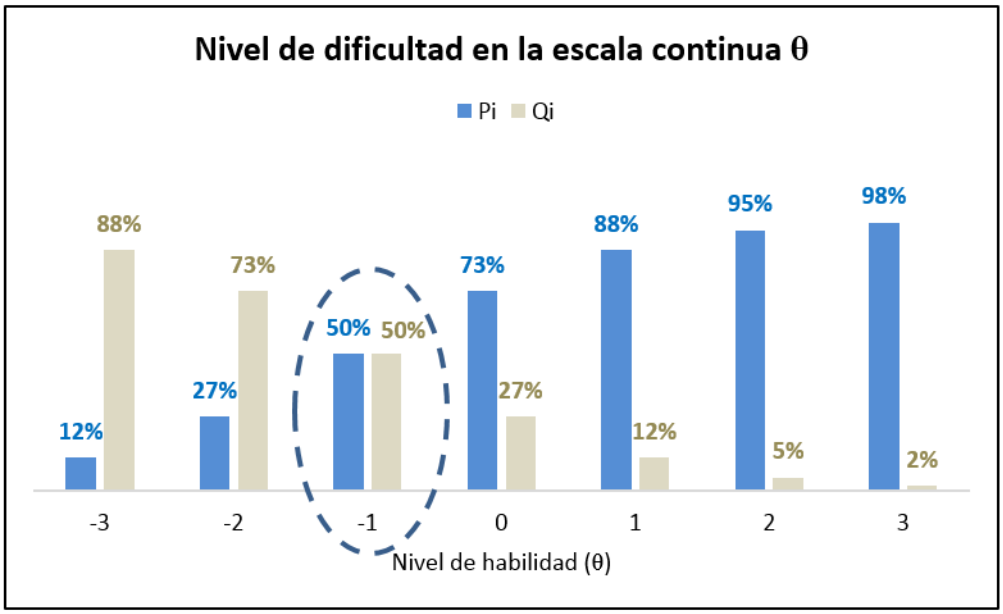
Nivel de habilidad del individuo ($\boldsymbol{\theta}$). Esta propiedad se refiere al individuo y representa la posición del individuo en la escala continua de la variable latente. Es desconocido y se infiere para cada individuo mediante la aplicación de un test. En la práctica, la habilidad del individuo (θ) suele definirse como una distribución normal con valores entre -3 y 3, promedio cero y varianza unitaria, $\theta_i \sim N(0,1)$ tal que $\theta_i \in R$ donde i representa al individuo que rinde el test.

Nivel de dificultad del ítem ($\boldsymbol{\beta}$). Es una característica del ítem que representa la cantidad necesaria del nivel de habilidad (θ) para que un individuo responda el ítem de manera positiva, con una probabilidad de 0.5. Dicho de otro modo, la dificultad es un nivel de la habilidad en el que aproximadamente el 50% de los individuos contesten correctamente. Matemáticamente, para el ítem j, la dificultad β_j se representa como $P(X_{ij} = 1|\theta = \beta_j) = 0.5$. En la TRI, el índice de dificultad (β) tiene la misma métrica que el nivel de habilidad. Esta medida es arbitraria, pero a veces es delimitado de tal manera que la distribución de este parámetro tenga media 0 y desviación igual a 1, $\beta_j \sim N(0,1), \beta_j \in R$ para el ítem j.

Para comprender la relación entre la habilidad y dificultad, en la Figura 1 se muestra las probabilidades de éxito (P_i) y fracaso (Q_i) en grupos de individuos con diferentes niveles de habilidad.

Figura 1

Evaluación del Nivel de Dificultad



En el grupo con habilidad -3 sólo el 12% responde correctamente el ítem, a medida que incrementa el nivel de habilidad el porcentaje de individuos con respuesta positiva tiende a crecer, hasta que en el grupo con habilidad 3 el 98% de los individuos responde positivamente. Para determinar la dificultad del ítem, se tiene que el grupo de personas con habilidad 1 se presenta la misma proporción de individuos que responden correcta e incorrectamente; por tanto, este nivel de habilidad viene a ser el nivel de dificultad para el ítem ($\beta_l = -1$).

Nivel de discriminación del ítem (α). Es una característica del ítem que mide el grado de diferenciación entre individuos que tienen una habilidad inferior y otros con habilidad superior. Según Bazán et al. (2000), la discriminación del ítem es el grado en que el ítem permite ampliar las diferencias entre los individuos con puntajes relativamente altos y los individuos con puntajes relativamente bajos. El parámetro α_j se caracteriza por ser un valor positivo ($\alpha_j > 0$). Su inclusión es particularmente útil cuando se quiere detectar ítems anómalos ($\alpha_j = 0$ ó $\alpha_j < 0$),

estos ítems deben ser eliminados ya que no son efectivos en la medición de la habilidad del individuo.

Nivel de adivinación del ítem (γ). Representa la probabilidad de responder positivamente el ítem a pesar de que se desconoce la verdadera respuesta, es decir, es el valor de $P(\theta)$ cuando θ tiende al valor mínimo ($-\infty$). Se llama así porque un individuo con un θ muy bajo se esperaría que el individuo consigue una respuesta positiva sólo por adivinación.

Luego, de definir cada parámetro se procede a definir la curva característica del ítem que se afecta por los valores dados de cada parámetro.

Curva característica del ítem. Es la función que representa la relación entre la probabilidad de responder correctamente y la habilidad, por lo tanto, es necesario identificar aquella función que ajuste mejor esa relación. Cada ítem tiene una CCI particular que depende de las características del ítem y del nivel de habilidad del individuo.

Formalmente, la CCI se define como $P_j(\theta_i) = P\left(\theta_i, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j\right)$ donde P_j es la probabilidad de responder correctamente un ítem, θ_i es el nivel de habilidad del $i-$ é$simo$ individuo, α_j es la discriminación del $j-$ é$simo$ ítem, β_j es la de dificultad del $j-$ é$simo$ ítem y γ_j es el nivel de adivinación del $j-$ é$simo$ ítem.

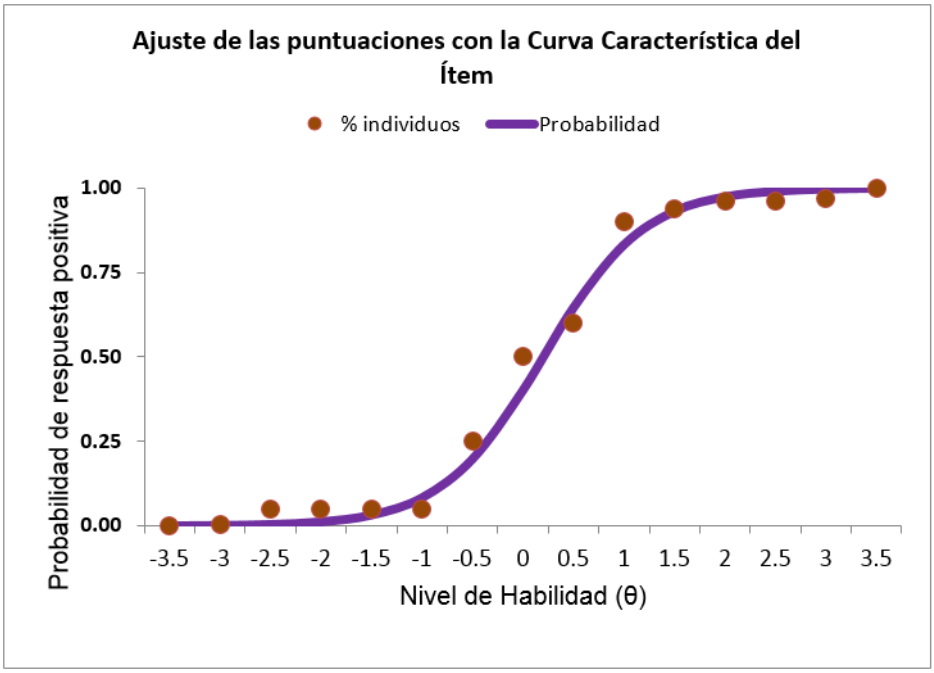
Se propone un ejemplo de una CCI con un nivel de discriminación de 2 y un nivel de dificultad de 0.2 para las características de los ítems y una serie de niveles de habilidad que van desde 3.5 a 3.5. Las probabilidades se estiman mediante la función logística, cuya base teórica será explicada más adelante, entonces se tiene la siguiente formulación matemática:

$$P_j(\theta_i) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha_j(\theta_i - \beta_j)}}$$

En la Figura 2 se observa que la función logística se ajusta al patrón de las probabilidades de respuestas positivas por cada nivel de habilidad.

Figura 2

Aproximación de la Curva Característica del Ítem



A continuación, se presentan unos movimientos de las CCI's cambiando determinados parámetros para tener una mayor comprensión de la relación entre ambos.

En primer lugar, se propone cambiar los niveles de dificultad (β) manteniendo fijo el parámetro de discriminación para observar cómo cambia la CCI. Para el cálculo de las probabilidades se utilizó la misma función logística, sin considerar el efecto del nivel de discriminación ($\alpha = 1$) y los valores definidos para β están dados en la Tabla 3 y en la Figura 3 se muestran las curvas a medida que varía la dificultad y se observa que a mayor dificultad las curvas se desplazan más a la derecha.

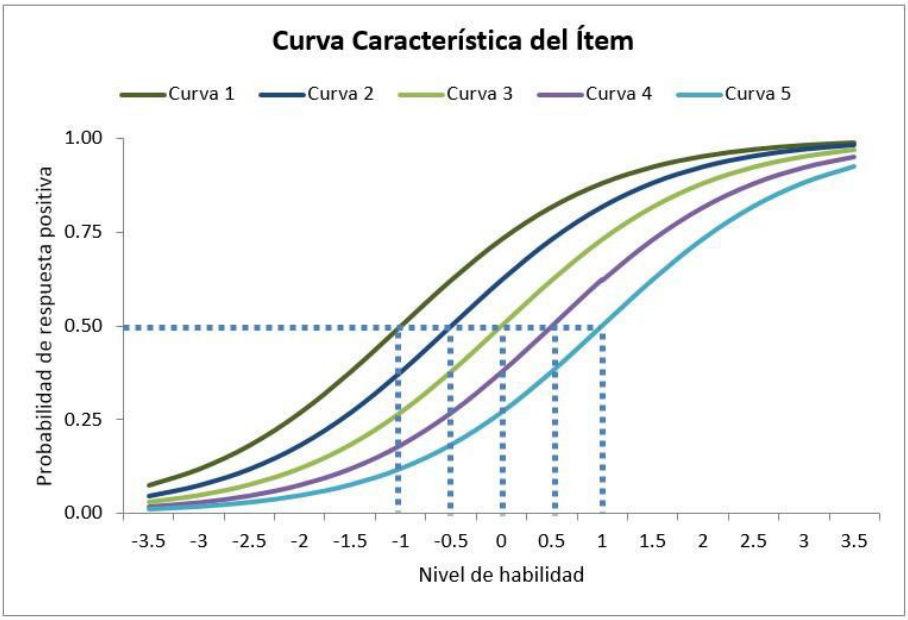
Tabla 3

CCI's por cambio en los niveles de dificultad

Curva 1	Curva 2	Curva 3	Curva 4	Curva 5
-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0

Figura 3

Comparación del Nivel de Dificultad en la CCI



En segundo lugar, se propone cambiar los valores del nivel de discriminación (α) manteniendo fijo el nivel de dificultad. Para el cálculo de las probabilidades se utiliza la función logística sin considerar el efecto del nivel de dificultad ($\beta = 0$) y los valores de α se detallan en la Tabla 4, mientras que en la Figura 4 se tiene que a mayor nivel de discriminación la curva será más inclinada. Los ítems con curvas de mayor pendiente discriminarán mejor.

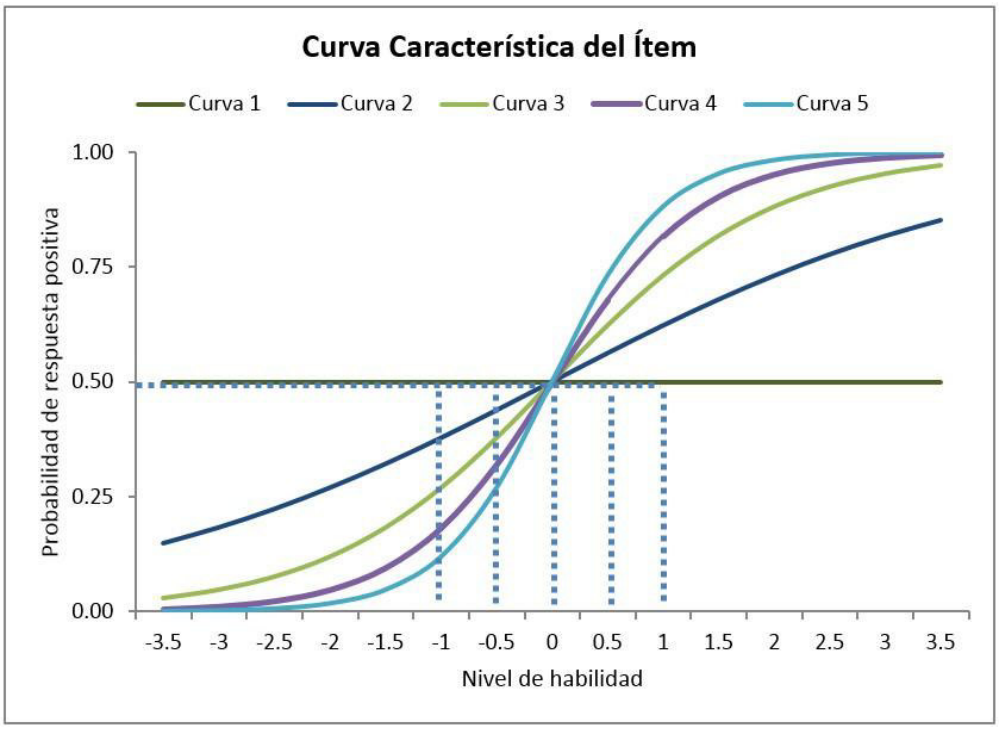
Tabla 4

CCI's por Cambio en los Niveles de Discriminación

Curva 1	Curva 2	Curva 3	Curva 4	Curva 5
0.5	1.0	2.0	3.0	4.0

Figura 4

Comparación del Nivel de Discriminación en la CCI



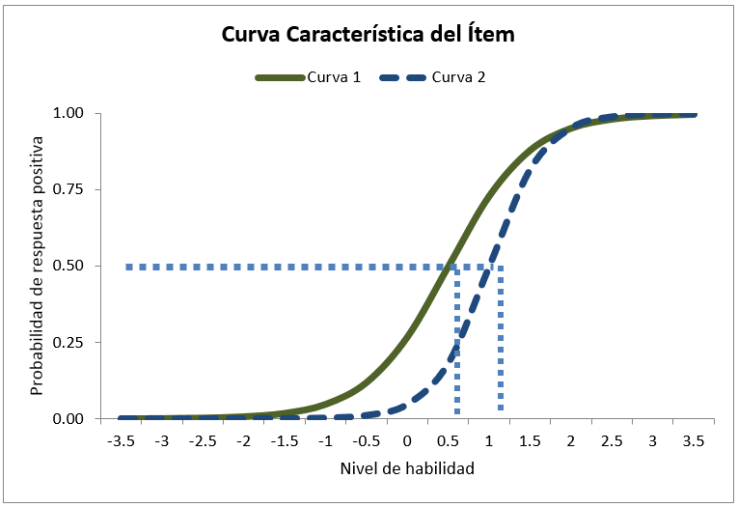
En tercer lugar, en la Figura 5 e observan dos curvas con diferentes parámetros de los ítems para un conjunto de individuos con niveles de habilidad que están entre -3.5 y +3.5 y se estiman con la función logística:

CCI 1 con un nivel de discriminación de valor 2 y un nivel de dificultad de valor 0.5 $P_1(\theta_i) = P(\theta_i, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0)$

CCI 2 con un nivel de discriminación de valor 3 y un nivel de dificultad de valor 1 $P_2(\theta_i) = P(\theta_i, \alpha_2 = 3, \beta_2 = 1, \gamma_2 = 0)$.

Figura 5

Comparación de las Curvas Característica del Ítem



En la Figura 5 se tiene que el ítem dos presenta mayor nivel de dificultad que el ítem uno porque está situado más a la derecha, y su nivel de discriminación también es mayor porque se encuentra menos inclinada y tiende a ser una línea vertical. Finalmente, en la Tabla 5 se presenta un cuadro comparativo entre la TCT y la TRI.

Tabla 5

Comparación de Modelos de Variables Latentes

Teoría Clásica de los Test	Teoría de Respuesta del Ítem
Se plantea un modelo lineal	Se plantea un modelo no lineal
El desarrollo de este planteamiento es al nivel del test.	Se logran estimaciones a nivel del ítem.
Los supuestos son fáciles de cumplir.	Presenta determinados supuestos que son difíciles de cumplir.
No se tiene información acerca del ítem.	Se puede seleccionar ítems de acuerdo a las curvas de información y construir un test.
La estimación de las características de los ítems y del test depende de la muestra en la que se obtienen. Asimismo, la puntuación del individuo depende de los ítems del test.	La propiedad de invarianza resuelve el problema de dependencia entre las estimaciones de la habilidad y de los ítems del test.

2.2.5. *Modelo TRI para Respuestas Dicotómicas*

Sea una matriz de datos X_{nk} que representa la información recolectada mediante la ejecución del test a una muestra de n individuos, donde las filas

representan a los n individuos que rinden el test y las columnas representan a los k ítems del test. Cada elemento X_{ij} de la matriz X_{nk} representa la respuesta que el individuo i asigna al ítem j, donde X_{ij} se caracteriza por ser dicotómico y puede tomar los valores: 1 cuando se responde de manera correcta a la pregunta y 0 cuando se responde de manera incorrecta.

Dado que las respuestas son dicotómicas, entonces se define X_{ij} como una variable aleatoria de *Bernoulli* con probabilidad de éxito P_{ij}.

$$X_{ij}|\theta_i, \beta_j, \alpha_j \sim Bernoulli(P_{ij})$$

Donde θ_i representa la habilidad del individuo i para todo $i = 1, \dots, n$ tal que $\theta_i \in \mathbb{R}$; β_j representa la dificultad del ítem j para todo $j = 1, \dots, k$ tal que $\beta_j \in \mathbb{R}$; α_j representa la discriminación del ítem j para todo $j = 1, \dots, k$ tal que $\alpha_j > 0 \ \in \mathbb{R}$ y P_{ij} es la probabilidad de responder correctamente del individuo i al ítem j que depende de $\theta_i, \beta_j, \alpha_j$ y que sigue una determinada curva característica del item F tal que se tiene lo siguiente:

$$P_{ij} = P(X_{ij}|\theta_i, \beta_j, \alpha_j) = F(Z_{ij})$$

$$Z_{ij} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j) \qquad (1)$$

$$i = 1, \dots, n \ y \ j = 1, \dots k$$

Donde Z_{ij} es un predictor lineal latente en relación a la habilidad del individuo i y los parámetros del ítem j. Con respecto a $F(Z_{ij})$, que representa la Curva Característica del Ítem, se puede estimar haciendo uso de diversos modelos como son los modelos de enlace simétrico[2] y los modelos de enlace asimétrico[3] que

[2] Modelo TRI Probit Normal, Modelo TRI Logístico con un parámetro o Modelo Rasch, Modelo TRI Logístico con dos parámetros o Modelo *Birnbaum,* Modelo TRI Logístico con tres parámetros o Modelo *Birnbaum*.

[3] Modelos logísticos de exponente positivo y modelos logístico de exponente reflexivo

se caracterizar por ser mejores cuando se tiene porcentaje de respuesta desbalanceado.

Los modelos TRI tienen ciertas características que los diferencian de los modelos tradicionales como por ejemplo la sobreparametrización, parámetros incidentales y la identificabilidad. A continuación, se presentan cada una de las características.

Sobreparametrización de los Parámetros. Se tiene que estimar tanto la habilidad para cada individuo y las características de cada ítem, y en la medida que se tenga mayor cantidad de ítems o mayor cantidad de individuos aumenta el número de parámetros a estimar, lo que implica un mayor esfuerzo computacional (Bazán et al. 2010), por ejemplo, para el caso del modelo logístico de dos parámetros se debe estimar $n + 2k$ parámetros.

Presencia de Parámetros Incidentales. "Los parámetros de los ítems son denominados estructurales mientras los parámetros de la variable latente son considerados incidentales debido a que el número de parámetros de la variable latente se incrementa si se incrementa el número de respondientes" (Bazán et al., 2010, pp. 11). Vale precisar que, según Neyman & Scott (1948) "las estimaciones de los parámetros estructurales no necesariamente son consistentes cuando se estiman conjuntamente con los parámetros incidentales".

Identificabilidad. "El parámetro es identificable si diferentes valores del parámetro presentan distintas distribuciones de probabilidad, un modelo es identificado si todos los parámetros son identificables" (Bazán et al., 2010, pp. 12).

Por otro lado, los modelos TRI presentan supuestos que son necesarios que se cumplan para tener una mejor estimación de los parámetros como la unidimensionalidad y la independencia local.

Unidimensionalidad. Los modelos TRI se basan en que la respuesta del individuo depende del nivel de la variable latente. Por eso, una de las primeras cuestiones a resolver es analizar la naturaleza de la variable y determinar el número de componentes que la describen, por lo que, la dimensionalidad de la variable latente se define en función de la cantidad de componentes.

Según Hattie (1985), la unidimensionalidad de un instrumento se dará si las respuestas obtenidas son producidas por un solo factor. Además, un factor dominante implica que la mayor varianza observada en las respuestas es explicada por un rasgo latente (Embretson & Reise, 2013).

Con la unidimensionalidad se controla la variación sistemática de las puntuaciones de los individuos, dado su nivel en una sola variable latente, y las diferencias en las respuestas que puedan darse de un individuo a diferentes preguntas se dará sólo por la variabilidad sistemática de los ítems. El incumplimiento de la suposición de unidimensionalidad puede llevar a una inadecuada estimación de los parámetros. Por tanto, para evidenciar el supuesto existe un conjunto de técnicas que permiten verificar su cumplimiento: (a) análisis factorial para ítems dicotómicos, (b) análisis paralelo, entre otros.

El análisis paralelo de los ítems es una técnica que se basa en la simulación de Monte Carlo para determinar el número de factores. Se genera un conjunto de datos simulados aleatorios además del conjunto de datos real y se calculan los valores propios estimados. Cuando se emplea el método, se considera significativo el número de factores en los que el valor propio en la muestra simulada es mayor que el de los datos reales (Ledesma & Mora, 2007).

Independencia local. La respuesta del individuo a una pregunta de un *test* no depende del resto de las respuestas que el individuo puede dar a otros *ítems* que

conforman el *test*. Además, la independencia local significa que para un determinado individuo (o un grupo individuos con un nivel en la variable latente) la probabilidad de respuestas sobre un conjunto de *ítems* del test es igual a la productoria de las probabilidades de respuestas en cada *ítem*.

Una definición más formal, sea X_{ij} la respuesta del i-ésimo individuo al ítem j ($j = 1, 2, .., k$), y $P(X_{ij}|\theta)$ denota la probabilidad de la respuesta de un individuo elegido aleatoriamente con habilidad θ. La propiedad de la independencia local puede ser establecida matemáticamente de la siguiente forma:

$$P(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}) = P(X_{i1}|\theta)P(X_{i2}|\theta) \dots P(X_{ik}|\theta) = \prod_{j=1}^{k} P\left(X_{ij}|\theta\right)$$

Por ejemplo, si el patrón de respuestas para un individuo en tres ítems es $(1, 1, 0)$, o sea, $X_{i1} = 1, X_{i2} = 1, X_{i3} = 0$; entonces la suposición de la independencia local se refiere a

$$P(X_{i1} = 1, X_{i2} = 1, X_{i3} = 0) = P(X_{i1} = 1|\theta)P(X_{i2} = 1|\theta)P(X_{ik} = 0|\theta)$$

$$= P_1 P_2 Q_3$$

La contrastación empírica del supuesto se tiene en Santisteban (1990), pero, no es necesario porque una adecuada especificación de la unidimensionalidad impacta directamente en la independencia local de los ítems, pero no al contrario.

Monotonicidad. Se da cuando se evidencia un mayor valor de la distribución estocástica X_j en la medida que también se incremente el nivel de habilidad θ. Matemáticamente, se puede entender como $X_j|\theta_1$ es estocásticamente más grande que $X_j|\theta_2$ si $\theta_1 > \theta_2$. En el caso de que X_j sea una variable dicotómica, la monotonicidad estará relacionada con la CCI.

Función de Información del Ítem (FII). Otro concepto importante dentro de la TRI es la función de información general, la FII es importante en el desarrollo del

test porque evalúa la precisión del ítem en la estimación de un determinado nivel de habilidad. Cuanto mayor sea la información que proporciona una pregunta en un determinado nivel de habilidad, mejor es el grado de precisión con que se estima ese nivel de habilidad. La función de información del j-ésimo ítem se denota por $I_j(\theta)$ se expresa así:

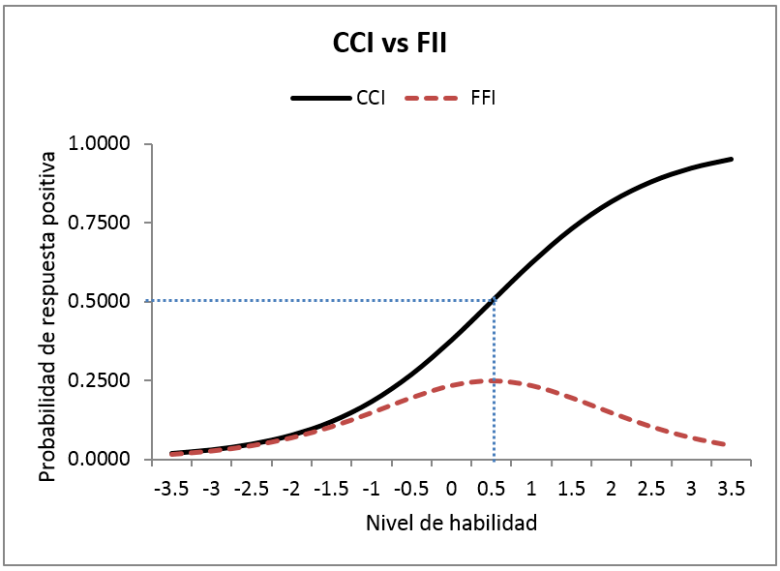
$$I_j(\theta) = \frac{\left[P_j'(\theta)\right]^2}{P_j(\theta)\left[1 - P_j(\theta)\right]} \quad (2)$$

Donde $P_j(\theta)$ es la probabilidad de respuesta positiva del ítem j y $P_j'(\theta)$ es la derivada de $P_j(\theta)$ con respecto a θ.

En la Figura 6 se grafica la FFI cuya CCI se ajusta mediante el modelo rasch. En el ejemplo se observa que como máximo se alcanza un valor de 0.25 en la medida que el nivel de dificultad se aproxime al nivel de habilidad.

Figura 6

Función de Información del Ítem



Función de Información del Test (FIT). Se considera como la sumatoria de las funciones de información de los k ítems que contribuyen de manera independiente. Si la cantidad de información es grande, las estimaciones de los

niveles de habilidad de cada individuo serán razonablemente cerca a los valores reales. Si la cantidad de información es pequeña, las estimaciones serán ampliamente dispersas sobre la verdadera capacidad. Birnbaum (1968) denotó la FIT como:

$$I(\theta) = \sum_{j=1}^{k} I_j(\theta)$$

Dado que la función de información indica la precisión de la estimación de los parámetros, en consecuencia, para un nivel de habilidad (θ) se considera un error en la estimación. El error estándar de medición (SE) se formula como la inversa de $I(\theta)$ que, indica la precisión de la estimación de $I(\theta)$; además, el SE depende de los siguientes factores como son: (a) el número de ítems (el incremento de la cantidad de ítems implica la disminución del SE), (b) la capacidad discriminativa de los ítems (el incremento α implica la disminución del SE), (c) la diferencia entre β y θ (si la diferencia es próxima a cero entonces menor es el SE). El SE tiene la siguiente fórmula:

$$SE(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{I(\theta)}}$$

Adicionalmente, el SE permite calcular el intervalo de confianza con una probabilidad determinada para el nivel de habilidad del individuo (θ). O sea, si a la θ estimada de un individuo se le adiciona y resta el valor $1.96\ SE$, se obtiene los valores extremos del intervalo considerando un nivel de confianza del 95%.

2.2.6. *Modelo Rasch*

Definición. El modelo Rasch (Rasch, 1960) es uno de los modelos más utilizados de la TRI considerando que la probabilidad de responder correctamente se representa mediante la función *logit* y que depende del nivel de habilidad del individuo y del nivel de dificultad del ítem. La probabilidad está dada por:

$$P(X_{ij} = 1|\theta_i, \beta_j) = \frac{exp(\theta_i - \beta_j)}{1 + exp(\theta_i - \beta_j)}$$

Función de Verosimilitud. Considerando la independencia local de los ítems se define la función de verosimilitud para el individuo i y definiendo que $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$:

$$L(X_i|\theta_i, \beta) = \prod_{j=1}^{k} \left[\frac{exp(\theta_i - \beta_j)}{1 + exp(\theta_i - \beta_j)}\right]^{X_{ij}} \left[\frac{1}{1 + exp(\theta_i - \beta_j)}\right]^{1-X_{ij}}$$

La función se puede simplicar a lo siguiente:

$$L(X_i|\theta_i, \beta) = \frac{exp(\theta_i \sum_{j=1}^{k} X_{ij} - \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij})}{\prod_{j=1}^{k}[1 + exp(\theta_i - \beta_j)]}$$

Luego, dado que se consideran n individuos que rinden el test, entonces la función de verosimilitud para todos los individuos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ es:

$$L(X|\theta, \beta) = \prod_{i=1}^{n} L(X_i|\theta_i, \beta)$$

$$L(X|\theta, \beta) = \frac{exp[\sum_{i=1}^{n} \theta_i \sum_{j=1}^{k} X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}]}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k}[1 + exp(\theta_i - \beta_j)]}$$

Obteniendo el logaritmo natural de la función de verosimilitud:

$$l(X_i|\theta_i, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \sum_{j=1}^{k} X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} ln[1 + exp(\theta_i - \beta_j)]$$

Función de Información. Se define en base a la función de información de Fischer de θ de un ítem j que se denota por $I_j(\theta)$, cuya representación matemática es como sigue:

$$I_j(\theta) = E\left[\frac{\partial ln\left(P_j(X, \theta)\right)}{\partial \theta}\right]^2 = E\left[-\frac{\partial^2 ln\left(P_j(X, \theta)\right)}{\partial \theta^2}\right]$$

$$ln\left(P_j(X, \theta)\right) = ln\left[\frac{exp[X(\theta - \beta_j)]}{1 + exp(\theta - \beta_j)}\right] = X(\theta - \beta_j) - ln[1 + exp(\theta - \beta_j)]$$

$$\frac{\partial ln\left(P_j(X,\theta)\right)}{\partial \theta} = X - \frac{exp(\theta - \beta_j)}{1 + exp(\theta - \beta_j)}$$

$$I_j(\theta) = E\left[-\frac{\partial^2 ln\left(P_j(X,\theta)\right)}{\partial \theta^2}\right] = \frac{exp(\theta - \beta_j)}{\left[1 + exp(\theta - \beta_j)\right]^2}$$

De la función anterior se puede desglosar la función como $I_j(\theta) = P_j(X,\theta)\left[1 - P_j(X,\theta)\right]$. La FFI $I(\theta)$ se define como $\sum_{j=1}^{k} I_j(\theta)$

$$I(\theta) = \sum_{j=1}^{k} \frac{exp(\theta - \beta_j)}{\left[1 + exp(\theta - \beta_j)\right]^2}$$

2.2.7. *Modelo Logístico de Dos Parámetros de la TRI*

Definición. Fue propuesto por Birnbaum (1968), que a comparación del modelo *Rasch* se considera un parámetro adicional para el ítem *j* que es el parámetro de discriminación, donde la probabilidad de responder correctamente se representa mediante la función logit y que depende de la desvianza $Z_{ij} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j)$. La probabilidad está dada por:

$$P(X_{ij} = 1|\theta_i, \beta_j, \alpha_j) = \frac{exp\left[\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right]}{1 + exp\left[\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right]}$$

Función de verosimilitud. Análogamente al Modelo Rasch**,** considerando la independencia local se calcula la función de verosimilitud del individuo i y considerando que $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$:

$$L(X_i|\theta_i, \beta, \alpha) = \prod_{j=1}^{k}\left[\frac{exp\left[\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right]}{1 + exp\left[\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right]}\right]^{X_{ij}}\left[\frac{1}{1 + exp\left[\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right]}\right]^{1-X_{ij}}$$

La función se puede simplicar a lo siguiente:

$$L(X_i|\theta_i, \beta) = \frac{exp\left(\theta_i \sum_{j=1}^{k} \alpha_j X_{ij} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \beta_j X_{ij}\right)}{\prod_{j=1}^{k}\left[1 + exp\left[\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right]\right]}$$

Luego, dado que se consideran n individuos que rinden el test, entonces la función de verosimilitud para todos los individuos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ es:

$$L(X|\theta,\beta) = \frac{exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i \sum_{j=1}^{k}\alpha_j X_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\beta_j X_{ij}\right]}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\left[1 + exp\left[\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right]\right]}$$

Obteniendo el logaritmo natural de la función de verosimilitud:

$$l(X_i|\theta_i,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{j=1}^{k}\alpha_j X_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\beta_j X_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} ln\left[1 + exp\left[\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right]\right]$$

Función de información. Se define en base a la función de información de Fischer de θ de un ítem j que se denota por $I_j(\theta)$, cuya representación matemática es como sigue:

$$I_j(\theta) = E\left[\frac{\partial ln\left(P_j(X,\theta)\right)}{\partial\theta}\right]^2 = E\left[-\frac{\partial^2 ln\left(P_j(X,\theta)\right)}{\partial\theta^2}\right]$$

$$ln\left(P_j(X,\theta)\right) = ln\left[\frac{exp\left[X(\theta-\beta_j)\right]}{1+exp(\theta-\beta_j)}\right] = X(\theta-\beta_j) - ln\left[1+exp(\theta-\beta_j)\right]$$

$$\frac{\partial ln\left(P_j(X,\theta)\right)}{\partial\theta} = X - \frac{exp(\theta-\beta_j)}{1+exp(\theta-\beta_j)}$$

$$I_j(\theta) = E\left[-\frac{\partial^2 ln\left(P_j(X,\theta)\right)}{\partial\theta^2}\right] = \frac{exp(\theta-\beta_j)}{\left[1+exp(\theta-\beta_j)\right]^2}$$

De la función anterior se puede desglosar la función como $I_j(\theta) = P_j(X,\theta)\left[1 - P_j(X,\theta)\right]$. La FIT $I(\theta)$ se define como $\sum_{j=1}^{k} I_j(\theta)$

$$I(\theta) = \sum_{j=1}^{k}\frac{exp(\theta-\beta_j)}{\left[1+exp(\theta-\beta_j)\right]^2}$$

2.2.8. *Modelo Logístico de Exponente Positivo de la TRI*

Definición. Fue propuesto por Samejima (2000) donde analizó si las curvas características de los ítems tradicionales con puntos simétricos son justificadas al

descubrir la relación inconsistente entre las dificultades de los ítems y el orden de las estimaciones de habilidad de máxima verosimilitud. Samejima (2000) propuso una familia de modelos, denominada familia de exponentes positivos logísticos, que proporciona curvas características asimétricas de los ítems.

