Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Modelos de dinámica poblacional vía ecuaciones diferenciales estocásticas

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Edith Chavely ANCO BLAS

ASESOR

Dr. Yony Raúl SANTARIA LEUYACC

Lima, Perú

2020



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Anco, E. (2020). *Modelos de dinámica poblacional vía ecuaciones diferenciales estocásticas*. Tesis para optar el título de Licenciada en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código Orcid del autor:

Código Orcid del autor: 0000-0001-8279-7460

DNI del autor: 43248282

Grupo de investigación: Dynamical systms,differential equations and their applications

Instituto que financia parcial o totalmente la investigación: Autofinanciada

Ubicación geográfica dónde se desarrolló la investigación: Av. Universitaria s/n. cruce con Av. Venezuela cdra 34, Lima. Coordenadas $12°03'30''S; 77°05'00''$O/ $-12.058333333333, -77.083333333333$

Año o rango de años que la investigación abarcó: 2019-2020

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las .16:10 horas del Viernes 3 de julio del 2020, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (PRESIDENTE), Mg. Jhelly Reynaluz Pérez Núñez (MIEMBRO) Y EL Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «MODELOS DE DINÁMICA POBLACIONAL VÍA ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS», presentado por la señorita Bachiller Edith Chavely Anco Blas, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, la tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

Dieciocho (18) sobresaliente.

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas, manifestó que la señorita Bachiller EDITH CHAVELY ANCO BLAS, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 17:10 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. JORGE LUIS CRISÓSTOMO PAREJAS
PRESIDENTE

MG. JHELLY REYNALUZ PÉREZ NÚÑEZ
MIEMBRO

DR. YONY RAÚL SANTARIA LEUYACC
MIEMBRO ASESOR

Modelos de dinámica poblacional vía ecuaciones diferenciales estocásticas

Edith Chavely Anco Blas

Tesis presentada consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad nacional mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobado por:

.....

Dr.Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Presidente del Jurado

.....

Mg. Jhelly Reynaluz Peréz Núñez
Miembro del Jurado

.....

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
Miembro asesor

Lima, Perú
Julio 2020

FICHA CATALOGRÁFICA

EDITH CHAVELY ANCO BLAS

Modelos de dinámica poblacional vía ecuaciones diferenciales estocásticas , (Lima) 2020 .

II, 55 p., 29,7 cm (UNMSM, Licenciada, Matemática, 2020). Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por las bendiciones que derrama en mi vida. Agradezco a mis padres a mi amigo Lito por su apoyo. Y también a mi orientador el Dr. Yony Santaria por su apoyo, su tiempo e interés que mostró desde el incio en este tema.

Índice general

Abstract v

I Introducción 1

II Preliminares 4

2.1 Espacios de probabilidad, variables aleatorias y Procesos estocásticos 5

2.2 Movimiento Browniano 11

2.2.1 Simples propiedades del movimiento browniano 14

2.2.2 Martingalas 14

2.3 Integral estocástica 15

2.3.1 Integral de Itô 17

2.3.2 Propiedades de la integral de Itô 19

2.3.3 Sumas de Rimann e integral estocástica 20

2.4 Una extensión de integral de Itô 21

2.4.1 Una clase más grande de integrandos 21

2.5 Procesos de Itô 25

2.5.1 Fórmula de Itô 26

2.6 Ecuación Estocástica 27

2.6.1 Existencia y unicidad de soluciones 28

III Modelos de crecimiento poblacional 31

IV Ecuación logística con perturbación aleatoria 35

4.1 Existencia, singularidad y atracción global de soluciones 37

4.1.1 Una ecuación logística general 42

V Ecuación logística no autónoma con perturbación aleatoria 44

5.1 Estabilidad estocástica 45
5.2 Estabilidad del modelo logístico no autónomo estocástico 47

Bibliografía **52**

Resumen

En el presente trabajo, se analiza dos distintas ecuaciones diferenciales estocásticas que modelan la dinámica poblacional. Primeramente, se estudiará la existencia, unicidad y estabilidad global de las soluciones positivas para la ecuación logística aleatoria autónoma $dY_t = (rdt + \alpha dB_t)\, Y_t \left[1 - \frac{Y_t}{K}\right]$, con un valor inicial $Y(0) = Y_0$, y Y_0 es una variable aleatoria que satisface $0 < Y_0 < K$. Seguidamente es realizado el análisis asintótico de los estados de equilibrio para la ecuación logística aleatoria no autónoma $dY_t = (r(t)dt + \alpha(t)dB_t)\, Y_t \left[1 - \frac{Y_t}{K}\right]$, con un valor inicial $Y(0) = Y_0$, Y_0 es una constante determinista. Obteniendo condiciones sufcientes para la estabilidad mediante el método de Liapunov.

Palabras clave: Ecuación logística, perturbaciones aleatorias, movimiento browniano, existencia, unicidad, estabilidad asintótica global.

Abstract

In the present work, two different stochastic differential equations that model population dynamics are analyzed. First, we study the existence, uniqueness and global stability of positive solutions of the autonomous random logistic equation $dY_t = (rdt + \alpha dB_t)\, Y_t \left[1 - \frac{Y_t}{K}\right]$, with an initial value $Y(0) = Y_0$, and Y_0 is a random variable that satisfies $0 < Y_0 < K$. Next, we consider the non-autonomous random logistic equation $dY_t = (r(t)dt + \alpha(t)dB_t)\, Y_t \left[1 - \frac{Y_t}{K}\right]$, with an initial value $Y(0) = Y_0$, and Y_0 is a deterministic constant.Which provides an asymptotic analysis of the equilibrium states. We also obtain sufficient conditions for stability through the Liapunov method..

Keywords: Logistic equation, random disturbances, brownian movement, existence, uniqueness, global asymptotic stability.

Capítulo I

Introducción

Sabemos que los modelos de crecimiento poblacional deterministas tienen una amplia historia de aplicaciones pero debería ser obvio que estos modelos tienen sus limitaciones. En estos modelos de sistemas dinámicos no tienen en cuenta varios factores tales como el ruido ambiental. Tal ruido generalmente se introduce como un proceso estocástico ya que es una adecuada representación para aquellos sistemas dinámicos donde su estado en cada instante está regido por una ley de probabilidad. Bajo ciertas condiciones requeridas en el modelo, se puede relacionar el proceso estocástico asociado al ruido con el proceso de movimiento browniano.

Uno considera los elementos estocásticos como parte del modelo ya que son típicamente atribuibles a factores aleatorios que podrían afectar la reproducción personal, o al efecto en las poblaciones tales como el cambio de clima, diversas epidemias, desastres naturales, etcétera. Por estas razones se puede decir que es imperativo tener en cuenta explícitamente los elementos aleatorios al momento de eligir un modelo que pueda representar adecuadamente el análisis de un fenómeno. Al hacer esto, podría ayudar a mejorar la precisión de estimaciones, predicciones del crecimiento de la población.

La necesidad en las predicciones de crecimiento poblacional o en cualquier modelo de estimación ha impulsado el uso de modelos de procesos estocásticos, y estos tipos de modelos pueden resolverse a través de ecuaciones diferenciales estocásticas. Para entender mejor lo mencionado desde el inicio consideremos el clásico modelo de crecimiento logístico. La ecuación logística clásica puede ser expresado de la siguiente manera

$$dY(t) = rY(t)\left(1 - \frac{Y(t)}{K}\right)dt, \qquad Y(0) = Y_0 > 0.$$

donde $Y(t)$ es una función que nos indica el tamaño poblacional en el instante t. En este modelo solo se considera que existe una sola especie, quienes compiten entre sí por una cantidad limitada de alimentos y espacio vital. Además, r representa la tasa de crecimiento de una población y K es la capacidad de carga. Pero sabemos que el crecimiento natural de las poblaciones en el mundo real es inevitablemente afectado por el ruido ambiental. Basta citar algunos ejemplo como, la estocasticidad demográfica, estocasticidad ambiental. Lo más seguro que estos van afectar a la tasa r. Es por ello que tiene sentido que consideraremos un modelo de la forma

$$r \to r + \alpha \dot{B}(t)$$

donde $B(t)$ proceso estocástico con ciertas condiciones requeridas en el modelo. En este ejemplo es un proceso llamado movimiento browniano estándar la constante α^2 representa la intensidad del ruido. Entonces, obtenemos el siguiente modelo estocástico:

$$dY_t = (rdt + \alpha dB_t)\, Y_t \left[1 - \frac{Y_t}{K}\right], \quad (r, K > 0) \tag{1.1}$$

Este modelo considera que la tasa de crecimiento es estocástica y además que las perturbaciones continuas inciertas y minúsculas sobre ella son generadas por el movimiento Browniano. Pero en ese modelo considera que la intensidad del ruido es constante al igual que r. Si tenemos factores tales como la estacionalidad, entonces deberíamos considerar que r varía con t, al igual que la intesidad del ruido. Por lo tanto, es razonable e importante considerar el modelo logístico estocástico no autónomo

$$dY_t = (r(t)dt + \alpha(t)dB_t)\, Y_t \left[1 - \frac{Y_t}{K}\right], \quad (r, K > 0) \tag{1.2}$$

El objetivo de esta tesis es analizar el modelo de crecimiento población logística autónoma con perturbación aletoria (1.1) haciendo una comparación con el modelo logístico determinista para esto nos basamos en el trabajo realizado por Jiang, Da-qing y Zhang [13]. También, hacer una análisis cualitativo de la ecuación de crecimiento población logística no autónoma (1.2) para ello consideramos el trabajo de Golec y Sathananthan [11].

La estructura del trabajo es la siguiente. En el Capítulo 2 se proporciona una introducción a la teoría básica de los procesos estocásticos y a ecuaciones diferenciales estocásticas.

Los antecedentes matemáticos requeridos se mantienen al mínimo para que los temas sean accesibles.

En el Capítulo 3 se desarrolla la importancia de considerar un modelo estocástico para describir el crecimiento poblacional. En el Capítulo 4 analizamos la existencia, unicidad y el comportamiento a la largo plazo de la solución de la ecuación diferencial estocástica (1.1). Por último, en el Capítulo 5 se hace una análisis cualitativo de la solución de (1.2) para ello daremos definiciones de estabilidad en el sentido estocástico. Además demostramos un teorema que da condiciones suficientes para la estabilidad. El método empleado es el de Liapunov.

Capítulo II

Preliminares

Es muy común ver que la evolución de un sistema dinámico comienza con una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) \tag{2.1}$$

con respecto al vector de parámetros X de dicho sistema. Es obvio que si la función $f(t, X)$ se puede medir o definir por completo, no hay una necesidad de una teoría estocástica. Para entender eso podemos mencionar un clásico ejemplo de un modelo muy sencillo de crecimiento de poblacional

$$\frac{dX}{dt} = a(t)X(t), \qquad X(0) = X_0 \text{ (constante)} \tag{2.2}$$

donde X_t es la función que me indica la cantidad de una población en el instante t, y $a(t)$ es la tasa relativa de crecimiento en ese mismo instante t. Sin embargo, ¿Qué sucede si la tasa está sujeto a fluctuaciones aleatorias que, posiblemente, pueden atribuirse a factores extraños o fortuitos como el clima, la ubicación y el entorno general?. Bajo este escenario, podemos reescribir la tasa más una perturbación. Es decir,

$$\begin{aligned} a(t) &= r(t) + j(t) \cdot (\textbf{ error aleatorio}) \\ &= r(t) + j(t) \cdot \text{“ } \textbf{ruido}\text{”}, \end{aligned}$$

donde $t(t)$ y $j(t)$ son funciones dadas de t y no sabemos exactamente como es el comportamiento del término ruido, solo conocemos su distribución de probabilidad.
En vista de la última igualdad se puede reescribir (2.2) y obtener

$$\frac{dX}{dt} = r(t)X(t) + j(t)X(t) \cdot \text{“ } \textbf{ruido}\text{”}, \qquad X(0) = X_0 \text{ (constante)} \tag{2.3}$$

Bajo integración, esa expresión se convierte en

$$X_t = X_0 + \int_0^t r(s)X(s)ds + \int_0^t j(s)X_s \cdot \text{“ } \textbf{ruido}\text{”}ds. \tag{2.4}$$

Pero ¿Cómo integramos

$$\int_0^t j(s)X_s \cdot \text{“ } \textbf{ruido}\text{”}ds?.$$

Para responder a esta pregunta, debemos encontrar un proceso estocástico que pueda usarse para representar el ruido. Una opción es el término de ruido blanco. $\dot{B}_t = dB_t/dt$ la "derivada" del proceso de movimiento browniano $\{B_t\}_{t\geq 0}$. En este sentido, una sustitución de $\dot{B}_t dt = ruido.dt$ en la (2.4)

$$\int_0^t j(s)X_s \cdot \text{“ } \textbf{ruido}\text{”}ds = \int_0^t j(s)X_s dB_s \tag{2.5}$$

Así,

$$X_t = X_0 + \int_0^t r(s)X(s)ds + \int_0^t j(s)X_s dB_s \tag{2.6}$$

¿Cuáles son las cuestiones clave que rodean el cálculo de la integral dada en (2.5)?. Por un lado, (2.5) no es una integral ordinaria ya que el movimiento browniano no es diferencial en ninguna parte casi seguramente o con probabilidad 1. Por otro lado, el movimiento browniano es un proceso estocástico cuyos caminos son casi seguramente de variación infinita. Teniendo presente estas dificultades, buscaremos un aparato matemático especializado que explote directamente la naturaleza aleatoria del movimiento browniano. Para poder entender ello primero es necesario revisar algunas definiciones y resultados. Es por eso que a lo largo de este capítulo se dará una breve e importante información teórica para poder entender la representación (2.6) que es un problema de ecuación diferencial estocástica. Se omitirá las pruebas de los resultados pero el lector puede consultar [21], [23] o [14].

