

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

ESCUELA ACADÉMICO-PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**Cohomología del Espacio Proyectivo**

TESIS

Para Optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

GABRIEL ARMANDO MUÑOZ MARQUEZ

**Lima – Perú**

**2014**

## COHOMOLOGÍA DEL ESPACIO PROYECTIVO

Gabriel Armando Muñoz Márquez

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

.....  
Mg. Soledad Ramírez Carrasco

.....  
Lic. Miriam Pescorán Florencio

.....  
Mg. Mario Santiago Saldaña

LIMA-PERÚ  
Agosto-2014

## FICHA CATALOGRÁFICA

GABRIEL ARMANDO MUÑOZ MÁRQUEZ

Cohomología del Espacio Proyectivo, (Lima) 2014.

xi, 108 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado en Matemática, 2014).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas. UNMSM/F de CM.

**Dedicado a mi mamá Antonia, mi papá Armando,  
mi hermana Giovanna y mi enamorada Sandra.**

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los profesores que me enseñaron cursos en la universidad, en especial a aquellos con quienes llevé cursos de álgebra, ya que sus clases fueron muy motivantes para mí. En especial, agradezco al profesor Mario Santiago, a quien conocí al llevar el curso de Estructuras Algebraicas.

Agradezco a Lord Barrera, ex-profesor de la Facultad de Ciencias Matemáticas, por ayudarme en la organización de esta tesis y guiarme en el desarrollo de la tesis durante el último año que él estuvo en la facultad.

Agradezco a Fernando Cukierman, profesor de la Universidad de Buenos Aires, por la oportunidad de conocerlo en Perú y haberme propuesto el tema de mi tesis. También, le agradezco por haber seguido el desarrollo de mi tesis y por compartir su valioso punto de vista sobre los temas presentes en mi tesis.

Agradezco a los miembros del jurado calificador de mi tesis, por sus valiosas observaciones y sugerencias.

Agradezco muy especialmente a mis padres por la educación y el apoyo que siempre me han dado; y agradezco a mi hermana por el cariño y la compañía. Agradezco a mi familia por el ambiente amoroso que siempre ha habido en casa; gracias a todo lo que me han dado he podido lograr mis objetivos.

Agradezco a Sandra, mi enamorada, por el amor, la compañía y los ánimos en la realización de mi tesis y otras metas.

Agradezco a todos los que de algún modo formaron parte de la realización de mi tesis.

En especial, agradezco a Joe Palacios, alumno de Matemática quien también fue asesorado por el profesor Lord Barrera en un inicio. Ambos tuvimos objetivos similares en nuestras tesis y al inicio nos dividimos los desarrollos de algunos resultados extensos.

**RESUMEN**

**COHOMOLOGÍA DEL ESPACIO PROYECTIVO**

**GABRIEL ARMANDO MUÑOZ MÁRQUEZ**

**AGOSTO-2014**

Orientador : Mg. Mario Santiago Saldaña

Título obtenido : Licenciado en Matemática

.....  
En este trabajo estudiamos la teoría de esquemas y cohomología para calcular grupos de cohomología de haces torcidos en el espacio proyectivo sobre un anillo noetheriano. Para hacer los cálculos de grupos de cohomología, usamos cohomología de Čech así como también estudiamos la cohomología de haces casi coherentes en esquemas afines noetherianos y la conmutatividad de la cohomología con límites directos en espacios topológicos noetherianos.

Finalmente realizamos una aplicación de los cálculos hechos, calculando el género de una curva lisa e irreducible en el plano proyectivo sobre  $\mathbb{C}$ .

**PALABRAS CLAVE:**

Esquemas

Cohomología

Espacio proyectivo

Haces casi coherentes

**ABSTRACT****THE COHOMOLOGY OF PROJECTIVE SPACE****GABRIEL ARMANDO MUÑOZ MÁRQUEZ****AUGUST-2014**

Adviser : Mg. Mario Santiago Saldaña

Obtained Title : Licenciado en Matemática

.....

In this work we study schemes and cohomology theory to calculate cohomology groups of twisted sheaves on the projective space over a noetherian ring. To make calculations of cohomology groups, we use Čech cohomology and also study cohomology of quasi-coherent sheaves on noetherian affine schemes and commutativity of cohomology with direct limits on noetherian topological spaces.

Finally we make an application of the calculations we have done, by calculating the genus of a smooth and irreducible curve in the projective plane over  $\mathbb{C}$ .

**KEY WORDS:**

Schemes

Cohomology

Projective space

Quasi-coherent sheaves

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Aspectos Topológicos . . . . .	1
1.2 Aspectos de Álgebra Conmutativa . . . . .	3
1.3 Variedades y Morfismos . . . . .	10
<b>2 Haces y Esquemas</b>	<b>20</b>
2.1 Haces y Morfismos de Haces . . . . .	20
2.2 Espacio Étalé de un Prehaz y Haz Asociado . . . . .	25
2.3 Haces Flascos y Subhaces con Soporte . . . . .	37
2.4 Esquemas . . . . .	41
2.5 La Construcción del <i>Proj</i> . . . . .	47
2.6 Propiedades de esquemas . . . . .	51
2.7 Haces de módulos . . . . .	60
<b>3 Cohomología</b>	<b>78</b>
3.1 Funtores Derivados . . . . .	78
3.2 Cohomología de Haces . . . . .	84
3.3 Cohomología de un Esquema Afín Noetheriano . . . . .	90
3.4 Cohomología de Čech . . . . .	93
3.5 Cohomología del Espacio Proyectivo . . . . .	99
3.6 Aplicaciones y comentarios finales . . . . .	105
<b>Bibliografía</b>	<b>108</b>

# Introducción

La geometría algebraica es una área de las matemáticas que estudia las soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales; es decir, en el lenguaje de la geometría algebraica es el estudio de las variedades algebraicas. Los problemas que se buscan resolver pueden estar relacionados con la clasificación de las variedades algebraicas, invariantes numéricos, espacios de parámetros, etc. También, existen conceptos presentes en otras áreas como son el género, la característica de Euler, etc. Cabe mencionar también, que existen resultados análogos en otras áreas, entre ellas el análisis complejo en varias variables.

La teoría de esquemas y cohomología ha resultado muy útil en la demostración de resultados importantes, así como también en el entendimiento y generalización de resultados clásicos como por ejemplo el teorema de Riemann-Roch. En esta tesis, estudiaremos la teoría de esquemas y cohomología (capítulos 2 y 3). En el capítulo 1 vamos a ver preliminares topológicos y algebraicos, así como también la teoría clásica de variedades algebraicas. Destacamos que los resultados de los capítulos 2 y 3 son independientes de la teoría presente en el capítulo 1, así que en una lectura rápida podríamos dirigirnos directamente a los capítulos 2 y 3, remitiéndonos al capítulo 1 sólo para esclarecer algunos conceptos. El resultado principal es el teorema 3.5.1, el cual es el primer cálculo explícito de cohomologías que es de gran importancia para la demostración de resultados más avanzados. Toda la tesis está basada en el clásico libro *Algebraic Geometry* de Robin Hartshorne. Cabe mencionar que la teoría sobre geometría algebraica es extensa; podemos mencionar que la teoría clásica de variedades algebraicas (capítulo 1 de la tesis) es hecha en un primer curso de geometría algebraica, y la teoría de esquemas y cohomología (capítulos 2 y 3 de la tesis) es hecha en un segundo curso de geometría algebraica (incluso a veces la teoría de cohomología es hecha aparte en un tercer curso de geometría algebraica). A lo largo de la tesis, las demostraciones serán

hechas con detalle, y para no extenderse demasiado, algunos resultados serán solo enunciados sin prueba. Para la comprensión del enunciado del teorema 3.5.1 de la tesis, los conceptos clave necesarios son los siguientes:

- (1) haz (definiciones 2.1.1 y 2.1.2)
- (2) espacios anillados y localmente anillados (definición 2.4.1)
- (3) espectro de un anillo (definiciones 1.2.1, 1.2.2 y 2.4.2)
- (4) esquemas afines y esquemas (definición 2.4.3)
- (5) la construcción del *Proj* y el espacio proyectivo sobre un anillo (definiciones 2.5.1, 2.5.2 y 2.5.3)
- (6) haz asociado a un módulo graduado y haz torcido (definiciones 2.7.5 y 2.7.6)
- (7) funtores derivados y cohomología de haces (sección 3.1 y definición 3.2.1)

Con respecto a los resultados más importantes en la demostración del teorema 3.5.1, podemos destacar los siguientes:

- (1) cálculo de cohomologías vía *cohomología de Čech* (proposición 3.4.5)
- (2) cohomología conmuta con límites directos en un espacio topológico noetheriano (proposición 3.2.7)
- (3) cohomología de haces casi coherentes en esquemas afines noetherianos (teorema 3.3.6)

Para definiciones, notaciones y resultados de álgebra conmutativa, la bibliografía que será usada es *Introduction to Commutative Algebra* de Atiyah-Macdonald y *Commutative Algebra, with a View Toward Algebraic Geometry* de David Eisenbud. Los conceptos básicos de álgebra conmutativa usados en esta tesis son: anillos, ideales, módulos, localizaciones y anillos noetherianos.

## Notaciones

Si  $A$  es un anillo y  $\mathfrak{a} \subseteq A$  es un ideal, entonces  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  es el ideal radical de  $\mathfrak{a}$ .

Si  $\varphi : A \rightarrow B$  es un homomorfismo de anillos y  $\mathfrak{a} \subseteq A$  es un ideal, entonces  $\mathfrak{a}^e \subseteq B$  es la extensión de  $\mathfrak{a}$  en  $B$ , es decir  $\mathfrak{a}^e$  es el ideal generado por  $\varphi(\mathfrak{a})$  en  $B$ . Si  $\mathfrak{b} \subseteq B$  es un ideal, entonces  $\mathfrak{b}^c \subseteq A$  es la contracción de  $\mathfrak{b}$  en  $A$ , es decir  $\mathfrak{b}^c = \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ .

Si  $A$  es un anillo, denotamos por  $\text{Spec } A$  al conjunto de ideales primos de  $A$ .

Si  $A$  es un anillo, denotamos por  $\mathcal{U}(A)$  o  $A^*$  al conjunto de las unidades de  $A$ .

Si  $A$  es un anillo y  $a \in A$ , denotamos por  $\langle a \rangle$  o  $(a)$  al ideal generado por  $a$ .

Si  $A$  es un anillo,  $M$  es un  $A$ -módulo y  $m \in M$ , entonces  $\text{Ann}(m) \subseteq A$  es el ideal anulador de  $m$ , es decir  $\text{Ann}(m) = \{a \in A; am = 0\}$ . También  $\text{Sop}(M) \subseteq \text{Spec } A$  es el conjunto de ideales primos  $\mathfrak{p}$  tal que la localización  $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ .

Las categorías de anillos y de esquemas son denotadas respectivamente por  $\mathfrak{Ring}$  y  $\mathfrak{Sch}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

En todo el trabajo suponemos que el lector está familiarizado con cursos básicos de álgebra y topología; sin embargo destacaremos algunos resultados que serán mencionados o utilizados continuamente.

### 1.1 Aspectos Topológicos

**Definición 1.1.1.** *Un subconjunto no vacío  $Y$  de un espacio topológico  $X$  es llamado **irreducible** si no puede ser expresado como la unión  $Y = Y_1 \cup Y_2$  de dos subconjuntos propios cada uno de los cuales es cerrado en  $Y$ . El conjunto vacío no es considerado irreducible. Un subconjunto que no es irreducible es llamado **reducible**.*

**Observación 1.1.1.** Cualquier subconjunto abierto no vacío de un espacio irreducible es irreducible y denso. Más aún, un subconjunto no vacío  $Y$  de un espacio topológico  $X$  es irreducible si todo par de abiertos no vacíos de  $Y$  se intersectan.

**Observación 1.1.2.** Sea  $Y$  un subespacio de  $X$ . Si  $Z \subseteq Y$  es cerrado e irreducible en  $Y$ , entonces su clausura  $\bar{Z}$  de  $Z$  en  $X$  es también cerrado e irreducible. En efecto, supongamos que  $\bar{Z} = Z_1 \cup Z_2$  es la unión de dos subconjuntos cerrados propios en  $\bar{Z}$ . Entonces  $Z = \bar{Z} \cap Y = (Z_1 \cap Y) \cup (Z_2 \cap Y)$ ; además para cada  $i$  tenemos  $Z_i \cap Y \neq Z$ , pues de lo contrario, si  $Z_i \cap Y = Z$  para algún  $i$ , entonces  $\bar{Z} \subseteq Z_i \subseteq \bar{Z}$ , lo cual es una contradicción. Esto prueba lo afirmado.

**Definición 1.1.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico no vacío. Un subespacio irreducible maximal de  $X$  es llamado **componente irreducible**.*

**Teorema 1.1.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico no vacío. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a)  $X$  posee subespacios irreducibles.
- (b)  $X$  posee componentes irreducibles.
- (c) Las componentes irreducibles son subconjuntos cerrados.
- (d)  $X$  es la unión de sus componentes irreducibles.

*Demostración.* (a). Desde que  $X \neq \emptyset$ , sea  $x \in X$ ; luego  $\{x\}$  es un subespacio irreducible de  $X$ .

(b). Veamos que cada  $x \in X$  pertenece a un subespacio irreducible maximal. Sea  $x \in X$  y consideremos la familia  $\mathcal{R}_x$  constituido por todos los subespacios irreducibles de  $X$  que contienen a  $x$ .  $\mathcal{R}_x \neq \emptyset$ , pues,  $\{x\} \in \mathcal{R}_x$ . Ordenamos a  $\mathcal{R}_x$  por la inclusión y consideremos una cadena  $\{Y_i\}$  en  $\mathcal{R}_x$ . Sea  $E = \bigcup_{i \in I} Y_i$  y veamos que  $E$  es irreducible. Para esto tomamos dos abiertos no vacíos  $U_1$  y  $U_2$  en  $E$ , luego  $U_k = E \cap U'_k$  con  $U'_k$  abierto en  $X$  para cada  $k$ . Tenemos  $U_k = (\bigcup_{i \in I} Y_i) \cap U'_k = \bigcup_{i \in I} (Y_i \cap U'_k)$  para cada  $k$ . Veamos que  $U_1 \cap U_2$  es no vacío. Existen índices  $i, j$  tales que  $Y_i \cap U'_1$  y  $Y_j \cap U'_2$  son no vacíos. Sea  $Y_i \subseteq Y_j$ . Entonces  $Y_j \cap U'_1$  y  $Y_j \cap U'_2$  son no vacíos. Luego, como  $Y_j$  es irreducible, obtenemos que  $(Y_j \cap U'_1) \cap (Y_j \cap U'_2)$  es no vacío. Así  $U_1 \cap U_2$  es no vacío y por tanto  $E$  es irreducible. De aquí,  $\mathcal{R}_x$  es inductivo, y por el lema de Zorn existe un elemento maximal en  $\mathcal{R}_x$ , el cual es una componente irreducible que contiene a  $x$ .

(c). Sea  $Y \subseteq X$  una componente irreducible. Vamos a ver que  $Y$  es cerrado. Tenemos que  $Y \subseteq \bar{Y}$ , y de acuerdo a la observación 1.1.2 tenemos que  $\bar{Y}$  es irreducible; por tanto,  $Y = \bar{Y}$ , pues  $Y$  es maximal.

(d). Para cada  $x \in X$ , sea  $Y_x$  una componente irreducible de  $X$  conteniendo a  $x$ . Entonces  $X = \bigcup_{x \in X} Y_x$ .  $\square$

**Observación 1.1.3.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua y  $Z$  es subespacio irreducible de  $X$ , entonces  $f(Z)$  es irreducible en  $Y$ . En efecto, sean  $U_1$  y  $U_2$  subconjuntos abiertos no vacíos de  $f(Z)$ , entonces  $U_i = f(Z) \cap U'_i$ , donde  $U'_i$  es abierto en  $Y$  ( $i = 1, 2$ ). Es claro que  $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(f(Z) \cap U'_i) \supseteq Z \cap f^{-1}(U'_i)$ . Desde que  $f(Z) \cap U'_i \neq \emptyset$ , entonces  $Z \cap f^{-1}(U'_i) \neq \emptyset$  y por tanto  $Z \cap f^{-1}(U'_1) \cap f^{-1}(U'_2) \neq \emptyset$ . Así que  $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \neq \emptyset$ , lo que implica  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

**Definición 1.1.3.** Un espacio topológico  $X$  es llamado **noetheriano** si satisface la **condición de cadena descendente** en subconjuntos cerrados: para cualquier sucesión

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

de subconjuntos cerrados, existe un entero  $r$  tal que  $Y_r = Y_{r+1} = \dots$

**Observación 1.1.4.** Cualquier subespacio de un espacio noetheriano es noetheriano. En efecto, sea  $Y$  subconjunto del espacio noetheriano  $X$  y consideremos una cadena  $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_n \subseteq \dots$  de subconjuntos cerrados de  $Y$ . Entonces  $\overline{Z}_1 \subseteq \overline{Z}_2 \subseteq \dots \subseteq \overline{Z}_n \subseteq \dots$  es una cadena de cerrados en  $X$ . Desde que  $X$  es noetheriano, existe  $i$  tal que  $\overline{Z}_i = \overline{Z}_{i+1} = \dots$ . Por otra parte,  $Z_i = \overline{Z}_i \cap Y$  para todo  $i$ . De aquí,  $Z_i = Z_{i+1} = \dots$

**Proposición 1.1.2.** Sea  $X$  un espacio topológico noetheriano. Entonces todo subconjunto cerrado  $Y$  de  $X$  puede ser expresado como unión finita  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$  de subconjuntos cerrados irreducibles de  $X$ . Además, si  $Y_i \not\subseteq Y_j$  para todo  $i \neq j$ , entonces los  $Y_i$  son determinados de manera única. Ellos son las componentes irreducibles de  $Y$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  la colección de subconjuntos cerrados de  $X$  que no se pueden expresar como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles de  $X$  y supongamos que  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Entonces existe un elemento minimal  $C \in \mathcal{F}$ ; como  $C$  no es irreducible, entonces existen subconjuntos cerrados propios  $C_1, C_2$  de  $X$  con  $C = C_1 \cup C_2$ . Pero  $C_i \notin \mathcal{F}$ ; así que  $C_i$  es unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles de  $X$ . De aquí,  $C$  también lo es, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todo conjunto cerrado  $Y$  puede ser expresado como unión finita  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$  de subconjuntos cerrados irreducibles; además, podemos asumir que  $Y_i \not\subseteq Y_j$  para todo  $i \neq j$ .

Supongamos que  $Y = Y'_1 \cup \dots \cup Y'_s$  es otra tal representación. Entonces  $Y_i = \bigcup_{j=1}^s (Y'_j \cap Y_i)$ . Pero  $Y_i$  es irreducible, entonces  $Y_i \subseteq Y'_{j(i)}$  para algún  $j(i)$ . Similarmente,  $Y'_{j(i)} \subseteq Y_k$  para algún  $k$ . Entonces  $Y_i \subseteq Y_k$ , de donde  $i = k$  y  $Y_i = Y'_{j(i)}$ . También cada  $Y'_j$  es igual a algún  $Y_{i(j)}$ .  $\square$

## 1.2 Aspectos de Álgebra Conmutativa

**Definición 1.2.1.** Sea  $A$  un anillo y  $X = \text{Spec}(A)$  el conjunto de ideales primos de  $A$ . Para cada subconjunto  $S$  de  $A$ , sea  $V(S) = \{\mathfrak{p} \in X : S \subseteq \mathfrak{p}\}$

y sea  $\mathcal{C}$  la colección de estos conjuntos. Si  $\mathfrak{a} = \langle S \rangle$ , se tiene claramente que  $V(S) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ ; así que  $\mathcal{C}$  puede ser considerado como la colección de conjuntos de la forma  $V(\mathfrak{a})$ , donde  $\mathfrak{a}$  es un ideal de  $A$ . Si  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , escribimos  $V(S) = V(a_1, \dots, a_n)$ .

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $A$  un anillo y  $X = \text{Spec}(A)$ . Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a)  $V(0) = X$  y  $V(1) = \emptyset$ .

(b) Dados los ideales  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  de  $A$ , se tiene

$$V(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1) \cup V(\mathfrak{a}_2).$$

(c) Dada la familia  $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$  de ideales de  $A$ , se tiene

$$\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

*Demostración.* Las afirmaciones (a) y (c) son consecuencias directas de la definición. Por otra parte, para verificar la afirmación (b) es suficiente notar que  $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ .  $\square$

**Definición 1.2.2.** *De acuerdo a la proposición anterior, existe una única topología sobre  $X$  tal que la familia de subconjuntos cerrados de  $X$  coincide con  $\mathcal{C}$ . La topología obtenida es llamada **topología espectral** o **topología de Zariski** de  $X$ .*

**Definición 1.2.3.** *Sea  $X = \text{Spec}(A)$ . Denotamos los elementos de  $X$  por  $x$ . Si  $x \in X$ , es considerado como ideal primo, será denotado por  $\mathfrak{p}_x$ . Así, para un subconjunto  $S$  de  $A$ ,  $V(S) = \{x \in X : S \subseteq \mathfrak{p}_x\}$ . Para un subconjunto  $Y$  de  $X$  se define  $I(Y) = \bigcap_{y \in Y} \mathfrak{p}_y$ , entonces  $I(\{x\}) = \mathfrak{p}_x$ .  $I(Y)$  es llamado **ideal de  $Y$** .*

**Teorema 1.2.2.** *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) Dados  $S_1 \subseteq S_2$  subconjuntos de  $A$ ,  $V(S_2) \subseteq V(S_1)$ .

(b) Para cualquier subconjunto  $Y$  de  $X$ ,  $Y \subseteq V(I(Y))$ .

(c) Para cualquier subconjunto  $Y$  de  $X$ ,  $I(Y)$  es un ideal radical.

(d) Si  $Y_1 \subseteq Y_2$  son subconjuntos de  $X$ , entonces  $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$ .

- (e) Para cualquier subconjunto  $S$  de  $A$ ,  $S \subseteq I(V(S))$ .
- (f) Si  $\{Y_i\}_{i \in I}$  es una familia de subconjuntos de  $X$ , entonces  $I(\bigcup_{i \in I} Y_i) = \bigcap_{i \in I} I(Y_i)$ .
- (g) Para cualquier subconjunto  $Y$  de  $X$ ,  $V(I(Y)) = \overline{Y}$ .
- (h) Para cualquier ideal  $\mathfrak{a}$  de  $A$ ,  $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\langle \mathfrak{a} \rangle}$ .
- (i) Sean  $Y_1, Y_2$  subconjuntos cerrados de  $X$ . Entonces  $Y_1 \subseteq Y_2$  si y sólo si  $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$  y  $Y_1 \subsetneq Y_2$  si y sólo si  $I(Y_2) \subsetneq I(Y_1)$ .

*Demostración.* Las afirmaciones (a), (b), (d) y (e) son directas. Veamos (c). Si  $Y = \emptyset$ , es evidente que  $I(\emptyset) = A$ . Si  $Y \neq \emptyset$ , entonces

$$\sqrt{I(Y)} = \sqrt{\bigcap_{y \in Y} \mathfrak{p}_y} = \bigcap_{y \in Y} \mathfrak{p}_y = I(Y).$$

(f). Una inclusión es inmediata a partir de la afirmación (d). Ahora supongamos que  $x \notin I(\bigcup_{i \in I} Y_i)$ , entonces existe un ideal primo  $\mathfrak{p}$  y un índice  $i$  tal que  $\mathfrak{p} \in Y_i$  y  $x \notin \mathfrak{p}$ ; de aquí,  $x \notin I(Y_i)$ , lo que prueba la otra inclusión.

(g). Es claro que  $\overline{Y} \subseteq V(I(Y))$ . Recíprocamente, sea  $C$  un subconjunto cerrado de  $X$  tal que  $Y \subseteq C$ , entonces  $C = V(\mathfrak{a})$  para algún ideal  $\mathfrak{a}$  de  $A$ . Por la afirmación (e),  $\mathfrak{a} \subseteq I(Y)$ , y por la afirmación (a) se sigue que  $V(I(Y)) \subseteq V(\mathfrak{a}) = C$ .

(h). Si  $\mathfrak{a} = A$ , entonces  $I(V(\mathfrak{a})) = I(V(1)) = I(\emptyset) = A = \sqrt{\langle \mathfrak{a} \rangle}$ . Por otra parte, si  $\mathfrak{a} \neq A$ , entonces  $I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_x = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x} \mathfrak{p}_x = \sqrt{\langle \mathfrak{a} \rangle}$ .

(i). Es consecuencia de las afirmaciones (a), (d) y (g).  $\square$

**Corolario 1.2.3.** Sea  $X = \text{Spec}(A)$  y sean  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  ideales de  $A$ . Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a)  $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$  si y sólo si  $\mathfrak{a} = A$ .
- (b)  $V(\mathfrak{a}) = X$  si y sólo si  $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\langle 0 \rangle}$ .
- (c)  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b})$  si y sólo si  $\sqrt{\langle \mathfrak{a} \rangle} = \sqrt{\langle \mathfrak{b} \rangle}$ .

*Demostración.* Consecuencia directa del teorema anterior.  $\square$

**Corolario 1.2.4.** Sean  $x, y \in X = \text{Spec}(A)$ . Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a)  $V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}}$ .
- (b)  $\{x\}$  es cerrado si y sólo si  $\mathfrak{p}_x$  es maximal.
- (c)  $y \in \overline{\{x\}}$  si y sólo si  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ .

*Demostración.* (a).  $V(\mathfrak{p}_x) = V(I(\mathfrak{p}_x)) = \overline{\{\mathfrak{p}_x\}} = \overline{\{x\}}$ .

(b). Supongamos que  $\{x\}$  es cerrado y sea  $\mathfrak{a}$  un ideal de  $A$  tal que  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{a}$ . Entonces  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}} = \{x\}$ . Si  $V(\mathfrak{a}) = \{x\}$ , entonces  $I(V(\mathfrak{a})) = I(\{\mathfrak{p}_x\}) = \mathfrak{p}_x$ , por lo que  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x$  y por tanto  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_x$ . Si  $V(\mathfrak{a}) \subsetneq \{x\}$ , entonces  $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$ , de donde,  $I(V(\mathfrak{a})) = A$ ; sin embargo,  $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ , o sea,  $\mathfrak{a} = A$ .

Recíprocamente, veamos que  $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$ . Si  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_x)$ , entonces  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}$ , por lo que,  $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}$ , pues,  $\mathfrak{p}_x$  es maximal. Por lo tanto,  $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$ .

(c). Sea  $y \in \overline{\{x\}}$ , según la primera afirmación tenemos que  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ . Recíprocamente, si  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ , entonces  $y \in V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}}$ .  $\square$

**Observación 1.2.1.** Sigue de la última proposición que  $X$  es un espacio  $\tau_0$ ; mientras que, el conjunto de ideales maximales de  $A$ , denotado por  $\text{Spec}_M(A)$  es un espacio  $\tau_1$ .

**Definición 1.2.4.** Para cada elemento  $a \in A$ , definimos el **abierto básico** del espacio topológico  $X = \text{Spec}(A)$  como el conjunto  $D(a) = X \setminus V(a)$ .

**Proposición 1.2.5.** Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a)  $\mathcal{B} = \{D(a) : a \in A\}$  es una base para la topología espectral de  $X$ .
- (b)  $D(a) = \emptyset$  si y sólo si  $a$  es nilpotente.
- (c)  $D(a) \cap D(b) = D(ab)$ .
- (d)  $D(a) = X$  si y sólo si  $a \in \mathcal{U}(A)$ .
- (e)  $D(a)$  es casi compacto para todo  $a \in A$ .
- (f) Un subconjunto abierto de  $X$  es casi compacto si y sólo si es unión finita de elementos de  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* (a). Es claro que  $\mathcal{B}$  está formado por subconjuntos abiertos de  $X$ . Sea ahora  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ , luego  $X \setminus U = V(\mathfrak{a})$  para algún ideal  $\mathfrak{a}$  de  $A$ . Así que  $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{a \in \mathfrak{a}} V(a)$ . Por lo tanto,  $U = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} (X \setminus V(a)) = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} D(a)$ .

Las afirmaciones (b) y (d) son inmediatas a partir del corolario 1.1.3, y la afirmación (c) es directa.

(e). Para cada elemento  $a \in A$ , será suficiente mostrar que cualquier cubrimiento de  $D(a)$  por conjuntos abiertos  $D(a_i)$  tiene un subcubrimiento finito. Supongamos que  $D(a) \subseteq \bigcup_{i \in I} D(a_i)$ . Sea  $\mathfrak{a}$  el ideal de  $A$  generado por los elementos  $a_i$ . Entonces  $V(a) \supseteq \bigcap_{i \in I} V(a_i) = V(\mathfrak{a})$ ; de aquí,  $a \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ , es decir,  $a^n \in \mathfrak{a}$  para algún entero positivo  $n$ . Sea  $a^n = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$ . Se tiene que  $a^n \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \mathfrak{b}$ ; de donde,

$$V(a) = V(a^n) \supseteq V(\mathfrak{b}) = \bigcap_{i=1}^r V(a_i).$$

Tomando complemento, obtenemos  $D(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^r D(a_i)$ .

(f). Sea  $U$  un subconjunto abierto y casi compacto de  $X$ . Tenemos que  $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$  para algún ideal  $\mathfrak{a}$  de  $A$ . Así que,  $U = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} (X \setminus V(a))$ , y como  $U$  es compacto, entonces

$$U = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus V(a_i)) = \bigcup_{i=1}^n D(a_i).$$

Recíprocamente, sea  $U = \bigcup_{i=1}^n D(a_i)$ . Desde que cada  $D(a_i)$  es casi compacto, entonces  $U$  es casi compacto, ya que es unión finita de conjuntos casi compactos.  $\square$

Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos y sean  $X = \text{Spec}(A)$  e  $Y = \text{Spec}(B)$ . Si  $\mathfrak{q} \in Y$ , entonces  $\mathfrak{q}^c = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in X$ . Por lo que,  $\varphi$  induce una aplicación  $\varphi^* : Y \rightarrow X$  definida por  $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^c$ .

**Proposición 1.2.6.** *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a) Si  $f \in A$ , entonces  $(\varphi^*)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ .
- (b) Si  $\mathfrak{a}$  es ideal de  $A$ , entonces  $(\varphi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$ . De aquí,  $\varphi^*$  es una aplicación continua.
- (c) Si  $\mathfrak{b}$  es ideal de  $B$ , entonces  $\overline{\varphi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$ .
- (d) Si  $\varphi$  es sobreyectiva, entonces  $\varphi^*$  es un homeomorfismo de  $Y$  sobre el subconjunto cerrado  $V(\text{Nuc}(\varphi))$  de  $X$ .
- (e)  $\varphi^*(Y)$  es denso en  $X$  si y sólo si  $\text{Nuc}(\varphi) \subseteq \sqrt{\langle 0 \rangle}$ .

(f) Si  $\psi : A \rightarrow B$  es otro homomorfismo de anillos, entonces se tiene  $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ .

*Demostración.* (a). Sea  $f$  un elemento de  $A$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in (\varphi^*)^{-1}(D(f)) &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in (\varphi^*)^{-1}(X \setminus V(f)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \setminus (\varphi^*)^{-1}(V(f)) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \quad \text{y} \quad \varphi^*(\mathfrak{p}) \notin V(f) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \quad \text{y} \quad \mathfrak{p}^c \notin V(f) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \quad \text{y} \quad f \notin \mathfrak{p}^c \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \quad \text{y} \quad \varphi(f) \notin \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \quad \text{y} \quad \mathfrak{p} \notin V(\varphi(f)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in Y \setminus V(\varphi(f)) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in D(\varphi(f)). \end{aligned}$$

(b). Sea  $\mathfrak{a}$  un ideal de  $A$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in (\varphi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) &\Leftrightarrow \varphi^*(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{p}^c \in V(\mathfrak{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^c \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\varphi(\mathfrak{a})) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\langle \varphi(\mathfrak{a}) \rangle) = V(\mathfrak{a}^e). \end{aligned}$$

(c). Es claro que  $\sqrt{\mathfrak{b}^c} = \sqrt{\mathfrak{b}}^c$ . Sea  $Z = V(\mathfrak{b})$  y  $\mathfrak{a} = I(\varphi^*(Z))$ ; luego,  $V(\mathfrak{a}) = \overline{\varphi^*(Z)}$ . Veamos que  $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{b}}^c$ . Sea  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$ , entonces  $\mathfrak{p}^c \in \varphi^*(Z)$ . Ahora bien, si  $a \in \mathfrak{a}$ , entonces  $a \in \mathfrak{p}^c$ , lo que implica  $\varphi(a) \in \mathfrak{p}$ . Sigue que  $\varphi(a) \in I(V(\mathfrak{b}))$ , y de esto último,  $\varphi(a) \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ . Por lo tanto,

$$a \in \sqrt{\mathfrak{b}}^c \tag{1.2.1}$$

Veamos la parte recíproca. Tenemos  $\mathfrak{a} = I(\varphi^*(Z))$ , tomemos un elemento  $\mathfrak{p} \in \varphi^*(Z) = \varphi^*(V(\mathfrak{b}))$ , entonces  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^c$ , donde  $\mathfrak{p}_1$  es un ideal primo de  $B$  con  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}_1$ ; por otro lado, si  $b \in \sqrt{\mathfrak{b}}^c$ , entonces  $\varphi(b) \in \sqrt{\mathfrak{b}} = I(V(\mathfrak{b}))$ . También, como  $\mathfrak{p}_1 \in V(\mathfrak{b})$ , entonces  $\varphi(b) \in \mathfrak{p}_1$ , lo que implica  $b \in \mathfrak{p}$ . Por lo tanto,

$$b \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \varphi^*(Z)} \mathfrak{p} = I(\varphi^*(Z)) = \mathfrak{a} \tag{1.2.2}$$

Finalmente, de (1.2.1) y (1.2.2) obtenemos que  $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{b}}^c$ , y por tanto conseguimos

$$\overline{\varphi^*(V(\mathfrak{b}))} = \overline{\varphi^*(Z)} = V(\mathfrak{a}) = V(\varphi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})) = V(\sqrt{\mathfrak{b}^c}) = V(\mathfrak{b}^c).$$

(d). La correspondencia  $\text{Spec}(B) \rightarrow V(\text{Nuc}(\varphi))$  dada por  $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^c$  está bien definida ya que  $\text{Nuc}(\varphi) \subseteq \mathfrak{q}^c$ . A continuación definimos  $\psi :$

$V(\text{Nuc}(\varphi)) \rightarrow \text{Spec}(B)$  por  $\mathfrak{p} \mapsto \varphi(\mathfrak{p})$ . Debido a la inclusión  $\text{Nuc}(\varphi) \subseteq \mathfrak{p}$ , entonces se tiene que

$$(\varphi^* \circ \psi)(\mathfrak{p}) = \varphi^*(\psi(\mathfrak{p})) = \varphi^*(\varphi(\mathfrak{p})) = \varphi(\mathfrak{p})^c = \mathfrak{p}$$

También, desde que  $\varphi$  es sobreyectiva, entonces

$$(\psi \circ \varphi^*)(\mathfrak{q}) = \psi(\varphi^*(\mathfrak{q})) = \psi(\mathfrak{q}^c) = \varphi(\mathfrak{q}^c) = \mathfrak{q}.$$

Ahora bien, siendo  $\varphi^* : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  continua, entonces  $\varphi^*$  es también continua sobre  $V(\text{Nuc}(\varphi))$ . Resta mostrar que  $\psi$  es continua. Para esto, consideremos un subconjunto cerrado  $C$  de  $\text{Spec}(B)$  y escribamos  $C = V(\mathfrak{b})$  para algún ideal  $\mathfrak{b}$  de  $B$ . No hay dificultad en verificar la igualdad  $\psi^{-1}(V(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b}^c)$ .

(e). Por la afirmación (c) tenemos que  $\overline{\varphi^*(Y)} = \overline{\varphi^*(V(0))} = V(\text{Nuc}(\varphi))$ . Si  $\overline{\varphi^*(Y)} = X$ , entonces  $V(\text{Nuc}(\varphi)) = X = V(0)$ ; por lo que,  $\sqrt{\text{Nuc}(\varphi)} = \sqrt{\langle 0 \rangle}$ , de aquí,  $\text{Nuc}(\varphi) \subseteq \sqrt{\langle 0 \rangle}$ . Recíprocamente, si  $\text{Nuc}(\varphi) \subseteq \sqrt{\langle 0 \rangle}$ , entonces  $X = \text{Spec}(A) = V(\text{Nuc}(\varphi))$ , y por la afirmación (c), se tiene  $X = \overline{\varphi^*(V(0))} = \varphi^*(Y)$ .

(f). La sucesión de homomorfismos de anillos  $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$  induce la sucesión de aplicaciones continuas  $\text{Spec}(C) \xrightarrow{\psi^*} \text{Spec}(B) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Spec}(A)$ . Ahora bien, si  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(C)$ , entonces

$$\begin{aligned} (\varphi^* \circ \psi^*)(\mathfrak{p}) &= \varphi^*(\psi^*(\mathfrak{p})) = \varphi^*(\psi^{-1}(\mathfrak{p})) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\mathfrak{p})) \\ &= (\psi \circ \varphi)^{-1}(\mathfrak{p}) = (\psi \circ \varphi)^*(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.2.7.** *Sea  $A$  un anillo,  $S$  un subconjunto multiplicativo de  $A$  y  $\varphi : A \rightarrow A_S$  el homomorfismo canónico. Entonces  $\varphi^* : \text{Spec}(A_S) \rightarrow \text{Spec}(A)$  es un homeomorfismo de  $\text{Spec}(A_S)$  sobre su imagen en  $X = \text{Spec}(A)$ . En particular, si  $f \in A$ , la imagen de  $\text{Spec}(A_f)$  en  $X$  es  $D(f)$ .*

*Demostración.* Veamos la igualdad

$$\text{Im}(\varphi^*) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

Sea  $\mathfrak{p} \in \text{Im}(\varphi^*)$ , podemos escribir  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ , donde  $\mathfrak{q}$  es ideal primo de  $A_S$ ; y entonces  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ . Recíprocamente, consideremos  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  con

$\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ . Entonces  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$ . Más aún tenemos  $\mathfrak{p} = \varphi^*(\mathfrak{p}^e)$  y  $\mathfrak{p}^e \in \text{Spec}(A_S)$ . Las correspondencias

$$\begin{array}{ccc} \varphi^* : \text{Spec}(A_S) & \rightarrow & \text{Im}(\varphi^*) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \mathfrak{q}^c \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \psi : \text{Im}(\varphi^*) & \rightarrow & \text{Spec}(A_S) \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \mathfrak{p}^e \end{array} .$$

están bien definidas; además

$$(\varphi^* \circ \psi)(\mathfrak{p}) = \varphi^*(\mathfrak{p}^e) = \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p} \quad \text{y} \quad (\psi \circ \varphi^*)(\mathfrak{q}) = \psi(\mathfrak{q}^c) = \mathfrak{q}^{ce} = \mathfrak{q}$$

Por tanto,  $\varphi^*$  es una biyección entre  $\text{Spec}(A_S)$  y  $\text{Im}(\varphi^*)$  cuya inversa es  $\psi$ .

La continuidad de  $\varphi^*$  es consecuencia de la afirmación (b) en la proposición 1.2.1. Veamos a continuación la continuidad de  $\psi$ . Sea  $\mathfrak{b}$  ideal de  $A_S$  y afirmamos que

$$\psi^{-1}(V(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b}^c) \cap \text{Im}(\varphi^*)$$

Sea pues  $\mathfrak{p} \in \psi^{-1}(V(\mathfrak{b}))$ , de donde  $\mathfrak{p}^e \in V(\mathfrak{b})$ , osea  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}^e$  que implica  $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ ; y por tanto  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b}^c) \cap \text{Im}(\varphi^*)$ . Para la otra inclusión, damos  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b}^c) \cap \text{Im}(\varphi^*)$ , es decir  $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{p}$  y  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ . Entonces  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}^e = \psi(\mathfrak{p})$ , es decir  $\mathfrak{p} \in \psi^{-1}(V(\mathfrak{b}))$ . Finalmente, desde que

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\} = D(f)$$

donde  $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ , entonces tenemos que  $\text{Spec}(A_S)$  es homeomorfo a  $D(f)$ .  $\square$

### 1.3 Variedades y Morfismos

**Definición 1.3.1.** Sea  $K$  un cuerpo. Se define el  $n$ -espacio **afín** sobre  $K$ , denotado por  $\mathbb{A}_K^n$  o simplemente por  $\mathbb{A}^n$ , como el conjunto de  $n$ -uplas de elementos de  $K$ . Un elemento  $p \in \mathbb{A}^n$  es llamado **punto**, y si  $p = (a_1, \dots, a_n)$  con  $a_i \in K$ , entonces los  $a_i$  son llamados **coordenadas** de  $p$ . El espacio  $\mathbb{A}^1$  es llamado **recta afín** y  $\mathbb{A}^2$  se llama **plano afín**.

Sea  $\mathcal{P}(\mathbb{A}^n, K)$  el álgebra de funciones polinomiales de  $\mathbb{A}^n$  en  $K$  y consideremos el anillo de polinomios en  $n$  variables  $A_n = K[x_1, \dots, x_n]$ ; si  $K$  es infinito se sabe que  $\mathcal{P}(\mathbb{A}^n, K) \cong K[x_1, \dots, x_n]$  como  $K$ -álgebras. Por tanto, cuando  $K$  es infinito, un polinomio en  $n$  variables será visto como una función  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow K$ ; así, de esta manera,  $f(p) = f(a_1, \dots, a_n)$ , donde  $f \in A_n$  y  $p \in \mathbb{A}^n$ . Dado  $f \in A_n$  podemos considerar el conjunto de **ceros**

de  $f$ , es decir  $Z(f) = \{p \in K^n \mid f(p) = 0\}$ . Más generalmente, si  $T$  es un subconjunto de  $A_n$ , definimos el **conjunto de ceros** de  $T$  como sigue

$$Z(T) = \{p \in K^n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Si  $\mathfrak{a}$  es el ideal de  $A_n$  generado por  $T$ , es claro que  $Z(\mathfrak{a}) = Z(T)$ ; además desde que  $A_n$  es un anillo noetheriano, el ideal  $\mathfrak{a}$  tiene un número finito de generadores  $f_1, \dots, f_r$ . Así,  $Z(T) = Z(\{f_1, \dots, f_r\})$  o denotado simplemente como  $Z(T) = Z(f_1, \dots, f_r)$ . Un subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{A}^n$  es llamado **conjunto algebraico** si existe un subconjunto  $T$  de  $A_n$  tal que  $Y = Z(T)$ , o equivalentemente un subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{A}^n$  es un conjunto algebraico si  $Y = Z(\mathfrak{a})$  para algún ideal  $\mathfrak{a}$  de  $A_n$ . Cuando  $Y = Z(T)$  es un conjunto algebraico diremos que  $Y$  está definido por  $T$  o que  $T$  define a  $Y$ . Si  $Y = Z(f)$ , entonces  $Y$  es llamado **hipersuperficie**, una hipersuperficie en  $\mathbb{A}^2$  es llamado **curva afín plana**; una hipersuperficie de grado 1 es llamado hiperplano y un hiperplano en  $\mathbb{A}^2$  es llamado **recta afín**.