Análogo a la ecuación (1) se agrega un parámetro adicional del *ítem* considerado como parámetro de penalidad y que representa la asimetría de la CCI. En ese sentido el modelo se define así

$$X_{ij}|\theta_i, \beta_j, \alpha_j, d_j \sim Bernoulli(p_{ij})$$

$$P_{ij} = P(X_{ij} = 1|\theta_i, \beta_j, \alpha_j, d_j) = [F(Z_{ij})]^{d_j}$$

$$F(Z_{ij}) = \frac{exp[Z_{ij}]}{1 + exp[Z_{ij}]}$$

$$Z_{ij} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j)$$

$$i = 1, \dots, n \; y \; j = 1, \dots k$$

Función de Verosimilitud. Análogamente al modelo Rasch y considerando el supuesto de independencia local, se tiene que la función de verosimilitud del individuo i y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ y $d = (d_1, \dots, d_k)$:

$$L(X_i|\theta_i, \beta, \alpha, d) = \prod_{j=1}^{k} \left[[F(Z_{ij})]^{d_j} \right]^{X_{ij}} \left[1 - [F(Z_{ij})]^{d_j} \right]^{1-X_{ij}}$$

La función se puede simplificar a lo siguiente:

$$L(X_i|\theta_i, \beta, \alpha, d) = \prod_{j=1}^{k} [F(Z_{ij})]^{X_{ij}d_j} \left[1 - [F(Z_{ij})]^{d_j} \right]^{1-X_{ij}}$$

Luego, dado que se consideran n individuos que rinden el test, entonces la función de verosimilitud para todos los individuos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ es:

$$L(X|\theta, \beta, \alpha, d) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} [F(Z_{ij})]^{X_{ij}d_j} \left[1 - [F(Z_{ij})]^{d_j} \right]^{1-X_{ij}}$$

Obteniendo el logaritmo natural de la función de verosimilitud:

$$l(X_i|\theta_i,\beta,\alpha,d)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}X_{ij}d_jLn\left[F(Z_{ij})\right]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(1-X_{ij})Ln\left[1-\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j}\right]$$

Función de información. Para su definición se utiliza la ecuación (2), para ello se ha calculado la derivada de la probabilidad de responder correctamente $P_j'(\theta)$.

$$P_j'(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j}=d_j\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j-1}\frac{\partial}{\partial\theta}F(Z_{ij})$$

$$P_j'(\theta)=\alpha_j d_j\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j}\left[1-F(Z_{ij})\right]$$

$$I_j(\theta)=\frac{\left[\alpha_j d_j\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j}\left[1-F(Z_{ij})\right]\right]^2}{\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j}\left[1-\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j}\right]}$$

$$I_j(\theta)=\left(\alpha_j d_j\right)^2\frac{\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j}\left[1-F(Z_{ij})\right]^2}{\left[1-\left[F(Z_{ij})\right]^{d_j}\right]}$$

2.2.9. *Modelo Logístico de Exponente Positivo Recíproco de la TRI*

Definición. Fue propuesto por Bolfarine y Bazán (2010) y se considera como la reflexión del modelo LPE. Debido a que RLPE es un reflejo de LPE, se espera el principio de mayor crédito al resolver un ítem más fácil cuando el ítem es complejo, en este caso cuando $0 < d < 1$, y se penaliza el fracaso por resolver un ítem de mayor dificultad o cuando un ítem es menos complejo ($d > 1$). En el modelo RLPE, d se le puede llamar parámetro de desaceleración porque ahora tiene un comportamiento opuesto al LPE. Es decir, para valores más altos de d, tenemos un punto de cambio más a la izquierda. El modelo RLPE se define así

$$X_{ij}|\theta_i,\beta_j,\alpha_j,d_j\sim Bernoulli(p_{ij})$$

$$P_{ij}=P\left(X_{ij}=1\middle|\theta_i,\beta_j,\alpha_j,d_j\right)=1-\left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}$$

$$F(Z_{ij})=\frac{exp[Z_{ij}]}{1+exp[Z_{ij}]}$$

$$Z_{ij} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j)$$

$$i = 1, \dots, n \; y \; j = 1, \dots k$$

Función de Verosimilitud. Análogamente al modelo Rasch y considerando el supuesto de independencia local, se tiene que la función de verosimilitud del individuo i y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ y $d = (d_1, \dots, d_k)$:

$$L(X_i|\theta_i, \beta, \alpha, d) = \prod_{j=1}^{k} \left[1 - \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\right]^{X_{ij}} \left[1 - 1 + \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\right]^{1-X_{ij}}$$

La función se puede simplicar a lo siguiente:

$$L(X_i|\theta_i, \beta, \alpha, d) = \prod_{j=1}^{k} \left[1 - \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\right]^{X_{ij}} \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j(1-X_{ij})}$$

Luego, dado que se consideran n individuos que rinden el test, entonces la función de verosimilitud para todos los individuos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ es:

$$L(X|\theta, \beta, \alpha, d) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \left[1 - \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\right]^{X_{ij}} \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j(1-X_{ij})}$$

Obteniendo el logaritmo natural de la función de verosimilitud:

$$l(X_i|\theta_i, \beta, \alpha, d) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} X_{ij} Ln\left[1 - F(-Z_{ij})^{d_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} d_j(1 - X_{ij}) Ln\left[F(-Z_{ij})\right]$$

Función de información. Para su definición se utiliza la ecuación (2), para ello se ha calculado la derivada de la probabilidad de responder correctamente $P_j'(\theta)$.

$$P_j'(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{1 - \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\right\} = -d_j\left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j - 1} \frac{\partial F(-Z_{ij})}{\partial \theta}$$

$$P_j'(\theta) = \alpha_j d_j\left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\left[1 - F(-Z_{ij})\right]$$

$$I_j(\theta) = \frac{\left[\alpha_j d_j\left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\left[1 - F(-Z_{ij})\right]\right]^2}{\left\{1 - \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\right\}\left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}}$$

$$I_j(\theta) = (\alpha_j d_j)^2 \frac{\left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\left[1 - F(-Z_{ij})\right]^2}{\left[1 - \left[F(-Z_{ij})\right]^{d_j}\right]}$$

2.2.10. *Estimación Máxima Verosimilitud de los Parámetros TRI*

Estimación de Máxima Verosimilitud Conjunta (JMLE). Fue propuesto por Birnbaum (1968) donde se aplica el supuesto de independencia local para la estimación. Inicialmente, se estiman los parámetros de los ítems asumiendo que la habilidad es conocida, dado que normalmente se tiene menor cantidad de ítems que individuos; luego, considerando la independencia entre individuos y que los parámetros de los ítems ya se conocen, se estima el nivel de habilidad de los individuos (ver Apéndice D).

La estimación se da mediante un proceso iterativo con el método de *Newton-Raphson*, pero, sólo para el modelo *Rasch* se ha obtenido parámetros consistentes, debido a que la habilidad del individuo y los parámetros de los ítems se estiman simultáneamente (León, 2017).

Según De Ayala (2013), existen unas implicaciones que deben considerarse para aplicar el método JMLE: (a) En primer lugar, está el problema estadístico de estimar simultáneamente los parámetros del ítem y los parámetros de los individuos, porque para estimar mejor los parámetros de los ítems se debe aumentar el tamaño de la muestra, sin embargo, dicho aumento conduce al incremento de los parámetros de individuos a estimar, por lo que las estimaciones pueden ser sesgadas. (b) En segundo lugar, hay una cuestión de eficiencia debido a que las estimaciones de los parámetros del ítem y de los individuos son conjuntas, si se encuentra que uno o más ítems no muestran un ajuste de los datos del modelo y se procede a eliminar los ítems, entonces el instrumento debe ser recalibrado. (c) En tercer lugar, separar la estimación del parámetro de los individuos de la estimación de los parámetros del

ítem mejora potencialmente la precisión teórica de las estimaciones para algunos instrumentos; porque, para instrumentos con menor cantidad de ítems se tienen estimaciones de la habilidad de los individuos sesgadas y que luego resultan en parámetros de ítems mal estimadas. El siguiente método MMLE busca resolver estas inconsistencias del método JMLE.

Estimación de Máxima Verosimilitud Marginal (MMLE). Fue propuesto por Bock & Lieberman (1970). El método produce estimadores consistentes en el cual los parámetros θ fueron asumidos independientes e idénticamente distribuidos, pero presentan inconvenientes a nivel computacional en el caso de *test* con una mayor cantidad de *ítems*. La idea básica fue estimar los parámetros estructurales del ítem por el método de máxima verosimilitud en la distribución marginal obtenida al integrar sobre la distribución de los parámetros incidentales (θ).

La estimación marginal de máxima verosimilitud estima sólo los parámetros de los ítems, luego, se procede a estimar los parámetros del individuo utilizando el método anterior o un enfoque bayesiano (De Ayala, 2013).

Desde la perspectiva de análisis de varianza, Bock & Lieberman (1970) emplearon un modelo de efectos mixtos donde los parámetros de los ítems son efectos fijos y los parámetros de los individuos son efectos aleatorios. Los datos observados empleados consisten en el patrón de respuestas correctas e incorrectas de un individuo para los k ítems del test; debido a que hay 2^k posibles patrones de respuesta, el enfoque de Bock y Lieberman es práctico sólo para unos pocos ítems ($n < 12$). A pesar de esta limitación práctica, este enfoque es muy importante desde un punto de vista teórico, ya que fue el principio conceptualización de lo que ahora se conoce como estimación de máxima verosimilitud marginal.

Para llegar a las ecuaciones MMLE se inicia con la probabilidad del vector de respuesta X_j:

$$P(X_j|\theta, \alpha_j, \beta_j) = \prod_{j=1}^{k} P_j{}^{X_j}(1 - P_j)^{1-X_j}$$

La probabilidad marginal de X_j se define como

$$P(X_j) = \int P(X_j|\theta, \alpha_j, \beta_j)g(\theta|\epsilon)d\theta$$

Donde, $g(\theta|\epsilon)$ representa la distribución continua de la población de individuos considerando una distribución normal estándar y ϵ es un vector que contiene parámetros de escala de ubicación y población que normalmente son 0 y 1, respectivamente.

En MMLE se multiplica la probabilidad de los datos observados por la distribución de la población para eliminar los parámetros de localización de los individuos. Posteriormente, se obtienen MLE de los parámetros del ítem maximizando la función de verosimilitud marginal resultante.

Aplicar los puntos de cuadratura y los pesos a la ecuación de probabilidad marginal de X_j simplifica el cálculo de la probabilidad a una simple suma ponderada de las probabilidades condicionales

$$P(X_j)^* \approx \sum_{r=1}^{R} P(X_j|X_r, \alpha_j, \beta_j)A(X_r)$$

Donde la ponderación se logra usando los pesos de cuadratura, la suma es a través de los puntos de cuadratura R y las probabilidades se calculan usando los puntos de cuadratura (X_r) en lugar de θ. La cantidad $P(X_j)^*$ es la probabilidad incondicional de que una persona seleccionada al azar de la población proporcione el vector de respuesta X_j. La implementación de la aproximación de cuadratura

gaussiana da como resultado que θ y la integral se reemplace por los puntos de cuadratura y una suma, respectivamente.

Para aplicar las ideas anteriores a toda la matriz de datos $n\ x\ k$, comenzamos con la verosimilitud logarítmica de la función de verosimilitud marginal:

$$Ln\ L = \sum_{i=1}^{n} Ln\ p(X_j)$$

Por sustitución y simplificación obtenemos la ecuación de verosimilitud marginal a resolver para estimar la ubicación de un ítem en base a patrones de respuesta individuales:

$$\frac{\partial}{\partial \delta_j} Ln\ L = -\sum_{i=1}^{n} \int \{[X_{ij} - P_j(\theta_i)][P_j(\theta_i|X_i, \alpha_j, \beta_j, \epsilon)]\}\, d\theta = 0$$

Donde $P_j(\theta_i|X_i, \alpha_j, \beta_j, \epsilon)$ está dado por:

$$P_j(\theta_i|X_i, \alpha_j, \beta_j, \epsilon) = \frac{P(X_i|\theta_i, \alpha_j, \beta_j)g(\theta_i|\epsilon)}{P(X_i)}$$

Suprimimos el rango de integración de – ∞ a ∞ por conveniencia. El término $P(X_i|\theta_i, \alpha_j, \beta_j)$ es la función de verosimilitud y $P(X_i)$ está dada por la ecuación de probabilidad marginal. Conceptualmente, la ecuación $P_j(\theta_i|X_i, \alpha_j, \beta_j, \epsilon)$ tiene el efecto de distribuir la información proporcionada por el vector de respuesta a través de la métrica θ en proporción directa a la densidad de distribución de la población.

$$\frac{\partial}{\partial \delta_j} Ln\ L = -\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{n} [X_{ij} - P_j(X_r)][P_j(X_r|X_i, \alpha_j, \beta_j, \epsilon)] d\theta = 0$$

$$P_j(X_r|X_i, \alpha_j, \beta_j, \epsilon) = \frac{L(X_r)A(X_r)}{\sum_{s=1}^{R} L(X_s)A(X_s)}$$

Donde $L(X_r) = \prod_{i=1}^{n} P_j(X_r)^{X_{ij}}[1 - P_j(X_r)]^{1-X_{ij}}$ es la aproximación de la función de verosimilitud usando la aproximación de cuadratura.

$$\frac{\partial}{\partial \delta_j} Ln\, L = -\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{n}\left[{X_{ij}}^{*} P_j\left(X_r|X_i,\alpha_j,\beta_j,\epsilon\right) - P_j(X_r)P_j\left(X_r|X_i,\alpha_j,\beta_j,\epsilon\right)\right]d\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta_j} Ln\, L = -\sum_{r=1}^{R}\left[\sum_{i=1}^{n}{X_{ij}}^{*} P_j\left(X_r|X_i,\alpha_j,\beta_j,\epsilon\right) - P_j(X_r)\sum_{i=1}^{n}P_j\left(X_r|X_i,\alpha_j,\beta_j,\epsilon\right)\right]d\theta$$

$$= 0$$

$$\bar{c}_{rj} = \sum_{i=1}^{n}{X_{ij}}^{*} P_j\left(X_r|X_i,\alpha_j,\beta_j,\epsilon\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_{ij}L(X_r)A(X_r)}{\sum_{s=1}^{R}L(X_s)A(X_s)}$$

$$\bar{n}_{rj} = \sum_{i=1}^{n}P_j\left(X_r|X_i,\alpha_j,\beta_j,\epsilon\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{L(X_r)A(X_r)}{\sum_{s=1}^{R}L(X_s)A(X_s)}$$

Donde $\bar{c}_{rj}$ es el número esperado de respuestas correctas al ítem j y $\bar{n}_{rj}$ es el número esperado de individuos en cada punto cuadratura X_r

Por lo tanto, la ecuación de probabilidad marginal que debe resolverse para estimar la ubicación del ítem j es

$$-\sum_{r=1}^{R}\left[\bar{c}_{rj} - \bar{n}_{rj}P_j(X_r)\right] = 0$$

Donde $P_j(X_r)$ viene desde el modelo usando X_r en lugar de θ_i. La diferencia en la ecuación anterior tiene la forma de una puntuación de elemento "observada" esperada menos una corrección "predicha" esperada. El valor que minimiza la suma de estas diferencias entre los puntos de cuadratura R es la estimación de la ubicación del elemento, δ.

Para mayor detalle del proceso de estimación se puede revisar en De Ayala (2013).

2.2.11. *Estimación Bayesiana de los Parámetros TRI*

Los procedimientos fueron desarrollados por Swaminathan & Gifford (1985). Inicialmente, se definen las distribuciones a priori para los parámetros, las cuales se

multiplican por la función de probabilidad, que se basa en la CCI y las respuestas reales de los ítems; el resultado es una distribución a posteriori de los parámetros de interés.

La función de verosimilitud de los parámetros θ, α, β están dados por

$$L(U|\theta,\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}}$$

La información relevante relativa a los parámetros de interés θ, α y β está contenida en la distribución posterior de estos parámetros. Es bien sabido que la densidad posterior conjunta de θ, α y β dada la observación U se puede expresar como

$$p(\theta,\alpha,\beta|U) \propto L(U|\theta,\alpha,\beta)p(\theta,\alpha,\beta)$$

En el modelo jerárquico se supone que los parámetros a priori θ, α, β son independientes,

$$p(\theta,\alpha,\beta) = p(\theta)p(\alpha)p(\beta)$$

La información sobre los parámetros de habilidad θ_i es intercambiable y tienen una distribución normal independiente e idéntica. Lord & Novick (1968) propusieron que:

$$\theta_i|\mu_\theta,\phi_\theta \sim N(\mu_\theta,\phi_\theta)$$

La especificación de la información a priori del parámetro de dificultad β_j es intercambiable así como θ_i:

$$\beta_j|\mu_\beta,\phi_\beta \sim N\left(\mu_\beta,\phi_\beta\right)$$

Donde μ_β y ϕ_β son independientes, μ_β es uniforme y ϕ_β tiene una distribución chi cuadrada inversa.

$$p\left(\mu_\beta,\phi_\beta\right)d\mu_\beta\, d\phi_\beta \propto \beta^{-(v_\beta/2+1)} exp\left(\frac{-\lambda_\beta}{2\phi_\beta}\right) d\mu_\beta\, d\phi_\beta$$

Con respecto al parámetro de discriminación, dado que sólo los valores positivos de α_j son significativos, esto sugiere una densidad a priori que pertenece a la familia Gamma. En el análisis bayesiano, la distribución a priori de la varianza suele tomarse como la chi-cuadrada inversa. Por lo tanto, el recíproco de la varianza tiene la distribución chi-cuadrado. Se sigue entonces que el recíproco de la desviación estándar tiene una distribución chi.

$$p(\chi|v,\varpi)d\chi \propto \chi^{v-1}exp\left(\frac{-\chi^2}{2\varpi}\right)d\chi$$

Donde v es el grado de libertad y ϖ es un parámetro de escala. Por tanto, se asume que la a priori es:

$$p(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k) = p(\alpha_1)p(\alpha_2)\dots p(\alpha_k)$$

$$p(\alpha_j)d\alpha_j \propto {\alpha_j}^{v_j-1}exp\left(\frac{-{\alpha_j}^2}{2\varpi_j}\right)d\alpha_j$$

La especificación de información a priori para el parámetro de discriminación parece resolver problemas como la falta de convergencia. Los parámetros de dificultad y habilidad no plantean problemas en general, por lo que puede no ser necesario especificar información a priori para estos parámetros. Por lo tanto, se pueden especificar valores a priori no informativos para estos parámetros, en este caso, se toma las distribuciones a priori de estos parámetros de la siguiente manera:

$$p(\beta_j)d\beta_j \propto d\beta_j,\ \ j = 1,\dots,k$$

$$p(\theta_i)d\theta_i \propto d\theta_i,\ \ i = 1,\dots,n$$

La distribución a posteriori de los parámetros del ítem y de habilidad están dados por:

$$p\left(\theta, \alpha, \beta, \mu_\beta, \phi_\beta | U, \mu_\theta, \phi_\theta, v_\beta, \lambda_\beta, v_1, v_2, \dots, v_k, \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_k\right)$$

$$\propto L(U|\theta, \alpha, \beta)\left\{\prod_{i=1}^{n} p(\theta_i)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{k} p\left(\beta_j|\mu_\beta, \phi_\beta\right)p\left(\mu_\beta, \phi_\beta|v_\beta, \lambda_\beta\right)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{k} p\left(\alpha_j|v_j, \varpi_j\right)\right\}$$

La función de verosimilitud $L(U|\theta, \alpha, \beta)$ está dado por:

$$\prod_{i=1}^{n} p(\theta_i) \propto exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {\theta_i}^2\right)$$

$$\prod_{j=1}^{k} p\left(\beta_j|\mu_\beta, \phi_\beta\right)p\left(\mu_\beta, \phi_\beta|v_\beta, \lambda_\beta\right) \propto {\phi_\beta}^{-(n+v_\beta+2)/2} exp\left\{-\frac{\lambda_\beta + \sum_{j=1}^{k}\left(\beta_j - \mu_\beta\right)^2}{2\phi_\beta}\right\}$$

Integrando los parámetros de ruido μ_β, ϕ_β se obtiene la siguiente distribución posteriori conjunta para el ítem y la habilidad del individuo.

$$p\left(\theta, \alpha, \beta|U, v_\beta, \lambda_\beta, v_1, v_2, \dots, v_n, \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n\right)$$

$$\propto L(U|\theta, \alpha, \beta) exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {\theta_i}^2\right)\left\{\lambda_\beta + \sum_{j=1}^{k}\left(\beta_j - \bar{\beta}\right)^2\right\}^{-(n+v_\beta-1)/2}\left\{\prod_{j=1}^{k} {\alpha_j}^{v_j-1} exp\left(\frac{-{\alpha_j}^2}{2\omega_j}\right)\right\}$$

Aquí $\bar{\beta}$ denota el promedio de β y $L(.)$ es la función de verosimilitud. Si las a prioris no informativas son elegidas para θ_i y β_j, la distribución a posteriori se reduce a

$$p(\theta, \alpha, \beta|U, v_1, v_2, \dots, v_n, \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n) \propto L(U|\theta, \alpha, \beta)\left\{\prod_{j=1}^{k} {\alpha_j}^{v_j-1} exp\left(\frac{-{\alpha_j}^2}{2\omega_j}\right)\right\}$$

La distribución posterior contiene toda la información requerida para hacer afirmaciones de probabilidad sobre el ítem y los parámetros de habilidad. Sin embargo, dada su complejidad, no se encuentra en una forma fácilmente utilizable.

Por lo tanto, es necesario obtener estimaciones puntuales del ítem y los parámetros de habilidad.

El logaritmo de la distribución posterior puede ser expresado como:

$$Log\ p(\theta, \alpha, \beta|U) = Log\ L(U|\theta, \alpha, \beta) + Log\ f_1(\theta) + Log\ f_2(\beta) + Log\ f_3(\alpha) + cons.$$

Donde $f_1(\theta)$, $f_2(\beta)$ y $f_3(\alpha)$ son las contribuciones de las prioris sobre θ, α y β a la distribución posterior. Las ecuaciones modales están dadas por:

$$\frac{\partial\{Log\ L + Log\ f_1(\theta)\}}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial\{Log\ L + Log\ f_2(\beta)\}}{\partial\beta} = 0$$

$$\frac{\partial\{Log\ L + Log\ f_3(\alpha)\}}{\partial\alpha} = 0$$

Los niveles de los parámetros que permiten maximizar la distribución posterior conjunta, no están disponibles en formas cerradas y, por lo tanto, deben emplearse procedimientos numéricos como Newton-Raphson.

Si $X^{(k)}$ es la $k - ésima$ aproximación del vector de valores que maximiza la distribución posterior conjunta, entonces una mejor aproximación, $X^{(k+1)}$, está dado por:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[H^{-1}\left(X^{(k)}\right)\right] g(X^k)$$

Donde $H\left(X^{(k)}\right)$ es la matriz de segundas derivadas y $g(X^k)$ es el vector de primeras derivadas del logaritmo de la distribución posterior evaluada en X^k. Dado que $H(X^k)$ es una matriz cuadrada de orden $2k + n$, por fácil implementación, los elementos fuera de la diagonal de $H\left(X^{(k)}\right)$ puede ser ignorado.

$$X_m{}^{(k+1)} = X_m{}^{(k)} - \frac{g\left[X_m{}^{(k)}\right]}{h\left[X_m{}^{(k)}\right]} \qquad (3)$$

Donde X_m es el $m-ésimo$ parámetro y g, h son las primeras y las segundas derivadas del logaritmo de la distribución posterior. g, h tienen dos componentes aditivas, uno resulta de la contribución de la función de verosimilitud y el otro de la contribución de la distribución a priori (ver Tabla 6).

Tabla 6

Derivadas del Logaritmo de la Distribución Posterior Conjunta

Parámetro	Contribución	Primera derivada	Segunda derivada
θ_i	Verosimilitud	$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(u_{ij} - P_{ij})$	$-\sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_{ij}(1 - P_{ij})$
	Priori	$-\theta_i$	-1
α_j	Verosimilitud	$\sum_{i=1}^{n}(\theta_i - \beta_j)(u_{ij} - P_{ij})$	$\sum_{i=1}^{n}(\theta_i - \beta_j)(u_{ij} - P_{ij})$
	Priori	$\frac{(v_j - 1)}{\alpha_j} - \frac{\alpha_j}{w_j}$	$\frac{(v_j - 1)}{{\alpha_j}^2} - \frac{1}{w_j}$
β_j	Verosimilitud	$-\sum_{i=1}^{n} \alpha_j(u_{ij} - P_{ij})$	$-\sum_{i=1}^{n} {\alpha_j}^2 P_{ij}(1 - P_{ij})$
	Priori	$\frac{-(\beta_j - \bar{\beta})}{\sigma_\beta^2}$	$\frac{-\left[\sigma_\beta^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left[\frac{2(\beta_j - \bar{\beta})^2}{v_\beta + n - 1}\right]\right]}{(\sigma_\beta^2)^2}$

Nota. Tomado de "Bayesian estimation in the two-parameter logistic model". (Swaminathan & Gifford, 1985). Donde $P_{ij} = \frac{1}{1+exp\left(-\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\right)}$, $\sigma_\beta^2 = \lambda_\beta + \frac{\sum_{j=1}^{k}(\beta_j - \bar{\beta})^2}{v_\beta + n - 1}$, $\bar{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \beta_j}{k}$

El esquema iterativo dado en (3) se puede emplear para estimar primero los parámetros de habilidad manteniendo fijos los parámetros del ítem. Cuando se obtiene la convergencia, el proceso se repite para cada conjunto de parámetros de los ítems. Luego se repiten las etapas hasta alcanzar el grado de precisión requerido. Aunque la convergencia de este proceso iterativo no puede probarse rigurosamente,

para un gran número de ítems y examinados, el proceso convergerá en cualquier etapa del esquema iterativo.

Esto se puede ver si notamos que asintóticamente la verosimilitud domina a la anterior y para una habilidad dada θ, la matriz de segundas derivadas de cada par de parámetros de discriminación y dificultad es definida negativa. Esto se sigue desde

$$\frac{\partial^2 Log\ L}{\partial \alpha_j \partial \beta_j} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j)P_{ij}(1 - P_{ij})$$

Y el determinante de la negativa de la matriz de segundas derivadas dada por:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\theta_i - \beta_j)^2 P_{ij}(1 - P_{ij})\right]\left[\sum_{i=1}^{n}{\alpha_j}^2 P_{ij}(1 - P_{ij})\right] - \left[\sum_{i=1}^{n}(\theta_i - \beta_j)\alpha_j P_{ij}(1 - P_{ij})\right]$$

Es positiva como un resultado de la Desigualdad Cauchy-Schwartz.

Los valores iniciales para el proceso iterativo pueden ser tomados como:

$$\theta_i^{(0)} = log\left\{\frac{p_i}{1 - p_i}\right\}$$

$$\beta_j^{(0)} = \frac{\Phi^{-1}(q_j)}{r_j}$$

$$\alpha_j^{(0)} = \frac{r_j}{(1 - {r_j}^2)^{1/2}}$$

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^{k} U_{ij}}{k}$$

$$q_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_{ij}}{n}$$

$\Phi^{-1}(q_j)$ es la desvianza normal que corta un área q_j a su derecha y r_j es la correlación biserial puntual del score de cada ítem y del score total. Un problema ocurre si p_i es cero o uno, y en estos casos, p_i puede ser tomado como $(k - 1/2)/k$

o $1/2k$, respectivamente. Análogamente, q_j puede ser tomado como $(n-1/2)/n$ o $1/2n$.

Para mayor detalle del proceso de estimación bayesiana se puede revisar Swaminathan & Gifford (1985).

2.2.12. *Estimación Bayesiana de los Modelos LPE y RLPE*

Sea X_{ij} la variable dicotómica que corresponde al individuo i ($i = 1, \dots, n$) sobre el ítem j ($j = 1, \dots, k$). Un modelo asimétrico de tres parámetros sigue una formulación jerárquica con una forma general de $p_{ij} = c_j + (1 - c_j)F_{\lambda_j}(m_{ij})$.

La probabilidad $p_{ij} = P(X_{ij} = 1|\theta_i, \eta_j)$ se considera como la probabilidad condicional de una respuesta correcta dado una habilidad θ_i y los parámetros del ítem j $\eta_j = (\alpha_j, \beta_j, c_j, \lambda_j)$ donde $\alpha_j, \beta_j, c_j, \lambda_j$ son el parámetro de discriminación, dificultad, adivinación y penalización respectivamente. Además, $F_{\lambda_j}(m_{ij})$ Es denotada por una función de curva característica asimétrica del ítem de la distribución determinada indexada por λ_j y m_{ij} es la componente lineal latente que relaciona al parámetro θ_i y η_j. Considerando la distribución *Bernoulli* para la variable respuesta, la función de verosimilitud para el modelo TRI de tres parámetros:

$$L(\alpha, \beta, c, \lambda|X) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\left[F_\lambda\left(\alpha_j(\theta_i - \beta_j); c_j\right)\right]^{X_i}\left[1 - F_\lambda\left(\alpha_j(\theta_i - \beta_j); c_j\right)\right]^{1-X_i}$$

Donde $F_\lambda(\alpha_j(\theta_i - \beta_j); c_j)$ es la función de densidad asimétrica con el parámetro de penalización λ asociado con la CCI asimétrica. Los casos particulares son logística (Logit), Ogiva Normal (Probit), LPE y RLPE usan la forma de esta función de verosimilitud para estructurar los procedimientos de inferencia.

La inferencia bayesiana de los modelos TRI se facilita con la aplicación de métodos MCMC implementados en WinBUGS u OpenBUGS. Para los modelos TRI tradicionales, los códigos Bugs están disponibles en Curtis (2010), Fox (2010), Bazan et al. (2010). Si bien existen paquetes bayesianos desarrollados en Matlab, para los modelos aquí presentados no existen programas o códigos para ser implementados en WinBUGS u OpenBUGS. Esto se facilita usando BayesianModeling.

En BayesianModeling se consideran distribuciones previas adecuadas vagas, asumiendo distribuciones independientes con valores grandes para la varianza. Bolfarine y Leandro (2006) o Fox (2010) analizan distribuciones previas para modelos TRI tradicionales. rasgo, donde i N(0; 1) se asume para i = 1; : : : ; norte. Sin embargo, para el parámetro ítem, hay varias propuestas. Aquí, asumimos priores independientes, es decir,

$$\pi(\theta, \alpha, \beta, c, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \phi(\theta_i) \prod_{j=1}^{k} \pi_1(\alpha_j)\pi_2(\beta_j)\pi_3(c_j)\pi_4(\lambda_j)$$

Donde $\phi(\theta_i)$ sigue una distribución normal y $\pi_1(\alpha_j), \pi_2(\beta_j), \pi_3(c_j), \pi_4(\lambda_j)$ corresponden a las distribuciones a priori de los parámetros del ítem.

Para muestras pequeñas la especificación a priori es la siguiente:

$$\alpha_j \sim HN(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$$

con $\mu_\alpha = 1$ y $\sigma_\alpha^2 = 0.5$

donde $HN(.)$ corresponde la normal positiva o distribución Half-Normal.

$$\beta_j \sim HN(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$$

con $\mu_\beta = 0$ y $\sigma_\beta^2 = 2$

$$c_j \sim Beta(5,17)$$

$$\lambda_j \sim Gamma(0.25,0.25)$$

para los modelos *LPE* y *RLPE* o

$$\lambda_j = \frac{\delta_j}{\sqrt{1-\delta_j{}^2}}$$

con $\delta_j \sim Unif(-1,1)$,

donde $-1 \leq \delta_j \leq 1$ para probit asimétrico u ogiva normal asimétrica.

2.3. Bases Teóricas del Clima Organizacional

2.3.1. *Fundamentos Generales del Clima Organizacional*

Desde siempre ha sido necesario gestionar a las personas para que las organizaciones funcionen. Estudios empíricos demuestran que las inversiones realizadas en mejorar la gestión de las personas pueden favorecer a los beneficios empresariales y constituir una ventaja competitiva para la empresa.

Según Martha Alles, ". . . Las empresas deben manejarse en ambientes altamente competi- tivos y para ello cuentan con sus recursos humanos. . . El área de Recursos Humanos, de este modo, agrega valor y su gestión puede ser medida como resultados financieros". . .

Una de las maneras de gestionar a las personas es mantenerlos motivados, lo que influirá en la baja rotación de colaboradores, un alto nivel de productividad, etc. Sin embargo, este tipo de gestiones deben ser controlables y así evaluar la efectividad de las decisiones; por esta razón, es necesario establecer mecanismos de medición que faciliten la dirección de los recursos humanos. Para medir la gestión de los recursos humanos se puede aplicar la ECO que mide la satisfacción del colaborador y también permite identificar un conjunto de factores que estén relacionados con la mejora del clima laboral.

Definición del Clima Organizacional. Según Hellriegel & Slocum (1974), el CO es un conjunto de características que pueden ser percibidos acerca de una

organización, y puede ser inducido por la forma en que la organización interactúa con sus miembros y su ambiente.

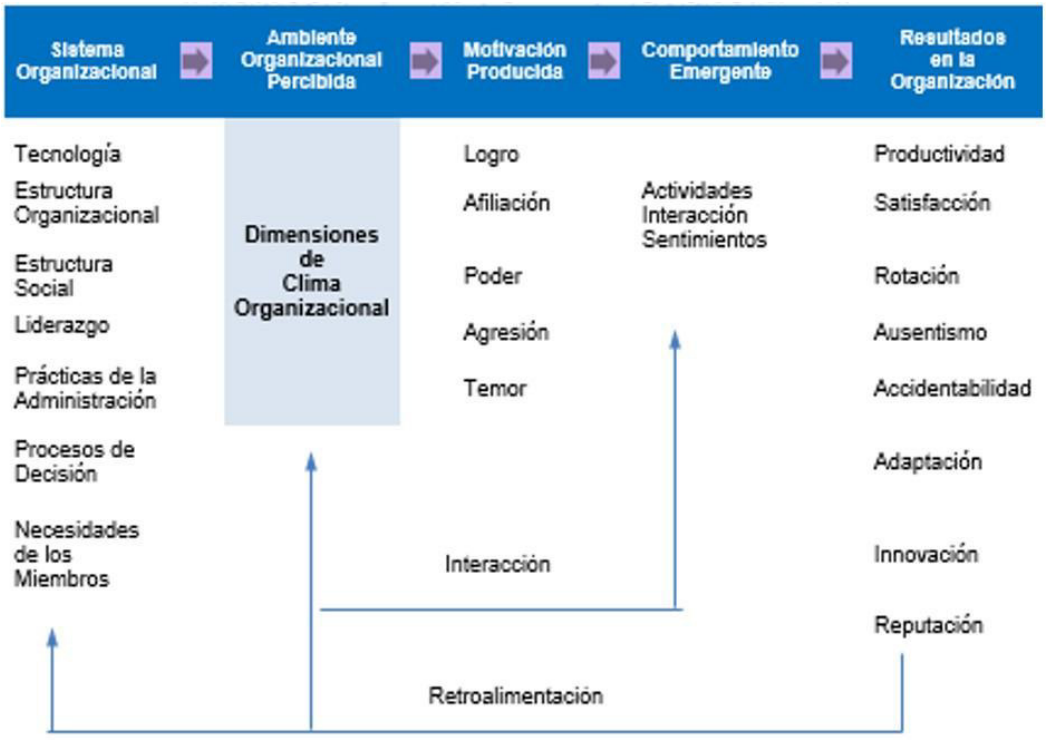
Se define al clima como un conjunto de factores que describen a una determinada organización. Estos factores son percibidos por los individuos en la medida que conviva dentro de la organización; de esta forma, se crea en el tiempo una percepción similar entre los individuos lo que caracterizará a la organización y lo diferenciará de otras.