2.1. Espacios de probabilidad, variables aleatorias y Procesos estocásticos

En esta sección procedemos a encontrar nociones matemáticas razonables correspondientes a las cantidades mencionadas y los modelos matemáticos para el problema (2.4). Aquí hay una primera lista de las nociones que necesitan una interpretación matemática:

1. Una cantidad aleatoria
2. Independencia
3. Proceso estocástico
4. Movimiento browniano
5. ¿Cuál es la interpretación matemática de los términos de "ruido"?
6. ¿Cuál es la interpretación matemática de las ecuaciones diferenciales estocásticas?

Se discutirá 1-3 brevemente. En la próxima sección lo haremos considere 4, y finalmente 5 y 6.

El modelo matemático para una cantidad aleatoria es una variable aleatoria. Antes de definir esto, recordamos algunos conceptos generales de la teoría de probabilidad.

Definición 2.1.1. *Si Ω es un conjunto dado, entonces un σ-álgebra $\mathcal{F}$ en Ω es una $\mathcal{F}$ familia de subconjuntos de Ω con las siguientes propiedades:*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- $F \in \mathcal{F} \to F^c$, *donde* $F^c = \Omega \backslash F$ *es el complemento de* F *en* Ω.
- $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \to A := \cup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.

El par $(\Omega, \mathcal{F})$ se llama espacio medible. Si una función definida sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ es tal que cumple $P : \mathcal{F} \to [0,1]$:

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.
- Si $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ y $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es disjunto (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) entonces

$$P\left(\cup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(A_i).$$

Entonces P recibe el nombre de medida de probabilidad. Y El triple $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es llamado espacio de probabilidad. Se llama un **de probabilidad completo** si $\mathcal{F}$ está formado por todos los subconjuntos G del espacio Ω con P-medida externa cero, es decir, con

$$P^*(G) := \text{ínf}\{P(E); E \in \mathcal{F}, G \subset E\} = 0.$$

Cualquier espacio de probabilidad se puede completar simplemente agregando a $\mathcal{F}$ todo conjuntos de medida exterior 0 y extendiendo P en consecuencia.

Los subconjuntos E de Ω que pertenecen a $\mathcal{F}$ se denominan conjuntos $\mathcal{F}$-medibles. En un contexto de probabilidad, estos conjuntos se denominan **eventos** y utilizamos la interpretación

$$P(E) = \text{ “la probabilidad de que ocurra el evento F”.}$$

En particular, si $P(E) = 1$ se dice que “F ocurre con probabilidad 1”, o “Casi seguro (c.s.)”. Dada cualquier familia U de subconjuntos de Ω, hay un σ-álgebra $\mathcal{H}_U$ más pequeño que contiene U, es decir

$$\mathcal{H}_U = \cap\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\ \sigma - \text{álgebra de } \Omega,\ U\ \subset \mathcal{H}\}.$$

Llamamos a $\mathcal{H}_U$ el σ-álgebra generado por U. Por ejemplo, si U es la colección de todos los subconjuntos abiertos de un espacio topológico Ω (por ej. $\Omega = \mathbb{R}$), entonces $\mathcal{B} = \mathcal{H}_U$ se llama σ-álgebra de Borel en Ω y los elementos $B \in \mathcal{B}$ se llaman conjuntos de Borel. $\mathcal{B}$ contiene todos los conjuntos abiertos, todos los conjuntos cerrados, todas las uniones contables de conjuntos cerrados, todas las intersecciones contables de tales uniones contables, etcétera.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad dado, entonces una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamado $\mathcal{F}$-medible si

$$X^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in U\} \subseteq \mathcal{F}$$

para todos los conjuntos abiertos $U \in \mathbb{R}$ (o, de manera equivalente, para todos los conjuntos de Borel $U \in \mathbb{R}$). Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es alguna función, entonces $\mathcal{H}_X$ el σ-álgebra generado por X es el σ-álgebra más pequeño en Ω que contiene todos los conjuntos

$$X^{-1}(U); \quad U \subset \mathbb{R}\ \textit{abierto.}$$

Definición 2.1.2. *Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de funciones medibles a valores reales*

definidas sobre el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y* X *una función real y medible, definida sobre el mismo espacio. Decimos que la sucesión* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilidad a* X *si para cualquier* $\epsilon > 0$ *se tiene que*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} = 0.$$

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que representa un espacio de probabilidad completo.

Definición 2.1.3. *Una variable aleatoria* X *es una función* $\mathcal{F}$*-medible* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*. Cada variable aleatoria induce una medida de probabilidad* μ_X *en* $\mathbb{R}$*, definida por*

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

μ_X *se llama distribución de* X*.*

Si $\int_\Omega |X(\omega)|dP(\omega) < \infty$ entonces el número

$$E[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(X)d\mu_X(x).$$

Algunas propiedades son

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
- $E[k.X] = k.E[X]$ para todo número real k.
- $E[k] = k$ para todo número real k.

El espacio L^p

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria y $p \in [1, \infty)$ es una constante definimos L^p-norma, $\| X \|_p$, por

$$\| X \|_p = \| X \|_{L^p(P)} = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p dP(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$ fijamos

$$\| X \|_\infty = \| X \|_{L^\infty(P)} = sup\{|X(\omega)|; \omega \in \Omega\}.$$

El correspondiente espacio L^p es definido por

$$L^p(P) = L^p(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R}; \| X \|_p < \infty\}$$

Con esta norma el espacio L^p es un espacio de Banach. Si $p = 2$ el espacio $L^2(\Omega)$ es incluso un espacio de Hilbert, es decir un espacio con producto interno completo, con producto interno

$$(X, Y)_{L^2(\Omega)} := E[X.Y]; \quad X, Y \in L^2(\Omega).$$

Definición 2.1.4. *Decimos que la sucesión $X_n, n \geq 1$ converge a X en $L^p(\Omega)$ si todas las variables están en $L^p(\Omega)$ y*

$$E[|X_n - X|^p] \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

El modelo matemático para la independencia es el siguiente:

Definición 2.1.5. *Dos subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ se llaman independientes si*

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Una colección $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_i; i \in I\}$ de familias $\mathcal{H}_i$ de conjuntos medibles es independiente

$$P(H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}) = P(H_{i_1}) \cdots P(H_{i_k}).$$

Para todas las elecciones de $H_{i_1} \in \mathcal{H}_{i_1} \cdots H_{i_k} \in \mathcal{H}_{i_k}$ con diferentes índices $i_1, \cdots i_k$. Una familia de variables aleatorias $\{Y_i; i \in I\}$ serán independientes si la familia de $\sigma-$ álgebras $\mathcal{H}_{Y_i}$ es independiente.

Si las variables aleatorias $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ son independientes, entonces

$$E[X.Y] = [X].[Y],$$

siempre que $E[|X|] < \infty$ y $E[|Y|] < \infty$.

Definición 2.1.6. *Sea X que pertenezca al conjunto $L^1(\Omega)$. Supongamos que $\mathcal{G}$ es un $\sigma-$álgebra y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. La esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$ es una variable aleatoria $E[X|\mathcal{G}]$ que cumple*

1. *$E[X|\mathcal{G}] -$medible;*
2. *$\forall\ A \in \mathcal{G}$*

$$\int_A X dP = \int_A E[X|\mathcal{G}]\, dP.$$

Definición 2.1.7. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico (**p.e**) en tal espacio y con conjunto de estados en $\mathbb{R}$ es una función medible $X : \boldsymbol{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$. En particular,*

a.- Para cada t fijo, $X(t, \cdot)$ será un variable aleatoria.

b.- Para cada ξ fijo $X(\cdot, \xi)$ será función medible (conocida como trayectoria o realización).

Puede ser útil para la intuición pensar en t como "tiempo" y cada ω como una "partícula" o "experimento" individual. Con esta imagen, $X(t, \omega)$ representaría la posición (o resultado) en el tiempo t de la partícula (experimento) ω. Es común representar la variable aleatoria $X(t, \cdot)$ como $X(t)$ o X_t. Así, un **p.e** $X(t, \omega)$ puede también ser expresado como $X(t)(\omega)$ o simplemente $X(t)$ o X_t.

A partir de (b) podemos considerar Ω como un subconjunto del espacio $\hat{\Omega} = \mathbb{R}^I$ de todas las funciones de I a $\mathbb{R}$. Entonces el σ-álgebra $\mathcal{F}$ contendrá el σ-álgebra $\mathcal{B}$ generado por conjuntos de la forma

$$\{\omega; \omega(t_1) \in F_1, \cdots, \omega(t_k) \in F_k\}, \quad F_i \subset \mathbb{R} \text{ conjuntos de Borel}$$

($\mathcal{B}$ es lo mismo que el σ-álgebra en $\hat{\Omega}$ si $I = [0, \infty)$ y $\hat{\Omega}$ recibe la topología del producto). Por lo tanto, también se puede adoptar el punto de vista de que un **p.e** es una medida de probabilidad P en el espacio medible $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B})$.

Las distribuciones (de dimensión finita) del **p.e** $\{X_t\}_{t \in I}$ son las medidas $\mu_{t_1 \cdots t_k}$ definidas en $\mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, \cdots$, por

$$\mu_{t_1 \cdots t_k}(F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k) = P\{X_{t_1}, \in F_1, \cdots X_{t_k} \in F_k\}, \quad t_i \in I$$

donde $F_1, \cdots, F_k$ denota conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$. La familia de todas las distribuciones de dimensiones finitas determina muchas (pero no todas) propiedades importantes del **p.e** $\{X_t\}_{t \in I}$.

Inversamente, dada una familia $\{\nu_{t_1, \cdots, t_k} : k \in \mathbb{N}, t_i \in I\}$ de las medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^k$ es importante poder construir un **p.e** $\{Y_t\}_{t \in I}$ que tiene $\nu_{t_1, \cdots, t_k}$ como sus

distribuciones de dimensiones finitas. Uno de los famosos teoremas de Kolmogorov afirma que esto se puede hacer bajo ciertas condiciones para $\nu_{t_1,\cdots,t_k}$.

A lo largo de esta tesis consideraremos que $\mathbf{I} = [0, \infty[$. o que es lo mismo que $t \geq 0$

Definición 2.1.8. *Decimos que la familia de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sobre el conjunto Ω es una filtración en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cuando se cumpla que:*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \qquad \text{para cualesquiera } 0 \leq s \leq t < \infty$$

El espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ se le conoce como espacio de probabilidad filtrado.

Definición 2.1.9. *Decimos que un* ***p.e*** $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ o $\{\mathcal{F}_t\}-$adaptado si, para cada $t \geq 0$, la variable X_t es $\mathcal{F}_t$-medible. Es decir, para cada t,*

$$\sigma(X_t) := \{X_t^{-1}(A); A \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{F}_t$$

donde $\mathcal{B}$ es el $\sigma-$álgebra de Borel.

Todo **p.e** X_t puede determinar una filtración natural $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geq 0}$ dada por:

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t), \qquad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

2.2. Movimiento Browniano

FIjando un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una filtración $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ sobre ese espacio.

Definición 2.2.1. *Un $\{\mathcal{F}_t\}-$movimiento browniano es un* ***p.e*** $B : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *que es $\{\mathcal{F}_t\}-$adaptado y que cumple las condiciones:*

i) El ***p.e*** $B(t)$ *tiene incrementos estacionarios. Es decir, para cualesquiera $0 \leq s < t$, la variable $B_t - B_s$ tiene distribución normal con media cero y varianza t - s ($\mathcal{N} \sim (0, dt)$). Es decir,*

$$P\{\omega; a_1 \leq B_t - B_s \leq a_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

ii) Si $0 \leq s < t$ entonces $B_t - B_s$ y $\{\mathcal{F}_s\}$ son independientes.

iii) B tiene trayectorias continuas c.s. Es decir,

$$P\{\omega; t \mapsto B(t,\omega) \ \ es\ continua\} = 1$$

Si además $P\{\omega; B(0,\omega) = 0\} = 1$ entonces B es llamado $\{\mathcal{F}_t\}-$movimiento browniano estándar. Un movimiento browniano es un **p.e** B que es un $\{\mathcal{F}_t^B\}-$movimiento browniano que es la filtración generada por el mismo proceso.

Teorema 2.2.2. *Sea $B : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ un **p.e** con $B(0) = 0$ c.s. Son equivalentes las siguientes afirmaciones*

1. *B_t es un movimiento browniano.*
2. *B_t cumple i), iii) y*

   ii*) Si $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, las variables aleatorias

   $$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}},$$

   son independientes.
3. *B_t cumple iii) y*

   iv) Si $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, y $A_1, A_2, \cdots, A_n$ entonces

   $$\begin{aligned} &P\{\omega; B_{t_1} \in A_1, \cdots B_{t_n} \in A_n\} \\ &= \int_{A_n} \cdots \int_{A_1} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

   donde

   $$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t)}} \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t)}} dx.$$

En la siguiente figura se va observar una simulación de algunas trayectorias de un movimiento browniano sobre el intervalo $[0,1]$, para la ello, se ha usado el siguiente código en MATLAB.

- Discretizando el intervalo $[0,1]$ en $N = 1000$, con tamaño $dt = T/(N-1)$.
- Definiendo el vector $B = [\,]$ que alamacena al movimiento browniano con $B(1) = 0$

- Dentro de un "for"

$$B(j+1) = B(j) + sqrt(dt) * rand(n),$$

para cada j, se genera un número aleatorio a través de la función "randn" y que a través del producto con sqrt(dt) produce un número aleatorio con distribución $\mathcal{N} \sim (0, dt)$, lo que nos asegurará se van a generar incrementos independientes.

- Realizar el digrama de t vs $B(t, .)$, para ello MATLAB va unir los $(t(j), B(j))$ para $j = 0, 1, \cdots, N$, por alguna interpolación lineal.