**Proposición 1.3.1.** *La unión de dos conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. La intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. El conjunto vacío y todo el espacio afín son conjuntos algebraicos.*

*Demostración.* Si  $Y_1 = Z(\mathfrak{a}_1)$  e  $Y_2 = Z(\mathfrak{a}_2)$ , entonces  $Y_1 \cup Y_2 = Z(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$ . También, si  $\{Y_i = Z(\mathfrak{a}_i)\}_{i \in I}$  es una familia de conjuntos algebraicos, entonces  $\bigcap_{i \in I} Y_i = Z(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$ . Finalmente,  $Z(1) = \emptyset$  y  $Z(0) = \mathbb{A}^n$ .  $\square$

**Definición 1.3.2.** *Definimos la **topología de Zariski** de  $\mathbb{A}^n$ , tomando los conjuntos abiertos como los complementos de conjuntos algebraicos. Una **variedad algebraica afín** o simplemente **variedad** es un subconjunto cerrado irreducible de  $\mathbb{A}^n$  (con la topología inducida). Un subconjunto abierto de una variedad afín es llamado **variedad casi afín**.*

**Definición 1.3.3.** *Para cualquier subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{A}^n$ , el conjunto*

$$I_a(Y) = \{f \in A_n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } p \in Y\}$$

*es un ideal radical de  $A_n$  llamado **ideal afín** de  $Y$ . En lo que sigue denotaremos a este ideal por  $I(Y)$  y utilizaremos la notación  $I_a(Y)$  cuando sea necesario.*

**Observación 1.3.1.** A partir de la definición es claro que  $I(\emptyset) = A_n$ ; además si  $p = (a_1, \dots, a_n)$ , se tiene la igualdad  $I(p) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ . Por otra parte, si  $K$  es infinito tenemos que  $I(\mathbb{A}^n) = \{0\}$ .

**Teorema 1.3.2.** (Ceros de Hilbert). *Si  $K$  es algebraicamente cerrado, entonces para cualquier ideal  $\mathfrak{a}$  de  $A_n$  se tiene*

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

*Demostración.* Ver [3]. □

**Definición 1.3.4.** *Sea  $Y \subseteq \mathbb{A}^n$  un conjunto algebraico afín. Definimos el anillo coordinado o anillo de funciones  $A(Y)$  de  $Y$  como  $A_n/I(Y)$ . Así tenemos  $\mathcal{P}(Y, K) \cong A(Y)$ . Por tanto un elemento  $f \in A(Y)$  también será visto como una función polinomial  $f : Y \rightarrow K$ .*

**Proposición 1.3.3.** *Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado. Una  $K$ -álgebra  $B$  es isomorfa al anillo coordinado de algún conjunto algebraico en  $\mathbb{A}^n$  para algún  $n$ , si y sólo si  $B$  es una  $K$ -álgebra reducida finitamente generada (una álgebra  $B$  es reducida si no tiene elementos nilpotentes no nulos).*

*Demostración.* Se sabe que un anillo  $A$  es reducido si y sólo si el ideal  $\{0\}$  es un ideal radical. Ahora bien, si  $B \cong A(Y)$  para algún conjunto algebraico  $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ , entonces  $B \cong K[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$  es una  $K$ -álgebra reducida y finitamente generada, pues  $I(Y)$  es un ideal radical. Recíprocamente, consideremos  $B$  una  $K$ -álgebra reducida y finitamente generada; podemos escribir  $B = K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$  para algún ideal radical  $\mathfrak{a}$ . Si  $Y = Z(\mathfrak{a})$ , por el teorema de los ceros de Hilbert obtenemos que  $A(Y) = B$ . □

**Observación 1.3.2.** Si  $Y$  es una variedad afín entonces  $A(Y)$  es un dominio de integridad; además  $A(Y)$  es una  $K$ -álgebra finitamente generada. Recíprocamente, si  $K$  es algebraicamente cerrado, cualquier  $K$ -álgebra  $B$  finitamente generada que también es un dominio, es el anillo de funciones de alguna variedad afín. Más precisamente, si  $B = A_n/\mathfrak{a}$  con  $\mathfrak{a}$  ideal primo, considerando  $Y = Z(\mathfrak{a})$  se tiene que  $B = A(Y)$ .

**Definición 1.3.5.** Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado. Definimos el  **$n$ -espacio proyectivo** sobre  $K$ , denotado por  $\mathbb{P}_K^n$ , o simplemente  $\mathbb{P}^n$ , como el conjunto de clases de equivalencia de  $(n+1)$ -uplas  $(a_0, \dots, a_n)$  de elementos de  $K$ , no todos nulos, bajo la relación de equivalencia dada por  $(a_0, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$  para todo  $\lambda \in K$ ,  $\lambda \neq 0$ . Un elemento de  $\mathbb{P}^n$  es llamado un punto. Si  $p$  es un punto, entonces cualquier  $(n+1)$ -upla  $(a_0, \dots, a_n)$  en la clase de equivalencia  $p$  es llamada un conjunto de coordenadas homogéneas para  $p$ .

Sea  $S$  el anillo de polinomios  $K[x_0, \dots, x_n]$ . Consideraremos a  $S$  como un anillo graduado. Para esto revisemos brevemente la noción de anillo graduado.

**Definición 1.3.6.** Un **anillo graduado** es un anillo  $S$  junto con una descomposición  $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$  de  $S$  como suma directa de grupos abelianos  $S_d$  tal que para todo  $d, e \geq 0$ ,  $S_d S_e \subseteq S_{d+e}$ . Un elemento de  $S_d$  es llamado **elemento homogéneo de grado  $d$** . Así, cualquier elemento de  $S$  se escribe de manera única como suma de elementos homogéneos. Un ideal  $\mathfrak{a} \subseteq S$  es un **ideal homogéneo** si  $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathfrak{a} \cap S_d)$ , esto equivale a decir que  $\mathfrak{a}$  es generado por elementos homogéneos.

**Proposición 1.3.4.** La suma, producto, intersección y radical de ideales homogéneos son homogéneos.

*Demostración.* Sean  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$  ideales homogéneos. Es fácil ver que  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  y  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$  son homogéneos. Que  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  es homogéneo sigue directo de la definición.

Ahora consideremos el radical  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  de un ideal homogéneo  $\mathfrak{a}$ . Sea  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$  y sea  $f = f_s + f_{s+1} + \dots$  la descomposición de  $f$  en sus componentes homogéneas, donde  $f_s$  es la componente inicial de  $f$ . Para demostrar que  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  es un ideal homogéneo, basta demostrar que todas las componentes homogéneas de  $f$  pertenecen a  $\sqrt{\mathfrak{a}}$ . Razonando por inducción en el número de componentes homogéneas, basta demostrar que  $f_s \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Tenemos  $f^\rho = f_s^\rho +$  términos de grado  $> s\rho \in \mathfrak{a}$  para algún entero  $\rho$ . Desde que  $\mathfrak{a}$  es homogéneo, sigue que cada componente de  $f^\rho$  pertenece a  $\mathfrak{a}$ ; así tenemos que  $f_s^\rho \in \mathfrak{a}$ , y por tanto  $f_s \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Por lo tanto,  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  es un ideal homogéneo.  $\square$

**Observación 1.3.3.** Es fácil ver que la suma arbitraria de ideales homogéneos es un ideal homogéneo.

**Observación 1.3.4.** Consideremos el anillo de polinomios  $S = K[x_0, \dots, x_n]$  como un anillo graduado, tomando a  $S_d$  como el conjunto de combinaciones lineales de monomios de grado  $d$  en las variables  $x_0, \dots, x_n$ . Si  $f \in S$  es un polinomio, no podemos verlo como función en  $\mathbb{P}^n$ , debido a que las coordenadas homogéneas no son únicas. Sin embargo, si  $f$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$ , entonces  $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n)$ ; así que la propiedad de  $f$  anularse o no, sólo depende de la clase de equivalencia  $p = (a_0 : \dots : a_n)$ . Por tanto,  $f$  da una función de  $\mathbb{P}^n$  a  $\{0, 1\}$  por  $f(p) = 0$  si  $f(a_0, \dots, a_n) = 0$  y  $f(p) = 1$  si  $f(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ .

**Definición 1.3.7.** Consideremos los **ceros** de un polinomio homogéneo, es decir,  $Z(f) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0\}$ . Si  $T$  es cualquier conjunto de elementos homogéneos de  $S$ , definimos el **conjunto de ceros** de  $T$  como

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Si  $\mathfrak{a}$  es el ideal homogéneo de  $S$  generado por  $T$ , definimos  $Z(\mathfrak{a}) = Z(T)$ . Desde que  $S$  es noetheriano,  $Z(T) = Z(f_1, \dots, f_r)$  para un número finito de elementos  $f_1, \dots, f_r \in T$ .

**Definición 1.3.8.** Un subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{P}^n$  es un **conjunto algebraico** si existe un conjunto  $T$  de elementos homogéneos de  $S$  tal que  $Y = Z(T)$ , es decir,  $Y = Z(\mathfrak{a})$ , donde  $\mathfrak{a}$  es ideal homogéneo de  $S$ .

**Proposición 1.3.5.** La unión de dos conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. La intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. El conjunto vacío y todo el espacio son conjuntos algebraicos.

*Demostración.* Desde que el producto de ideales homogéneos es homogéneo, sigue que la unión de conjuntos algebraicos es algebraico. Además, por la observación 1.3.3, la intersección arbitraria de conjuntos algebraicos es también algebraico. Finalmente, 0 y 1 son homogéneos; por tanto, el conjunto vacío y todo el espacio son conjuntos algebraicos.  $\square$

**Definición 1.3.9.** Definimos la **topología de Zariski** en  $\mathbb{P}^n$ , donde los conjuntos abiertos son los complementos de los conjuntos algebraicos.

**Definición 1.3.10.** Sea  $f \in A_{n+1}$  homogéneo de grado positivo. Definimos el **abierto básico proyectivo** como el conjunto  $U_f = \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) \neq 0\}$ .

**Definición 1.3.11.** Una **variedad algebraica proyectiva** (o simplemente **variedad**) es un conjunto algebraico irreducible en  $\mathbb{P}^n$ , con la topología inducida. Un subconjunto abierto de una variedad proyectiva es llamado **variedad casi proyectiva**. La **dimensión** de una variedad proyectiva o casi proyectiva es su dimensión como espacio topológico.

**Definición 1.3.12.** Si  $Y$  es cualquier subconjunto de  $\mathbb{P}^n$ , definimos el **ideal homogéneo** de  $Y$  en  $S$ , denotado por  $I(Y)$ , como el ideal generado por el siguiente conjunto  $\{f \in S \mid f \text{ es homogéneo y } f(p) = 0 \text{ para todo } p \in Y\}$ . Si  $Y$  es un conjunto algebraico, definimos el **anillo coordenado homogéneo** de  $Y$  como  $S(Y) = S/I(Y)$ .

Si  $f \in S$  es un polinomio homogéneo lineal, entonces el conjunto de ceros de  $f$  es llamado **hiperplano**. En particular, denotamos el conjunto de ceros de  $x_i$  por  $H_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Sea  $U_i$  el conjunto abierto  $\mathbb{P}^n \setminus H_i$ . Entonces  $\mathbb{P}^n$  es cubierto por los conjuntos abiertos  $U_i$ , pues, si  $p = (a_0 : \dots : a_n)$  es un punto, entonces algún  $a_i \neq 0$ ; de aquí,  $p \in U_i$ . Definimos la aplicación  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  por  $\varphi_i(a_0 : \dots : a_n) = (\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i})$ . Notemos también que  $\varphi_i$  está bien definida desde que las componentes  $\frac{a_j}{a_i}$  son independientes de la elección de las coordenadas homogéneas.

**Definición 1.3.13.** Sea  $A = K[x_1, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios, entonces  $S = A[x_0] = K[x_0, \dots, x_n]$ . Consideremos las graduaciones canónicas  $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$  y  $B = \bigoplus_{d \geq 0} B_d$ ; además sea  $B^h = \bigcup_{d \geq 0} B_d$ . Sean las aplicaciones  $h : A \rightarrow S$ ,  $d : S \rightarrow A$  definidas por  $f \mapsto x_0^{\partial(f)} f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$  y  $g \mapsto g(1, x_1, \dots, x_n)$ , respectivamente. Tales aplicaciones son llamadas **homogenización** y **deshomogenización**.

Sea  $\mathfrak{a}$  ideal de  $A$ . Se llama **homogenización** del ideal  $\mathfrak{a}$  en  $S$ , denotado por  $h(\mathfrak{a})$ , al ideal de  $S$  generado por  $\{h(f) \mid f \in \mathfrak{a}\}$ . Entonces  $h(\mathfrak{a})$  es un ideal homogéneo de  $S$ . Dado un ideal  $\mathfrak{b}$  de  $S$ , la **deshomogenización**  $d(\mathfrak{b})$  de  $\mathfrak{b}$  es el ideal  $\{d(g) \mid g \in \mathfrak{b}\}$ .

**Proposición 1.3.6.** La aplicación  $\varphi_i$  es un homeomorfismo de  $U_i$  con su topología inducida sobre  $\mathbb{A}^n$  con la topología de Zariski.

*Demostración.* Es claro que  $\varphi_i$  es biyectiva. Así, es suficiente mostrar que los cerrados de  $U_i$  se biyectan con los cerrados de  $\mathbb{A}^n$ . Asumiremos a continuación que  $i = 0$ .

Sea  $Y \subseteq \mathbb{A}^n$  un subconjunto cerrado, es decir  $Y = Z(\mathbf{a})$  para algún ideal  $\mathbf{a}$  de  $A$ . Afirmamos que  $\varphi_0^{-1}(Z(\mathbf{a})) = U_0 \cap Z(h(\mathbf{a}))$ . Sea  $p = (a_0 : \dots : a_n) \in \varphi_0^{-1}(Z(\mathbf{a}))$ , entonces  $(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}) \in Z(\mathbf{a})$ . Luego, si  $g$  es un generador de  $h(\mathbf{a})$ , es decir  $g = h(f)$  para algún  $f \in \mathbf{a}$ , entonces  $g(p) = a_0^{\partial(f)} f(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}) = 0$ ; de aquí  $p \in U_0 \cap Z(h(\mathbf{a}))$ . Recíprocamente, sea  $p = (a_0 : \dots : a_n) \in U_0 \cap Z(h(\mathbf{a}))$  y sea  $a = (\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0})$ . Luego, si  $f \in \mathbf{a}$ , entonces  $0 = h(f)(p) = a_0^{\partial(f)} f(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0})$ , que implica  $f(a) = 0$ ; de aquí  $p \in \varphi_0^{-1}(Z(\mathbf{a}))$ .

Veamos finalmente que  $\varphi_0$  es una aplicación cerrada. Sea  $Y \subseteq U_0$  un conjunto cerrado, sabemos que  $Y = \overline{Y} \cap U_0$ , donde  $\overline{Y}$  es la cerradura de  $Y$  en  $\mathbb{P}^n$ . Tenemos que  $\overline{Y} = Z(\mathbf{b})$  para algún ideal homogéneo  $\mathbf{b}$  de  $S$ . Afirmamos que  $\varphi_0(Y) = Z(d(\mathbf{b}))$ . En efecto, sea  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \varphi_0(Y)$ , entonces  $(1 : a_1 : \dots : a_n) \in Y \subseteq \overline{Y}$ . Ahora, tomemos  $f = d(g)$ , donde  $g \in \mathbf{b}$  es un polinomio homogéneo. Entonces  $f(a) = d(g)(a) = d(g)(a_1, \dots, a_n) = g(1, a_1, \dots, a_n) = 0$ . Recíprocamente, sean  $a = (a_1, \dots, a_n) \in Z(d(\mathbf{b}))$  y  $g \in \mathbf{b}$  un polinomio homogéneo. Entonces  $g(1 : a_1 : \dots : a_n) = d(g)(a_1, \dots, a_n) = 0$ . Por tanto,  $(1 : a_1 : \dots : a_n) \in Z(\mathbf{b}) \cap U_0 = Y$ , es decir  $a \in \varphi_0(Y)$ .  $\square$

**Corolario 1.3.7.** *Si  $Y$  es una variedad proyectiva (resp. casi proyectiva), entonces  $Y$  es cubierto por los conjuntos abiertos  $Y \cap U_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , los cuales son homeomorfos a variedades afines (resp. casi afines) vía la aplicación  $\varphi_i$  definida anteriormente.*

*Demostración.* Consecuencia de la proposición anterior; además debe notarse que aplicaciones continuas llevan irreducibles en irreducibles.  $\square$

**Definición 1.3.14.** *Sea  $U$  un subconjunto abierto no vacío de una variedad afín  $Y$ . Una función  $\varphi : U \rightarrow K$  es **regular en el punto**  $p \in U$  si existen funciones  $f, g \in A(Y)$ , tal que  $g$  es no nulo,  $p \in U_g \subseteq U$  y  $\varphi = f/g$  en  $U_g$ , es decir,  $\varphi(p) = f(p)/g(p)$  para todo  $p \in U_g$ . Decimos que  $\varphi$  es **regular** en  $U$  si es regular en todo punto de  $U$ .*

*Sea  $U$  un subconjunto abierto no vacío de una variedad proyectiva  $Y$ . Una función  $\varphi : U \rightarrow K$  es **regular en el punto**  $p \in U$  si existen funciones  $f, g \in S(Y)$  homogéneas del mismo grado, tal que  $g$  es no nulo,  $p \in U_g \subseteq U$  y  $\varphi = f/g$  en  $U_g$ , es decir,  $\varphi(p) = f(p)/g(p)$  para todo  $p \in U_g$ . Decimos que  $\varphi$  es **regular** en  $U$  si es regular en todo punto de  $U$ . Para*

una variedad  $U$ , denotamos por  $\mathcal{O}(U)$  al conjunto de funciones regulares en  $U$ .

**Observación 1.3.5.** Sean  $U$  una variedad y  $\varphi$  una función regular en  $U$ . Por definición, para cada  $p \in U$ , existe  $U_g \subseteq U$  tal que  $\varphi = f/g$  en  $U_g$ . Así, desde que  $U$  es casi compacto, podemos escribir  $U = U_{g_1} \cup \dots \cup U_{g_n}$ .

**Observación 1.3.6.** Sea  $Y$  una variedad afín. Todo elemento  $f \in A(Y)$  define una función regular  $\varphi_f = f/1 \in \mathcal{O}(Y)$  y la aplicación  $A(Y) \rightarrow \mathcal{O}(Y)$  definida por  $f \mapsto \varphi_f$  es un monomorfismo de  $K$ -álgebras. El corolario 1.3.12 nos dará la sobreyectividad de esta aplicación.

**Proposición 1.3.8.** (Caracterización de función regular.) *Sea  $U$  abierto de una variedad  $Y$ ,  $p \in U$  y  $\varphi : U \rightarrow K$  una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  $\varphi$  es regular en  $p$ .
- (b) Existen un abierto  $V$  con  $p \in V \subseteq U$  y  $f, g \in A(Y)$  (en el caso proyectivo,  $f, g \in S(Y)$  homogéneos del mismo grado) con  $g(q) \neq 0$  para todo  $q \in V$  tal que  $\varphi = f/g$  en  $V$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b) es directo a partir de la definición. Ahora demostremos (b)  $\Rightarrow$  (a). Sea  $U_h \subseteq V$  tal que  $p \in U_h$ . Luego  $U_h \subseteq U_g$ ; y por tanto  $h \in \sqrt{\langle g \rangle}$ . Entonces existe  $n \geq 1$  tal que  $h^n = rg$ . Por tanto  $\varphi = f/g = rf/h^n$  en  $U_{h^n} = U_h$ .  $\square$

**Proposición 1.3.9.** *Sea  $Y$  una variedad. Las funciones regulares definen un haz de  $K$ -álgebras en  $Y$  (ver capítulo 2, definición 2.1.2), es decir se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a)  $\mathcal{O}(U)$  es una  $K$ -álgebra para todo subconjunto abierto  $U$  de  $Y$ .
- (b) Si  $U' \subseteq U$  son abiertos en  $Y$ , entonces para todo  $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ , la restricción  $\varphi' = \varphi|_{U'}$  es regular en  $U'$  y  $\rho_{UU'} : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U')$  definida por  $\varphi \mapsto \varphi'$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras. Además, si  $U'' \subseteq U' \subseteq U$  son subconjuntos abiertos de  $Y$ , se tiene  $\rho_{UU''} = \rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'}$  y  $\rho_{UU} = id_{\mathcal{O}(U)}$ .
- (c) Si  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  es unión de abiertos y  $\rho_{UU_i}(\varphi) = \rho_{UU_i}(\psi)$  para algunos  $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(U)$  y para todo  $i \in I$ , entonces  $\varphi = \psi$ . Además, si para cada  $i \in I$  tenemos  $\varphi_i \in \mathcal{O}(U_i)$  tal que se cumple  $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$  para todo  $i, j \in I$ , entonces existe  $\varphi \in \mathcal{O}(U)$  tal que  $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ .

*Demostración.* (a). Sean  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}(U)$ . Desde que el conjunto de funciones de  $U$  en  $K$  es una  $K$ -álgebra, es suficiente ver que  $\varphi_1 + \varphi_2$  y  $\varphi_1\varphi_2$  son elementos de  $\mathcal{O}(U)$ . Dado  $p \in U$ , existen  $f_i, g_i \in A(Y)$  (en el caso proyectivo  $f_i, g_i \in S(Y)$  son homogéneos y del mismo grado) tal que  $p \in U_{g_i} \subseteq U$  y  $\varphi_i = f_i/g_i$  en  $U_{g_i}$  ( $i = 1, 2$ ). Tenemos que  $U_{g_1g_2} = U_{g_1} \cap U_{g_2} \subseteq U$  y  $p \in U_{g_1g_2}$ ; además  $\varphi_1 = f_1g_2/g_1g_2$  y  $\varphi_2 = g_1f_2/g_1g_2$  en  $U_{g_1g_2}$ . Luego  $\varphi_1 + \varphi_2 = (f_1g_2 + g_1f_2)/(g_1g_2)$  y  $\varphi_1\varphi_2 = (f_1f_2)/(g_1g_2)$  en  $U_{g_1g_2}$ . Por tanto,  $\varphi_1 + \varphi_2$  y  $\varphi_1\varphi_2$  son elementos de  $\mathcal{O}(U)$ .

(b). Sea  $U'$  un subconjunto abierto de  $U$  y  $p \in U'$ , desde que  $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ , existen  $f, g \in A(Y)$  (en el caso homogéneo  $f, g \in S(Y)$  homogéneos y del mismo grado) tal que  $p \in U_g$  y  $\varphi = f/g$  en  $U_g$ ; pero entonces  $U_g \cap U' \subseteq U'$  y  $\varphi = f/g$  en  $U_g \cap U'$ . Luego, por la caracterización de función regular, se sigue que  $\varphi' = \varphi|_{U'}$  es regular en  $U'$ . Por otra parte, sean  $U'' \subseteq U' \subseteq U$  subconjuntos abiertos de  $X$ , poniendo  $\rho_{U\emptyset} = 0$  y  $\rho_{UU} = id_{\mathcal{O}(U)}$ , veamos que  $\rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'} = \rho_{UU''}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} (\rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'})(\varphi) &= \rho_{U'U''}(\circ\rho_{UU'}(\varphi)) = \rho_{U'U''}(\varphi|_{U'}) \\ &= (\varphi|_{U'})|_{U''} = \varphi|_{U''} = \rho_{UU''}(\varphi) \end{aligned}$$

(c). Sea  $p \in U$  y veamos que  $\varphi(p) = \psi(p)$ . Por hipótesis existe  $i$  tal que  $p \in U_i$  y  $(\varphi|_{U_i})(p) = (\psi|_{U_i})(p)$ ; se sigue que

$$\varphi(p) = (\varphi|_{U_i})(p) = (\psi|_{U_i})(p) = \psi(p)$$

Finalmente, si las funciones  $\varphi_i \in \mathcal{O}(U_i)$  son tales que  $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$ , definiendo  $\varphi : U \rightarrow K$  por  $\varphi = \varphi_i$  si  $p \in U_i$ ; se sigue que  $\varphi$  es regular en  $U$ .  $\square$

**Teorema 1.3.10.** *Sea  $g \in A(Y)$  (en el caso proyectivo  $g \in S(Y)$  homogéneo de grado positivo). Toda función regular  $\varphi \in \mathcal{O}(U_g)$  se puede expresar como  $\varphi = f/g^s$  en  $U_g$ , donde  $s \in \mathbb{Z}^+$  y  $f \in A(Y)$  (en el caso proyectivo  $f \in S(Y)$  homogéneo con  $\partial(f) = s\partial(g)$ ).*

*Demostración.* Según la observación 1.3.5, hagamos  $U_g = U_{g_1} \cup \dots \cup U_{g_n}$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$  tenemos que  $\varphi = f_i/g_i$  en  $U_{g_i}$ , donde  $f_i, g_i \in A(Y)$  (en el caso proyectivo  $f_i, g_i \in S(Y)$  son homogéneos del mismo grado). Luego

$$f_i g_j / g_i g_j = f_j g_i / g_j g_i \quad \text{en } U_{g_i g_j}.$$

Lo que implica  $f_i g_j = f_j g_i$  en  $U_{g_i g_j}$  y por tanto,  $g_i g_j (f_i g_j - f_j g_i) = 0$  en  $Y$ .

Sean  $f'_i = f_i g_i$  y  $g'_i = g_i^2$  para  $i = 1, \dots, n$ . Entonces tenemos que  $f'_i g'_j = f'_j g'_i$  en  $Y$ , y también  $U_g = U_{g'_1} \cup \dots \cup U_{g'_n}$ ; por tanto  $g \in \sqrt{\langle g'_1, \dots, g'_n \rangle}$ . Sea  $s \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $g^s = \sum_{i=1}^n p_i g'_i$  (en el caso proyectivo, los  $p_i g'_i$  son homogéneos con  $s \partial(g) = \partial(p_i) + \partial(g'_i)$ ). Hacemos a continuación  $f = \sum_{i=1}^n p_i f'_i$  y conseguimos

$$g^s f'_j = \sum_{i=1}^n (p_i g'_i) f'_j = \sum_{i=1}^n (p_i f'_i) g'_j = f g'_j.$$

De donde,

$$\varphi = f'_j / g'_j = f / g^s \quad \text{en} \quad U_{g'_j} \subseteq U_g \quad \text{para cada} \quad j = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto  $\varphi = f / g^s$  en  $U_g$ . □

**Corolario 1.3.11.** *Sea  $Y$  una variedad afín o proyectiva. Se cumplen:*

- (a) *En el caso afín,  $\mathcal{O}(U_g) \cong A(Y)_g$ .*
- (b) *En el caso proyectivo,  $\mathcal{O}(U_g) \cong (S(Y)_g)_0$ .*

*Demostración.* Consecuencia directa del teorema anterior. □

**Corolario 1.3.12.** *Si  $Y$  es una variedad afín, entonces*

$$\mathcal{O}(Y) \cong A(Y).$$

*Demostración.* Es suficiente observar que  $Y = U_1$  y aplicar el corolario anterior. □

# Capítulo 2

## Haces y Esquemas

### 2.1 Haces y Morfismos de Haces

Comencemos revisando la noción de categoría.

Una **categoría**  $\mathfrak{C}$  consiste de una clase  $Ob(\mathfrak{C})$  de **objetos** y una clase  $Hom(A, B)$  de **morfismos** o flechas para cada par de objetos  $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ , tal que existe una ley de **composición de morfismos** que es **asociativa** y tiene **morfismos identidad**. Un morfismo  $f \in Hom(A, B)$  es denotado por  $f : A \rightarrow B$  y es llamado un morfismo de  $A$  a  $B$ . Por ejemplo, la categoría de conjuntos **Sets** tiene como objetos a los conjuntos y tiene como morfismos a las funciones entre conjuntos.

Un **funtor covariante**  $F$  de una categoría  $\mathfrak{C}$  a una categoría  $\mathfrak{D}$ , escrito  $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ , consiste de un objeto  $F(A) \in Ob(\mathfrak{D})$  para cada objeto  $A \in Ob(\mathfrak{C})$ , y un morfismo  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$  para cada morfismo  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathfrak{C}$ , tal que  $F(id_A) = id_{F(A)}$  para cada objeto  $A \in Ob(\mathfrak{C})$  y  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  para todo par de morfismos  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ . Un **funtor contravariante**  $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  es como un funtor covariante, excepto que revierte las flechas, es decir para cada morfismo  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathfrak{C}$ , se asigna un morfismo  $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$  en  $\mathfrak{D}$ .

**Definición 2.1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y consideremos la categoría  $\mathfrak{Top}(X)$  cuyos objetos son los subconjuntos abiertos de  $X$  y donde los únicos morfismos son las inclusiones. Así, convenimos que  $Hom(V, U) = \emptyset$  si  $V \not\subseteq U$  y  $Hom(V, U)$  admite sólo un elemento si  $V \subseteq U$ . Un **prehaz**  $\mathcal{F}$  de conjuntos en  $X$  es un funtor contravariante de  $\mathfrak{Top}(X)$  en la categoría de conjuntos **Sets** tal que si  $U \subseteq X$  es vacío, el conjunto  $\mathcal{F}(U)$  consiste de un solo elemento. Si  $U \subseteq V \subseteq X$  e  $i : U \hookrightarrow V$  es la inclusión, entonces hacemos  $\rho_{VU} = \mathcal{F}(i) : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ . Por otra parte, si todos los

conjuntos  $\mathcal{F}(U)$  son grupos, módulos, anillos, álgebras; y las aplicaciones  $\rho_{VU}$  son homomorfismos de estas estructuras, entonces hablaremos de un prehaz de grupos, módulos, anillos o álgebras respectivamente.

Para especificar un prehaz bastará indicar los conjuntos  $\mathcal{F}(U)$  para conjuntos no vacíos  $U$ . Si  $\mathcal{F}$  es un prehaz de grupos, entonces  $\mathcal{F}(\emptyset)$  es el grupo consistiendo solo del elemento neutro. En lo que sigue, cada vez que nos referimos a un prehaz en  $X$  estaremos entendiendo que se trata de un prehaz de grupos.

Si  $\mathcal{F}$  es un prehaz en  $X$  y  $U \subseteq X$  es un subconjunto abierto, la asignación  $V \mapsto \mathcal{F}(V)$  para todo conjunto abierto  $V \subseteq U$ , determina obviamente un prehaz en  $U$ , que es llamado la **restricción** de  $\mathcal{F}$  al subconjunto abierto  $U$  y es denotado por  $\mathcal{F}|_U$ . Esto es, si  $V_1 \subseteq V_2 \subseteq U$ , hacemos  $i_{V_1V_2} : V_1 \hookrightarrow V_2$  y  $\mathcal{F}|_U(i_{V_1V_2}) = \rho_{V_2V_1}$ .

Como una mejor terminología, si  $\mathcal{F}$  es un prehaz en  $X$ , entonces nos referimos a  $\mathcal{F}(U)$  como las **secciones** del prehaz  $\mathcal{F}$  sobre el conjunto abierto  $U$  y algunas veces usaremos la notación  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  para denotar al grupo  $\mathcal{F}(U)$ . Llamaremos a los homomorfismos  $\rho_{UV}$  como homomorfismos **restricción** y algunas veces escribiremos  $s|_V$  en lugar de  $\rho_{UV}(s)$  si  $s \in \mathcal{F}(U)$  y  $V \subseteq U$ .

**Definición 2.1.2.** Un prehaz  $\mathcal{F}$  en  $X$  es llamado **haz** si para todo subconjunto abierto  $U$  de  $X$  y todo cubrimiento  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ , se cumplen:

- (i) Si  $\rho_{UU_i}(s_1) = \rho_{UU_i}(s_2)$  para  $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$  y para todo  $i \in I$ , entonces  $s_1 = s_2$ .
- (ii) Si tenemos  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  para cada  $i \in I$  tal que se verifica que  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  para cada  $i, j \in I$ , entonces existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s|_{U_i} = s_i$  para todo  $i$ .

**Observación 2.1.1.** El elemento  $s$  de la condición (ii) es único. En efecto, sea  $s' \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s'|_{U_i} = s_i$  para todo  $i$ ; luego para cada  $i \in I$  se cumple  $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ , esto es  $\rho_{UU_i}(s) = \rho_{UU_i}(s')$ ; luego por (i) obtenemos que  $s = s'$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Sea  $X$  una variedad afín o proyectiva sobre el cuerpo  $K$ . Para cada conjunto abierto  $U \subseteq X$ , sea  $\mathcal{O}(U)$  la  $K$ -álgebra de funciones regulares de  $U$  en  $K$ . Para cada abierto  $V \subseteq U$  sea  $\rho_{UV} : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$  la restricción natural. Entonces  $\mathcal{O}$  es un haz de  $K$ -álgebras en  $X$ . Llamamos a  $\mathcal{O}$  el *haz de funciones regulares* en  $X$  (ver proposición 1.3.9).

**Ejemplo 2.1.2.** Sea  $A$  un grupo abeliano. El *prehaz constante* asociado al anillo  $A$  en el espacio topológico  $X$ , es el prehaz  $\mathcal{F} : U \mapsto A$  para todo  $U \neq \emptyset$ , y  $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ .

**Ejemplo 2.1.3.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A$  un grupo abeliano. Definimos el *haz constante*  $\mathcal{A}$  sobre  $X$  como sigue: dotamos al grupo  $A$  de la topología discreta y para cada subconjunto abierto  $U$  de  $X$  sea  $\mathcal{A}(U) = \{f : U \rightarrow A \mid f \text{ es continua}\}$ . Entonces con las restricciones usuales obtenemos un haz  $\mathcal{A}$ .

Para cada conjunto abierto conexo  $U$ ,  $\mathcal{A}(U) \cong A$ . En efecto, fijado  $u_0 \in U$  definimos  $\theta : \mathcal{A}(U) \rightarrow A$  por  $f \mapsto \theta(f) = f(u_0)$ , de acuerdo a la definición es fácil ver que  $\theta$  es un homomorfismo de grupos. Para la sobreyectividad tomamos  $a_0 \in A$ , entonces la aplicación  $f : U \rightarrow A$  definida por  $x \mapsto a_0$  es continua y  $\theta(f) = a_0$ . Finalmente, para la inyectividad consideremos  $f \in \mathcal{A}(U)$  tal que  $f(u_0) = \theta(f) = 0$ ; desde que  $U$  es conexo y  $f$  es continua se sigue que  $f(U)$  es conexo, es decir  $f(U)$  es un punto; y como  $0 \in f(U)$ , se sigue que  $f(U) = \{0\}$ . Por tanto,  $f = 0$  y  $\theta$  es isomorfismo.

Si  $U$  es un conjunto abierto cuyas componentes conexas son abiertas (que es siempre verdad sobre un espacio topológico localmente conexo), entonces  $\mathcal{A}(U)$  es un producto directo de copias de  $A$ , una para cada componente conexa de  $U$ ; más precisamente, si  $U = \bigsqcup_{i \in I} U_i$  es la descomposición de  $U$  en sus componentes conexas, definimos

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{A}(U) &\rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(U_i) \\ f &\mapsto \gamma(f) \end{aligned}, \quad \text{donde } \gamma(f) = (f|_{U_i})_{i \in I}$$

Es fácil ver que  $\gamma$  es un isomorfismo de grupos; de donde  $\mathcal{A}(U) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{A}(U_i)$ , y por lo dicho anteriormente  $\mathcal{A}(U_i) \cong A$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{A}(U) \cong \prod_{i \in I} A = A^I.$$

**Ejemplo 2.1.4.** Sea  $X = \{a, b\}$  con la topología discreta y definimos el prehaz  $\mathcal{F}$  como sigue

$$\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}, \quad \mathcal{F}(\{a\}) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(\{b\}) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(X) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

junto con los homomorfismos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(\{a\}) & \text{y} & \mathcal{F}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(\{b\}) \\ (x, y, z) &\mapsto x & & (x, y, z) &\mapsto y \end{aligned}$$

Tenemos que  $X = \{a\} \cup \{b\}$ ; además  $(0, 0, 1)|_{\{a\}} = 0$  y  $(0, 0, 1)|_{\{b\}} = 0$ ; sin embargo  $(0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$ . Esto nos dice que  $\mathcal{F}$  es un prehaz que no es un haz.

**Ejemplo 2.1.5.** Consideremos  $X = \mathbb{C}$  con la topología usual y para cada abierto  $U$  de  $X$ , sea  $\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa y acotada}\}$ , junto con las restricciones usuales

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

Sea  $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < n\}$ , entonces  $\mathbb{C} = \bigcup_{n \geq 1} U_n$  y las funciones  $f_n : U_n \rightarrow \mathbb{C}$  definidas por  $f_n(z) = z$  son tales que  $f_n \in \mathcal{F}(U_n)$ . También,  $f_n|_{U_m \cap U_n} = f_m|_{U_m \cap U_n}$ ; pero el teorema de Liouville nos dice que no existe  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$  tal que  $f|_{U_n} = f_n$  para todo  $n \geq 1$ . Por tanto,  $\mathcal{F}$  también es un prehaz que no es un haz.

**Definición 2.1.3.** Si  $\mathcal{F}$  es un prehaz en  $X$  y  $p \in X$ , definimos el **tallo**  $\mathcal{F}_p$  de  $\mathcal{F}$  en  $p$  como el límite directo de los grupos  $\mathcal{F}(U)$  para todo abierto  $U$  conteniendo  $p$ , relativo al sistema de homomorfismos  $\rho_{VU}$  para  $U \subseteq V$ . De la definición se sigue que un elemento de  $\mathcal{F}_p$  es una clase  $\langle U, s \rangle$ , donde  $U$  es un entorno abierto de  $p$  y  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Dos clases  $\langle U, s \rangle$  y  $\langle V, t \rangle$  son iguales en  $\mathcal{F}_p$  si y sólo si existe un entorno abierto  $W$  de  $p$  con  $W \subseteq U \cap V$  tal que  $s|_W = t|_W$ . Por lo tanto, podemos hablar de elementos del tallo  $\mathcal{F}_p$  como gérmenes de secciones de  $\mathcal{F}$  en el punto  $p$ . Por otro lado, dado un entorno  $U$  de  $p$  y  $s \in \mathcal{F}(U)$ , denotamos  $s_p = \langle U, s \rangle$ .

**Definición 2.1.4.** Si  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son prehaces en  $X$ , un morfismo  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es una familia de morfismos de grupos abelianos  $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  para cada conjunto abierto  $U \subseteq X$  los cuales son compatibles con los homomorfismos restricción en  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ ; es decir, siempre que  $V \subseteq U$ , el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Donde  $\rho$  y  $\rho'$  son las aplicaciones restricción en  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ . Si  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son haces, usamos la misma definición para un morfismo de haces. Decimos

que que el morfismo  $\varphi$  es un isomorfismo si  $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  es un isomorfismo para cada abierto  $U$  de  $X$ . Notemos también que un morfismo de prehaces en  $X$   $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induce un morfismo  $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  en los tallos para cualquier punto  $p \in X$ . Más precisamente,  $\varphi_p \langle U, s \rangle = \langle U, \varphi(U)(s) \rangle$ .

La siguiente proposición ilustra la naturaleza local de un haz

**Proposición 2.1.6.** *Sea  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morfismo de haces en un espacio topológico  $X$ . Entonces  $\varphi$  es un isomorfismo si y sólo si  $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  es un isomorfismo para cada  $p \in X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\varphi$  es un isomorfismo. Sea  $p \in X$  un punto arbitrario y veamos que  $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  es un isomorfismo. Sea  $\langle U, s \rangle \in \mathcal{F}_p$  tal que  $\varphi_p \langle U, s \rangle = \langle X, 0 \rangle$ , entonces  $\langle U, \varphi(U)(s) \rangle = \langle X, 0 \rangle$ , de donde existe un entorno abierto  $W \subseteq U$  de  $p$  tal que

$$0|_W = \varphi(U)(s)|_W = \varphi(W)(s|_W)$$

donde la última igualdad resulta de la compatibilidad de restricciones. Ahora bien, como  $\varphi(W)$  es monomorfismo, debemos tener  $s|_W = 0$ . Por lo tanto,  $\langle U, s \rangle = \langle X, 0 \rangle$  mostrando que  $\varphi_p$  es inyectiva.

A continuación consideremos  $\langle U, t \rangle \in \mathcal{G}_p$ , donde  $U$  es entorno de  $p$  y  $t \in \mathcal{G}(U)$ . Desde que  $\varphi(U)$  es sobreyectiva existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $\varphi(U)(s) = t$ ; así tenemos que

$$\langle U, t \rangle = \langle U, \varphi(U)(s) \rangle = \varphi_p \langle U, s \rangle.$$

Mostrando que  $\varphi_p$  es sobreyectiva.

Recíprocamente, supongamos que cada  $\varphi_p$  es un isomorfismo para todo  $p \in X$ . A continuación veamos que  $\varphi$  es un isomorfismo. Fijamos un abierto  $U$  de  $X$  y veamos que  $\varphi(U)$  es inyectiva. Para esto sea  $s \in \mathcal{F}(U)$  y supongamos que  $\varphi(U)(s) = 0$  en  $\mathcal{G}(U)$ . Entonces para cada  $p \in U$ ,

$$\varphi_p \langle U, s \rangle = \langle U, \varphi(U)(s) \rangle = \langle U, 0 \rangle$$

Desde que  $\varphi_p$  es inyectiva,  $\langle U, s \rangle = \langle X, 0 \rangle$ ; así que existe un entorno abierto  $W_p$  de  $p$  con  $W_p \subseteq U$  tal que  $s|_{W_p} = 0$ . Ahora bien, desde que  $U = \bigcup_{p \in U} W_p$  y  $\mathcal{F}$  es un haz, se sigue que  $s = 0$  y  $\varphi(U)$  es inyectiva.

Veamos ahora que  $\varphi(U)$  es sobreyectiva. Sea  $t \in \mathcal{G}(U)$ . Para cada  $p \in U$ , sea  $\langle U, t \rangle \in \mathcal{G}_p$  su germen en  $p$ . Desde que  $\varphi_p$  es sobreyectiva, existe  $\langle V'_p, s'(p) \rangle \in \mathcal{F}_p$  tal que

$$\langle U, t \rangle = \varphi_p \langle V'_p, s'(p) \rangle = \langle V'_p, \varphi(V'_p)(s'(p)) \rangle.$$

Entonces existe un entorno abierto  $V_p$  de  $p$  con  $V_p \subseteq V'_p \cap U$  tal que

$$t|_{V_p} = \varphi(V'_p)(s'(p))|_{V_p} = \varphi(V_p)(s'(p))|_{V_p}$$

Haciendo  $s(p) = s'(p)|_{V_p} \in \mathcal{F}(V_p)$ , tenemos  $\varphi(V_p)(s(p)) = t|_{V_p}$ .