Según Goncalves (1997), "clima organizacional es un fenómeno interviniente que media entre los factores del sistema organizacional y las tendencias motivacionales que se traducen en un comportamiento que tiene consecuencias sobre la organización (productividad, satisfacción, rotación)". Es decir, el comportamiento de un colaborador es el resultado de sus percepciones y de las experiencias con la empresa.

Según Litwin & Stringer (1968), al estudiar el CO se evalúa la forma en la que es percibida la organización; asimismo, las características del sistema organizacional generan un nivel de CO, lo que impacta en las motivaciones y comportamientos de los colaboradores, y finalmente, en la productividad, rotación, etc. A continuación, se muestra el siguiente esquema de CO propuesto por Litwin & Stringer (1968) (ver Figura 7).

Figura 7

Esquema del Clima Organizacional



Nota. Tomado de Litwin & Stringer (1968).

Dimensiones del Clima Organizacional. Según Sandoval (2004), son aquellas características que influyen en el comportamiento de los individuos y que pueden ser medidas.

Rodríguez (1999) considera que en el clima de una organización intervienen diversas variables como: el contexto social de la organización, las condiciones físicas laborales, la estructura organizacional, los valores y normas, los grupos formales e informales dentro de la organización, los estilos de autoridad y liderazgo, entre otros.

Respecto a las dimensiones establecidas en el estudio del CO del caso analizado en la presente tesis, ésta se ha basado en aportes teóricos de diferentes autores como Koys & Decottis (1991) y Litwin & Stringer (1968) y se han definido las siguientes:

Figura 8

Preguntas Planteadas por Dimensión (Parte 1)

Dimensión	Código	Ítem
Claridad de Roles y Funciones	CLA_01	1) El trabajo en mi unidad está bien organizado y definido
	CLA_02	2) Tengo claras las responsabilidades, objetivos y tareas de mi cargo
	CLA_03	3) Tengo claras cuáles son las prioridades en mi trabajo
	CLA_04	4) Conozco exactamente qué es lo que se espera de mí
	CLA_05	5) Los jefes hacen un buen trabajo en la asignación de labores y coordinación de las personas
Comunicación interna	COM_01	1) Los objetivos y metas del banco son claros
	COM_02	2) En Interbank tengo la oportunidad de expresar mis opiniones
	COM_03	3) Me entero oportunamente de la marcha del negocio
	COM_04	4) En mi unidad se recibe y analiza información sobre el avance de Interbank y sus objetivos
	COM_05	5) Yo recibo toda la información que necesito para llevar a cabo mi trabajo
	COM_06	6) Conozco cuáles son las metas y objetivos a futuro de la organización
	COM_07	7) Mi jefe es accesible, es fácil hablar con él / ella
Reconocimiento	REC_01	1) En mi unidad se reconoce el trabajo bien realizado
	REC_02	2) En mi unidad se reconoce cuando la gente hace esfuerzos extraordinarios
	REC_03	3) Mi jefe directo reconoce habitualmente la buena labor en el momento
Línea de carrera / Desarrollo	LIN_01	1) En Interbank se da prioridad a los colaboradores para desarrollarse en otros cargos
	LIN_02	2) En Interbank se hacen esfuerzos en prepararnos para que podamos ocupar otros cargos
	LIN_03	3) Creo que tengo posibilidades de desarrollarme profesionalmente en Interbank
	LIN_04	4) Las personas son promovidas en forma justa en la empresa
	LIN_05	5) Mi trabajo actual hace uso de la totalidad de mis habilidades
Toma de decisiones	DEC_01	1) Tengo la autonomía para hacer las tareas que me corresponden
	DEC_02	2) En Interbank los colaboradores participan en decidir cómo hacer mejor su trabajo
	DEC_03	3) Mi opinión es tomada en cuenta para la toma de decisiones
	DEC_04	4) En general la delegación, responsabilidad y toma de decisiones son manejadas correctamente en la empresa

Figura 9

Preguntas Planteadas por Dimensión (Parte 2)

Dimensión	Código	Ítem
Innovación	INN_01	1) En Interbank se estimulan las nuevas ideas o formas de hacer mejor el trabajo
	INN_02	2) Interbank responde rápidamente a las innovaciones comerciales y tecnológicas del mercado
	INN_03	3) Los métodos de trabajo son cambiados oportunamente para adaptarse a nuevas condiciones
	INN_04	4) Interbank se anticipa a los cambios en el mercado
	INN_05	5) En Interbank existen los medios adecuados para canalizar mis ideas y sugerencias
Relaciones interáreas	REL_01	1) Las unidades se esfuerzan para llegar juntas a los objetivos del banco
	REL_02	2) En Interbank existe coordinación entre las unidades
	REL_03	4) En Interbank las comunicaciones entre las diferentes unidades son fluidas y oportunas
Trabajo en equipo	TRA_01	1) Para sacar adelante el trabajo, las personas de mi área se ayudan unas a otras
	TRA_02	3) En mi área nos organizamos en equipos para cumplir nuestro trabajo
	TRA_03	4) Formo parte de un equipo de trabajo que puede discutir abiertamente sus problemas
Manejo de conflictos	CON_01	2) En mi área los colaboradores pueden decir lo que piensan, aunque estén en desacuerdo con sus jefes
	CON_02	3) Los desacuerdos entre los miembros del equipo se conversan y se resuelven
	CON_03	4) En mi área se encuentra el apoyo suficiente de la jefatura para la solución de problemas de relación entre miembros del equipo
	CON_04	5) En mi área las relaciones interpersonales son positivas, lo que crea un grato ambiente de trabajo
	CON_05	6) Si considero que se me ha tratado injustamente, sé que tendré la oportunidad de ser escuchado y que se me tratará con justicia
	CON_06	7) Mi jefe evita tener empleados favoritos
	CON_07	8) Interbank busca alternativas antes de despedir a sus colaboradores
Compromiso e identifiación	IDE_01	1) Estoy orgulloso de pertenecer a Interbank
	IDE_02	2) En Interbank la mayoría de la gente tiene puesta la camiseta
	IDE_03	3) Existe gran coincidencia entre mi estilo de trabajo y el estilo de Interbank
	IDE_04	4) Me siento satisfecho con el trabajo que realizo en Interbank
	IDE_05	5) Los objetivos futuros de la empresa son consistentes con mis objetivos personales
	IDE_06	6) La mayoría de los colaboradores comparte una visión clara de hacia dónde va el banco
	IDE_07	7) Entiendo claramente cómo contribuyo a los objetivos generales de Interbank

Figura 10

Preguntas Planteadas por Dimensión (Parte 3)

Dimensión	Código	Ítem
Entrenamiento y Capacitación	CAP_01	1) En Interbank se nos capacita y entrena adecuadamente
	CAP_02	4) Estamos comprometidos en ayudarnos unos a otros para aprender de nuestro trabajo
	CAP_03	6) Se me ofrece capacitación y/o entrenamiento con el objetivo de promover mi desarrollo profesional
Dirección	DIR_01	1) La Alta Dirección de Interbank cumple con lo que promete
	DIR_02	2) La Alta Dirección se preocupa por los colaboradores
	DIR_03	3) La Alta Dirección informa sobre los planes y proyectos del banco
Condiciones físicas	FIS_01	1) En mi unidad las condiciones físicas de trabajo son buenas
	FIS_02	2) En mi unidad se dispone del mobiliario y equipo para hacer bien el trabajo
	FIS_03	3) El equipamiento tecnológico y de sistemas asignados a mis tareas son adecuados
	FIS_04	4) Hay una adecuada distancia física entre mi puesto de trabajo y el de mis compañeros
	FIS_05	5) En mi área las condiciones de seguridad son apropiadas al trabajo que realizo
Remuneración y beneficios	REM_01	1) Creo que mi remuneración es similar a otros cargos de igual responsabilidad dentro del banco
	REM_02	2) Considero que mi remuneración es adecuada en relación a las responsabilidades de mi cargo
	REM_03	3) Mis condiciones salariales en Interbank son comparables con puestos similares en el mercado
	REM_04	4) Los beneficios adicionales que recibo de Interbank son apropiados
	REM_05	5) Siento que recibo una parte justa de las ganancias que obtiene esta organización
	REM_06	6) A las personas aquí se les paga justamente por el trabajo que hacen
Carga de trabajo	TRA_01	1) Puedo terminar todo lo que tengo que hacer dentro de mi horario normal de trabajo
	TRA_02	2) Puedo administrar mi carga de trabajo en forma tal que me permite equilibrar mi vida familiar y social
	TRA_03	3) Considero que el tiempo y esfuerzo que debo dedicar para cumplir mi trabajo es razonable
	TRA_04	4) La presión por la carga de trabajo es manejable
	TRA_05	5) Puedo tomar tiempo libre para atender asuntos personales de importancia

2.4. Marco Conceptual

2.4.1. *Modelos TRI en el Análisis de Clima Organizacional*

Los modelos de la TRI que, normalmente se utilizan en áreas académicas como la psicometría, se aplicaron al caso de estudio de la SCOEF. En ese sentido, fue necesario establecer determinados conceptos que permitieron alinear los modelos al caso de aplicación.

La variable latente estudiada es la SCOEF y el nivel de habilidad del individuo/colaborador se considera como el nivel de *Satisfacción del Colaborador con el Clima Organizacional* que, se estima mediante sus respuestas en la ECO.

La dificultad del ítem (β_j) representa un punto en la escala de la satisfacción (θ^*) que sirve como referencia para identificar a los colaboradores que se encuentran satisfechos con una probabilidad mayor al 0.5. En la medida que β_j sea más grande el ítem j será más crítico para la organización porque se necesita un mayor nivel de satisfacción para considerar que un colaborador esté verdaderamente satisfecho. Cuando se haya estimado los niveles de dificultad de todos los ítems del cuestionario, es posible establecer un ranking de todos los ítems e identificar los que son más críticos para la entidad financiera.

La discriminación del ítem (α_j) hace más grande la diferencia entre la habilidad del individuo y la dificultad del ítem, por lo cual la probabilidad de respuesta positiva incrementa o reduce en la medida que la discriminación sea más alta y del sentido de la diferencia. Cuanto más grande sea la discriminación, el ítem diferenciará mejor a los colaboradores satisfechos de los colaboradores insatisfechos por lo que se prefiere a los ítems con mayor discriminación. Si en la estimación se obtiene ítems con una discriminación menor igual a cero ($\alpha_j \leq 0$) se debe eliminar del cuestionario porque no aporta valor al estudio, porque se entiende que todos los colaboradores tienen la misma probabilidad de responder positivamente al ítem.

La penalización del ítem (λ_j) indica el grado de asimetría de la probabilidad de respuesta positiva. En el caso que sea uno indicará que la probabilidad es la función logística por lo que no habría presencia de asimetría en la distribución (Bolfarine & Bazán, 2010).

2.4.2. *Indicadores de Medición*

Raiz del Error Cuadrático Medio (RMSE). Es la raíz cuadrada del promedio de todos los errores elevados cuadrado, se considera que es común y una excelente métrica de error para predicciones numéricas (Neill & Reza, 2018). El resultado de la RMSE está dado en las unidades originales de la información (Gálvez, 2016). Para el caso, se deben considerar las diferencias entre los parámetros reales y los parámetros estimados en cada réplica de la simulación, donde se aplicó la siguiente fórmula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \hat{\lambda}_i\right)^2}$$

donde λ puede ser un parámetro del ítem o del individuo, $\hat{\lambda}$ es el parámetro estimado y n es el número de réplicas en el proceso de simulación.

Promedio del Error Absoluto (MAE). Es el promedio de las diferencias absolutas entre los parámetros reales y estimados en cada réplica de la simulación. Se define como:

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i - \hat{\lambda}_i\right|$$

Para el caso de los modelos estadísticos tradicionales se utilizaron los indicadores AIC, BIC que son índices de criterios de información basados en la estimación de máxima verosimilitud (EMV) y que se pueden expresar como la suma de un término de desviación y un término de penalización (Luo, 2018).

$$AIC = -2\log p\left(y\middle|\hat{\theta}_{mle}\right) + 2k$$

$$BIC = -2\log p\left(y\middle|\hat{\theta}_{mle}\right) + k * ln(N)$$

donde, $\hat{\theta}_{mle}$ es el estimador puntual basado en la EMV, el $\log p\left(y|\hat{\theta}_{mle}\right)$ es el logaritmo de la verosimilitud de los datos basado en $\hat{\theta}_{mle}$, k es el número de parámetros y N es el tamaño de la muestra.

Para el caso de los modelos estadísticos bayesianos se utilizó el indicador WAIC, que se caracteriza por tener rendimientos superiores en el contexto de la selección de los modelos TRI dicotómicos (Luo & Al-Harbi, 2017). WAIC utiliza la verosimilitud logarítmica puntual de la distribución posterior bayesiana completa, mientras que AIC y DIC utilizan sólo estimaciones puntuales para calcular la evidencia del modelo (Ahn et al., 2017). Brinda estimaciones de la precisión predictiva fuera de la muestra de una manera totalmente bayesiana, genera nuevos datos de esos nuevos participantes y evalúa qué tan bien un modelo hace predicciones sobre el nuevo conjunto de datos.

Según Yong (2018), el término de desviación utilizado en el cálculo de WAIC requiere densidad predictiva por puntos logarítmicos (LPPD), que se calcula como

$$LPPD = \sum_{i=1}^{n} \log \int p(y_i|\theta) p_{post}(\theta) d\theta$$

Dado que el cálculo de $LPPD$ utiliza toda la distribución posterior $p_{post}(\theta)$, $LPPD$ puede verse como un análogo totalmente bayesiano de $\log p\left(y_i|\hat{\theta}_{mle}\right)$ en el cálculo de AIC y BIC. Similar a $LPPD$, el término de penalización de WAIC es totalmente bayesiano y se puede expresar como

$$p_{WAIC} = \sum_{i=1}^{n} var_{post}(\log p(y_i|\theta))$$

donde el término de penalidad p_{WAIC} es la varianza de los términos individuales en la densidad predictiva logarítmica sumada sobre los n puntos de datos (Gelman et al, 2014). WAIC es igual a $-2LPPD + 2p_{WAIC}$.

2.4.3. *Glosario de Términos*

Curva Característica del Ítem. Se grafica la probabilidad de responder correctamente un ítem con la capacidad subyacente del individuo en el rasgo que se mide. La CCI es el bloque de construcción básico de la teoría de la respuesta al ítem: la curva está limitada entre 0 y 1, aumenta monótonamente y se supone comúnmente que toma la forma de una función logística. Cada elemento de una prueba tiene su propia curva característica de elemento. (APA, s.f.)

Índice de Discriminación. Es el grado en que una prueba o ítem de prueba diferencia entre individuos de diferentes niveles de desempeño, a menudo expresado como la diferencia porcentual entre individuos de alto y bajo desempeño que responden correctamente a un ítem objetivo. (APA, s.f.)

Parámetro de Habilidad. En la TRI es un valor teórico que representa la capacidad de una persona o el desempeño probable en un test (normalmente tiene el símbolo de θ). Se supone que los examinados poseen algún grado de habilidad subyacente y que para cada individuo en cada nivel de habilidad hay una curva característica específica del ítem que define la probabilidad de responder correctamente. (APA, s.f.)

Teoría del Rasgo Latente. Es una teoría psicométrica donde se considera que los rasgos observados, como la inteligencia, son reflejos de rasgos no observables más básicos, denominados rasgos latentes; para ello, se han desarrollado modelos como la TRI que permiten estimar los rasgos latentes a partir de los rasgos observados. (APA, s.f.)

Teoría de Respuesta al *Ítem*. Es una teoría psicométrica de medición que se basa en la probabilidad de responder correctamente un *ítem* que depende del rasgo latente y de las características del *ítem*. (APA, s.f.)

Capítulo III. Metodología

3.1. Tipo y Diseño de Investigación

3.1.1. *Tipo de Investigación*

Según Hernández (2014), es una investigación aplicada porque tiene la finalidad de buscar y consolidar el saber acerca de los modelos de variables latentes en el marco de la TRI, desde la perspectiva clásica y bayesiana mediante una aplicación a datos reales.

Una vez que se investigó el marco teórico se procedió con la medición de la Satisfacción del Colaborador en el Clima Organización de una Entidad Financiera usando como la fuente, los datos recolectados en la encuesta anual de Clima Organizacional de una Entidad Financiera en el año 2016.

3.1.2. *Diseño de Investigación*

Según Hernández (2014) es diseño no experimental porque se mide la satisfacción del colaborador en el CO gracias a una encuesta anual que se realizó en el 2016 y en la que no se manipuló alguna variable que pueda impactar en la unidad de análisis. Además, corresponde a un diseño transversal porque se analizó información del año 2016.

3.2. Unidad de Análisis

Se refiere a los colaboradores que trabajan en una entidad financiera ubicada en Lima, en el año 2016.

3.3. Población de Estudio

Está conformada por los 5,769 colaboradores que laboraron en la entidad financiera ubicada en Lima, en el año 2016. Además, para tener claro la población, estos colaboradores trabajaron en diversas áreas de la entidad financiera cuyo organigrama es el siguiente:

En la Tabla 7 se presenta la cantidad de los colaboradores según organigrama de la entidad y por cada área:

Tabla 7

Distribución de Colaboradores Según Organigrama

Área	Colaboradores	%
Alta dirección	100	3 %
Staff de soporte	900	32 %
Staff comercial	1,400	35 %
Atención al cliente	2,500	30 %
Total	4,900	100 %

3.4. Tamaño de Muestra

Para el análisis del caso de aplicación se decidió trabajar con toda la población de colaboradores encuestados, por lo que no se aplicó un método de selección muestral.

3.5. Técnica e Instrumento de Recolección de Datos

3.5.1. *Técnicas de Recolección de Datos*

Los datos se han obtenido a partir de una fuente secundaria. La recolección de datos se realizó mediante una ECO aplicada a los colaboradores de una entidad financiera a través de un medio de comunicación online de la empresa. Este medio de comunicación corresponde a un formulario que se diseñó especialmente para la encuesta y se comparte mediante la página web de la entidad financiera.

3.5.2. *Instrumento de Recolección de Datos*

El cuestionario utilizado para la ECO es una herramienta que permite a la alta gerencia obtener información detallada del CO de su empresa. El instrumento corresponde a un cuestionario cuya estructura se mantiene constaste desde hace varios años y está en constante validación por parte del experto que realiza el estudio

anualmente en coordinación con la Gerencia de Recursos Humanos. El cuestionario está diseñado en cuatro partes (etapas):

(1) Objetivos de la encuesta, se plantea los objetivos que se quiere lograr con la aplicación de la presente encuesta;

(2) Datos generales, se plantea determinadas variables importantes para determinar el perfil del encuestado como son: posición del colaborador, edad del colaborador, tiempo de servicio en la empresa, remuneración;

(3) Indicaciones, se especifica los detalles del cuestionario para ser totalmente transparentes con el colaborador que rendirá el test;

(4) Preguntas a responder, con 71 ítems que se distribuye en 15 dimensiones del concepto CO que, se considera en el cuestionario (ver Figura 8, Figura 9 y Figura 10).

Además, las alternativas de respuesta de cada ítem del cuestionario está formulado bajo la escala Likert donde:

1: representa estar totalmente en desacuerdo con el ítem,

2: estar en desacuerdo con el ítem,

3: respuesta neutra al ítem,

4: estar de acuerdo con el ítem,

5: estar totalmente de acuerdo con el ítem.

3.6. Técnicas de Análisis e Interpretación de la Información

Inicialmente, se realizó un estudio de simulación para determinar los escenarios donde los modelos asimétricos de la TRI presentan un mejor *performance*. En la segunda etapa se realizó un análisis de una ECO de una entidad financiera para el año 2016, el análisis se enfocó en la aplicación de las técnicas

propuestas para identificar su nivel de rendimiento en el estudio de la satisfacción del CO.

3.6.1. *Estudio de Simulación*

Objetivos. Evaluar la precisión de los métodos de estimación de modelos TRI con enfoque clásico y bayesiano en matrices de datos simuladas bajo Modelo Logístico de 2 Parámetros con enlace simétrico y asimétrico.

Algoritmo para Simular Datos. En la simulación de la matriz de datos dicotómicos se realizaron los siguientes pasos:

(1) Definir el número de individuos (n) y la cantidad de ítems (k) con la que se simulará la matriz de datos.

(2) Generar aleatoriamente los parámetros del modelo considerando las siguientes distribuciones.

   a. **Habilidad del individuo:** θ sigue una distribución normal estándar de tal forma que $\theta_i \sim N(0,1)$ donde $i = 1,\ldots,n$.

   b. **Los parámetros de los ítems:** Se simularon los parámetros de los ítems considerando que, la dificultad del ítem (β) donde $\beta_j \sim N(0,1)$, la discriminación del ítem (α) donde $\alpha_j \sim N(2,0.5)$, la asimetría del ítem (λ) donde $\lambda_j \sim N(2,0.5)$ en la que $j = 1,\ldots,k$

(3) Calcular la desvianza Z_{ij} para cada combinación de los k ítems y los n individuos, $Z_{ij} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j)$, y calcular la probabilidad p_{ij} según la función logit $p_{ij} = \frac{e^{Z_{ij}}}{1+e^{Z_{ij}}}$. Dependiendo del escenario, también se calcula la probabilidad con exponente positivo $p_{ij}^{*} = p_{ij}^{\lambda_j}$.

(4) Generar una muestra aleatoria de n elementos con distribución uniforme, $u_i \sim U(0,1)$. Comparar la probabilidad p_{ij} y el elemento de la muestra aleatoria uniforme u_i, si $p_{ij}^{*} >= u_i$ entonces la respuesta es 1, caso contrario es 0.

El código de la simulación de los datos se implementó en el *software* R (ver Apéndice C).

Método para Estimar los Parámetros. Dependiendo de la técnica utilizada para la estimación se utilizaron diversas librerías del *software* R, en el caso de la aplicación de modelos tradicionales como Rasch (1 PL) y logístico con dos parámetros (2 PL) se utilizó la librería LTM, respecto a la aplicación de las técnicas beyesianas se utilizó la librería RSTAN para estimar los parámetros mediante la estimación MCMC, donde se calcularon los promedios de las distribuciones a posteriori de los parámetros y se estimaron los k parámetros en cada réplica de la simulación.

Criterios para Evaluar la Simulación. Para la medición de la precisión se utilizaron los indicadores RMSE y MAPE, considerando al mejor modelo con menor nivel de RMSE o MAPE.

Escenarios de simulación. Los escenarios propuestos para el estudio de simulación son los siguientes:

Escenario 1 (Modelos TRI con enlace simétrico para pocos ítems y muestras muy grandes). En este escenario se simula una matriz de datos con 10 ítems y 1,000 individuos que se originaron con el supuesto del cumplimiento de la Regresión Logística de 2 Parámetros con Enlace simétrico.

Escenario 2 (Modelos TRI con enlace simétrico para pocos ítems y muestras grandes). En este escenario se simula una matriz de datos con 10 ítems y

500 individuos que se originaron con el supuesto del cumplimiento de la Regresión Logística de 2 Parámetros con Enlace simétrico.

Escenario 3 (Modelos TRI con enlace simétrico para pocos ítems y muestras pequeñas). En este escenario se simula una matriz de datos con 10 ítems y 20 individuos que se originaron con el supuesto del cumplimiento de la Regresión Logística de 2 Parámetros con Enlace simétrico.

Escenario 4 (Modelos TRI con enlace asimétrico para pocos ítems y muestras muy grandes). En este escenario se simula una matriz de datos con 10 ítems y 1,000 individuos que se originaron con el supuesto del cumplimiento de la Regresión Logística de 2 Parámetros con Enlace Asimétrico.

Escenario 5 (Modelos TRI con enlace asimétrico para pocos ítems y muestras grandes). En este escenario se simula una matriz de datos con 10 ítems y 500 individuos que se originaron con el supuesto del cumplimiento de la Regresión Logística de 2 Parámetros con Enlace Asimétrico.

Escenario 6 (Modelos TRI con enlace asimétrico para pocos ítems y muestras pequeñas). En este escenario se simula una matriz de datos con 10 ítems y 20 individuos que se originaron con el supuesto del cumplimiento de la Regresión Logística de 2 Parámetros con Enlace Asimétrico.

3.6.2. *Análisis de la ECO*

Los modelos de la TRI se aplicaron en el caso de estudio de la Satisfacción de los colaboradores en el CO de una Entidad Financiera del año 2016. En el análisis de la ECO se definieron las siguientes etapas de modelamiento (ver Figura 11):

Figura 11

Proceso de Modelamiento de los Datos



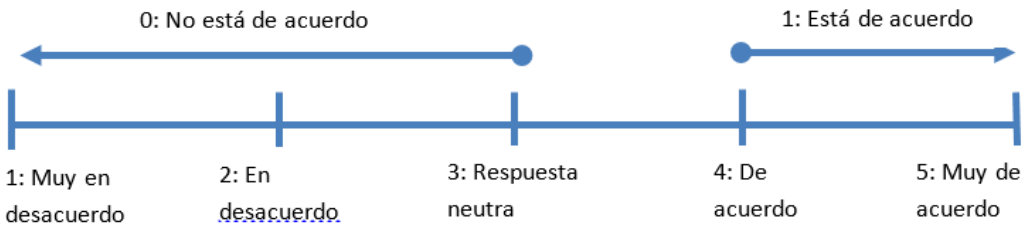
A continuación, se explica cada etapa del proceso de modelamiento:

Selección de los *Ítems*. Dado que la presente tesis busca demostrar la utilidad de los modelos TRI en el estudio de la satisfacción con el CO, entonces, se optó por seleccionar unos ítems que corresponden a determinadas dimensiones que obtuvieron una baja puntuación en la ECO de la entidad financiera, realizada en el 2016.

Preparación de los Datos para el Análisis. Las alternativas de respuesta en cada *ítem* del cuestionario están definidas según una escala *Likert* de 1 al 5. Sin embargo, para los modelos propuestos de la TRI se necesita que las respuestas de cada *ítem* sea dicotómica (1: Satisfecho, 0: No Satisfecho). En ese sentido, se procedió con la dicotomización de cada *ítem* considerando la regla especificada en la Figura 12.

Figura 12

Transformación de las Variables Likert a Dicotómico



Análisis Descriptivo de los *Ítems*. Se realizó un análisis descriptivo de las respuestas, a través de indicadores como: promedio de respuestas positivas, promedio de respuestas negativas, dispersión de las respuestas, función logit.

También se verificó la fiabilidad del test mediante el *alpha* de *crombach* a nivel general y omitiendo cada *ítem*. Adicionalmente, se calculó los coeficientes de correlación biserial puntual incluyendo o excluyendo cada *ítem*.

Validación de los Supuestos del Modelo TRI. Se verificó la unidimensionalidad en cada una de las dimensiones seleccionadas mediante la aplicación del análisis de componentes principales mediante correlación tetracórica de ítems dicotómicos, asimismo, se evaluó la unidimensionalidad mediante el análisis paralelo.

Respecto al análisis de componentes principales, dado los *ítems* dicotómicos, se determinó la matriz de correlaciones tetracóricas de los *ítems*; en segundo lugar, se calcularon los autovalores de la matriz y la proporción de varianza por cada ítem, se graficaron los autovalores evidenciándose que la primera componente tenga el mayor autovalor. Adicionalmente, se realizó el análisis paralelo de los ítems utilizando la función unidimTest de la librería LTM en el *software* R que fue propuesto por Drasgow & Lissak (1983). El estadístico utilizado para probar la unidimensionalidad es el segundo valor propio de la matriz de correlaciones tetracóricas de los ítems dicotómicos, y se utiliza un procedimiento de Monte Carlo para aproximar la distribución de este estadístico bajo la hipótesis nula (Rizopoulos, 2022).

Ajuste de los diversos modelos TRI. Se aplicaron los modelos propuestos en el marco de la TRI dependiendo de la función de enlace, ya sea simétrico o asimétrico.

(1) Respecto a los modelos con función de enlace simétrico se aplicaron el modelo Rasch (también conocido como modelo logístico de un parámetro) y el modelo logístico de dos parámetros. Para la estimación de los parámetros se utilizó la librería LTM en el *software* R, que se detalla en Rizopoulos (2006). Adicionalmente, desde la perspectiva bayesiana se aplicaron los dos tipos de modelos logístico de uno

o dos parámetros mediante la librería RSTAN en el *software* R, que se detalla en Guo et al (2021).

(2) Respecto a los modelos con función de enlace asimétrico se aplicaron el modelo LPE y el modelo de RLPE mediante la librería RSTAN del *software* R, que se detalla en Guo et al (2021).

Por otro lado, respecto a los criterios de selección del mejor modelo se aplicaron diversos indicadores dependiendo del tipo modelo (tradicional o bayesiano). Para el caso de los modelos tradicionales se utilizaron los indicadores AIC, BIC y también se utilizó el método de ANOVA, que realiza una prueba de razón de verosimilitud entre dos modelos IRT anidados (Rizopoulos, 2022) y para el caso de los modelos bayesianos se utilizó el indicador WAIC.

Estimación de los parámetros del modelo TRI. Se estimaron los parámetros de cada *ítem* del cuestionario (nivel de dificultad, nivel de discriminación y nivel de penalización de los *ítems*); además, se estimó el nivel de habilidad de cada individuo que hace referencia al nivel de satisfacción del colaborador.

Análisis Descriptivo del Nivel de Satisfacción Estimado. Con la lista de valores de estimados sobre el nivel de satisfacción, se realizó una segmentación en base a la puntuación y se determinan los grupos satisfechos e insatisfechos. Además, con la segmentación es posible obtener resultados descriptivos contrastando los segmentos con otras variables que perfilan al colaborador de la entidad financiera (la posición del colaborador, edad, ingreso, etc.).

Elección de los *Ítems* Críticos para el CO**.** Dado que se estimaron los parámetros de cada *ítem* que conforman el cuestionario. Con los valores estimados es posible realizar un ranking de los *ítems* e identificar los que son más críticos y así proponer acciones de mejora según las áreas de la entidad financiera.

Capítulo IV. Resultados y Discusión

4.1. Resultados de Simulación

4.1.1. *Análisis del Parámetro del Individuo*

En términos generales, los modelos bayesianos (simétricos y asimétricos) de dos parámetros son mejores que los modelos logísticos tradicionales en la estimación de la habilidad de los individuos. En la Tabla 8 se muestran los resultados de la medición de la precisión de la estimación del parámetro del individuo a través de los estadísticos RMSE y MAPE para cada uno de los escenarios propuestos.

Tabla 8

Resultados de Estimación del Nivel de Habilidad

		Tradicional		Bayesiano simétrico		Bayesiano asimétrico	
Esc.	Estad.	1PL	2PL	1PL_BAY	2PL_BAY	LPE	RLPE
1	RMSE	*0.49233*	0.47637	*0.50451*	**0.47224**	0.47383	**0.47228**
	MAPE	*0.38538*	0.36927	*0.39902*	**0.36866**	0.36975	**0.36833**
2	RMSE	0.47728	0.47503	*0.51607*	**0.47048**	0.48257	**0.47264**
	MAPE	**0.36591**	0.36615	*0.40885*	0.36703	0.37468	0.36876
3	RMSE	0.42204	**0.38618**	0.54079	*1.16299*	0.77133	0.77133
	MAPE	0.33433	**0.33017**	0.43533	*0.94804*	0.55647	0.55647
4	RMSE	0.49980	0.49003	*0.51577*	**0.47856**	**0.47856**	0.47978
	MAPE	0.39226	0.38279	*0.41037*	**0.37425**	**0.37422**	0.37477
5	RMSE	0.49154	0.48609	*0.51465*	**0.47055**	0.47783	0.47265
	MAPE	0.36177	0.35894	*0.40030*	**0.35812**	0.36252	0.36028
6	RMSE	**0.44101**	0.48620	*1.30199*	1.16017	1.15514	1.15769
	MAPE	**0.34386**	0.40243	*1.08770*	0.94999	0.94502	0.94769

Nota. Tomar en cuenta que 1PL y 2PL son modelos logísticos tradicionales con un parámetro y dos parámetros respectivamente, 1PL_BAY y 2PL_BAY son modelos logísticos bayesianos con enlace simétrico de un parámetro y dos parámetros respectivamente, LPE y RLPE son modelos logísticos bayesianos con enlace asimétrico de exponente positivo y de exponente positivo reflexivo respectivamente. Además, considerar que los valores en negrita son los más bajos a nivel de escenario e indicador y los valores en cursiva son los más altos.

En el primer escenario *"Modelos TRI con enlace simétrico para pocos ítems y muestras muy grandes"*, los modelos bayesianos 2PL_BAY y RLPE alcanzaron la mejor precisión en la estimación del nivel de habilidad evaluando los estadísticos

RMSE y MAPE respectivamente, mientras que los modelos con baja precisión fueron 1PL_BAY y 1PL.

En el segundo escenario *"Modelos TRI con enlace simétrico para pocos ítems y muestras grandes"*, los modelos bayesianos 2PL_BAY y RLPE alcanzaron la mejor precisión evaluando el estadístico RMSE, mientras que con el MAPE se encontró que los modelos 1PL y 2PL tuvieron mejor precisión. Por otro lado, el modelo 1PL_BAY tuvo la más baja precisión.

En el tercer escenario *"Modelos TRI con enlace simétrico para pocos ítems y muestras pequeñas"*, el modelo tradicional 2PL tuvo la mejor precisión, mientras que los modelos bayesiano fueron menos precisos.

En el cuarto escenario *"Modelos TRI con enlace asimétrico para pocos ítems y muestras muy grandes"*, los modelos bayesianos LPE y 2PL_BAY alcanzaron la mejor precisión, mientras que los modelos con baja precisión fueron 1PL_BAY y los modelos tradicionales.

En el quinto escenario *"Modelos TRI con enlace asimétrico para pocos ítems y muestras grandes"*, el modelo bayesiano 2PL_BAY alcanzó la mejor precisión, mientras que los modelos con baja precisión fueron 1PL_BAY y los modelos tradicionales.

En el sexto escenario *"Modelos TRI con enlace asimétrico para pocos ítems y muestras pequeñas"*, se observó que los modelos tradicionales 1PL y 2PL alcanzaron la mejor precisión, mientras que los modelos bayesiano fueron menos precisos.