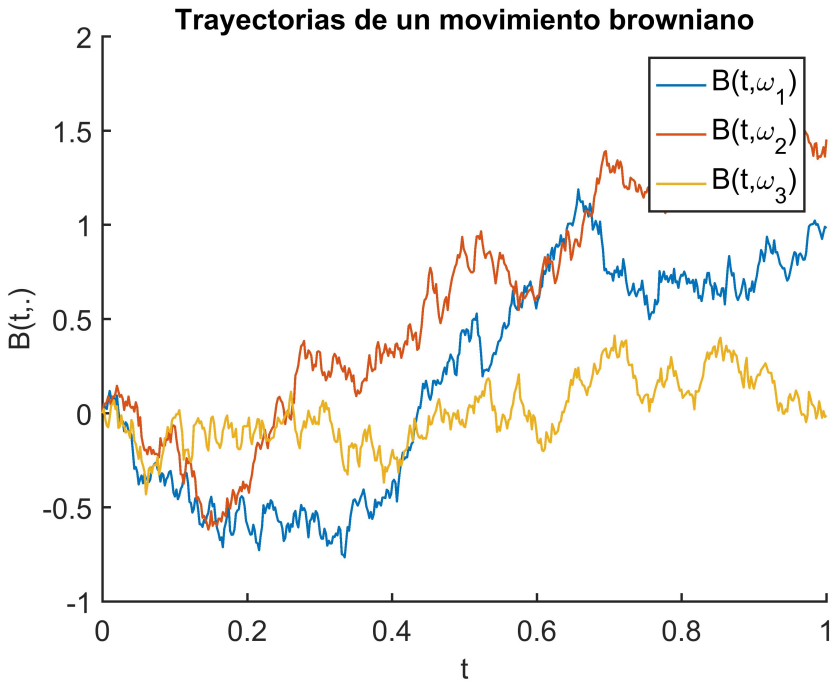

Figura 2.1: Simulación de las trayectorias del proceso browniano.

2.2.1. Simples propiedades del movimiento browniano

Daremos algunas simples propiedades que se siguen directamente a partir de su definición de browniano movimiento. Pero antes fijaremos a lo largo de este capítulo un $\{\mathcal{F}_t\}-$movimiento browniano estandár B_t y una filtración $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$. Nos referiremos a $\{\mathcal{F}_t\}-$movimiento browniano simplemente como movimiento browniano **M.B** .

Proposición 2.2.3. *Para B_t, se cumple que*

1. *Para cada $t > 0$, B_t es normalmente distribuido con media 0 y varianza t.*
2. *Para cualesquiera $t_1, t_2 \geq 0$, tenemos $E(B_{t_1} B_{t_2}) = min\{t_1, t_2\}$.*
3. *Cuando $t^* \geq 0$ es fijo, el **p.e** $B^*(t) = B(t + t^*) - B(t^*)$ vendrá a ser otro **M.B** estándar en $\mathbb{R}$.*
4. *Si $\mu > 0$, el **p.e** $B^*(t) = \dfrac{B(\mu t)}{\sqrt{\mu}}$ vendrá a ser otro **M.B** estándar en $\mathbb{R}$.*

Teorema 2.2.4. *Casi todas los caminos del **M.B** B_t no son diferenciables en ninguna parte. Es decir,*

$$P\left\{\omega; t \mapsto B(t, \omega),\ 0 \leq t \ \text{ es nunca diferenciable } \right\} = 1$$

Demostración. La demostración está dada en el Teorema 26 de [7]. □

Teorema 2.2.5. *$\Delta_m = \{a = t_0, t_1 \cdots, t_{m-1}, t_m = b\}$ representa una partición del intervalo finito $[a, b]$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{m} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \to b - a, \qquad en\ L^2(\Omega),$$

cuando $\| \Delta_m \| = \text{máx}_{1 \leq i \leq m}(t_i - t_{i-1})$ tiende a 0.

2.2.2. Martingalas

Definición 2.2.6. *Sea $\{\mathcal{F}_t\}$ una filtración en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un **p.e** X_t definida en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dirá que es una martingala relativa a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ o una $\mathcal{F}_t$-martingala si se cumplen:*

1. *Para todo $t \geq 0$, $E[|X_t|] < \infty$.*

2. *El* ***p.e*** X_t *es adaptado a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}$.

3. $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *c.s. para cualesquiera* $t > s \geq 0$.

Decimos que el **p.e** (X_t) es una $\mathcal{F}_t$-supermartingala siempre y cuando se cumplan las dos primeras condiciones y

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s \text{ c.s. para cualesquiera } t > s \geq 0.$$

Decimos que el (X_t) es una $\mathcal{F}_t$-submartingala siempre y cuando se cumplan las dos primeras condiciones y

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s \text{ c.s. para cualesquiera } t > s \geq 0.$$

Observación 2.2.7. *Como el movimiento browniano* B_t *tiene incrementos independientes entonces* B_t *es una martingala con respecto a su filtración natural.*

2.3. Integral estocástica

En esta sección se va a definir la integral estocástica, pero antes de esto analicemos otro modelo dinámico ya no el de crecimiento poblacional sino el clásico ejemplo en la que una pequeña cantidad de líquido que fluye con una velocidad macroscópica de $b(t, u(t))$(donde $u(t)$ es una función determinista que representa su posición en el instante t). Entonces, una partícula microscópica que se suspende en este líquido mostrará evidencia de movimiento browniano. Ahora, sabemos que el cambio en la posición de la partícula $u(t + dt) - u(t)$ durante el intervalo de tiempo $[t, t + dt[$ se debe al flujo macroscópico del líquido, con la contribución de este último dada por $b(t, u(t))dt$. Pero también existe el bombardeo molecular adicional de la partícula, que contribuye a su dinámica con el término $\sigma(t, u(t))(B_{t+dt} - Bt)$, donde B_t es el movimiento browniano. Sumando los términos resulta en la ecuación

$$du(t) = b(t, u(t))dt + \sigma(t, u(t))dB_t,$$

pero en esta forma no tiene sentido porque recordemos que se mencionó acerca de un resultado en el cual se indicaba que las trayectorias de B_t no son diferenciables. Por tal razón, trataremos de interpretarlo de la siguiente forma

$$\forall \omega \in \Omega \qquad u(t) = u(0) + \int_0^t b(s, u(s))ds + \int_0^t \sigma(s, u(s))dB_s$$

lo cual requiere que se le de significado a una integral $\int_a^b \sigma(s,u(s))dB_s$ que, como se verá no puede ser del tipo Lebesgue-Stieltjes o, por lo tanto, del tipo Riemann-Stieltjes.

Definición 2.3.1. *Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función y Π el conjunto de particiones $\Pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ del intervalo $[a,b]$.*

$$\forall \pi\in\Pi: \qquad V_F(\pi)=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right],$$

entonces F es de variación acotada si

$$\sup_{\pi\in\Pi} V_F(\pi)<\infty$$

Corolario 2.3.2. *Si $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ es de variación acotada, entonces F es λ casi en todas partes, diferenciable en $[a,b]$ (λ es la medida de Lebesgue).*

Definición 2.3.3. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de variación acotada para $\forall\pi\in\Pi$. Fijando los puntos c_i arbitrariamente en $[x_{i-1},x_i[$, $i=1,\cdots,n$ y construimos la suma*

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left[F(x_{i-1})-F(x_i)\right]$$

Si para $\max_{x_i\in\{1,\cdots,n\}}(x_i-x_{i-1})\to 0$, la suma S_n tiende a un límite (que no depende de la elección de la partición ni de la selección de los puntos c_i dentro de los intervalos parciales de la partición), entonces este límite es la integral de Riemann- Stieltjes de f con respecto a la función F sobre $[a,b]$.

Observación 2.3.4. *Por el Teorema 2.2.4 y por el Corolario 2.3.2, se puede demostrar que un proceso browniano no es de variación acotada, y por lo tanto $\int_a^b \sigma(s,u(s))dB_s$ no puede interpretarse en el sentido de Riemann-Stieltjes.*

Notación 2.3.5. *Representaremos $\boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ como el espacio de todos los procesos estocásticos $f(t,w)$, $a\le t\le b$, $\omega\in\Omega$, son adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y*

$$\int_a^b E[|f(t)|^2]dt<\infty.$$

2.3.1. Integral de Itô

Para funciones $f \in \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ mostraremos como definir la integral de Itô

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega),$$

donde B_t es un movimiento browniano.

La idea es natural, es usar una secuencia de pasos donde el primero será definir $\mathcal{I}[\phi]$ para una clase simple de procesos sobre el conjunto $\mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ llamadas procesos elementales. El segundo paso consiste en mostrar que cada **p.e** $f \in \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, puede ser aproximado (en un sentido apropiado) a tales procesos elementales ϕ y el tercer paso implica usar ϕ para definir $\int fdB$ como el límite de $\int \phi dB$ cuando $\phi \to f$. Para mayores detalles sobre las demostraciones que estan presentes en cada paso, el lector puede recurrir a [16] o [21].

Primer paso. ϕ es un **p.e** elemental en $\mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$.
Un **p.e** elemental en $\mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ es **p.e** ϕ que es de la forma:

$$\phi(t,\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1}(\omega)\mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k)}(t), \tag{2.7}$$

donde :

- $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$,
- $\mathbb{1}$ representa la función indicadora,
- ξ_{k-1} es $\mathcal{F}_{t_{k-1}}-$medible para $k = 1, 2, \cdots, n$.
- $E(\xi^2_{k-1}) < \infty$, para $k = 1, 2, \cdots, n$.

Para el **p.e** elemental $\phi \in \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ de la forma (2.7) definimos la integral de Itô de ϕ como:

$$\mathcal{I}[\phi](\omega) = \int_a^b \phi(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1}(\omega)\left[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right](\omega). \tag{2.8}$$

Proposición 2.3.6. *Sean ϕ_1, $\phi_2 \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ procesos elementales y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $a < c < b$, entonces ϕ_1 es un* ***p.e*** *elemental en $\boldsymbol{L}^2_{ad}([a,c]\times\Omega)$ y $\boldsymbol{L}^2_{ad}([c,b]\times\Omega)$. Además :*

$$\int_a^b \phi_1(t)dB_t = \int_a^c \phi_1(t)dB_t + \int_c^b \phi_1(t)dB_t$$

2. $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,c]\times\Omega)$ *es elemental y*

$$\int_a^b (\alpha\phi_1(t) + \beta\phi_2(t))dB_t = \alpha\int_a^b \phi_1(t)dB_t + \beta\int_a^b \phi_2(t)dB_t$$

3. $E\left[\int_a^b \phi_1(t)dB_t\right] = 0.$

4. *El* ***p.e*** $\left\{I_t = \int_a^t \phi_1(s)dB_s, a \le t \le b\right\}$ *es una* $\{\mathcal{F}_t\}-$ *martingala.*

5. *El* ***p.e*** $\{I_t; a \le t \le b\}$ *es continuo c.s.*

También se cumple un importante lema

Lema 2.3.7. *Si* $\phi \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ *es un* ***p.e*** *elemental entonces*

$$E\left[\left(\int_a^b \phi(t,\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right] = \int_a^b E\left[(\phi(t,\omega))^2\right]dt = E\left[\int_a^b \phi(t,\omega)^2 dt\right] \tag{2.9}$$

Segundo paso. Lema de aproximación.
El segundo paso consiste en usar algún resultado sobre aproximación para poder extender la definición de integral estocástica $\int_a^b f(t)dB_t$ para cualquier **p.e** f que se encuentre en $\mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$.

Lema 2.3.8. *Sea que* $f \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. *Entonces existe una sucesión de funciones estocásticas elementales* $\{\phi_n\}$ *en* $\boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b E\left[|f(t) - \phi_n(t)|^2\right]dt = 0 \tag{2.10}$$

Tercer paso. Integral estocástica $\int_a^b f(t)dB_t$ para $f \in \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$.
Usando los dos pasos anteriores podemos ahora definir

$$\int_a^b f(t)dB_t, \qquad f \in \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega).$$

Usando el Lema 2.3.8 podemos garantizar la existencia de una sucesión tal que igual dada en (2.10) se cumpla. Para cada n, $\mathcal{I}[\phi_n]$ es definida como se indicó en el paso 1. Además por el Lema 2.3.11 tenemos que

$$E\left[|\mathcal{I}[f_n] - \mathcal{I}[f_m]|^2\right] = \int_a^b E\left[|f_n(t) - f_m(t)|^2\right]dt \tag{2.11}$$

tiende a 0 si $n, m \to \infty$. Por ello, la sucesión $\mathcal{I}[f_n]$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$.

$$\mathcal{I}[f] = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}[\phi_n], \qquad \text{en } L^2(\Omega). \tag{2.12}$$

Definición 2.3.9. ***(La integral Itô)*** *Sea $f \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Entonces la integral Itô de f es definido por*

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega), \quad \textit{en } L^2(\Omega) \tag{2.13}$$

donde $\{\phi_n\}$ es una sucesión de funciones tal que

$$E\left[\int_a^b (f(t,\omega)-\phi_n(t,\omega))^2\right] \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

La integral de Itô $\int_a^b f(t)dB_t$, está bien definida, es decir si $\{\phi_n\}$ y $\{\Phi_n\}$ son sucesiones de procesos elementales en $\mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n = \lim_{n\to\infty}\Phi_n \qquad \text{en} \quad \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \phi_n(t)dB_t = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_n(t)dB_t, \qquad \text{en} \quad L^2(\Omega).$$

2.3.2. Propiedades de la integral de Itô

Proposición 2.3.10. *Sean m, $n \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ y $a < c < b$,*

1. $\int_a^b m(t)dB_t = \int_a^c m(t)dB_t + \int_c^b m(t)(t)dB_t$;
2. $\int_a^b(\mu m(t) + \lambda n(t))dB_t = \mu\int_a^b m(t)dB_t + \lambda\int_a^b n(t)dB_t$;
3. $E\left[\int_a^b m(t)dB_t\right] = 0$;
4. *El* ***p.e*** $\left\{I_t = \int_a^t f(s)dB_s, a \le t \le b\right\}$; *es una $\{\mathcal{F}_t\}-$ martingala.*
5. *El* ***p.e*** $\{I_t; a \le t \le b\}$ *es continuo c.s.*