Veamos a continuación que  $s(p)|_{V_p \cap V_q} = s(q)|_{V_p \cap V_q}$ . En efecto,

$$\varphi(V_p \cap V_q)(s(p)|_{V_p \cap V_q}) = \varphi(V_p)(s(p))|_{V_p \cap V_q} = (t|_{V_p})|_{V_p \cap V_q} = t|_{V_p \cap V_q}.$$

También se tiene que

$$\varphi(V_p \cap V_q)(s(q)|_{V_p \cap V_q}) = \varphi(V_q)(s(q))|_{V_p \cap V_q} = (t|_{V_q})|_{V_p \cap V_q} = t|_{V_p \cap V_q}.$$

Desde que  $\varphi(V_p \cap V_q)$  es inyectiva, se sigue que  $s(p)|_{V_p \cap V_q} = s(q)|_{V_p \cap V_q}$ . En conclusión tenemos que  $U = \bigcup_{p \in U} V_p$  y secciones  $s(p) \in \mathcal{F}(V_p)$  para cada  $p \in U$  tales que  $s(p)|_{V_p \cap V_q} = s(q)|_{V_p \cap V_q}$  para cada  $p, q \in U$ . Desde que  $\mathcal{F}$  es un haz, existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s|_{V_p} = s(p)$  para todo  $p \in U$ . Por otra parte, para todo  $p \in U$

$$\varphi(U)(s)|_{V_p} = \varphi(V_p)(s|_{V_p}) = \varphi(V_p)(s(p)) = t|_{V_p}$$

En conclusión,  $U = \bigcup_{p \in U} V_p$ ;  $\varphi(U)(s), t \in \mathcal{G}(U)$  y  $\varphi(U)(s)|_{V_p} = t|_{V_p}$  para todo  $p \in U$ . Desde que  $\mathcal{G}$  es un haz, tenemos que  $\varphi(U)(s) = t$ ; esto muestra que  $\varphi(U)$  es sobreyectiva. Por tanto,  $\varphi(U)$  es un isomorfismo, y desde que  $U$  es arbitrario, se sigue que  $\varphi$  es un isomorfismo.  $\square$

**Definición 2.1.5.** Sea  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morfismo de prehaces. Definimos el prehaz **núcleo** de  $\varphi$ , denotado por  $Nuc(\varphi)$ , como el prehaz dado por  $U \mapsto Nuc(\varphi(U))$ . También definimos los prehaces **imagen** de  $\varphi$  y **conúcleo** de  $\varphi$ , como los prehaces dados por  $U \mapsto Im(\varphi(U))$  y  $U \mapsto Conuc(\varphi(U))$  respectivamente.

**Observación 2.1.2.** Si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es un morfismo de haces, entonces el núcleo de  $\varphi$  es un haz.

## 2.2 Espacio Étalé de un Prehaz y Haz Asociado

**Definición 2.2.1.** *Espacio étalé* de un espacio topológico  $X$  es un espacio topológico  $F$  junto con un homeomorfismo local y sobreyectivo  $\pi : F \rightarrow$

$X$ . Para un punto  $x \in X$ ,  $F_x = \pi^{-1}(x)$  es llamado **tallo** de  $F$  en  $x$ . Para un subconjunto abierto  $U$  de  $X$ , sea  $\Gamma(U, F)$  el conjunto de secciones continuas de  $F$  sobre  $U$ , es decir,  $\Gamma(U, F)$  está formado por las aplicaciones continuas  $s : U \rightarrow F$  tal que  $\pi \circ s = id_U$ .

**Observación 2.2.1.** Sea  $F$  espacio étalé de  $X$  y sea  $\pi : F \rightarrow X$  como en la definición anterior. Entonces existe un haz de conjuntos  $\mathcal{F}^*$  en  $X$ , definido por  $\mathcal{F}^*(U) = \Gamma(U, F)$  para cada abierto  $U \subseteq X$ ; y para abiertos  $V \subseteq U$  consideremos las restricciones usuales  $\rho_{UV} : \mathcal{F}^*(U) \rightarrow \mathcal{F}^*(V)$  mediante  $s \mapsto s|_V$ .

**Lema 2.2.1.** Dado un prehaz  $\mathcal{F}$  en el espacio topológico  $X$ , existe el espacio étalé  $F$  de  $X$ .

*Demostración.* Sea  $F = \bigsqcup_{p \in X} \mathcal{F}_p$  y dotemos a  $F$  de una topología como sigue: dado un abierto  $U$  de  $X$  y  $s \in \mathcal{F}(U)$ , sea  $W(s, U) = \{s_p \mid p \in U\}$ .

Veamos que la colección  $\mathcal{B} = \{W(s, U) \mid U \text{ es abierto en } X \text{ y } s \in \mathcal{F}(U)\}$  es base para una topología sobre  $F$ . En efecto, es claro que la unión de los elementos de  $\mathcal{B}$  es precisamente  $F$ ; a continuación consideremos  $W(s, U)$  y  $W(s', U')$  en  $\mathcal{B}$  cuya intersección es no vacía. Sea  $p \in U$  con  $s_p \in W(s, U) \cap W(s', U')$ , entonces  $p \in U'$  y podemos escribir  $s_p = \langle U, s \rangle = \langle U', s' \rangle$ ; así que existe un entorno abierto  $V$  de  $p$  con  $V \subseteq U \cap U'$  tal que  $s|_V = s'|_V$ . Sea  $t = s|_V$  y veamos que  $W(t, V) \subseteq W(s, U) \cap W(s', U')$ .

Sea  $t_q \in W(t, V)$  un elemento arbitrario, donde  $q \in V$ . Desde que  $V \subseteq U \cap U'$ , entonces  $q \in U$  y  $q \in U'$ . Luego se tiene

$$\begin{aligned} t_q &= \langle V, t \rangle = \langle V, s|_V \rangle = \langle U, s \rangle = s_q \in W(s, U) \\ t_q &= \langle V, t \rangle = \langle V, s'|_V \rangle = \langle U', s' \rangle = s'_q \in W(s', U') \end{aligned}$$

Por lo tanto  $t_q \in W(s, U) \cap W(s', U')$ . La topología en  $F$  es aquella que tiene a  $\mathcal{B}$  como base.

A continuación veamos la construcción de  $\pi$  que es homeomorfismo local y sobreyectivo. Definimos  $\pi : F \rightarrow X$  por  $s_p \mapsto p$ , donde  $s_p \in \mathcal{F}_p$ .

De acuerdo a la definición, claramente se tiene que  $\pi$  es sobreyectiva; además  $\pi$  es continua, pues dado un subconjunto abierto  $U$  de  $X$ , tenemos

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{s \in \mathcal{F}(V), V \subseteq U} W(s, V)$$

Finalmente, veamos que  $\pi : F \rightarrow X$  es homeomorfismo local. Sea  $U$  un abierto en  $X$  y sea  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Note que  $\pi(W(s, U)) = U$ . Más aún,

tenemos que  $\pi|_{W(s,U)} : W(s,U) \rightarrow U$  es una biyección. Como  $\pi : F \rightarrow X$  es continua, entonces  $\pi|_{W(s,U)} : W(s,U) \rightarrow U$  es continua. Por otro lado, como  $\mathcal{B}$  es una base para la topología sobre  $F$  y  $\pi(W(s,U)) = U$  es abierto en  $X$ , para todo elemento  $W(s,U) \in \mathcal{B}$ , entonces  $\pi : F \rightarrow X$  es abierta. Luego, como  $W(s,U)$  es abierto en  $F$  y  $\pi(W(s,U)) = U$  es abierto en  $X$ , entonces  $\pi|_{W(s,U)} : W(s,U) \rightarrow U$  es abierta. Por tanto,  $\pi|_{W(s,U)} : W(s,U) \rightarrow U$  es homeomorfismo, para todo elemento  $W(s,U) \in \mathcal{B}$ . Como los elementos de  $\mathcal{B}$  forman un cubrimiento de  $F$ , se sigue que  $\pi : F \rightarrow X$  es un homeomorfismo local.  $\square$

**Observación 2.2.2.** Un elemento  $s \in \mathcal{F}(U)$  define una aplicación  $\bar{s} : U \rightarrow F$  mediante  $p \mapsto s_p$ ; ésta es una sección, pues  $\pi \circ \bar{s} = id_U$ .

Además la sección  $\bar{s}$  es continua. En efecto, sea  $W(t,V)$  un abierto básico en  $F$  y sea  $p \in (\bar{s})^{-1}(W(t,V))$ , entonces  $\bar{s}(p) = s_p \in W(t,V)$  y podemos hacer  $s_p = t_p \in W(t,V)$ ; luego existe un entorno  $W$  de  $p$  con  $W \subseteq U \cap V$  tal que  $s|_W = t|_W$ . Veamos que  $W \subseteq (\bar{s})^{-1}(W(t,V))$ . Sea un punto arbitrario  $q \in W$ , entonces  $q \in U$  y  $q \in V$ . Luego

$$s_q = \langle U, s \rangle = \langle W, s|_W \rangle = \langle W, t|_W \rangle = \langle V, t \rangle = t_q \in W(t,V).$$

Por lo tanto,  $(\bar{s})^{-1}(W(t,V))$  es abierto en  $U$  y  $\bar{s}$  es continua.

**Observación 2.2.3.** Sea  $V$  subconjunto abierto de  $U$  y  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Veamos que  $\overline{s|_V} = \bar{s}|_V$ ; en efecto, dado  $p \in V$

$$\overline{s|_V}(p) = \langle V, s|_V \rangle = \langle U, s \rangle = \bar{s}(p) = \bar{s}|_V(p).$$

**Lema 2.2.2.** Sea un prehaz  $\mathcal{F}$  en  $X$  y sea  $F$  el espacio étalé de  $X$ . Dado un subconjunto abierto  $U$  de  $X$  y una sección continua  $\sigma$  de  $F$  sobre  $U$ , existen un cubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$  y secciones  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  tal que  $\sigma|_{U_i} = \bar{s}_i$ , para todo  $i$ .

*Demostración.* Sea  $\pi : F \rightarrow X$  el homeomorfismo local que resulta del lema anterior. Sea  $\sigma : U \rightarrow F$  una sección continua y sea  $p \in U$ , entonces  $\sigma(p) \in \mathcal{F}_p$ , osea,  $\sigma(p) = \langle V, s \rangle = s_p = \bar{s}(p)$ , donde  $s \in \mathcal{F}(V)$ . Por ser  $\pi$  homeomorfismo local, existe un entorno  $W$  de  $\sigma(p)$  y un entorno  $Z$  de  $p$  tal que  $\pi|_W : W \rightarrow Z$  es un homeomorfismo. Sea  $V_p = U \cap V \cap (\sigma)^{-1}(W) \cap (\bar{s})^{-1}(W)$  y sea  $q \in V_p$ . Tenemos que  $p \in V_p$ . Además tenemos que  $(\pi \circ \sigma)(q) = q = (\pi \circ \bar{s})(q)$ , lo cual implica que  $\sigma(q) = (\pi|_W)^{-1}(q) = \bar{s}(q)$ . Por tanto  $\sigma|_{V_p} = \bar{t}$ , donde  $t = s|_{V_p}$ .  $\square$

**Proposición 2.2.3.** *Dado un prehaz  $\mathcal{F}$  en  $X$ , existe un haz  $\mathcal{F}^+$  y un morfismo  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  con la siguiente propiedad: para cualquier haz  $\mathcal{G}$  y cualquier morfismo  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , existe un único morfismo  $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  tal que  $\varphi = \psi \circ \theta$ . Además, el par  $(\mathcal{F}^+, \theta)$  es único salvo isomorfismo.  $\mathcal{F}^+$  es llamado haz asociado al prehaz  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  un prehaz sobre  $X$  y consideremos el espacio étalé  $F$  asociado a  $X$ , junto con el homeomorfismo local  $\pi : F \rightarrow X$  que resultan del lema anterior. Definimos el haz asociado al prehaz  $\mathcal{F}$ , denotado por  $\mathcal{F}^+$  como el haz  $\mathcal{F}^*$  que proviene de la observación 2.2.1. Sea  $U$  abierto de  $X$  y dotemos a  $\mathcal{F}^+(U)$  con estructura de grupo abeliano. Definimos para  $s, t \in \mathcal{F}^+(U)$  y  $p \in U$

$$(s + t)(p) = s(p) + t(p)$$

Desde que  $(s + t)(p) \in \mathcal{F}_p$ , se sigue que  $\pi((s + t)(p)) = p$  y por tanto  $s + t$  es una sección de  $F$  sobre  $U$ . Ahora veamos que  $s + t$  es continua. Tomemos un abierto básico  $W(r, V)$  de  $F$  y veamos que  $(s + t)^{-1}(W(r, V))$  es abierto en  $U$ . En efecto, sea  $p \in U$  tal que  $(s + t)(p) \in W(r, V)$ , entonces  $(s + t)(p) = r_p \in \mathcal{F}_p$ . De acuerdo al lema 2.2.2 existen cubrimientos abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  y  $\{V_j\}_{j \in J}$  de  $U$ ;  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ,  $t_j \in \mathcal{F}(V_j)$  tal que  $s|_{U_i} = \bar{s}_i$  y  $t|_{V_j} = \bar{t}_j$ . Para algún par de índices  $i \in I$ ,  $j \in J$ ,  $p \in U_i \cap V_j$  y se cumplen las igualdades

$$s(p) = \bar{s}_i(p) = \langle U_i, s_i \rangle \quad \text{y} \quad t(p) = \bar{t}_j(p) = \langle V_j, t_j \rangle$$

Luego

$$\langle U_i \cap V_j, s_i|_{U_i \cap V_j} + t_j|_{U_i \cap V_j} \rangle = \langle U_i, s_i \rangle + \langle V_j, t_j \rangle = s(p) + t(p) = r_p = \langle V, r \rangle$$

Por tanto existe un abierto  $Z$  con  $p \in Z \subseteq U_i \cap V_j \cap V$  tal que  $s_i|_Z + t_j|_Z = r|_Z$ . Afirmamos que  $Z \subseteq (s + t)^{-1}(W(r, V))$ . En efecto, sea  $q \in Z$ , entonces  $q \in U_i$  y  $q \in V_j$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (s + t)(q) &= s(q) + t(q) = \bar{s}_i(q) + \bar{t}_j(q) = \langle U_i, s_i \rangle + \langle V_j, t_j \rangle \\ &= \langle U_i \cap V_j, s_i|_{U_i \cap V_j} + t_j|_{U_i \cap V_j} \rangle = \langle Z, r|_Z \rangle \\ &= \langle V, r \rangle \in W(r, V). \end{aligned}$$

Dado un abierto  $U$  de  $X$ , definimos una aplicación  $\theta(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$  por  $s \mapsto \bar{s}$ . Es fácil ver que  $\theta(U)$  es un homomorfismo de grupos; además

si  $V$  es un abierto de  $U$ , la observación 2.2.3 nos dice que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\theta(U)} & \mathcal{F}^+(U) \\ \rho_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho_{UV}^+ \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\theta(V)} & \mathcal{F}^+(V) \end{array}$$

Consideremos ahora un haz  $\mathcal{G}$  y sea  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morfismo. Vamos a definir un morfismo  $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

Tomemos un abierto  $U$  de  $X$  y sea  $s \in \mathcal{F}^+(U)$ . Por el lema 2.2.2 existe un cubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$  y  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  tal que  $s|_{U_i} = \bar{s}_i$  para todo  $i \in I$ . Sea  $t_i = \varphi(U_i)(s_i) \in \mathcal{G}(U_i)$  y veamos que  $t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}$  en  $\mathcal{G}(U_i \cap U_j)$ . Desde que  $\mathcal{G}$  es un haz, es suficiente mostrar que

$$(t_i|_{U_i \cap U_j})_p = (t_j|_{U_i \cap U_j})_p \quad \text{en } \mathcal{G}_p \quad \text{para todo } p \in U_i \cap U_j \quad (2.2.1)$$

En efecto, como  $\bar{s}_i|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_i \cap U_j} = \bar{s}_j|_{U_i \cap U_j}$ , para  $p \in U_i \cap U_j$  tenemos que

$$(s_i|_{U_i \cap U_j})_p = \bar{s}_i|_{U_i \cap U_j}(p) = \bar{s}_j|_{U_i \cap U_j}(p) = (s_j|_{U_i \cap U_j})_p$$

Entonces existe un entorno  $V_p$  de  $p$  tal que  $V_p \subseteq U_i \cap U_j$  y  $s_i|_{V_p} = s_j|_{V_p}$ . Luego

$$t_i|_{V_p} = \varphi(U_i)(s_i)|_{V_p} = \varphi(V_p)(s_i|_{V_p}) = \varphi(V_p)(s_j|_{V_p}) = \varphi(U_j)(s_j)|_{V_p} = t_j|_{V_p}$$

lo que muestra la relación (2.2.2). Como  $\mathcal{G}$  es un haz, entonces existe un único  $t \in \mathcal{G}(U)$  tal que  $t|_{U_i} = t_i$ . Definimos  $\psi(U)(s) = t$ . Usando que  $\mathcal{G}$  es un haz, podemos ver que  $\psi$  está bien definida. De esto, se sigue sin dificultad que  $\psi$  es un morfismo y  $\psi \circ \theta = \varphi$ . Además, como  $\mathcal{G}$  es un haz, el morfismo  $\psi$  es el único con esta propiedad, debido al lema 2.2.2. La unicidad de  $\mathcal{F}^+$  es una consecuencia formal de la propiedad universal.  $\square$

**Observación 2.2.4.** Note que  $\theta_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_p^+$  es isomorfismo, para todo  $p \in X$ . También note que, como consecuencia de la propiedad universal, si  $\mathcal{F}$  es un haz entonces  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  es un isomorfismo.

**Definición 2.2.2.** *Un subhaz de un haz  $\mathcal{F}$  es un haz  $\mathcal{F}'$  tal que para todo abierto  $U \subseteq X$ ,  $\mathcal{F}'(U)$  es un subgrupo de  $\mathcal{F}(U)$ , y los homomorfismos de restricción de  $\mathcal{F}'$  son inducidos por los de  $\mathcal{F}$ . Se sigue que  $\mathcal{F}'_p$  es un subgrupo de  $\mathcal{F}_p$ , para todo  $p \in X$ .*

*Si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es un morfismo de haces, se tiene que  $\text{Nuc}(\varphi)$  es un subhaz de  $\mathcal{F}$ . Decimos que un morfismo de haces  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es inyectivo, si  $\text{Nuc}(\varphi) = 0$ ; es decir si  $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  es inyectivo para todo abierto  $U \subseteq X$ .*

*Si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es un morfismo de haces, definimos la imagen de  $\varphi$ , denotado por  $\text{Im}(\varphi)$ , como el haz asociado al prehaz imagen de  $\varphi$ .*

**Proposición 2.2.4.** *Sea  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morfismo de prehaces tal que  $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  es inyectivo para todo abierto  $U \subseteq X$ . Entonces el morfismo inducido  $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$  de haces asociados es inyectivo.*

*Demostración.* Sean  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  y  $\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^+$  los morfismos naturales. Por la propiedad universal de haz asociado, para el morfismo  $\beta \circ \varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^+$  existe un único morfismo  $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$  tal que  $\varphi^+ \circ \alpha = \beta \circ \varphi$ . Veamos que  $\varphi^+(U) : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{G}^+(U)$  es inyectivo, para todo abierto  $U \subseteq X$ . En efecto, sea  $f \in \mathcal{F}^+(U)$  tal que  $\varphi^+(U)(f) = 0$ . Sea  $p \in U$ . Entonces existe  $V \subseteq U$  abierto que contiene a  $p$  y existe  $t \in \mathcal{F}(V)$  tal que  $f|_V = \bar{t}$ . Luego  $\beta(V)(\varphi(V)(t)) = \varphi^+(V)(\alpha(V)(t)) = \varphi^+(V)(\bar{t}) = \varphi^+(V)(f|_V) = \varphi^+(U)(f)|_V = 0$ ; es decir  $\overline{\varphi(V)(t)} = 0$ . Luego  $\varphi(V)(t)_p = 0$  en  $\mathcal{G}_p$ . Entonces existe  $W \subseteq V$  abierto que contiene a  $p$  tal que  $\varphi(V)(t)|_W = 0$ . Así tenemos  $\varphi(W)(t|_W) = 0$ , y como  $\varphi(W) : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{G}(W)$  es inyectivo entonces  $t|_W = 0$ . Se sigue que  $f(p) = t_p = 0$ . Por tanto  $f = 0$ .  $\square$

**Observación 2.2.5.** *Sea  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morfismo de haces y sea  $\text{im}(\varphi)$  el prehaz imagen de  $\varphi$ . Tenemos un morfismo natural de prehaces  $\text{im}(\varphi) \rightarrow \mathcal{G}$ , el cual es obviamente inyectivo en cada abierto  $U \subseteq X$ . Por la proposición anterior, tenemos un morfismo inyectivo de haces  $\text{Im}(\varphi) \rightarrow \mathcal{G}^+$ . Así obtenemos un morfismo inyectivo de haces  $\text{Im}(\varphi) \rightarrow \mathcal{G}$ , por lo cual podemos identificar  $\text{Im}(\varphi)$  con un subhaz de  $\mathcal{G}$ . Note que vía esta identificación, para todo  $p \in X$  tenemos  $\text{Im}(\varphi)_p = \text{im}(\varphi)_p$  en  $\mathcal{G}_p$ .*

**Definición 2.2.3.** *Decimos que un morfismo de haces  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es sobreyectivo, si  $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{G}$ .*

**Definición 2.2.4.** Decimos que una sucesión de haces y morfismos

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \longrightarrow \dots$$

es exacta si para cada  $i$ ,  $\text{Nuc}(\varphi^i) = \text{Im}(\varphi^{i-1})$ .

**Proposición 2.2.5.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz sobre un espacio topológico  $X$  y sea  $\mathcal{F}'$  un subhaz de  $\mathcal{F}$ . Sea  $U \subseteq X$  un abierto y sea  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Tenemos:  $s \in \mathcal{F}'(U)$  si y sólo si  $s_p \in \mathcal{F}'_p$  para todo  $p \in U$ .

*Demostración.* Supongamos que  $s_p \in \mathcal{F}'_p$  para todo  $p \in U$ . Sea  $p \in U$ , entonces  $\langle U, s \rangle = \langle V_p, t'(p) \rangle$  en  $\mathcal{F}_p$ , donde  $V_p$  es abierto que contiene a  $p$  y  $t'(p) \in \mathcal{F}'(V_p)$ . Luego existe  $W_p \subseteq U \cap V_p$  abierto que contiene a  $p$  tal que  $s|_{W_p} = t'(p)|_{W_p}$ . Sea  $t(p) = t'(p)|_{W_p}$ , para cada  $p \in U$ . Tenemos que  $t(p) \in \mathcal{F}'(W_p)$  y además para cada  $p, q \in U$  se tiene  $t(p)|_{W_p \cap W_q} = s|_{W_p \cap W_q} = t(q)|_{W_p \cap W_q}$ . Como  $\mathcal{F}'$  es un haz, entonces existe  $t \in \mathcal{F}'(U)$  tal que  $t|_{W_p} = t(p)$  para todo  $p \in U$ . Luego  $s|_{W_p} = t|_{W_p}$  para todo  $p \in U$ , y por tanto  $s = t \in \mathcal{F}'(U)$ . La parte recíproca es inmediata.  $\square$

**Corolario 2.2.6.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz sobre un espacio topológico  $X$ , entonces  $\mathcal{F} = 0$  si y sólo si  $\mathcal{F}_p = 0$  para todo  $p \in X$ . Además, si  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$  son subhaces de  $\mathcal{F}$ , entonces:

- (a)  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$  si y sólo si  $\mathcal{G}_p = \mathcal{F}_p$  para todo  $p \in X$ .
- (b)  $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$  si y sólo si  $\mathcal{G}_p = \mathcal{G}'_p$  para todo  $p \in X$ .

*Demostración.* Consecuencia directa de la proposición anterior.  $\square$

La siguiente proposición es una consecuencia importante del corolario anterior

**Proposición 2.2.7.** Sea  $X$  un espacio topológico.

Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a) Para cualquier morfismo de haces  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , se cumple que para cada punto  $p \in X$

$$(\text{Nuc}(\varphi))_p = \text{Nuc}(\varphi_p) \quad \text{y} \quad (\text{Im}(\varphi))_p = \text{Im}(\varphi_p).$$

- (b) El morfismo  $\varphi$  es inyectivo (resp. sobreyectivo) si y sólo si la aplicación inducida en los tallos  $\varphi_p$  es inyectiva (resp. sobreyectiva) para todo  $p \in X$ .

- (c) *La sucesión de haces y morfismos  $\dots \rightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \rightarrow \dots$  es exacta si y sólo si para cada  $p \in X$  la correspondiente sucesión de tallos es exacta como sucesión de grupos abelianos.*

*Demostración.* Ver [1]. □

**Proposición 2.2.8.** *Dado un subconjunto abierto  $U \subseteq X$ , el funtor  $\Gamma(U, \cdot)$  de haces sobre  $X$  a grupos abelianos es un funtor exacto a izquierda, es decir, si  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$  es una sucesión exacta de haces, entonces  $0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}'')$  es una sucesión exacta de grupos.*

*Demostración.* Fijemos un conjunto abierto  $U \subseteq X$ . Como  $\varphi$  es inyectiva, tenemos  $Nuc(\varphi) = 0$ ; luego  $0 = (Nuc(\varphi))(U) = Nuc(\varphi(U))$  y por tanto  $\varphi(U)$  es inyectiva. A continuación veamos que  $Im(\varphi(U)) = Nuc(\psi(U))$ . Por la proposición 2.2.7 la sucesión  $0 \rightarrow \mathcal{F}'_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{F}''_p$  es exacta para todo  $p \in X$ . Para cada  $p \in U$  y  $s \in \mathcal{F}'(U)$ , tenemos  $(\psi(U) \circ \varphi(U)(s))_p = \langle U, \psi(U) \circ \varphi(U)(s) \rangle = \psi_p(\varphi_p(\langle U, s \rangle)) = 0$ , luego  $\psi(U) \circ \varphi(U)(s) = 0$  para todo  $s \in \mathcal{F}'(U)$  y por tanto  $Im(\varphi(U)) \subseteq Nuc(\psi(U))$ . Por otro lado, sea  $s \in Nuc(\psi(U))$  y sea  $p \in U$ . Tenemos  $\psi_p(\langle U, s \rangle) = \langle U, \psi(U)(s) \rangle = 0$ , luego  $\langle U, s \rangle \in Nuc(\psi_p) = Im(\varphi_p)$ , entonces existe un abierto  $V_p \subseteq X$  que contiene a  $p$  y existe una sección  $t(p) \in \mathcal{F}'(V_p)$  tal que  $\varphi_p(\langle V_p, t(p) \rangle) = \langle U, s \rangle$  y como  $\varphi_p(\langle V_p, t(p) \rangle) = \langle V_p, \varphi(V_p)(t(p)) \rangle$ , entonces existe un abierto  $W_p \subseteq U \cap V_p$  que contiene a  $p$  tal que  $\varphi(V_p)(t(p))|_{W_p} = s|_{W_p}$ , es decir  $\varphi(W_p)(t(p)|_{W_p}) = s|_{W_p}$ . Para cada  $p, q \in U$ , denotemos por  $W_{pq}$  a la intersección de  $W_p$  y  $W_q$ . Tenemos  $\varphi(W_{pq})(t(p)|_{W_{pq}}) = \varphi(W_p)(t(p)|_{W_p})|_{W_{pq}} = (s|_{W_p})|_{W_{pq}} = s|_{W_{pq}}$ , por lo cual  $\varphi(W_{pq})(t(p)|_{W_{pq}}) = \varphi(W_{pq})(t(q)|_{W_{pq}})$ , y como  $\varphi(W_{pq})$  es inyectiva, entonces  $t(p)|_{W_{pq}} = t(q)|_{W_{pq}}$  para todo  $p, q \in U$ . Luego existe  $t \in \mathcal{F}'(U)$  tal que  $t|_{W_p} = t(p)|_{W_p}$  para todo  $p \in U$ . Entonces,  $\varphi(U)(t)|_{W_p} = \varphi(W_p)(t|_{W_p}) = \varphi(W_p)(t(p)|_{W_p}) = s|_{W_p}$  para todo  $p \in U$ . Por tanto  $\varphi(U)(t) = s$ , y así  $s \in Im(\varphi(U))$ . □

**Definición 2.2.5.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Dado un haz  $\mathcal{F}$  en  $X$ , definimos el haz **imagen directa**  $f_*\mathcal{F}$  en  $Y$  por  $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$  para cualquier abierto  $V \subseteq Y$ . Para cualquier haz  $\mathcal{G}$  en  $Y$ , definimos el haz **imagen inversa**  $f^{-1}\mathcal{G}$  en  $X$  como el haz asociado al prehaz  $f^\bullet\mathcal{G}$  dado por  $U \mapsto \varinjlim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{G}(V)$ , donde  $U$  es*

un subconjunto abierto de  $X$ , y el límite directo es considerado sobre todos los abiertos  $V$  de  $Y$  conteniendo  $f(U)$ .

**Observación 2.2.6.** De la construcción del límite directo podemos también considerar a  $(f^\bullet \mathcal{G})(U)$  como el conjunto de elementos  $\langle V, s \rangle$  donde  $V$  es un abierto de  $Y$  tal que  $f(U) \subseteq V$  y  $s \in \mathcal{G}(V)$ , y dos tales elementos  $\langle V, s \rangle$  y  $\langle V', s' \rangle$  son iguales si existe un abierto  $W \subseteq Y$  tal que  $f(U) \subseteq W \subseteq V \cap V'$  y  $s|_W = s'|_W$ . Dado  $G \subseteq U$  abierto, la restricción está dada por  $\langle V, s \rangle|_G = \langle V, s \rangle \in (f^\bullet \mathcal{G})(G)$ . La restricción está bien definida pues como  $G \subseteq U$ , entonces  $f(G) \subseteq f(U) \subseteq V$ .

Si  $p \in X$  y  $q = f(p)$ , entonces  $(f^{-1} \mathcal{G})_p \cong \mathcal{G}_q$ . En efecto, la aplicación  $\mathcal{G}_q \rightarrow (f^\bullet \mathcal{G})_p$  dada por  $\langle V, t \rangle \mapsto \langle f^{-1}(V), \langle V, t \rangle \rangle$  es un isomorfismo.

**Proposición 2.2.9.** (Extensión de un haz por cero). *Sean  $X$  un espacio topológico,  $Z$  un subconjunto cerrado y sea  $\iota : Z \rightarrow X$  la inclusión. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Dado un haz  $\mathcal{F}$  en  $Z$ , se tiene*

$$(\iota_* \mathcal{F})_p \cong \begin{cases} \mathcal{F}_p, & \text{si } p \in Z \\ 0, & \text{si } p \notin Z \end{cases}$$

*Llamamos a  $\iota_* \mathcal{F}$  extensión de  $\mathcal{F}$  por cero fuera de  $Z$ .*

(b) *Sea  $U = X \setminus Z$  y sea  $j : U \rightarrow X$  la inclusión. Sea  $\mathcal{F}$  un haz en  $U$ . Sea  $j! \mathcal{F}$  el haz en  $X$  asociado al prehaz  $\mathcal{N}$  dado por*

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V), & \text{si } V \subseteq U \\ 0, & \text{si } V \not\subseteq U \end{cases}$$

*Entonces se tiene que*

$$(j! \mathcal{F})_p \cong \begin{cases} \mathcal{F}_p, & \text{si } p \in U \\ 0, & \text{si } p \notin U \end{cases}$$

*Además,  $j! \mathcal{F}$  es el único haz en  $X$  que es obtenido por extender  $\mathcal{F}$  por cero fuera de  $U$ .*

(c) *Sea  $\mathcal{F}$  un haz en  $X$ . Entonces existe una sucesión exacta de haces en  $X$*

$$0 \longrightarrow j!(\mathcal{F}|_U) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \iota_*(\mathcal{F}|_Z) \longrightarrow 0.$$

*Demostración.* (a) Sea  $p \in Z$ . Definimos  $H_{\mathcal{F}} : (\iota_*\mathcal{F})_p \rightarrow \mathcal{F}_p$  por  $\langle U, s \rangle \mapsto \langle U \cap Z, s \rangle$ . Veamos la buena definición. Si  $\langle U, s \rangle = \langle V, t \rangle$ , entonces existe  $W \subseteq U \cap V$  abierto en  $X$  que contiene a  $p$  tal que  $s|_W = t|_W$  en  $\iota_*\mathcal{F}(W)$ , es decir  $s|_{W \cap Z} = t|_{W \cap Z}$ . Luego  $\langle U \cap Z, s \rangle = \langle V \cap Z, t \rangle$ .

Veamos que  $H_{\mathcal{F}}$  es inyectiva. Si  $H_{\mathcal{F}}(\langle U, s \rangle) = 0$ , entonces  $\langle U \cap Z, s \rangle = 0$ , luego existe un abierto  $G$  de  $Z$  que contiene a  $p$  tal que  $G \subseteq U \cap Z$  y  $s|_G = 0$ . Sea  $G = V \cap Z$ , donde  $V \subseteq X$  es un abierto. Como  $G \subseteq U \cap Z$ , entonces  $G = G \cap (U \cap Z) = V \cap Z \cap U \cap Z = (U \cap V) \cap Z$ . Sea  $W = U \cap V$ , entonces  $W$  es abierto de  $X$  y contiene a  $p$ ; además  $W \subseteq U$  y  $G = W \cap Z$ . Luego

$$0 = s|_G = s|_{W \cap Z}$$

de donde se tiene  $s|_W = 0$  en  $\iota_*\mathcal{F}(W)$ . Luego  $\langle U, s \rangle = 0$ . Desde que es clara la sobreyectividad se sigue que  $H_{\mathcal{F}}$  es isomorfismo.

Si  $p \notin Z$ , veamos que  $(\iota_*\mathcal{F})_p = 0$ . En efecto, sea  $\langle U, s \rangle \in (\iota_*\mathcal{F})_p$ . Como  $p \in X \setminus Z$  y  $X \setminus Z$  es abierto, entonces  $\langle U, s \rangle = \langle U \cap (X \setminus Z), s|_{U \cap (X \setminus Z)} \rangle$ .

Pero  $s|_{U \cap (X \setminus Z)} = s|_{U \cap (X \setminus Z) \cap Z} \in \mathcal{F}(U \cap (X \setminus Z) \cap Z) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$ . Luego

$$\langle U, s \rangle = \langle U \cap (X \setminus Z), s|_{U \cap (X \setminus Z)} \rangle = \langle U \cap (X \setminus Z), 0 \rangle$$

(b) Sea  $p \in U$ . Mostremos que  $(j!\mathcal{F})_p \cong \mathcal{F}_p$ . Como  $\mathcal{N}_p \cong \mathcal{N}_p^+ = (j!\mathcal{F})_p$ , basta ver que  $\mathcal{N}_p \cong \mathcal{F}_p$ . En efecto, sea  $\gamma : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{N}_p$  dado por  $\langle W, s \rangle \mapsto \langle W, s \rangle$ . Evidentemente  $\gamma$  está bien definida y es un homomorfismo inyectivo de grupos.

Veamos la sobreyectividad. Sea  $\langle V, t \rangle \in \mathcal{N}_p$ , donde  $V \subseteq X$  es abierto que contiene a  $p$  y  $t \in \mathcal{N}(V)$ . Si  $V \not\subseteq U$ , entonces  $\mathcal{N}(V) = 0$ , luego  $t = 0$  y  $\langle V, t \rangle = 0 \in \text{Im}(\gamma)$ . Si  $V \subseteq U$ , entonces  $\mathcal{N}(V) = \mathcal{F}(V)$  y  $t \in \mathcal{F}(V)$ . Luego

$$\gamma(\langle V, t \rangle) = \langle V, t \rangle$$

de aquí  $\langle V, t \rangle \in \text{Im}(\gamma)$ . Ahora, consideremos  $p \notin U$ . Como  $\mathcal{N}_p \cong \mathcal{N}_p^+ = (j!\mathcal{F})_p$ , basta ver que  $\mathcal{N}_p = 0$ . En efecto, sea  $\langle V, s \rangle \in \mathcal{N}_p$ , como  $p \in V$  y  $p \notin U$ , entonces  $V \not\subseteq U$ . Así  $\mathcal{N}(V) = 0$ . Luego  $s = 0$ , de donde se sigue que  $\langle V, s \rangle = 0$ . Por tanto  $\mathcal{N}_p = 0$ .

(c) Definamos un morfismo  $\phi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F}$  por  $\phi(V) = id_{\mathcal{F}(V)}$ , si  $V \subseteq U$ ; y  $\phi(V) = 0$ , si  $V \not\subseteq U$  (donde  $\mathcal{N}$  es como en (b), con  $\mathcal{F}|_U$  como el haz sobre  $U$ ). Entonces, existe  $\varphi : \mathcal{N}^+ = j!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F}$  tal que  $\varphi \circ \lambda = \phi$ , donde  $\lambda : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^+$  es el morfismo natural. Para definir  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow$

$\iota_*(\mathcal{F}|_Z) = \iota_*(\iota^{-1}\mathcal{F})$  veamos el caso general. Sea  $f : X \rightarrow Y$  función continua entre espacios topológicos y sea  $\mathcal{G}$  un haz sobre  $Y$ . Sea  $\theta : f^*\mathcal{G} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$  el morfismo natural. Para  $U \subseteq X$  abierto, definamos  $\psi(U) : \mathcal{G}(U) \rightarrow f_*(f^{-1}\mathcal{G})(U) = f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(U))$  por  $s \mapsto \theta(f^{-1}(U))(\langle U, s \rangle)$ , con  $\langle U, s \rangle \in f^*\mathcal{G}(f^{-1}(U))$ . Entonces es fácil ver que  $\psi$  es morfismo de haces. En nuestro caso, tenemos  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \iota_*(\mathcal{F}|_Z)$ . Ahora veamos que hemos obtenido una sucesión exacta viendo que sea exacta en los tallos. Si  $p \in U$ , entonces  $(\iota_*(\mathcal{F}|_Z))_p = 0$ . Así, en este caso tenemos que probar que  $\varphi_p$  es isomorfismo. En efecto, como  $\phi(V)$  es inyectiva para todo  $V$  abierto de  $X$ , entonces  $\varphi$  es inyectiva y así  $\varphi_p$  es inyectiva. Como  $\varphi \circ \lambda = \phi$ , tenemos que  $\varphi_p \circ \lambda_p = \phi_p$ , y se sigue que para ver que  $\varphi_p$  es sobreyectiva, basta ver que  $\phi_p$  es sobreyectiva. Para esto, tomemos  $\langle W, t \rangle \in \mathcal{F}_p$ , entonces  $\langle W, t \rangle = \langle W \cap U, t|_{W \cap U} \rangle = \langle W \cap U, \phi(W \cap U)(t|_{W \cap U}) \rangle = \phi_p(\langle W \cap U, t|_{W \cap U} \rangle)$ . Si  $p \in Z$ , entonces  $(j_!(\mathcal{F}|_U))_p = 0$ . Así, en este caso tenemos que probar que  $\psi_p$  es isomorfismo. En efecto, como  $p \in Z$ , entonces  $K : (i^*\mathcal{F})_p \rightarrow (\mathcal{F})_p$  dado por  $\langle W \cap Z, \langle W, t \rangle \rangle \mapsto \langle W, t \rangle$  es isomorfismo. Luego,

$$\begin{aligned}
 & (K \circ (\theta_p)^{-1} \circ H_{(\mathcal{F}|_Z)} \circ \psi_p)(\langle V, s \rangle) \\
 &= K \circ (\theta_p)^{-1} \circ H_{(\mathcal{F}|_Z)}(\langle V, \psi(V)(s) \rangle) \\
 &= K \circ (\theta_p)^{-1} \circ H_{(\mathcal{F}|_Z)}(\langle V, \theta(V \cap Z)(\langle V, s \rangle) \rangle) \\
 &= K \circ (\theta_p)^{-1}(\langle V \cap Z, \theta(V \cap Z)(\langle V, s \rangle) \rangle) \\
 &= K(\langle V \cap Z, \langle V, s \rangle \rangle) \\
 &= \langle V, s \rangle.
 \end{aligned}$$

Se sigue que  $\psi_p$  es isomorfismo. □

Sea  $\{\mathcal{F}_i, \varphi_{ij}\}$  un sistema directo de haces y morfismos en  $X$ . Entonces se cumple

- (i)  $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$  si  $i \leq j \leq k$ .
- (ii)  $\varphi_{ii} = id_{\mathcal{F}_i}$  para todo  $i \in I$ .

Es decir, para cada abierto  $U$  de  $X$  se tiene que  $\{\mathcal{F}_i(U), \varphi_{ij}(U)\}$  es un sistema directo en la categoría de grupos abelianos. A continuación definimos el prehaz  $\mathcal{P}$  como sigue:  $\mathcal{P}(U) := \varinjlim \mathcal{F}_i(U)$ .

Dados abiertos  $V \subseteq U$  y para  $i \in I$ , sea  $\rho_{UV}^i : \mathcal{F}_i(U) \rightarrow \mathcal{F}_i(V)$  el morfismo restricción, entonces para  $i \leq j$  tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_i(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}^i} & \mathcal{F}_i(V) \\ \varphi_{ij}(U) \downarrow & & \downarrow \varphi_{ij}(V) \\ \mathcal{F}_j(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}^j} & \mathcal{F}_j(V) \end{array}$$

Por tanto existe un único morfismo  $\rho_{UV} : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  tal que para cada  $i \in I$  se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_i(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}^i} & \mathcal{F}_i(V) \\ \varphi_i^U \downarrow & & \downarrow \varphi_i^V \\ \mathcal{P}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{P}(V) \end{array}$$

donde  $\varphi_i^U : \mathcal{F}_i(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$  está dado por  $\varphi_i^U(s) = [(i, s)]$ . Consideremos la restricción  $\rho_{UV} : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ , entonces para  $s \in \mathcal{F}_i(U)$

$$\rho_{UV}[(i, s)] = \rho_{UV}(\varphi_i^U(s)) = \varphi_i^V(\rho_{UV}^i(s)) = [(i, \rho_{UV}^i(s))] = [(i, s|_V)]$$

de donde  $\rho_{UU}[(i, s)] = [(i, s|_U)] = [(i, s)]$  y así  $\rho_{UU} = id_{\mathcal{P}(U)}$ .

Por otro lado,

$$\rho_{VW}(\rho_{UV}[(i, s)]) = \rho_{VW}[(i, s|_V)] = [(i, (s|_V)|_W)] = [(i, s|_W)] = \rho_{UW}[(i, s)]$$

lo que nos da  $\rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}$ . Por lo tanto  $\mathcal{P}$  es prehaz sobre  $X$ .

**Definición 2.2.6.** Definimos el **límite directo del sistema**  $\{\mathcal{F}_i, \varphi_{ij}\}$ , denotado por  $\varinjlim \mathcal{F}_i$ , como el haz asociado al prehaz  $\mathcal{P}$ .

**Observación 2.2.7.** El límite directo de la definición anterior es un límite directo en la categoría de haces sobre  $X$ , es decir se tiene la siguiente propiedad universal: dado un haz  $\mathcal{G}$  y una colección de morfismos  $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}$ , compatibles con los morfismos del sistema directo, entonces existe un único morfismo  $\varinjlim \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}$  tal que para cada  $i$ , el morfismo  $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}$  es obtenido por componer los morfismos  $\mathcal{F}_i \rightarrow \varinjlim \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}$ .