4.1.2. *Análisis del Parámetro Dificultad de los Ítems*

En términos generales, los modelos bayesianos asimétricos de dos parámetros son mejores que los modelos logísticos tradicionales en la estimación de la dificultad

de los ítems. En la Tabla 9 se muestran los resultados de la medición de la precisión de la estimación del parámetro del *ítem* de dificultad a través de los estadísticos RMSE y MAPE para cada uno de los escenarios propuestos.

Tabla 9

Resultados de Estimación del Nivel de Dificultad

		Tradicional		Bayesiano simétrico		Bayesiano asimétrico	
Escenario	Estad.	1PL	2PL	1PL_BAY	2PL_BAY	LPE	RLPE
1	RMSE	3.21423	*3.82479*	0.5045	**0.4722**	0.4738	**0.4723**
	MAPE	2.95810	*3.34614*	0.3990	**0.3687**	0.3697	**0.3683**
2	RMSE	2.90225	*3.05526*	0.56144	1.37515	0.67942	**0.5330**
	MAPE	2.14040	*2.21453*	0.39164	1.08986	0.48832	**0.4028**
3	RMSE	2.1834	*12.2083*	**0.3085**	1.1630	0.7713	0.8647
	MAPE	1.7389	*6.2186*	**0.2621**	0.9480	0.5565	0.5198
4	RMSE	4.4233	*5.7490*	1.5754	1.7507	**0.7330**	0.8782
	MAPE	3.8821	*4.8200*	1.4146	1.4563	**0.6597**	0.7934
5	RMSE	4.12544	*4.83661*	1.36732	1.60995	**1.04209**	1.0855
	MAPE	3.23855	*3.66731*	1.16584	1.30491	**0.84839**	0.9784
6	RMSE	8.88070	*36.27554*	1.24957	1.21990	0.60814	**0.4982**
	MAPE	4.61496	*18.86806*	0.83521	0.99528	0.46184	**0.3554**

Nota. Tomar en cuenta que 1PL hace referencia al modelo logístico tradicional con un parámetro, 2PL hace referencia al modelo logístico tradicional con dos parámetros, 1PL_BAY hace referencia al modelo logístico bayesiano con enlace simétrico de un parámetro, 2PL_BAY hace referencia al modelo logístico bayesiano con enlace simétrico de dos parámetros, LPE hace referencia al modelo logístico bayesiano con exponente positivo, RLPE hace referencia al modelo logístico bayesiano con exponente positivo reflexivo.

En el primer y segundo escenario, los modelos 2PL_BAY y RLPE alcanzaron la mejor precisión, mientras que los modelos tradicionales tuvieron baja precisión.

En el tercer escenario, el modelo 1PL_BAY alcanzó la mejor precisión, mientras que los modelos tradicionales fueron menos precisos. Sin embargo, los resultados no son concluyentes.

En el cuarto y quinto escenario, los modelos LPE y RLPE alcanzaron mejor precisión, mientras que los modelos tradicionales obtuvieron baja precisión.

En el sexto escenario, el modelo RLPE alcanzó la mejor precisión, mientras que los modelos tradicionales fueron menos precisos. Sin embargo, los resultados no son concluyentes.

4.1.3. *Análisis del Parámetro Discriminación de los Ítems*

En términos generales, los modelos bayesianos (simétricos y asimétricos) de dos parámetros son mejores que los modelos logísticos tradicionales en la estimación de la discriminación de los ítems. En la Tabla 100 se muestran los resultados de la medición de la precisión de la estimación del parámetro del *ítem* de discriminación a través de los estadísticos RMSE y MAPE para cada uno de los escenarios propuestos.

Tabla 10

Resultados de Estimación del Nivel de Discriminación

Escenario	Estad.	2PL	2PL_BAY	LPE	RLPE
1	RMSE	0.3356	**0.3264**	*0.4943*	0.3824
	MAPE	**0.1680**	**0.1756**	*0.3940*	0.2977
2	RMSE	0.3209	**0.2888**	*27.3203*	0.3242
	MAPE	0.2270	**0.1991**	*9.1181*	0.2588
3	RMSE	*12.2083*	**0.7302**	0.7847	0.7836
	MAPE	*6.2186*	**0.6255**	0.7121	0.6607
4	RMSE	1.0021	0.9619	**0.3595**	*2.5916*
	MAPE	0.7872	0.7573	**0.2701**	*1.9833*
5	RMSE	0.7661	0.8059	**0.6018**	*3.0885*
	MAPE	0.6166	0.6170	**0.3936**	*2.1921*
6	RMSE	18.6632	0.6861	*27.4479*	**0.6266**
	MAPE	8.4774	0.5171	*9.3712*	**0.3264**

Nota. Tomar en cuenta que 2PL es un modelo logístico tradicional con dos parámetros, 2PL_BAY es un modelo logístico bayesiano con enlace simétrico de dos parámetros, LPE y RLPE son modelos logísticos bayesianos con enlace asimétrico de exponente positivo y de exponente positivo reflexivo respectivamente. Además, considerar que los valores en negrita son los más bajos a nivel de escenario e indicador y los valores en cursiva son los más altos.

En el primer y segundo escenario los modelos bayesianos 2PL_BAY y 2PL alcanzaron la mejor precisión en la estimación del nivel de discriminación, mientras que el modelo con baja precisión fue LPE.

En el tercer escenario el modelo bayesiano 2PL_BAY y 2PL alcanzó la mejor precisión en la estimación del nivel de discriminación, mientras que el modelo con baja precisión fue 2PL. Sin embargo, estos resultados no son concluyentes.

En el cuarto y quinto escenario el modelo bayesiano LPE alcanzó la mejor precisión en la estimación del nivel de discriminación, mientras que el modelo con baja precisión fue RLPE.

En el sexto escenario el modelo bayesiano RLPE alcanzó la mejor precisión en la estimación del nivel de discriminación, mientras que el modelo con baja precisión fue LPE. Sin embargo, estos resultados no son concluyentes.

4.1.4. *Análisis del Parámetro Penalización de los Ítems*

En términos generales, el modelo bayesiano LPE fue mejor que el modelo RLPE en la estimación de la penalización de los ítems. En la Tabla 11 se muestran los resultados de la medición de la precisión de la estimación del parámetro del *ítem* de penalización a través de los estadísticos RMSE y MAPE para cada uno de los escenarios propuestos.

Tabla 11

Resultados de Estimación del Nivel de Penalización

Escenario	Estadístico	LPE	RLPE
4	RMSE	1.31458	2.55199
	MAPE	1.07892	2.41157
5	RMSE	0.65522	2.40706
	MAPE	0.60562	2.19948
6	RMSE	1.95338	1.86128
	MAPE	1.83051	1.65197

Nota. Tomar en cuenta LPE y RLPE son modelos logísticos bayesianos con enlace asimétrico de exponente positivo y de exponente positivo reflexivo respectivamente. Además, considerar que los valores en negrita son los más bajos a nivel de escenario e indicador y los valores en cursiva son los más altos.

En el cuarto y quinto escenario, se observó que el modelo LPE alcanzó la mejor precisión. Por tanto, se ha evidenciado la relevancia del modelo LPE para la estimación del nivel de penalización en dichos escenarios.

En el sexto escenario, se observó que el modelo RLPE alcanzó la mejor precisión. Por tanto, se ha evidenciado la relevancia del modelo RLPE para la estimación del nivel de penalización en dicho escenario.

4.1.5. *Discusión de los Resultados de la Simulación*

En muchos escenarios, los modelos bayesianos superaron o igualaron la precisión de los modelos tradicionales obteniendo mejores resultados en escenarios donde se tiene un gran volumen de información y pocos ítems, mientras que en muestras pequeñas no son concluyentes; sin embargo, la elección del mejor modelo puede depender del escenario y de las métricas específicas utilizadas (RMSE o MAPE). Estos resultados están alineados con los encontrados por Chíncaro (2010), donde destacó que el método bayesiano sobresale como la opción de estimación más sólida (en esquemas ARS y DAGS), en contraste con otros métodos que enfrentan dificultades en la estimación de parámetros de ítems y personas, mostrando mejores indicadores de ajuste en muestras grandes y pocos ítems.

Los modelos bayesianos, especialmente LPE, RLPE y 2PL_BAY parecen ser más robustos en diferentes condiciones de escenario, demostrando su versatilidad y eficacia en la estimación de parámetros en modelos TRI. La desventaja que se ha podido evidenciar en el presente estudio de simulación es que requiere un soporte tecnológico robusto para la gran cantidad de iteraciones que se realizaron en el proceso de estimación de los parámetros. Estas conclusiones están alineadas con los resultados obtenidos por Tarazona (2013) donde calculó que la estimación de los

parámetros del modelo para muestras de tamaño moderado, con 5 categorías por ítem, demoró una hora y 21 minutos.

Estos resultados fueron útiles para el caso de aplicación respecto a la elección de las dimensiones y el tamaño de muestra considerado para estimar los parámetros en el estudio de satisfacción del clima organizacional. Asimismo, permitió tener mayor confianza en la utilización de los modelos bayesianos asimétricos.

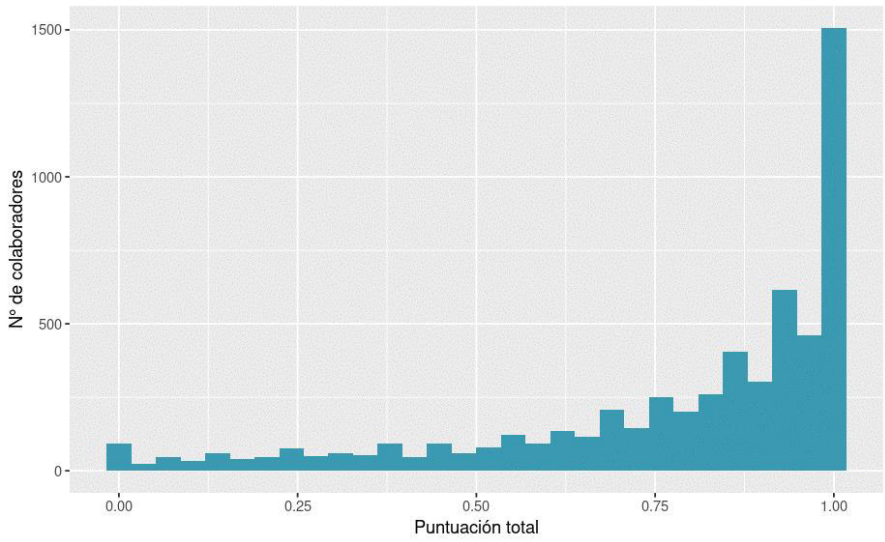
4.2. Resultados del Caso de Aplicación

4.2.1. *Análisis Exploratorio*

Primero, se revisó la puntuación total de los colaboradores que respondieron a la ECO de la entidad financiera, donde se encontró que hay una concentración importante de colaboradores satisfechos (Ver Figura 13). El histograma presenta una distribución asimétrica con cola a la izquierda, lo cual permite sustentar la elección de los modelos logísticos asimétricos.

Figura 13

Histograma de Puntuación de la Encuesta Clima Organizacional

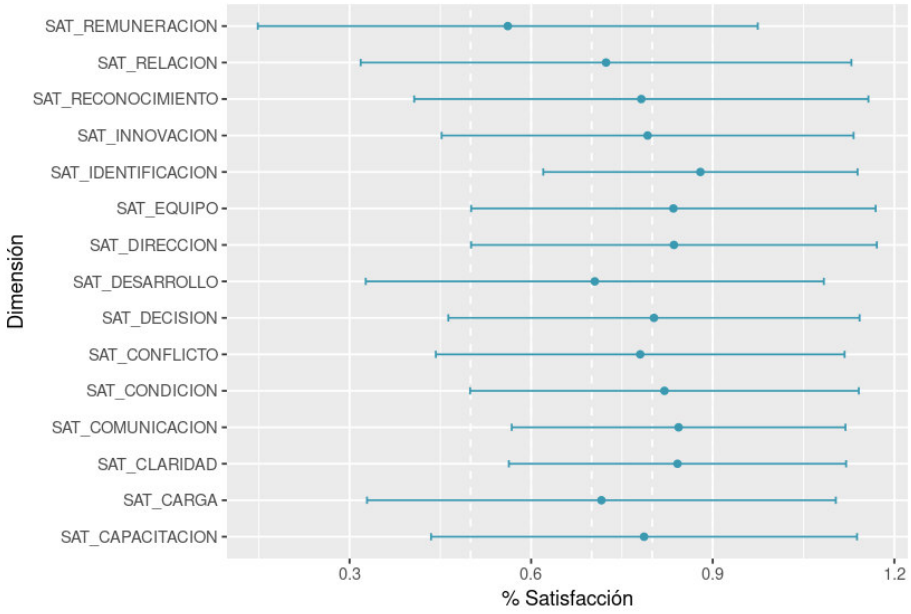


Segundo, se revisó al nivel de satisfacción en el CO de la entidad financiera por cada una de las dimensiones, donde se encontró que la dimensión de

Remuneración tiene una menor puntuación acompañado de una variabilidad en las puntuaciones, seguido por las dimensiones *Relación*, *Desarrollo* y *Carga laboral*; por otro lado, la dimensión *Identificación* alcanzó la mejor puntuación, seguido de *Equipo*, *Dirección*, *Comunicación* y *Claridad* (ver Figura 14). Respecto a la aplicación de los modelos propuestos se decidió analizar las dimensiones de *Remuneración* y *Desarrollo* por su menor nivel de satisfacción y también por la cantidad de *ítems* con que cuentan cada uno.

Figura 14

Comparación de Puntuaciones por Dimensiones de la ECO



Tercero, se revisó al nivel de satisfacción en el CO de la entidad financiera por diversos *drivers* como el puesto del colaborador que rindió la encuesta, el tipo de área donde labora, el área específico, la edad y los rangos de remuneración (ver el Apéndice F). Se encontró que los analistas y los ejecutivos que pertenecen a áreas de soporte presentan un bajo nivel de satisfacción, ellos se encuentran entre 26 y 46 años de edad.

La aplicación de los modelos propuestos se realizaron en las dimensiones *Remuneración y Desarrollo*, además, se filtró el universo inicial considerando los siguientes criterios: (i) colaboradores que son analistas o ejecutivos, que laboran en áreas de soporte; (ii) colaboradores que tienen entre 26 y 46 años de edad.

4.2.2. *Análisis Descriptivo de los Ítems*

En la dimensión de *Remuneración*, se evidencia un histograma con una mayor concentración en las puntuaciones mínimas y máximas, como se aprecia en el lado izquierdo de la Figura 15. Además, las preguntas 4, 5 y 6 muestran el mayor porcentaje de satisfacción, según se observa en el lado derecho de la Figura 15. Por otra parte, los ítems exhibieron variaciones en los patrones de respuestas para cada nivel de puntuación de los colaboradores (ver Figura 16). La pregunta 4 supera el 50% de satisfacción en la puntuación 1, la pregunta 5 lo hace en la puntuación 2, la pregunta 6 en la puntuación 2, la pregunta 1 en la puntuación 4, y las preguntas 2 y 3 en la puntuación 5, como se ilustra en la Figura 16. Estos hallazgos sugieren que las curvas características de los ítems presentan una forma asimétrica.

Figura 15

Análisis de los Ítems de la Dimensión Remuneración

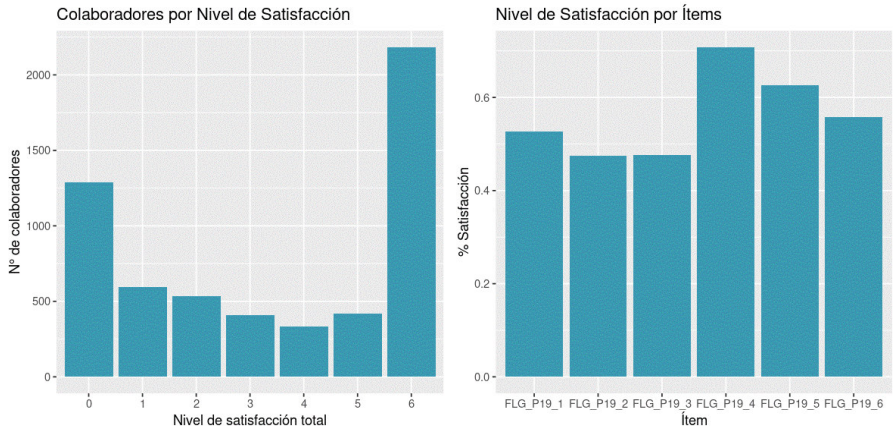
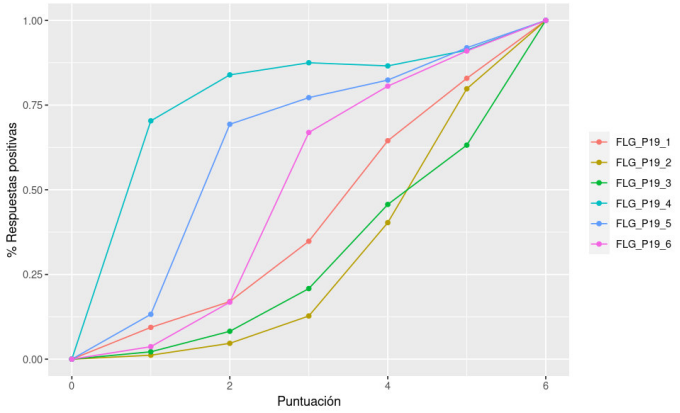


Figura 16

Satisfacción del Clima en los Ítems de la Dimensión Remuneración



En la dimensión de *Desarrollo*, se aprecia un histograma con una mayor concentración en la puntuación máxima, como se muestra en el lado izquierdo de la Figura 17. Además, la pregunta 3 exhibe el mayor porcentaje de satisfacción, según se ilustra en el lado derecho de la Figura 17. Por otra parte, los ítems muestran variaciones en los patrones de respuestas, donde la pregunta 3 supera el 50% de satisfacción en la puntuación 2, la pregunta 1 lo hace en la puntuación 3, las preguntas 2 y 4 presentan un comportamiento similar, y la pregunta 5 muestra una forma de S, como se evidencia en la Figura 18. Estos resultados sugieren que las curvas características de los ítems presentan una forma asimétrica.

Figura 17

Análisis de los Ítems de la Dimensión Desarrollo

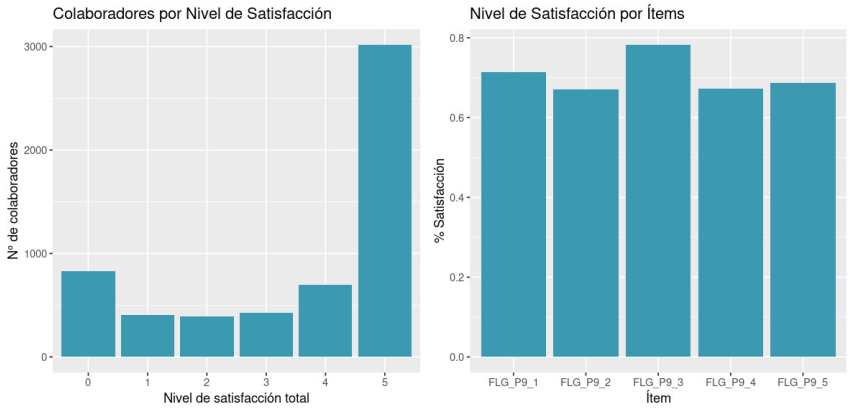
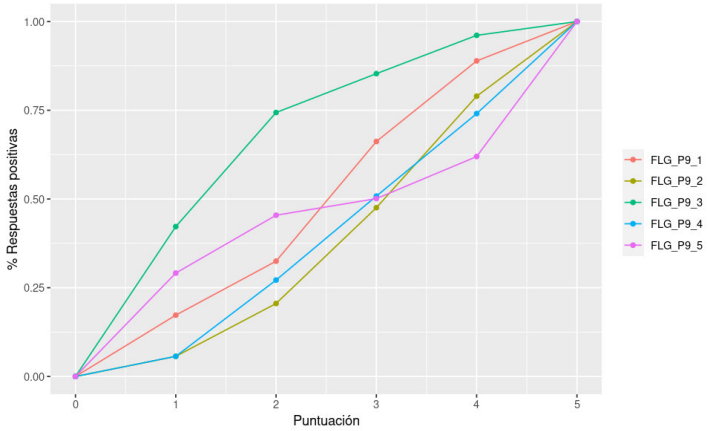


Figura 18

Satisfacción del Clima en los Ítems de la Dimensión Desarrollo



4.2.3. *Análisis del Caso Mediante la TCT*

Dimensión *Remuneración*. La fiabilidad de los *ítems* resultó adecuada. En el análisis del nivel de dificultad (o nivel de satisfacción con el CO) se encontró que el *ítem* P19_4 es la que tiene mayor nivel de satisfacción, mientras que los *ítems* P19_2 y P19_3 tienen la más baja satisfacción. Respecto al nivel de discriminación, los *ítems* P19_2 y P19_6 están más correlacionados con la puntuación total de la dimensión, mientras que el *ítem* P19_4 es el que tiene la correlación más baja (ver Tabla 12).

Tabla 12

Descripción de los Ítems de la Dimensión Remuneración

				Alpha Crombach		Correlación Biserial	
Ítem	N (1)	P (2)	Q (3)	Todos (4)	Excluir (5)	Incluir (6)	Excluir (7)
FLG_P19_1	5,769	52.6%	47.4%	0.9194	0.9018	0.8604	0.791
FLG_P19_2	5,769	**47.5%**	52.5%	0.9194	0.8971	0.8837	**0.8246**
FLG_P19_3	5,769	47.6%	52.4%	0.9194	0.9015	0.8619	0.7931
FLG_P19_4	5,769	70.8%	29.2%	0.9194	0.9216	0.7403	0.6379
FLG_P19_5	5,769	62.6%	37.4%	0.9194	0.9074	0.8297	0.7508
FLG_P19_6	5,769	55.8%	44.2%	0.9194	0.8973	0.8824	0.8231

Nota. (1) es el número de colaboradores, (2) es el porcentaje de colaboradores satisfechos, (3) Q es el porcentaje de colaboradores insatisfechos, (4) es el alpha de Crombach considerando todos los *ítems*, (5) es el alpha de Crombach excluyendo el *ítem*, (6) es la correlación biserial incluyendo el *ítem*, (7) es la correlación biserial excluyendo el *ítem*.

Finalmente, el *ítem* P19_2 es uno de los más críticos debido a que presenta un menor nivel de satisfacción y está más correlacionado con la puntuación total de la dimensión.

Dimensión desarrollo. La fiabilidad de los *ítems* también resultó adecuada, en el análisis del nivel de dificultad se encontró que el *ítem* P9_3 es la que tiene mayor nivel de satisfacción, seguido por el *ítem* P9_1, mientras que los *ítems* P9_2 y P9_4 tienen la más baja satisfacción. Respecto al nivel de discriminación, el *ítem* P9_2 está más correlacionado con la puntuación total de la dimensión, mientras que el *ítem* P9_5 es el que tiene la correlación más baja (ver Tabla 13).

Tabla 13

Descripción de los Ítems de la Dimensión Desarrollo

				Alpha Crombach		Correlación Biserial	
Ítem	N (1)	P (2)	Q (3)	Todos (4)	Excluir (5)	Incluir (6)	Excluir (7)
FLG_P9_1	5,769	71.4%	28.7%	0.89	0.8587	0.8548	0.7647
FLG_P9_2	5,769	**67.1%**	32.9%	0.89	0.8571	0.8618	**0.7706**
FLG_P9_3	5,769	78.3%	21.8%	0.89	0.8687	0.8199	0.7245
FLG_P9_4	5,769	67.2%	32.8%	0.89	0.8614	0.8501	0.7527
FLG_P9_5	5,769	68.6%	31.4%	0.89	0.8839	0.7833	0.6544

Nota. (1) número de colaboradores, (2) porcentaje de colaboradores satisfechos, (3) porcentaje de colaboradores insatisfechos, (4) alpha de Crombach considerando todos los *ítems*, (5) alpha de Crombach excluyendo el *ítem*, (6) correlación biserial incluyendo el *ítem*, (7) correlación biserial excluyendo el *ítem*.

Análogo al análisis de la dimensión remuneración, el *ítem* P9_2 es uno de los más críticos debido a que es uno de los *ítems* más bajos en el nivel de satisfacción y está más correlacionado con la puntuación total de la dimensión.

4.2.4. *Análisis del Caso Mediante la TRI*

Análisis de Unidimensionalidad de los *Ítems*. Se aplicaron las técnicas de componentes principales mediante correlaciones tetracóricas y el análisis paralelo de los *ítems* para la verificación del supuesto.

Análisis de Componentes Principales Mediante Correlaciones Tetracóricas. Para ambas dimensiones analizadas se encontró que el primer componente es suficiente para explicar la mayor cantidad de varianza, en el caso de la dimensión *Remuneración* se tiene un nivel de 89.6% (Tabla 14) y en la dimensión *Desarrollo* se tiene un nivel de 87.7% (Tabla 15). Por tanto, se concluye que en los datos analizados se cumple con el supuesto de unidimensionalidad.

Tabla 14

Análisis de Componentes Principales (Remuneración)

Componente	Autovalor	% Varianza explicada	% Varianza acumulada
1	**5.37**	**89.6%**	**89.6%**
2	0.31	5.2%	94.8%
3	0.13	2.1%	96.9%
4	0.08	1.4%	98.3%
5	0.06	1.0%	99.3%
6	0.04	0.7%	100.0%

Tabla 15

Análisis de Componentes Principales (Desarrollo)

Componente	Autovalor	% Varianza explicada	% Varianza acumulada
1	**4.39**	**87.7%**	**87.7%**
2	0.27	5.3%	93.0%
3	0.15	2.9%	96.0%
4	0.13	2.5%	98.5%
5	0.07	1.5%	100.0%

Análisis Paralelo de los Ítems. De manera gráfica, se confirma que para las dos dimensiones se tiene que el segundo autovalor observado es menor que el simulado, con lo cual se evidencia la presencia de unidimensionalidad para los *ítems* de las dos dimensiones (ver Figura 19 y Figura 20).

Figura 19

Análisis Paralelo de los Ítems para Dimensión Remuneración

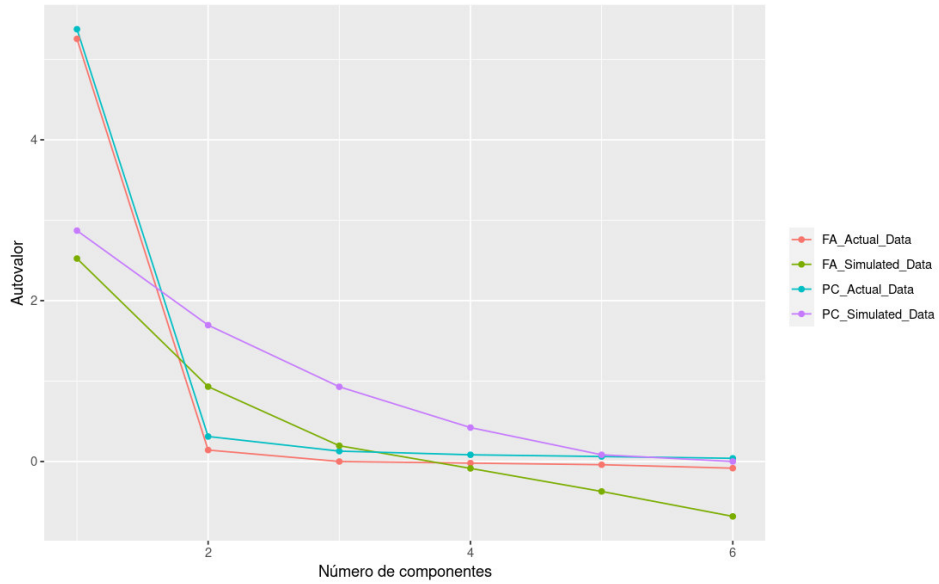
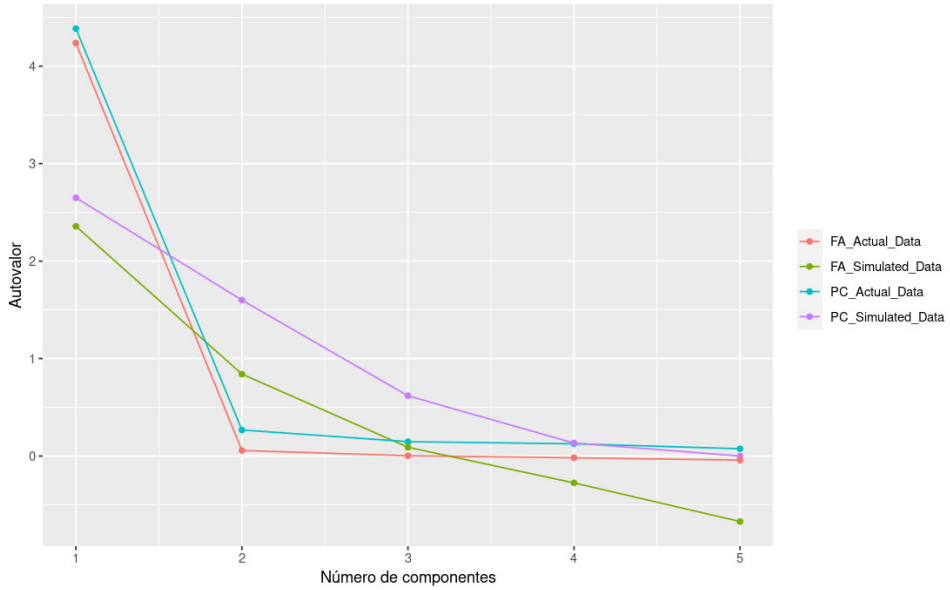


Figura 20

Análisis Paralelo de los Ítems para Dimensión Desarrollo



Estimación de los Modelos Tradicionales. Se estimaron los modelos para cada dimensión de manera diferenciada.

Para la dimensión *Remuneración*, se encontró que el modelo 2PL resultó mejor que el modelo Rasch con lo cual se evidencia que la discriminación del ítem es

un parámetro importante para los *ítems* (ver Tabla 17). Los colaboradores se encuentran más satisfechos con el *ítem* P19_4, mientras que los *ítems* P19_2 y P19_3 tienen menores niveles de satisfacción. Por el lado de la discriminación, el *ítem* P19_3 tiene el mayor nivel, seguido por P19_2 y el *ítem* P19_4 el menor nivel (ver Tabla 16). Por tanto, los *ítems* P19_2 y P19_3 son los más críticos en la dimensión *Remuneración* para mejorar el nivel de satisfacción.

Tabla 16

Estimación con los Modelos Tradicionales (Remuneración)

Ítem	Modelo Rasch			Modelo 2PL		
	Dificultad	Discriminación	Pr(>X^2)	Dificultad	Discriminación	Pr(>X^2)
FLG_P19_1	0.0443	4.5559	<0.0001	0.0183	4.4096	<0.0001
FLG_P19_2	0.1917	4.5559	<0.0001	**0.1248**	**8.801**	<0.0001
FLG_P19_3	0.1886	4.5559	0.0041	**0.1617**	**4.8906**	<0.0001
FLG_P19_4	-0.5083	4.5559	<0.0001	-0.5864	2.8655	<0.0001
FLG_P19_5	-0.2439	4.5559	<0.0001	-0.2858	3.8264	<0.0001
FLG_P19_6	-0.045	4.5559	<0.0001	-0.0615	5.9854	<0.0001

Nota. Pr(>X^2) es el p-valor de la prueba de hipótesis de que el *ítem* se ajusta al modelo. Además, los valores sombreados de amarillo representan a los ítems críticos.

Tabla 17

Comparación de Modelos Tradicionales (Remuneración)

Modelo	AIC	BIC	log.lik	LRT	df	p.value
Rasch	27843.90	27890.52	-13914.95			
2PL	27521.54	27601.47	-13748.77	332.36	5	<0.001

Respecto a la comparación de las curvas características de los *ítems* se aprecia que el *ítem* P19_2 tiene una pendiente más pronunciada cuando se aplicó el modelo 2PL y el *ítem* P19_4 presenta la menor inclinación, los cuales se diferencian en mayor medida que el modelo Rasch (ver Figura 21 y Figura 22).

Figura 21

CCI's Mediante el Modelo Rasch (Remuneración)

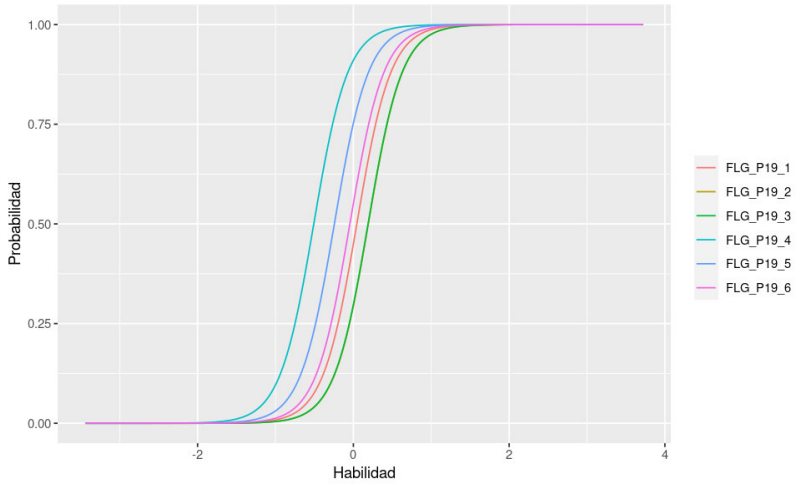
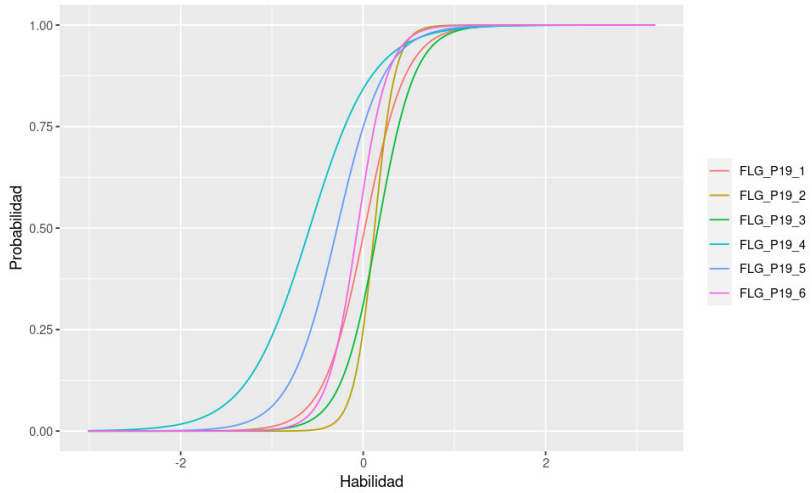


Figura 22

CCI's Mediante el Modelo 2PL (Remuneración)



Para la dimensión *Desarrollo*, el modelo 2PL resultó mejor que el modelo Rasch, análogamente al análisis de la dimensión anterior (ver Tabla 19). En relación con la dificultad de los *ítems*, los colaboradores se encuentran más satisfechos con el *ítem* P9_3, mientras que con el *ítem* P9_2 se tiene menor nivel de satisfacción (o mayor dificultad). En la discriminación el *ítem* P9_2 tiene el mayor nivel y el *ítem* P9_5 el menor nivel (ver Tabla 18). Por lo tanto, se concluye que el *ítem* P9_2 es crítico en la dimensión *Desarrollo* para mejorar el nivel de satisfacción.