Lema 2.3.11. ***(lema de isometría)*** *Sea $f \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Entonces*

$$E\left[\left|\mathcal{I}[f]\right|^2\right] = \int_a^b E\left[\left|f(t)\right|^2\right]dt. \tag{2.14}$$

Por este lema, la integral de Itô $\mathcal{I} : \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega) \to L^2(\Omega)$ es una isometría. Por la linealidad de $\mathcal{I}$, se tiene el siguiente corolario

Corolario 2.3.12. *Sean $f, g \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Entonces*

$$E\left[\mathcal{I}\left[f\right]\mathcal{I}\left[g\right]\right] = \int_a^b E\left[f(t)g(t)\right]dt. \tag{2.15}$$

2.3.3. Sumas de Rimann e integral estocástica

Sea $f \in \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Para una partición $\Delta_n = \{t_0, t_1 \cdots, t_{n-1}, t_n\}$ de $[a,b]$, definimos la suma de Rimann de f con respecto a B_t por

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right). \tag{2.16}$$

Una pregunta que surge es si esta sucesión de sumas de Rimann converge a la integral de Itô $\int_a^b f(t)dB_t$. Supongamos que $E\left[f(t)f(s)\right]$ es una función continua de t y s. Definamos

$$f_n(t,\omega) = f(t_{i-1},\omega), \qquad t_{i-1} < t \leq t_i.$$

Entonces $\{f_n(t,\omega)\}$ es una sucesión de procesos elementales estocásticos adaptados. Como $E\left(f(t)f(s)\right)$ es continua sobre $[a,b]^2$, se tiene que

$$\lim_{s\to t} E\left[|f(t) - f(s)|^2\right] = 0,$$

lo cual se deduce que para $t \in [a,b]$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|f(t) - f_n(t)|^2\right] = 0.$$

Para todo $a \leq t \leq b$,

$$E\left[|f(t) - f_n(t)|^2\right] \leq 2\left(E\left[|f(t)|^2\right] + E\left[|f_n(t)|^2\right]\right) \leq 4 \sup_{a\leq s\leq b} E\left[|f(s)|^2\right].$$

Por lo anterior y aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\left[|f(t) - f_n(t)|^2\right] dt = 0$$

Entonces a partir de (2.12)

$$\int_a^b f(t)dB_t = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}[f_n], \qquad \text{en } L^2(\Omega). \tag{2.17}$$

Pero de la definición dada para $\mathcal{I}[f_n]$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[f_n] &= \sum_{i=1}^n f_n(t_{i-1})\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right), \end{aligned}$$

que viene a ser la suma de Rimann dada en (2.16). Así, se tiene la siguiente proposición

Proposición 2.3.13. *Sea $f \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Supongamos que $E[f(t)f(s)]$ es una función continua de t y s. Entonces*

$$\int_a^b f(t)dB_t = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right), \qquad \textit{en } L^2(\Omega),$$

donde $\Delta_n = \{a = t_0, t_1 \cdots, t_{n-1}, t_n = b\}$ y $\| \Delta_n \| = \text{máx}_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$.

2.4. Una extensión de integral de Itô

En la sección anterior, la integral de Itô $\mathcal{I}[f] = \int_a^b f(t)dB_t$ fueron definidas para procesos estocásticos f que son $\{\mathcal{F}_t\}-$adaptados satisfaciendo la condición $\int_a^b E\left[|f(t)|^2\right] dt < \infty$. La variable aleatoria $\mathcal{I}[f]$ pertenece $L^2(\Omega)$. Además el **p.e** $X_t = \int_a^t f(s)dB_s,\ a \le t \le b$, es una martingala. Se puede extender la integral de Itô $\mathcal{I}[f]$ a **p.e** f que son adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y que cumplan la condición $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ c.s. En el caso de estos procesos, se tiene que la integral de Itô $\mathcal{I}[f]$ es también una variable aleatoria pero en general no pertenece al $L^2(\Omega)$. La ausencia de esta propiedad ha dirigido a un concepto de martingala local.

2.4.1. Una clase más grande de integrandos

Como antes fijamos un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\{\mathcal{F}_t\}$. Definiremos la integral estocástica $\int_a^b f(t)dB_t$, para procesos estocásticos f que cumplen:

1. $f(t,\omega)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$;

2. $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty. \qquad c.s.$

La condición (2) indica que casi todos los caminos son funciones en el espacio de Hilbert $L^2[a,b]$. Por lo tanto la función $\omega \mapsto f(\cdot,\omega)$ es una función medible de Ω a $L^2[a,b]$.

Notación 2.4.1. *Representaremos $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ como el espacio de procesos estocásticos $f(t,\omega)$ que cumplen (1)-(2).*

A partir del teorema de Fubini se tiene que

$$E\left[\int_a^b |f(t)|^2 dt\right] = \int_a^b E\left[|f(t)|^2\right] dt < \infty$$

Entonces

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty. \qquad c.s.$$

Esto muestra la relación de inclusión

$$\mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega) \subset \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b]).$$

Así, tenemos una clase de más grande de integrandos $f(t,\omega)$ para la integral estocástica $\int_a^b f(s)dB_s$. La crucial diferencia es la posible aunsencia de integrabilidad del integrando $f(t,w)$ con repescto a la $\omega-$variable. Es decir, la posibilidad que $\mathcal{I}[f]$ no pertenezca a $L^2(\Omega)$. Pero en general es más complicado comprobar si un **p.e** $f(t)$ que es $\{\mathcal{F}_t\}-$adaptado pertenece a $\mathbf{L}_{ad}(\Omega,[a,b])$. Por otro lado, es más fácil ver si un proceso f pertenece a $\mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Por ejemplo, cuando $f(t)$ es $\{\mathcal{F}_t\}-$adaptado y tiene trayectorias continuas c.s., entonces pertence a $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$.

Al querer extender la integral $\int_a^b f(t)dB_t$, para f que pertenecen a $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$, es necesario mencionar los siguientes lemas.

Lema 2.4.2. *Si $f(t)$ es **p.e** elemental que pertenece a $\boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Entonces se cumple que*

$$P\left\{\omega; \Big|\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega)\Big| > \epsilon\right\} \leq \frac{C}{\epsilon^2} + P\left\{\omega; \int_a^b |f(t,\omega)|^2 dt > C\right\}$$

para cualquier constante positiva ϵ y C.

Lema 2.4.3. *Si f pertenece al conjunto $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$. Entonces va existir una sucesión*

de ***p.e*** *elementales* $\{f_n\}$ *en* $\boldsymbol{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(t)-f_n(t)|^2dt=0, \qquad \textit{en probabilidad.} \tag{2.18}$$

Haciendo uso de los lemas ya mencionados podemos definir la integral estocástica general

$$\int_a^b f(t)dB_t$$

cuando f pertenezca al conjunto $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$. A partir del Lema 2.4.3 se tiene una secuencia $\{f_n\}$ de procesos elementales en $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ tal que la ecuación (2.18) se mantiene. Para cada n, la integral

$$\mathcal{I}[f_n]=\int_a^b f_n(t)dB_t$$

es definido como se hizo antes. Haciendo uso del Lema 2.4.2 para $f=f_n-f_m$ con $\epsilon>0$ y $C=\dfrac{\epsilon^3}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned}&P\left\{\omega;\left|\mathcal{I}[f_n](\omega)-\mathcal{I}[f_m](\omega)\right|>\epsilon\right\}\\&\leq\frac{\epsilon}{2}+P\left\{\omega;\textstyle\int_a^b|f_n(t,\omega)-f_m(t,\omega)|^2dt>\dfrac{\epsilon^3}{2}\right\}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Pero usando la desigualdad $|u+v|^2\leq 2(|u|^2+|v|^2)$ se deduce la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}&P\left\{\omega;\textstyle\int_a^b|f_n(t,\omega)-f_m(t,\omega)|^2dt>\dfrac{\epsilon^3}{2}\right\}\\&\leq P\left\{\omega;\textstyle\int_a^b|f_n(t,\omega)-f(t,\omega)|^2dt>\dfrac{\epsilon^3}{8}\right\}\\&+P\left\{\omega;\textstyle\int_a^b|f(t,\omega)-f_m(t,\omega)|^2dt>\dfrac{\epsilon^3}{8}\right\}\end{aligned} \tag{2.20}$$

Así, aplicando el lema 2.4.3, obtenemos

$$\lim_{n,m\to\infty}P\left\{\omega;\int_a^b|f_m(t)-f_n(t)|^2dt>\frac{\epsilon^3}{2}\right\}=0.$$

Por lo tanto existe un $N>1$ tal que

$$P\left\{\omega; \int_a^b |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2}\right\} < \frac{\epsilon^3}{2}, \qquad \forall n, m \geq N,$$

Se sigue de esta última desigualdad y la obtenida en (2.20) que

$$P\left\{\omega; \left|\mathcal{I}\left[f_n\right](\omega) - \mathcal{I}\left[f_m\right](\omega)\right| > \epsilon\right\} < \epsilon, \qquad \forall n, m \geq N,$$

esto muestra que la sucesión $\{\mathcal{I}\left[f_n\right]\}$ de variables aleatorias converge en probabilidad. Por lo tanto, se ha definido

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}\left[f_n\right], \qquad \text{en probabilidad.} \tag{2.21}$$

El límite va ser independiente de cualquier elección de sucesión de funciones $\{f_n\}$ que se tome. Así, que la integral estocástica $\int_a^b f(t)dB_t$, está bien definida. Por lo tanto, se tiene finalmente la integral definida

$$\int_a^b f(t)dB_t, \quad f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2\left[a, b\right]).$$

Proposición 2.4.4. *Sean* $m,\ n \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2\left[a, b\right])$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ *y* $a < c < b$,

1. $\int_a^b m(t)dB_t = \int_a^c m(t)dB_t + \int_c^b (t)m(t)dB_t$

2. $\int_a^b (\mu f(t) + \lambda g(t))dB_t = \mu \int_a^b f(t)dB_t + \lambda \int_a^b g(t)dB_t$

3. *El* $\boldsymbol{p.e}$ $\{I_t; a \leq t \leq b\}$ *tiene trayectorias continuas c.s.*

Proposición 2.4.5. *Sea* f *cualquier* $\boldsymbol{p.e}$ *continuo* $\{\mathcal{F}_t\}-$*adaptado. Entonces* $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2\left[a, b\right])$ *y*

$$\int_a^b f(t)dB_t = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right), \qquad \textit{en probabilidad,}$$

donde $\Delta_n = \{a = t_0, t_1 \cdots, t_{n-1}, t_n = b\}$ *y* $\parallel \Delta_n \parallel = \text{máx}_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$.

Observación 2.4.6. *Para aquellos procesos estocásticos* $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2\left[a, b\right])$ *el* $\boldsymbol{p.e}$ $\{I_t = \int_a^t f(s)dB_s; a \leq t \leq b\}$ *no necesariamente será una martingala y además para los procesos* f *no hay un Lema de isometría.*

2.5. Procesos de Itô

Denotemos por $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a,b])$ al espacio de todos los procesos estocásticos $\{\mathcal{F}_t\}-$adaptados tal que $\int_a^b |f(t)|dt < \infty$ c.s.

Definición 2.5.1. *Sea B_t un movimiento browniano. Un proceso de Itô es un proceso estocástico $X : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ de la forma*

$$X_t = X_a + \int_a^t g(s)ds + \int_a^t f(s)dB_s, \qquad a \leq t \leq b \tag{2.22}$$

donde X_a es $\mathcal{F}_a-$medible, $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$, y $g \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a,b])$

Si X_t es un proceso de Itô, esta algunas veces se escribe en su forma diferencial más corta

$$dX_t = g(t)dt + f(t)dB_t. \tag{2.23}$$

Cabe señalar que el diferencial estocástico no tiene sentido en sí mismo, ya que las trayectorias de los brownianos no son diferenciables en ninguna parte. Es simplemente una expresión simbólica para significar la igualdad en la ecuación (2.22).

Supongamos que B_t es el movimiento browniano estándar. Entonces, empleando la proposición 2.3.13 se tiene que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t,$$

el término extra $-1/2t$ muestra que la integral de Itô no se comporta como integrales ordinarias. El ejemplo es claro al ilustrarnos que la definición básica de integrales Itô no es muy útil cuando intentamos evaluar una integral dada. Esto es similar a la situación de las integrales ordinarias de Rimann, donde no usamos la definición básica para hallar las integrales sino el teorema fundamental del cálculo más la regla de la cadena en los cálculos explícitos. Sin embargo, en este contexto, no tenemos teoría de diferenciación, solo teoría de integración. Pero a pesar de ello, resulta que se puede dar una versión de la regla de la cadena para la integral de Itô, llamada fórmula Itô.

2.5.1. Fórmula de Itô

Teorema 2.5.2. *Sea X_t un proceso de Itô dado por*

$$X_t = X_a + \int_a^t g(s)ds + \int_a^t f(s)dB_s, \qquad a \leq t \leq b$$

Sea $F(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ (es decir, F es dos veces continuamente diferenciable sobre $[0,\infty) \times \mathbb{R}$). Entonces,

$$Y_t = F(t, X_t)$$

es de nuevo un proceso de Itô, y

$$\begin{aligned} F(t,X_t) \quad &= F(a,X_a) + \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)f(s)dB_s \\ &+ \int_a^t \left[\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)g(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)f(s)^2\right]ds \end{aligned} \tag{2.24}$$

Demostración. La prueba es dada en [21]. □

Una buena manera de obtener la ecuación (2.24) es através de la derivación simbólica en términos de una ecuación diferencial estocástica usando la expansión de Taylor para primer orden para dt y de segundo orden para dX_t y también usando la siguiente regla $dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = 0$ y $dB_t.dB_t = dt$ Aquí es la derivación simbólica de (2.24). Primero aplicamos la expansión de Taylor tenemos

$$dF(t,X_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$

Usando las desigualdades dadas obtenemos que $(dX_t)^2 = f(t)^2$. Por lo tanto,

$$dF(t,X_t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)g(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)f(t)^2\right)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)f(t)dB_t$$

Enfatizamos que esta derivación no es una prueba de la fórmula de Itô.