**Proposición 2.2.10.** Sea  $\{\mathcal{F}_i, \varphi_{ij}\}_{i \in I}$  un sistema directo de haces de grupos abelianos en un espacio noetheriano  $X$ . Entonces el prehaz  $U \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_i(U)$  es un haz. En particular,

$$\varinjlim_i \Gamma(U, \mathcal{F}_i) \cong \Gamma(U, \varinjlim_i \mathcal{F}_i)$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{P}$  el prehaz límite directo, es decir  $\mathcal{P}(U) = \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{F}_i)$  para cualquier abierto  $U \subseteq X$ . Mostremos que  $\mathcal{P}$  satisface la condición de haz. Como  $X$  es noetheriano, entonces todo abierto  $U$  es casi compacto. Luego, basta mostrar las condiciones de haz para cubrimientos finitos de abiertos. Sea  $V_1, \dots, V_n$  un cubrimiento finito por abiertos de  $U$ , y sea  $s \in \mathcal{P}(U)$  satisfaciendo  $s|_{V_\alpha} = 0$  para cada  $1 \leq \alpha \leq n$ . Sea  $s = [(i, m_i)]$ , donde  $m_i \in \mathcal{F}_i(U)$ . Como tenemos  $s|_{V_\alpha} = 0$ , entonces para cada  $1 \leq \alpha \leq n$ , existe un índice  $j_\alpha$  tal que  $\varphi_{ij_\alpha}(V_\alpha)(m_i|_{V_\alpha}) = 0$ . Sea  $j$  tal que  $j_\alpha \leq j$  para todo  $1 \leq \alpha \leq n$ . Luego  $\varphi_{ij}(V_\alpha)(m_i|_{V_\alpha}) = 0$  para  $1 \leq \alpha \leq n$ , es decir  $\varphi_{ij}(U)(m_i)|_{V_\alpha} = 0$  para todo  $1 \leq \alpha \leq n$ . Desde que  $\mathcal{F}_j$  es un haz, tenemos  $\varphi_{ij}(U)(m_i) = 0$  y por tanto  $s = 0$  en  $\mathcal{P}(U)$ .

Ahora mostremos que se verifica la condición de compatibilidad. Sean  $U$  y  $V_1, \dots, V_n$  como antes. Sean  $s_\alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha)$  tales que  $s_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = s_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$  para  $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ . Sean  $s_\alpha = [(i_\alpha, m_{i_\alpha})]$ , donde  $m_{i_\alpha} \in \mathcal{F}_{i_\alpha}(V_\alpha)$ . Como  $s_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = s_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$  para  $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ , entonces existen índices  $j_{\alpha\beta}$  tales que  $\varphi_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}(V_\alpha \cap V_\beta)(m_{i_\alpha}|_{V_\alpha \cap V_\beta}) = \varphi_{i_\beta j_{\alpha\beta}}(V_\alpha \cap V_\beta)(m_{i_\beta}|_{V_\alpha \cap V_\beta})$ . Sea  $j$  tal que  $j_{\alpha\beta} \leq j$  para todo  $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ . Luego  $\varphi_{i_\alpha j}(V_\alpha \cap V_\beta)(m_{i_\alpha}|_{V_\alpha \cap V_\beta}) = \varphi_{i_\beta j}(V_\alpha \cap V_\beta)(m_{i_\beta}|_{V_\alpha \cap V_\beta})$  para  $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ , es decir  $\varphi_{i_\alpha j}(V_\alpha)(m_{i_\alpha})|_{V_\alpha \cap V_\beta} = \varphi_{i_\beta j}(V_\beta)(m_{i_\beta})|_{V_\alpha \cap V_\beta}$  para todo  $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ . Desde que  $\mathcal{F}_j$  es un haz, existe un único  $m_j \in \mathcal{F}_j(U)$  tal que  $m_j|_{V_\alpha} = \varphi_{i_\alpha j}(V_\alpha)(m_{i_\alpha})$  para todo  $1 \leq \alpha \leq n$ . Si hacemos  $s = [(j, m_j)] \in \mathcal{P}(U)$ , entonces  $s|_{V_\alpha} = s_\alpha$  para todo  $1 \leq \alpha \leq n$ .  $\square$

## 2.3 Haces Flascos y Subhaces con Soporte

**Definición 2.3.1.** *Un haz  $\mathcal{F}$  sobre un espacio topológico  $X$  es **flasco**, si para toda inclusión de abiertos  $V \subseteq U$ , la restricción  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  es sobreyectiva.*

**Ejemplo 2.3.1.** Sea  $\mathcal{F}$  un prehaz constante sobre un espacio topológico irreducible  $X$ , es decir para algún grupo abeliano  $\mathcal{A}$ , tenemos  $\mathcal{F}(U) = \mathcal{A}$ , para todo abierto no vacío  $U$ , y los morfismos de restricción son dados por la identidad. Veamos que  $\mathcal{F}$  es un haz. Así definido, obviamente  $\mathcal{F}$  es un prehaz. Además  $\mathcal{F}$  cumple la condición (i) de la definición de haz. Veamos que  $\mathcal{F}$  cumple la condición (ii) de la definición 2.1.2. Sea  $U$  un

abierto y sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $U$  tal que tenemos secciones  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  que satisfacen  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ , para todo  $i, j \in I$ . Si  $U$  es vacío, entonces  $U_i$  es vacío para todo  $i$ . Luego  $s_i = 0$  para todo  $i$  y por tanto  $0|_{U_i} = s_i$ , para todo  $i$ . Si  $U$  no es vacío, consideremos dos abiertos no vacíos  $U_i$  y  $U_j$ . Como  $X$  es irreducible, entonces  $U_i \cap U_j$  no es vacío. Luego, como  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ , entonces por la definición de los morfismos de restricción tenemos  $s_i = s_j$  como elementos de  $\mathcal{A}$ . Denotemos por  $s$  a aquel elemento tal que  $s_i = s$  (como elementos de  $\mathcal{A}$ ) para todo abierto no vacío  $U_i$ . Considerando  $s$  como elemento de  $\mathcal{F}(U)$ , tenemos  $s|_{U_i} = s_i$  para todo  $i$ . Así  $\mathcal{F}$  es un haz, y por la definición de los morfismos de restricción tenemos que  $\mathcal{F}$  es flasco.

**Proposición 2.3.2.** *Sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

*una sucesión exacta de haces. Si  $\mathcal{F}'$  es flasco, entonces para todo abierto  $U$ , la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi(U)} \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0$$

*de grupos abelianos también es exacta.*

*Demostración.* Basta demostrar que  $\psi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U)$  es sobreyectiva. Sea  $t \in \mathcal{F}''(U)$ . Como  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  es sobreyectiva, entonces existe un cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$  y existen secciones  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  tal que  $\psi(U_i)(s_i) = t|_{U_i}$  para todo  $i$ . Sea  $\mathcal{E} = \{(\bigcup_{i \in J} U_i, s); J \subseteq I, s \in \mathcal{F}(\bigcup_{i \in J} U_i), \psi(\bigcup_{i \in J} U_i)(s) = t|_{\bigcup_{i \in J} U_i}\}$  y consideremos  $\mathcal{E}$  parcialmente ordenado por  $(\bigcup_{i \in J_1} U_i, s_1) \prec (\bigcup_{i \in J_2} U_i, s_2) \Leftrightarrow \bigcup_{i \in J_1} U_i \subseteq \bigcup_{i \in J_2} U_i$  y  $s_2|_{\bigcup_{i \in J_1} U_i} = s_1$ . Como  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}''$  son haces, entonces  $\mathcal{E}$  es inductivo. Por el lema de Zorn, existe  $(\bigcup_{i \in J} U_i, s)$  elemento maximal de  $\mathcal{E}$ . Denotemos  $W = \bigcup_{i \in J} U_i$ . Afirmamos que  $W = U$ . En efecto, supongamos lo contrario. Entonces existe  $k \in I$  tal que  $U_k \not\subseteq W$ . Como  $\psi(W)(s) = t|_W$  y  $\psi(U_k)(s_k) = t|_{U_k}$ , entonces  $\psi(W \cap U_k)(s|_{W \cap U_k} - s_k|_{W \cap U_k}) = 0$ . Entonces existe  $r \in \mathcal{F}'(W \cap U_k)$  tal que  $\varphi(W \cap U_k)(r) = s|_{W \cap U_k} - s_k|_{W \cap U_k}$ . Como  $\mathcal{F}'$  es flasco, entonces existe  $r' \in \mathcal{F}'(W \cup U_k)$  tal que  $r'|_{W \cap U_k} = r$ . Luego  $(s - \varphi(W)(r'|_W))|_{W \cap U_k} = s_k|_{W \cap U_k}$ . Entonces existe  $\alpha \in \mathcal{F}(W \cup U_k)$  tal que  $\alpha|_W = s - \varphi(W)(r'|_W)$  y

$\alpha|_{U_k} = s_k$ . Como  $\psi(W)(\alpha|_W) = \psi(W)(s - \varphi(W)(r'|_W)) = \psi(W)(s) - \psi(W)(\varphi(W)(r'|_W)) = \psi(W)(s) = t|_W$  y  $\psi(U_k)(\alpha|_{U_k}) = \psi(U_k)(s_k) = t|_{U_k}$ , entonces  $\psi(W \cup U_k)(\alpha) = t|_{W \cup U_k}$ . Luego  $\psi(W \cup U_k)(\alpha + \varphi(W \cup U_k)(r')) = \psi(W \cup U_k)(\alpha) = t|_{W \cup U_k}$ , y como  $(\alpha + \varphi(W \cup U_k)(r'))|_W = \alpha|_W + \varphi(W)(r'|_W) = s$ , obtenemos una contradicción con la maximalidad de  $(\bigcup_{i \in J} U_i, s)$ . Por tanto  $W = U$  y así  $\psi(U)(s) = t$ .  $\square$

**Proposición 2.3.3.** *Sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

*una sucesión exacta de haces. Si  $\mathcal{F}'$  y  $\mathcal{F}$  son flascos, entonces  $\mathcal{F}''$  es flasco.*

*Demostración.* Consideremos una inclusión de abiertos  $V \subseteq U$ . Por la proposición anterior, tenemos el diagrama conmutativo con líneas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\psi(U)} & \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \rho'_{UV} & & \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho''_{UV} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\psi(V)} & \mathcal{F}''(V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como  $\mathcal{F}'$  y  $\mathcal{F}$  son flascos, entonces  $\rho'_{UV}$  y  $\rho_{UV}$  son sobreyectivas. De esto y el diagrama conmutativo con líneas exactas, se sigue fácilmente que  $\rho''_{UV}$  es sobreyectiva. Por tanto  $\mathcal{F}''$  es flasco.  $\square$

**Proposición 2.3.4.** *En un espacio topológico noetheriano, el límite directo de haces flascos es también flasco.*

*Demostración.* Sea  $\{\mathcal{F}_i, \varphi_{ij}\}_{i \in I}$  un sistema directo de haces flascos y sean  $V \subseteq U$  abiertos de  $X$ . Para cada  $i \in I$  tenemos que  $\mathcal{F}_i(U) \rightarrow \mathcal{F}_i(V)$  es un epimorfismo. Desde que  $\varinjlim_i$  es un funtor exacto, conseguimos que

$$\varinjlim_i \mathcal{F}_i(U) \longrightarrow \varinjlim_i \mathcal{F}_i(V)$$

es también un epimorfismo. Como  $X$  es noetheriano, usando la proposición 2.2.13 concluimos que

$$(\varinjlim_i \mathcal{F}_i)(U) \longrightarrow (\varinjlim_i \mathcal{F}_i)(V)$$

es sobreyectivo. Por tanto  $\varinjlim_i \mathcal{F}_i$  es flasco.  $\square$

**Observación 2.3.1.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y  $\mathcal{F}$  es un haz flasco sobre  $X$ , entonces por las definiciones de haz imagen directa y haz flasco, se tiene que  $f_*\mathcal{F}$  es un haz flasco sobre  $Y$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz sobre un espacio topológico  $X$ . Llamamos **haz de secciones discontinuas** de  $\mathcal{F}$ , al haz  $\mathcal{G}$  definido como sigue: para cada abierto  $U$ , sea  $\mathcal{G}(U)$  el conjunto de funciones  $s : U \rightarrow \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{F}_p$  tal que  $s_p \in \mathcal{F}_p$ , para cada  $p \in U$ ; y sean los morfismos de restricción dados por las restricciones usuales.

**Observación 2.3.2.** De la definición de los morfismos de restricción, se sigue que  $\mathcal{G}$  es flasco. Además,  $\mathcal{F}^+$  es un subhaz de  $\mathcal{G}$ . Por otro lado, como  $\mathcal{F}$  es un haz, entonces tenemos que el morfismo natural  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  es un isomorfismo. Por tanto tenemos un morfismo inyectivo natural  $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^+ \hookrightarrow \mathcal{G}$ .

**Definición 2.3.3.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz sobre un espacio topológico  $X$  y sea  $s \in \mathcal{F}(U)$ . El **soporte** de  $s$ , denotado por  $Sop(s)$  se define como el conjunto  $\{p \in U; s_p \neq 0\}$ . También definimos el **soporte** de  $\mathcal{F}$ , denotado por  $Sop(\mathcal{F})$ , como el conjunto de puntos  $p \in X$  tal que  $\mathcal{F}_p \neq 0$ . Dado un subconjunto cerrado  $Z$  de  $X$ , definimos  $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$  como el subgrupo de  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  consistiendo de todas las secciones cuyo soporte está contenido en  $Z$ .

**Proposición 2.3.5.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz sobre un espacio topológico  $X$  y sea  $Z$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Entonces el prehaz dado por:  $V \mapsto \Gamma_{Z \cap V}(V, \mathcal{F}|_V)$ , con morfismos restricción inducidos de  $\mathcal{F}$ , es un haz. Este haz es llamado subhaz de  $\mathcal{F}$  con soportes en  $Z$  y es denotado por  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ .

*Demostración.* La primera condición de haz es fácilmente verificada. Para comprobar la segunda condición de haz tomemos un cubrimiento de  $U$  por abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  y secciones  $s_i \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(U_i)$  compatibles. Desde que  $\mathcal{F}$  es un haz, existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s|_{U_i} = s_i$  para todo  $i$ . Ahora, es suficiente mostrar que  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(U)$ . Tomemos  $p \in Sop(s)$ ; entonces  $p \in U$  y  $\langle U, s \rangle \neq 0$  en  $\mathcal{F}_p$ . Como  $p \in U$ , entonces existe  $i$  tal que  $p \in U_i$ , luego  $0 \neq \langle U, s \rangle = \langle U_i, s|_{U_i} \rangle = \langle U_i, s_i \rangle$ , que implica  $p \in Sop(s_i) \subseteq Z$ . Por tanto  $Sop(s) \subseteq Z \cap U$ ; es decir  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(U)$ .  $\square$

**Proposición 2.3.6.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $Z$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Sea  $U = X \setminus Z$  y sea  $\mathcal{F}$  un haz sobre  $X$ . Si  $j : U \hookrightarrow X$  es

la inclusión, entonces existe una sucesión exacta de haces en  $X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$$

*Demostración.* Definimos para cada abierto  $V$  de  $X$ ,  $\psi(V) : \mathcal{F}(V) \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)(V) = \mathcal{F}(V \cap U)$  por  $s \mapsto s|_{V \cap U}$ . Entonces  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$  es un morfismo. Basta mostrar que  $\text{Nuc}(\psi) = \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ . Sea  $V$  un abierto de  $X$  y sea  $s \in \text{Nuc}(\psi(V))$ , entonces  $\psi(V)(s) = 0$ . Luego  $s|_{V \cap U} = 0$ . Para cada  $p \in V \cap U$  tenemos

$$\langle U, s \rangle = \langle V \cap U, s|_{V \cap U} \rangle = \langle V \cap U, 0 \rangle$$

Entonces  $\text{Sop}(s) \subseteq V \cap Z$ ; es decir  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$ .

Recíprocamente, tomemos  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$ , entonces  $\text{Sop}(s) \subseteq V \cap Z$ . Para cada  $p \in V \cap U$  se tiene  $\langle U \cap V, s|_{V \cap U} \rangle = \langle V, s \rangle = 0$  en  $\mathcal{F}_p$ ; luego existe un abierto  $W_p \subseteq V \cap U$  que contiene a  $p$  tal que  $(s|_{V \cap U})|_{W_p} = 0$ . Se sigue que  $s|_{V \cap U} = 0$ , es decir  $\psi(V)(s) = 0$ . Por tanto  $\text{Nuc}(\psi) = \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ .  $\square$

**Observación 2.3.3.** Note que si  $\mathcal{F}$  es flasco, entonces el morfismo  $\mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$  es sobreyectivo.

## 2.4 Esquemas

**Definición 2.4.1.** Un **espacio anillado** es un par  $(X, \mathcal{O}_X)$  consistiendo de un espacio topológico  $X$  y un haz de anillos  $\mathcal{O}_X$  sobre  $X$ . Un **morfismo** de espacios anillados de  $(X, \mathcal{O}_X)$  a  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  es un par  $(f, f^\#)$  formado por una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  y un morfismo  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  de haces de anillos sobre  $Y$ .

Si  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  y  $(g, g^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  son dos morfismos de espacios anillados, entonces tenemos las composiciones

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\#} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*(f^\#)} (g \circ f)_*\mathcal{O}_X$$

De esta manera definimos la **composición** de  $(f, f^\#)$  y  $(g, g^\#)$  como el morfismo  $(h, h^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  donde  $h := g \circ f$  y  $h^\# := g_*(f^\#) \circ g^\#$ . Un morfismo  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  es el morfismo **identidad** si  $f = id_X$  y  $f^\# = id_{\mathcal{O}_X}$ . Un espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$  es un **espacio**

**localmente anillado** si para cada punto  $p \in X$ , el tallo  $\mathcal{O}_{X,p}$  es un anillo local.

Un **morfismo** de espacios localmente anillados es un morfismo  $(f, f^\#)$  de espacios anillados, tal que para cada punto  $p \in X$ , la aplicación inducida de anillos locales  $f_p^\# : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,p}$  dada por  $\langle V, s \rangle \mapsto \langle f^{-1}(V), f^\#(V)(s) \rangle$  es un homomorfismo local de anillos locales. Un morfismo  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  de espacios localmente anillados es un isomorfismo, si tiene un morfismo inverso; es decir si  $f$  es un homeomorfismo y  $f^\#$  es un isomorfismo de haces.

**Definición 2.4.2.** Sea  $A$  un anillo. Definiremos un haz de anillos  $\mathcal{O}$  en el espacio topológico  $\text{Spec}(A)$ . Para cada abierto  $U$ , definimos  $\mathcal{O}(U)$  como el conjunto de funciones  $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$  tal que  $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$  para cada  $\mathfrak{p}$  y tal que para cada  $\mathfrak{p} \in U$ , existe un abierto  $V \subseteq U$  que contiene  $\mathfrak{p}$ , y elementos  $a, f \in A$  tal que para cada  $\mathfrak{q} \in V$ ,  $f \notin \mathfrak{q}$ , y  $s(\mathfrak{q}) = a/f$  en  $A_{\mathfrak{q}}$ . Así  $\mathcal{O}(U)$  tiene estructura de anillo conmutativo, cuyo elemento identidad es la función que vale 1 en cada  $A_{\mathfrak{p}}$ . Tomando las restricciones naturales como morfismos de restricción, obtenemos que  $\mathcal{O}$  es un haz de anillos. Llamamos espectro de  $A$  al espacio anillado  $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$ .

**Proposición 2.4.1.** Sea  $A$  un anillo y  $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$  su espectro. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a) Para cualquier  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , el tallo  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  del haz  $\mathcal{O}$ , es isomorfo al anillo local  $A_{\mathfrak{p}}$ .
- (b) Para cualquier elemento  $f \in A$ , el anillo  $\mathcal{O}(D(f))$  es isomorfo al anillo localizado  $A_f$ .
- (c) En particular,  $\Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}) \cong A$ .

*Demostración.* (a) Fijemos  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ . Dado  $\langle U, s \rangle \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ , tenemos que  $s \in \mathcal{O}(U)$  y  $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ . A continuación definimos

$$\gamma : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}} \quad \text{por} \quad \langle U, s \rangle \mapsto s(\mathfrak{p})$$

Veamos que esta definición no depende de los representantes. En efecto, sea  $\langle U, s \rangle = \langle U', s' \rangle$  en  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ . Luego existe un entorno abierto  $W$  de  $\mathfrak{p}$  con  $W \subseteq U \cap U'$  tal que  $s|_W = s'|_W$ . Así, como  $\mathfrak{p} \in W$ , entonces  $s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p})$ .

Por otra parte,  $\gamma$  es un homomorfismo de anillos, pues

$$\begin{aligned}\gamma(\langle U, s \rangle + \langle U', s' \rangle) &= \gamma(\langle U \cap U', s|_{U \cap U'} + s'|_{U \cap U'} \rangle) \\ &= \gamma(\langle U \cap U', (s + s')|_{U \cap U'} \rangle) \\ &= (s + s')(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}) + s'(\mathfrak{p}) \\ &= \gamma(\langle U, s \rangle) + \gamma(\langle U', s' \rangle)\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\gamma(\langle U, s \rangle \langle U', s' \rangle) &= \gamma(\langle U \cap U', s|_{U \cap U'} s'|_{U \cap U'} \rangle) \\ &= \gamma(\langle U \cap U', (ss')|_{U \cap U'} \rangle) \\ &= (ss')(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p})s'(\mathfrak{p}) \\ &= \gamma(\langle U, s \rangle)\gamma(\langle U', s' \rangle)\end{aligned}$$

Veamos que  $\gamma$  es inyectiva. Sean  $\langle U, s \rangle, \langle U, s' \rangle$  dos elementos de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  con  $\gamma(\langle U, s \rangle) = \gamma(\langle U, s' \rangle)$ , es decir  $s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p})$ . Disminuyendo  $U$  si es necesario, obtenemos elementos  $a, a', f, f' \in A$  tales que  $s = a/f$  y  $s' = a'/f'$  en  $U$ , donde  $f, f' \notin \mathfrak{p}$ . Tenemos que  $a/f = s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p}) = a'/f'$  en  $A_{\mathfrak{p}}$ , luego existe  $h \notin \mathfrak{p}$  tal que  $h(f'a - fa') = 0$  en  $A$ , es decir  $af'h = a'fh$  en  $A$ . Finalmente, para  $\mathfrak{q} \in D(ff'h) \cap U = D(f) \cap D(f') \cap D(h) \cap U$  tenemos que  $ff'h \notin \mathfrak{q}$ , luego  $s(\mathfrak{q}) = a/f = af'h/ff'h = a'fh/f'fh = a'/f' = s'(\mathfrak{q})$  en  $A_{\mathfrak{q}}$  y  $\mathfrak{p} \in D(ff'h) \cap U \subseteq U$ . Por lo tanto,  $\langle U, s \rangle = \langle U, s' \rangle$ .

Veamos que  $\gamma$  es sobreyectiva. Sea  $a/f \in A_{\mathfrak{p}}$ , luego  $f \notin \mathfrak{p}$ ; ahora definimos la aplicación  $s : D(f) \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{q} \in D(f)} A_{\mathfrak{q}}$  por  $\mathfrak{q} \mapsto a/f$ , entonces  $s \in \mathcal{O}(D(f))$  y  $\langle D(f), s \rangle \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  con  $\gamma(\langle D(f), s \rangle) = a/f$ .

(b) Sea  $f \in A$  y definimos  $\psi : A_f \rightarrow \mathcal{O}(D(f))$  por  $a/f^n \mapsto s$ , donde  $s : D(f) \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}}$  es la aplicación  $\mathfrak{p} \mapsto a/f^n \in A_{\mathfrak{p}}$ .

Mostremos primero que  $\psi$  es inyectiva. Sean  $a/f^n, b/f^m \in A_f$  tales que  $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$ , entonces para cada  $\mathfrak{p} \in D(f)$ ,  $a/f^n$  y  $b/f^m$  tienen la misma imagen en  $A_{\mathfrak{p}}$ ; por tanto existe  $h \notin \mathfrak{p}$  tal que  $h(f^m a - f^n b) = 0$  en  $A$ . Sea  $\mathfrak{a} = \text{Ann}(f^m a - f^n b)$ , luego  $h \in \mathfrak{a}$  y  $h \notin \mathfrak{p}$ , así que  $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ . Esto se tiene para todo  $\mathfrak{p} \in D(f)$ ; así que  $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \emptyset$ , lo cual implica  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$ , y por tanto  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ , es decir alguna potencia  $f^l \in \mathfrak{a}$ , esto implica que  $f^l(f^m a - f^n b) = 0$ , de donde se sigue que  $a/f^n = b/f^m$  en  $A_f$ . Luego  $\psi$  es inyectiva.

Veamos a continuación que  $\psi$  es sobreyectiva. Sea  $s \in \mathcal{O}(D(f))$ , entonces podemos cubrir  $D(f)$  con conjuntos abiertos  $V_i$ , sobre los cuales

$s$  es representada por un cociente  $a_i/g_i$ , con  $g_i \notin \mathfrak{p}$  para todo  $\mathfrak{p} \in V_i$ ; así que  $V_i \subseteq D(g_i)$ . Como los conjuntos abiertos  $D(h)$  forman una base para la topología, podemos suponer que  $V_i = D(h_i)$  para algún  $h_i$ . Luego  $D(h_i) \subseteq D(g_i)$ , de donde  $V(g_i) \subseteq V(h_i)$ . Por tanto  $h_i \in \sqrt{\langle g_i \rangle}$ . Entonces  $h_i^n \in \langle g_i \rangle$  para algún  $n$ . Luego  $h_i^n = cg_i$ , y por tanto  $a_i/g_i = ca_i/h_i^n$  en  $A_{\mathfrak{p}}$  para todo  $\mathfrak{p} \in D(h_i)$ . Así que, reemplazando  $h_i$  por  $h_i^n$  (notando que  $D(h_i) = D(h_i^n)$ ) y  $a_i$  por  $ca_i$ , podemos suponer que  $D(f)$  es cubierto por subconjuntos abiertos  $D(h_i)$ , y que  $s$  es representado por  $a_i/h_i$  en  $D(h_i)$ . Como  $D(f)$  es casi compacto, existen  $h_1, \dots, h_r$  tal que  $D(f)$  es cubierto por  $D(h_1), \dots, D(h_r)$ . En  $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ , tenemos que los elementos  $a_i h_j / h_i h_j$  y  $a_j h_i / h_i h_j \in A_{h_i h_j}$  representan a  $s$ . Por tanto, de acuerdo a la inyectividad de  $\psi$  aplicada a  $D(h_i h_j)$ , debemos tener que  $a_i h_j / h_i h_j = a_j h_i / h_i h_j$  en  $A_{h_i h_j}$ . Luego, para algún  $n$

$$(h_i h_j)^n (a_i h_j - a_j h_i) = 0$$

Tomamos  $n$  suficientemente grande para trabajar con todo par de índices  $1 \leq i, j \leq r$ . Reescribiendo tenemos

$$h_j^{n+1} (h_i^n a_i) - h_i^{n+1} (h_j^n a_j) = 0$$

Sean  $a'_i = a_i h_i^n$ ,  $h'_i = h_i^{n+1}$  para  $i = 1, \dots, r$ . Entonces  $s = a'_i / h'_i$  en  $D(h'_i) = D(h_i^{n+1})$ , y además tenemos  $a'_i h'_j = a'_j h'_i$  en  $A$  y  $D(f) = \bigcup_{i=1}^r D(h'_i)$ . Luego  $V(f) = \bigcap_{i=1}^r V(h'_i) = V(\langle h'_1, \dots, h'_r \rangle)$ , de donde se sigue que  $f \in \sqrt{\langle h'_1, \dots, h'_r \rangle}$ . Sea  $l$  un entero positivo tal que  $f^l \in \langle h'_1, \dots, h'_r \rangle$ , luego  $f^l = \sum_{i=1}^r b_i h'_i$ . A continuación hacemos  $a = \sum_{i=1}^r b_i a'_i$ , luego conseguimos

$$f^l a'_j = \sum_{i=1}^r (b_i h'_i) a'_j = \sum_{i=1}^r (b_i a'_i) h'_j = a h'_j,$$

esto es,

$$s = a'_j / h'_j = a / f^l \text{ en } D(h'_j) = D(h_j^{n+1}) = D(h_j) \text{ para cada } j = 1, \dots, r$$

Por lo tanto,  $\psi(a/f^l) = s$  en  $D(f)$ . Esto muestra que  $\psi$  es sobreyectiva y por tanto un isomorfismo.

(c) Notemos que este es un caso especial de (b). Para ello hacemos  $f = 1$  y  $D(1) = \text{Spec } A$ , luego  $\Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(\text{Spec } A) \cong A_1 \cong A$ .  $\square$

**Proposición 2.4.2.** *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a) Sea  $A$  un anillo. Entonces el espacio anillado  $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$  es un espacio localmente anillado.
- (b) Si  $\varphi : A \rightarrow B$  es un homomorfismo de anillos, entonces  $\varphi$  induce un morfismo natural de espacios localmente anillados

$$(f, f^\sharp) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}).$$

- (c) Si  $A$  y  $B$  son anillos, entonces cualquier morfismo de espacios localmente anillados de  $\text{Spec } B$  a  $\text{Spec } A$ , es inducido por un homomorfismo de anillos  $\varphi : A \rightarrow B$  como en (b).

*Demostración.* (a) Esto sigue de la primera afirmación de la proposición anterior.

(b) Definimos  $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  por  $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ . Por la proposición 1.2.6 sabemos que  $f$  es continua. Por otro lado, para  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ , tenemos un homomorfismo local de anillos locales  $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$  definido por  $a/f \mapsto \varphi(a)/\varphi(f)$ . Vamos a definir a continuación un morfismo de haces de anillos  $f^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\text{Spec } B}$ . Dado un abierto  $U \subseteq \text{Spec } A$ , definimos

$$f^\sharp(U) : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(f^{-1}(U)) \quad \text{por } s \mapsto t$$

donde  $t : f^{-1}(U) \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in f^{-1}(U)} B_{\mathfrak{p}}$  está definida por  $\mathfrak{p} \mapsto \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})))$ . Note que para  $\mathfrak{p} \in f^{-1}(U)$  tenemos  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p}) \in U$ . Luego  $s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) \in A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$ , y por tanto  $t(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))) \in B_{\mathfrak{p}}$ . Además, dado  $\mathfrak{p} \in f^{-1}(U)$ , si  $s = a/f$  en un abierto  $V \subseteq U$  que contiene a  $f(\mathfrak{p})$ , entonces  $t = \varphi(a)/\varphi(f)$  en  $f^{-1}(V)$ , donde se tiene que  $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$ . Por tanto,  $t \in \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(f^{-1}(U))$ . Además, tenemos que  $f^\sharp(U)$  es un homomorfismo de anillos. También, dados abiertos  $V \subseteq U$ ,  $s \in \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$  y  $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$ , tenemos

$$\begin{aligned} (f^\sharp(U)(s)|_{f^{-1}(V)})(\mathfrak{p}) &= f^\sharp(U)(s)(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))) \\ &= \varphi_{\mathfrak{p}}(s|_V(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))) = f^\sharp(V)(s|_V)(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

Esto muestra que  $f^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\text{Spec } B}$  es un morfismo de haces de anillos. Note que  $f_{\mathfrak{p}}^\sharp(\langle U, s \rangle) = \langle f^{-1}(U), t \rangle$ , lo cual vía los isomorfismos  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, f(\mathfrak{p})} \cong A_{f(\mathfrak{p})}$  y  $\mathcal{O}_{\text{Spec } B, \mathfrak{p}} \cong B_{\mathfrak{p}}$ , nos da el homomorfismo  $s(f(\mathfrak{p})) \mapsto t(\mathfrak{p})$ , es decir  $s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) \mapsto \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})))$ , el cual es el homomorfismo  $\varphi_{\mathfrak{p}}$ . Por tanto  $f_{\mathfrak{p}}^\sharp$  es un homomorfismo local de anillos locales.

(c) Sea  $(f, f^\sharp) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  un morfismo de espacios localmente anillados. Tomando secciones globales, tenemos un homomorfismo de anillos

$$\varphi := f^\sharp(\text{Spec } A) : A \cong \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(\text{Spec } B) \cong B$$

Por otro lado, para cada  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$  tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) & \xrightarrow{f^\sharp(\text{Spec } A)} & \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(\text{Spec } B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(\mathfrak{p})} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } A, f(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{f^\sharp_{\mathfrak{p}}} & \mathcal{O}_{\text{Spec } B, \mathfrak{p}} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Luego, como  $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$  es un homomorfismo local, se sigue que  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$ . Así, notamos que para cada  $g \in A$  tenemos que  $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$ . Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) & \xrightarrow{f^\sharp(\text{Spec } A)} & \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(\text{Spec } B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_g & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(g)) & \xrightarrow{f^\sharp(D(g))} & \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(D(\varphi(g))) & \longrightarrow & B_{\varphi(g)} \end{array}$$

de donde se sigue que  $f^\sharp(D(g))(a/g^n) = \varphi(a)/\varphi(g)^n$ .

Finalmente veamos que  $f^\sharp$  es el morfismo de haces de anillos inducido por  $\varphi$ . Sean  $U \subseteq \text{Spec } A$  abierto y  $s \in \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$ . Sea  $D(g) \subseteq U$ . Sea  $s|_{D(g)} = a/g^n$ . Luego, la imagen  $t$  de  $s$  vía el morfismo de haces de anillos inducido por  $\varphi$  satisface  $t|_{f^{-1}(D(g))} = \varphi(a)/\varphi(g)^n$  en  $\mathcal{O}_{\text{Spec } B}(f^{-1}(D(g)))$ , es decir  $t|_{D(g)} = \varphi(a)/\varphi(g)^n$  en  $f_*\mathcal{O}_{\text{Spec } B}(D(g))$ .

Por otro lado,  $f^\sharp(U)(s)|_{D(g)} = f^\sharp(D(g))(s|_{D(g)}) = f^\sharp(D(g))(a/g^n) = \varphi(a)/\varphi(g)^n$ . Luego  $f^\sharp(U)(s)|_{D(g)} = t|_{D(g)}$  para todo abierto  $D(g) \subseteq U$ . Así, como los abiertos  $D(g)$  forman una base para la topología de  $\text{Spec } A$ , concluimos que  $f^\sharp(U)(s) = t$ . Por tanto el morfismo  $(f, f^\sharp)$  de espacios localmente anillados es inducido por el homomorfismo de anillos  $\varphi$ .  $\square$

**Definición 2.4.3.** *Un esquema afín es un espacio localmente anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$  que es isomorfo (como espacio localmente anillado) al espectro de*

algún anillo. Un **esquema** es un espacio localmente anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$  tal que para cada punto, existe un entorno abierto  $U$  de manera que el espacio anillado  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  es un esquema afín. Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  es un esquema, llamaremos a  $X$  el **espacio topológico subyacente** de dicho esquema, y a  $\mathcal{O}_X$  su **haz estructural**, por abuso de notación simplemente escribiremos  $X$  en lugar de  $(X, \mathcal{O}_X)$ , en este caso escribiremos  $sp(X)$  para denotar al espacio topológico subyacente, y si no hay confusión escribiremos simplemente  $X$  para denotar tanto al esquema como a su espacio topológico subyacente. Un **morfismo** entre esquemas es un morfismo como espacios localmente anillados. Un **isomorfismo** es un morfismo que tiene un morfismo inverso.

## 2.5 La Construcción del Proj

**Definición 2.5.1.** Sea  $S$  un anillo graduado. Denotamos  $S_+ = \bigoplus_{d \geq 1} S_d$ . Definimos el conjunto  $Proj S$  como la colección de todos los ideales primos homogéneos  $\mathfrak{p}$ , tales que no contienen  $S_+$ . Si  $\mathfrak{a}$  es un ideal homogéneo de  $S$ , sea  $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Proj S : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$ . Para un elemento  $f \in S_+$ , definimos  $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in Proj S : f \notin \mathfrak{p}\}$ .

**Proposición 2.5.1.** Sea  $S$  un anillo graduado. Se cumplen

- (a)  $V(0) = Proj S$  y  $V(1) = \emptyset$ .
- (b) Si  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$  son ideales homogéneos en  $S$ ,  $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ .
- (c) Si  $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$  es una familia de ideales homogéneos de  $S$ , entonces

$$V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

*Demostración.* Son consecuencias directas de la definición. □

De la proposición anterior se tiene que  $Proj S$  admite una topología cuyos cerrados son los conjuntos  $V(\mathfrak{a})$ , con  $\mathfrak{a}$  ideal homogéneo de  $S$ .

A continuación vamos a construir de manera natural un haz de anillos  $\mathcal{O}$  sobre  $Proj S$ . Para cada  $\mathfrak{p} \in Proj S$ , consideremos el anillo  $S_{(\mathfrak{p})}$  de elementos de grado cero en el anillo localizado  $T^{-1}S$ , donde  $T$  es el sistema

multiplicativo formado por todos los elementos homogéneos de  $S$  que no pertenecen a  $\mathfrak{p}$ . Para cualquier subconjunto abierto  $U \subseteq \text{Proj } S$ , definimos  $\mathcal{O}(U)$  como el conjunto de funciones  $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})}$  tal que para cada  $\mathfrak{p} \in U$ ,  $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$  y tal que  $s$  es localmente un cociente de elementos de  $S$ , es decir para cada  $\mathfrak{p} \in U$  existe un entorno abierto  $V$  de  $\mathfrak{p}$  en  $U$  y elementos homogéneos  $a, f \in S$  del mismo grado, tal que para cada  $\mathfrak{q} \in V$ ,  $f \notin \mathfrak{q}$  y  $s(\mathfrak{q}) = a/f$  en  $S_{(\mathfrak{q})}$ . Tomando las restricciones naturales como morfismos de restricción, obtenemos que  $\mathcal{O}$  es un haz de anillos.

**Definición 2.5.2.** *Si  $S$  es un anillo graduado, definimos  $(\text{Proj } S, \mathcal{O})$  como el espacio topológico junto con el haz de anillos definido anteriormente.*

**Lema 2.5.2.** *Sea  $S$  un anillo graduado y  $f \in S_+$  un elemento homogéneo. Se cumplen:*

- (a) *Si  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{p}$  son ideales homogéneos de  $S$ , tal que  $\mathfrak{p}$  es primo,  $f \notin \mathfrak{p}$  y  $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$ . Entonces  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ .*
- (b) *Para cada ideal radical  $\mathfrak{a}$  de  $S_{(f)}$ , existe un ideal radical homogéneo  $\mathfrak{b}$  de  $S$  tal que  $\mathfrak{b}S_f \cap S_{(f)} = \mathfrak{a}$ .*

*Demostración.* (a) Sea  $a \in \mathfrak{a}$  un elemento homogéneo tal que  $\partial(a) = k$ , y sea  $d = \partial(f)$ . Entonces  $\frac{a^d}{f^k} \in \mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$ , luego  $\frac{a^d}{f^k} \in \mathfrak{p}S_f$  y puesto que este ideal es primo,  $\frac{a}{1} \in \mathfrak{p}S_f$ . Luego  $a \in \mathfrak{p}S_f \cap S = \mathfrak{p}$ . Por tanto  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ .

(b) Sea  $T$  el conjunto de elementos homogéneos  $a \in S$  tal que  $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{a}$  para algún  $k \geq 0$ . Definimos el ideal radical  $\mathfrak{b} = \sqrt{\langle T \rangle} \subseteq S$ . Afirmamos que  $\mathfrak{b}S_f \cap S_{(f)} = \mathfrak{a}$ . En efecto, sea  $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{a} \subseteq S_{(f)}$  un elemento arbitrario, entonces  $a$  es homogéneo y por definición  $a \in T \subseteq \mathfrak{b}$ , luego  $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{b}S_f$  y se sigue que  $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{b}S_f \cap S_{(f)}$ . Recíprocamente, si  $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{b}S_f \cap S_{(f)}$  tenemos  $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{b}S_f$ , así  $\frac{a}{f^k} = \frac{b}{f^j}$ , con  $b \in \mathfrak{b}$ , y de la definición de  $\mathfrak{b}$  tenemos para algún  $m \geq 1$  que  $b^m = \sum_i \lambda_i a_i$  donde  $\lambda_i \in S$  y  $a_i \in T$ , luego existen enteros  $k_i \geq 0$  tal que  $\frac{a_i}{f^{k_i}} \in \mathfrak{a}$ . Entonces  $(\frac{a}{f^k})^m = \frac{b^m}{f^{jm}} = \frac{\sum_i \lambda_i a_i}{f^{jm}} = \sum_i \frac{\lambda_i}{f^{jm-k_i}} \frac{a_i}{f^{k_i}} \in \mathfrak{a}$ , por tanto  $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{a}$ .  $\square$

**Proposición 2.5.3.** *Sea  $S$  un anillo graduado. Se cumplen:*

- (a) *Para cualquier  $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ , el tallo  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  es isomorfo al anillo local  $S_{(\mathfrak{p})}$ .*
- (b) *Para cualquier elemento homogéneo  $f \in S_+$ , tenemos un isomorfismo de espacios localmente anillados,  $(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \cong \text{Spec}(S_{(f)})$ .*

(c)  $\text{Proj } S$  es un esquema.

*Demostración.* (a) Dado  $\mathfrak{p} \in X$ , definimos la aplicación de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  en  $S_{(\mathfrak{p})}$ , dado por  $\langle U, s \rangle \mapsto s(\mathfrak{p})$ . Probar que esta aplicación es un isomorfismo, es similar a lo que ya hemos probado en la prop 2.4.1(a).