Tabla 18

Estimación de Parámetros con los Modelos Tradicionales (Desarrollo)

Ítem	Modelo Rasch			Modelo 2PL		
	Dificultad	Discriminación	Pr(>X^2)	Dificultad	Discriminación	Pr(>X^2)
FLG_P9_1	-0.6193	3.9623	<0.0001	-0.6011	4.8621	<0.0001
FLG_P9_2	-0.4839	3.9623	<0.0001	**-0.4677**	**4.8787**	<0.0001
FLG_P9_3	-0.8615	3.9623	<0.0001	-0.8314	4.8079	<0.0001
FLG_P9_4	-0.4872	3.9623	<0.0001	-0.4821	3.992	<0.0001
FLG_P9_5	-0.5312	3.9623	<0.0001	-0.5778	2.6325	<0.0001

Nota. Pr(>X^2) es el p-valor de la prueba de hipótesis de que el *ítem* se ajusta al modelo. Además, los valores sombreados de amarillo representan a los ítems críticos.

Tabla 19

Comparación de Modelos Tradicionales (Desarrollo)

Modelo	AIC	BIC	log.lik	LRT	df	p.value
Rasch	23276.63	23316.6	-11632.32			
2PL	23081.7	23148.31	-11530.85	202.93	4	<0.001

Respecto a la comparación de las curvas características de los *ítems* se aprecia que el *ítem* P9_5 presenta la menor inclinación, mientras que los demás modelos presentan un comportamiento parecido al modelo Rasch.

Figura 23

CCI's Mediante el Modelo Rasch (Desarrollo)

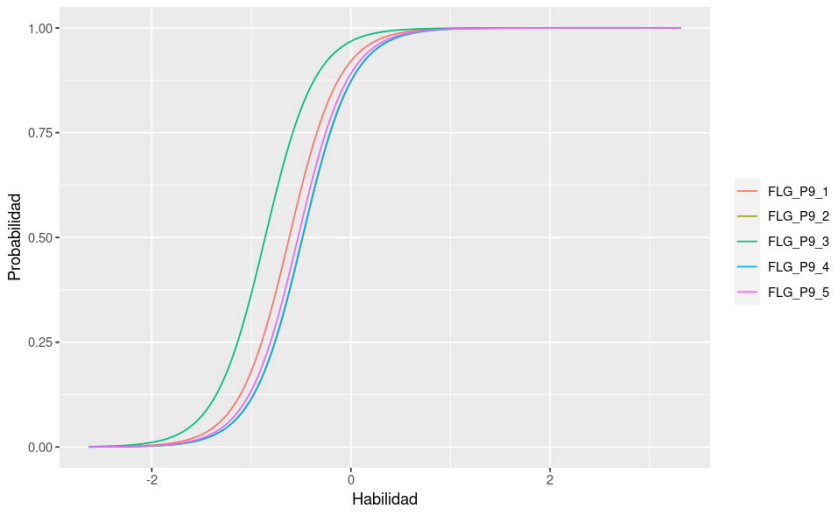
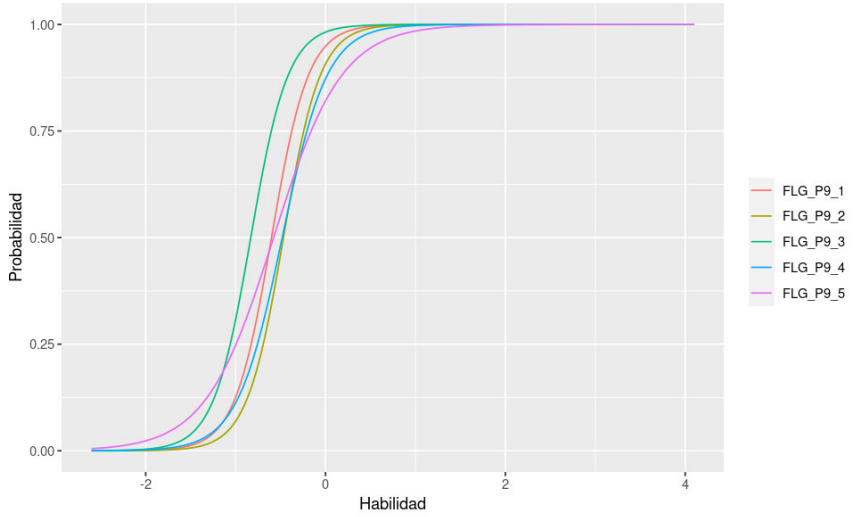


Figura 24

CCI's Mediante el Modelo 2PL (Desarrollo)



Estimación de Modelos Bayesianos Simétricos 1PL y 2PL. Para la estimación de los parámetros en las dimensiones remuneración y desarrollo se utilizó la librería RSTAN.

En la dimensión *Remuneración*, se obtuvo que el modelo logístico de dos parámetros con enfoque bayesiano resultó mejor que el modelo logístico de un parámetro bayesiano (ver Tabla 21). Respecto al análisis de la dificultad se encontró que el *ítem* con mayor dificultad fue P19_3, seguido por P19_2 y el *ítem* con menor dificultad fue P19_4, seguido por P19_5 (ver Tabla 20). En el análisis de la discriminación, el *ítem* P19_2 tuvo el mayor nivel y el *ítem* P19_4 el menor, además, todos los valores son positivos por lo que los *ítems* son adecuados. Por lo tanto, se concluye que el *ítem* P19_2 es un *ítem* crítico para la lograr la satisfacción del CO en la dimensión de *Remuneración* (ver Tabla 20).

Tabla 20

Estimación de los Modelos Bayesianos 1PL y 2PL (Remuneración)

	Modelo Bayesiano 1PL		Modelo Bayesiano 2PL	
Ítem	Dificultad	Discriminación	Dificultad	Discriminación
FLG_P19_1	-0.1369268		-0.07085842	5.184167
FLG_P19_2	0.150836		**0.05909916**	**8.918124**
FLG_P19_3	0.1446328		**0.06081246**	**5.808643**
FLG_P19_4	-1.1993937		-0.62013927	3.150316
FLG_P19_5	-0.7012304		-0.34358493	4.234954
FLG_P19_6	-0.3146505		-0.15188413	6.280904

Nota. Los valores en negrita representan a los ítems críticos.

Tabla 21

Comparación de Modelos Bayesianos Simétricos (Remuneración)

Modelo	p_waic	Waic
1PL	**0.6458652**	5.428095
2PL	1.500348	**4.844963**

Nota. El valor en negrita indica que corresponde al mejor modelo.

En la dimensión *Desarrollo*, se obtuvo que el modelo logístico de dos parámetros con enfoque bayesiano resultó mejor que el modelo logístico de un parámetro bayesiano (ver Tabla 23). Respecto al análisis de la dificultad se encontró que el *ítem* con mayor dificultad fue P9_2, seguido por P9_4 y el *ítem* con menor dificultad fue P9_3 (ver Tabla 22). En el análisis de la discriminación, el *ítem* P9_2 tuvo el mayor nivel y el *ítem* P9_5 el menor, además, todos los valores son positivos por lo que los *ítems* son adecuados. Por lo tanto, se concluye que el *ítem* P9_2 es un *ítem* crítico para la lograr la satisfacción del CO en la dimensión de *Desarrollo* (ver Tabla 22).

Tabla 22

Estimación de los Modelos Bayesianos 1PL y 2PL (Desarrollo)

	Modelo Bayesiano 1PL		Modelo Bayesiano 2PL	
Ítem	Dificultad	Discriminación	Dificultad	Discriminación
FLG_P9_1	-1.1706172		-0.5981927	5.041896
FLG_P9_2	-0.9135533		**-0.4676625**	**5.450399**
FLG_P9_3	-1.6404562		-0.8342607	4.695426
FLG_P9_4	-0.9196438		-0.4831404	4.334858
FLG_P9_5	-1.0027047		-0.5787027	2.707285

Nota. Los valores en negrita representan a los ítems críticos.

Tabla 23

Comparación de Modelos Bayesianos Simétricos (Desarrollo)

Modelo	p_waic	Waic
1PL	**0.7475742**	4.689317
2PL	1.276116	**4.179102**

Nota. El valor en negrita indica que corresponde al mejor modelo.

Estimación del Modelos Logísticos Bayesianos Asimétricos LPE y RLPE.

Para la estimación de los parámetros en las dimensiones remuneración y desarrollo se utilizó la librería RSTAN.

En la dimensión *Remuneración*, el modelo RLPE fue ligeramente mejor que LPE (ver Tabla 25). En el modelo LPE, el *ítem* con mayor dificultad fue P19_1 seguido por P19_2 y con menor dificultad fue P19_4; además, precisar que los niveles de los *ítems* P19_4, P19_5 y P19_6 se encuentran por debajo de cero por lo que se exige un bajo grado de satisfacción para estos *ítems* (ver Tabla 24). En el análisis de la discriminación, el *ítem* P19_2 tuvo el mayor nivel y el *ítem* P19_4 el menor, además, todos los valores son positivos por lo que los *ítems* son adecuados (ver Tabla 24). Por lo tanto, se concluye que el *ítem* P19_2 es un *ítem* crítico para el estudio de satisfacción del CO en la dimensión de *Remuneración*, alineado con

métodos anteriores (ver Tabla 24). En el modelo RLPE, se tienen diferencias, principalmente por la discriminación.

Tabla 24

Estimación de Parámetros con Modelos Bayesianos LPE y RLPE (Remuneración)

Ítem	Modelo Bayesiano LPE		Modelo Bayesiano RLPE	
	Dificultad	Discriminación	Dificultad	Discriminación
FLG_P19_1	**0.259**	**16.052**	**0.865**	*3.567*
FLG_P19_2	**0.233**	**36.736**	0.485	6.740
FLG_P19_3	0.145	6.607	0.391	4.682
FLG_P19_4	*-1.608*	*2.643*	*-1.032*	**20.189**
FLG_P19_5	-1.188	3.383	-0.665	16.140
FLG_P19_6	-0.693	4.841	-0.335	12.407

Tabla 25

Comparación de Modelos Bayesianos Asimétricos (Remuneración)

Modelo	p_waic	Waic
LPE	1.470841	4.708187
RLPE	**1.473827**	**4.690954**

Nota. El valor en negrita indica que corresponde al mejor modelo.

En la dimensión *Desarrollo* se obtuvo que el modelo RLPE es ligeramente mejor que el modelo LPE (ver Tabla 27). En el modelo LPE, el *ítem* con mayor dificultad fue P9_1, seguido por P9_2 y los *ítems* con menor dificultad fueron P9_3 y P9_4 (ver Tabla 26). En el análisis de la discriminación, el *ítem* P9_1 tuvo el mayor nivel y el *ítem* P9_5 el menor, además, todos los valores son positivos por lo que los *ítems* son adecuados (ver Tabla 26). Por lo tanto, se concluye que el *ítem* P9_1 es un *ítem* crítico para la lograr la satisfacción del CO en la dimensión *Desarrollo* (ver Tabla 26). En el modelo RLPE, se tienen diferencias, principalmente por la discriminación.

Tabla 26

Estimación de los Modelos Bayesianos LPE y RLPE (Desarrollo)

Ítem	Modelo LPE		Modelo RLPE	
	Dificultad	Discriminación	Dificultad	Discriminación
FLG_P9_1	**-0.364**	**8.256**	**-0.162**	3.945
FLG_P9_2	-0.544	5.405	-0.355	5.302
FLG_P9_3	*-1.130*	4.264	*-0.861*	5.743
FLG_P9_4	*-1.130*	3.350	-0.764	**8.576**
FLG_P9_5	-0.797	*2.532*	-0.571	*2.819*

Tabla 27

Comparación de Modelos Bayesianos Asimétricos (Desarrollo)

Modelo	p_waic	Waic
LPE	1.265111	4.150628
RLPE	**1.263304**	**4.149912**

Nota. El valor en negrita indica que corresponde al mejor modelo.

Comparación de Modelos. Se compararon los modelos bayesianos a través del indicador WAIC y se encontró que el modelo RLPE es el mejor modelo bayesiano (ver Tabla 28).

Tabla 28

Comparación de Modelos Bayesianos Mediante WAIC

Dimensión	2PL Bayesiano	RLPE
Remuneración	4.844963	**4.690954**
Desarrollo	4.179102	**4.149912**

Nota. El valor en negrita indica que corresponde al mejor modelo.

4.2.5. *Discusión de los Resultados del Caso de Aplicación*

El nivel de satisfacción general con el CO presentó una distribución asimétrica con cola a la izquierda, por lo que hay mayor presencia de colaboradores

satisfechos con el CO. Lo cual es un resultado esperado por los estudios de años pasados y por la gestión de los recursos humanos que se despliegan frecuentemente en la entidad financiera, asimismo, dichos resultados son sustentados porque frecuentemente la entidad financiera forma parte del *Great Place To Work*.

A pesar de que el nivel de satisfacción es alto en el análisis de CO, se identificaron dimensiones donde se pueden establecer acciones de mejora como son las dimensiones de *Remuneración* y *Desarrollo* donde se obtuvieron los menores niveles de satisfacción. En estas dimensiones se aplicaron los modelos propuestos en la presente tesis y entender mejor a las características de los ítems que lo componen.

Los modelos TRI presentaron mayor formalidad estadística por el uso de modelos probabilísticos que tratan de ajustarse al patrón de respuestas, según la habilidad de los individuos y de las características de los *ítems*. La utilidad de su aplicación es que proporciona la posibilidad de establecer un ordenamiento de los *ítems* en función a sus características y con ello determinar *ítems* críticos que puedan ser de utilidad para la entidad financiera en su gestión constante de los recursos humanos. Este enfoque de aplicación también se evidenciaron en estudios de Tarazona (2013).

Para la dimensión de *Remuneración* se determinó que el ítem más crítico fue P19_2, en las aplicaciones de los modelos de la TCT y TRI (principalmente los modelos logísticos simétricos tradicionales y bayesianos), sin embargo, en la aplicación de los modelos asimétricos, como el LPE, se determinó adicionalmente el *ítem* P19_1. Análogamente, para la dimensión de *Desarrollo* se determinó que el ítem más crítico fue P9_2, en las aplicaciones de los modelos de la TCT y TRI (principalmente los modelos logísticos simétricos tradicionales y bayesianos), sin

embargo, en la aplicación de los modelos asimétricos, como el LPE, se determinó adicionalmente el *ítem* P9_1.

4.3. Cumplimiento de los objetivos

4.3.1. *Objetivo General*

Los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico en el estudio de satisfacción del CO de una entidad financiera presentaron un mejor nivel de ajuste respecto a los modelos simétricos en las dos dimensiones seleccionadas *Remuneración* y *Desarrollo* (ver Tabla 28). Además, permite entender mejor el patrón de respuestas positivas en función de los niveles de habilidad ya que las curvas observadas presentaron asimetría (ver Figura 16 y 18).

4.3.2. *Objetivo Específico 1*

Los modelos asimétricos presentaron mejor rendimiento en los escenarios donde se tiene una gran cantidad de datos y donde la distribución de respuestas es desbalanceada. Adicionalmente, estima mejor el parámetro de dificultad (ver Tabla 8, Tabla 9, Tabla 10 y Tabla 11).

4.3.3. *Objetivo Específico 2*

En la dimensión *Remuneración*, los parámetros de dificultad tienden a ser parecidos entre los modelos 2PL y 2PL_BAY, pero se tienen diferencias con el modelo RLPE ya que tiende a amplificar en valor absoluto a los ítems extremos donde el ítem P19_1 es el de mayor dificultad a diferencia de los otros ítems. En el caso de la discriminación, el modelo RLPE considera que el ítem P19_4 tiene el mayor nivel de discriminación a comparación de los otros modelos que lo consideran con el bajo nivel (ver Tabla 29 y Figura 25).

Tabla 29

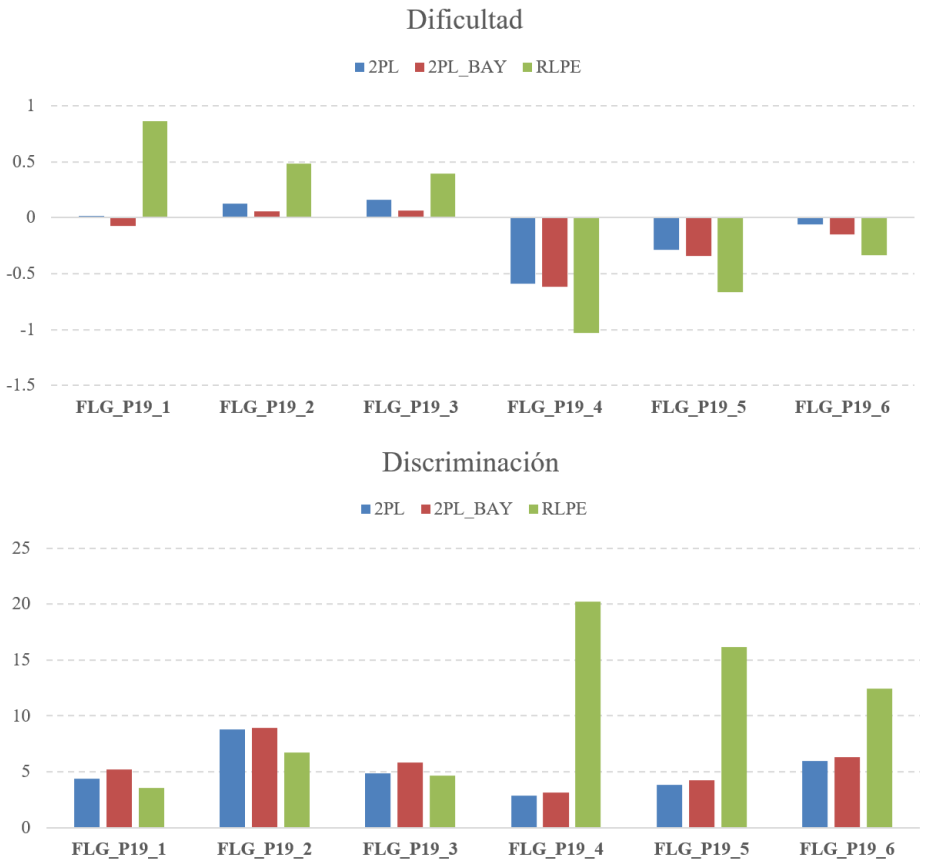
Comparación de Modelos Simétricos y Asimétricos (Remuneración)

Ítem	Modelo 2PL		Modelo 2PL Bayesiano		Modelo RLPE	
	Dif.	Disc.	Dif.	Disc.	Dif.	Disc.
FLG_P19_1	0.0183	4.4096	-0.0709	5.1842	**0.8652**	*3.5667*
FLG_P19_2	0.1248	**8.801**	0.0591	**8.9181**	0.4846	6.7398
FLG_P19_3	**0.1617**	4.8906	**0.0608**	5.8086	0.3914	4.6817
FLG_P19_4	*-0.5864*	*2.8655*	*-0.6201*	*3.1503*	*-1.0319*	**20.1893**
FLG_P19_5	-0.2858	3.8264	-0.3436	4.2350	-0.6649	16.1397
FLG_P19_6	-0.0615	5.9854	-0.1519	6.2809	-0.3350	12.4066

Nota. Donde Dif. es dificultad, Disc. es discriminación y Penal. es penalización.

Figura 25

Comparación de Parámetros (Remuneración)



En la dimensión *Desarrollo*, los parámetros de dificultad tienden a ser parecidos entre los modelos 2PL y 2PL_BAY, pero se tienen ciertas diferencias con

el modelo RLPE ya que considera al ítem P9_1 con mayor nivel de dificultad que los otros modelos y el ítem P9_3 la menor dificultad. En el caso de la discriminación, se tiene al ítem P9_4 con el mayor nivel lo cual es diferente al asignado por los otros modelos (ver Tabla 30 y Figura 26).

Tabla 30

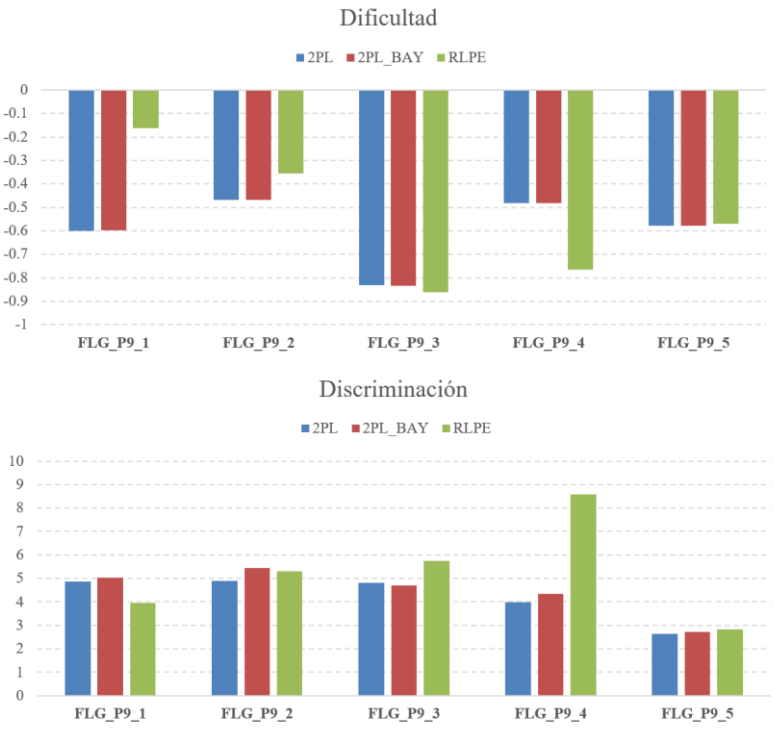
Comparación de Modelos Simétricos y Asimétricos (Desarrollo)

Ítem	Modelo 2PL		Modelo 2PL Bayesiano		Modelo RLPE	
	Dif.	Disc.	Dif.	Disc.	Dif.	Disc.
FLG_P9_1	-0.6011	4.8621	-0.5982	5.041896	**-0.162**	3.945
FLG_P9_2	**-0.4677**	**4.8787**	**-0.4677**	**5.450399**	-0.355	5.302
FLG_P9_3	*-0.8314*	4.8079	*-0.8343*	4.695426	*-0.861*	5.743
FLG_P9_4	-0.4821	3.992	-0.4831	4.334858	-0.764	**8.576**
FLG_P9_5	-0.5778	*2.6325*	-0.5787	*2.707285*	-0.571	*2.819*

Nota. Donde Dif. es dificultad, Disc. es discriminación y Penal. es penalización.

Figura 26

Comparación de Parámetros (Desarrollo)



4.3.4. *Objetivo Específico 3*

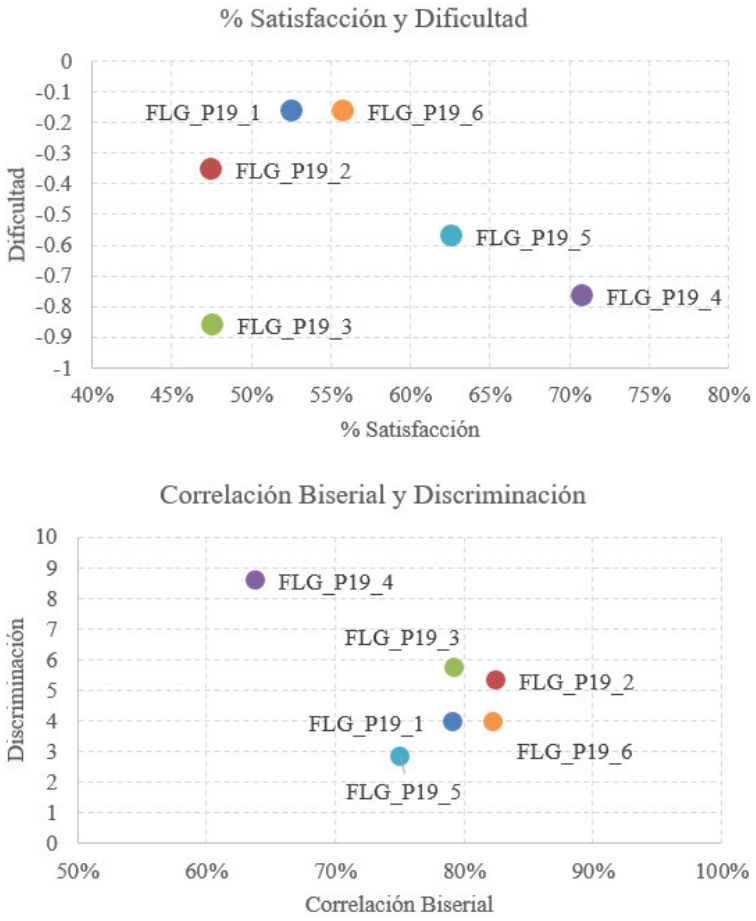
Se han determinado mejores niveles de ajuste al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace asimétrico a comparación de los modelos con función de enlace simétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera para las dos dimensiones analizadas (ver Tabla 28).

4.3.5. *Objetivo Específico 4*

En la dimensión *Remuneración* se evidenciaron diferencias en la estimación del parámetro *Dificultad* en los ítems P19_3 y en el caso de la discriminación se encontraron diferencias en el ítem P19_4 (ver Figura 27).

Figura 27

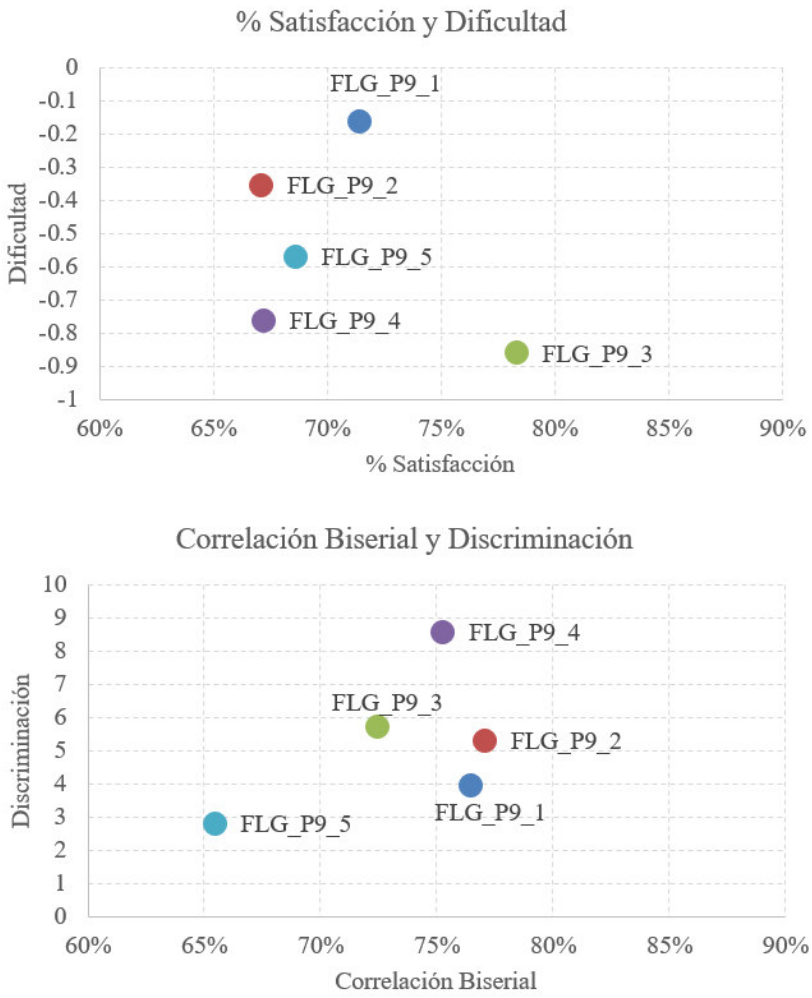
Comparación de Modelos TCT y TRI (Remuneración)



En la dimensión *Desarrollo* se evidenciaron diferencias en la estimación del parámetro *Dificultad* en el ítem P9_1 y en el caso de la discriminación se encontraron diferencias en los ítems P9_1 y P9_4 (ver Figura 28).

Figura 28

Comparación de Modelos TCT y TRI (Desarrollo)



Conclusiones

De acuerdo con el objetivo general de esta tesis, se ha evidenciado que los modelos logísticos de la TRI constituyen una alternativa formal y apropiada para investigaciones sobre la satisfacción del CO. Dado que la satisfacción del CO se considera una variable latente, las estimaciones a través de métodos convencionales pueden verse afectadas por sesgos derivados de las características de preguntas o de los propios individuos que responden el *test*. En este contexto, la aplicación de la TRI se ajusta de manera adecuada a la naturaleza de este estudio. Además, la implementación de modelos más precisos como los modelos logísticos con enlace asimétrico ha permitido alcanzar mejores niveles de ajuste a los patrones de respuestas de los individuos ante cada una de las preguntas seleccionadas.

Además, en el estudio de SCOEF, a través del análisis descriptivo de los ítems se ha podido evidenciar que los individuos tienden a estar satisfechos con el clima de la entidad financiera porque se tiene una mayor proporción de colaboradores satisfechos que insatisfechos, por lo que no será suficiente realizar los modelos probabilísticos en base a los modelos logísticos que son de carácter simétrico sino que es necesario utilizar modelos probabilísticos asimétricos para tener un mejor ajuste al caso de aplicación.

De acuerdo con el primer objetivo específico de la presente tesis, los modelos bayesianos demostraron consistentemente su capacidad para superar o igualar la precisión de los modelos tradicionales, destacándose especialmente en escenarios con grandes volúmenes de información y pocos ítems. Aunque los resultados fueron menos concluyentes en muestras pequeñas, la elección del modelo óptimo dependió del escenario y de las métricas específicas utilizadas, ya sea RMSE o MAPE. La robustez de modelos bayesianos asimétricos como LPE y RLPE en diversas

condiciones de escenario resalta su eficacia en la estimación de parámetros en modelos TRI.

De acuerdo con el segundo objetivo específico de la presente tesis, se evidenciaron diferencias en la estimación de los parámetros mediante la aplicación de los modelos TRI con enlace simétrico y asimétrico, lo cual se debe a que el parámetro de penalización de los modelos LPE o RLPE es significativo en determinadas curvas características de los ítems. En la dimensión de *Remuneración*, los modelos simétricos exhibieron parámetros de dificultad similares, pero difieren del modelo RLPE, especialmente en el ítem P19_1, donde el RLPE asigna el mayor nivel de dificultad, en el modelo LPE se determinan P_19_1 y P19_2 como los ítems con mayor dificultad. En cuanto a la discriminación, el modelo RLPE destaca al ítem P19_4 como el de mayor discriminación, en contraste con los otros modelos que lo consideran con un nivel más bajo. En la dimensión de *Desarrollo*, los modelos simétricos presentan similitudes en los parámetros de dificultad, pero discrepan del modelo RLPE, que asigna menor dificultad al ítem P9_4 y mayor dificultad a los ítems P9_1 y P9_2 en comparación con los otros modelos. En términos de discriminación, el modelo RLPE designa al ítem P9_4 con el mayor nivel, diferenciándose de los otros modelos.

De acuerdo con el tercer objetivo específico de la presente tesis, en la medición del CO de una entidad financiera, los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico presentaron mejores niveles de ajuste que los modelos con enlace simétrico. Específicamente, el modelo RLPE presentó un mejor indicador de precisión WAIC a comparación de los otros modelos. En ese sentido el modelo RLPE, se ajustó mejor al patrón de respuestas de cada curva característica.

De acuerdo con el cuarto objetivo específico de la presente tesis, se encontraron determinadas diferencias en la estimación de los parámetros aplicando los modelos de la TCT y de la TRI principalmente en los ítems P19_3 y P19_5 de la dimensión *Remuneración*, P9_1 y P9_4 de la dimensión *Desarrollo*. Lo que evidencia la importancia de utilizar modelos probabilísticos que estudian formalmente variables latentes como la satisfacción con el CO.

Referencias

Ackerman, T. (1994). Using multidimensional item response theory to understand what items and tests are measuring. *Applied Measurement in Education, 7*(4), 255–278. https://doi.org/10.1207/s15324818ame0704_1

Ahn, W., Haines, N., y Zhang, L. (2017). Revealing Neurocomputational Mechanisms of Reinforcement Learning and Decision-Making With the hBayesDM Package. *Computational Psychiatry*. 1. 1-34. 10.1162/CPSY_a_00002.

Aldana, J., y Valbuena, G. (2013). *Relaciones empíricas entre los estimativos de la teoría clásica de los test y la teoría de respuesta al ítem*. Bogotá: Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

American Psychological Association (APAa). (Washington, D.C.). Item response theory. *En el diccionario* APA Dictionary of Psychology. Recuperado el 15 de agosto del 2021 de https://dictionary.apa.org/item-response-theory

American Psychological Association (APAb). (Washington, D.C.). Item Characteristic Curve. *En el diccionario* APA Dictionary of Psychology. Recuperado el 15 de agosto del 2021 de https://dictionary.apa.org/item-characteristic-curve

American Psychological Association (APAc). (Washington, D.C.). Discrimination Index. *En el diccionario* APA Dictionary of Psychology. Recuperado el 15 de agosto del 2021 de https://dictionary.apa.org/index-of-discrimination

American Psychological Association (APAd). (Washington, D.C.). Ability parameter. *En el diccionario* APA Dictionary of Psychology. Recuperado el 15 de agosto del 2021 de https://dictionary.apa.org/ability-parameter

American Psychological Association (APAe). (Washington, D.C.). Latent Trait Theory. *En el diccionario* APA Dictionary of Psychology. Recuperado el 15 de agosto del 2021 de https://dictionary.apa.org/latent-trait-theory

Azevedo, C. (2003). *Metodos de estimazao na Teoría de Respuesta al Ítem*. Instituto de Matemática e Estadística da Universidade Sao Paulo.

Bartholomew, D., Knott, M., y Moustaki, I. (2011). Latent variable models and factor analysis: A unified approach. *John Wiley & Sons*.

Bartlett, M. (1937). The statistical conception of mental factors. *J. Psychol.* 28:97–104

Bartolucci, F., Bacci, S., y Gnaldi, M. (2015). *Statistical analysis of questionnaires: A unified approach based on R and Stata*. Chapman and Hall/CRC.

Bazán, J., Valdivieso, L. y Calderón, A. (2010). *Enfoque bayesiano en modelos de Teoría de Respuesta al Ítem*. Pontificia Universidad Católica del Perú. https://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/110936/Reporte-27.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Bazán, J. (2005). *Uma familia de modelo de resposta ao ítem normal assimétrica*. Universidad de Sao Paulo, Sao Paulo.

Berkson, J. (1955). Maximum likelihood and minimum X2 estimates of the logistic function. *Journal of the American statistical association*. Taylor & Francis.

Betancourt, M. (1 de Marzo de 2020). An Introduction to Stan. Obtenido de https://betanalpha.github.io/assets/case_studies/stan_intro.html#43_the_block_structure_of_a_stan_program

Birnbaum, A. (1968) Some Latent Trait Models and Their Use in Inferring an Examinee's Ability. In: Lord, F.M. and Novick, M.R., Eds., *Statistical Theories of Mental Test Scores*, Addison-Wesley, Reading, 397-479.