Consecuencias de la fórmula de Itô

Sea $f(t,x)$ y $F(t,x)$ una antiderivada en x de $f(t,x)$ tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \text{ y } \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)$$

existen y son continuas. Podemos usar la fómula de Itô para conocer

$$\int_a^b f(t, B_t) dB_t,$$

para ello es suficiente considerar $X_t = B_t$ y $Y_t = F(t, B_t)$. Entonces Y_t es un proceso de Itô y

$$\int_a^b f(s, B_s) f(s) dB_s \quad = F(b, B_b) - F(a, B_a) - \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial s}(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) \right] .ds$$

Proposición 2.5.3. *Sea $f \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ un **p.e** continuo y de variación acotada. Entonces*

$$\int_a^b f(t, \omega) dB_t(\omega) = f(t, \omega) B_t(\omega) \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b B_t(\omega) df(t, \omega), \quad c.s.$$

donde la última integral es definido en el sentido Lebesgue-Stieltjes.

Esta proposición nos indica que bajo ciertas condiciones la integral estocástica tiene un tipo fórmula de integración por parte. Es decir, para casi todo $\omega \in \Omega$ $f(t)$ y B_t pueden ser intercambiados

2.6. Ecuación Estocástica

A menudo el análisis de los sistemas dinámicos estocásticos nos dirigen a ecuaciones diferenciales de la forma.

$$\dot{X}_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \xi_t \tag{2.25}$$

donde podemos suponer que ξ_t, es el ruido blanco. El término de ruido blanco (gaussiano) generalmente se entiende en la literatura de ingeniería como un proceso gaussiano estacionario ξ_t, para $\infty < t < o\infty$, con esperanza $E[\xi_t] = 0$ y una constante densidad espectral en todo los reales. Para mayor detalles sobre ruido blanco el lector puede consultar [6]. Aunque ξ_t, no es un **p.e** habitual, no obstante la integral indefinida de ξ_t, puede identificarse con el proceso browniano $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$

$$B_t = \int_0^t \xi_s ds$$

o, en notación simbólica más corta,

$$dB_t = \xi_t dt$$

La interpretación de Itô de esa ecuación es

$$dX = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{2.26}$$

no olvidemos la ecuación diferencial estocástica (2.26) es solo una expresión simbolica y se interpreta como el significado de la ecuación integral estocástica

$$X_t = X_a + \int_a^t b(s, X_s)ds + \int_a^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

2.6.1. Existencia y unicidad de soluciones

Ahora limitaremos nuestra atención en el hallazgo de una solución a la ecuación (2.26). Más precisos poder tener respuestas a las siguientes interrogantes:

- ¿Cuál es la solución?
- ¿Existen teoremas que puedan garantizar la existencia y unicidad de la solución?
- ¿Qué propiedades tendrá la solución?

Para poder responder a ellas debemos antes definir qué es una solución de la ecuación (2.26).

Sean $b(\cdot,\cdot), \sigma(\cdot,\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Consideremos la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \qquad X_a = \xi, \tag{2.27}$$

que debe ser interpretada como la ecuación integral estocástica (EIE)

$$X_t = \xi + \int_a^t b(s, X_s)ds + \int_a^t \sigma(s, X_s)dB_s, \qquad a \leq t \leq b. \tag{2.28}$$

Explicaremos lo que significa que un **p.e** X_t sea una solución de la EDE dada en la ecuación (2.27).

Definición 2.6.1. *Un* ***p.e*** X_t $a \leq t \leq b$, *es llamada una solución de la EDE dada en la ecuación (2.27) que cumple*

1. *El* ***p.e*** $\sigma(t, X_t)$ *pertenece a* $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a,b])$, *así que* $\int_a^t \sigma(s, X_s)$ *es una integral de Itô para cada* $t \in a \leq t \leq b$;

2. *Casi todos los caminos del* $\boldsymbol{p.e}$ $b(t, X_t)$ *pertence a* $L^1[a, b]$;

3. *Para cada* $t \in [a, b]$, *se cumple (2.28) c.s..*

Es necesario imponer condiciones sobre b, σ con la finalidad de asegurar que exista una única solución para la ecuación diferencial estocástica (2.27).

Ejemplo Girsanov (1962) ha demostrado que la ecuación de Itô

$$X_s = \int_a^t |X_s|^\alpha dB_s$$

tiene solución única si $\alpha > 1/2$, pero tiene infinitas soluciones cuando $0 < \alpha < 1/2$. El ejemplo muestra que una ecuación Itô puede no tener una solución única definida en todo el intervalo $[a, b]$.

Teorema 2.6.2. *Supongamos que se cumplan las siguientes condiciones*

1. ξ *es una variable aleatoria* $\mathcal{F}_a-$*medible con* $E\left[\xi^2\right]$,

2. *(Condición de Lipschitz) existe* $C > 0$ *tal que*

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x - y| \;\; y \;\; |b(t, x) - b(t, y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.29}$$

3. *(Condición de crecimiento lineal) existe* $D > 0$ *tal que*

$$|\sigma(t, x)| \leq D(1 + |x|) \;\; y \;\; |b(t, x)| \leq D(1 + |x|), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

Entonces existirá un único $\boldsymbol{p.e}$ X_t *que es continuo,* $\mathcal{F}_t-$*adaptado para todo* $a \leq t \leq b$, *que es solución de EDE (2.27) y*

$$X_t = \xi + \int_a^t b(s, X_s)ds + \int_a^t \sigma(s, X_s)dB_s, \qquad a \leq t \leq b \quad c.s.$$

Más aún esta solución cumple que $X_t \in \boldsymbol{L}^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$.

Demostración. La prueba es dada en [21]. □

Observación 2.6.3. *La condición de crecimiento lineal asegura que la solución* $X_t(\omega)$ *de (2.27) no explota, es decir, que* $|X_t(\omega)|$ *no tiende a* ∞ *en un tiempo finito, mientras que la condición de Lipschitz nos garantiza que la ecuación (2.27) tiene una única solución. Aquí*

la unicidad significa que si $X_1(t,\omega)$ *y* $X_2(t,\omega)$ *son dos procesos continuos que satisfacen (2.27),* $E\left[\int_a^b |X_t|^2 dt\right] < \infty$ *y adaptado a la filtración generado por* ξ *y* B_s, $s \leq t$ *entonces*

$$X_1(t,\omega) = X_2(t,\omega) \quad \textit{para todo } t \leq b, \textit{c.s.}$$

La condición de Lipschitz puede ser demasiada restrictiva. El siguiente teorema es una generalización del Teorema 2.6.2 en el que esta condición de Lipschitz (uniforme) se reemplaza por la condición de Lipschitz local.

Teorema 2.6.4. *Suponga que la condición (2.30) se mantiene, pero la condición de Lipschitz es reemplazada por la condición de Lipschitz local: Para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *con* $n > 1$, *existe una constante* $K_n > 0$ *tal que, para todo* $t \in [a,b]$ *y todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *con* $|x|, |y| < n$,

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K_n|x-y| \;\; y \;\; |b(t,x) - b(t,y)| \leq K_n|x-y|$$

Entonces existirá una solución X_t *y esta será única para la ecuación (2.27).*

Demostración. La prueba es dada en [19]. □

Capítulo III

Modelos de crecimiento poblacional

Existe muchos tipos de modelos matemáticos en la literatura para describir poblaciones biológicas (ver [5], [8],[12], [22], o [24]). Se podría decir que la gran variedad de tales modelos es una consecuencia natural de la gran diversidad de los objetivos generales de dichos modelos.

Uno de los tantos modelos es el modelo logístico el cual asume que la tasa de crecimiento de alguna población solo dependerá del tamaño de dicha población. Este supuesto parece razonable cuando se trata de organismos que tienen una composición simple en su estructura como los microorganismos. Pero cuando se trata de organismos con estructura más complicada como animales o seres humanos, esto obviamente es una simplificación excesiva, porque está dejando a la lado diversos factores como la competencia dentro de la especie por los recursos incluida la estructura de edad. Además, de estos factores que se deberían tomar en cuenta también se debería considerar el hecho de que las tasas de natalidad se vean influenciadas por la cantidad de organismos interactúan con la población en estudio (competencia, depredación, mutualismo).

El modelo de población logística estándar para una sola especie es:

$$\frac{dY(t)}{dt} = rY(t)\left(1 - \frac{Y(t)}{K}\right). \tag{3.1}$$

Los parámetros r y K, asumidos como positivos, pueden tener importancia biológica. Se observamos que $Y' \approx rY$ cuando Y es pequeño, y que $Y' = 0$ cuando Y está cerca de

K. En decir, cuando Y es pequeño, la población va experimentar un crecimiento de forma exponencial, pero si Y está muy cerca de K, el tamaño poblacional apenas cambiará. La solución de (3.1), bajo ciertas condiciones, es

$$Y(t) = \frac{KY_0}{Y_0 + (K - Y_0)e^{-rt}} \tag{3.2}$$

La expresión (3.2) es la solución de la ecuación asociado al modelo logístico con $Y(0) = Y_0$ Esta solución muestra que el tamaño poblacional $Y(t)$ tienda a largo plazo a K. Es decir, cuando $t \to \infty$ si $Y_0 > 0$. La constante K se llamada la capacidad de carga de la población, debido a que indica el tamaño de la población que los recursos disponibles pueden seguir apoyando. La otra constante r se llama tasa de crecimiento intrínseca, ya que nos indica la tasa de crecimiento per cápita lograda cuando la población fuera lo suficientemente pequeño como para garantizar limitaciones insignificantes de recursos. Bajo este modelo se tiene que existe un rápido crecimiento inicial si $0 < Y_0 < K$, luego se observará una disminución sobre la tasa de crecimiento a medida que pasa el tiempo para que el tamaño poblacional converja a K. Este comportamiento está de acuerdo con las observaciones sobre muchas poblaciones, y por dicho motivo, este modelo es usado comunmente para describir el tamaño de poblacional.

También existe extensiones que incluyen la competencia entre diferentes especies, y el tipo de interacción depredador-presa (ver [18], [25]) al igual que modelos que consideran la población clasificada por grupos de edad (ver [18]), con el fin de resolver la limitación de los modelos que tratan todos los individuos de la población de manera idéntica. Sin embargo, son muy pocos los modelos permiten predecir la dinámica de las poblaciones de una manera efectiva. Por otro lado, existe la necesidad de extender estos procesos deterministas (que no son aleatorios) a modelos que puedan incluir variaciones más complejas del sistema dinámico, cuando se utiliza un modelo determinista para comprender la dinámica de cualquiera de los procesos que hemos mencionado.

Resulta adecuado que representemos un modelo dinámico de una población que contenga componentes deterministas y estocásticos que operen simultáneamente. Elementos deterministas sirven para hacer que el nivel de la variable de respuesta sea predecible a partir de las condiciones iniciales, mientras los elementos estocásticos son típicamente atribuibles a las siguientes fuentes:

1. Estocasticidad demográfica: se refiere a factores aleatorios que podrían afectar la

reproducción personal, la mortalidad, etcétera., y que, por lo tanto, se consideran específicos de cada individuo. Dado que esta variedad de estocasticidad opera independientemente entre los elementos de la población, tiende a "promediarse" en poblaciones más grandes; su impacto es principalmente un problema para las poblaciones pequeñas.

2. Estocasticidad ambiental: se refiere al efecto en las poblaciones locales y globales (grandes y pequeñas) de factores tales como el clima, accidentes / catástrofes importantes, epidemias, desastres naturales, etcétera. Se supone que estos factores operan independientemente a largo plazo. Para la estocasticidad ambiental, las fluctuaciones aleatorias en el medio ambiente afectan a toda la población.

3. Estocasticidad de la medición: se refiere a la noción de que el error de medición resultante de determinar, por ejemplo, el tamaño de una población en varios momentos es una fuente legítima de incertidumbre que puede dar lugar a evaluaciones sesgadas de algún fenómeno.

4. Estocasticidad informativa: se refiere a la posibilidad de que se puedan cometer errores críticos de omisión o especificaciones al tratar de modelar la realidad, ya sea por deficiencias estructurales o por supuestos de modelado inapropiados o poco realistas.

Por estas razones se puede decir que es imperativo tener en cuenta explícitamente los fenómenos aleatorios en nuestras actividades de modelado. Esto, aparentemente, nos ayudará a mejorar la precisión de estimaciones, predicciones del crecimiento de la población (tasas) y la sostenibilidad.

Una forma de modelar la dinámica del mundo real es incluir un ruido aleatorio en el modelo y, en consecuencia, una extensión natural de los modelos deterministas es pasar de una ecuación diferencial ordinaria a una ecuación diferencial estocástica, donde los parámetros relevantes se modelan de una distribución de probabilidad. Bajo estos supuestos, se supone que el sistema dinámico del proceso está parcialmente impulsado por el ruido. El modelo más simple que contiene aleatoriedad ambiental es el proceso de crecimiento exponencial puro con una tasa de crecimiento fluctuante:

$$\frac{dY(t)}{dt} = r(t)Y(t).$$

donde $r(t)$ fluctúa aleatoriamente sobre algún valor medio, como suele ser en la naturaleza, entra una complicación sustancial.