(b) Supongamos que  $f \in S_+$  es un elemento homogéneo de grado  $d$ . Definimos la aplicación  $\varphi : D_+(f) \rightarrow \text{Spec } S_{(f)}$  dada por  $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$ . Esta aplicación resulta ser un homeomorfismo de  $D_+(f)$  sobre  $\text{Spec } S_{(f)}$ . En efecto, la inyectividad de  $\varphi$  es inmediato del ítem (a) del lema anterior. Para la sobreyectividad, tomemos  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } S_{(f)}$ . Como  $\mathfrak{q}$  es ideal radical de  $S_{(f)}$ , por el ítem (b) del lema anterior, existe un ideal radical homogéneo  $\mathfrak{p}$  de  $S$  tal que  $\mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} = \mathfrak{q}$  donde  $\mathfrak{p} = \sqrt{\langle T \rangle} \subseteq S$  y  $T$  es el conjunto de elementos homogéneos  $a \in S$  tal que  $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{q}$  para algún  $k \geq 0$ . Afirmamos que el ideal  $\mathfrak{p}$  es primo, en efecto, dado dos elementos homogéneos  $b, c \in S$  con  $\partial(b) = d_1$  y  $\partial(c) = d_2$  tal que  $bc \in \mathfrak{p}$ . Entonces por la definición de  $\mathfrak{p}$  existe  $n \geq 1$  tal que  $(bc)^n = \sum_i \lambda_i a_i$  donde  $\lambda_i \in S$ ,  $a_i \in T$  y  $\frac{a_i}{f^{k_i}} \in \mathfrak{q}$  para algún  $k_i \geq 0$ . Luego  $(\frac{b^d}{f^{d_1}} \frac{c^d}{f^{d_2}})^n = \frac{(bc)^{dn}}{f^{(d_1+d_2)n}} = \frac{(\sum_i \lambda_i a_i)^d}{f^{(d_1+d_2)n}} = \frac{1}{f^{(d_1+d_2)n}} (\sum_i \frac{f^{k_i} \lambda_i}{1} \frac{a_i}{f^{k_i}})^d \in \mathfrak{q}$  y como  $\mathfrak{q}$  es primo tenemos que  $\frac{b^d}{f^{d_1}} \in \mathfrak{q}$  o  $\frac{c^d}{f^{d_2}} \in \mathfrak{q}$ , luego  $b^d \in T$  o  $c^d \in T$  y por tanto  $b \in \mathfrak{p}$  o  $c \in \mathfrak{p}$ . Para verificar que  $S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$  y  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ , basta ver que  $f \notin \mathfrak{p}$  ya que  $f \in S_+$ , en efecto, si  $f \in \mathfrak{p}$ , entonces para algún  $n \geq 1$ ,  $f^n = \sum_i \lambda_i a_i$  donde  $\lambda_i \in S$  y  $a_i \in T$  con  $\frac{a_i}{f^{k_i}} \in \mathfrak{q}$  para todo  $i$ , luego  $\frac{1}{1} = \frac{f^n}{f^n} = \sum_i \frac{f^{k_i} \lambda_i}{1} \frac{a_i}{f^{k_i}} \in \mathfrak{q}$ , lo cual es imposible puesto que  $\mathfrak{q}$  es primo. De esta manera concluimos que  $\varphi$  es sobreyectiva y luego biyectiva. Mostremos ahora, que  $\varphi$  es aplicación cerrada y continua. Dado un ideal radical homogéneo  $\mathfrak{a}$  de  $S$ , afirmamos que  $\varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f)) = V(\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)})$ , en efecto, dado  $\mathfrak{q} \in \varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f))$  entonces  $\mathfrak{q} = \varphi(\mathfrak{p})$  para algún  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f)$ , luego la condición  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$  implica que  $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} = \varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$  por tanto  $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)})$ . Recíprocamente dado  $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)})$ , entonces  $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{q}$ , luego como  $\varphi$  es sobreyectiva, existe  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$  tal que  $\varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ , entonces  $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$ . Por el ítem (a) del lema anterior tenemos que  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ , o sea  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$  y como  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ , tenemos que  $\mathfrak{q} = \varphi(\mathfrak{p}) \in \varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f))$ . La igualdad de la afirmación anterior nos dice que la aplicación  $\varphi$  es cerrada. Por otro lado, si  $I$  es un ideal radical de  $S_{(f)}$ , por el lema anterior, existe un ideal radical homogéneo  $\mathfrak{a}$  de  $S$  tal que  $\mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} = I$ . Reemplazando esta igualdad en la igualdad de la afirmación anterior, tenemos que  $\varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D_+(f)) = V(I)$ , luego

$\varphi^{-1}(V(I)) = V(\mathbf{a}) \cap D_+(f)$  que es un subconjunto cerrado en  $D_+(f)$ , por tanto  $\varphi$  es continua.

A continuación definiremos el morfismo  $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}} \rightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_{\text{Proj } S}|_{D_+(f)})$ . Para cada  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$  el homomorfismo  $\psi_{\mathfrak{p}} : (\text{Spec } S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})} \rightarrow S_{(\mathfrak{p})}$  dado por  $\frac{a/f^r}{b/f^s} \mapsto \frac{af^s}{bf^r}$  es un isomorfismo, con inverso  $\psi_{\mathfrak{p}}^{-1} : S_{(\mathfrak{p})} \rightarrow (\text{Spec } S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$  dado por  $\frac{a}{b} \mapsto \frac{ab^{d-1}/f^e}{b^d/f^e}$  donde  $d = \partial(f)$  y  $e = \partial(a) = \partial(b)$ . Dado un subconjunto abierto  $U \subseteq \text{Spec } S_{(f)}$ , definimos  $\varphi^\sharp(U) : \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(\varphi^{-1}(U))$  como  $\varphi^\sharp(U)(s)(\mathfrak{p}) = \psi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi(\mathfrak{p})))$  para todo  $\mathfrak{p} \in \varphi^{-1}(U)$  y para todo  $s \in \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}}(U)$ . Es inmediato de la definición, probar que  $\varphi^\sharp(U)$  es un isomorfismo de anillos, por tanto  $\varphi^\sharp$  es un isomorfismo. Finalmente  $\varphi_{\mathfrak{p}}^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f), \varphi(\mathfrak{p})}} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Proj } S, \mathfrak{p}}$  es un homomorfismo local pues tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f), \varphi(\mathfrak{p})}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}^\sharp} & \mathcal{O}_{\text{Proj } S, \mathfrak{p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{p}}} & S_{(\mathfrak{p})} \end{array}$$

donde las flechas verticales son los isomorfismos naturales y  $\psi_{\mathfrak{p}}$  es homomorfismo local.

(c). Se sigue inmediatamente, pues los subconjuntos  $D_+(f)$ , donde  $f \in S_+$ , son abiertos que cubren  $\text{Proj } S$  y  $D_+(f) \cong \text{Spec } S_{(f)}$ .  $\square$

**Definición 2.5.3.** *Sea  $A$  un anillo. Definimos el  $n$ -espacio proyectivo sobre  $A$  como el esquema  $\mathbf{P}_A^n = \text{Proj } A[x_0, \dots, x_n]$ .*

**Definición 2.5.4.** *Sea  $S$  un esquema. Un **esquema sobre  $S$**  (o un  $S$ -esquema) es un esquema  $X$ , junto con un morfismo de esquemas  $\varphi : X \rightarrow S$ . Se dice que  $S$  es el **esquema base** y el morfismo  $\varphi$  es el **morfismo estructural** del  $S$ -esquema  $X$ . Si  $X, Y$  son  $S$ -esquemas, un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  es un **morfismo de  $S$ -esquemas**, si el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

es conmutativo, donde las flechas oblicuas son los morfismos estructurales. Definimos de manera natural la composición de morfismos de  $S$ -esquemas.

Así, los  $S$ -esquemas juntos con los morfismos de  $S$ -esquemas forman una categoría que denotamos por  $\mathfrak{Sch}(S)$ . Si  $A$  es un anillo, entonces por abuso de notación escribiremos  $\mathfrak{Sch}(A)$  para denotar a la categoría de esquemas sobre  $\text{Spec } A$ .

## 2.6 Propiedades de esquemas

**Definición 2.6.1.** Un esquema  $X$  es llamado **localmente noetheriano** si es cubierto por subconjuntos abiertos afines  $\text{Spec}(A_i)$ , donde cada  $A_i$  es un anillo noetheriano.  $X$  es **noetheriano** si es localmente noetheriano y casi compacto.

**Observación 2.6.1.** La propiedad noetheriana es una propiedad local, es decir: Un esquema  $X$  es noetheriano si y sólo si para todo subconjunto abierto afín  $U = \text{Spec } A$ ,  $A$  es un anillo noetheriano. (ver [1])

**Definición 2.6.2.** Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  es **casi compacto**, si existe un cubrimiento de  $Y$  por abiertos afines  $V_i$  tal que  $f^{-1}(V_i)$  es casi compacto para todo  $i$ .

**Observación 2.6.2.** La propiedad de casi compacidad de un morfismo es una propiedad local, es decir: Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  es casi compacto si y sólo si para todo subconjunto abierto afín  $V \subseteq Y$ ,  $f^{-1}(V)$  es casi compacto.

**Definición 2.6.3.** Un **subesquema abierto** de un esquema  $X$ , es un esquema  $U$ , cuyo espacio topológico es un subconjunto abierto de  $X$ , y cuya estructura de haz  $\mathcal{O}_U$  es isomorfo a la restricción  $\mathcal{O}_X|_U$  de la estructura de haz de  $X$ . Una **inmersión abierta** es un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  que induce un isomorfismo de  $X$  sobre un subesquema abierto de  $Y$ , es decir  $f$  se factoriza en  $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} Y$  donde  $g$  es un isomorfismo,  $Z$  es un subesquema abierto de  $Y$  y  $j$  es el morfismo inclusión.

Un **subesquema cerrado** de un esquema  $X$ , es un esquema  $Y$  junto con el morfismo inclusión  $i : Y \rightarrow X$ , tal que  $\text{sp}(Y)$  es un subconjunto cerrado de  $\text{sp}(X)$  y el morfismo de haces  $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)$  es sobreyectivo. Una **inmersión cerrada** es un morfismo  $f : Y \rightarrow X$  tal que  $f$  es un homeomorfismo de  $\text{sp}(Y)$  sobre un subconjunto cerrado de  $\text{sp}(X)$ , y el morfismo de haces  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*(\mathcal{O}_Y)$  es sobreyectivo.

**Observación 2.6.3.** Sea  $Y$  un subesquema cerrado de  $X$ . Como  $Y$  es un subconjunto cerrado de  $X$ , sabemos que

$$(i_*(\mathcal{O}_Y))_p \cong \begin{cases} \mathcal{O}_{Y,p} & \text{si } p \in Y \\ 0 & \text{si } p \in X \setminus Y \end{cases}$$

donde para  $p \in Y$ , el isomorfismo es dado por  $\langle U, s \rangle \mapsto \langle U \cap Y, s \rangle$ . Luego, decir que  $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)$  es sobreyectiva es equivalente a decir que los homomorfismos inducidos en los tallos  $i_p^\# : \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow (i_*(\mathcal{O}_Y))_p \cong \mathcal{O}_{Y,p}$  son sobreyectivos, para todo  $p \in Y$ .

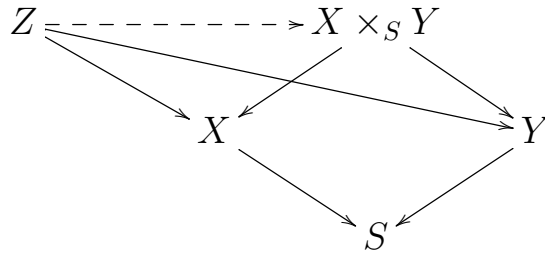
**Ejemplo 2.6.1.** Sea  $A$  un anillo y sean  $\mathfrak{a}$  un ideal de  $A$ ,  $X = \text{Spec } A/\mathfrak{a}$ ,  $Y = \text{Spec } A$ , y consideremos el homomorfismo de anillos  $\varphi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ . Entonces el morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  inducido por  $\varphi$ , es una inmersión cerrada. En efecto,  $f$  es un homeomorfismo de  $X$  sobre el subconjunto cerrado  $V(\mathfrak{a})$  de  $Y$ . Por otro lado, si  $\mathfrak{p} \in X$  y  $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$ , entonces  $\varphi$  induce el homomorfismo local  $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{q}} \rightarrow (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}$  dado por  $\frac{a}{\alpha} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(\alpha)}$ , que es sobreyectivo ya que  $\varphi$  es sobreyectiva. Además, el morfismo  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$  está definido como  $f^\#(U)(s)(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(f(\mathfrak{p})))$  para todo abierto  $U$  de  $X$ ,  $s \in \mathcal{O}_Y(U)$  y  $\mathfrak{p} \in X$ . Luego, para  $\mathfrak{p} \in X$  y  $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} & \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}^\#} & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A_{\mathfrak{q}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} & (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

es conmutativo, donde las flechas verticales son los isomorfismos naturales. Luego  $f_{\mathfrak{p}}^\#$  es sobreyectiva para todo  $\mathfrak{p} \in X$ , y se sigue que  $f$  es una inmersión cerrada.

**Definición 2.6.4.** Sea  $S$  un esquema y sean  $X, Y$  esquemas sobre  $S$ , es decir, esquemas con morfismos a  $S$ . Definimos el **producto fibra** de  $X$  e  $Y$  sobre  $S$ , denotado por  $X \times_S Y$ , como un esquema, junto con morfismos  $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$  y  $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$  que conmutan con los morfismos  $X \rightarrow S$  y  $Y \rightarrow S$ , tal que dado cualquier esquema  $Z$  sobre  $S$ , y dados morfismos  $f : Z \rightarrow X$  y  $g : Z \rightarrow Y$  que hacen un diagrama conmutativo con los morfismos  $X \rightarrow S$  y  $Y \rightarrow S$ , entonces existe un único morfismo  $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$  tal que  $f = p_1 \circ \theta$  y  $g = p_2 \circ \theta$ . Los morfismos  $p_1$  y  $p_2$  son

llamados **morfismos proyección** del producto fibra sobre sus factores.

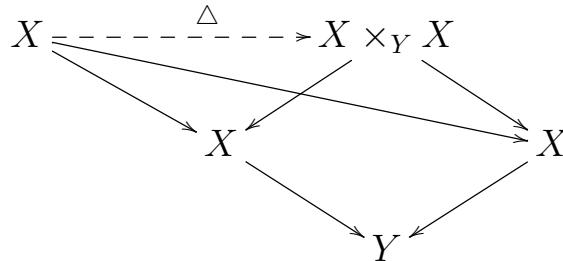


Dados  $X, Y$  esquemas arbitrarios, definimos el **producto** de  $X$  e  $Y$ , denotado por  $X \times Y$  como el esquema  $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} Y$ .

**Teorema 2.6.2.** Para cualquier par de esquemas  $X$  e  $Y$  sobre  $S$ , existe el producto fibra  $X \times_S Y$  y es único salvo isomorfismo.

*Demostración.* Ver [1]. □

**Definición 2.6.5.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo entre esquemas. El **morfismo diagonal** es el único morfismo  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  cuya composición con las proyecciones  $p_1, p_2 : X \times_Y X \rightarrow X$  es la aplicación identidad  $\text{id}_X : X \rightarrow X$ .



Decimos que el morfismo  $f$  es **separado** si el morfismo diagonal  $\Delta$  es una inmersión cerrada, en este caso también decimos que  $X$  es **separado sobre  $Y$** . Un esquema  $X$  es separado si es separado sobre  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ .

**Observación 2.6.4.** Toda inmersión cerrada es separada (ver [1]).

**Definición 2.6.6.** Sea  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  un morfismo de esquemas. Sea  $U \subseteq Y$  un subconjunto abierto. Vamos a definir un morfismo de esquemas  $(f|_{f^{-1}(U)}, (f|_{f^{-1}(U)})^\#) : (f^{-1}(U), \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}) \rightarrow (U, \mathcal{O}_Y|_U)$ . Consideramos la función continua  $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$  y definimos el morfismo de haces de anillos  $(f|_{f^{-1}(U)})^\# : \mathcal{O}_Y|_U \rightarrow (f|_{f^{-1}(U)})_*(\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}) = (f_*(\mathcal{O}_X))|_U$  como  $(f|_{f^{-1}(U)})^\#(V) = f^\#(V)$ , para cada abierto  $V \subseteq U$ ; es decir  $(f|_{f^{-1}(U)})^\# = f^\#|_U$ . Así tenemos que  $(f|_{f^{-1}(U)})^\#_p = f^\#_p$ , para todo

$p \in f^{-1}(U)$ , de donde se sigue que  $(f|_{f^{-1}(U)}, (f|_{f^{-1}(U)})^\sharp)$  es un morfismo de esquemas. Decimos que este morfismo es obtenido restringiendo el morfismo  $(f, f^\sharp)$ .

**Observación 2.6.5.** Si  $Y$  es un subesquema cerrado de  $X$  y  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$ , entonces  $U \cap Y$  es un subesquema cerrado de  $U$ .

**Definición 2.6.7.** Sean  $X$  un esquema y  $U \subseteq X$  un subconjunto abierto. Vamos a definir un morfismo de esquemas  $(i, i^\sharp) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ . Consideramos la función continua  $i : U \rightarrow X$  dada por la inclusión y definimos el morfismo de haces de anillos  $i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_X|_U)$  como  $i^\sharp(W) = \rho_{W \cup U \cap W}$ , para cada abierto  $W \subseteq U$ . Así tenemos que  $i_p^\sharp = \text{id}_{\mathcal{O}_{X,p}}$ , para todo  $p \in U$ , de donde se sigue que  $(i, i^\sharp)$  es un morfismo de esquemas. Este morfismo es llamado **morfismo inclusión**.

Dados un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  y  $U \subseteq X$  un subconjunto abierto. La **restricción** de  $f$  a  $U$ , denotada por  $f|_U$ , es el morfismo  $f \circ i$ , donde  $i : U \rightarrow X$  es el morfismo inclusión.

**Proposición 2.6.3.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas y  $U \subseteq Y$  un subconjunto abierto tal que  $f(X) \subseteq U$ . Entonces existe un único morfismo de esquemas  $g : X \rightarrow U$  tal que  $i \circ g = f$ , donde  $i : U \rightarrow Y$  es el morfismo inclusión.

*Demostración.* Como  $f(X) \subseteq U$ , podemos definir la función continua  $g : X \rightarrow U$  dada por  $g(p) = f(p)$ , para todo  $p \in X$ . Definimos el morfismo de haces de anillos  $g^\sharp : \mathcal{O}_Y|_U \rightarrow g_*\mathcal{O}_X$  como  $g^\sharp(V) = f^\sharp(V)$ , para cada abierto  $V \subseteq U$ . Así tenemos que  $g_p^\sharp = f_p^\sharp$ , para todo  $p \in X$ , de donde se sigue que  $(g, g^\sharp)$  es un morfismo de esquemas. Como funciones continuas, tenemos que  $i \circ g = f$ . A continuación, veamos que  $(i \circ g)^\sharp = f^\sharp$ . En efecto, dados  $V \subseteq Y$  un subconjunto abierto y  $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ , tenemos

$$\begin{aligned} g^\sharp(i^{-1}(V))(i^\sharp(V)(s)) &= g^\sharp(U \cap V)(s|_{U \cap V}) = f^\sharp(U \cap V)(s|_{U \cap V}) = \\ &= f^\sharp(V)(s)|_{U \cap V} = f^\sharp(V)(s)|_{f^{-1}(U \cap V)} = f^\sharp(V)(s)|_{f^{-1}(V)} = f^\sharp(V)(s) \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que tenemos otro morfismo de esquemas  $h : X \rightarrow U$  tal que  $i \circ h = f$ . Como funciones continuas, tenemos que  $h = g$ . Por otro lado, para cada abierto  $V \subseteq Y$  y  $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ , tenemos  $h^\sharp(U \cap V)(s|_{U \cap V}) = f^\sharp(V)(s) = g^\sharp(U \cap V)(s|_{U \cap V})$ . En particular, si  $V \subseteq U$  tenemos  $h^\sharp(V)(s) = g^\sharp(V)(s)$ . Se sigue que  $(h, h^\sharp) = (g, g^\sharp)$ .  $\square$

**Proposición 2.6.4.** (Pegado de morfismos). Sean  $X$  e  $Y$  esquemas y sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Consideremos morfismos de esquemas  $\varphi_i : U_i \rightarrow Y$  tal que  $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$ , para todo  $i, j \in I$ . Entonces existe  $\varphi : X \rightarrow Y$  morfismo de esquemas tal que  $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ , para todo  $i \in I$ .

*Demostración.* Ver [1]. □

**Proposición 2.6.5.** Sean  $X$  un esquema sobre  $S$  y  $p_1, p_2 : X \times_S X \rightarrow X$  las proyecciones. Sean  $U, V$  subconjuntos abiertos de  $X$ . Consideremos  $U, V$  esquemas sobre  $S$ , restringiendo el morfismo estructural de  $X$ . Entonces  $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) = U \times_S V$ .

*Demostración.* Sean  $f : X \rightarrow S$  el morfismo estructural y  $W = p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ . Sean  $k_1 : W \rightarrow p_1^{-1}(U)$  y  $k_2 : W \rightarrow p_2^{-1}(V)$  los morfismos inclusión. Definimos  $p_U : W \rightarrow U$  y  $p_V : W \rightarrow V$  por  $p_U = p_1|_{p_1^{-1}(U)} \circ k_1$  y  $p_V = p_2|_{p_2^{-1}(V)} \circ k_2$ . Sean  $\iota : U \hookrightarrow X$ ,  $j : V \hookrightarrow X$ ,  $k : W \hookrightarrow X \times_S X$  los morfismos de inclusión. Es fácil ver que  $p_1 \circ k = \iota \circ p_U$  y  $p_2 \circ k = j \circ p_V$ . Entonces la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times_S X & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 X & & X \\
 f \searrow & & \swarrow f \\
 & S &
 \end{array}$$

implica la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc}
 & W & \\
 p_U \swarrow & & \searrow p_V \\
 U & & V \\
 f|_U \searrow & & \swarrow f|_V \\
 & S &
 \end{array}$$

Sea  $Z$  un esquema sobre  $S$  y sean  $g : Z \rightarrow U$  y  $h : Z \rightarrow V$  morfismos tal



$B$ . Veamos que  $\rho_{XU}^*|_{U \cap V} = \rho_{XV}^*|_{U \cap V}$ , para todo par de abiertos afines  $U = \text{Spec } B$ ,  $V = \text{Spec } C$ . En efecto, basta mostrar que  $(\rho_{XU}^*|_{U \cap V})|_W = (\rho_{XV}^*|_{U \cap V})|_W$ , para todo abierto afín  $W = \text{Spec } D \subseteq U \cap V$ , es decir basta mostrar que  $\rho_{XU}^*|_W = \rho_{XV}^*|_W$ , para todo abierto afín  $W = \text{Spec } D \subseteq U \cap V$ . Sea  $i : \text{Spec } D \hookrightarrow \text{Spec } B$  el morfismo inclusión. Luego, tenemos que  $i^\sharp(\text{Spec } B) = \rho_{UW}$ . Por otro lado, como  $i$  es un morfismo entre esquemas afines, entonces por la proposición 2.4.2(c) tenemos que  $i^\sharp(\text{Spec } B)^* = i$ , de donde se sigue que  $i = \rho_{UW}^*$ . Entonces  $\rho_{XU}^*|_W = \rho_{XU}^* \circ i = \rho_{XU}^* \circ \rho_{UW}^* = (\rho_{UW} \circ \rho_{XU})^* = \rho_{XW}^*$ . Análogamente tenemos que  $\rho_{XV}^*|_W = \rho_{XW}^*$ , y por tanto  $\rho_{XU}^*|_W = \rho_{XV}^*|_W$ . Así tenemos que  $\rho_{XU}^*|_{U \cap V} = \rho_{XV}^*|_{U \cap V}$ , para todo par de abiertos afines  $U = \text{Spec } B$ ,  $V = \text{Spec } C$ . Entonces, podemos pegar los morfismos  $\rho_{XU}^* : U \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$ , y así obtenemos un morfismo  $H : X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$  tal que  $H|_U = \rho_{XU}^*$ , para todo abierto afín  $U \subseteq X$ . Sea  $\beta : \text{Hom}_{\text{ring}}(A, \mathcal{O}_X(X)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{sch}}(X, \text{Spec } A)$  definida por  $\beta(g) = g^* \circ H$ . Veamos que  $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{sch}}(X, \text{Spec } A)}$  y  $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{ring}}(A, \mathcal{O}_X(X))}$ . Sea  $f : X \rightarrow \text{Spec } A$  un morfismo de esquemas. Dado un abierto afín  $U = \text{Spec } B \subseteq X$ , tenemos que  $(f^\sharp(\text{Spec } A)^* \circ H)|_U = f^\sharp(\text{Spec } A)^* \circ H|_U = f^\sharp(\text{Spec } A)^* \circ \rho_{XU}^* = (\rho_{XU} \circ f^\sharp(\text{Spec } A))^*$ .

Por otro lado  $f|_U : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es un morfismo de esquemas afines. Entonces  $f|_U = (f|_U)^\sharp(\text{Spec } A)^* = (f \circ j)^\sharp(\text{Spec } A)^* = (j^\sharp(X) \circ f^\sharp(\text{Spec } A))^* = (\rho_{XU} \circ f^\sharp(\text{Spec } A))^*$  donde  $j : U \hookrightarrow X$  es la inclusión.

Por tanto  $(f^\sharp(\text{Spec } A)^* \circ H)|_U = f|_U$  para todo abierto afín  $U = \text{Spec } B \subseteq X$ , de donde se sigue que  $f^\sharp(\text{Spec } A)^* \circ H = f$ . Luego  $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{sch}}(X, \text{Spec } A)}$ . Ahora, consideremos un homomorfismo de anillos  $g : A \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ .

Tenemos que

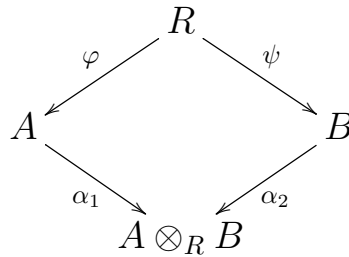
$$\begin{aligned} \alpha(\beta(g)) &= \alpha(g^* \circ H) = (g^* \circ H)^\sharp(\text{Spec } A) = \\ &H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)) \circ (g^*)^\sharp(\text{Spec } A) = H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)) \circ g \end{aligned}$$

Vamos a mostrar que  $H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)) = \text{id}_{\mathcal{O}_X(X)}$ . Haciendo  $A = \mathcal{O}_X(X)$  y  $f = H$  en la igualdad que ya demostramos anteriormente:  $f^\sharp(\text{Spec } A)^* \circ H = f$ , tenemos que  $H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X))^* \circ H = H$ . Luego, dado un abierto afín  $U = \text{Spec } B \subseteq X$ , tenemos que  $H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X))^* \circ H|_U = H|_U$ . Entonces  $H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X))^* \circ \rho_{XU}^* = \rho_{XU}^*$ , de donde obtenemos que  $(\rho_{XU} \circ H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)))^* = \rho_{XU}^*$ . Por tanto  $\rho_{XU} \circ H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)) = \rho_{XU}$ , de donde se sigue que  $H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X))(s)|_U = s|_U$  para todo  $s \in \mathcal{O}_X(X)$  y para todo abierto afín  $U = \text{Spec } B \subseteq X$ . Entonces  $H^\sharp(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)) =$

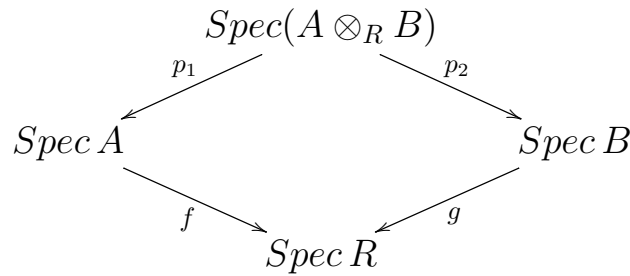
$id_{\mathcal{O}_X(X)}$ , y se sigue que  $\alpha \circ \beta = id_{Hom_{\mathfrak{ring}}(A, \mathcal{O}_X(X))}$ . Por tanto  $\alpha$  es biyectiva.  $\square$

**Proposición 2.6.7.** Sean  $X = Spec A$ ,  $Y = Spec B$  esquemas afines sobre un esquema afín  $S = Spec R$ . Entonces  $Spec(A \otimes_R B) = X \times_S Y$ .

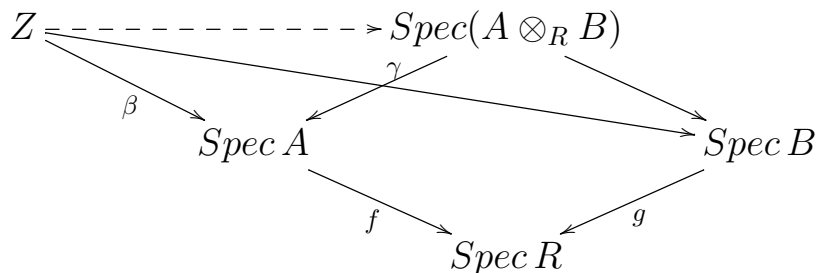
*Demostración.* Sean  $f : Spec A \rightarrow Spec R$  y  $g : Spec B \rightarrow Spec R$  los morfismos estructurales de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Sean  $\varphi = f^\sharp(Spec R)$  y  $\psi = g^\sharp(Spec R)$  los homomorfismos de anillos que inducen  $f$  y  $g$  respectivamente. Sean  $\alpha_1 : A \rightarrow A \otimes_R B$  y  $\alpha_2 : B \rightarrow A \otimes_R B$  los homomorfismos de anillos definidos por  $\alpha_1(a) = a \otimes 1$  y  $\alpha_2(b) = 1 \otimes b$ . Definimos  $p_1 = \alpha_1^* : Spec(A \otimes_R B) \rightarrow Spec A$  y  $p_2 = \alpha_2^* : Spec(A \otimes_R B) \rightarrow Spec B$ . La conmutatividad del diagrama



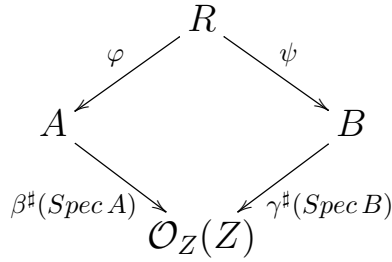
implica la conmutatividad de



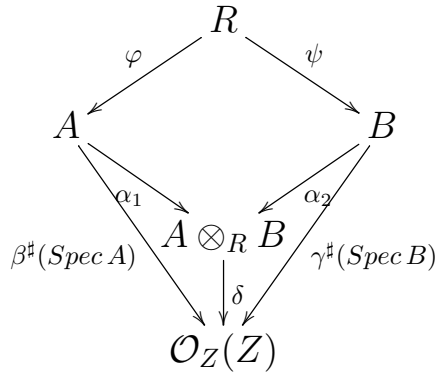
Sea  $Z$  un esquema sobre  $Spec R$  y sean  $\beta : Z \rightarrow Spec A$  y  $\gamma : Z \rightarrow Spec B$  morfismos tal que  $f \circ \beta = g \circ \gamma$



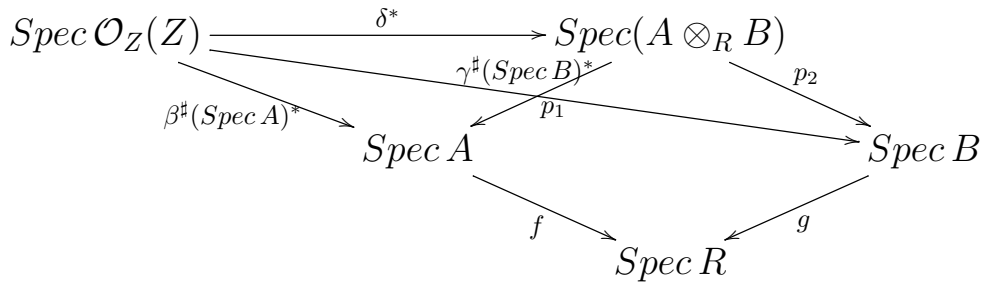
Tomando secciones globales, obtenemos el diagrama conmutativo



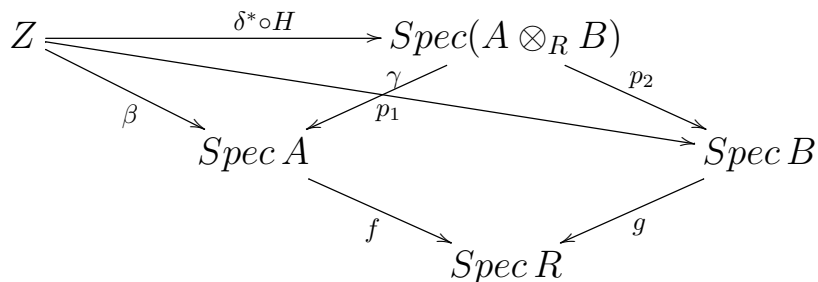
Luego, considerando  $\mathcal{O}_Z(Z)$  como una  $R$ -álgebra vía el homomorfismo de anillos  $\beta^\#(\text{Spec } A) \circ \varphi = \gamma^\#(\text{Spec } B) \circ \psi : R \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ , podemos definir el homomorfismo de  $R$ -álgebras  $\delta : A \otimes_R B \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$  dado por  $\delta(a \otimes b) = \beta^\#(\text{Spec } A)(a)\gamma^\#(\text{Spec } B)(b)$ . Así tenemos el diagrama conmutativo



de donde obtenemos el siguiente diagrama conmutativo



Sea  $H : Z \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_Z(Z)$  el morfismo natural construido en la proposición anterior. Como  $\beta^\#(\text{Spec } A)^* \circ H = \beta$  y  $\gamma^\#(\text{Spec } B)^* \circ H = \gamma$ , entonces obtenemos el diagrama conmutativo



Finalmente, teniendo en cuenta la proposición anterior, vamos a mostrar que el homomorfismo de anillos  $\delta : A \otimes_R B \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$  que hace conmutar este diagrama, es único. Sea  $\delta : A \otimes_R B \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$  que satisface dicha propiedad. Entonces  $\alpha_1^* \circ \delta^* \circ H = p_1 \circ \delta^* \circ H = \beta = \beta^\#(\text{Spec } A)^* \circ H$ , es decir  $(\delta \circ \alpha_1)^* \circ H = \beta^\#(\text{Spec } A)^* \circ H$ . Por tanto  $\delta \circ \alpha_1 = \beta^\#(\text{Spec } A)$ . Análogamente tenemos que  $\delta \circ \alpha_2 = \gamma^\#(\text{Spec } B)$ , y por tanto  $\delta(a \otimes b) = \beta^\#(\text{Spec } A)(a)\gamma^\#(\text{Spec } B)(b)$ . Concluimos que  $\text{Spec}(A \otimes_R B) = X \times_S Y$ .  $\square$

## 2.7 Haces de módulos

**Definición 2.7.1.** Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado. Un  $\mathcal{O}_X$ -**módulo** o **haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre  $X$**  es un haz de grupos abelianos  $\mathcal{F}$  en  $X$ , tal que para cada subconjunto abierto  $U \subseteq X$ , el grupo  $\mathcal{F}(U)$  es un  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo, y para cada inclusión de conjuntos abiertos  $V \subseteq U$ , el homomorfismo restricción  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  es compatible con las estructuras de módulos vía el homomorfismo de anillos  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ ; es decir el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Más precisamente, dados  $a \in \mathcal{O}_X(U)$  y  $s \in \mathcal{F}(U)$ , entonces se tiene  $a|_V \cdot s|_V = (a \cdot s)|_V$ . Un **morfismo**  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  de haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos es un morfismo de haces tal que para cada subconjunto abierto  $U \subseteq X$ , la aplicación  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  es un homomorfismo de  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos.

Notemos que el **núcleo** e **imagen** de un morfismo de  $\mathcal{O}_X$  módulos es también un  $\mathcal{O}_X$ -módulo. Si  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son dos  $\mathcal{O}_X$ -módulos, denotemos al **grupo de morfismos** de  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{G}$  por  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  o también  $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  si no hay confusión. Una sucesión de  $\mathcal{O}_X$ -módulos y morfismos es **exacta** si es exacta como una sucesión de haces de grupos abelianos. Si  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$  y si  $\mathcal{F}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo, entonces  $\mathcal{F}|_U$  es un  $\mathcal{O}_X|_U$ -módulo. Si  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son dos  $\mathcal{O}_X$ -módulos, el prehaz

$$U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

es un haz, el cual es llamado **haz Hom** y denotado por  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . Este haz también es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo. También definimos el **haz producto**

**tensorial**  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  de dos  $\mathcal{O}_X$ -módulos como el haz asociado al prehaz  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ , y por brevedad escribiremos a este haz como  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ . Si  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  es una familia de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, la **suma directa**  $\mathcal{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$  es el haz asociado al prehaz  $U \mapsto \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ , el cual es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo. Un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{F}$  es **libre** si es isomorfo a una suma directa de copias de  $\mathcal{O}_X$ . Es **localmente libre** si  $X$  puede ser cubierto por conjuntos abiertos  $U$  para los cuales  $\mathcal{F}|_U$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo libre, en este caso el **rango** de  $\mathcal{F}$  en tal conjunto abierto es el número de copias del haz estructural (finita o infinita). Un haz localmente libre de rango 1 es llamado **haz inversible**.

Sea  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  un morfismo de espacios anillados. Si  $\mathcal{F}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo, entonces  $f_*\mathcal{F}$  es un  $f_*\mathcal{O}_X$ -módulo. Puesto que tenemos el morfismo de haces de anillos sobre  $Y$ ,  $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ , esto da a  $f_*\mathcal{F}$  una estructura natural de  $\mathcal{O}_Y$ -módulo, llamado **imagen directa** de  $\mathcal{F}$  por el morfismo  $f$ .

Si  $\mathcal{G}$  es un haz de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos, entonces  $f^{-1}\mathcal{G}$  es un  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -módulo. Tenemos un morfismo natural de haces de anillos  $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ , inducido por el morfismo  $f^\bullet \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$  dado en cada abierto  $U \subseteq X$  por  $\langle V, s \rangle \mapsto f^\sharp(V)(s)|_U$ . Esto nos permite definir  $f^*\mathcal{G}$  como el producto tensorial  $f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ , el cual es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo.

**Observación 2.7.1.** El funtor  $f^*$  es exacto a derecha, es decir una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

induce una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$f^*\mathcal{F} \rightarrow f^*\mathcal{G} \rightarrow f^*\mathcal{H} \rightarrow 0$$

En efecto, esto sigue del hecho que dado un morfismo de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , tenemos un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $f^*\varphi : f^*\mathcal{F} \rightarrow f^*\mathcal{G}$ , el cual está dado en cada tallo por  $(f^*\varphi)_x = \varphi_{f(x)} \otimes id_{\mathcal{O}_{X,x}}$  vía los isomorfismos  $(f^*\mathcal{F})_x \cong \mathcal{F}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{X,x}$  y  $\mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{X,x} \cong (f^*\mathcal{G})_x$ .

**Definición 2.7.2.** Sea  $A$  un anillo y sea  $M$  un  $A$ -módulo. Definiremos el haz asociado a  $M$  sobre  $X = \text{Spec}(A)$ , el cual denotaremos por  $\widetilde{M}$ . Para cada abierto  $U$ , definimos el grupo  $\widetilde{M}(U)$  como el conjunto de funciones  $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$  tal que  $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$  para cada  $\mathfrak{p}$  y tal que para cada  $\mathfrak{p} \in U$ , existe un abierto  $V \subseteq U$  que contiene  $\mathfrak{p}$ , y elementos  $m \in M, f \in A$

tal que para cada  $\mathfrak{q} \in V$ ,  $f \notin \mathfrak{q}$ , y  $s(\mathfrak{q}) = m/f$  en  $M_{\mathfrak{q}}$ . Tomando las restricciones naturales como morfismos de restricción, obtenemos que  $\widetilde{M}$  es un haz. Además, por la definición del haz estructural  $\mathcal{O}_{\text{Spec} A}$ , es claro que  $\widetilde{M}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo.

**Proposición 2.7.1.** *Sea  $A$  un anillo y sea  $M$  un  $A$ -módulo. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a) *Para cualquier  $\mathfrak{p} \in \text{Spec} A$ , el tallo  $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}}$  del haz  $\widetilde{M}$ , es isomorfo al módulo localizado  $M_{\mathfrak{p}}$ .*
- (b) *Para cualquier elemento  $f \in A$ , el  $A_f$ -módulo  $\widetilde{M}(D(f))$  es isomorfo al módulo localizado  $M_f$ .*
- (c) *En particular,  $\Gamma(\text{Spec} A, \widetilde{M}) \cong M$ .*

*Demostración.* La demostración es idéntica a la proposición 2.4.1, reemplazando  $A$  por  $M$  adecuadamente.  $\square$

**Proposición 2.7.2.** *Sean  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo y  $X = \text{Spec} A$ . La correspondencia  $M \mapsto \widetilde{M}$  es un funtor exacto y plenamente fiel de la categoría de  $A$ -módulos en la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos.*

*Demostración.* Dado un homomorfismo de  $A$ -módulos  $\varphi : M \rightarrow N$ , vamos a definir un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ . Note que para cada  $\mathfrak{p} \in \text{Spec} A$ , tenemos un homomorfismo de  $A_{\mathfrak{p}}$ -módulos  $\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$  definido por  $m/f \mapsto \varphi(m)/f$ . Dado un abierto  $U \subseteq \text{Spec} A$ , definimos

$$\widetilde{\varphi}(U) : \widetilde{M}(U) \rightarrow \widetilde{N}(U) \quad \text{por} \quad s \mapsto t$$

donde  $t : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} N_{\mathfrak{p}}$  está definida por  $\mathfrak{p} \mapsto \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{p}))$ . Por otro lado, dado  $\mathfrak{p} \in U$ , si  $s = m/f$  en un abierto  $V \subseteq U$  que contiene a  $\mathfrak{p}$ , entonces  $t = \varphi(m)/f$  en  $V$ . Por tanto,  $t \in \widetilde{N}(U)$ . Además, tenemos que  $\widetilde{\varphi}(U)$  es un homomorfismo de  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos. También, dados abiertos  $V \subseteq U$ ,  $s \in \widetilde{M}(U)$  y  $\mathfrak{p} \in V$ , tenemos

$$\begin{aligned} (\widetilde{\varphi}(U)(s)|_V)(\mathfrak{p}) &= \widetilde{\varphi}(U)(s)(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{p})) \\ &= \varphi_{\mathfrak{p}}(s|_V(\mathfrak{p})) = \widetilde{\varphi}(V)(s|_V)(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

Esto muestra que  $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$  es un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Es claro que  $(id_M)_{\widetilde{M}} = id_{\widetilde{M}}$ , y además si tenemos homomorfismos de  $A$ -módulos

$\varphi : M \rightarrow N$ ,  $\psi : N \rightarrow P$  entonces  $(\psi \circ \varphi)^\sim = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}$ . Tomemos ahora una sucesión exacta de  $A$ -módulos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$$

Luego, tenemos una sucesión de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \widetilde{N} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \widetilde{P} \longrightarrow 0$$

Luego para todo  $\mathfrak{p} \in X$  tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\mathfrak{p}}} & (\widetilde{N})_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_{\mathfrak{p}}} & (\widetilde{P})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} & N_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{p}}} & P_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde las flechas verticales son los isomorfismos naturales y la fila horizontal inferior del diagrama es exacta para cada  $\mathfrak{p} \in X$ . Por tanto la fila horizontal superior del diagrama es exacta para cada  $\mathfrak{p} \in X$ , y así nuestra sucesión de  $\mathcal{O}_X$ -módulos es exacta. Veamos finalmente que el funtor  $\tilde{\phantom{x}}$  es plenamente fiel, es decir, dados  $A$ -módulos  $M$  y  $N$ , debemos probar que la aplicación  $Hom_A(M, N) \rightarrow Hom_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$  definida por  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  es una biyección. En efecto, dado  $h : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$  un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, tomando secciones globales tenemos un homomorfismo de  $A$ -módulos

$$\varphi := h(\text{Spec } A) : M \cong \widetilde{M}(\text{Spec } A) \rightarrow \widetilde{N}(\text{Spec } A) \cong N$$

Esto nos da una aplicación de  $Hom_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$  en  $Hom_A(M, N)$ . Es evidente que  $\tilde{\varphi}(\text{Spec } A) = \varphi$  por definición de  $\tilde{\varphi}$ . Por otra parte, sea  $h : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$  un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos y sea  $h(\text{Spec } A) = \varphi$ . Luego, para cada  $g \in A$  tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M & \longrightarrow & \widetilde{M}(\text{Spec } A) & \xrightarrow{\varphi} & \widetilde{N}(\text{Spec } A) & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_g & \longrightarrow & \widetilde{M}(D(g)) & \xrightarrow{h(D(g))} & \widetilde{N}(D(g)) & \longrightarrow & N_g \end{array}$$

de donde se sigue que  $h(D(g))(m/g^n) = \varphi(m)/g^n$ .