Bock, R., y Lieberman, M. (1970). Fitting a response model for n dichotomously scored items. *Psychometrika* 35, 179–197 (1970). https://doi.org/10.1007/BF02291262

Bolfarine, H., y Bazán, J. (2010). Bayesian Estimation of the Logistic Positive Exponent IRT Model. *Journal of Educational and Behavioral Statistics 2010* 35: 693. DOI: 10.3102/1076998610375834

Bollen, K. (2002). Latent variables in psychology and the social sciences. *Annual Review of Psychology, 53,* 605-634.

Bond, T., y Fox, C. (2001). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences*. Psychology Press.

Brzezińska, J. (2016). Latent Variable Modelling and Item Response Theory Analyses in Marketing Research. *Folia Oeconomica Stetinensia*. 16. 10.1515/foli-2016-0032.

Chen, M., Dey, D., y Shao, Q. (1999). A New Skewed Link Model for Dichotomous Quantal Response Data. *Journal of the American Statistical Association*, *94*(448), 1172–1186. https://doi.org/10.2307/2669933

Chíncaro, O. (2010). *Modelo de Rasch dicotómico con aplicación a la Educación*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Corral, V. (2001). *El significado de variables latentes en psicología*. Acta Comportamentalia: Revista Latina de Análisis del Comportamiento.

Courville, T. (2004). *An empirical comparison of item response theory and classical test theory item/person statistics*. Texas A&M University. Texas: Texas A&M University.

Dávila, N., Pérez, J., García, D., y Gómez, E. (2015). *Un modelo de regresión logística asimétrico que puede explicar la probabilidad de éxito en el rendimiento académico*. Universidad de Murcia, España.

De Ayala, R. (2013). *The theory and practice of item response theory*. Guilford Publications.

Díaz, S. (2018). *Distribuciones asimétricas para el trazo latente en modelos de teoría de respuesta al ítem con múltiples poblaciones*. Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Dodonov, Y., y Dodonova, Y. (2010). Asymmetric item characteristic curve in item response theory: model construction and application. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. doi:https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.07.330

Drasgow, F., y Lissak, R. (1983). Modified parallel analysis: a procedure for examining the latent dimensionality of dichotomously scored item responses. *Journal of Applied Psychology*, 68, 363–373.

Embretson, S., y Reise, S. (2013). *Item response theory*. Psychology Press.

Everitt, B. (1984). *An Introduction to Latent Variable Models*. Ciulpman and Hall.

Flores, S. (2012). *Modelos Teslet Logísticos y Logísticos de Exponente Positivo para pruebas de comprensión de textos*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Gelman, A., Carlin, J., Stern, H., y Rubin, D. (2014). *Bayesian data analysis*. Boca Raton, FL, USA: Chapman & Hall/CRC

Goncalves, A. (1997). Dimensiones del clima organizacional. www.calidad.org.

Guo , J., Gabry , J., y Goodrich, B. (2021). R Interface to Stan. https://cran.r-project.org/web/packages/rstan/rstan.pdf

Hattie, J. (1985). Methodology Review: Assessing Unidimensionality of Tests and ltenls. *Applied Psychological Measurement*, 9(2), 139-164. https://doi.org/10.1177/014662168500900204

Harman, H. (1976). *Modern factor analysis*. University of Chicago press.

Hellriegel, D., y Slocum , J. (1974). *Clima organizacional: medidas, investigación y contingencias*. Academy of Management Journal.

Hernández, R. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.

Koys, D., y Decottis, T. (1991). *Clima organizacional y satisfacción laboral* (vol. 16). Chile: Universidad del Bío Bío.

Lara, C. (2008). Técnicas estadísticas multivariantes para la generación de variables latentes. *Revista Escuela de Administración de Negocios*, (64), 89-99.

Ledesma, D., y Mora, P. (2007). Determining the number of factors to retain in EFA: An easy-to-use computer program for carrying out parallel analysis. *Practica Assessment, Research & Evaluation,* 12(2), 1–11.

León, L. (2017). *Modelo TRI logístico para un trazo latente que sigue una distribución asimétrica*. Universidad Nacional de Colombia, Estadística, Colombia.

Litwin, G., y Stringer, R. (1968). *Motivación y clima organizacional*.

Liu, Y., Hu, G., Cao, L., Wang, X., y Chen, M. (2019). A comparison of Monte Carlo methods for computing marginal likelihoods of item response theory models. *Journal of the Korean Statistical Society*. doi:https://doi.org/10.1016/j.jkss.2019.04.001

Lord, F. (1952). *A Theory of Test Scores (Psychometric Monograph No. 7)*. Richmond, VA: Psychometric Corporation. Retrieved from http://www.psychometrika.org/journal/online/MN07.pdf

Loehlin, J. (2004). *Latent variable models: An introduction to factor, path, and structural equation analysis*. Psychology Press.

Lord, F., y Novick, M. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Addison-Wesley.

Luo, Y., y Al-Harbi, K. (2017). Performances of LOO and WAIC as IRT model selection methods. *Psychological Test and Assessment Mo*deling, 59(2), 183-205.

Luo, Y. (2018). *LOO and WAIC as model selection methods for polytomous items*. arXiv preprint arXiv:1806.09996.

MacCallum, R., y Austin, J. (2000). Applications of structural equation modelling in psychological research. *Annual Review Psychology*, Vol. 51:201-226. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.51.1.201 .

Malaspina, M. (2016). *Modelos de Teoría de Respuesta al Ítem Multidimensional con una Aplicación Psicológica*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Matsuura, K. (2023). *Bayesian Statistical Modeling with Stan, R, and Python*. Springer Nature.

McDonald, R. (1999). *Test theory: A unified treatment*. Mahwah, NJ.

Mejía, L. (2018). *Modelo secuencial con aplicación a la medición del rendimiento*. Universidad Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Menacho, C., y Cano, J. (2020). *Evaluación de pruebas informatizadas aplicando la Teoría Clásica de los Test y la Teoría de Respuesta al Ítem*. Universidad Nacional Agraria La Molina, Facultad de Economía y Planificación. Lima: Anales Científicos.

Muñiz, J. (1997). *Introducción a la teoría de respuesta a los ítems*. Madrid: Pirámide.

Neyman, J., y Scott, E. (1948). Consistent estimates based on partially consistent observations. *Econometrika*, 16(1), 1-32.

Nunnally, J. (1978). *Psychometric Theory*. New York: McGraw-Hill

Rasch, G. (1960). *Studies in mathematical psychology: I. probabilistic models for some intelligence and attainment tests*.

Rivera, J. (2019). *El modelo de Respuesta Nominal: Aplicación a datos educacionales*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Rizopoulos, D. (2006). ltm: An R Package for Latent Variable Modeling and Item Response Analysis. *Journal of Statistical Software*, 17(5), 1–25. https://doi.org/10.18637/jss.v017.i05

Rizopoulos, D. (2022). Latent Trait Models under IRT. https://cran.r-project.org/web/packages/ltm/ltm.pdf

Rodríguez, D. (1999). *Diagnóstico organizacional*. México: Alfaomega.

Samejima, F. (2000). Logistic positive exponent family of models: Virtue of asymmetric item characteristic curves. *Psychometrika*. 65. 319-335. 10.1007/BF02296149.

Sandoval, M. (2004). Concepto y dimensiones del clima laboral. Revista *Hitos de Ciencias Económico Administrativas* 2004;27:78-82

Santisteban, C. (1990). *Psicometría, teoría y práctica en la construcción de test*. Madrid: Ediciones Norma.

Neill, S., y Reza, M., (2018). Fundamentals of Ocean Renewable Energy. *Academic Press*, Pages 193-235. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-810448-4.00008-2.

Steyer, R. (2001). Classical (Psychometric) Test Theory. *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*. 1955-1962. 10.1016/B0-08-043076-7/00721-X.

Swaminathan, H., y Gifford, J. (1985). Bayesian estimation in the two-parameter logistic model. *Psychometrika* **50**, 349–364 (1985). https://doi.org/10.1007/BF02294110

Tarazona, E. (2013). *Modelos alternativos de respuesta graduada con aplicaciones en la calidad de servicio*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Traub, R. (1997). Classical test theory in historical perspective. Educational Measurement. https://winsteps.com/a/Traub.pdf

Yong, L., Hui, H., y Yi-Yi, C. (2020). Organizational climate, job satisfaction, and turnover in voluntary child welfare workers. *Children and Youth Services Review*. doi:https://doi.org/10.1016/j.childyouth.2020.105640.

Zeigenfuse, M., Batchelder, W., y Steyvers, M. (2020). An item response theory model of matching test performance. *Journal of Mathematical Psychology*, Volume 95, 2020. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmp.2020.102327

Apéndice

Apéndice A: Hipótesis y Variables

A.1 Hipótesis general

Los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico tienen un aporte significativo en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.

A.2 Hipótesis específicas

El escenario que se caracteriza por tener muestras grandes y poco *ítems* (10) con respuesta dicotómica asimétrica presenta un mejor grado de ajuste de los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico a comparación de los modelos logísticos de la TRI con enlace simétrico.

Existen diferencias en la estimación de los parámetros de la TRI al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.

El nivel de ajuste al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace asimétrico es mayor que los modelos simétricos en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.

Existen diferencias entre los parámetros estimados mediante los enfoques de la TCT y de la TRI en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.

A.3 Identificación de variables

A.3.1 Variables independientes

Las variables independientes son: (a) el modelo de TCT, (b) la familia de modelos logísticos de la TRI con función de enlace simétrico y (c) la familia de modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico.

Respecto a la variable independiente modelo de TCT se ha definido lo siguiente:

Definición conceptual. El modelo de TCT se caracteriza por ser el más utilizado en el análisis de los test y se basa, fundamentalmente, en el puntaje observado de un individuo para un test, que es el resultado de la suma del valor teórico del individuo (puntaje verdadero) y el error de medición del test (Bartolucci et al., 2015). A partir de la presente suposición se despliega un conjunto de definiciones que permitirán desarrollar el presente modelo.

Definición operacional. Para la aplicación del modelo de TCT se evaluaron tos indicadores de dificultad y discriminación como parte de la caracterización de los *ítems* y por el lado del individuo se determinó la puntuación que alcanzó en la ECO para el estudio de la satisfacción con el CO.

Respecto a la variable independiente la familia de modelos logísticos de la TRI con función de enlace simétrico se ha definido lo siguiente:

Definición conceptual. La familia de modelos de la TRI se caracteriza por dos tipos de parámetros, parámetros de *ítems* relacionados con las características de cada una de las preguntas del test, y el parámetro habilidad relacionado con las características del individuo respecto de la variable latente que está siendo medido (Azevedo, 2003).

Definición operacional. Para la aplicación de las modelos TRI se aplicaron tantos los modelos con función de enlace simétrico como son el modelo Rasch y el modelo logístico de dos parámetros que se caracterizan por ser los tradicionales en el análisis de los test.

Respecto a la variable independiente la familia de modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico se ha definido lo siguiente:

Definición conceptual. Adicionalmente a lo detallado en la definición operacional de los modelos logísticos TRI con enlace simétrico, los modelos asimétricos se sustentan en que la probabilidad de responder correctamente difiere de la probabilidad de respuesta incorrecta y si se ajusta con funciones de enlaces simétricos se pueden obtener estimaciones inadecuadas Chen et al. (1999).

Definición operacional. Para la aplicación de las modelos TRI se aplicaron tantos los modelos con función de enlace simétrico como son el modelo Rasch y el modelo logístico de dos parámetros que se caracterizan por ser los tradicionales en el análisis de los test; además, se aplicaron los modelos con función de enlace asimétrico que corresponde a la regresión logística con exponente positivo y los modelos LPE que, dada su complejidad en el proceso de estimación, se abordará desde las perspectiva bayesiana.

A.3.2 Variable dependiente

La variable dependiente es la medición de la satisfacción en el CO.

Definición Conceptual. La satisfacción del CO a menudo se define como los sentimientos o las actitudes sobre el trabajo o las experiencias laborales de un colaborador, es decir, “es un factor a nivel individual que refleja los afectos y emociones del colaborador hacia su trabajo” (Yong et al., 2020).

Definición Operacional. La medición de la satisfacción en el CO se realizó mediante la estimación del nivel de habilidad que es un parámetro de la TRI que hace referencia a la característica de los individuos que rindieron la ECO. Con la estimación de la habilidad se identificaron a los colaboradores más satisfechos que los insatisfechos y segmentarlos por la habilidad.

A.4 Operacionalización de variables

En la Tabla 31 se muestra la operacionalización de las variables del presente trabajo de investigación:

Tabla 31

Operacionalización de las Variables

Variables	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores	Cálculo
Variable dependiente Clima Organizacional	La satisfacción del clima organizacional a menudo se define como los sentimientos o las actitudes sobre el trabajo o las experiencias laborales de un colaborador, es decir, "es un factor a nivel individual que refleja los afectos y emociones del colaborador hacia su trabajo" (Yong et al., 2020).	La medición de la satisfacción en el clima organizacional se realizó mediante la estimación del nivel de habilidad que es un parámetro de la TRI que hace referencia a la característica de los individuos que rindieron la ECO. Con la estimación de la habilidad se identificaron a los colaboradores más satisfechos que los insatisfechos y segmentarlos por la habilidad.	Satisfacción del clima organizacional	Nivel de satisfacción del colaborador	$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$
Variable independiente Modelos TCT	El modelo de TCT se caracteriza por ser el más utilizado en el análisis de los test y se basa, fundamentalmente, en que el puntaje observado de un individuo en un test es el resultado de la suma del valor teórico del individuo (puntaje verdadero) y el error de medición del test (Bartolucci et al., 2015). A partir de la presente suposición se despliega un conjunto de definiciones que permitirán desarrollar el presente modelo.	Para la aplicación del modelo de TCT se evaluaron tos indicadores de dificultad y discriminación como parte de la caracterización de los *ítems* y por el lado del individuo se determinó la puntuación que alcanzó en la ECO para el estudio de la satisfacción con el clima organizacional.	Modelo de TCT	Dificultad del ítem Correlación Item-Test	$r_{bis} = \frac{M_p - M}{S_X}\sqrt{\frac{p}{1-p}}$
Variable independiente Modelos simétricos de la TRI	La familia de modelos de la TRI se caracteriza por dos tipos de parámetros, parámetros de *ítems* relacionados con las características de cada una de las preguntas del test, y el parámetro habilidad relacionado con las características del individuo respecto de la variable latente que está siendo medido (Azevedo, 2003).	Para la aplicación de las modelos TRI se aplicaron tantos los modelos con función de enlace simétrico como son el modelo Rasch y el modelo logístico de dos parámetros que se caracterizan por ser los tradicionales en el análisis de los test.	Modelo Rasch Modelo Logísticos de 2 Parámetros	Curva característica del *ítem* (CCI) Dificultad del item Discriminación del item	$P_{ij} = P(X_{ij}\|\theta_i, \beta_j, \alpha_j, \gamma_j) = F(Z_{ij})$ $Z_{ij} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j)$ $i = 1, \dots, n \; y \; j = 1, \dots k$
Variable independiente Modelos asimétricos de la TRI	Adicionalmente a lo detallado en la definición operacional de los modelos logísticos TRI con enlace simétrico, la presente variable se da cuando la probabilidad de una respuesta binaria se aproxima a 0 en una tasa diferente que cuando se aproxima a 1, y dado que las funciones de enlaces simétricos pueden ser inadecuados para el ajuste de datos, entonces se debe considerar enlaces asimétricos Chen et al (1999).	Para la aplicación de las modelos TRI se aplicaron tantos los modelos con función de enlace simétrico como son el modelo Rasch y el modelo logístico de dos parámetros que se caracterizan por ser los tradicionales en el análisis de los test; además, se aplicaron los modelos con función de enlace asimétrico que corresponde a la regresión logística con exponente positivo y los modelos LPE que, dada su complejidad en el proceso de estimación, se abordará desde las perspectiva bayesiana.	Logístico con Exponente Positivo Logístico con Exponente Reflexivo	Curva característica del *ítem* (CCI) Dificultad del item Discriminación del item Penzalización del ítem	

A.5 Matriz de consistencia

En la Tabla 32 se presenta la matriz de consistencia del trabajo de investigación.

Tabla 32

Matriz de Consistencia

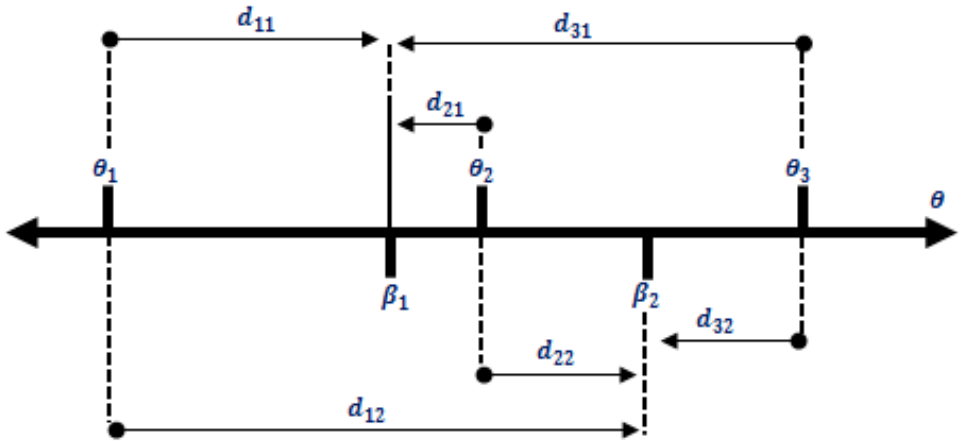
Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología
1. Problema general	1. Objetivo general	1. Hipótesis general	
¿Cuál es la mejora de los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera?	Determinar la mejora de los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico en el estudio de satisfacción del CO en una entidad financiera.	Los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico tienen un aporte significativo en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.	**1) Tipo de investigación:** Aplicada **2) Diseño de investigación:** No experimental y transversal **3) Unidad de análisis:** Persona que trabaja en una entidad financiera. **4) Población:** Colaboradores que trabajan en una entidad financiera. **5) Muestra:** 5,769 colaboradores. **6) Técnicas:** Se aplicó una ECO. **7) Instrumentos:** Cuestionario de Clima Organizacional. **8) Técnicas de análisis:** prepación de los datos recolectados, verificación de los supuestos, estimación de los parámetros, análisis del ajuste de los modelos, estimación de los niveles de habilidad.
2. Problemas específicos	2. Objetivos específicos	2. Hipótesis específicas	
¿Cuáles son los escenarios donde los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico presentan mejores resultados a comparación de los modelos logísticos de la TRI con enlace simétrico?	Determinar mediante un estudio de simulación los escenarios donde los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico presentan mejores resultados a comparación de los modelos logísticos de la TRI con enlace simétrico.	El escenario que se caracteriza por tener muestras grandes y ítems con respuesta dicotómica asimétrica presenta un mejor grado de ajuste de los modelos logísticos de la TRI con función de enlace asimétrico a comparación de los modelos logísticos de la TRI con enlace simétrico.	
¿Existen diferencias en la estimación de los parámetros de la TRI al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera?	Determinar las diferencias en la estimación de los parámetros de la TRI al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.	Existen diferencias en la estimación de los parámetros de la TRI al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.	
¿Cuál es la diferencia en el nivel de ajuste al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera?	Determinar la diferencia en el nivel de ajuste al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace simétrico y asimétrico en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.	El nivel de ajuste al utilizar los modelos logísticos con funciones de enlace asimétrico es mayor que los modelos simétricos en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.	
¿Cuál es la diferencia entre los parámetros estimados mediante los enfoques de la TCT y de la TRI en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera?	Determinar la diferencia entre los parámetros estimados mediante los enfoques de la TCT y de la TRI en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.	Existen diferencias entre los parámetros estimados mediante los enfoques de la TCT y de la TRI en el estudio de satisfacción del clima organizacional en una entidad financiera.	

Apéndice B: Explicación de la Desvianza

Para entender en que consiste Z_{ij}, primero, se explica la diferencia entre θ_i y β_j ($d_{ij} = \theta_i - \beta_j$) y luego se explica el impacto del parámetro α_j en d_{ij}, $d_{ij} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j)$. Para ello se tiene en cuenta la Figura donde se presentan los niveles de habilidad de 3 individuos ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) y 2 ítems con sus niveles de dificultad (β_1 y β_2).

Figura B1

Explicación del Predictor Lineal Latente Z_{ij}



En primer lugar se analiza la distancia $d_{ij} = \theta_i - \beta_j$ que es la distancia entre la habilidad del individuo i y la dificultad del ítem j. Esta distancia es importante para predecir la respuesta del individuo con una probabilidad determinada, por ejemplo, si la distancia se aproxima a cero entonces es más razonable que haya una probabilidad de 0.5 que el individuo responda correctamente, si la distancia es mayor a cero entonces la probabilidad incrementa y en caso contrario decrementa. En la Figura , observando el ítem 1 se puede inferir que los individuos 2 y 3 son más probables que lo respondan correctamente a comparación del individuo 1 debido a que $d_{31} > d_{21} > 0 > d_{11}$; sin embargo, con respecto al ítem 2, sólo el individuo 3 es más probable de responderlo correctamente.

En segundo lugar, para analizar el nivel de discriminación del ítem 2 se debe tener en cuenta que si $\alpha_2 > 1$ entonces la distancia d_{32} será más positiva que antes, mientras que las distancias d_{12} y d_{22} serán más negativas; por tanto, los individuos 1 y 2 serán mucho menos propensos a responder correctamente el ítem 2 y el individuo 3 será más propenso a responderlo correctamente. En cambio, si $\alpha 2 < 1$ entonces las distancias positivas se reducirán y las distancias negativas incrementarán y serán más próximas a 0 y no se puede obtener suficiente información del ítem ni de los individuos.

Apéndice C: Script en R para la simulación de los datos

```
sim_matriz=function(escenario,n,k,tipo_model){
#Creación de la matriz vacía
matriz=matrix(nrow=n,ncol=k)
#Muestra aleatoria del parámetro de personas
theta=matrix(rnorm(n,0,1),nrow=n,ncol=1)
aleatorio=runif(n,0,1)
#Muestra aleatoria de los parámetros de los ítems
if (tipo_model==1){
        beta=matrix(rnorm(k,0,1),nrow=k,ncol=1)
        alpha=matrix(replicate(k, 1),nrow=k,ncol=1)
        gamma=matrix(replicate(k, 0),nrow=k,ncol=1)
        lamda=matrix(replicate(k, 1),nrow=k,ncol=1)
}
else if (tipo_model==2){
        beta=matrix(rnorm(k,0,1),nrow=k,ncol=1)
        alpha=matrix(rnorm(k,2,0.5),nrow=k,ncol=1)
        gamma=matrix(replicate(k, 0),nrow=k,ncol=1)
        lamda=matrix(replicate(k, 1),nrow=k,ncol=1)
}
else if (tipo_model==3){
        beta=matrix(rnorm(k,0,1),nrow=k,ncol=1)
        alpha=matrix(rnorm(k,2,0.5),nrow=k,ncol=1)
        gamma=matrix(rnorm(k,2,0.5),nrow=k,ncol=1)
        lamda=matrix(replicate(k, 1),nrow=k,ncol=1)
```

```
}
else if (tipo_model==4){
        beta=matrix(rnorm(k,0,1),nrow=k,ncol=1)
        alpha=matrix(rnorm(k,2,0.5),nrow=k,ncol=1)
        gamma=matrix(replicate(k, 0),nrow=k,ncol=1)
        lamda=matrix(rnorm(k,2,0.5),nrow=k,ncol=1)
}

#Cálculo de la probabilidad y la definición de respuestas
for (j in 1:k){
        zeta=alpha[j,1]*(theta-beta[j,1])
        prob=exp(zeta)/(1+exp(zeta))
        prob=(gamma[j,1]+(1-gamma[j,1])*prob)^(lamda[j,1])
        item=(prob>=aleatorio)*1
        matriz[,j]=item
}

#Creación del Output
stan.data=list(n=n,k=k,Y=matriz)
tabla=as.data.frame(matriz)

# Create a blank workbook
OUT <- createWorkbook()

# Add some sheets to the workbook
```

```
addWorksheet(OUT, "habilidad")
addWorksheet(OUT, "dificultad")
addWorksheet(OUT, "discriminacion")
addWorksheet(OUT, "adivinacion")
addWorksheet(OUT, "asimetria")
addWorksheet(OUT, "probabilidad")
addWorksheet(OUT, "matriz")
addWorksheet(OUT, "tabla")

# Write the data to the sheets
writeData(OUT, sheet = "habilidad", x = as.data.frame(theta))
writeData(OUT, sheet = "dificultad", x = as.data.frame(beta))
writeData(OUT, sheet = "discriminacion", x = as.data.frame(alpha))
writeData(OUT, sheet = "adivinacion", x = as.data.frame(gamma))
writeData(OUT, sheet = "asimetria", x = as.data.frame(lamda))
writeData(OUT, sheet = "probabilidad", x = as.data.frame(prob))
writeData(OUT, sheet = "matriz", x = as.data.frame(matriz))
writeData(OUT, sheet = "tabla", x = tabla)

# Export the file
saveWorkbook(OUT, paste("/content/MyDrive/PROY_TRI/simulacion/Escenario
escenario,"/Input/Input_Escenario_",escenario,".xlsx",sep=""))
write.csv(tabla, file =
paste("/content/MyDrive/PROY_TRI/simulacion/escenario,"/Input/Input_Escenario_
",escenario,".csv",sep=""),
```

```
row.names = FALSE)
output=list(habilidad=theta,dificultad=beta,discriminacion=alpha,
adivinacion=gamma,asimetria=lamda,probabilidad=prob,matriz=matriz,
data=stan.data,tabla=tabla)
return(output)
}
```

Apéndice D: Estimación de Máxima Verosimilitud Conjunta

E.1. Proceso de Estimación

Para iniciar con la estimación de los parámetros del ítem j, se forman m grupos con diferentes niveles de habilidad θ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ con f_i individuos en cada grupo, r_i individuos que responden correctamente al ítem j y $f_i - r_i$ individuos que responden incorrectamente. Entonces, se puede calcular las proporciones de respuesta correcta e incorrecta, en cada grupo, y están denotados por

$$p_j(\theta_i) = p_{ij} = \frac{r_{ij}}{f_{ij}}$$

$$q_j(\theta_i) = q_{ij} = \frac{f_{ij} - r_{ij}}{f_{ij}}$$

$$i = 1, \ldots, m \; y \; j = 1, \ldots, k$$

Entonces, r_{ij} se distribuye como una binomial con parámetros f_{ij} y P_{ij}, $r_{ij} \sim Binomial(f_{ij}, P_{ij})$, y como P_{ij} depende de los parámetros $\theta_i, \beta_j, \alpha_j$ en base a la desvianza $Z_{ij} = \alpha_j(\theta_i - \beta_j) = \alpha_j\theta_i - \alpha_j\beta_j = \lambda_j\theta_i + \xi_j$.

$$P_{ij} = \frac{1}{1 + exp\left[-\left(\lambda_j\theta_i + \xi_j\right)\right]}$$

$$Q_{ij} = 1 - P_{ij}$$

Se calculan las derivadas parciales por parámetros:

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \xi_j} = P_{ij}Q_{ij}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \lambda_j} = P_{ij}Q_{ij}\theta_i$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \xi_j} = -P_{ij}Q_{ij}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \lambda_j} = -P_{ij}Q_{ij}\theta_i$$

Para estimar los parámetros del ítem j se considera el vector de respuestas correctas $R = (r_1, \dots, r_m)$ cuya función de verosimilitud está dada por

$$L(\lambda, \xi | R) = \prod_{i=1}^{m} \binom{f_i}{r_i} {P_i}^{r_i} {Q_i}^{f_i - r_i}$$

$$l = Ln[L(\lambda, \xi | R)] = cte + \sum_{i=1}^{m} r_i Ln(P_i) + \sum_{i=1}^{m} (f_i - r_i) Ln(Q_i)$$

Se deriva l con respecto al parámetro ξ, sabiendo $\frac{\partial P_{ij}}{\partial \xi_j}$, $\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \xi_j}$ y que $p_{ij} = \frac{r_{ij}}{f_{ij}}$

$$l_1 = \frac{\partial l}{\partial \xi_j} = \sum_{i=1}^{m} r_i - f_i P_i = \sum_{i=1}^{m} f_i p_i - f_i P_i = \sum_{i=1}^{m} f_i (p_i - P_i)$$

Análogamente, se deriva l con respecto a los parámetros λ

$$l_2 = \frac{\partial l}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^{m} f_i (p_i - P_i) \theta_i$$

Las ecuaciones de verosimilitud no son lineales en ξ y λ. Por lo tanto, no pueden ser resueltos analíticamente y es necesario el método *Fisher Scoring* para resolver las ecuaciones de verosimilitud. Para ello, se necesita las derivadas de segundo orden de la función log-verosimilitud (l).

$$l_{11} = \frac{\partial l_1}{\partial \xi_j} = -\sum_{i=1}^{m} f_i P_i Q_i$$

$$l_{22} = \frac{\partial l_2}{\partial \lambda_j} = -\sum_{i=1}^{m} f_i P_i Q_i {\theta_i}^2$$

$$l_{21} = \frac{\partial l_1}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \frac{\partial l}{\partial \xi_j} = \frac{\partial l_2}{\partial \xi_j} = -\sum_{i=1}^{m} f_i P_i Q_i \theta_i$$

Considerando que $W_i = P_i Q_i$

$$l_1 = \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \frac{(p_i - P_i)}{P_i Q_i}$$

$$l_2 = \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \frac{(p_i - P_i)}{P_i Q_i} \theta_i$$

$$l_{11} = -\sum_{i=1}^{m} f_i W_i$$

$$l_{22} = -\sum_{i=1}^{m} f_i W_i {\theta_i}^2$$

$$l_{12} = l_{21} = -\sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i$$

Considerando la aproximación de series de Taylor se propone el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-l_1 = l_{11}\Delta\hat{\xi}_j + l_{12}\Delta\hat{\lambda}_j$$

$$-l_2 = l_{21}\Delta\hat{\xi}_j + l_{22}\Delta\hat{\lambda}_j$$

Ya que las segundas derivadas parciales no implican ningún término observado entonces los métodos Fisher Scoring y Newton Raphson son los mismos

$$\sum_{i=1}^{m} f_i W_i \frac{(p_i - P_i)}{P_i Q_i} = \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \, \Delta\hat{\xi}_j + \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i \, \Delta\hat{\lambda}_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i W_i \frac{(p_i - P_i)}{P_i Q_i} \theta_i = \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i \, \Delta\hat{\xi}_j + \sum_{i=1}^{m} f_i W_i {\theta_i}^2 \, \Delta\hat{\lambda}_j$$

Expresando el proceso iterativo para la estimación de ξ y λ mediante la forma de Newton Raphson

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_j \\ \hat{\lambda}_j \end{bmatrix}_{T+1} = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_j \\ \hat{\lambda}_j \end{bmatrix}_{T} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i W_i & \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i \\ \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i & \sum_{i=1}^{m} f_i W_i {\theta_i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \frac{(p_i - P_i)}{P_i Q_i} \\ \sum_{i=1}^{m} f_i W_i \frac{(p_i - P_i)}{P_i Q_i} \theta_i \end{bmatrix}_{T}$$

$$\Delta\hat{\xi}_T = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} f_i W_i {\theta_i}^2\right)\bar{V} - \left(\sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i\right)\bar{\theta}}{\sum_{i=1}^{m} f_i W_i {\theta_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i\right)^2 / \sum_{i=1}^{m} f_i W_i}$$

$$\Delta\hat{\lambda}_T = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i W_i V_i \theta_i - (\sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i)\bar{V}}{\sum_{i=1}^{m} f_i W_i {\theta_i}^2 - (\sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i)^2 / \sum_{i=1}^{m} f_i W_i}$$

Donde $V_i = \frac{p_i - P_i}{P_i Q_i}$, $\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i W_i V_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i W_i}$, $\bar{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i W_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i W_i}$

Resolviendo las ecuaciones $\Delta\hat{\xi}_T$ y $\Delta\hat{\lambda}_T$, se obtiene la siguiente relación $\Delta\hat{\xi}_T = \bar{V} - \Delta\hat{\lambda}_T\bar{\theta}$. Además, $\hat{\xi}_{T+1} = \hat{\xi}_T + \Delta\hat{\xi}_T$ y $\hat{\lambda}_{T+1} = \hat{\lambda}_T + \Delta\hat{\lambda}_T$ y $\hat{Z}_{T+1} = \hat{\xi}_{T+1} + \Delta\hat{\lambda}_{T+1}\theta_i$. Entonces, $\hat{Z}_{T+1}$ llega a ser el verdadero Logit y el proceso iterativo continuará hasta que se tenga un criterio de convergencia conocido.

Con el fin de iniciar el proceso de estimación iterativa, se tiene que cuando los θ_i son conocidos, Berkson (1955) demostró que, bajo un modelo logístico los términos $\sum_{i=1}^{m} f_i p_i$ y $\sum_{i=1}^{m} f_i p_i \theta_i$ son estadísticos suficientes mínimos de ξ y λ respectivamente. En resumen, cuando los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\xi}$ y $\hat{\lambda}$ son finitos, son funciones de estos estadísticos suficientes. En cada puntuación del nivel de habilidad $Z_i = \hat{\xi} + \hat{\lambda}_T\theta_i$ es calculada. Z_i es usada como el argumento entrante en la ogiva logística y los valores de $\hat{P}_i$ y $\hat{Q}_i$ son obtenidos.

E.2. Estimación del parámetro del individuo.

Dado un individuo i que responde a los k ítems dicotómicos del test cuyo vector de respuestas está dado por $U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$. Considerando que los X_{ij} son estadísticamente independientes, la probabilidad del vector de respuestas del ítem para un individuo está dado por la función de verosimilitud.

$$L(\theta|U_i) = \prod_{j=1}^{k} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}}$$

$$l = Ln[L(\theta|U_i)] = \sum_{j=1}^{k} u_{ij} Ln(P_{ij}) + (1 - u_{ij}) Ln(Q_{ij})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{k} u_{ij} \frac{1}{P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} + \sum_{j=1}^{k} (1 - u_{ij}) \frac{1}{Q_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i}$$

Antes de desarrollar la ecuación de Newton Raphson es necesario calcular las derivadas parciales de P_{ij} y Q_{ij} con respecto a θ_i:

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} = \lambda_j P_{ij} Q_{ij}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i} = -\lambda_j P_{ij} Q_{ij}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{k} u_{ij} \frac{1}{P_{ij}} (\lambda_j P_{ij} Q_{ij}) + \sum_{j=1}^{k} (1 - u_{ij})(-\lambda_j P_{ij} Q_{ij})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_{ij} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_{ij}$$

Se calcula la segunda derivada parcial y considerando que $W_{ij} = P_{ij} Q_{ij}$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial {\theta_i}^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_{ij} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_{ij} \right]$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial {\theta_i}^2} = -\sum_{j=1}^{k} {\lambda_j}^2 P_{ij} Q_{ij} = -\sum_{j=1}^{k} {\lambda_j}^2 W_{ij}$$

El método Newton Raphson será usado para obtener los estimadores del parámetro de habilidad. Además, es necesario calcular las derivadas parciales de segundo orden de la función de verosimilitud. Con ello se formula la ecuación de Newton Raphson:

$$[\hat{\theta}_i]_{T+1} = [\hat{\theta}_i]_T - \left[\frac{\partial^2 l}{\partial {\theta_i}^2} \right]_T^{-1} \left[\frac{\partial l}{\partial \theta_i} \right]_T$$

$$[\hat{\theta}_i]_{T+1} = [\hat{\theta}_i]_T - \left[\sum_{j=1}^{k} {\lambda_j}^2 W_{ij} \right]_T^{-1} \left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j W_{ij} \left(\frac{u_{ij} - P_{ij}}{P_{ij} Q_{ij}} \right) \right]_T$$

$$[\hat{\theta}_i]_{T+1} = [\hat{\theta}_i]_T - \left[\sum_{j=1}^{k} {\lambda_j}^2 W_{ij} \right]_T^{-1} \left[\frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j W_{ij} \left(\frac{u_{ij} - P_{ij}}{P_{ij} Q_{ij}} \right)}{\sum_{j=1}^{k} {\lambda_j}^2 W_{ij}} \right]_T$$

El cual debería ser resuelto iterativamente para el valor de $\hat{\theta}_i$ para cada individuo.