Existe una gran cantidad de trabajos que tienen presente la aleatoridad al momento de modelar el crecimiento poblacional. Por ejemplo, en el trabajo de [11] el modelo aleatoriza el parámetro de crecimiento de la población r, del modelo logístico y esto conduce a un término de difusión no lineal que trata directamente con la ecuación diferencial estocástica no lineal resultante. Es decir, en este modelo la tasa de crecimiento $r(t)$ es aleatorio y tal que $r(t) = \hat{r}(t) + W_t$, donde $\hat{r}(t) > 0$, W_t es un ruido blanco con una intensidad que posiblemente varie en el tiempo $\sigma^2(t)$. Donde se tiene que $W_t dt = \sigma(t) dB_t$, donde B_t es el proceso browniano.

$$dY_t = -K\hat{r}Y_t(1 + Y_t)dt - K\sigma(t)Y_t(1 + Y_t)dB_t, \qquad Y_0 = Y(0.) \tag{3.3}$$

Así como este trabajo existen diversos trabajos donde los modelos de crecimiento consideran la aleatoridad de alguno de los factores que son importantes para el anális. Trabajos como [2], [3], [1], [4] y [9].

El presente trabajo de tesis se basará en el estudio de dos modelos de crecimiento logístico estocástico. Ambos modelos consideran que la tasa r es estocástica, por lo cual consideraremos que r evoluciona regida por el proceso estocástico browniano B_t. Es decir, en ambos modelos se toma en cuenta aquellas perturbaciones continuas inciertas y minúsculas sobre la tasa de crecimiento que son generadas por el proceso B_t. Pero la diferencia de ambos modelos se encuentra en que uno de ellos es autónomo y el otro no.

Capítulo IV

Ecuación logística con perturbación aleatoria

Un modelo clásico para el crecimiento de la población se expresa como la ecuación logística determinista

$$dN(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)dt, \qquad N(0) = N_0 > 0. \tag{4.1}$$

Es una ecuación diferencial ordinaria clásica que se puede resolver fácilmente.

Proposición 4.0.1. *Sean r, K y N_0 números reales tales que $r, N_0 > 0$.*

1. *Si $K > 0$, la ecuación (4.1) tiene una solución global*

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt}(K - N_0)/N_0} \quad (t \geq 0),$$

que es positiva, acotada y tiene la propiedad asintótica que $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$

2. *Si $K < 0$, la ecuación (4.1) tiene una solución local*

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt}(K - N_0)/N_0} \quad (0 \leq t < T),$$

que explota hasta el infinito en el tiempo finito (es decir, un tamaño de población infinito en un tiempo finito)

$$T = \frac{1}{r}\log\left(\frac{N_0 - K}{N_0}\right).$$

Como podemos observar para la ecuación (4.1), hay un punto de equilibrio estable K de la población. Muchos autores han obtenido muchos resultados interesantes sobre la estabilidad de las soluciones positivas para (4.1) con su caso general. La existencia de un equilibrio estable es biológicamente fundamental porque se trata de la supervivencia a largo plazo de la población. El estudio de tales fenómenos se ha convertido en una parte esencial de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, dado que los sistemas de poblacionales a menudo están influenciados por el ruido ambiental, es importante descubrir si la presencia de dicho ruido afecta estos resultados.

Supongamos que r la tasa de crecimiento intrínseca, está perturbado estocásticamente, es decir que ahora r es aleatorio y tal que

$$r(t) = \hat{r} + \alpha\eta_t,$$

donde $\hat{r} > 0$, η_t es un ruido blanco y α^2 representa la intensidad del ruido que es constante en el tiempo. Entonces podemos escribir $\eta_t dt = \alpha dB_t$, donde B_t es un proceso browniano estándar. Así, este sistema ambientalmente perturbado puede ser descrito por la ecuación logística aleatorizada

$$dN_t = (\hat{r} + \alpha\eta_t)N_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)dt, \qquad N(0) = N_0 > 0. \tag{4.2}$$

con $N(0) = N_0$, y N_0 es una variable aleatoria que satisface $0 < N_0 < K$. Es razonable suponer que N_0 es independiente de B_t.

Según la interpretación de Itô, (4.2) es equivalente a

$$dN_t = N_t\left[1 - \frac{N_t}{K}\right]\hat{r}dt + N_t\left[1 - \frac{N_t}{K}\right]\alpha B_t, \quad (\hat{r}, K > 0) \tag{4.3}$$

Antes de analizar la existencia de soluciones para la ecuación (4.3) es importante señalar que bajo un modelo estocástico del crecimiento logístico se pueden obtener resultados que no son intuitivos, como por ejemplo en el trabajo de Mao, Marion y Renshaw [20] consideran el sistema perturbado ambientalmente

$$dN_t = N_t\left[a + bN_t\right]dt + \alpha N_t^2 B_t \tag{4.4}$$

donde $a, b, > 0$ con $N(0) = N_0$ y N_0 es una constante positiva. En [20] se muestra que con probabilidad uno, la solución de la ecuación (4.4) ya no puede explotar en un tiempo finito

si $a > 0$. En resumen, cuando $a > 0$ y $\alpha = 0$ la solución explota en el tiempo finito

$$T = \frac{1}{b} \log \left(\frac{b + N_0 a}{a N_0} \right)$$

mientras que a la inversa, no importa cuán pequeño sea $\alpha > 0$, la solución no explotará en un tiempo finito. En otras palabras, el ruido ambiental estocástico suprime la explosión determinista. El objetivo de este capítulo será dicutir la existencia, singularidad y atracción global de soluciones positivas para

$$dN_t = N_t \left[1 - \frac{N_t}{K} \right] \hat{r} dt + N_t \left[1 - \frac{N_t}{K} \right] \alpha B_t. \tag{4.5}$$

Como se mencionó en el primer capítulo una ecuación diferencial estocástica tiene una solución global única (es decir, sin explosión en un tiempo finito) para cualquier valor inicial, si los coeficientes de la ecuación cumplen las condiciones de: crecimiento lineal y de Lipschitz local. Sin embargo, los coeficientes de (4.5) no satisfacen la condición de crecimiento lineal, aunque son localmente Lipschitz continua, por lo que la solución de (4.5) puede explotar en un tiempo finito.

4.1. Existencia, singularidad y atracción global de soluciones

Sea N_t una solución de (4.5). Es obvio que $N = 0$ y $N = K$ son las soluciones de ((4.5). Si $N_t \neq 0$ y $N_t \neq K$, según la fórmula de Itô, tenemos

$$\begin{aligned} d \log \left| \frac{N_t}{K - N_t} \right| &= d \log |N_t| - d \log |K - N_t| \\ &= \left[\frac{\partial g^1}{\partial t}(t, N_t) dt + \frac{\partial g^1}{\partial N}(t, N_t) dN_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^1}{\partial N^2}(t, N_t).(dN_t)^2 \right] \\ &\quad - \left[\frac{\partial g^2}{\partial t}(t, N_t) dt + \frac{\partial g^2}{\partial N}(t, N_t) dN_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^2}{\partial N^2}(t, N_t).(dN_t)^2 \right] \end{aligned}$$

donde $g^1(t, N_t) = \log |N_t|$ y $g^2(t, N_t) = \log |K - N_t|$. Entonces

$$\begin{aligned} d\log\left|\frac{N_t}{K-N_t}\right| &= d\log|N_t| - d\log|K-N_t| \\ &= \left[\frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2}(dN^2)\right] - \left[\frac{dN_t}{N_t-K} - \frac{1}{2(N_t-K)^2}(dN^2)\right] \\ &= \frac{K}{N_t(K-N_t)}dN_t - \frac{(K-2N)K}{2N_t^2(K-N_t)^2}(dN_t)^2 \\ &= \hat{r}dt + \alpha dB_t - \frac{(K-2N_t)\alpha^2}{2K}dt \\ &= \left(\hat{r} - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{N_t\alpha^2}{K}\right)dt + \alpha dB_t \end{aligned}$$

entonces existe una variable aleatoria $C = C(\omega)$ tal que

$$\frac{N_t}{K-N_t} = Ce^{\hat{r}t - \frac{1}{2}\alpha^2 t + \alpha B_t + \frac{\alpha^2}{K}\int_0^t N_s ds}$$

y tenemos

$$N_t = \frac{K}{1 + \frac{1}{C}e^{-\hat{r}t + \frac{1}{2}\alpha^2 t - \alpha B_t - \frac{\alpha^2}{K}\int_0^t N_s ds}}.$$

Como $N(0) = N_0$ y $0 < N_0 < K$, entonces $C = \frac{N_0}{K-N_0}$, entonces

$$N_t = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-\hat{r}t + \frac{1}{2}\alpha^2 t - \alpha B_t - \frac{\alpha^2}{K}\int_0^t N_s ds}},$$

y

$$\frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-\hat{r}t + \frac{1}{2}\alpha^2 t - \alpha B_t}} =: \phi(t) < N_t < K, \quad t \geq 0 \tag{4.6}$$

El siguiente teorema es la existencia, unicidad y atracción global de soluciones positivas de (4.5). Entendemos por atracción global de soluciones cuando

$$\lim_{t\to\infty} N_t = K, \quad c.s.$$

Teorema 4.1.1. *Existe una solución positiva continua única $\phi(t) < N_t < K$ para (4.5) para cualquier valor inicial $N(0) = N_0$ con $0 < N_0 < K$, donde $\phi(t)$ se define por (4.6). Si $\hat{r} > \frac{1}{2}\alpha^2$, entonces $N_t \to K$ c.s., cuando $t \to \infty$.*

Demostración. Primero demostramos la existencia de soluciones positivas. Haciendo el

cambio de variable

$$N_t = K\frac{e^{X_t}}{1+e^{X_t}} \tag{4.7}$$

entonces

$$X_t = \log\frac{N_t}{K-N_t}.$$

Por los mismos argumentos para obtener anteriormente, de (4.5) se tiene que

$$dX_t = \left(\hat{r} - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{e^{X_t}}{1+e^{X_t}}\alpha^2\right)dt + \alpha dB_t, \quad t \geq 0 \tag{4.8}$$

con un valor inicial $X(0) = X_0 =: \log\frac{N_0}{K-N_0}$. Entonces X_0 es independiente de B_t.
Sea

$$b(x) = \hat{r} - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{e^x}{1+e^x}\alpha^2, \quad \sigma(x) = \alpha.$$

Entonces, tanto b como σ son funciones acotadas y continuas, y cumplen las condiciones de: local de Lipschitz y crecimiento lineal. Así, (4.8) tiene una solución continua única X_t en $t > 0$ con un valor inicial $X(0) = X_0$ (ver teorema 2.6.4).
Como $N_t = K\frac{e^{X_t}}{1+e^{X_t}}$, entonces $0 < N_t < K$ y N_t es una solución continua positiva de (4.5), ya que

$$\begin{aligned}
\frac{dN_t}{K} &= e^{-X_t}\left(\frac{e^{X_t}}{1+e^{X_t}}\right)^2 dX_t + \frac{e^x - e^{2x}}{2(1+e^x)^3}(dX_t)^2 \\
&= \frac{N_t(K-N_t)}{K^2}\left[dX_t + \frac{K-2N_t}{2K}(dX_t)^2\right] \\
&= \frac{N_t(K-N_t)}{K^2}\left[\left(\hat{r} - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{N_t\alpha^2}{K}\right)dt + \alpha dB_t + \frac{K-2N_t}{2K}\alpha^2 dt\right] \\
&= \frac{N_t(K-N_t)}{K^2}\hat{r}dt + \frac{N_t(K-N_t)}{K^2}\alpha dB_t.
\end{aligned}$$

A continuación demostramos la unicidad de las soluciones. Sean N_t y M_t las soluciones con un valor inicial $N(0) = M(0) = N_0$ y $0 < N_0 < K$. Se deduce de (4.6) que $0 < N_t, M_t < K$. Entonces

$$d(N_t - M_t) = (N_t - M_t)\left[1 - \frac{N_t + M_t}{K}\right](\hat{r}dt + \alpha dB_t)$$

y

$$N_t - M_t = \int_0^t (N_s - M_s)\left[1 - \frac{N_s + M_s}{K}\right]\hat{r}ds + \int_0^t (N_s - M_s)\left[1 - \frac{N_s + M_s}{K}\right]\alpha dB_s.$$

Usando $E\left[|X+Y|^2\right] \leq 2\left(E\left[|X|^2\right] + E\left[|Y|^2\right]\right)$, se tiene que

$$E\left[Z_t^2\right] \leq 2E\left[\int_0^t Z_s\left[1 - \frac{N_s + M_s}{K}\right]\hat{r}ds\right]^2 + 2E\left[\int_0^t Z_s\left(1 - \frac{N_s + M_s}{K}\right)\alpha dB_s\right]^2$$

donde $Z_t = N_t - M_t$. Ahora, por el lema de isometría, es decir

$$E\left[\left(\int_a^b f(s)dB_s\right)^2\right] = \int_a^b E\left[f^2(s)\right]ds = E\left[\int_a^b f^2(s)ds\right]$$

se tiene que la última desigualdad es

$$E\left[Z_t^2\right] \leq 18\hat{r}^2 E\left[\int_0^t |Z_s|ds\right]^2 + 18\alpha^2 \int_0^t E\left[Z_s^2\right]ds$$

a través de la desigualdad de Hölder, obtenemos que

$$\int_0^t |Z_s|ds \leq \left[\int_0^t ds\right]^{1/2}\left[\int_0^t |Z_s|^2 ds\right]^{1/2}$$

implica

$$E\left[\int_0^t |Z_s|ds\right]^2 \leq t\int_0^t E\left[Z_s\right]^2 ds.$$

Así, tenemos

$$E\left[Z_t^2\right] \leq 18(\hat{r}^2 t + \alpha^2)\int_0^t E\left[Z_s^2\right]ds.$$

Entonces la función $u(t) = E\left[Z_t^2\right]$, $t \geq 0$ satisface

$$u(t) \leq A(t)\int_0^t u(s)ds, \quad A(t) := 18(\hat{r}^2 t + \alpha^2).$$

Sea $w(t) = \int_0^t u(s)ds$. Entonces $w'(t) \leq A(t)w(t)$. Por lo tanto

$$w(t) \leq w(0)e^{\int_0^t A(s)ds}.$$

Como $w(0) = 0$, entonces $w(t) = 0$ y entonces $u(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto

$$P\{\omega; |N_t - M_t| = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)\} = 1,$$

por la continuidad de $t \to |N_t - M_t|$, se tiene que

$$P\{\omega; |N_t - M_t| = 0, \text{ para todo } t \in [0, \infty)\} = 1,$$

y se prueba la unicidad.