Ahora veamos que  $h = \tilde{\varphi}$ . Sean  $U \subseteq \text{Spec } A$  abierto y  $s \in \widetilde{M}(U)$ . Sea  $D(g) \subseteq U$ . Sea  $s|_{D(g)} = m/g^n$ . Luego,  $t = \tilde{\varphi}(U)(s)$  satisface  $t|_{D(g)} = \varphi(m)/g^n$ .

Por otro lado,  $h(U)(s)|_{D(g)} = h(D(g))(s|_{D(g)}) = h(D(g))(m/g^n) = \varphi(m)/g^n$ . Luego  $h(U)(s)|_{D(g)} = t|_{D(g)}$  para todo abierto  $D(g) \subseteq U$ . Así, como los abiertos  $D(g)$  forman una base para la topología de  $\text{Spec } A$ , concluimos que  $h(U)(s) = t$ . Concluimos que  $h = \tilde{\varphi}$ .  $\square$

**Proposición 2.7.3.** Sean  $A, B$  anillos,  $X = \text{Spec } A$  e  $Y = \text{Spec } B$ . Consideremos un homomorfismo de anillos  $\rho : A \rightarrow B$  y su morfismo correspondiente  $f : Y \rightarrow X$ . Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $M, N$  son dos  $A$ -módulos, entonces  $(M \otimes_A N)^\sim \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$ .
- (b) Si  $\{M_i\}_{i \in I}$  es cualquier familia de  $A$ -módulos,  $(\bigoplus_{i \in I} M_i)^\sim \cong \bigoplus_{i \in I} \widetilde{M}_i$ .
- (c) Para todo  $B$ -módulo  $N$  tenemos  $f_*(\widetilde{N}) \cong ({}_A N)^\sim$ , donde  ${}_A N$  indica  $N$  como  $A$ -módulo.
- (d) Para todo  $A$ -módulo  $M$  tenemos  $f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_A B)^\sim$ .

*Demostración.* Ver [1].  $\square$

**Definición 2.7.3.** Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un esquema. Un haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\mathcal{F}$  es **casi coherente** si  $X$  puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines  $U_i = \text{Spec } A_i$ , tal que para cada  $i$  existe un  $A_i$ -módulo  $M_i$  con  $\mathcal{F}|_{U_i} = \widetilde{M}_i$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  es **coherente** si además cada  $M_i$  puede ser tomado como un  $A_i$ -módulo finitamente generado.

**Lema 2.7.4.** Sea  $X$  un esquema,  $\mathcal{F}$  un haz casi coherente (resp. coherente) sobre  $X$  y sea  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ , entonces  $\mathcal{F}|_U$  es también casi coherente (resp. coherente)

*Demostración.* Desde que  $\mathcal{F}$  es haz casi coherente, existe un cubrimiento de  $X$  por abiertos afines  $U_i = \text{Spec}(A_i)$ , y para cada  $i$  un  $A_i$ -módulo  $M_i$  tal que  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M}_i$ . Como  $\{U_i = \text{Spec } A_i\}_{i \in I}$  es un cubrimiento abierto de  $X$ , entonces la colección formada por los abiertos básicos de todos los abiertos  $U_i$  es una base para la topología de  $X$ . Luego basta mostrar que  $\mathcal{F}|_{D(f)}$  es isomorfo al haz asociado de un  $(A_i)_f$ -módulo, para todo  $f \in A_i$  y para todo  $i \in I$ . Sea  $f \in A_i$  y sea  $\iota : D(f) \hookrightarrow U_i$  la inclusión, entonces

$$\mathcal{F}|_{D(f)} = (\mathcal{F}|_{U_i})|_{D(f)} \cong (\widetilde{M}_i)|_{D(f)} \cong \iota^* \widetilde{M}_i \cong (M_i \otimes_{A_i} (A_i)_f)^\sim$$

por tanto  $\mathcal{F}|_U$  es casi coherente. Ahora, si  $\mathcal{F}$  es coherente, cada  $M_i$  es un  $A_i$ -módulo finitamente generado, luego  $M_i \otimes_{A_i} (A_i)_f$  es también finitamente generado como  $(A_i)_f$ -módulo, y por tanto  $\mathcal{F}|_U$  es también un haz coherente.  $\square$

**Lema 2.7.5.** *Sea  $X = \text{Spec}(A)$  un esquema afín y  $\mathcal{F}$  un haz casi coherente (resp. coherente) sobre  $X$ . Entonces existe un conjunto finito de elementos  $g_1, \dots, g_n$  de  $A$ , tal que  $X$  es cubierto por los abiertos básicos  $D(g_i)$  y  $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M}_i$  para todo  $i$ , donde cada  $M_i$  es un  $A_{g_i}$ -módulo (resp. módulo finitamente generado).*

*Demostración.* Como  $\mathcal{F}$  es casi coherente, entonces  $X$  es cubierto por abiertos afines  $V = \text{Spec} B$  tal que  $\mathcal{F}|_V \cong \widetilde{M}$  donde  $M$  es un  $B$ -módulo. Por otro lado, como los subconjuntos  $D(g)$ , con  $g \in A$ , forman una base para la topología de  $X$ , entonces existe una familia  $\{g_i\}_{i \in I}$  de elementos de  $A$  tal que  $V$  es cubierto por los abiertos  $D(g_i)$ . Luego para cada inclusión  $\iota : D(g_i) \hookrightarrow V$  tenemos un homomorfismo de anillos  $B \rightarrow A_{g_i}$ . Entonces

$$\mathcal{F}|_{D(g_i)} = (\mathcal{F}|_V)|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M}|_{D(g_i)} \cong \iota^* \widetilde{M} \cong (M \otimes_B A_{g_i})^\sim$$

y tomamos  $M_i = M \otimes_B A_{g_i}$ , el cual es un  $A_{g_i}$ -módulo. Ahora bien, considerando el cubrimiento de  $X$  formado por los abiertos básicos  $D(g_i)$  contenidos en algún abierto afín  $V$  como antes; como  $X$  es casi compacto entonces  $X$  es cubierto por un número finito de estos abiertos  $D(g_i)$  con la condición requerida. Ahora, si  $\mathcal{F}$  es coherente, cada  $M$  es un  $B$ -módulo finitamente generado, luego  $M \otimes_B A_{g_i}$  es también finitamente generado como  $A_{g_i}$ -módulo.  $\square$

**Lema 2.7.6.** *Sean  $X = \text{Spec}(A)$  un esquema afín,  $f \in A$ ,  $D(f) \subseteq X$  su correspondiente abierto básico y  $\mathcal{F}$  un haz casi coherente sobre  $X$ . Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a) *Si  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  es una sección global de  $\mathcal{F}$  cuya restricción a  $D(f)$  es 0, entonces  $f^n s = 0$  para algún  $n > 0$ .*
- (b) *Dada una sección  $t \in \mathcal{F}(D(f))$  de  $\mathcal{F}$  sobre el abierto  $D(f)$ , entonces para algún  $n > 0$ ,  $f^n t$  se extiende a una sección global de  $\mathcal{F}$  sobre  $X$ .*

*Demostración.* Como  $\mathcal{F}$  es casi coherente sobre  $X$ , el lema anterior nos dice que existen  $g_1, \dots, g_r \in A$  tal que  $X = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$  y  $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M}_i$ ,

donde cada  $M_i$  es un  $A_{g_i}$ -módulo; además  $D(f) = \bigcup_{i=1}^r D(fg_i)$  y  $D(fg_i) \subseteq D(f)$ .

(a) Tomemos una sección  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  y supongamos que  $s|_{D(f)} = 0$ . Para cada  $i$ , denotemos por  $s_i$  a la sección  $s|_{D(g_i)} \in \mathcal{F}(D(g_i))$ . De acuerdo a los isomorfismos

$$\mathcal{F}(D(g_i)) = \mathcal{F}|_{D(g_i)}(D(g_i)) \cong \widetilde{M}_i(\text{Spec}(A_{g_i})) \cong M_i$$

podemos considerar a  $s_i$  como un elemento de  $M_i$ , y por hipótesis tenemos que  $s|_{D(fg_i)} = 0$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Como  $s|_{D(fg_i)} \in \mathcal{F}(D(fg_i))$  y  $\mathcal{F}(D(fg_i)) \cong \widetilde{M}_i(D(\frac{f}{1})) \cong (M_i)_{\frac{f}{1}}$ , tenemos que  $s|_{D(fg_i)} = 0$  en  $(M_i)_{\frac{f}{1}}$ , entonces por la definición de localización, existe  $n \geq 1$  (que depende de  $i$ ), tal que  $\frac{f^n}{1} s_i = 0$ , y como el conjunto de índices  $i$  es finito, podemos tomar  $n$  suficientemente grande que no dependa de  $i$ . Por consiguiente, para cada  $i$  tenemos  $(f^n s)|_{D(g_i)} = \frac{f^n}{1} s_i = 0$ , y puesto que  $\mathcal{F}$  es haz y  $X = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$ , resulta  $f^n s = 0$ .

(b) Sea  $t \in \mathcal{F}(D(f))$ , y para cada  $i$  definamos  $t'_i = t|_{D(fg_i)}$ . Puesto que  $\mathcal{F}(D(fg_i)) \cong (M_i)_{\frac{f}{1}}$ , podemos considerar a  $t'_i$  como un elemento de  $(M_i)_{\frac{f}{1}}$ , entonces  $t'_i = \frac{m_i}{(\frac{f}{1})^{n_i}}$ , donde  $m_i \in M_i \cong \mathcal{F}(D(g_i))$ , y tomando  $t_i = (\frac{f}{1})^{n-n_i} m_i$  donde  $n = \max\{n_i\}$ , para cada  $i$  tenemos que  $t'_i = \frac{t_i}{(\frac{f}{1})^n}$ ; además

$$t_i|_{D(fg_i)} = \frac{t_i}{(1/1)} = \left(\frac{f}{1}\right)^n t'_i = (f^n t)|_{D(fg_i)}$$

Esta igualdad implica que  $t_i|_{D(fg_i g_j)} = t_j|_{D(fg_i g_j)}$  para todo  $i, j$ , luego

$$(t_i|_{D(g_i g_j)} - t_j|_{D(g_i g_j)})|_{D(fg_i g_j)} = 0.$$

Aplicando el ítem anterior al haz casi coherente  $\mathcal{F}|_{D(g_i g_j)}$  sobre  $\text{Spec}(A_{g_i g_j})$  y a su sección global  $t_i|_{D(g_i g_j)} - t_j|_{D(g_i g_j)}$ , tenemos que  $\frac{f^m}{1} (t_i|_{D(g_i g_j)} - t_j|_{D(g_i g_j)}) = 0$  para algún  $m \geq 1$  (que depende de  $i, j$ ), y tomando  $m$  suficientemente grande podemos hacer que  $m$  sea independiente de  $i$  y  $j$ . Luego tenemos que  $(\frac{f^m}{1} t_i)|_{D(g_i g_j)} = (\frac{f^m}{1} t_j)|_{D(g_i g_j)}$  y puesto que  $\mathcal{F}$  es haz y  $X = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$ , existe  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  tal que  $s|_{D(g_i)} = \frac{f^m}{1} t_i$  para todo  $i$ ; así

$$s|_{D(fg_i)} = \frac{f^m}{1} \Big|_{D(fg_i)} t_i|_{D(fg_i)} = \frac{f^m}{1} \Big|_{D(fg_i)} \left(\frac{f^n}{1} t\right)|_{D(fg_i)} = \left(\frac{f^{m+n}}{1} t\right)|_{D(fg_i)}$$

y como  $D(f) = \bigcup_{i=1}^r D(fg_i)$ , usando otra vez la propiedad de haz de  $\mathcal{F}$ , tenemos  $s|_{D(f)} = \frac{1}{1} \frac{f^{m+n}}{1} t$ .  $\square$

**Proposición 2.7.7.** *Sea  $X$  un esquema. Entonces un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{F}$  es casi coherente si y sólo si para cada abierto afín  $U = \text{Spec } A$  de  $X$ , existe un  $A$ -módulo  $M$  tal que  $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ . Si  $X$  es noetheriano, entonces  $\mathcal{F}$  es coherente si y sólo si lo mismo es verdad, con la condición extra que  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  un haz casi coherente sobre  $X$  y sea  $U = \text{Spec } A$  un abierto afín. Por el lema 2.7.4,  $\mathcal{F}|_U$  es también casi coherente, así que podemos suponer que  $X = U$ . Sea  $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$  y para cada  $f \in A$  definimos el homomorfismo de  $A_f$ -módulos  $\alpha(D(f)) : M_f \cong \widetilde{M}(D(f)) \rightarrow \mathcal{F}(D(f))$  dado por  $\frac{m}{f^k} \mapsto \frac{1}{f^k} \cdot m|_{D(f)}$ . Como los subconjuntos abiertos  $D(f)$  son una base para la topología de  $X$  y además los homomorfismos  $\alpha(D(f))$  conmutan con las restricciones, podemos pegar estos homomorfismos y obtener un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\alpha : \widetilde{M} \rightarrow \mathcal{F}$ . Veamos que este morfismo es un isomorfismo. Puesto que los subconjuntos abiertos  $D(f)$  son una base para la topología de  $X$ , bastará probar que los homomorfismos  $\alpha(D(f))$  son isomorfismos para cada  $f \in A$ . Sea  $\frac{m}{f^k} \in M_f$  tal que  $\frac{1}{f^k} \cdot m|_{D(f)} = 0$ , esto implica que  $m|_{D(f)} = 0$  y por la primera afirmación del lema 2.7.6 existe  $n > 0$  tal que  $f^n m = 0$ , por tanto  $\frac{m}{f^k} = 0$  y así  $\alpha(D(f))$  es inyectiva. Veamos la sobreyectividad, dado  $t \in \mathcal{F}(D(f))$ , por la segunda afirmación del lema 2.7.6, existe  $n > 0$  y  $m \in M = \Gamma(X, \mathcal{F})$  tal que  $m|_{D(f)} = f^n t$ , luego  $\alpha(D(f))(\frac{m}{f^n}) = t$  y de esta manera concluimos que  $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ . La parte recíproca es inmediata. Supongamos ahora que  $X$  es noetheriano y  $\mathcal{F}$  es coherente. Por el lema 2.7.5 existe un conjunto finito de elementos  $g_1, \dots, g_n$  de  $A$ , tal que  $X$  es cubierto por los abiertos básicos  $D(g_i)$  y  $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M}_i$  para todo  $i$ , donde  $M_i$  es un  $A_{g_i}$ -módulo finitamente generado. De lo anterior ya tenemos que  $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ , luego

$$M_{g_i} \cong \widetilde{M}(D(g_i)) \cong \mathcal{F}(D(g_i)) \cong \widetilde{M}_i(D(g_i)) \cong M_i$$

y por tanto cada  $M_{g_i}$  es un  $A_{g_i}$ -módulo finitamente generado; ahora bien, desde que el anillo  $A$  es noetheriano, entonces  $A_{g_i}$  es también noetheriano y así  $M_{g_i}$  es noetheriano para cada  $i$ . Esto implica que  $M$  es noetheriano.  $\square$

**Teorema 2.7.8.** Sean  $A$  un anillo y  $X = \text{Spec } A$ . El funtor  $M \mapsto \widetilde{M}$  es una equivalencia entre la categoría de  $A$ -módulos y la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos casi coherentes. Su inversa es el funtor  $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ . Si  $A$  es noetheriano, el funtor es una equivalencia entre la categoría de  $A$ -módulos finitamente generados y la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos coherentes.

*Demostración.* Consecuencia directa de las proposiciones 2.7.2 y 2.7.7.

□

**Proposición 2.7.9.** Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín y consideremos una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ , supongamos que que  $\mathcal{F}'$  es casi coherente. Entonces la sucesión

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

es exacta.

*Demostración.* Por la proposición 2.2.10 sabemos que el funtor  $\Gamma$  es exacto a izquierda, luego basta probar que la penúltima aplicación es sobreyectiva. Sean  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ ,  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  e identifiquemos  $\mathcal{F}'$  como un subhaz de  $\mathcal{F}$ . Por la proposición 2.2.9 y la casi compacidad de  $X$ , tenemos que  $X$  puede ser cubierto con un número finito de abiertos básicos  $D(g_1), \dots, D(g_r)$  tal que existen elementos  $t_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$  con  $\psi(D(g_i))(t_i) = s|_{D(g_i)}$ . Sea  $f = g_{i_0}$  para algún  $i_0$  fijo. Afirmamos que para algún  $n > 0$ ,  $f^n s$  es la imagen de una sección global de  $\mathcal{F}$  mediante la aplicación  $\psi(X)$ . En efecto, si denotamos  $t = t_{i_0}|_{D(fg_{i_0})}$  y  $t'_i = t_i|_{D(fg_i)}$ , tendremos entonces que  $t, t'_i \in \mathcal{F}(D(fg_i))$  y  $\psi(D(fg_i))(t) = s|_{D(fg_i)} = \psi(D(fg_i))(t'_i)$ , luego  $t - t'_i \in \text{Nuc}(\psi(D(fg_i))) = \mathcal{F}'(D(fg_i))$ . Como  $\mathcal{F}'|_{D(g_i)}$  es casi coherente y  $D(fg_i)$  es un abierto básico para  $D(g_i)$ , por la segunda afirmación del lema 2.7.6 existe  $n_i > 0$  tal que  $f^{n_i}(t - t'_i)$  se extiende a una sección  $v_i \in \mathcal{F}'(D(g_i))$ , más aún tomando  $n = \max\{n_1, \dots, n_r\}$ , podemos suponer que  $f^n(t - t'_i)$  se extiende a  $v_i$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . Sea  $\widehat{t}_i = f^n t_i + v_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$ , entonces

$$\widehat{t}_i|_{D(fg_i)} = f^n t'_i + v_i|_{D(fg_i)} = f^n t'_i + f^n(t - t'_i) = f^n t,$$

luego para cada  $i, j$ , tenemos  $(\widehat{t}_i|_{D(g_i g_j)} - \widehat{t}_j|_{D(g_i g_j)})|_{D(fg_i g_j)} = 0$ . Además  $\psi(D(g_i))(\widehat{t}_i) = f^n s|_{D(g_i)}$ , de donde obtenemos que  $\widehat{t}_i|_{D(g_i g_j)} - \widehat{t}_j|_{D(g_i g_j)} \in \text{Nuc}(\psi(D(g_i g_j))) = \mathcal{F}'(D(g_i g_j))$ . Entonces por la primera afirmación del

lema 2.7.6 aplicado al haz casi coherente  $\mathcal{F}'|_{D(g_i g_j)}$ , existe  $m_{ij} > 0$  tal que  $f^{m_{ij}}(\widehat{t}_i|_{D(g_i g_j)} - \widehat{t}_j|_{D(g_i g_j)}) = 0$  y tomando  $m = \max\{m_{ij}\}$  tenemos  $f^m \widehat{t}_i|_{D(g_i g_j)} = f^m \widehat{t}_j|_{D(g_i g_j)}$ , y como  $\mathcal{F}$  es un haz, existe  $t'' \in \mathcal{F}(X)$  tal que  $t''|_{D(g_i)} = f^m \widehat{t}_i$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \psi(X)(t'')|_{D(g_i)} &= \psi(D(g_i))(t''|_{D(g_i)}) = \psi(D(g_i))(f^m \widehat{t}_i) \\
 &= f^m \psi(D(g_i))(\widehat{t}_i) = f^m f^n s|_{D(g_i)}
 \end{aligned}$$

para cada  $i = 1, \dots, r$ , por tanto  $\psi(X)(t'') = f^{m+n} s$ . Esto prueba la afirmación. Ahora, como  $f = g_{i_0}$ , donde  $i_0$  era fijo y arbitrario, tenemos por la afirmación anterior que, para cada  $i = 1, \dots, r$ , existe una sección global  $t_i$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $\psi(X)(t_i) = g_i^{n_i} s$  para algún  $n_i > 0$ . Luego tomando  $n = \max\{n_i\}$  y multiplicando a  $t_i$  por una potencia de  $f$ , podemos asumir que  $\psi(X)(t_i) = g_i^n s$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . Por otro lado, como los abiertos  $D(g_i)$  cubren a  $X$ , entonces el ideal  $\langle g_1^n, \dots, g_r^n \rangle$  coincide con  $A$ , por tanto  $1 = \sum_{i=1}^r a_i g_i^n$ , donde  $a_i \in A$ . Sea la sección global  $t = \sum_{i=1}^r a_i t_i$ , entonces  $\psi(X)(t) = \sum_{i=1}^r a_i \psi(X)(t_i) = \sum_{i=1}^r a_i g_i^n s = s$ . Con esto terminamos la prueba.  $\square$

**Proposición 2.7.10.** *Sea  $X$  un esquema. El núcleo, conúcleo e imagen de cualquier morfismo de haces casi coherentes son casi coherentes. Cualquier extensión de haces casi coherentes es casi coherente. Si  $X$  es noetheriano, lo mismo es cierto para haces coherentes.*

*Demostración.* Ver [1].  $\square$

**Lema 2.7.11.** *Sea  $X$  un esquema separado sobre un esquema afín  $S$ . Sean  $U$  y  $V$  conjuntos abiertos afines de  $X$ . Entonces  $U \cap V$  es casi compacto.*

*Demostración.* Sean  $S = \text{Spec}(A)$  y  $f : X \rightarrow S$  el morfismo estructural. Sean  $U = \text{Spec}(B)$  y  $V = \text{Spec}(B')$ . Desde que  $f : X \rightarrow S$  es separado, el morfismo diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$  es una inmersión cerrada. Sean  $p_1, p_2 : X \times_S X \rightarrow X$  las proyecciones. Por la proposición 2.6.5,  $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) = U \times_S V$ , lo que implica

$$\begin{aligned}
 \Delta^{-1}(U \times_S V) &= \Delta^{-1}(p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)) \\
 &= \Delta^{-1}(p_1^{-1}(U)) \cap \Delta^{-1}(p_2^{-1}(V)) \\
 &= (p_1 \circ \Delta)^{-1}(U) \cap (p_2 \circ \Delta)^{-1}(V) \\
 &= U \cap V.
 \end{aligned}$$

De esto sigue que

$$\Delta(U \cap V) = \Delta(\Delta^{-1}(U \times_S V)) = \Delta(X) \cap (U \times_S V).$$

Como  $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$  es una inmersión cerrada, entonces  $\Delta(X)$  es un subesquema cerrado de  $X \times_S X$ . Luego  $\Delta(X) \cap (U \times_S V)$  es un subesquema cerrado de  $U \times_S V$ , y por la proposición 2.6.7 tenemos que  $U \times_S V = \text{Spec}(B \otimes_A B')$  es un esquema afín, de donde concluimos que  $\Delta(X) \cap (U \times_S V)$  es casi compacto. Además por el isomorfismo  $U \cap V \cong \Delta(U \cap V) = \Delta(X) \cap (U \times_S V)$  obtenemos que  $U \cap V$  es casi compacto.  $\square$

**Proposición 2.7.12.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas.*

- (a) *Si  $\mathcal{G}$  es un haz casi coherente de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos, entonces  $f^*\mathcal{G}$  es un haz casi coherente de  $\mathcal{O}_X$ -módulos.*
- (b) *Si  $X$  e  $Y$  son noetherianos, y si  $\mathcal{G}$  es coherente, entonces  $f^*\mathcal{G}$  es coherente.*
- (c) *Supongamos que  $X$  es noetheriano, o que  $f$  es casi compacto y separado. Entonces si  $\mathcal{F}$  es un haz casi coherente de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, tenemos que  $f_*\mathcal{F}$  es un haz casi coherente de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos.*

*Demostración.* (a) Supongamos primero que  $X = \text{Spec}(B)$  e  $Y = \text{Spec} A$  son esquemas afines. Como  $\mathcal{G}$  es casi coherente, tenemos que  $\mathcal{G} \cong \widetilde{M}$  donde  $M$  es un  $A$ -módulo; luego  $f^*\mathcal{G} \cong f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_A B)^\sim$ , y por tanto  $f^*\mathcal{G}$  es casi coherente. Para el caso general, sea  $V = \text{Spec} A$  un subconjunto abierto afín de  $Y$ . Como  $\mathcal{G}$  es casi coherente, existe un  $A$ -módulo  $M$  tal que  $\mathcal{G}|_V \cong \widetilde{M}$ . Ahora, tomemos  $U = \text{Spec} B$  un subconjunto abierto afín de  $X$  tal que  $U \subseteq f^{-1}(V)$ . Así podemos considerar la restricción de  $f$  a  $U$ ,  $f|_U : U \rightarrow V$ . Por el argumento inicial y desde que  $(f^*\mathcal{G})|_U \cong (f|_U)^*(\mathcal{G}|_V)$ , obtenemos que  $(f^*\mathcal{G})|_U$  es casi coherente. Concluimos que  $f^*\mathcal{G}$  es casi coherente.

(b) Como en la primera parte, es suficiente considerar  $X = \text{Spec}(B)$  e  $Y = \text{Spec} A$ . Desde que  $X$  e  $Y$  son esquemas noetherianos,  $A$  y  $B$  son anillos noetherianos. Como  $\mathcal{G}$  es coherente, tenemos que  $\mathcal{G} \cong \widetilde{M}$ , donde  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado. Luego  $f^*\mathcal{G}$  es coherente, ya que  $f^*\mathcal{G} \cong f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_A B)^\sim$  y  $M \otimes_A B$  es un  $B$ -módulo finitamente generado.

(c) Como la cuestión es local sobre  $Y$ , podemos suponer que  $Y$  es afín. Ahora bien, si  $X$  es noetheriano, entonces  $X$  es casi compacto. Y si  $f :$

$X \rightarrow Y$  es casi compacto, como  $Y$  es afín, entonces  $X = f^{-1}(Y)$  es casi compacto. Así, en cualquier caso, podemos cubrir a  $X$  con un número finito de abiertos afines  $U_i$ . Si  $X$  es noetheriano, entonces todo abierto de  $X$  es casi compacto, y en particular los abiertos  $U_i \cap U_j$  son casi compactos. Y si  $f : X \rightarrow Y$  es separado, entonces por el lema 2.7.11 tenemos que los abiertos  $U_i \cap U_j$  son casi compactos. Así, en cualquier caso,  $U_i \cap U_j$  puede ser cubierto por un número finito de abiertos afines  $U_{ijk}$ . Tenemos un morfismo de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos  $\psi : \bigoplus_i f_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \rightarrow \bigoplus_{ijk} f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$ , definido en cada abierto  $W \subseteq Y$

$$\psi(W) : \bigoplus_i \mathcal{F}(f^{-1}(W) \cap U_i) \rightarrow \bigoplus_{ijk} \mathcal{F}(f^{-1}(W) \cap U_{ijk})$$

por  $(s_i) \mapsto (s_i|_{f^{-1}(W) \cap U_{ijk}} - s_j|_{f^{-1}(W) \cap U_{ijk}})$ . Este es un morfismo de haces casi coherentes, por la proposición 2.7.3(c). Además, es claro que  $Nuc(\psi) = f_*\mathcal{F}$ . Luego, por la proposición 2.7.10, tenemos que  $f_*\mathcal{F}$  es casi coherente.  $\square$

**Definición 2.7.4.** Sea  $Y$  un subesquema cerrado de un esquema  $X$ , y sea  $i : Y \rightarrow X$  el morfismo inclusión. Definimos el *haz ideal* de  $Y$ , denotado por  $\mathcal{I}_Y$ , como el núcleo del morfismo  $i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$ .

**Lema 2.7.13.** Sea  $Y$  un subesquema cerrado de un esquema  $X$ , y sea  $i : Y \rightarrow X$  el morfismo inclusión. Entonces  $i^{-1}i_*\mathcal{O}_Y \cong i^*i_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y$ .

*Demostración.* Los morfismos naturales  $i^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ ,  $i^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow i^{-1}i_*\mathcal{O}_Y$  (inducidos por el morfismo de haces de anillos  $i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$ ) y  $\mathcal{O}_Y \rightarrow i^{-1}i_*\mathcal{O}_Y$  (inducido por la función continua  $i : Y \rightarrow X$ ) nos dan el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} i^{-1}\mathcal{O}_X & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & i^{-1}i_*\mathcal{O}_Y & \end{array}$$

de donde tenemos que  $i^*i_*\mathcal{O}_Y = i^{-1}i_*\mathcal{O}_Y \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \cong i^{-1}i_*\mathcal{O}_Y$  como  $\mathcal{O}_Y$ -módulos. Ahora, mostraremos que  $i^*i_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y$ . Consideremos la sucesión exacta de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

Como el funtor  $i^*$  es exacto a derecha, tenemos una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos.

$$i^* \mathcal{J}_Y \rightarrow i^* \mathcal{O}_X \rightarrow i^* i_* \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

Veamos que la imagen del morfismo  $i^* \mathcal{J}_Y \rightarrow i^* \mathcal{O}_X$  es nula. En efecto, este morfismo está dado en cada tallo por el homomorfismo natural  $(\mathcal{J}_Y)_y \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} \mathcal{O}_{Y,y}$  el cual tiene imagen nula, pues  $(\mathcal{J}_Y)_y$  es el núcleo del homomorfismo  $i_y^\# : \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow (i_* \mathcal{O}_Y)_y \cong \mathcal{O}_{Y,y}$ . Por tanto  $i^* i_* \mathcal{O}_Y \cong i^* \mathcal{O}_X = i^{-1} \mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y$ .  $\square$

**Proposición 2.7.14.** *Sea  $X$  un esquema. Para todo subesquema cerrado  $Y$  de  $X$ , el correspondiente haz ideal  $\mathcal{J}_Y$  es un haz casi coherente de ideales sobre  $X$ . Si  $X$  es noetheriano,  $\mathcal{J}_Y$  es coherente. Recíprocamente, cualquier haz casi coherente de ideales sobre  $X$  es el haz ideal de un únicamente determinado subesquema cerrado de  $X$ .*

*Demostración.* Dado  $Y$  un subesquema cerrado de  $X$ , entonces el morfismo inclusión  $i : Y \rightarrow X$  es casi compacto (pues cualquier subesquema cerrado de un esquema afín es casi compacto) y separado (observación 2.6.4), así que por la proposición 2.7.12 tenemos que  $i_* \mathcal{O}_Y$  es un haz casi coherente sobre  $X$ . Luego, como  $\mathcal{J}_Y$  es el núcleo de un morfismo de haces casi coherentes, entonces  $\mathcal{J}_Y$  es casi coherente. Si  $X$  es noetheriano, dado un abierto afín  $U = \text{Spec } A$ , tenemos que  $A$  es un anillo noetheriano, así que el ideal  $\mathcal{J}_Y(U) \subseteq A$  es finitamente generado. Por tanto  $\mathcal{J}_Y$  es coherente. Recíprocamente, consideremos un esquema  $X$  y un haz casi coherente de ideales  $\mathcal{J}$ , sea  $Y = \text{Sop}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ . Dado un subconjunto abierto afín  $U = \text{Spec } A \subseteq X$ , sea  $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\text{Spec } A)$ . Luego  $\mathcal{J}|_{\text{Spec } A} \cong \tilde{\mathfrak{a}}$  y por tanto  $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|_{\text{Spec } A} \cong (\mathcal{O}_X|_{\text{Spec } A})/(\mathcal{J}|_{\text{Spec } A}) \cong \tilde{A}/\tilde{\mathfrak{a}} \cong (A/\mathfrak{a})^\sim$ , lo que implica que  $Y \cap \text{Spec } A = V(\mathfrak{a})$ . Por tanto  $Y$  es un subconjunto cerrado de  $X$ . En  $Y \cap \text{Spec } A = V(\mathfrak{a})$  consideremos la estructura de esquema dada por la inmersión cerrada  $\text{Spec}(A/\mathfrak{a}) \hookrightarrow \text{Spec } A$ . Estas estructuras de esquema pueden ser pegadas para obtener una estructura de esquema en  $Y$ . Para ver esto, basta mostrar que dado un abierto afín  $U = \text{Spec } A$  y  $f \in A$ , la estructura de esquema de  $Y \cap \text{Spec } A$  restringida a  $D(f) = \text{Spec } A_f$  coincide con la estructura de esquema de  $Y \cap \text{Spec } A_f$  dada por la inmersión cerrada  $\text{Spec}(A_f/\mathfrak{c}) \hookrightarrow \text{Spec } A_f$ , donde  $\mathfrak{c} = \mathcal{J}(\text{Spec } A_f)$ . En efecto,  $\mathcal{J}|_{\text{Spec } A_f} = (\mathcal{J}|_{\text{Spec } A})|_{\text{Spec } A_f} \cong \tilde{\mathfrak{a}}|_{\text{Spec } A_f} \cong (\mathfrak{a} \otimes_A A_f)^\sim$  y además  $\mathcal{J}|_{\text{Spec } A_f} \cong \tilde{\mathfrak{c}}$ , de donde tenemos que  $\mathfrak{c} \cong \mathfrak{a} \otimes_A A_f \cong \mathfrak{a} \cdot A_f$ . Luego

$V(\mathfrak{c}) = V(\mathfrak{a} \cdot A_f) = D(\bar{f}) \subseteq \text{Spec}(A/\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a})$ , de donde tenemos que  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A/\mathfrak{a})}|_{V(\mathfrak{c})} = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A/\mathfrak{a})}|_{D(\bar{f})} = \mathcal{O}_{\text{Spec}((A/\mathfrak{a})_{\bar{f}})} = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A_f/(\mathfrak{a} \cdot A_f))}$ . Así,  $Y$  tiene estructura de subesquema cerrado de  $X$ .

Ahora, vamos a ver que el haz ideal de  $Y$  es  $\mathcal{J}$ . Sean  $i : Y \rightarrow X$  el morfismo inclusión,  $U = \text{Spec } A \subseteq X$  un subconjunto abierto afín y  $j : \text{Spec}(A/\mathfrak{a}) \hookrightarrow \text{Spec } A$  la inmersión cerrada que induce la estructura de esquema en  $Y \cap \text{Spec } A = V(\mathfrak{a})$ . Por la construcción de la estructura de subesquema cerrado de  $Y$ , tenemos que  $i^\#|_{\text{Spec } A} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow (i|_{\text{Spec}(A/\mathfrak{a})})_* \mathcal{O}_{\text{Spec}(A/\mathfrak{a})}$  es igual a  $j^\#$ . Luego  $i^\#(\text{Spec } A) = j^\#(\text{Spec } A) : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$  es la proyección natural y por tanto  $\mathcal{J}_Y(\text{Spec } A) = \text{Nuc}(i^\#(\text{Spec } A)) = \mathfrak{a} = \mathcal{J}(\text{Spec } A)$  para todo subconjunto abierto afín  $U = \text{Spec } A \subseteq X$ . Concluimos que  $\mathcal{J}_Y = \mathcal{J}$ .

Veamos la unicidad. Sea  $\mathcal{J}$  un haz casi coherente de ideales y sea  $i : Y \rightarrow X$  el morfismo inclusión de un subesquema cerrado  $Y$  de  $X$  tal que  $\mathcal{J}_Y = \mathcal{J}$ . Luego  $\mathcal{J} = \text{Nuc}(i^\#)$  y así tenemos que  $\mathcal{O}_X/\mathcal{J} \cong i_* \mathcal{O}_Y$ . Entonces  $Y = \text{Sop}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$  y además  $i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \cong i^{-1} i_* \mathcal{O}_Y$ . Luego, por el lema anterior tenemos que  $i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \cong \mathcal{O}_Y$ . Esto prueba la unicidad.  $\square$

**Corolario 2.7.15.** *Si  $X = \text{Spec } A$  es un esquema afín, entonces existe una correspondencia 1–1 entre ideales  $\mathfrak{a}$  de  $A$  y subesquemas cerrados  $Y$  de  $X$ , dado por  $\mathfrak{a} \mapsto \text{imagen de } \text{Spec}(A/\mathfrak{a}) \text{ en } X$ . En particular, todo subesquema cerrado de un esquema afín es afín.*

*Demostración.* Consecuencia directa del teorema 2.7.8 y la proposición anterior.  $\square$

**Definición 2.7.5.** *Sean  $S$  un anillo graduado y  $M$  un  $S$ -módulo graduado. Definiremos el haz asociado a  $M$  sobre  $X = \text{Proj } S$ , el cual denotaremos por  $\widetilde{M}$ . Para cada abierto  $U$  de  $\text{Proj } S$ , definimos  $\widetilde{M}(U)$  como el conjunto de funciones  $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$  tal que  $s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$  para cada  $\mathfrak{p}$ , y tal que para cada  $\mathfrak{p} \in U$ , existe un abierto  $V \subseteq U$  que contiene a  $\mathfrak{p}$ . y elementos homogéneos  $m \in M$ ,  $f \in S$  del mismo grado tal que para todo  $\mathfrak{q} \in V$  tenemos que  $f \notin \mathfrak{q}$  y  $s(\mathfrak{q}) = m/f$  en  $M_{(\mathfrak{q})}$ . Tomando las restricciones naturales como morfismos de restricción, obtenemos que  $\widetilde{M}$  es un haz. Además, por la definición del haz estructural  $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}$ , es claro que  $\widetilde{M}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo.*

Como en el caso de haces asociados a módulos sobre un anillo  $A$ , se tienen propiedades análogas a las proposiciones 2.7.1, 2.7.2, 2.7.3 y el corolario 2.7.15.

**Proposición 2.7.16.** *Sea  $S$  un anillo graduado y sea  $M$  un  $S$ -módulo graduado. Sea  $\widetilde{M}$  el haz asociado a  $M$  sobre  $X = \text{Proj } S$ . Se cumplen:*

- (a) *Para cada  $\mathfrak{p} \in X$ , el tallo  $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \cong M_{(\mathfrak{p})}$ .*
- (b) *Para cada elemento homogéneo  $f \in S_+$ , se tiene  $\widetilde{M}|_{D_+(f)} \cong (M_{(f)})^\sim$ .*
- (c)  *$\widetilde{M}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo casi coherente. Además, si  $S$  es noetheriano y  $M$  es finitamente generado, entonces  $\widetilde{M}$  es coherente.*

*Demostración.* La demostración es análoga a la proposición 2.5.3, reemplazando  $S$  por  $M$  adecuadamente. Luego (c) sigue de (b).  $\square$

**Observación 2.7.2.** El funtor  $\sim$  es un funtor exacto de la categoría de  $S$ -módulos graduados en la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos.

**Observación 2.7.3.** Un homomorfismo graduado de anillos graduados  $\varphi : S \rightarrow T$  induce un morfismo natural de esquemas  $f : U \rightarrow \text{Proj } S$ , donde  $U = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } T : \varphi(S_+) \not\subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Proj } T$  es un subconjunto abierto. Además, si  $\varphi$  es sobreyectiva, entonces  $U = \text{Proj } T$  y  $f : \text{Proj } T \rightarrow \text{Proj } S$  es una inmersión cerrada. (ver [1])

**Observación 2.7.4.** Si  $\varphi : S \rightarrow T$  es un homomorfismo graduado de anillos graduados y  $f : U \rightarrow \text{Proj } S$  es el morfismo inducido, entonces se cumple lo siguiente:

- (a) Para todo  $T$ -módulo graduado  $N$  tenemos  $f_*(\widetilde{N}|_U) \cong ({}_S N)^\sim$ .
- (b) Para todo  $S$ -módulo graduado  $M$  tenemos  $f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_S T)|_U$ .
- (c) Si  $S$  es generado por  $S_1$  como  $S_0$ -álgebra, entonces  $(M \otimes_S N)^\sim \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$  para cualquier par de  $S$ -módulos graduados  $M$  y  $N$ .

**Observación 2.7.5.** Si  $A$  es un anillo, entonces todo subesquema cerrado de  $\mathbb{P}_A^n$  es dado por una inmersión cerrada  $f : \text{Proj}(S/I) \rightarrow \text{Proj } S$  inducida por la proyección natural  $S \rightarrow S/I$ , donde  $S = A[x_0, \dots, x_n]$  e  $I \subseteq S$  es un ideal homogéneo. (ver [1])

**Definición 2.7.6.** Sea  $S$  un anillo graduado y  $X = \text{Proj } S$ . Para cualquier  $S$ -módulo graduado  $M$  y para cada  $n \in \mathbb{Z}$  definimos el módulo torcido  $M(n)$  por  $M(n)_d = M_{n+d}$ . Así  $M(n)$  es un  $S$ -módulo graduado. Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , definimos  $\mathcal{O}_X(n)$  como el haz  $S(n)^\sim$ . Llamamos **haz torcido de Serre** al haz  $\mathcal{O}_X(1)$ . Si  $\mathcal{F}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo, definimos su **haz torcido**  $\mathcal{F}(n)$  como el haz  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ .

**Proposición 2.7.17.** Sean  $S$  un anillo graduado y  $X = \text{Proj } S$ . Se cumplen:

- (a) El haz  $\mathcal{O}_X(n)$  es un haz inversible sobre  $X$ .
- (b) Para cualquier  $S$ -módulo graduado  $M$ , tenemos  $\widetilde{M}(n) \cong (M(n))^\sim$ . En particular,  $\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m)$ .

*Demostración.* (a) Sea  $f \in S_1$ . Por la proposición 2.7.16(b) tenemos

$$S(n)^\sim|_{D_+(f)} \cong (S(n)_{(f)})^\sim$$

Por otro lado, desde que la aplicación  $S_{(f)} \rightarrow S(n)_{(f)}$  dada por  $\frac{a}{f^k} \mapsto \frac{af^n}{f^k}$  es un isomorfismo de  $S_{(f)}$ -módulos, entonces  $(S(n)_{(f)})^\sim \cong (S_{(f)})^\sim$ . Luego

$$\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)} = S(n)^\sim|_{D_+(f)} \cong (S(n)_{(f)})^\sim \cong (S_{(f)})^\sim \cong \mathcal{O}_X|_{D_+(f)}.$$

Y como  $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$ , se sigue que  $\mathcal{O}_X(n)$  es un haz inversible.