Apéndice E: Estructura del Programa STAN

Los programas de Stan se organizan en distintos bloques de programación, cada uno con una responsabilidad particular en la especificación de un espacio de probabilidad. A continuación, se revisa cada bloque que fue tomado de Betancourt (2020).

F.1. Bloque de Funciones

Recopila funciones definidas por el usuario que sirven como bloques de construcción para programas más sofisticados. Por ejemplo, se puede considerar un bloque de funciones que consta de una sola función ***baseline***.

Figura E1

Ejemplo de Bloque de Funciones en Stan

```
functions {
  real baseline(real a1, real a2, real theta) {
    return a1 * theta + a2;
  }
}
```

Nota. Tomado de "*An Introduction to Stan*". (Betancourt, 2020).

F.2. Bloque de datos

El bloque ***data*** consiste en una secuencia de declaraciones de variables que, se les pueden dar valores y no se pueden incluir otras declaraciones más allá de esas declaraciones. Por ejemplo, el siguiente código requiere que la interfaz proporcione un valor para la variable de valor real "y" antes de que se pueda ejecutar el programa (ver Figura 2).

Figura E2

Ejemplo de Bloque de Datos en Stan

```
data {
 real y;
}
```

Nota. Tomado de "*An Introduction to Stan*". (Betancourt, 2020).

F.3. Bloque de Datos Transformados

El bloque ***transformed data*** define el código que se ejecuta antes de que se defina la función de densidad de registro de destino. Esto permite, por ejemplo, la definición de constantes útiles o el preprocesamiento de las variables leídas a través del bloque ***data***. El bloque ***transformed data*** se puede interpretar como el bloque de datos internos. Por ejemplo, este código define una variable real que ***sigma*** se puede usar en el resto del programa.

Figura E3

Ejemplo de Bloque de Datos Transformados en Stan

```
transformed data {
  real sigma = 1;
}
```

Nota. Tomado de "*An Introduction to Stan*". (Betancourt, 2020).

F.4. Bloque de parámetros

Especifica variables libres que a su vez definen los componentes del espacio acondicionado $\Theta|y$. El bloque ***parameters*** consiste en una lista de declaraciones de variables y ninguna otra declaración, pero, el usuario no asigna valores explícitos a estas variables. En el contexto de inferencia bayesiana, las variables libres definidas en el bloque ***parameters*** parametrizan los espacios de configuración del modelo, de ahí la convención de nomenclatura. Por ejemplo, se definen dos variables reales en el bloque ***parameters***.

Figura E4

Ejemplo de Bloque de Parámetros en Stan

```
parameters {
  real a1;
  real a2;
}
```

Nota. Tomado de "*An Introduction to Stan*". (Betancourt, 2020).

F.5. Bloque de Parámetros Transformados

Se mapean las funciones de los parámetros que no solo son útiles para construir la función de densidad logarítmica objetivo, sino que también definen los valores esperados de interés en un análisis dado. La importancia del bloque ***transformed parameters*** radica en que el valor de las variables declaradas será guardado automáticamente por las interfaces de Stan para que se puedan estimar los valores esperados de las funciones que representan.

Figura E5

Ejemplo de Bloque de Parámetros Transformados en Stan

```
transformed parameters {
  real x;
  {
    real y = 5;
    x = exp(y);
  }
}
```

Nota. Tomado de "*An Introduction to Stan*". (Betancourt, 2020).

F.6. Bloque modelo

El bloque ***model*** expone una variable implícita ***target*** que almacena las contribuciones a la función de densidad de registro de destino. Esta variable se puede modificar a través de una ***suma infija***, ***target +=*** que agrega la salida de la expresión posterior a la variable ***target*** actual.

Hasta ahora se ha definido las variables libres ***a1*** y ***a2*** las variables ligadas ***y***. Se quiere especificar la función de densidad de probabilidad conjunta

$$\pi(a1, a2, y) = \pi(y|a1, a2)\pi(a1)\pi(a2)$$

$$= normal(y \mid \mu(a1, a2), \sigma = 1)\, normal(a1 \mid 0, 1)\, normal(a2 \mid 0, 1)$$

a través de la función de densidad de probabilidad logarítmica

$$log\ \pi(a1, a2, y) = log\pi(y|a1, a2) + log\pi(a1) + log\pi(a2)$$

$$= lognormal(y \mid \mu(a1, a2), \sigma) + lognormal(a1 \mid 0,1) + lognormal(a2 \mid 0,1)$$

Se puede codificar la función de densidad objetivo en el programa Stan agregando cada una de estas funciones de densidad de probabilidad logarítmica a la variable ***target*** implícita.

Figura E6

Ejemplo de Bloque de Modelos en Stan

```
model {
  target += normal_lpdf(a1 | 0, 1);
  target += normal_lpdf(a2 | 0, 1);
  target += normal_lpdf(y | mu, sigma);
}
```

Nota. Tomado de "*An Introduction to Stan*". (Betancourt, 2020).

Los algoritmos de Stan se encargarán de condicionar esta función de densidad conjunta en el valor de "y" definido en el entorno externo para dar la función de densidad condicional no normalizada deseada.

$$\pi^{-}(a1, a2 \mid y) \propto \pi(a1, a2, y\sim) .$$

F.6. Bloque Cantidades generadas

El bloque ***generated quantities*** se usa para definir declaraciones que se ejecutan después de que se ejecutan los algoritmos. Las variables vinculadas declaradas en este bloque se pueden utilizar para capturar funciones con valores esperados relevantes, así como muestras pseudoaleatorias condicionadas a las variables definidas en el bloque ***parameters***. Por ejemplo, se puede calcular muestras predictivas posteriores dentro del propio programa Stan.

Figura E7

Ejemplo de Bloque de Cantidades Generadas en Stan

```
generated quantities {
  int y_predict = normal_rng(mu, sigma);
}
```

Nota. Tomado de "*An Introduction to Stan*". (Betancourt, 2020)

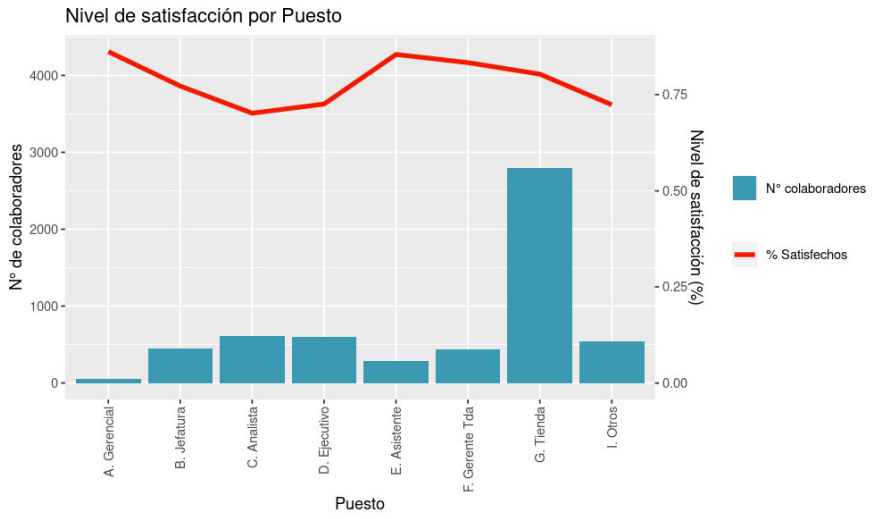
Apéndice F: Análisis Exploratorio de ECO y Descriptivo de Ítems

G.1 Análisis Exploratorio de ECO

Respecto al puesto del colaborador, se observó que a nivel de número de colaboradores se tuvo una mayor cantidad a comparación de otros puestos; en el caso del nivel de satisfacción se observó que los analistas, ejecutivos son los que tienen un bajo nivel de satisfacción, mientras que los asistentes y los gerentes presentaron un alto nivel de satisfacción (Ver Figura G1).

Figura G1

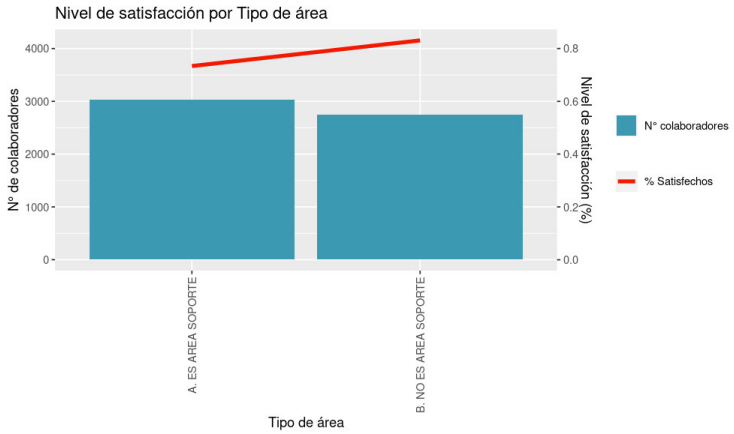
Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Puesto



Respecto al tipo de área, se observó que en las áreas de soporte se tiene una cantidad ligeramente mayor que en otras áreas; en el caso del nivel de satisfacción, los colaboradores de áreas de soporte tienen menor nivel de satisfacción (ver Figura G2).

Figura G2

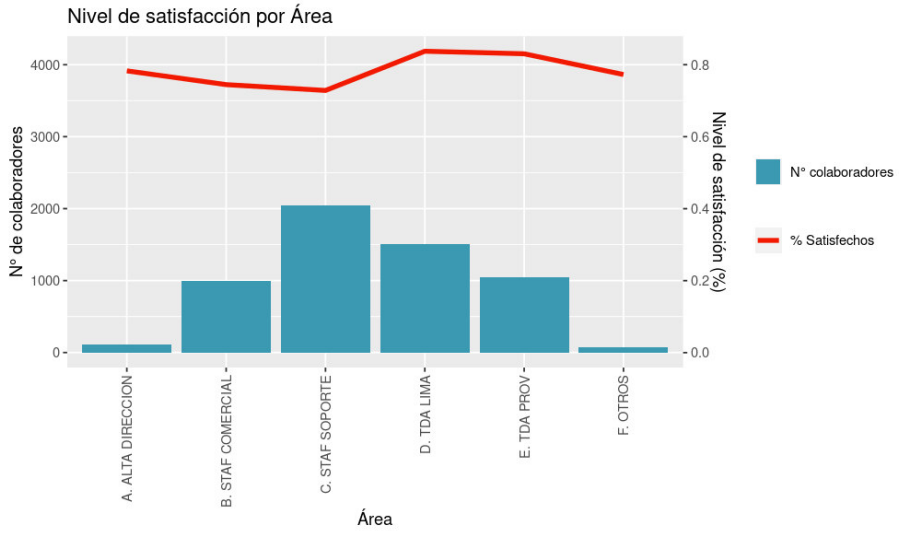
Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Tipo de Área



Respecto al área donde labora el colaborador, se observó que en el *staf* de soporte se tiene mayor número de colaboradores seguido por la red de tiendas de Lima y provincia; en el caso del nivel de satisfacción, los colaboradores de *staf* soporte tienen el menor nivel de satisfacción y la red de tiendas Lima y provincia tienen el mayor nivel de satisfacción (ver Figura G3).

Figura G3

Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Área

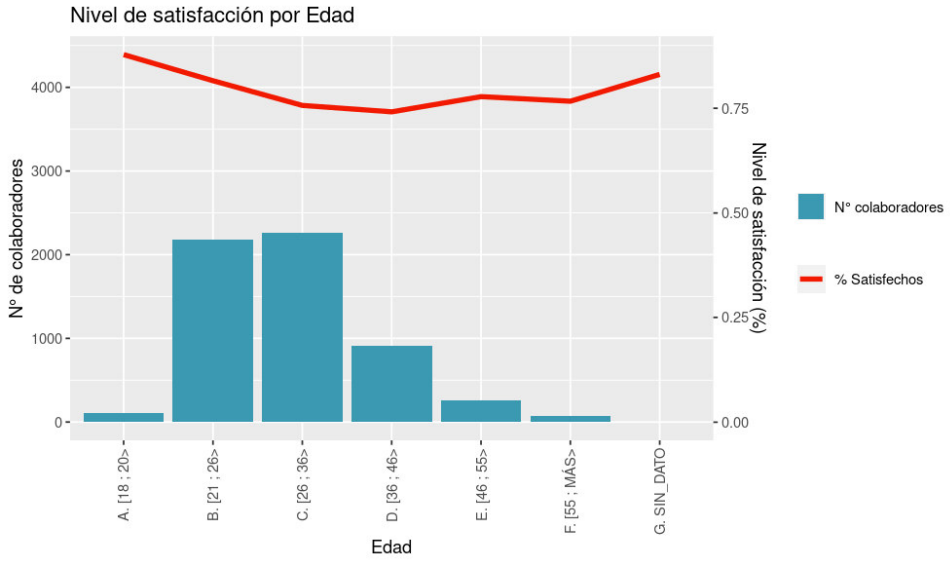


Respecto a los rangos de edad del colaborador, se observó que hay una concentración importante del número de colaboradores entre 21 y 36 años de edad;

en el caso del nivel de satisfacción, los colaboradores entre 26 y 46 años tienen un menor nivel de satisfacción y los jóvenes entre 18 y 20 años se tiene el más alto nivel de satisfacción (ver Figura G4).

Figura G4

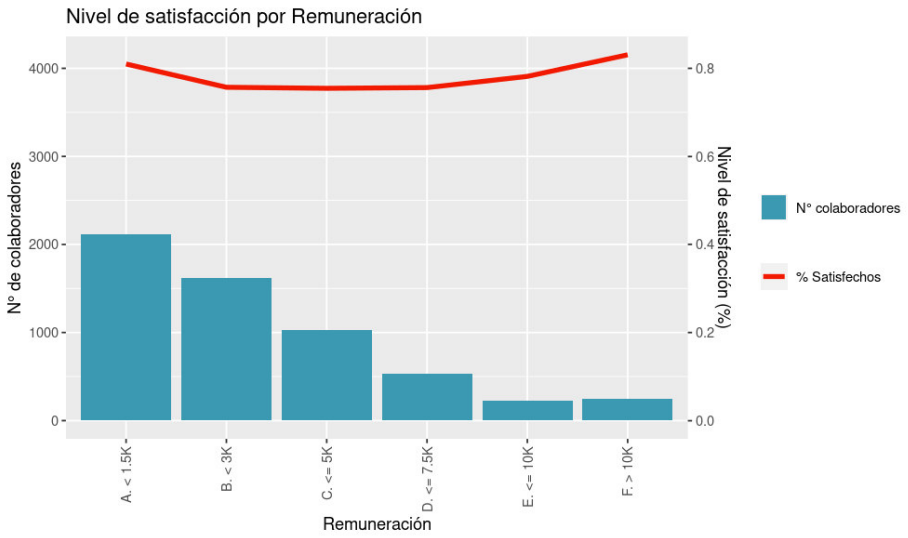
Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Edad



Respecto a los rangos de remuneración, se observó que hay una concentración importante en colaboradores con menos de 1,500 soles y la cantidad disminuye en la medida que incrementa la remuneración; en el caso del nivel de satisfacción, los colaboradores entre 1,500 y 7,500 soles se tienen un menor nivel de satisfacción mientras que colaboradores que perciben menos de 1,500 y más de 10,000 soles tienen mayor nivel de satisfacción (Ver Figura G5).

Figura G5

Análisis Exploratorio de la Satisfacción por Remuneración



Apéndice G: Resultados de la Ejecución de Modelos

H.1. Modelo Rasch para la Dimensión *Remuneración*

Tabla G1

Resultado del Modelo Rasch (Remuneración)

Parámetro	Ítem	Valor	Error estándar	Valor Z
Dificultad	FLG_P19_1	0.0443	0.0173	2.5556
Dificultad	FLG_P19_2	0.1917	0.017	11.2791
Dificultad	FLG_P19_3	0.1886	0.017	11.1009
Dificultad	FLG_P19_4	-0.5083	0.021	-24.2214
Dificultad	FLG_P19_5	-0.2439	0.0208	-11.7398
Dificultad	FLG_P19_6	-0.045	0.0181	-2.4895
Discriminación		4.5559	0.0815	55.8918

Tabla G2

Ajuste de los Ítems con Rasch (Remuneración)

Ítem	X^2	Pr(>X^2)
FLG_P19_1	71.4651	<0.0001
FLG_P19_2	97.279	<0.0001
FLG_P19_3	15.3316	0.0041
FLG_P19_4	369.9353	<0.0001
FLG_P19_5	88.2044	<0.0001
FLG_P19_6	116.2057	<0.0001

Tabla G3

Información de los Ítems con Rasch (Remuneración)

Habilidad	Total	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
Total	27.34	4.56	4.56	4.56	4.56	4.56	4.56
(-1,1)	26.28 (96.14%)	4.46 (97.88%)	4.42 (97.11%)	4.43 (97.14%)	4.11 (90.28%)	4.4 (96.56%)	4.46 (97.88%)

H.2. Modelo 2PL para la Dimensión *Remuneración*

Tabla G4

Resultado del Modelo 2PL (Remuneración)

Parámetro	Ítem	Valor	Error estándar	Valor Z
Dificultad	FLG_P19_1	0.0183	0.019	0.9654
Dificultad	FLG_P19_2	0.1248	0.03	4.1539
Dificultad	FLG_P19_3	0.1617	0.0187	8.6467
Dificultad	FLG_P19_4	-0.5864	0.0238	-24.6349
Dificultad	FLG_P19_5	-0.2858	0.022	-13.0104
Dificultad	FLG_P19_6	-0.0615	0.0174	-3.5321
Discriminación	FLG_P19_1	4.4096	0.1693	26.0523
Discriminación	FLG_P19_2	8.801	1.6503	5.3331
Discriminación	FLG_P19_3	4.8906	0.1939	25.2163
Discriminación	FLG_P19_4	2.8655	0.1006	28.4972
Discriminación	FLG_P19_5	3.8264	0.1467	26.0883
Discriminación	FLG_P19_6	5.9854	0.3685	16.2421

Tabla G5

Ratio de Verosimilitud del Modelo 2PL (Remuneración)

Modelo	AIC	BIC	log.Lik	LRT	df	p.value
Rasch	27843.90	27890.52	-13914.95			
2PL	27521.54	27601.47	-13748.77	332.36	5	<0.001

Tabla G6

Ajuste de los Ítems con 2PL (Remuneración)

Ítem	X^2	Pr(>X^2)
FLG_P19_1	279.0671	<0.0001
FLG_P19_2	207.4336	<0.0001
FLG_P19_3	289.0209	<0.0001
FLG_P19_4	354.9594	<0.0001
FLG_P19_5	754.4961	<0.0001
FLG_P19_6	255.2991	<0.0001

Tabla G7

Información de los Ítems con 2PL (Remuneración)

Habilidad	Total	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
Total	30.78	4. 41	8.8	4.89	2.87	3.83	5.99
(-1,1)	29.58	4.3	8.8	4.79	2.16	3.57	5.95
	(96.1%)	(97.59%)	(99.95%)	(98.03%)	(75.54%)	(93.17%)	(99.46%)

H.3. Modelo Rasch para la Dimensión *Desarrollo*

Tabla G8

Resultado del Modelo Rasch (Desarrollo)

Parámetro	Ítem	Valor	Error estándar	Valor Z
Dificultad	FLG_P9_1	-0.6193	0.0188	-32.9862
Dificultad	FLG_P9_2	-0.4839	0.0185	-26.1537
Dificultad	FLG_P9_3	-0.8615	0.0205	-42.0313
Dificultad	FLG_P9_4	-0.4872	0.0185	-26.3225
Dificultad	FLG_P9_5	-0.5312	0.0186	-28.5850
Discriminación		3.9623	0.0754	52.5326

Tabla G9

Prueba de Ajuste de los Ítems con Rasch (Desarrollo)

Ítem	X^2	Pr(>X^2)
FLG_P9_1	92.7676	<0.0001
FLG_P9_2	136.8376	<0.0001
FLG_P9_3	38.1948	<0.0001
FLG_P9_4	106.6719	<0.0001
FLG_P9_5	278.3125	<0.0001

Tabla G10

Información de los Ítems con Rasch (Desarrollo)

Habilidad	Total	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5
Total	19.81	3.96	3.96	3.96	3.96	3.96
(-1,1)	16.15	3.24	3.5	2.51	3.49	3.42
	(81.54%)	(81.72%)	(88.26%)	(63.33%)	(88.13%)	(86.27%)

H.4. Modelo 2PL para la Dimensión *Desarrollo*

Tabla G11

Resultado del Modelo 2PL (Desarrollo)

Parámetro	Ítem	Valor	Error estándar	Valor Z
Dificultad	FLG_P9_1	-0.6011	0.0176	-34.0886
Dificultad	FLG_P9_2	-0.4677	0.0181	-25.7858
Dificultad	FLG_P9_3	-0.8314	0.0204	-40.6703
Dificultad	FLG_P9_4	-0.4821	0.0183	-26.2890
Dificultad	FLG_P9_5	-0.5778	0.0212	-27.2571
Discriminación	FLG_P9_1	4.8621	0.2291	21.2178
Discriminación	FLG_P9_2	4.8787	0.2002	24.3694
Discriminación	FLG_P9_3	4.8079	0.2807	17.1278
Discriminación	FLG_P9_4	3.9920	0.1497	26.6699
Discriminación	FLG_P9_5	2.6325	0.0923	28.5283

Tabla G12

Ratio de Verosimilitud del Modelo 2PL (Desarrollo)

Modelo	AIC	BIC	log.Lik	LRT	df	p.value
Rasch	23276.63	23316.60	-11632.32			
2PL	23081.70	23148.31	-11530.85	202.93	4	<0.001

Tabla G13

Prueba de Ajuste de los Ítems con el Modelo 2PL (Desarrollo)

Ítem	X^2	Pr(>X^2)
FLG_P9_1	303.8810	<0.0001
FLG_P9_2	261.0252	<0.0001
FLG_P9_3	222.0787	<0.0001
FLG_P9_4	708.8623	<0.0001
FLG_P9_5	774.7666	<0.0001

Tabla G14

Información de los Ítems con el Modelo 2PL (Desarrollo)

Habilidad	Total	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5
Total	21.17	4.86	4.88	4.81	3.99	2.63
(-1,1)	17.59	4.25	4.54	3.33	3.53	1.94
	(83.06%)	(87.39%)	(92.99%)	(69.21%)	(88.5%)	(73.69%)

H.5. Modelo 1PL Bayesiano para la Dimensión *Remuneración*

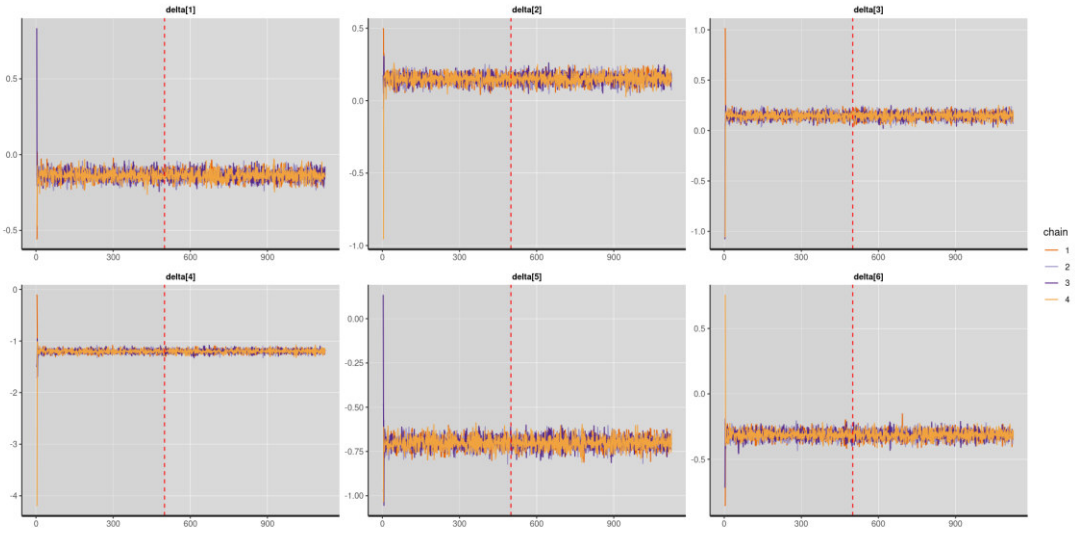
Tabla G15

Estimación de la Dificultad del 1PL Bayesiano (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Dificultad[1]	-0.137	0.001	0.034	-0.201	-0.160	-0.138	-0.114	-0.071	3173.651	1.000
Dificultad [2]	0.151	0.001	0.034	0.083	0.127	0.151	0.174	0.219	3655.590	1.000
Dificultad [3]	0.145	0.001	0.035	0.075	0.121	0.145	0.168	0.212	4083.653	0.999
Dificultad [4]	-1.199	0.001	0.037	-1.272	-1.225	-1.199	-1.174	-1.128	4432.322	1.000
Dificultad [5]	-0.701	0.001	0.035	-0.769	-0.725	-0.701	-0.678	-0.633	4056.043	0.999
Dificultad [6]	-0.315	0.001	0.034	-0.381	-0.339	-0.314	-0.291	-0.249	3727.293	0.999

Figura G1

Convergencia de la Estimación con 1PL (Remuneración)



H.6. Modelo 1PL Bayesiano para la Dimensión *Desarrollo*

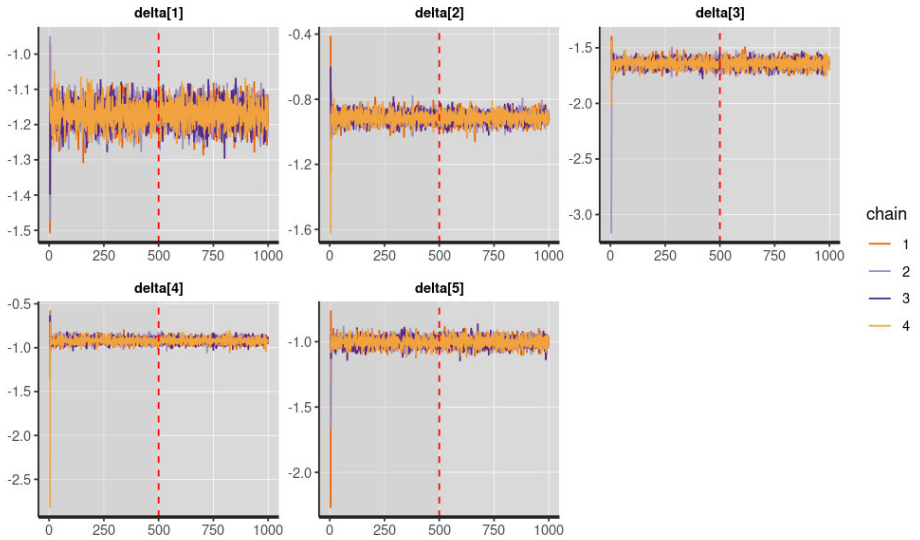
Tabla G16

Estimación de la Dificultad del 1PL Bayesiano (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Dificultad[1]	-1.17	0.00	0.03	-1.24	-1.19	-1.17	-1.15	-1.10	3,088.36	1.00
Dificultad [2]	-0.91	0.00	0.03	-0.98	-0.94	-0.91	-0.89	-0.85	3,154.87	1.00
Dificultad [3]	-1.64	0.00	0.04	-1.72	-1.67	-1.64	-1.61	-1.56	4,053.79	1.00
Dificultad [4]	-0.92	0.00	0.03	-0.99	-0.94	-0.92	-0.90	-0.85	3,826.32	1.00
Dificultad [5]	-1.00	0.00	0.04	-1.08	-1.03	-1.00	-0.98	-0.93	3,085.55	1.00

Figura G2

Convergencia de la Estimación con 1PL (Desarrollo)



H.7. Modelo 2PL Bayesiano para la Dimensión *Remuneración*

Tabla G17

Estimación de la Dificultad del 2PL Bayesiano (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Dificultad[1]	-0.07	0.00	0.02	-0.10	-0.08	-0.07	-0.06	-0.04	246.33	1.02
Dificultad [2]	0.06	0.00	0.02	0.03	0.05	0.06	0.07	0.09	227.83	1.02
Dificultad [3]	0.06	0.00	0.02	0.03	0.05	0.06	0.07	0.09	265.06	1.02
Dificultad [4]	-0.62	0.00	0.02	-0.66	-0.63	-0.62	-0.61	-0.58	385.38	1.01
Dificultad [5]	-0.34	0.00	0.02	-0.38	-0.36	-0.34	-0.33	-0.31	256.90	1.02
Dificultad [6]	-0.15	0.00	0.02	-0.18	-0.16	-0.15	-0.14	-0.12	220.59	1.02

Tabla G18

Estimación de la Discriminación del 2PL Bayesiano (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrimin. [1]	5.18	0.01	0.22	4.78	5.03	5.18	5.33	5.62	841.52	1.00
Discrimin. [2]	8.92	0.02	0.56	7.91	8.52	8.90	9.28	10.03	557.39	1.00
Discrimin. [3]	5.81	0.01	0.25	5.35	5.63	5.79	5.97	6.32	1057.47	1.00
Discrimin. [4]	3.15	0.00	0.11	2.94	3.07	3.15	3.23	3.38	818.65	1.00
Discrimin. [5]	4.23	0.01	0.17	3.91	4.12	4.23	4.35	4.55	767.18	1.00
Discrimin. [6]	6.28	0.01	0.29	5.74	6.08	6.27	6.48	6.87	840.46	1.00

Figura G3

Convergencia de la Dificultad con 2PL (Remuneración)

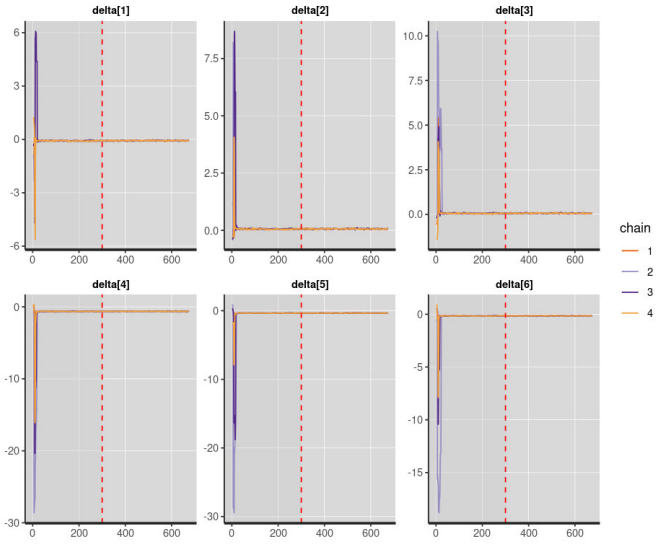
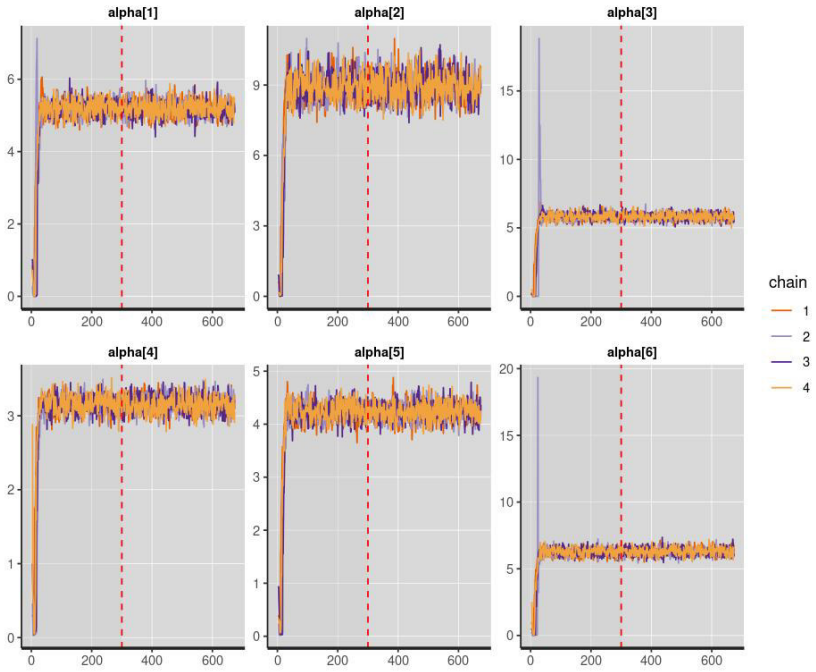


Figura G4

Convergencia de la Discriminación con 2PL (Remuneración)



H.8. Modelo 2PL Bayesiano para la Dimensión Desarrollo

Tabla G19

Estimación de la Dificultad del 2PL Bayesiano (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Dificultad[1]	-0.60	0.00	0.02	-0.64	-0.61	-0.60	-0.59	-0.56	177.05	1.03
Dificultad [2]	-0.47	0.00	0.02	-0.50	-0.48	-0.47	-0.46	-0.43	199.20	1.02
Dificultad [3]	-0.83	0.00	0.02	-0.88	-0.85	-0.83	-0.82	-0.79	168.60	1.04
Dificultad [4]	-0.48	0.00	0.02	-0.52	-0.50	-0.48	-0.47	-0.45	197.77	1.02
Dificultad [5]	-0.58	0.00	0.02	-0.62	-0.59	-0.58	-0.56	-0.54	198.17	1.03

Tabla G20

Estimación de la Discriminación del 2PL Bayesiano (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrim. [1]	5.04	0.01	0.25	4.59	4.87	5.03	5.20	5.56	359.82	1.02
Discrim. [2]	5.45	0.02	0.30	4.91	5.25	5.44	5.64	6.06	303.99	1.02
Discrim. [3]	4.70	0.01	0.24	4.27	4.52	4.68	4.86	5.21	471.18	1.02
Discrim. [4]	4.33	0.01	0.19	3.97	4.20	4.33	4.46	4.70	445.68	1.01
Discrim. [5]	2.71	0.01	0.10	2.51	2.64	2.71	2.77	2.90	337.23	1.02