Finalmente, demostramos el atractivo global de las soluciones para (4.5). Para ello analicemos primero que sucede en $t.c + \alpha B_t$, cuando $t \to +\infty$ con $c, \alpha > 0$ haciendo uso del siguiente lema

Lema 4.1.2. *(Ley fuerte de grandes números.) Si $X_1, X_2, X_3, \cdots$ es una sucesión infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que cumplen $E[|X_i|] < \infty$ y tienen el valor esperado μ, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1, X_2, \cdots, X_n}{n} = \mu \quad c.s.$$

Como se tiene que $B_t = B_1 + B_2 - B_1 + B_3 - B_2 + \cdots + B_t - B_{t-1}$, y recordando que $B_t - B_{t-1}$ y $B_{t-1} - B_{t-2}$ son independientes e idénticamente distribuidas con media o valor esperado 0. Entonces, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad c.s.$$

Lo cual da como resultado

$$\lim_{t\to+\infty} \{ct + \alpha B_t\} = \lim_{t\to+\infty} t\{c + \alpha \frac{B_t}{t}\} = +\infty \quad c.s. \tag{4.9}$$

Ahora volviendo a la demostración de lo indicado. Sea N_t una solución con un valor inicial $N(0) = N_0$ y $0 < N_0 < K$. Se deduce de (4.6) que $\phi(t) < N_t < K$, $t \geq 0$. Si $\hat{r} > \frac{\alpha^2}{2}$, por (4.6), cuando $\phi(t) \to K$ c.s., entonces $N_t \to K$ c.s. cuando $t \to \infty$. La conclusión es la consecuencia directa de (4.6) para $\phi(t)$ junto con la igualdad (4.9). □

Observación 4.1.3. *Sea N_t una solución de (4.5) con un valor inicial $N(0) = N_0$ y $0 < N_0 < K$. Dado que $0 < N_t < K$ en $t > 0$, se deduce de (4.6) que*

$$N_t \leq \frac{K}{1+(\frac{K}{N_0}-1)e^{-\hat{r}t-\frac{1}{2}\alpha^2 t-\alpha B_t}}.$$

Si la tasa de crecimiento es negativa, más específico $\hat{r} < -\frac{\alpha^2}{2}$, *entonces cuando* $N_t \to 0$ *c.s. cuando* $t \to \infty$.

Por el Teorema 4.1.1 demostrado podemos observar que bajo ciertas condiciones los resultados obtenidos con respecto a la solución de la ecuación logística estocástica son parecidas a las obtenidas en el primer caso del teorema 4.0.1.

4.1.1. Una ecuación logística general

Procederemos a dar algunas observaciones y resultados relacionados a una ecuación logística general, basada en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Dicha ecuación está dada por

$$dN(t) = rN(t)\left[1-\left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\theta}\right]dt, \qquad r, K, \theta > 0. \tag{4.10}$$

Algunos resultados obtenidos sobre el modelo se pueden encontrar en [10]. Del mismo modo, podemos considerar un modelo estocástico basado en (4.10) y discutir la existencia, unicidad y atractivo global de soluciones positivas con intensidad α^2:

$$dN(t) = (\hat{r}dt + \alpha dB_t)N(t)\left[1-\left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\theta}\right], \qquad \hat{r}, K, \theta > 0. \tag{4.11}$$

donde B_t es el movimiento browniano estándar con$N(0) = N_0$, y N_0 es una variable aleatoria con $0 < N_0 < K$. Supongamos que N_0 es independiente de B_t.

Sea N_t una solución de (4.11). Es obvio que $N = 0$ y $N = K$ son las soluciones de ((4.11). Si $N_t \neq 0$ y $N_t \neq K$, según la fórmula de Itô, tenemos

$$\begin{aligned} d\log\left|\frac{N_t^{\theta}}{K^{\theta}-N_t^{\theta}}\right| &= d\log|N_t^{\theta}| - d\log|K^{\theta}-N_t^{\theta}| \\ &= \theta\left[\left(\hat{r}-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{(\theta+1)\alpha^2}{2K^{\theta}}N_t^{\theta}\right)dt+\alpha dB_t\right], \end{aligned}$$

entonces

$$N_t = K\left(1+\left[\left(\frac{K}{N_0}\right)^{\theta}-1\right]e^{\theta\left[-\hat{r}t+\frac{1}{2}\alpha^2 t-\alpha B_t-\frac{(\theta+1)\alpha^2}{2K^{\theta}}\int_0^t N_s^{\theta}ds\right]}\right)^{-1/\theta},$$

y

$$K\left(1+\left[\left(\frac{K}{N_0}\right)^{\theta}-1\right]e^{\theta\left[-\hat{r}t+\frac{1}{2}\alpha^2 t-\alpha B_t\right]}\right)^{-1/\theta} =: \phi_\theta(t) < N_t < K, \quad t \geq 0 \tag{4.12}$$

Haciendo el cambio de variable

$$N_t = K\left(\frac{e^{X_t}}{1+e^{X_t}}\right)^{\theta} \tag{4.13}$$

entonces

$$X_t = \log \frac{N_t^\theta}{K^\theta - N_t^\theta}.$$

Por los mismos argumentos usados anteriormente, de (4.11) se tiene que

$$dX_t = \theta\left(\left[\hat{r}-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{(\theta+1)\alpha^2}{2}\frac{e^{X_t}}{1+e^{X_t}}\right]dt+\alpha dB_t\right), \quad t \geq 0 \tag{4.14}$$

en $t \geq 0$ con un valor inicial $X(0) = X_0 =: \log \frac{N_0^\theta}{K^\theta - N_0^\theta}$.
Similar a la prueba del Teorema 4.1.1, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.1.4. *Existe una solución positiva continua única $\phi_\theta(t) < N_t < K$ para (4.11) para cualquier valor inicial $N(0) = N_0$ con $0 < N_0 < K$, donde $\phi_\theta(t)$ se define por (4.12). Si $\hat{r} > \frac{1}{2}\alpha^2$, entonces $N_t \to K$ c.s., cuando $t \to \infty$.*

Capítulo V

Ecuación logística no autónoma con perturbación aleatoria

Como se mencionó en el capítulo anterior el crecimiento natural de las poblaciones en el mundo real se ve inevitablemente afectado por el ruido ambiental. Debido al ruido ambiental, la tasa de crecimiento en el sistema de la población debe exhibir fluctuaciones aleatorias. Habíamos supuesto que r se ve influenciada por el ruido ambiental

$$r \to r + \alpha \dot{\mathrm{B}}_t.$$

Luego habíamos obtenido el siguiente modelo estocástico tipo Itô:

$$dN_t = N_t \left[1 - \frac{N_t}{K}\right](rd_t + \alpha dB_t) \tag{5.1}$$

Sin embargo, en una situación real, el crecimiento natural de muchas poblaciones varía con t, por ejemplo, debido a la estacionalidad. Por lo tanto, es razonable e importante estudiar la siguiente ecuación logística no autónoma estocástica

$$dN_t = N_t \left[K - N_t\right](r(t)d_t + \alpha(t)dB_t). \tag{5.2}$$

Bajo este modelo asumiremos que $r(t) > 0$ y $\alpha(t)$ son funciones limitadas y continuas en $[0, \infty)$ además N_0 es determinística. Al usar la transformación $Y = (N/K) - 1$, la ecuación (5.2) puede ser reescrito en la forma

$$dY_t = -r(t)Y_t \left[1 + Y_t\right] d_t - \alpha(t)Y_t \left[1 + Y_t\right] dB_t, \quad Y(0) = Y_0 = \frac{N_0}{K} - 1. \tag{5.3}$$

En vista del modelo logístico, consideramos solo las condiciones iniciales $Y_0 > -1$. Dado que los coeficientes

$$b(y,t) = -r(t)y(1+y) \quad \text{y} \quad \sigma(y,t) = -\alpha(t)y(1+y)$$

de la ecuación son localmente Lipschitz para cualquier valor inicial $Y_0 > 0$, existe una solución única. En este capítulo se discutirá sobre la estabilidad de las soluciones estacionarias de ecuación (5.3). Pero antes se definirá estabilidad en el sentido estocástico.

5.1. Estabilidad estocástica

En esta sección mencionaremos algunos definiciones y resultados útiles sobre la estabilidad estocástica de la solución de equilibrio de una ecuación diferencial estocástica en la siguiente sección 4 aplicamos estos conceptos y resultados al modelo (5.3).

Presentamos algunas anotaciones necesarias. Sea $\mathcal{K}$ la familia de todas las funciones continuas no decrecientes $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de modo que $w(0) = 0$ y $w(r) > 0$ si $r > 0$. Para $h > 0$, sea $S_h = \{x \in \mathbb{R}; |x| < h\}$. Una función continua $V(x,t)$ definida en $S_h \times [t_0, \infty)$ es *positiva-definida* (en el sentido de Lyapunov) si $V(0) \equiv 0$ y si existe una función $w(x) \in \mathcal{K}$ tal que

$$V(x,t) \geq w(|x|) \quad \text{para} \quad (x,t) \in S_h \times [t_0, \infty)$$

Una función V es *negativa-definida* si $-V$ es positiva-definida. Una función continua no negativa $V(x,t)$ se denomina *decrescente* (es decir, tiene un límite superior arbitrariamente pequeño) si existe una función definida positiva $u(x)$ tal que

$$V(x,t) \leq u(|x|) \quad \text{para} \quad (x,t) \in S_h \times [t_0, \infty)\,.$$

La función $V(x,t)$ es radialmente ilimitada si

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} \inf_{t \geq t_0} V(x,t) = +\infty.$$

Considere una ecuación diferencial estocástica unidimensional

$$dX_t = f(X_t,t)dt + g(X_t,t)dB_t, \quad t \geq t_0, \quad X(t_0) = X_0 \tag{5.4}$$

donde B_t es el proceso browniano y los coeficientes f y g cunples los supuestos de la

existencia y unicidad de la solución de un ecuación diferencial estocástica.

Definición 5.1.1. *El* ***p.e*** $X_t \equiv \overline{X}$ *es una solución estacionaria o posición de equilibrio de la ecuación (5.4) con condición inicial* $X(t_0) = \overline{X}$, *si*

$$f(\overline{X}, t) = 0 \quad g(\overline{X}, t) = 0.$$

Definición 5.1.2. *La solución trivial* ($X_t \equiv 0$) *es:*

1. *Estable en probabilidad, si para cada* $\epsilon > 0$ *y* $s \geq t_0$

$$\lim_{y \to 0} P\{\sup_{t \in [s, \infty)} |X(t; s, y)| \geq \epsilon\} = 0$$

   donde $X(t; s, y)$ *denota la solución de (5.4) que satisface la condición inicial constante* $X(s) = y$.

2. *Globalmente asintóticamente estable en probabilidad, si es estable en probabilidad y, además, para todo* $y \in \mathbb{R}$

$$P\{\lim_{t \to \infty} X(t; s, y) = 0\} = 1.$$

Observación 5.1.3. *Hay muchos otros conceptos de estabilidad para la solución cero en la literatura, p-estabilidad, p-estabilidad asintótica y estabilidad exponencial casi segura. Además, a veces se hace referencia a estabilidad en probabilidad como altamente estable en probabilidad o estocásticamente estable. Del mismo modo, a veces se dice que una solución cero globalmente asintóticamente estable en probabilidad es estable estocástica asintóticamente en el gran.*

Definimos el operador diferencial L asociado a la ecuación (5.4) para una función $V(x, t) \in C^{2,1}$ por

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g^2(x, t).$$

Los siguientes teoremas proporcionan condiciones suficientes para la estabilidad de la solución de equilibrio de la ecuación diferencial estocástica (5.4) en términos de funciones de Lyapunov.

Teorema 5.1.4. *Si existe una función de Lyapunov estocástica positiva-definida $V(x,t)$ en $S_h \times [t_0, \infty)$ que es continuamente dos veces diferenciable en X_t y una vez en t. Adicionalmente,*

$$LV(x,t) \leq 0$$

para todos $(X_t, t) \in S_h \times [t_0, \infty)$ entonces la solución trivial de la ecuación (5.4) es estable en probabilidad.

Demostración. Ver [19]. □

Teorema 5.1.5. *Si existe una función de Lyapunov estocástica positiva-definida, decrescente $V(x,t)$ en $S_h \times [t_0, \infty)$ que es continuamente dos veces diferenciable en X_t y una vez en t. Si además $LV(X_t, t)$ es negativo-definido y $V(X_t, t)$ es radialmente ilimitado sobre $\mathbb{R} \times [t_0, \infty)$, entonces la solución trivial de la ecuación (5.4) es globalmente asintóticamente estable en probabilidad.*

Demostración. Ver [19]. □

5.2. Estabilidad del modelo logístico no autónomo estocástico

El modelo que es sujeto a análisis en esta última parte de la tesis es

$$dN_t = N_t \left[K - N_t\right] \left(r(t)d_t + \alpha(t)dB_t\right). \tag{5.5}$$

donde hemos asumido que $r(t) > 0$ y $\alpha(t)$ son funciones acotadas y continuas en $[0, \infty)$ además N_0 es determinística. Por otro lado, bajo la transformación $Y = (N/K) - 1$, la ecuación (5.5) se escribió de la forma:

$$dY_t = -r(t)Y_t \left[1 + Y_t\right] d_t - \alpha(t)Y_t \left[1 + Y_t\right] dB_t, \quad Y(0) = Y_0. \tag{5.6}$$

Notemos que la convergencia $Y_t \to 0$ implica que $N_t \to K$, mientras que la convergencia $Y_t \to -1$ implica $N_t \to 0$. Por lo tanto, la estabilidad de la solución cero de (5.6) implica la estabilidad del equilibrio $N \equiv K$.
El siguiente teorema trata de la estabilidad estocástica de la solución cero de la ecuación (5.6).