(b) Por la observación 2.7.4(c) tenemos que

$$\widetilde{M}(n) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} S(n)^\sim \cong (M \otimes_S S(n))^\sim$$

Por otra parte, la aplicación  $M \otimes_S S(n) \rightarrow M(n)$  dada por  $m \otimes t \mapsto tm$  es un isomorfismo de  $S$ -módulos graduados, entonces  $(M \otimes_S S(n))^\sim \cong M(n)^\sim$ , y luego  $\widetilde{M}(n) \cong M(n)^\sim$ . En particular

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) &= S(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \\ &= S(n)^\sim(m) \cong (S(n)(m))^\sim \\ &\cong S(n+m)^\sim = \mathcal{O}_X(n+m). \end{aligned}$$

□

**Definición 2.7.7.** Sean  $S$  un anillo graduado,  $X = \text{Proj } S$  y  $\mathcal{F}$  un haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Definimos  $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ . A continuación

vamos a dotar a  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  de una estructura de anillo graduado y haremos de  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  un  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ -módulo graduado. En efecto, consideremos el homomorfismo natural

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n))$$

y el isomorfismo  $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X(m+n)$ , entonces tenemos el homomorfismo

$$\lambda_{m,n} : \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m+n)).$$

Dados dos elementos  $f = \sum_n f_n$  y  $g = \sum_n g_n$  de  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ , definimos el producto  $fg = \sum_{m,n} \lambda_{m,n}(f_m \otimes g_n)$ . Se comprueba fácilmente que este producto convierte a  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  en un anillo graduado. Ahora consideremos el homomorfismo natural

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{F}(n))$$

y el isomorfismo  $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{F}(n) \cong \mathcal{F}(m+n)$ , entonces tenemos el homomorfismo

$$\beta_{m,n} : \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}(m+n)).$$

Sean  $f = \sum_n f_n \in \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  y  $s = \sum_n s_n \in \Gamma_*(\mathcal{F})$ , definimos el producto por escalar  $fs = \sum_{m,n} \beta_{m,n}(f_m \otimes s_n)$ . Se comprueba inmediatamente que este producto convierte a  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  en un  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ -módulo graduado. Además, tenemos un homomorfismo natural de anillos graduados  $S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ , pues todo elemento  $s \in S_m$  determina en una manera natural una sección global  $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$ . Así,  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  tiene estructura de  $S$ -módulo graduado.

**Proposición 2.7.18.** Sea  $A$  un anillo,  $S = A[x_0, \dots, x_r]$ ,  $r \geq 0$ , y sea  $X = \text{Proj } S$ . Entonces  $S \cong \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ .

*Demostración.* Puesto que los elementos  $x_0, \dots, x_r \in S_1$  generan a  $S$  como  $A$ -álgebra, entonces los abiertos  $D_+(x_i)$  cubren a  $X$ . Sea  $\alpha : S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  el homomorfismo natural de anillos graduados. Este homomorfismo es la suma directa de los homomorfismo de grupos  $\alpha_n : S_n \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$  con  $n \in \mathbb{Z}$ ; donde para cada  $i$ ,  $\alpha_n(f)|_{D_+(x_i)} = \alpha_n^{x_i}(f)$  para todo  $f \in S_n$ , con  $\alpha_n^{x_i} : S_n \rightarrow S(n)_{(x_i)}$  definido por  $f \mapsto f/1$ . Así, para probar que  $\alpha$  es un isomorfismo, basta probar que cada  $\alpha_n$  es biyectiva.

Veamos que  $\alpha_n$  es inyectiva, tomemos  $f \in S_n$  tal que  $\alpha_n(f) = 0$ , esto implica que  $f/1 = 0$  en  $S(n)_{(x_i)}$  para todo  $i = 0, \dots, r$ . Fijando  $i$ , existe  $k \geq 0$  tal que  $x_i^k f = 0$ , y como  $x_i$  no es divisor de cero, tenemos que  $f = 0$ . Ahora veamos que  $\alpha_n$  es sobreyectiva. Dar un elemento de  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$  equivale a dar  $r + 1$  elementos  $\frac{f_i}{x_i^k} \in S(n)_{(x_i)}$  tal que  $\frac{f_i}{x_i^k} = \frac{f_j}{x_j^k}$  en  $S(n)_{(x_i x_j)}$  para todo  $i, j = 0, \dots, r$ , donde  $f_i \in S_{k+n}$  para todo  $i$ . Ahora encontremos un elemento  $f \in S_n$  tal que  $\frac{f}{1} = \frac{f_i}{x_i^k}$  en  $S(n)_{(x_i)}$  para todo  $i = 0, \dots, r$ ; para ello afirmamos que  $x_i^k$  divide a  $f_i$  para todo  $i = 0, \dots, r$ , lo que es equivalente a decir que todo monomial de  $f_i$  tiene a  $x_i^k$  como factor. Para el caso  $r = 0$ , tenemos  $X = D_+(x_0)$  lo que nos da un único elemento  $\frac{f_0}{x_0^k} \in S(n)_{(x_0)}$  donde  $f_0 \in S_{k+n}$ . Luego  $f_0 = ax_0^{k+n}$  para algún  $a \in A$ , entonces tomando  $f = ax_0^n \in S_n$  vemos que  $\frac{f}{1} = \frac{f_0}{x_0^k}$ , de donde se sigue que  $\alpha_n$  es sobreyectiva. Supongamos ahora que  $r > 0$  y fijemos un índice  $i$ . Tomando  $j \neq i$ , de la igualdad  $\frac{f_i}{x_i^k} = \frac{f_j}{x_j^k}$  y desde que  $x_i$  y  $x_j$  no son divisores de cero, se obtiene  $x_j^k f_i = x_i^k f_j$ . Ahora, si  $g_i$  es un monomial de  $f_i$ , entonces  $x_j^k g_i$  es un monomial que contiene a  $x_i^k$  como factor, de donde se sigue que  $x_i^k$  es un factor de  $g_i$ . De esta manera  $x_i^k$  divide a  $f_i$  para todo  $i$ , luego escribiendo  $f_i = x_i^k h_i$  donde  $h_i \in S_n$ , tenemos  $(x_i x_j)^k h_i = x_j^k f_i = x_i^k f_j = (x_i x_j)^k h_j$ , de donde  $h_i = h_j$  para todo  $j \neq i$ . Escogiendo  $f = h_i \in S_n$ , tenemos que  $\frac{f}{1} = \frac{x_i^k h_i}{x_i^k} = \frac{f_i}{x_i^k}$  para todo  $i$ , y por tanto  $\alpha_n$  es sobreyectiva.  $\square$

# Capítulo 3

## Cohomología

En este capítulo vamos a definir la noción de cohomología de haces y vamos a estudiar la cohomología de haces casi coherentes sobre un esquema noetheriano. Nuestro objetivo principal será estudiar la cohomología en el espacio proyectivo sobre un anillo noetheriano.

### 3.1 Funtores Derivados

**Definición 3.1.1.** Una *categoría abeliana* es una categoría  $\mathcal{A}$  tal que:

- (1) Los conjuntos de morfismos son grupos abelianos y la composición es lineal.
- (2) Sumas directas finitas existen.
- (3) Todo monomorfismo es el núcleo de algún morfismo y todo epimorfismo es el conúcleo de algún morfismo.

Ejemplos de categorías abelianas:

- (1)  $\mathbf{Ab}$ , la categoría de grupos abelianos.
- (2)  $\mathbf{Mod}(A)$ , la categoría de módulos sobre un anillo  $A$ .
- (3)  $\mathbf{Ab}(X)$ , la categoría de haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico  $X$ .
- (4)  $\mathbf{Mod}(X)$ , la categoría de haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$ .

Ahora, revisaremos algunos conceptos de álgebra homológica.

**Definición 3.1.2.** Una *cocadena compleja* en una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ , es una colección de objetos  $A^\bullet = \{A^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  junto con morfismos  $d^i : A^i \rightarrow A^{i+1}$  satisfaciendo  $d^{i+1} \circ d^i = 0$ . Escribimos una cocadena compleja como

una cadena ascendente

$$A^\bullet : \quad \dots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \longrightarrow \dots$$

Los morfismos  $d_A^i := d^i$  son llamados **operadores cobordantes**.

El objeto  $H^i(A^\bullet) = \text{Nuc}(d^i)/\text{Im}(d^{i-1})$  es llamado  **$i$ -ésimo objeto de cohomología** para la cocadena compleja  $A^\bullet$ .

**Definición 3.1.3.** Un **morfismo de cocadenas complejas**  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  es un conjunto de morfismos  $f^i : A^i \rightarrow B^i$  satisfaciendo  $f^{i+1} \circ d^i = d^i \circ f^i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Es decir, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d^i} & A^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & B^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & B^i & \xrightarrow{d^i} & B^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Si  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  es un morfismo de complejos, entonces  $f$  induce un morfismo natural  $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet)$ .

Si  $0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de complejos, entonces existen morfismos naturales  $\delta^i : H^i(C^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(A^\bullet)$  que nos dan una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet) \rightarrow H^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow \dots$$

Dado que es importante conocer cómo se obtienen los morfismos  $\delta^i$ , vamos a ver un esbozo de esto. Bastará aplicar el resultado conocido como lema de la serpiente, el cual es válido en cualquier categoría abeliana. Veremos un esbozo de la demostración de este resultado sólo en el caso de módulos sobre un anillo.

**Lema 3.1.1.** (*Lema de la serpiente*): En una categoría abeliana, sea un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

donde las filas son sucesiones exactas. Entonces existe un morfismo natural  $\delta : \text{Nuc}(c) \rightarrow \text{Conuc}(a)$  que nos da la sucesión exacta

$$\text{Nuc}(a) \rightarrow \text{Nuc}(b) \rightarrow \text{Nuc}(c) \xrightarrow{\delta} \text{Conuc}(a) \rightarrow \text{Conuc}(b) \rightarrow \text{Conuc}(c)$$

*Demostración.* En el caso de módulos sobre un anillo, el morfismo  $\delta$  puede ser construido de la siguiente manera: Consideremos un elemento  $x \in Nuc(c) \subseteq C$ . Como  $g : B \rightarrow C$  es sobreyectiva, entonces  $y \in B$  tal que  $g(y) = x$ . Ahora, por la conmutatividad del diagrama tenemos  $g'(b(y)) = c(g(y)) = c(x) = 0$ . Entonces  $b(y) \in Nuc(g') = Im(f')$ ; lo que implica que existe  $z \in A'$  tal que  $f'(z) = b(y)$ , donde  $z \in A'$  es único por la inyectividad de  $f'$ . Definimos  $\delta(x) = z + Im(a)$ . El homomorfismo  $\delta$  es bien definido y satisface las propiedades deseadas.  $\square$

Ahora, veamos cómo se obtienen los morfismos naturales  $\delta^i$ . Considere el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
H^i(A^\bullet) & \longrightarrow & H^i(B^\bullet) & \longrightarrow & H^i(C^\bullet) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
Nuc(\overline{d_A^i}) & \longrightarrow & Nuc(\overline{d_B^i}) & \longrightarrow & Nuc(\overline{d_C^i}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A^i/Im(d_A^{i-1}) & \xrightarrow{\overline{f^i}} & B^i/Im(d_B^{i-1}) & \xrightarrow{\overline{g^i}} & C^i/Im(d_C^{i-1}) \\
\downarrow \overline{d_A^i} & & \downarrow \overline{d_B^i} & & \downarrow \overline{d_C^i} \\
Nuc(d_A^{i+1}) & \xrightarrow{f^{i+1}|_*} & Nuc(d_B^{i+1}) & \xrightarrow{g^{i+1}|_*} & Nuc(d_C^{i+1}) \\
\downarrow \pi_A^{i+1} & & \downarrow \pi_B^{i+1} & & \downarrow \pi_C^{i+1} \\
Conuc(\overline{d_A^i}) & \longrightarrow & Conuc(\overline{d_B^i}) & \longrightarrow & Conuc(\overline{d_C^i}) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
H^{i+1}(A^\bullet) & \longrightarrow & H^{i+1}(B^\bullet) & \longrightarrow & H^{i+1}(C^\bullet)
\end{array}$$

los morfismos  $\delta^i$  se obtienen por el lema de la serpiente.

**Definición 3.1.4.** Una **homotopía**  $\Sigma : f \rightarrow g$  entre dos morfismos de cocadenas  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  es una colección de morfismos  $\Sigma^i : A^i \rightarrow B^{i-1}$  tal que  $g - f = d \circ \Sigma + \Sigma \circ d$ ; es decir

$$g^i - f^i = d^{i-1} \circ \Sigma^i + \Sigma^{i+1} \circ d^i \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}$$

como nos muestra el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d^i} & A^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & \swarrow \Sigma^i & \downarrow & \swarrow \Sigma^{i+1} & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & B^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & B^i & \xrightarrow{d^i} & B^{i+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Cuando existe una homotopía  $\Sigma : f \rightarrow g$ , escribimos  $f \sim g$  y decimos que  $f$  y  $g$  son **homotópicos**.

Si  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  son dos morfismos homotópicos de cocadenas, entonces  $H^i(f) = H^i(g)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 3.1.5.** Un funtor covariante  $F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$  de una categoría abeliana a otra es **aditivo** si para cualquier par de objetos  $A, A' \in \mathfrak{U}$ , la aplicación inducida  $\text{Hom}(A, A') \rightarrow \text{Hom}(FA, FA')$  es un homomorfismo de grupos abelianos. Decimos que  $F$  es **exacto a izquierda** si es aditivo y para toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

en  $\mathfrak{U}$ , la sucesión

$$0 \longrightarrow FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA''$$

es exacta en  $\mathfrak{B}$ .

De manera similar, decimos que  $F$  es **exacto a derecha** si es aditivo y para toda sucesión exacta corta en  $\mathfrak{U}$  como antes, la sucesión

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0$$

es exacta en  $\mathfrak{B}$ . El funtor  $F$  es **exacto** si es exacto a izquierda y a derecha. Cuando sólo la parte del medio  $FA' \rightarrow FA \rightarrow FA''$  es exacta, decimos que  $F$  es **exacto al medio**. Para un funtor contravariante, las definiciones son análogas. Por ejemplo,  $F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$  es **exacto a izquierda** si es aditivo y para toda sucesión exacta corta como antes, la sucesión

$$0 \longrightarrow FA'' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'$$

es exacta en  $\mathfrak{B}$ .

**Observación 3.1.1.** Si  $\mathfrak{U}$  es una categoría abeliana y  $A$  es un objeto fijo, entonces el funtor  $B \mapsto \text{Hom}(A, B)$  usualmente denotado por  $\text{Hom}(A, \cdot)$ , es un funtor covariante exacto a izquierda de  $\mathfrak{U}$  a  $\mathfrak{Ab}$ . El funtor  $\text{Hom}(\cdot, A)$  es un funtor contravariante exacto a izquierda de  $\mathfrak{U}$  a  $\mathfrak{Ab}$ .

A continuación, proseguiremos con resoluciones y funtores derivados.

**Definición 3.1.6.** Un objeto  $I$  de  $\mathfrak{U}$  es llamado **inyectivo** si el funtor  $\text{Hom}(\cdot, I)$  es exacto. Esto equivale a lo siguiente: para todo par de objetos  $A, B \in \mathfrak{U}$ , todo morfismo  $h : A \rightarrow I$  y todo monomorfismo  $f : A \rightarrow B$ , existe un morfismo  $g : B \rightarrow I$  tal que  $h = g \circ f$  como en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & & \searrow h & \downarrow g \\ & & & & I \end{array}$$

**Definición 3.1.7.** Una **resolución inyectiva** de un objeto  $A$  de  $\mathfrak{U}$  es un complejo  $I^\bullet$ , definido para todo  $i \geq 0$ , junto con un morfismo  $\varepsilon_A : A \rightarrow I^0$  tal que  $I^i$  es un objeto inyectivo de  $\mathfrak{U}$  para cada  $i \geq 0$ , y tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

es exacta.

Decimos que  $\mathfrak{U}$  tiene **suficientes inyectivos** si para todo objeto  $A$ , existe un objeto inyectivo  $I^0$  y un monomorfismo  $A \rightarrow I^0$ . Si  $\mathfrak{U}$  es una categoría abeliana con suficientes inyectivos, entonces todo objeto  $A$  de  $\mathfrak{U}$  tiene una resolución inyectiva.

A continuación enunciaremos una propiedad importante sobre resoluciones inyectivas.

**Proposición 3.1.2.** Si  $\mathfrak{U}$  es una categoría abeliana con suficientes inyectivos, y si  $A, B \in \mathfrak{U}$  tienen resoluciones  $I^\bullet$  y  $J^\bullet$  respectivamente, donde  $J^\bullet$  es una resolución inyectiva, entonces dado un morfismo  $\alpha : A \rightarrow B$ , existe un morfismo de complejos  $\varphi : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$  tal que  $\varphi^0 \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ \alpha$ , y cualquier par de tales morfismos son homotópicos.

*Demostración.* Ver [5].

□

Consideremos una categoría abeliana  $\mathfrak{U}$  con suficientes inyectivos, y sea  $F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$  un funtor covariante exacto a izquierda. Sea  $\mathcal{I}$  una asignación que a cada objeto  $A$  de  $\mathfrak{U}$  le hace corresponder una resolución inyectiva  $I^\bullet$  de  $A$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \dots$$

Entonces tenemos una cocadena compleja

$$FI^\bullet : \quad 0 \longrightarrow FI^0 \longrightarrow FI^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow FI^n \longrightarrow \dots$$

Construimos para cada  $i \geq 0$  los **funtores derivados a derecha**  $R_{\mathcal{I}}^i F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$  de  $F$  como sigue:

Primero definimos  $R_{\mathcal{I}}^i F(A) := H^i(FI^\bullet)$ .

A continuación observemos que, si  $\varphi : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$  es un morfismo de complejos en  $\mathfrak{U}$ , entonces la correspondencia  $F\varphi : FI^\bullet \rightarrow FJ^\bullet$  dada por  $(F\varphi)^i := F(\varphi^i) : FI^i \rightarrow FJ^i$ , es un morfismo de complejos en  $\mathfrak{B}$ . En efecto, como  $\varphi^{i+1} \circ d^i = d^i \circ \varphi^i$ , entonces

$$\begin{aligned} (F\varphi)^{i+1} \circ F(d^i) &= F(\varphi^{i+1}) \circ F(d^i) = F(\varphi^{i+1} \circ d^i) = F(d^i \circ \varphi^i) \\ &= F(d^i) \circ F(\varphi^i) = F(d^i) \circ F(\varphi)^i \end{aligned}$$

Así, para cada  $i \geq 0$  tenemos un morfismo  $H^i(F\varphi) : H^i(FI^\bullet) \rightarrow H^i(FJ^\bullet)$ .

Ahora, dados  $A, B \in \mathfrak{U}$  con resoluciones inyectivas  $I^\bullet$  y  $J^\bullet$  respectivamente, y dado un morfismo  $\alpha : A \rightarrow B$ , sabemos que existe un morfismo de complejos  $\varphi : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$  tal que  $\varphi^0 \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ \alpha$ , y cualquier par de tales morfismos son homotópicos. Así, podemos definir  $R_{\mathcal{I}}^i F(\alpha) := H^i(F\varphi)$  y esta definición no depende de  $\varphi$ ; pues si  $\psi : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$  es otro morfismo de complejos con la misma propiedad, sabemos que existe una homotopía  $k : \varphi \rightarrow \psi$ , de donde obtenemos una homotopía  $Fk : F\varphi \rightarrow F\psi$ , y por tanto tenemos que  $H^i(F\varphi) = H^i(F\psi)$ . Así, se tiene un morfismo bien definido  $R_{\mathcal{I}}^i F(\alpha) : R_{\mathcal{I}}^i F(A) \rightarrow R_{\mathcal{I}}^i F(B)$ .

**Teorema 3.1.3.** *Sea  $\mathfrak{U}$  una categoría abeliana con suficientes inyectivos, y sea  $F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$  un funtor covariante exacto a izquierda a otra categoría abeliana  $\mathfrak{B}$ . Entonces*

- (a) *Para cada  $i \geq 0$ ,  $R_{\mathcal{I}}^i F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$  es un funtor aditivo, el cual es independiente (salvo isomorfismo de funtores) de la asignación  $\mathcal{I}$ . Denotamos este funtor por  $R^i F$ .*
- (b) *Existe un isomorfismo natural  $F \cong R^0 F$ .*
- (c) *Para cada sucesión exacta corta  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$  y cada  $i \geq 0$ , existe un morfismo  $\delta^i : R^i F(A'') \rightarrow R^{i+1} F(A')$  tal que la siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots \rightarrow R^i F(A') \rightarrow R^i F(A) \rightarrow R^i F(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1} F(A') \rightarrow R^{i+1} F(A) \rightarrow \cdots$$

- (d) Dado un morfismo de la sucesión exacta (c) a otra sucesión exacta  $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$ , los  $\delta$ 's nos dan un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R^i F(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i F(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} F(B') \end{array}$$

- (e) Para cada objeto inyectivo  $I$  de  $\mathfrak{A}$  y cada  $i > 0$  se tiene  $R^i F(I) = 0$ .

**Definición 3.1.8.** Sean  $\mathfrak{A}$  una categoría abeliana con suficientes inyectivos,  $\mathfrak{B}$  una categoría abeliana y  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  un funtor covariante exacto a izquierda. Un objeto  $J$  de  $\mathfrak{A}$  es llamado **acíclico** para  $F$  si  $R^i F(J) = 0$  para  $i > 0$ .

**Proposición 3.1.4.** Sean  $\mathfrak{A}$  una categoría abeliana con suficientes inyectivos,  $\mathfrak{B}$  una categoría abeliana y  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  un funtor covariante exacto a izquierda. Supongamos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^0 \longrightarrow J^1 \longrightarrow \dots$$

donde cada  $J^i$  es acíclico para  $F$ ,  $i \geq 0$  (en este caso decimos que  $J^\bullet$  es una resolución  $F$ -acíclica de  $A$ ). Entonces para cada  $i \geq 0$  existe un isomorfismo natural

$$R^i F(A) \cong H^i(FJ^\bullet).$$

## 3.2 Cohomología de Haces

En esta sección definiremos cohomología de haces tomando los funtores derivados del funtor sección global.

**Observación 3.2.1.** Si  $A$  es un anillo, entonces todo  $A$ -módulo es isomorfo a un submódulo de un  $A$ -módulo inyectivo. (ver [5])

**Proposición 3.2.1.** Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado. Entonces la categoría de haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos tiene suficientes inyectivos.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  un haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Para cada  $x \in X$ , el tallo  $\mathcal{F}_x$  es un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo. Por tanto existe un monomorfismo  $\mathcal{F}_x \rightarrow I_x$ , donde  $I_x$  es un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo inyectivo. Para cada  $x \in X$ , sea  $j : \{x\} \rightarrow X$

la función continua de inclusión. Consideremos  $I_x$  como un haz constante en el espacio topológico irreducible  $\{x\}$ . Note que el haz  $j_*(I_x)$  tiene una estructura natural de  $\mathcal{O}_X$ -módulo. En efecto, dado un abierto  $U \subseteq X$  que contiene a  $x$ , para  $r \in \mathcal{O}_X(U)$  y  $s_x \in j_*(I_x)(U) = I_x$  podemos definir  $r \cdot s_x := r_x \cdot s_x \in I_x = j_*(I_x)(U)$ . Consideremos el haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\mathcal{J} = \prod_{x \in X} j_*(I_x)$ .

Para cualquier haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\mathcal{G}$  tenemos

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) = \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_*(I_x))$$

Por otro lado, para cada  $x \in X$  tenemos un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_*(I_x)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x)$$

En efecto, tenemos un isomorfismo de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos  $(j_*(I_x))_x \cong I_x$  dado por  $\langle U, t \rangle \mapsto t$ . Ahora, dado un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow j_*(I_x)$ , tomando tallo en el punto  $x$  tenemos un homomorfismo de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos  $\varphi_x : \mathcal{G}_x \rightarrow (j_*(I_x))_x \cong I_x$ . Recíprocamente, dado un homomorfismo de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos  $\alpha : \mathcal{G}_x \rightarrow I_x$ , podemos definir un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\bar{\alpha} : \mathcal{G} \rightarrow j_*(I_x)$  por  $\bar{\alpha}(U)(s) = \alpha(s_x) \in I_x = j_*(I_x)(U)$ , para todo abierto  $U \subseteq X$  que contiene a  $x$  y para todo  $s \in \mathcal{G}(U)$ . Es claro que la aplicación  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$  es la inversa de la aplicación  $\varphi \mapsto \varphi_x$ . Así concluimos que existe un morfismo de haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}$ . Este morfismo es obtenido de los monomorfismos de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos  $\mathcal{F}_x \rightarrow I_x$  y así tenemos que  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}$  es un monomorfismo. Finalmente veamos que  $\mathcal{J}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo inyectivo. Dada una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$$

tomando tallos tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{G}'_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G}''_x \rightarrow 0$$

y luego tomando  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\cdot, I_x)$  tenemos una sucesión exacta (pues  $I_x$  es un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo inyectivo)

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}''_x, I_x) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}'_x, I_x) \rightarrow 0$$

Finalmente tomando el producto directo sobre todos los puntos  $x \in X$  tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}''_x, I_x) \rightarrow \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x) \rightarrow \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}'_x, I_x) \rightarrow 0$$

de donde concluimos que la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}'', \mathcal{J}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}', \mathcal{J}) \rightarrow 0$$

es exacta. Por tanto  $\mathcal{J}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo inyectivo.  $\square$

**Corolario 3.2.2.** *Si  $X$  es cualquier espacio topológico, entonces la categoría de haces de grupos abelianos sobre  $X$  tiene suficientes inyectivos.*

*Demostración.* Basta hacer  $X$  un espacio anillado tomando  $\mathcal{O}_X$  como el haz asociado al prehaz constante de anillos  $\mathbb{Z}$ . Luego  $(X, \mathcal{O}_X)$  es un espacio anillado y la categoría de haces de grupos abelianos sobre  $X$  es igual a la categoría de haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Por tanto el corolario se sigue de la proposición anterior.  $\square$

**Definición 3.2.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Sea  $\Gamma(X, \cdot)$  el funtor sección global de  $\mathfrak{Ab}(X)$  a  $\mathfrak{Ab}$ . Definimos los **funtores de cohomología**  $H^i(X, \cdot)$  como los funtores derivados a derecha de  $\Gamma(X, \cdot)$ . Para cualquier haz  $\mathcal{F}$ , los grupos  $H^i(X, \mathcal{F})$  son los **grupos de cohomología** de  $\mathcal{F}$ . Note que aún si  $X$  y  $\mathcal{F}$  tienen alguna estructura adicional, por ejemplo si  $X$  es un esquema y  $\mathcal{F}$  es un haz casi coherente, siempre tomaremos cohomología en este sentido, viendo  $\mathcal{F}$  simplemente como un haz de grupos abelianos sobre el espacio topológico  $X$ .*

**Lema 3.2.3.** *Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  es un espacio anillado, entonces cualquier  $\mathcal{O}_X$ -módulo inyectivo es flasco.*

*Demostración.* Para cualquier subconjunto abierto  $U \subseteq X$ , sea  $j!(\mathcal{O}_X|_U)$  la extensión de  $\mathcal{O}_X|_U$  por cero fuera de  $U$ . Sea  $\mathcal{J}$  un  $\mathcal{O}_X$ -módulo inyectivo y sean  $V \subseteq U$  conjuntos abiertos. Teniendo en cuenta la definición de  $j!(\mathcal{O}_X|_U)$  (ver proposición 2.2.11), sean  $j!(\mathcal{O}_X|_V) = N_1^+$  y  $j!(\mathcal{O}_X|_U) = N_2^+$ . Definimos un morfismo de prehaces  $\gamma : N_1 \rightarrow N_2$  por  $\gamma(W) = \text{id}_{\mathcal{O}_X(W)}$  si  $W \subseteq V$ , y  $\gamma(W) = 0$  si  $W \not\subseteq V$ . Tenemos que  $\gamma(W)$  es inyectivo para todo abierto  $W \subseteq X$  y por tanto el morfismo inducido  $\gamma^+ : j!(\mathcal{O}_X|_V) \rightarrow j!(\mathcal{O}_X|_U)$  es inyectivo. Este morfismo es un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Como  $\mathcal{J}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo inyectivo, tenemos la sobrejección  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j!(\mathcal{O}_X|_U), \mathcal{J}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j!(\mathcal{O}_X|_V), \mathcal{J})$ . Por otro lado, tenemos un isomorfismo  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j!(\mathcal{O}_X|_U), \mathcal{J}) \cong \mathcal{J}(U)$  para todo abierto  $U \subseteq X$ . En efecto, sea  $\psi : j!(\mathcal{O}_X|_U) \rightarrow \mathcal{J}$  un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Denotemos  $j!(\mathcal{O}_X|_U) = N^+$  y sea  $\varphi = \psi \circ \theta : N \rightarrow \mathcal{J}$ , donde  $\theta : N \rightarrow j!(\mathcal{O}_X|_U)$  es

el morfismo natural. Entonces tenemos el elemento  $s = \varphi(U)(1) \in \mathcal{J}(U)$ . Recíprocamente, dado  $s \in \mathcal{J}(U)$ , podemos definir un morfismo  $\varphi : N \rightarrow \mathcal{J}$  por  $\varphi(W)(a) = a \cdot s|_W$  si  $W \subseteq U$  y  $\varphi(W) = 0$  si  $W \not\subseteq U$ . Luego tenemos un morfismo inducido  $\psi = \varphi^+ : j!(\mathcal{O}_X|_U) \rightarrow \mathcal{J}$ . Este morfismo es un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Es claro que cada construcción es la inversa de la otra. Finalmente, note que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j!(\mathcal{O}_X|_U), \mathcal{J}) & \longrightarrow & \mathcal{J}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j!(\mathcal{O}_X|_V), \mathcal{J}) & \longrightarrow & \mathcal{J}(V) \end{array}$$

donde las flechas horizontales son los isomorfismos naturales. Como la flecha vertical izquierda es una sobreyección, concluimos que  $\mathcal{J}(U) \rightarrow \mathcal{J}(V)$  es una sobreyección. Por tanto  $\mathcal{J}$  es flasco.  $\square$

**Proposición 3.2.4.** *Si  $\mathcal{F}$  es un haz flasco sobre un espacio topológico  $X$ , entonces  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  para todo  $i \geq 1$*

*Demostración.* Consideremos un monomorfismo  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}$ , donde  $\mathcal{J}$  es un objeto inyectivo de  $\mathfrak{Ab}(X)$ . Sea  $\mathcal{G}$  el cociente

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

Por hipótesis tenemos que  $\mathcal{F}$  es flasco, además  $\mathcal{J}$  es flasco por la proposición anterior. Luego, por la proposición 2.3.3 tenemos que  $\mathcal{G}$  es flasco. Como  $\mathcal{F}$  es flasco, por la proposición 2.3.2 tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

Por otro lado, como  $\mathcal{J}$  es inyectivo, tenemos  $H^i(X, \mathcal{J}) = 0$  para todo  $i \geq 1$ . (teorema 3.1.3(e)) Así, de la sucesión exacta larga de cohomología, conseguimos  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$  y  $H^i(X, \mathcal{F}) = H^{i-1}(X, \mathcal{G})$  para todo  $i \geq 2$ . Como  $\mathcal{G}$  es flasco, por inducción en  $i$  conseguimos el resultado.  $\square$

**Observación 3.2.2.** Este resultado nos dice que haces flascos son acíclicos para el funtor  $\Gamma(X, \cdot)$ . Por tanto podemos calcular cohomología usando resoluciones flascas (proposición 3.1.4). En particular tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.5.** *Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado. Entonces los funtores derivados del funtor  $\Gamma(X, \cdot)$  de  $\mathfrak{Mod}(X)$  a  $\mathfrak{Ab}$  coinciden con los funtores de cohomología  $H^i(X, \cdot)$ .*

*Demostración.* Considerando  $\Gamma(X, \cdot)$  como un funtor de  $\mathfrak{Mod}(X)$  a  $\mathfrak{Ab}$ , calculamos sus funtores derivados tomando resoluciones inyectivas en la categoría  $\mathfrak{Mod}(X)$ . Pero cualquier inyectivo es flasco (lema 3.2.3) y flascos son acíclicos (proposición 3.2.4), así que esta resolución da los funtores de cohomología usual (proposición 3.1.4).  $\square$

**Observación 3.2.3.** Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado, y sea  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ . Entonces para cualquier haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\mathcal{F}$ ,  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  tiene una estructura natural de  $A$ -módulo. En particular, como en  $\mathfrak{Mod}(X)$  podemos calcular cohomología usando resoluciones en  $\mathfrak{Mod}(X)$ , entonces todos los grupos de cohomología de  $\mathcal{F}$  tienen una estructura natural de  $A$ -módulo; sucesiones exactas largas de cohomologías son sucesiones de  $A$ -módulos, etc. También, si  $X$  es un esquema sobre  $\text{Spec } B$  para algún anillo  $B$ , entonces los grupos de cohomología de cualquier  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{F}$  tienen una estructura natural de  $B$ -módulo.

**Proposición 3.2.6.** Sean  $Y$  un subconjunto cerrado de  $X$ ,  $\mathcal{F}$  un haz de grupos abelianos sobre  $Y$  y  $j : Y \rightarrow X$  la inclusión. Entonces  $H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F})$ , donde  $j_*\mathcal{F}$  es la extensión de  $\mathcal{F}$  por cero fuera de  $Y$ .

*Demostración.* Note que por la proposición 2.2.11(a) se tiene que  $j_*$  es un funtor exacto. Así, si  $\mathcal{J}^\bullet$  es una resolución flasca de  $\mathcal{F}$  sobre  $Y$ , entonces  $j_*\mathcal{J}^\bullet$  es una resolución flasca de  $j_*\mathcal{F}$  sobre  $X$ . Y como  $\Gamma(Y, \mathcal{J}^i) = \Gamma(X, j_*\mathcal{J}^i)$ , entonces conseguimos los mismos grupos de cohomología.  $\square$

**Proposición 3.2.7.** Sea  $\{\mathcal{F}_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in \Lambda}$  un sistema directo de haces de grupos abelianos en un espacio topológico noetheriano  $X$ . Entonces el morfismo natural

$$\varinjlim_{\alpha} H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \rightarrow H^i(X, \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha)$$

es un isomorfismo para todo  $i \geq 0$ .

*Demostración.* Para cualquier haz de grupos abelianos  $\mathcal{F}$ , sea  $\mathcal{F}^d$  su haz de secciones discontinuas y consideremos  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^d$  vía la inclusión natural (ver definición 2.3.2 y observación 2.3.2). Esta construcción es funtorial; en efecto, dado un morfismo de haces  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , podemos definir un morfismo de haces  $\varphi^d : \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{G}^d$  por  $\varphi^d(U)(s)(p) = \varphi_p(s(p))$  para todo abierto  $U \subseteq X$ ,  $p \in U$  y  $s \in \mathcal{F}^d(U)$ . Más aún, se tiene el siguiente diagrama

conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^d \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi^d \\ \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^d \end{array}$$

Así, para cada  $\alpha \leq \beta$  tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\alpha\beta}^d & \longrightarrow & \mathcal{G}_\alpha \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_{\alpha\beta} & & \downarrow \varphi_{\alpha\beta}^d & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_\beta & \longrightarrow & \mathcal{F}_\beta^d & \longrightarrow & \mathcal{G}_\beta \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3.2.1)$$

esto induce una sucesión de límites directos

$$0 \rightarrow \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha^d \rightarrow \varinjlim_\alpha \mathcal{G}_\alpha \rightarrow 0$$

Ahora, note que tomar tallo preserva sumas directas y conúcleos, de donde tenemos que tomar tallo preserva límites directos. Así, la exactitud de la sucesión de límites directos se sigue de la exactitud de tomar tallo y la exactitud de tomar límites directos en la categoría de grupos abelianos.

El morfismo de sucesiones exactas (3.2.1) nos induce un morfismo de sucesiones largas de cohomología, lo cual a su vez nos induce una sucesión exacta larga de límites directos de grupos abelianos. Así, tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} \varinjlim_\alpha \Gamma(X, \mathcal{F}_\alpha^d) & \longrightarrow & \varinjlim_\alpha \Gamma(X, \mathcal{G}_\alpha) & \longrightarrow & \varinjlim_\alpha H^1(X, \mathcal{F}_\alpha) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Gamma(X, \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha^d) & \longrightarrow & \Gamma(X, \varinjlim_\alpha \mathcal{G}_\alpha) & \longrightarrow & H^1(X, \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde las flechas verticales en la izquierda son isomorfismos (proposición 2.2.13) y los ceros en la derecha se deben a que  $\mathcal{F}_\alpha^d$  y  $\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha^d$  son flascos (observación 2.3.2 y proposición 2.3.4). Se sigue que la flecha vertical en la derecha es un isomorfismo.

También, para cada  $i \geq 1$  tenemos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varinjlim_\alpha H^i(X, \mathcal{G}_\alpha) & \longrightarrow & \varinjlim_\alpha H^{i+1}(X, \mathcal{F}_\alpha) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^i(X, \varinjlim_\alpha \mathcal{G}_\alpha) & \longrightarrow & H^{i+1}(X, \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde los ceros en los extremos se deben a que  $\mathcal{F}_\alpha^d$  y  $\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha^d$  son flascos. Por tanto, por inducción en  $i$  conseguimos el resultado.  $\square$

### 3.3 Cohomología de un Esquema Afín Noetheriano

**Proposición 3.3.1.** (Teorema de Krull). *Sean  $A$  un anillo noetheriano,  $\mathfrak{a}$  un ideal,  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado y  $N$  un submódulo de  $M$ . Entonces la topología  $\mathfrak{a}$ -ádica en  $N$  es inducida por la topología  $\mathfrak{a}$ -ádica en  $M$ . En particular, para  $n > 0$  existe  $k \geq n$  tal que  $\mathfrak{a}^n N \supseteq N \cap \mathfrak{a}^k M$ .*

*Demostración.* Ver [3].  $\square$

**Definición 3.3.1.** *Sean  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo y  $\mathfrak{a} \subseteq A$  un ideal. Definimos un submódulo  $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$  de  $M$  por  $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{m \in M : \mathfrak{a}^n m = 0 \text{ para algún } n > 0\}$ .*

**Lema 3.3.2.** *Sean  $A$  un anillo noetheriano,  $\mathfrak{a}$  un ideal de  $A$  e  $I$  un  $A$ -módulo inyectivo. Entonces el submódulo  $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$  es también un  $A$ -módulo inyectivo.*

*Demostración.* Para mostrar que  $J$  es inyectivo es suficiente mostrar que para cualquier ideal  $\mathfrak{b} \subseteq A$  y cualquier morfismo  $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$ , existe un morfismo  $\psi : A \rightarrow J$  tal que  $\psi|_{\mathfrak{b}} = \varphi$  (ver [6]). Desde que  $A$  es noetheriano,  $\mathfrak{b}$  es finitamente generado. Por otro lado, todo elemento de  $J$  es anulado por alguna potencia de  $\mathfrak{a}$ , así que existe  $n > 0$  tal que  $\mathfrak{a}^n \varphi(\mathfrak{b}) = 0$ , o equivalentemente,  $\varphi(\mathfrak{a}^n \mathfrak{b}) = 0$ . Aplicando la proposición 3.3.1 a la inclusión  $\mathfrak{b} \subseteq A$  conseguimos  $k \geq n$  con  $\mathfrak{a}^n \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^k$ . De aquí  $\varphi(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^k) = 0$ ; así que el morfismo  $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$  se factoriza a través de  $\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^k$ . Consideremos ahora el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & A/\mathfrak{a}^k & & \\
 \uparrow & & \uparrow & \searrow \psi' & \\
 \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^k & \longrightarrow & J \longrightarrow I
 \end{array}$$

Desde que  $I$  es inyectivo, el morfismo  $\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^k \rightarrow I$  se extiende a un morfismo  $\psi'$ . Pero la imagen de  $\psi'$  es anulada por  $\mathfrak{a}^k$ , por tanto es contenida en  $J$ . Componiendo con  $A \rightarrow A/\mathfrak{a}^k$  obtenemos el morfismo  $\psi : A \rightarrow J$  extendiendo a  $\varphi$ .  $\square$

**Lema 3.3.3.** *Sea  $A$  un anillo noetheriano y sea  $I$  un  $A$ -módulo inyectivo. Entonces para todo  $f \in A$ , el homomorfismo natural  $I \rightarrow I_f$  es sobreyectivo.*

*Demostración.* Para cada  $i > 0$  sea  $\mathfrak{b}_i = \text{Ann}(f^i)$ . Entonces  $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_2 \subseteq \dots$  y desde que  $A$  es noetheriano, existe  $r$  tal que  $\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_{r+1} = \dots$ . Ahora sea  $\theta : I \rightarrow I_f$  el homomorfismo natural y tomemos  $x \in I_f$ . Por definición existe  $y \in I$  y  $n \geq 0$  tal que  $x = y/f^n$ . Ahora definimos el homomorfismo de  $A$ -módulos  $\varphi : \langle f^{n+r} \rangle \rightarrow I$  por  $af^{n+r} \mapsto af^r y$ ; esto es posible porque  $\text{Ann}(f^{n+r}) = \mathfrak{b}_{n+r} = \mathfrak{b}_r = \text{Ann}(f^r)$ . Desde que  $I$  es inyectivo,  $\varphi$  se extiende a un homomorfismo  $\psi : A \rightarrow I$ . Sea  $z = \psi(1)$ . Entonces

$$f^{n+r}z = f^{n+r}\psi(1) = \psi(f^{n+r}) = \varphi(f^{n+r}) = f^r y$$

Luego  $\theta(z) = z/1 = y/f^n = x$ . Por tanto  $\theta$  es sobreyectivo.  $\square$

**Observación 3.3.1.** Dado un espacio topológico noetheriano  $X$ , como toda colección no vacía de subconjuntos cerrados de  $X$  tiene elemento minimal, entonces se tiene la siguiente propiedad:

Inducción noetheriana:

Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad de subconjuntos cerrados de  $X$  tal que satisface:

(1)  $\emptyset$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ .

(2) si  $Y$  es un subconjunto cerrado de  $X$  tal que todo subconjunto cerrado propio de  $Y$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ , entonces  $Y$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ .

Entonces  $X$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ .

**Lema 3.3.4.** *Sean  $A$  un anillo noetheriano,  $M$  un  $A$ -módulo,  $\mathfrak{a} \subseteq A$  un ideal y  $X = \text{Spec } A$ . Entonces  $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ , donde  $Z = V(\mathfrak{a})$  y  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$*

*Demostración.* Sean  $U = X - Z$  y  $j : U \hookrightarrow X$  el morfismo de inclusión. Como  $\mathcal{F}$  es casi coherente entonces  $\mathcal{F}|_U$  es casi coherente. Y como  $U$  es un esquema noetheriano, entonces  $j_*(\mathcal{F}|_U)$  es casi coherente (proposición 2.7.12(c)). De la proposición 2.3.6 se sigue que  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  es casi coherente. Por otro lado,  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(X)$  si y sólo si  $s \in \mathcal{F}(X)$  y  $\text{Sop}(s) \subseteq Z$ . Luego, identificando  $\mathcal{F}(X)$  con  $M$ ,  $s$  se corresponde con un elemento  $m \in M$  tal que  $\text{Sop}(m) \subseteq V(\mathfrak{a})$ . Ahora,  $\text{Sop}(m) = V(\text{Ann}(m))$ ; así que  $\text{Sop}(m) \subseteq V(\mathfrak{a})$  si y sólo si  $V(\text{Ann}(m)) \subseteq V(\mathfrak{a})$ , lo que es equivalente a  $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\text{Ann}(m)}$ ; lo cual a su vez equivale a  $\mathfrak{a}^n \subseteq \text{Ann}(m)$  para

algún  $n \geq 1$ , pues  $A$  es noetheriano. Se sigue que  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(X) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$  y por tanto  $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ .  $\square$

**Proposición 3.3.5.** *Sean  $A$  un anillo noetheriano y  $X = \text{Spec } A$ . Si  $I$  es un  $A$ -módulo inyectivo, entonces el haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\tilde{I}$  es flasco.*

*Demostración.*

Sea  $\mathcal{P}$  la propiedad sobre subconjuntos cerrados  $Y$  de  $X$ :

$\mathcal{P}$  : para todo módulo inyectivo  $I$  con  $\text{Sop}(I) \subseteq Y$ , se tiene que  $\tilde{I}$  es flasco

Note que la afirmación de la proposición es precisamente el caso  $Y = X$ , así que usaremos inducción noetheriana. Es claro que  $\emptyset$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ . Ahora, fijemos un subconjunto cerrado  $Y$  de  $X$  tal que todo subconjunto cerrado propio de  $Y$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ . Debemos mostrar que  $Y$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ . Sea  $I$  un  $A$ -módulo inyectivo con  $\text{Sop}(I) \subseteq Y$ .