Figura G5

Convergencia de la Dificultad con 2PL (Desarrollo)

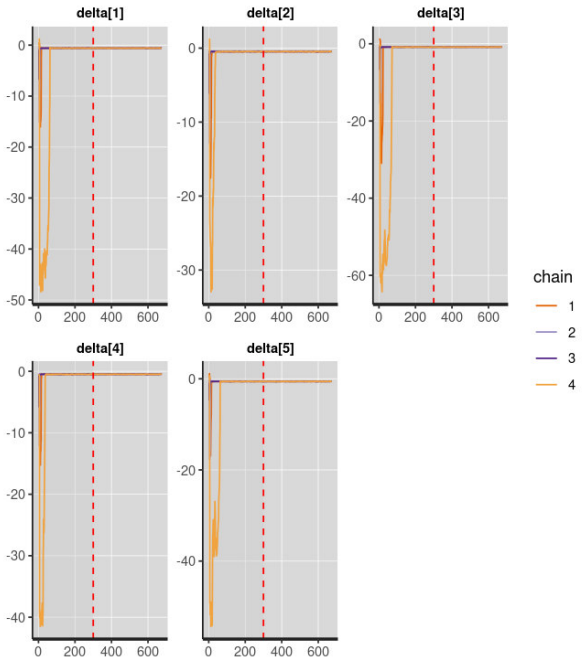
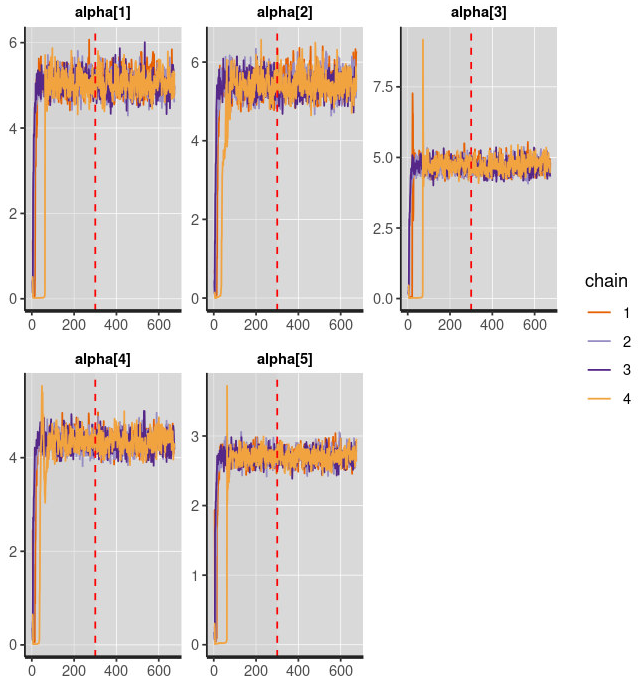


Figura G6

Convergencia de la Discriminación con 2PL (Desarrollo)



H.10. Modelo LPE Bayesiano para la Dimensión *Remuneración*

Tabla G21

Estimación de la Dificultad del LPE (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Dificultad[1]	0.26	0.00	0.04	0.18	0.23	0.26	0.29	0.33	194.02	1.01
Dificultad [2]	0.23	0.00	0.03	0.16	0.21	0.24	0.26	0.29	222.18	1.01
Dificultad [3]	0.14	0.00	0.08	-0.02	0.10	0.15	0.20	0.27	246.52	1.01
Dificultad [4]	-1.61	0.02	0.38	-2.47	-1.84	-1.57	-1.34	-0.99	517.58	1.00
Dificultad [5]	-1.19	0.02	0.32	-1.90	-1.37	-1.17	-0.96	-0.65	378.80	1.01
Dificultad [6]	-0.69	0.02	0.26	-1.31	-0.85	-0.66	-0.51	-0.28	244.52	1.01

Tabla G22

Estimación de la Discriminación del LPE (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrimin. [1]	16.05	0.87	10.80	8.60	10.92	12.88	16.43	48.68	155.77	1.02
Discrimin. [2]	36.74	3.01	30.24	12.55	18.62	25.87	41.46	131.63	101.17	1.02
Discrimin. [3]	6.61	0.06	1.01	5.09	5.89	6.48	7.13	9.01	298.94	1.02
Discrimin. [4]	2.64	0.00	0.12	2.42	2.56	2.63	2.72	2.90	768.63	1.00
Discrimin. [5]	3.38	0.01	0.17	3.08	3.26	3.37	3.49	3.75	579.20	1.00
Discrimin. [6]	4.84	0.02	0.33	4.30	4.61	4.80	5.02	5.62	324.00	1.00

Tabla G23

Estimación de la Penalización del LPE (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrimin. [1]	-1.66	0.04	0.46	-2.97	-1.84	-1.55	-1.36	-1.05	140.37	1.02
Discrimin. [2]	-1.70	0.06	0.67	-3.28	-2.08	-1.59	-1.20	-0.70	110.70	1.02
Discrimin. [3]	-0.32	0.02	0.29	-0.86	-0.50	-0.33	-0.14	0.25	260.12	1.01
Discrimin. [4]	2.15	0.04	0.87	0.77	1.52	2.05	2.66	4.26	495.39	1.00
Discrimin. [5]	2.35	0.05	0.95	0.81	1.67	2.28	2.90	4.54	370.33	1.01
Discrimin. [6]	2.10	0.07	1.07	0.45	1.33	1.93	2.71	4.78	259.71	1.01

Figura G7

Convergencia de la Dificultad con LPE (Remuneración)

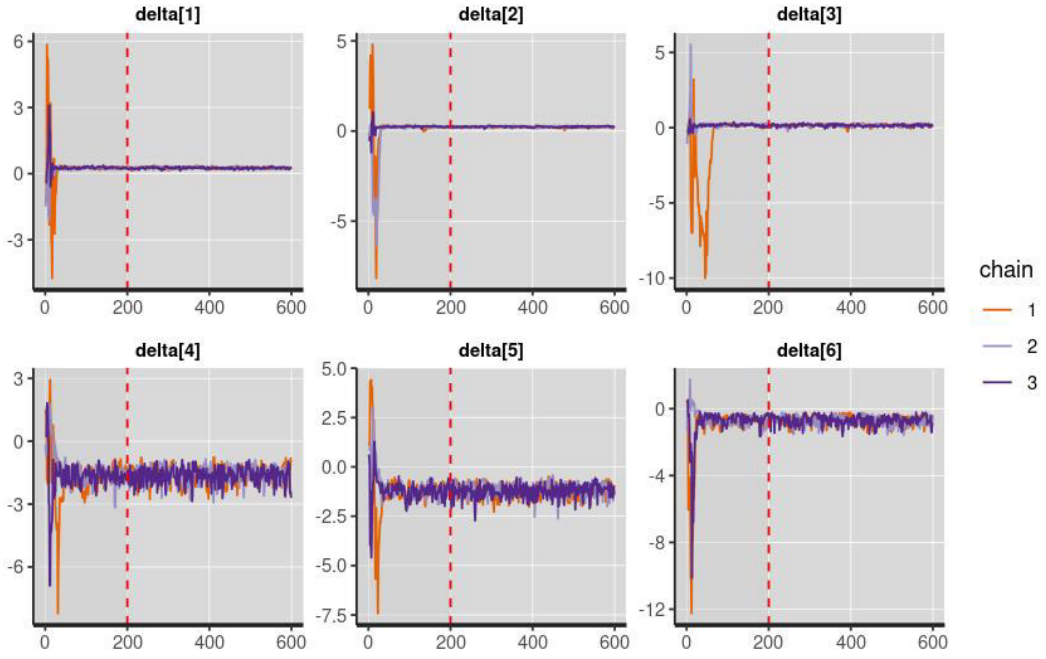


Figura G8

Convergencia de la Discriminación con LPE (Remuneración)

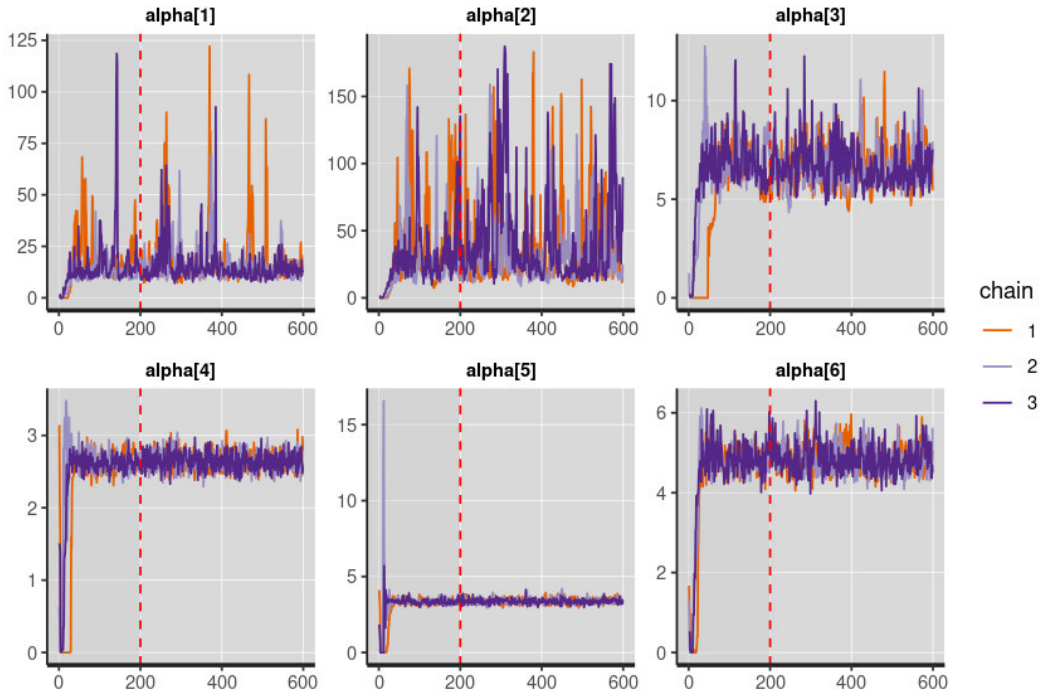
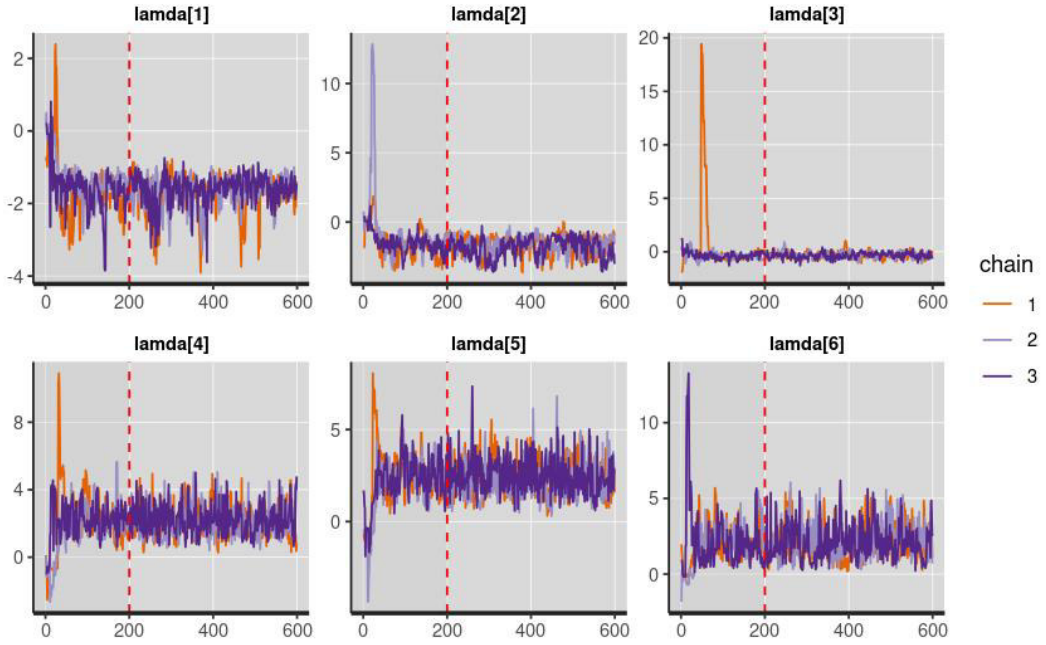


Figura G9

Convergencia de la Penalización con LPE (Remuneración)



H.10. Modelo LPE Bayesiano para la Dimensión *Desarrollo*

Tabla G24

Estimación de la Dificultad del LPE (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Dificultad[1]	-0.36	0.01	0.09	-0.57	-0.42	-0.35	-0.30	-0.22	78.23	1.05
Dificultad [2]	-0.54	0.02	0.19	-0.99	-0.64	-0.51	-0.41	-0.28	68.29	1.03
Dificultad [3]	-1.13	0.02	0.27	-1.75	-1.29	-1.09	-0.93	-0.72	179.07	1.02
Dificultad [4]	-1.13	0.02	0.32	-1.85	-1.32	-1.08	-0.89	-0.66	386.48	1.01
Dificultad [5]	-0.80	0.02	0.29	-1.44	-0.94	-0.77	-0.61	-0.37	169.10	1.02

Tabla G25

Estimación de la Discriminación del LPE (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrim. [1]	8.26	0.27	2.81	5.17	6.50	7.59	9.16	14.71	108.33	1.04
Discrim. [2]	5.40	0.11	0.99	4.02	4.69	5.23	5.93	7.73	77.07	1.03
Discrim. [3]	4.26	0.02	0.40	3.67	3.97	4.20	4.49	5.18	289.11	1.01
Discrim. [4]	3.35	0.01	0.25	2.96	3.17	3.32	3.49	3.91	457.35	1.01
Discrim. [5]	2.53	0.02	0.26	2.10	2.35	2.50	2.68	3.10	219.52	1.01

Tabla G26

Estimación de la Penalización del LPE (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrim. [1]	-0.91	0.05	0.43	-1.80	-1.17	-0.91	-0.63	-0.12	82.13	1.05
Discrim. [2]	0.23	0.08	0.64	-0.70	-0.18	0.14	0.55	1.74	66.82	1.03
Discrim. [3]	0.93	0.07	0.89	-0.32	0.30	0.77	1.42	3.04	174.48	1.02
Discrim. [4]	1.69	0.04	0.86	0.47	1.06	1.54	2.18	3.62	379.58	1.01
Discrim. [5]	0.37	0.04	0.49	-0.38	0.05	0.31	0.62	1.43	170.78	1.02

Figura G 10

Convergencia de la Dificultad con LPE (Desarrollo)

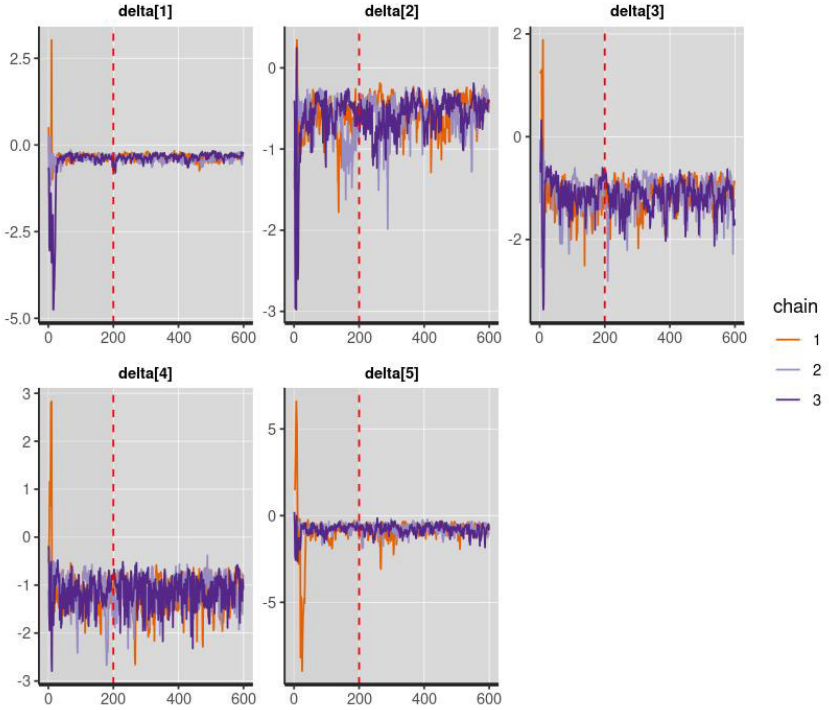


Figura G11

Convergencia de la Discriminación con LPE (Desarrollo)

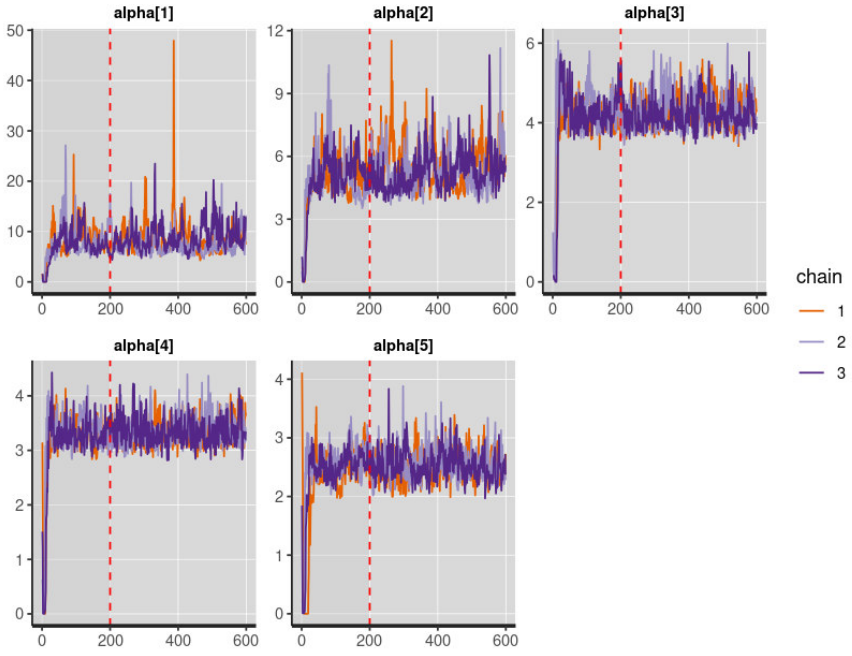
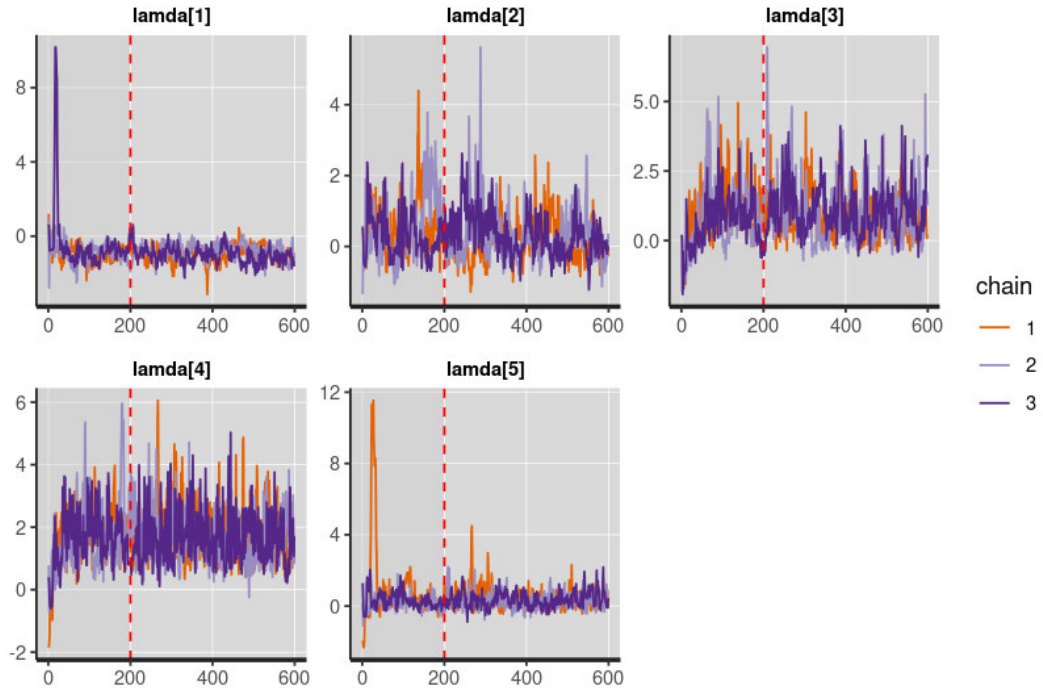


Figura G12

Convergencia de la Penalización con LPE (Desarrollo)



H.10. Modelo RLPE Bayesiano para la Dimensión *Remuneración*

Tabla G27

Estimación de la Dificultad con RLPE (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Dificultad[1]	0.87	0.01	0.30	0.42	0.65	0.82	1.04	1.57	695.22	1.00
Dificultad [2]	0.48	0.01	0.18	0.19	0.36	0.47	0.59	0.85	638.85	1.01
Dificultad [3]	0.39	0.03	0.25	0.03	0.21	0.34	0.53	0.98	96.70	1.05
Dificultad [4]	-1.03	0.00	0.05	-1.11	-1.07	-1.04	-1.01	-0.91	126.43	1.02
Dificultad [5]	-0.66	0.01	0.06	-0.77	-0.71	-0.67	-0.63	-0.52	77.40	1.02
Dificultad [6]	-0.34	0.01	0.06	-0.44	-0.38	-0.34	-0.30	-0.19	142.49	1.02

Tabla G28

Estimación de la Discriminación con RLPE (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrim. [1]	3.57	0.01	0.16	3.28	3.46	3.56	3.67	3.90	840.72	1.00
Discrim. [2]	6.74	0.02	0.51	5.92	6.37	6.71	7.07	7.83	524.56	1.01
Discrim. [3]	4.68	0.04	0.47	3.96	4.34	4.61	4.95	5.83	160.34	1.03
Discrim. [4]	20.19	1.31	18.91	5.34	8.74	13.80	23.27	74.31	209.40	1.00
Discrim. [5]	16.14	1.97	20.40	5.59	7.79	10.01	15.00	69.80	107.07	1.02
Discrim. [6]	12.41	0.91	10.74	6.40	8.14	9.75	12.33	38.49	140.57	1.01

Tabla G29

Estimación de la Penalización con RLPE (Remuneración)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Penalizac.. [1]	2.84	0.04	0.96	1.45	2.15	2.65	3.41	5.12	691.61	1.00
Penalizac.. [2]	2.36	0.04	1.03	0.73	1.62	2.25	2.96	4.64	605.97	1.01
Penalizac.. [3]	1.14	0.09	0.87	-0.09	0.54	0.95	1.61	3.23	95.64	1.05
Penalizac. [4]	-1.97	0.07	0.73	-3.60	-2.42	-1.89	-1.40	-0.82	123.71	1.01
Penalizac.. [5]	-1.48	0.09	0.70	-3.31	-1.76	-1.31	-1.01	-0.56	66.29	1.02
Penalizac.. [6]	-0.93	0.05	0.54	-2.35	-1.14	-0.84	-0.59	-0.14	112.87	1.01

Figura G13

Convergencia de la Dificultad con RLPE (Remuneración)

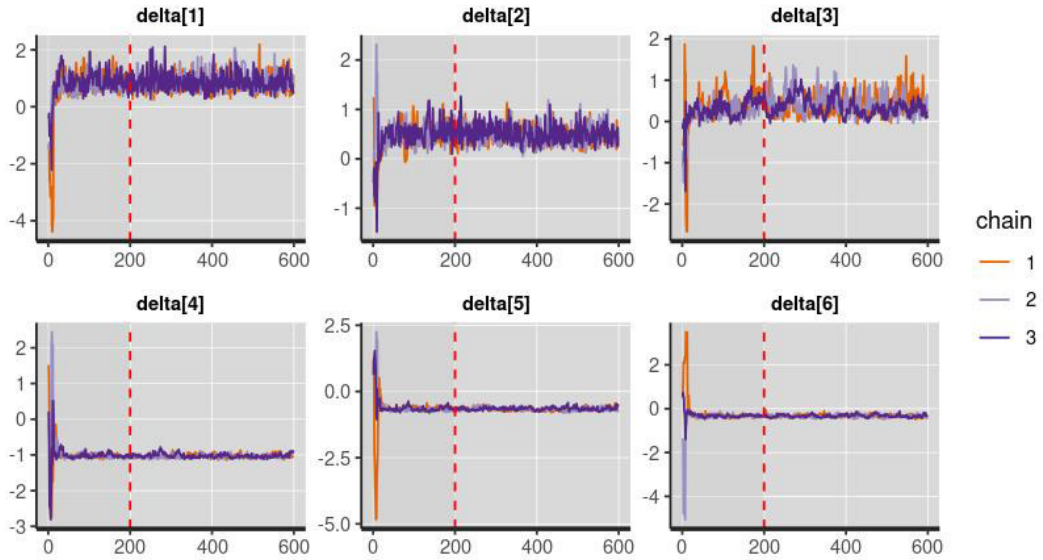


Figura G14

Convergencia de la Discriminación con RLPE (Remuneración)

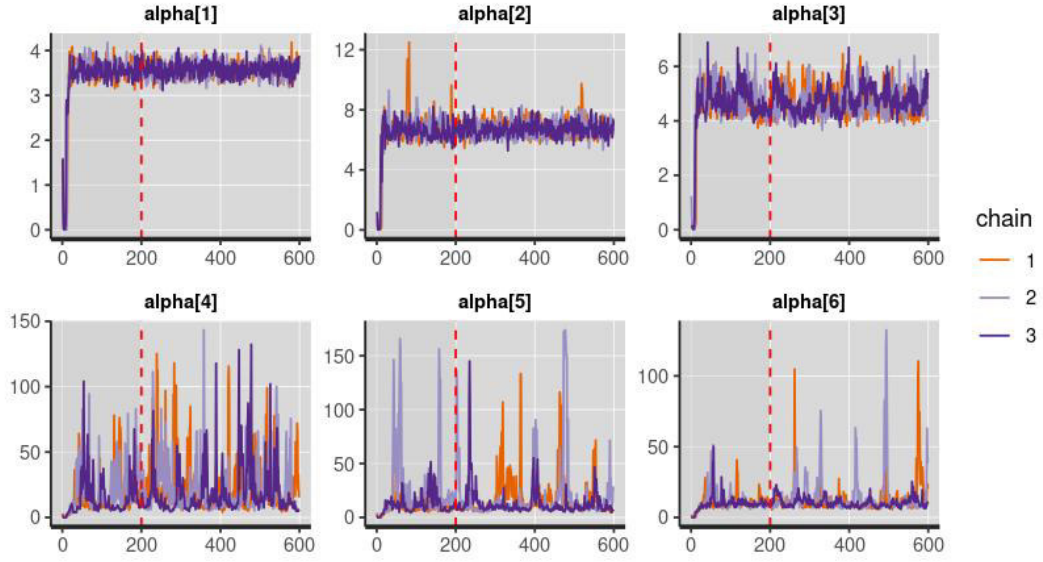
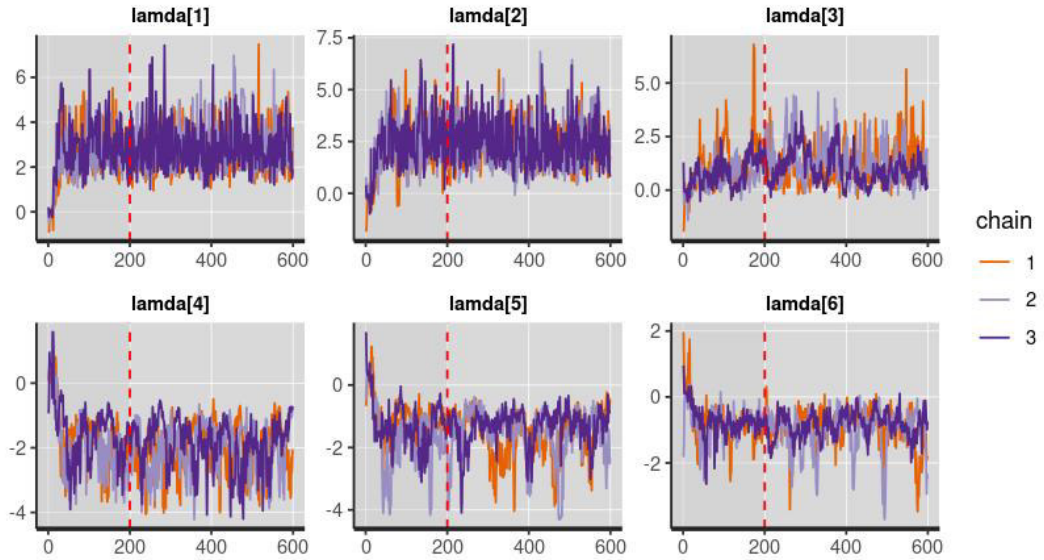


Figura G15

Convergencia de la Penalización con RLPE (Remuneración)



H.11. Modelo RLPE Bayesiano para la Dimensión *Desarrollo*

Tabla G30

Estimación de la Dificultad del RLPE (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Dificultad[1]	-0.16	0.04	0.29	-0.60	-0.37	-0.22	0.01	0.50	64.99	1.07
Dificultad [2]	-0.35	0.03	0.23	-0.65	-0.52	-0.41	-0.24	0.20	53.12	1.08
Dificultad [3]	-0.86	0.02	0.15	-1.10	-0.97	-0.88	-0.77	-0.51	75.91	1.07
Dificultad [4]	-0.76	0.01	0.08	-0.90	-0.82	-0.77	-0.72	-0.56	68.50	1.07
Dificultad [5]	-0.57	0.03	0.22	-0.91	-0.72	-0.60	-0.47	-0.03	76.25	1.02

Tabla G31

Estimación de la Discriminación del RLPE (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrim. [1]	3.94	0.07	0.50	3.22	3.59	3.87	4.19	5.21	53.47	1.09
Discrim. [2]	5.30	0.12	0.98	3.88	4.56	5.18	5.83	7.45	62.84	1.07
Discrim. [3]	5.74	0.29	2.31	3.51	4.36	5.13	6.34	12.84	63.57	1.07
Discrim. [4]	8.58	0.41	4.19	4.78	6.34	7.57	9.44	18.17	104.56	1.03
Discrim. [5]	2.82	0.04	0.44	2.11	2.51	2.76	3.05	3.94	105.94	1.01

Tabla G32

Estimación de la Penalización del RLPE (Desarrollo)

Parámetro	Promedio	se_mean	Desviación estandar	2.50%	25%	50%	75%	97.50%	n_eff	Rhat
Discrim. [1]	1.24	0.10	0.83	-0.01	0.66	1.09	1.71	3.13	65.62	1.07
Discrim. [2]	0.34	0.10	0.74	-0.68	-0.17	0.17	0.74	2.08	53.97	1.08
Discrim. [3]	-0.18	0.06	0.52	-1.38	-0.49	-0.15	0.16	0.81	63.22	1.08
Discrim. [4]	-1.06	0.05	0.45	-2.10	-1.30	-1.02	-0.77	-0.23	71.67	1.06
Discrim. [5]	-0.02	0.04	0.38	-0.69	-0.26	-0.05	0.19	0.85	80.08	1.02

Figura G16

Convergencia de la Dificultad con RLPE (Desarrollo)

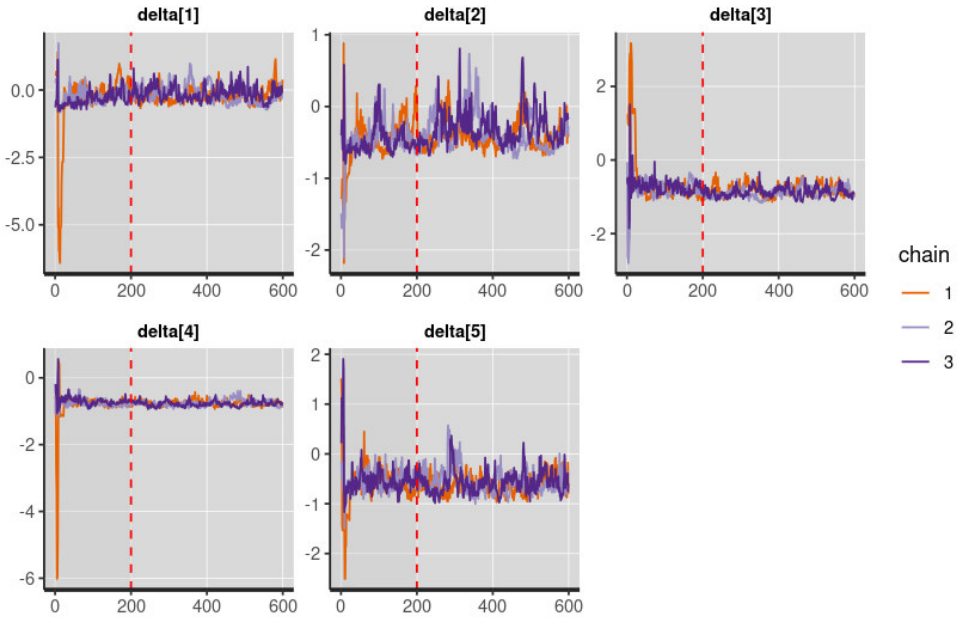


Figura G17

Convergencia de la Discriminación con RLPE (Desarrollo)

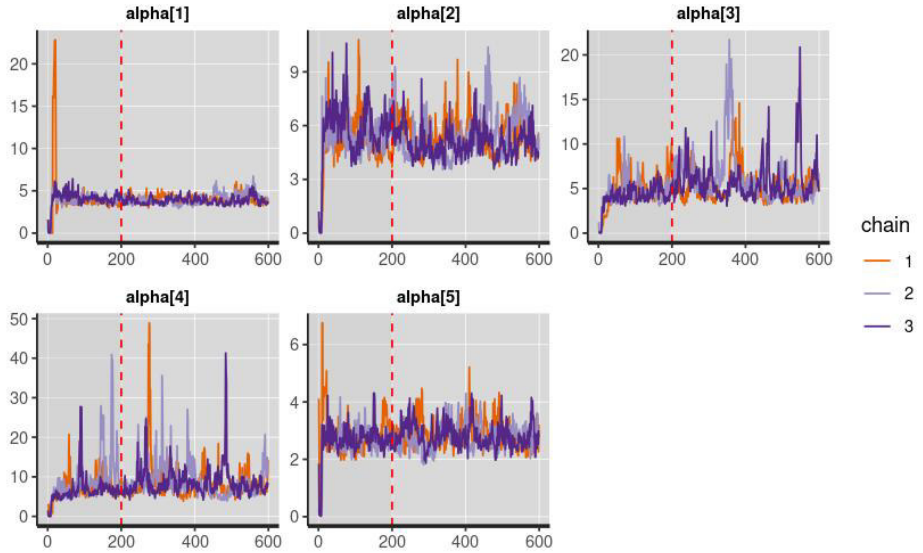


Figura G18

Convergencia de la Penalización con RLPE (Desarrollo)