Teorema 5.2.1. *Consideremos el modelo logístico estocástico (5.6). Si*

$$\alpha^2(t) \leq \frac{2r(t)}{K}, \quad para \;\; t \geq 0, \tag{5.7}$$

entonces la posición de equilibrio es estable en probabilidad. Si, además,

$$r(t) - \frac{K\alpha^2(t)}{2} > \eta > 0, \quad para \;\; t \geq 0, \tag{5.8}$$

entonces la posición de equilibrio es globalmente asintóticamente estable en probabilidad en $]-1, \infty[$.

Demostración. Representemos por $Y_t = Y(t, Y_0)$ como la solución solución de (5.6) con condición inicial $Y(0) = Y_0 > -1$. Consideremos la siguiente función de Liapunov:

$$V(y) = y - \log(1+y) \quad y > -1.$$

La función $V(y)$ es claramente:

- decresante
- positiva-definida, basta considerar $w(y) = \frac{y - \log(1+y)}{2}$, para $y \geq 0$.
- radialmente ilimitado ya que $V(y)$ no depende del tiempo y $\lim_{y\to\infty} V(y) = +\infty$.

Por otro lado, aplicando el operador L a la función V, se tiene

$$\begin{aligned} LV(y) &= \frac{\partial V}{\partial t} - Kr(t)y(1+y)\frac{\partial V}{\partial x} + \tfrac{1}{2}K^2\alpha^2 y^2(1+y)^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}g^2(x,t) \\ &= -Ky^2\left[r(t) - \frac{K\alpha^2(t)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de (5.7), tenemos $LV(y) \leq 0$. Así, tenemos que se cumple con la hipótesis del teorema 5.1.4 por lo tanto se tiene que la posición de equilibrio es estable en probabilidad. Ahora, supongamos que se cumple (5.8). Entonces

$$-LV(y) = Ky^2\left[r(t) - \frac{K\alpha^2(t)}{2}\right] \geq \eta K y^2$$

lo cual se muestra que $LV(y)$ es negativo-definido. Ahora, al aplicar la fórmula de Itô,

obtenemos

$$dV(Y_t) = -KY_t^2\left[r(t) - \frac{K\alpha^2(t)}{2}\right]dt - K\alpha(t)Y_t^2 dB_t. \tag{5.9}$$

Ya que $LV(y) \leq 0$ se puede afirmar que $V(Y_t)$ es una supermartingala no negativa (ver demostración en [15] página 149). De (5.9) se tiene

$$V(Y_t) = V(Y_0) - K\int_0^t Y_s^2\left[r(s) - \frac{K\alpha^2(s)}{2}\right]dt - K\int_0^t \alpha(s)Y_s^2 dB_s. \tag{5.10}$$

Tomando valor esperado a (5.10), usando 3 de la proposición 2.3.10 y bajo la desigualdad (5.8) se consigue

$$E\left[V(Y_t)\right] = V(Y_0) - KE\left[\int_0^t Y_s^2\left[r(s) - \frac{K\alpha^2(s)}{2}\right]dt\right] \leq V(Y_0). \tag{5.11}$$

por lo cual se puede afirmar que se cumple

$$\sup_{0\leq t<\infty} E\left[M_t\right] < \infty.$$

Entonces podemos aplicar el siguiente teorema

Teorema 5.2.2. *(Teorema de Convergencia de Martingalas) Sea $\{M_t\}_{t\geq 0}$ una supermartingala continua por la derecha no negativa. Si*

$$\sup_{0\leq t<\infty} E\left[M_t\right] < \infty,$$

entonces $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ c.s. y es finito. Además $E\left[M_t\right] < \infty$

De las propiedades de la función $V(y)$, se deduce que c.s. las trayectoria de $V(Y_t)$ permanecen limitadas para $t \geq 0$. En particular, significa que con probabilidad uno, $Y(t, Y_0) > -1$ por cada $t \geq 0$ y $Y_0 > -1$. Por otro lado, también se cumple

$$\inf_{]-1,-1+1/R[\cup]R;\infty[} V(x) \to +\infty,$$

cuando $R \to +\infty$. Ahora, usando una vez más el resultado del teorema para globalmente asintóticamente estable en probabilidad para en relación con la ecuación (5.6), cuyas trayectorias permanecen en el intervalo $]-1, \infty[$, concluimos que la solución cero de (5.6) es globalmente asintóticamente estable en probabilidad para $Y_0 > -1$ Concluyendo la prueba del teorema. □

Presentamos un análisis sobre lo que sucede si se cumple $\alpha^2(t) > \frac{2r(t)}{K}$, pero solo para el caso en el cual ambas funciones son constantes. Realizar el análisis en el caso en el cual no lo son resulta díficil debido a que el término asociado a dB_t no es lineal lo cual llevaría a usar resultados más sofisticados que estan lejos del desarrollado de la parte teórica de esta tesis. Consideremos la función

$$W(y) = \log\left|\frac{y}{1+y}\right|,$$

para $-1 < y < 0$. Observamos que $W(y)$ está disminuyendo estrictamente con

$$\lim_{y\to -1^+} W(y) = +\infty \quad y \quad \lim_{y\to 0^-} W(y) = -\infty. \tag{5.12}$$

Al aplicar la fórmula de Itô, obtenemos

$$dW(Y_t) = \left[-Kr - \frac{K^2\alpha^2}{2}(1+2Y_t)\right]dt - K\alpha dB_t. \tag{5.13}$$

Considerando $\alpha^2 > \frac{2r}{K}$ contraria a la dada en (5.7). Sea $\eta > 0$ tal que $\alpha^2\eta > \frac{2r}{K}$ y supongamos que $1 + 2Y_t \leq -\eta$. En otras palabras, requerimos que la trayectoria de (5.6) permanezca en la región $]-1, -1/2 - (1/2)\eta]$ durante un período de tiempo "extendido" de 0 a t. Luego tenemos

$$-Kr - \frac{K^2\alpha^2}{2}(1+2Y_t) \geq -Kr - \frac{K^2\alpha^2}{2}\eta > \kappa > 0.$$

y de (5.13), tenemos

$$W(Y_t) = W(Y_0) + \int_0^t \left[-Kr - \frac{K^2\alpha^2}{2}(1+2Y_s)\right]ds - K\alpha B_t, \tag{5.14}$$

obteniendo así

$$W(Y_t) \geq W(Y_0) + \kappa t - K\alpha B_t = W(Y_0) + \kappa t\left(1 - \frac{K\alpha}{\kappa}\frac{B_t}{t}\right),$$

ya que la ley fuerte de grandes números establece que $\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t} = 0$ c.s. Entonces

$$W(Y_t) \to \infty, \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty \quad \textit{c.s.}$$

De (5.12) se desprende que para tal trayectoria,

$$Y_t \to -1, \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty.$$

Por otro lado, independientemente de $\alpha^2 > \frac{2r}{K}$, si la trayectoria permanece en la región $[-1/2, 0)$ en el intervalo de tiempo $[0, t]$, tenemos

$$-Kr - \frac{K^2\alpha^2}{2}(1 + 2Y_t) \leq -Kr$$

y de manera similar a la anterior, obtendremos

$$W(Y_t) \leq W(Y_0) + Krt - K\alpha B_t = W(Y_0) - Krt\left(1 + \frac{\alpha}{r}\frac{B_t}{t}\right) \to -\infty,$$

cuando $t \to \infty, c.s.$ Por lo tanto, para tal trayectoria,

$$Y_t \to 0, \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty.$$

Podemos resumirlo de la siguiente manera. Bajo la condición de una gran difusión (α)

$$\alpha^2 > \frac{2r}{K}$$

el problema (5.6) (interpretado en el sentido Itô) crea dos regiones de atracción: alrededor de $Y_t \equiv 0$ y alrededor de $Y \equiv -1$. Ellos corresponden a los dos estados extremos a largo plazo de la población: saturación y extinción. La evolución de la trayectoria de la población depende del proceso de conducción del browniano. Las trayectorias que pasan el tiempo suficiente en el intervalo $[-1/2, 0)$ alcanzan la saturación, mientras que las trayectorias que pasan el tiempo suficiente en la región $]-1, -1/2 - \eta/2]$ por debajo de $-1/2$ alcanzan la extinción. Una característica interesante de este desarrollo es que cuanto mayor es el ruido α, menor se permite $\eta > 0$ en la condición $\alpha^2\eta > \frac{2r}{K}$ y, en consecuencia, mayor es la región de atracción del estado de extinción. En este sentido, un ruido extenso α aumenta la probabilidad de extinción para el modelo de población de Itô (5.6). El teorema 5.2.1 que se demostró se basó en el análisis por Golec y Sathananthan [11]. Podemos mencionar que existen otras condiciones de suficientes para la estabilidad, en el sentido mencionado, del modelo logístico no autónomo como por ejemplo el dado por el trabajo realizado por M. Liu y K. Wang [17]. Los autores han demostrado que

Teorema 5.2.3. *Sea* $0 < Y(0) = Y_0 < K$. *Representemos por*

$$a(t) = -0{,}5\alpha^2(t) + r(t), \quad a^* = \lim_{t\to\infty} \sup t^{-1} \int_0^t a(s)ds, \quad a_* = \lim_{t\to\infty} \sup t^{-1} \int_0^t a(s)ds.$$

1. *Si* $a^* < 0$, *entonces la solución trivial de (5.5) es asintóticamente estable c.s., es decir,*

$$\lim_{t\to\infty} N_t = 0, \quad c.s.$$

2. *Si* $a_* > 0$, *entonces la posición de equilibrio* K *de (5.5) es asintóticamente estable c.s., es decir,*

$$\lim_{t\to\infty} N_t = K, \quad c.s.$$

Es fácil ver que las condiciones del Teorema 5.2.3 son mucho más débiles que las demostradas en 5.2.1, en el siguiente sentido. Si $a(t) = sent + 0{,}9$, entonces $\text{mín}_{t\geq 0}\, a(t) = -0{,}1 < 0$ y $a_* = 0{,}9 > 0$. Se tiene que la condición de (5.8) no se cumple pero la condición de (2) se mantiene.

Bibliografía

[1] Edward J Allen, Linda JS Allen, and Henri Schurz. A comparison of persistence-time estimation for discrete and continuous stochastic population models that include demographic and environmental variability. *Mathematical biosciences*, 196(1):14–38, 2005.

[2] EJ Allen. Stochastic differential equations and persistence time for two interacting populations. *DYNAMICS OF CONTINUOUS DISCRETE AND IMPULSIVE SYSTEMS*, 5(1-4):271–281, 1999.

[3] EJ Allen and HD Victory Jr. Modelling and simulation of a schistosomiasis infection with biological control. *Acta Tropica*, 87(2):251–267, 2003.

[4] Linda JS Allen and Edward J Allen. A comparison of three different stochastic population models with regard to persistence time. *Theoretical Population Biology*, 64 (4):439–449, 2003.

[5] Robert B Banks. *Growth and diffusion phenomena: Mathematical frameworks and applications*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2013.

[6] AT Bharucha-Reid. Stochastic differential equations: Theory and applications (ludwig arnold), 1976.

[7] Stephen Brady. Construction and properties of brownian motion, 2006.

[8] Gerda De Vries, Thomas Hillen, Mark Lewis, Johannes Müller, and Birgitt Schönfisch. *A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods*. SIAM, 2006.

[9] Keith E Emmert and Linda JS Allen. Population extinction in deterministicand stochastic discrete-time epidemic models with periodic coefficients with applications to amphibian populations. *Natural Resource Modeling*, 19(2):117–164, 2006.

[10] Michael E Gilpin and Francisco J Ayala. Global models of growth and competition. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 70(12):3590–3593, 1973.

[11] J Golec and S Sathananthan. Stability analysis of a stochastic logistic model. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(5-6):585–593, 2003.

[12] John Alfred Jacquez et al. Compartmental analysis in biology and medicine. 1972.

[13] Da-qing Jiang, Bao-xue Zhang, De-hui Wang, and Ning-zhong Shi. Existence, uniqueness, and global attractivity of positive solutions and mle of the parameters to the logistic equation with random perturbation. *Science in China Series A: Mathematics*, 50(7):977–986, 2007.

[14] I Kartzas and SE Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. *Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag*, 1991.

[15] Rafail Khasminskii. *Stochastic stability of differential equations*, volume 66. Springer Science & Business Media, 2011.

[16] Hui-Hsiung Kuo. Stochastic differential equations. *Introduction to Stochastic Integration*, pages 185–230, 2006.

[17] Meng Liu and Ke Wang. A note on stability of stochastic logistic equation. *Applied Mathematics Letters*, 26(6):601–606, 2013.

[18] Alfred J Lotka. Elements of physical biology. *Science Progress in the Twentieth Century (1919-1933)*, 21(82):341–343, 1926.

[19] Xuerong Mao. *Stochastic differential equations and applications*. Elsevier, 2007.

[20] Xuerong Mao, Glenn Marion, and Eric Renshaw. Environmental brownian noise suppresses explosions in population dynamics. *Stochastic Processes and Their Applications*, 97(1):95–110, 2002.

[21] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 65–84. Springer, 2003.

[22] Evelyn C Pielou et al. An introduction to mathematical ecology. *An introduction to mathematical ecology.*, 1969.

[23] Phillip E Protter. Stochastic integration and differential equations, 2004.

[24] Eric Renshaw. *Modelling biological populations in space and time*, volume 11. Cambridge University Press, 1993.

[25] Vito Volterra. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically, 1926.