Tenemos dos casos  $\overline{\text{Sop}(I)} \subsetneq Y$  o  $\overline{\text{Sop}(I)} = Y$ . En el primer caso,  $\text{Sop}(I)$  está contenido en un subconjunto cerrado propio de  $Y$ , así que en este caso  $\tilde{I}$  es flasco. En el segundo caso, para mostrar que  $\tilde{I}$  es flasco, será suficiente mostrar que  $\Gamma(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{I})$  es sobreyectiva, para cualquier conjunto abierto  $U \subseteq X$ . Si  $Y \cap U = \emptyset$ , no hay nada que probar, pues en este caso  $\tilde{I}(U) = 0$ . Si  $Y \cap U \neq \emptyset$ , existe  $f \in A$  tal que  $D(f) \subseteq U$  y  $D(f) \cap Y \neq \emptyset$ . Sea  $Z = X \setminus D(f)$ .

Sea  $J = \mathcal{H}_Z^0(\tilde{I})(X)$ . Si  $\mathfrak{a}$  es el ideal generado por  $f$ , entonces por el lema 3.3.4 se tiene  $J \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$  y por el lema 3.3.2 tenemos que  $J$  es un  $A$ -módulo inyectivo. Como  $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I) \subseteq I$ , entonces  $\text{Sop}(J) = \text{Sop}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)) \subseteq \text{Sop}(I) \subseteq Y$ . Y como  $\text{Sop}(J) \subseteq Z$ , se sigue que  $\text{Sop}(J) \subseteq Y \cap Z$ . Como  $Y \cap D(f) \neq \emptyset$ , entonces  $Y \cap Z \subsetneq Y$  y por tanto  $Y \cap Z$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ . Luego  $\tilde{J}$  es flasco. Por el lema anterior tenemos que  $\mathcal{H}_Z^0(\tilde{I})$  es casi coherente y  $\mathcal{H}_Z^0(\tilde{I}) \cong \tilde{J}$ . Desde que  $\tilde{J}$  es flasco, se sigue que  $\mathcal{H}_Z^0(\tilde{I})(X) \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\tilde{I})(U)$  es sobreyectiva. Dado  $s \in \tilde{I}(U)$ , por el lema 3.3.3, para  $s|_{D(f)} \in \tilde{I}(D(f))$  existe  $t \in \tilde{I}(X)$  tal que  $t|_{D(f)} = s|_{D(f)}$ . Entonces  $(s - t|_U)|_{D(f)} = s|_{D(f)} - t|_{D(f)} = 0$ , de donde tenemos que  $s - t|_U \in \mathcal{H}_Z^0(\tilde{I})(U)$ . Entonces, como  $\mathcal{H}_Z^0(\tilde{I})(X) \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\tilde{I})(U)$  es sobreyectiva, existe  $r \in \mathcal{H}_Z^0(\tilde{I})(X)$  tal que  $r|_U = s - t|_U$ . Luego  $(r + t)|_U = s$  y se sigue que  $\Gamma(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{I})$  es sobreyectiva. Por tanto  $Y$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$  y la proposición se sigue por inducción noetheriana.  $\square$

**Teorema 3.3.6.** *Sea  $X = \text{Spec } A$ , donde  $A$  es un anillo noetheriano. Entonces para todo haz casi coherente  $\mathcal{F}$  en  $X$ , y para todo  $i > 0$ , tenemos  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ .*

*Demostración.* Dado  $\mathcal{F}$ , sea  $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$  y tomemos una resolución inyectiva  $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$  de  $M$  en la categoría de  $A$ -módulos. Entonces obtenemos una sucesión exacta de haces  $0 \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{I}^\bullet$  en  $X$ . Ahora,  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  y por la proposición 3.3.5 cada  $\widetilde{I}^i$  es flasco, así que podemos usar esta resolución de  $\mathcal{F}$  para calcular cohomología (observación 3.2.2). Aplicando el funtor  $\Gamma$  recuperamos la sucesión exacta de  $A$ -módulos  $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$ . Por tanto  $H^0(X, \mathcal{F}) = M$ , y  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  para todo  $i > 0$ .  $\square$

**Proposición 3.3.7.** *Sean  $X$  un esquema noetheriano y  $\mathcal{F}$  un haz casi coherente en  $X$ . Entonces existe un monomorfismo  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  donde  $\mathcal{G}$  es un haz flasco casi coherente.*

*Demostración.* Cubrimos  $X$  con un número finito de abiertos afines  $U_i = \text{Spec}(A_i)$  y para cada  $i$  sea  $f_i : \text{Spec } A_i \rightarrow X$  la inclusión. Sea  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M}_i$  para cada  $i$ . Consideremos un monomorfismo  $M_i \hookrightarrow I_i$  de  $M_i$  en un  $A_i$ -módulo inyectivo  $I_i$ , así que tenemos un monomorfismo  $\mathcal{F}|_{U_i} \hookrightarrow \widetilde{I}_i$ . Luego tenemos un morfismo  $\mathcal{F} \rightarrow (f_i)_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \hookrightarrow (f_i)_*(\widetilde{I}_i)$  para cada  $i$ . Tomando la suma directa sobre  $i$  obtenemos un morfismo  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} := \bigoplus_{i=1}^n (f_i)_*(\widetilde{I}_i)$ . Claramente este morfismo es inyectivo, pues el morfismo  $(f_i)_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \hookrightarrow (f_i)_*(\widetilde{I}_i)$  es inyectivo para cada  $i$ ; y para cada abierto  $U \subseteq X$  se tiene que si una sección  $s \in \mathcal{F}(U)$  tiene imagen nula en  $(f_i)_*(\mathcal{F}|_{U_i})(U) = \mathcal{F}(U \cap U_i)$  para cada  $i$ , entonces  $s = 0$ . Por otro lado, desde que  $I_i$  es inyectivo, tenemos que el haz  $\widetilde{I}_i$  es flasco. Luego  $(f_i)_*(\widetilde{I}_i)$  es flasco para cada  $i$  y por tanto  $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^n (f_i)_*(\widetilde{I}_i)$  es flasco. También, como  $\widetilde{I}_i$  es casi coherente y  $U_i$  es un esquema noetheriano, entonces  $(f_i)_*(\widetilde{I}_i)$  es casi coherente para cada  $i$ . Por tanto  $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^n (f_i)_*(\widetilde{I}_i)$  es casi coherente.  $\square$

## 3.4 Cohomología de Čech

**Definición 3.4.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $X$  con conjunto de índices  $I$  totalmente ordenado. Sea  $\mathcal{F}$  un haz de grupos abelianos en  $X$ . Denotamos  $U_{i_0 i_1 \dots i_p} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap$*

$\dots \cap U_{i_p}$  y para cada  $p \geq 0$  definimos

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \dots i_p})$$

Para cada  $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ , escribimos sus componentes como

$$\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \dots i_p}),$$

para cada  $(p+1)$ -upla  $i_0 < i_1 < \dots < i_p$  de elementos de  $I$ . Definimos el morfismo coborde  $d : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  mediante

$$(d\alpha)_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1}} \Big|_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}}.$$

La notación  $\widehat{i_k}$  indica que  $i_k$  es omitido. Se verifica que  $d^2 = 0$ , así que tenemos un complejo de grupos abelianos.

**Observación 3.4.1.** Si  $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ , algunas veces es conveniente tener el símbolo  $\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p}$  definido para todas las  $(p+1)$ -uplas de elementos de  $I$ . Si hay algún índice repetido en el conjunto  $\{i_0, \dots, i_p\}$ , definimos  $\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p} = 0$ . Si todos los índices son distintos, definimos  $\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p} = (-1)^{\text{Sign}(\sigma)} \alpha_{\sigma i_0 \dots \sigma i_p}$ , donde  $\sigma$  es la permutación para la cual  $\sigma i_0 < \dots < \sigma i_p$ . Con estas convenciones, se verifica que la fórmula para  $d\alpha$  vale para cualquier  $(p+2)$ -upla  $i_0 \dots i_{p+1}$  de elementos de  $I$ .

**Definición 3.4.2.** Sea  $X$  un espacio topológico, y sea  $\mathfrak{U}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Para cualquier haz de grupos abelianos  $\mathcal{F}$  sobre  $X$ , definimos el  $p$ -ésimo **grupo de cohomología de Čech** de  $\mathcal{F}$ , con respecto al cubrimiento  $\mathfrak{U}$  como

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := H^p(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})).$$

**Proposición 3.4.1.** Sean  $X, \mathfrak{U}, \mathcal{F}$  como antes. Entonces  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$ .

*Demostración.*  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \text{Nuc}(d : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$ . Si  $\alpha \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es dado por  $\alpha_i \in \mathcal{F}(U_i)$  para cada  $i \in I$ , entonces para cada  $i < j$  tenemos  $(d\alpha)_{ij} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j} - \alpha_i|_{U_i \cap U_j}$ . Así que  $d\alpha = 0$  significa que las secciones  $\alpha_i \in \mathcal{F}(U_i)$  y  $\alpha_j \in \mathcal{F}(U_j)$  coinciden en  $U_i \cap U_j$ . Como  $\mathcal{F}$  es un haz, concluimos que  $\text{Nuc}(d) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$ .  $\square$

**Definición 3.4.3.** Definimos la *versión hacificada* del complejo de Čech como sigue:

$$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_p} f_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0 i_1 \dots i_p}})$$

donde para cada  $(p+1)$ -tupla denotamos por  $f$  a la inclusión  $f_{i_0 i_1 \dots i_p} : U_{i_0 i_1 \dots i_p} \hookrightarrow X$ . Note que  $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V) = C^p(\mathfrak{U}|_V, \mathcal{F}|_V)$  para todo abierto  $V \subseteq X$ , donde  $\mathfrak{U}|_V = \{U_i \cap V\}_{i \in I}$  (en particular tenemos  $\Gamma(X, \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ). Así, tenemos morfismos naturales  $d : \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  dados en cada abierto  $V \subseteq X$  por los morfismos coborde del complejo de Čech  $C^\bullet(\mathfrak{U}|_V, \mathcal{F}|_V)$ .

**Proposición 3.4.2.** Para cualquier haz de grupos abelianos  $\mathcal{F}$  sobre  $X$ , el complejo  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es una resolución de  $\mathcal{F}$ , es decir, existe un morfismo natural  $\varepsilon : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  tal que la sucesión de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

es exacta.

*Demostración.* Definimos un morfismo de haces  $\varepsilon : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$  por  $s \mapsto (s|_{U_i \cap V})_i$  para todo abierto  $V \subseteq X$  y  $s \in \mathcal{F}(V)$ . Mostraremos que

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \dots$$

es exacta. Como  $\mathcal{F}$  es un haz, entonces  $\varepsilon$  es un monomorfismo. Así, viendo a  $\mathcal{F}$  como subhaz de  $\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ , la exactitud en  $p=0$  es equivalente a mostrar

$$\text{Nuc}(\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = \mathcal{F}$$

En efecto, para cada abierto  $V \subseteq X$  tenemos

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V)) &= \text{Nuc}(C^0(\mathfrak{U}|_V, \mathcal{F}|_V) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}|_V, \mathcal{F}|_V)) \\ &= \check{H}^0(\mathfrak{U}|_V, \mathcal{F}|_V) = \Gamma(V, \mathcal{F}|_V) \\ &= \mathcal{F}(V). \end{aligned}$$

(3.4.2)

Para mostrar la exactitud del complejo  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  para  $p \geq 1$ , es suficiente verificar la exactitud en los tallos. Fijemos  $x \in X$  y  $j$  tal que  $x \in U_j$ . Para  $p \geq 1$  definimos

$$k : \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x \rightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$$

de la siguiente manera: dado  $\alpha_x \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$ , este es representado por una sección  $\alpha \in \Gamma(V, \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$  para algún abierto  $V \subseteq U_j$  que contiene a  $x$ . Ahora, para cualquier  $p$ -tupla  $i_0 < \dots < i_{p-1}$  definimos  $k\alpha \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V)$  por

$$(k\alpha)_{i_0 \dots i_{p-1}} = \alpha_{j, i_0 \dots i_{p-1}}.$$

Note que esto tiene sentido, pues como  $V \subseteq U_j$  entonces  $\alpha_{j, i_0 \dots i_{p-1}} \in \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_{p-1}} \cap U_j \cap V) = \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_{p-1}} \cap V)$ . Ahora, definimos  $k(\alpha_x) := (k\alpha)_x$ . Este morfismo está bien definido. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x & \xrightarrow{d_x} & \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x & \xrightarrow{d_x} & \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & \swarrow k & \downarrow & \swarrow k & \downarrow & \swarrow k & \\ \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x & \xrightarrow{d_x} & \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x & \xrightarrow{d_x} & \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Afirmamos que  $(kd_x + d_x k)(\alpha_x) = \alpha_x$  para todo  $\alpha_x \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$ . En efecto,

$$\begin{aligned} (d(k\alpha))_{i_0 \dots i_p} &= \sum_{l=0}^p (-1)^l (k\alpha)_{i_0 \dots \widehat{i}_l \dots i_p} |_{U_{i_0 \dots i_p} \cap V} \\ &= \sum_{l=0}^p (-1)^l \alpha_{j, i_0 \dots \widehat{i}_l \dots i_p} |_{U_{i_0 \dots i_p} \cap V} \\ (k(d\alpha))_{i_0 \dots i_p} &= (d\alpha)_{j, i_0 \dots i_p} \\ &= \alpha_{i_0 \dots i_p} |_{U_{i_0 \dots i_p} \cap U_j \cap V} + \sum_{l=0}^p (-1)^{l+1} \alpha_{j, i_0 \dots \widehat{i}_l \dots i_p} |_{U_{i_0 \dots i_p} \cap U_j \cap V} \\ &= \alpha_{i_0 \dots i_p} + \sum_{l=0}^p (-1)^{l+1} \alpha_{j, i_0 \dots \widehat{i}_l \dots i_p} |_{U_{i_0 \dots i_p} \cap V} \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Luego  $d(k\alpha) + k(d\alpha) = \alpha$  y tomando tallo tenemos  $(kd_x + d_x k)(\alpha_x) = \alpha_x$ . Por tanto  $k$  es una homotopía entre el morfismo identidad del complejo  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$  y el morfismo cero. Se sigue que los grupos de cohomología  $H^p(\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x)$  son nulos para todo  $p \geq 1$ . Así,  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$  es una sucesión exacta.  $\square$

**Proposición 3.4.3.** Sean  $X$  un espacio topológico,  $\mathfrak{U}$  un cubrimiento abierto de  $X$  y  $\mathcal{F}$  un haz flasco de grupos abelianos en  $X$ . Entonces

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$$

para todo  $p > 0$ .

*Demostración.* Consideremos la resolución  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  dada por la proposición 3.4.2. Como  $\mathcal{F}$  es flasco, entonces  $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es flasco para todo  $p \geq 0$ . En efecto, esto sigue del hecho que para todo abierto  $U \subseteq X$  se tiene que  $\mathcal{F}|_U$  es flasco,  $f_*$  preserva haces flascos y el producto de haces flascos es flasco. De aquí sigue que  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es una resolución flasca de  $\mathcal{F}$ , así que podemos usar esta resolución para calcular los grupos de cohomología usual de  $\mathcal{F}$  (observación 3.2.2). Tenemos

$$\begin{aligned} H^p(X, \mathcal{F}) &= H^p(\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))) \\ &= H^p(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) \\ &= \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}). \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Y como  $\mathcal{F}$  es flasco, entonces  $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$  para todo  $p > 0$ . Esto completa la demostración.  $\square$

**Proposición 3.4.4.** *Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathfrak{U}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Entonces existe un morfismo*

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

para todo  $p \geq 0$ , el cual es funtorial en  $\mathcal{F}$ .

*Demostración.* Sea  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$  una resolución inyectiva de  $\mathcal{F}$  en  $\mathfrak{Ab}(X)$ . Por la proposición 3.4.2 y la proposición 3.1.2 existe un morfismo de complejos  $f : \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$  induciendo el morfismo identidad de  $\mathcal{F}$ , es decir tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \dots \\ & & \parallel & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{I}^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

además, cualquier par de tales morfismos son homotópicos. Desconsiderando la primera columna y tomando secciones globales, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{I}^0) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{I}^1) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Tomando cohomología tenemos morfismos

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

para todo  $p \geq 0$ . Ahora, sea un morfismo  $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ . Mostraremos que tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^p(X, \mathcal{G}) \end{array} \quad (3.4.5)$$

es conmutativo. Para ver esto, sea  $\mathcal{J}^\bullet$  una resolución inyectiva de  $\mathcal{G}$ . El morfismo  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  nos induce un morfismo de complejos  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ . En efecto, para cada  $(p+1)$ -tupla  $i_0 < \dots < i_p$ , tenemos el morfismo  $f_*(\gamma|_{U_{i_0 \dots i_p}}) : f_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0 \dots i_p}}) \rightarrow f_*(\mathcal{G}|_{U_{i_0 \dots i_p}})$ , donde  $f : U_{i_0 \dots i_p} \hookrightarrow X$  es la inclusión. Tomando el producto directo sobre las  $(p+1)$ -tuplas  $i_0 < \dots < i_p$  obtenemos un morfismo  $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ , para cada  $p \geq 0$ . Esta colección de morfismos nos da un morfismo de complejos  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ . Es claro que este morfismo de complejos induce el morfismo  $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ . Por otro lado, por la proposición 3.1.2, existe un morfismo de complejos  $\mathcal{I}^\bullet \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$  induciendo el morfismo  $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ . Ahora, como los morfismos compuestos  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{I}^\bullet \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$  y  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$  inducen el mismo morfismo  $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , se sigue que son homotópicos y por tanto aplicando el funtor  $\Gamma(X, \cdot)$  tenemos que los morfismos compuestos  $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet)$  y  $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet)$  son homotópicos. Luego estos morfismos inducen el mismo homomorfismo en las cohomologías y de aquí se sigue la conmutatividad del diagrama 3.4.5.  $\square$

**Proposición 3.4.5.** *Sean  $X$  un esquema noetheriano y  $\mathfrak{U}$  un cubrimiento abierto afín de  $X$  tal que los abiertos  $U_{i_0 \dots i_p}$  son afines. Sea  $\mathcal{F}$  un haz casi coherente en  $X$ . Entonces para todo  $p \geq 0$ , los morfismos naturales*

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

*son isomorfismos.*

*Demostración.* Aplicaremos inducción sobre  $p$ . Si  $p = 0$ , ambas cohomologías son isomorfas a  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  (proposición 3.4.1). Para  $p > 0$ , asumimos que el resultado es válido para  $p - 1$ . Ahora encajemos  $\mathcal{F}$  en un haz flasco y casi coherente  $\mathcal{G}$  (proposición 3.3.7), y sea  $\mathcal{R}$  el cociente; así tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow 0$$

Como  $\mathcal{F}$  es casi coherente y los abiertos  $U_{i_0 \dots i_p}$  son afines, entonces tenemos la sucesión exacta de grupos abelianos (teorema 3.3.6)

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}) \longrightarrow \mathcal{G}(U_{i_0 \dots i_p}) \longrightarrow \mathcal{R}(U_{i_0 \dots i_p}) \longrightarrow H^1(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}|_{U_{i_0 \dots i_p}}) = 0$$

Tomando productos, obtenemos la sucesión exacta de complejos de Čech

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \longrightarrow 0$$

y así se obtiene una sucesión exacta larga de cohomologías de Čech. Como  $\mathcal{G}$  es flasco, por la proposición 3.4.3 tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Así que el morfismo en la vertical de la derecha debe ser un isomorfismo. Y para  $p > 1$ , usando una vez más la proposición 3.4.3 tenemos que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \check{H}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) & \longrightarrow & \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\ 0 = H^{p-1}(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^{p-1}(X, \mathcal{R}) & \longrightarrow & H^p(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(X, \mathcal{G}) = 0 \end{array}$$

donde, como  $\mathcal{R}$  es casi coherente, por hipótesis de inducción tenemos que la flecha vertical izquierda es un isomorfismo. Por tanto la flecha vertical de la derecha es un isomorfismo.  $\square$

**Observación 3.4.2.** Sea  $X$  un esquema separado sobre un esquema afín  $S$  y sean  $U, V$  subconjuntos abiertos afines. Vimos en la demostración del lema 2.7.11 que  $U \cap V$  es un subesquema cerrado del esquema afín  $U \otimes_S V$ . Por tanto, por el corolario 2.7.15 tenemos que  $U \cap V$  es afín. Así, si  $X$  es un esquema noetheriano y separado sobre un esquema afín, entonces cualquier cubrimiento abierto afín  $\mathfrak{U}$  de  $X$  verificará la hipótesis de la proposición anterior.

## 3.5 Cohomología del Espacio Proyectivo

**Definición 3.5.1.** Sea  $A$  un anillo y sean  $M, N$   $A$ -módulos. Un **emparejamiento perfecto**  $\tau : M \times N \rightarrow A$  es una función  $A$ -bilineal que induce

un isomorfismo de  $A$ -módulos  $M \cong N^\vee$ , es decir  $F : M \rightarrow N^\vee$  dada por  $F(m)(n) = \tau(m, n)$  es un isomorfismo de  $A$ -módulos.

En el caso que  $M$  y  $N$  son  $A$ -módulos libres del mismo rango  $n$ , se verifica que  $\tau$  es un emparejamiento perfecto si y sólo si  $\tau$  es  $A$ -bilineal y existen bases  $\{x_1, \dots, x_n\}$  y  $\{y_1, \dots, y_n\}$  de  $M$  y  $N$  respectivamente, tal que  $\tau(x_i, y_j) = \delta_{ij}$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Observación 3.5.1.** Sean  $A$  un anillo,  $r \geq 1$  y  $S = A[x_0, \dots, x_r]$ . Dado  $i_0, \dots, i_p$ , consideremos  $f = x_{i_0} \dots x_{i_p}$ . Entonces para cualquier índice  $0 \leq k \leq r$  existe un isomorfismo canónico de  $S$ -álgebras  $S_{fx_k} \cong (S_f)_{x_k/1}$ ; si denotemos por  $(S_f)_{x_k}$  al  $S$ -módulo  $T^{-1}S_f$ , donde  $T = \{1, x_k, x_k^2, \dots\}$ , entonces se tiene un isomorfismo de  $S$ -módulos  $S_{fx_k} \cong (S_f)_{x_k/1} \cong (S_f)_{x_k}$ .

**Observación 3.5.2.** Consideremos  $A$  un anillo noetheriano y  $X = \mathbb{P}_A^r$ . Consideremos el haz casi coherente  $\mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$  y sea  $S = A[x_0, \dots, x_r]$ , entonces existe un isomorfismo canónico  $A \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  (proposición 2.7.18) y además se tiene una estructura de  $A$ -módulo en el grupo  $H^i(X, \mathcal{J})$  para todo  $i \geq 0$  y para todo haz de módulos  $\mathcal{J}$ . Por la proposición 3.2.7 tenemos un isomorfismo canónico de  $A$ -módulos  $H^i(X, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^i(X, \mathcal{O}_X(n))$ . Dados  $r \in S_m$ , con  $m \geq 0$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , existe un morfismo inducido de  $A$ -módulos

$$R : H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(m+n))$$

En efecto, dado  $r \in S_m$ , consideremos la sucesión exacta de  $S$ -módulos graduados

$$0 \longrightarrow S(-m) \xrightarrow{r} S \longrightarrow S/(r) \longrightarrow 0$$

torciendo por  $n+m$ , obtenemos la sucesión exacta de  $S$ -módulos graduados

$$0 \longrightarrow S(n) \xrightarrow{r} S(n+m) \longrightarrow (S/(r))(n+m) \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor  $\tilde{\phantom{a}}$ , conseguimos la sucesión exacta de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(n) \rightarrow \mathcal{O}_X(n+m) \rightarrow i_*(\mathcal{O}_H(n+m)) \rightarrow 0$$

donde  $H = \text{Proj } S/(r)$  e  $i : H \hookrightarrow X$  es el morfismo inclusión (el isomorfismo  $((S/(r))(n+m))^\sim \cong i_*(\mathcal{O}_H(n+m))$  se obtiene de la observación 2.7.4(a) y la proposición 2.7.17(b)). Tomando cohomología, obtenemos el morfismo de  $A$ -módulos

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(n+m))$$

Ahora, definimos  $r \cdot x := R(x)$ , para todo  $x \in H^i(X, \mathcal{O}_X(n))$ . Esto convierte a  $H^i(X, \mathcal{F})$  en un  $S$ -módulo graduado. Note que para  $i = 0$ , esto coincide con la estructura natural de  $S$ -módulo graduado de  $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ . Para cada  $i = 0, \dots, r$  sea  $U_i = D_+(x_i)$  y sea  $\mathfrak{U} = \{U_0, \dots, U_r\}$ . Tenemos un isomorfismo canónico de  $A$ -módulos (proposiciones 3.4.5 y 3.2.7)  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(n))$ . Podemos dotar a  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  con estructura de  $S$ -módulo graduado de modo análogo a lo hecho para  $H^i(X, \mathcal{F})$ . En efecto, como en la demostración de la proposición 3.4.5, tenemos una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(n)) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(n+m)) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, i_*(\mathcal{O}_H(n+m))) \longrightarrow 0$$

Tomando cohomología, obtenemos el morfismo de  $A$ -módulos

$$\check{H}^i(X, \mathcal{O}_X(n)) \rightarrow \check{H}^i(X, \mathcal{O}_X(n+m))$$

Definiendo la estructura de  $S$ -módulo graduado como hecho anteriormente, se tiene que el isomorfismo canónico dado por la proposición 3.4.5,  $H^i(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es un isomorfismo de  $S$ -módulos graduados (esto se sigue de la functorialidad del morfismo canónico (proposición 3.4.4)).

Por otra parte, por la proposición 2.2.13, para cualquier conjunto abierto  $U \subseteq X$  tenemos el isomorfismo de  $A$ -módulos  $\Gamma(U, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(U, \mathcal{O}_X(n))$ . Por tanto,  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  tiene una estructura natural de  $S$ -módulo graduado, y también existe un isomorfismo de  $S$ -módulos graduados para  $p \geq 0$  e  $i_0 < \dots < i_p$

$$\begin{aligned} \Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{F}) &\cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{O}_X(n)) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S(n)_{(x_{i_0} \dots x_{i_p})} \\ &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (S_{x_{i_0} \dots x_{i_p}})_n \cong S_{x_{i_0} \dots x_{i_p}} \end{aligned}$$

Ahora bien, dado un subconjunto no vacío  $\{j_0, \dots, j_q\} \subseteq \{i_0, \dots, i_p\}$ , la restricción  $\mathcal{F}(U_{j_0, \dots, j_q}) \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$  se corresponde con el homomorfismo de anillos canónico  $\mu_{(j_0, \dots, j_q)(i_0, \dots, i_p)} : S_{x_{j_0} \dots x_{j_q}} \rightarrow S_{x_{i_0} \dots x_{i_p}}$ . Por lo tanto, tenemos un diagrama conmutativo de  $S$ -módulos graduados

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \prod_{i_0} S_{x_{i_0}} & \longrightarrow & \prod_{i_0 < i_1} S_{x_{i_0} x_{i_1}} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow S_{x_0 \dots x_r} \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Teorema 3.5.1.** *Sea  $A$  un anillo noetheriano no nulo y sea  $X = \mathbb{P}_A^r$  para algún  $r \geq 1$ . Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a)  $H^i(X, \mathcal{O}_X(m)) = 0$  para  $0 < i < r$  y todo  $m \in \mathbb{Z}$ .
- (b) Existe un isomorfismo canónico de  $A$ -módulos  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$ .
- (c) Para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , existe un emparejamiento perfecto de  $A$ -módulos libres finitamente generados

$$\tau : H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-m-r-1)) \rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$$

*Demostración.* En toda la prueba vamos a mantener las notaciones dadas en las dos observaciones anteriores.

(b) Tenemos que  $S_{x_0 \dots x_r}$  es un  $A$ -módulo libre con base  $x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}$ , con  $l_i \in \mathbb{Z}$ . La imagen de  $d^{r-1} : \prod_{k=0}^r S_{x_0 \dots \widehat{x}_k x_r} \rightarrow S_{x_0 \dots x_r}$  es el  $A$ -submódulo libre generado por aquellos elementos de la base para los cuales al menos un  $l_i \geq 0$ . Tenemos un isomorfismo de  $S$ -módulos graduados  $\check{H}^r(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \cong S_{x_0 \dots x_r} / \text{Im}(d^{r-1})$ , el cual es un  $A$ -módulo libre con base

$$\{x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r} \mid l_i < 0 \text{ para cada } i\}$$

El cociente tiene la graduación  $\partial(x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}) = \sum l_i$ . Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , el  $A$ -módulo  $H^r(X, \mathcal{O}_X(n))$  es un  $A$ -módulo libre con base (posiblemente vacía)

$$\{x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r} \mid l_i < 0 \text{ para cada } i \text{ y } \sum l_i = n\}$$

Si  $n > -r - 1$  entonces este conjunto es vacío; así que en este caso  $H^r(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ . Si  $n = -r - 1$ , entonces  $H^r(X, \mathcal{O}_X(n))$  tiene como base al monomio  $x_0^{-1} \dots x_r^{-1}$ . Por tanto  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$ .

(c) Note que si  $n < 0$ , entonces  $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ , pues  $S \cong \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  (proposición 2.7.18); y también  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) = 0$ , pues  $-n-r-1 > -r-1$ . Así que el enunciado del ítem (c) es trivial para  $n < 0$ . Para  $n \geq 0$ ,  $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$  tiene como base a los monomios de grado  $n$

$$\{x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r} \mid m_i \geq 0 \text{ para cada } i \text{ y } \sum m_i = n\}$$

Por otro lado, sabemos que  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$  tiene la base

$$\{x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r} \mid l_i < 0 \text{ para cada } i \text{ y } \sum l_i = -n-r-1\}$$

Así,  $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$  y  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$  son  $A$ -módulos libres de rango  $\binom{n+r}{r}$ . Tenemos un emparejamiento perfecto

$$\tau : H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-m-r-1)) \rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$$

definiendo  $\tau(x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r}, x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}) = x_0^{m_0+l_0} \dots x_r^{m_r+l_r}$ , donde  $x_0^{m_0+l_0} \dots x_r^{m_r+l_r}$  es igual a 0 en  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$  si algún  $m_i + l_i \geq 0$ . En efecto, note que los únicos pares de elementos de las bases que nos dan un valor no nulo son los pares de la forma  $(x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r}, x_0^{-m_0-1} \dots x_r^{-m_r-1})$ .

(a) Haremos la demostración por inducción en  $r$ . Si  $r = 1$  no hay nada que probar. Ahora, consideremos  $r > 1$ . Por las observaciones 3.5.1 y 3.5.2, al localizar el complejo  $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  con respecto a  $x_r$ , como  $S$ -módulos graduados, obtenemos el complejo  $C^\bullet(\mathfrak{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r})$ , donde  $\mathfrak{U}_r = \{U_i \cap U_r \mid i = 0, \dots, r\}$ . Este complejo da la cohomología de  $\mathcal{F}|_{U_r}$  sobre  $U_r$  (proposición 3.4.5), la cual es 0 para todo  $i > 0$  (teorema 3.3.6). Ahora, como localización es un funtor exacto, entonces conmuta con cohomología, así que  $H^i(X, \mathcal{F})_{x_r} = 0$  para todo  $i > 0$ . Es decir, para todo  $i > 0$ , todo elemento de  $H^i(X, \mathcal{F})$  es anulado por alguna potencia de  $x_r$ . Así, para demostrar que  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  para todo  $0 < i < r$ , basta mostrar que, para  $0 < i < r$ , la multiplicación por  $x_r$  es una biyección de  $H^i(X, \mathcal{F})$  en sí mismo.

Consideremos la sucesión exacta de  $S$ -módulos graduados

$$0 \longrightarrow S(-1) \xrightarrow{\cdot x_r} S \longrightarrow S/(x_r) \longrightarrow 0$$

torciendo por  $n$ , obtenemos la sucesión exacta de  $S$ -módulos graduados

$$0 \longrightarrow S(n-1) \xrightarrow{\cdot x_r} S(n) \longrightarrow (S/(x_r))(n) \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor  $\tilde{\phantom{a}}$ , conseguimos la sucesión exacta de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(n-1) \rightarrow \mathcal{O}_X(n) \rightarrow i_*(\mathcal{O}_H(n)) \rightarrow 0$$

donde  $H = Proj S/(x_r)$  e  $i : H \hookrightarrow X$  es el morfismo inclusión. Tomando la suma directa en  $n \in \mathbb{Z}$ , tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(-1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_H \rightarrow 0$$

donde  $\mathcal{F}_H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} i_*(\mathcal{O}_H(n)) = i_*(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n))$ . Tomando cohomología, obtenemos la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}_H) \rightarrow \dots$$

Note que, como  $S$ -módulos graduados,  $H^i(X, \mathcal{F}(-1)) = H^i(X, \mathcal{F})(-1)$ ; además por la definición de la estructura de  $S$ -módulo graduado en  $H^i(X, \mathcal{F})$ , el morfismo  $H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F})$  de la sucesión exacta es multiplicación por  $x_r$ .

Ahora,  $H \cong \mathbb{P}_A^{r-1}$  y  $H^i(X, \mathcal{F}_H) = H^i(H, \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n))$  (proposición 3.2.6). Así que, por la hipótesis inductiva, obtenemos que  $H^i(X, \mathcal{F}_H) = 0$  para todo  $0 < i < r - 1$ . Tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}_H) \rightarrow 0$$

pues esta sucesión es simplemente la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S(-1) \xrightarrow{\cdot x_r} S \longrightarrow S/(x_r) \longrightarrow 0$$

Por otro lado, se verifica que el morfismo de conexión  $\delta^{r-1} : \check{H}^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H) \rightarrow \check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}(-1))$  es dado por división por  $x_r$ . En efecto, considere el diagrama conmutativo que nos da el morfismo de conexión vía el lema de la serpiente:

$$\begin{array}{ccccc}
H^{r-1}(A^\bullet) & \longrightarrow & H^{r-1}(B^\bullet) & \longrightarrow & H^{r-1}(C^\bullet) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
Nuc(\overline{d_A^{r-1}}) & \longrightarrow & Nuc(\overline{d_B^{r-1}}) & \longrightarrow & Nuc(\overline{d_C^{r-1}}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}(-1))/Im(d_A^{r-2}) & \longrightarrow & C^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/Im(d_B^{r-2}) & \longrightarrow & C^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H)/Im(d_C^{r-2}) \\
\downarrow \overline{d_A^{r-1}} & & \downarrow \overline{d_B^{r-1}} & & \downarrow \overline{d_C^{r-1}} \\
Nuc(d_A^r) & \longrightarrow & Nuc(d_B^r) & \longrightarrow & Nuc(d_C^r) \\
\downarrow \pi_A^r & & \downarrow \pi_B^r & & \downarrow \pi_C^r \\
Conuc(\overline{d_A^{r-1}}) & \longrightarrow & Conuc(\overline{d_B^{r-1}}) & \longrightarrow & Conuc(\overline{d_C^{r-1}}) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
H^r(A^\bullet) & \longrightarrow & H^r(B^\bullet) & \longrightarrow & H^r(C^\bullet)
\end{array}$$

donde  $A^\bullet = C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}(-1))$ ,  $B^\bullet = C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  y  $C^\bullet = C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H)$ . Ahora, considere un elemento cualquier  $x_0^{l_0} \dots x_{r-1}^{l_{r-1}} \in \check{H}^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H)$ , donde  $l_i < 0$  para todo  $i$ . Vamos a hallar su imagen vía  $\delta^{r-1}$  teniendo en cuenta la construcción del morfismo de conexión vía el lema de la serpiente. Una preimagen en  $C^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/Im(d_B^{r-2}) = (\prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_{r-1}} S_{x_{i_0} \dots x_{i_{r-1}}})/Im(d_B^{r-2})$  de  $x_0^{l_0} \dots x_{r-1}^{l_{r-1}} \in \check{H}^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H)$  es precisamente la clase de  $x_0^{l_0} \dots x_{r-1}^{l_{r-1}}$ . La

imagen de este elemento en  $Nuc(d_B^r) \subseteq C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = S_{x_0 \dots x_r}$  es exactamente  $x_0^{l_0} \dots x_{r-1}^{l_{r-1}}$ . Ahora, como  $Nuc(d_A^r) \rightarrow Nuc(d_B^r)$  es inducido por  $C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ , el cual por construcción es dado por multiplicación por  $x_r$ , entonces una preimagen en  $Nuc(d_A^r)$  de  $x_0^{l_0} \dots x_{r-1}^{l_{r-1}} \in Nuc(d_B^r)$  es dada por  $x_0^{l_0} \dots x_{r-1}^{l_{r-1}} x_r^{-1}$ . Por tanto, la imagen de  $x_0^{l_0} \dots x_{r-1}^{l_{r-1}}$  vía  $\delta^{r-1}$  es dada por la clase de  $x_0^{l_0} \dots x_{r-1}^{l_{r-1}} x_r^{-1}$ , es decir  $\delta^{r-1}$  es dado por división por  $x_r$ .

Así, como  $\check{H}^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H)$  es un  $A$ -módulo libre que tiene como base a los monomios con potencias negativas en  $x_0, \dots, x_{r-1}$  y  $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es un  $A$ -módulo libre que tiene como base a los monomios con potencias negativas en  $x_0, \dots, x_r$ , tenemos que  $\delta^{r-1} : \check{H}^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H) \rightarrow \check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}(-1))$  lleva la base en elementos linealmente independientes. Por tanto  $\delta^{r-1} : H^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H) \rightarrow H^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}(-1))$  es inyectivo.

Los resultados obtenidos:

- (1)  $H^i(X, \mathcal{F}_H) = 0$  para todo  $0 < i < r - 1$ .
- (2)  $H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}_H)$  es sobreyectivo.
- (3)  $\delta^{r-1} : H^{r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_H) \rightarrow H^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}(-1))$  es inyectivo.

juntos con la sucesión exacta larga de cohomología, muestran que la multiplicación por  $x_r : H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F})$  es una biyección para todo  $0 < i < r$ .  $\square$

## 3.6 Aplicaciones y comentarios finales

El teorema 3.5.1 es la base para varios resultados importantes que permiten ser abordados con la teoría de esquemas y cohomología de haces. Un buen ejemplo para ilustrar el uso de esta teoría y mencionar una aplicación del teorema 3.5.1, es el clásico teorema de Riemann-Roch.

Sin entrar en detalles, mencionaremos que una superficie de Riemann compacta conexa o curva algebraica lisa puede ser vista como un esquema.

Además, si  $X$  es una curva lisa, el género de  $X$  es  $g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$ .

El enunciado del teorema de Riemann-Roch puede ser escrito en términos de cohomologías de haces inversibles. Un ingrediente clave en la demostración de este teorema es el *teorema de dualidad de Serre*, que en el caso del espacio proyectivo sobre un cuerpo  $k$ , es consecuencia del teorema 3.5.1.

Como un ejemplo explícito del uso del teorema 3.5.1, vamos a calcular el género de una curva irreducible  $C \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Definición 3.6.1.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz coherente en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . La característica de Euler de  $\mathcal{F}$  es

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathcal{F})$$

**Proposición 3.6.1.** Si

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de haces coherentes en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , entonces

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'')$$

*Demostración.* Ver [1]. □

**Proposición 3.6.2.** Si  $C \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es una curva irreducible, entonces

$$H^0(C, \mathcal{O}_C) \cong \mathbb{C}$$

*Demostración.* Ver [1]. □

**Proposición 3.6.3.** (Teorema de anulamiento de Grothendieck) Sea  $X$  un espacio topológico de dimensión  $n$ . Entonces para todo  $i > n$  y para todo haz de grupos abelianos  $\mathcal{F}$  en  $X$ , tenemos

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$$

*Demostración.* Ver [1]. □

Ahora, considere una curva irreducible  $C \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , donde  $C$  es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo  $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$  de grado  $d$ . Vamos a calcular  $g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C)$ .

El haz de ideales de  $C$  es  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(-d)$ , así que tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} \rightarrow i_* \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

donde  $i : C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es el morfismo inclusión. Por la proposición 3.6.1 tenemos

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(-d)) + \chi(i_* \mathcal{O}_C)$$

Por otro lado, como  $H^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, i_* \mathcal{O}_C) = H^i(C, \mathcal{O}_C)$ , entonces por la proposición 3.6.3 tenemos  $\chi(i_* \mathcal{O}_C) = h^0(C, \mathcal{O}_C) - h^1(C, \mathcal{O}_C)$ , pues  $C$  tiene dimensión

1. Y por la proposición 3.6.2 concluimos que  $\chi(i_*\mathcal{O}_C) = 1 - h^1(C, \mathcal{O}_C)$ , es decir  $\chi(i_*\mathcal{O}_C) = 1 - g$ .

Ahora, por (a) del teorema 3.5.1 sabemos que  $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 0$  y por (c) del teorema 3.5.1 tenemos  $H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3))$ . Luego  $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) + h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) = 1 + 0 = 1$ . También, usando el teorema 3.5.1 obtenemos que  $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3 + d))$ .

Por tanto,  $1 = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3 + d)) + 1 - g$ , es decir  $g = (d - 1)(d - 2)/2$ .

En relación a otras áreas, mencionaremos que el concepto de fibrado vectorial de rango  $n$  es equivalente al concepto de haz localmente libre de rango  $n$ . En particular, un fibrado vectorial de rango 1 es un haz inversible. Denotando por  $Pic X$  al grupo de clases de isomorfismo de haces inversibles en un esquema  $X$ , se tiene  $Pic X \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ , donde  $\mathcal{O}_X^*$  es el haz cuyas secciones sobre un abierto  $U \subseteq X$  son las unidades en el anillo  $\mathcal{O}_X(U)$ .

# Bibliografía

- [1] Hartshorne R. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 1977.
- [2] Smith K.E *An Invitation to Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 2000.
- [3] Atiyah M.F and Macdonald I.G *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, 1969.
- [4] Fulton W. *Algebraic Curves*. Benjamin W.A, 1969.
- [5] Hilton and Stammbach. *A Course in Homological Algebra*. Springer Verlag 1970.
- [6] Godement. *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*. Hermann Paris 1958.