Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Estabilidad exponencial de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

Gabriel HUARACA PARDO

ASESOR

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Huaraca, G. (2026). *Estabilidad exponencial de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	**Gabriel Huaraca Pardo**
Tipo de documento de identidad	**DNI**
Número de documento de identidad	**20568241**
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0007-3231-2366
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	**Eugenio Cabanillas Lapa**
Tipo de documento de identidad	**DNI**
Número de documento de identidad	**06445518**
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-8941-4394
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	**Renato Mario Benazic Tome**
Tipo de documento	**DNI**
Número de documento de identidad	**06445668**
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	**Jorge Luis Crisóstomo Parejas**
Tipo de documento	**DNI**
Número de documento de identidad	**43688114**
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	**Willy David Barahona Martínez**
Tipo de documento	**DNI**
Número de documento de identidad	**10078450**
Miembro del jurado 3	
Nombres y apellidos	**Jesús Virgilio Luque Rivera**

Tipo de documento	**DNI**
Número de documento de identidad	**09840187**
Datos de investigación	
Línea de investigación	**A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Análisis Funcional**
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	**Sin financiamiento**
Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos Edificio: Facultad de Ciencias Matemáticas País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Avenida: Venezuela s/n cuadra 34. Latitud: -12.06014 Longitud: -77.08215
Año o rango de años en que se realizó la investigación	**2024- 2026**
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO

Siendo las 16:00 horas del día miércoles ocho de abril de dos mil veintiséis, en el Aula 103 de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, el Jurado Examinador de tesis, presidido por el Dr. Renato Mario Benazic Tome e integrado por los siguientes miembros: Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (Jurado evaluador), Dr. Willy David Barahona Martínez (Jurado Informante), Mg. Jesús Virgilio Luque Rivera (Jurado Informante) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa como Miembro Asesor; se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: **«Estabilidad exponencial de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales»**, presentada por el Br. Gabriel Huaraca Pardo, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Bachiller **GABRIEL HUARACA PARDO**, el calificativo de ..15 (QUINCE)..... BUENO.....

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Examinador recomienda que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional** al Bachiller **GABRIEL HUARACA PARDO**.

Siendo las 19:20 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Renato Mario Benazic Tome
Presidente

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Miembro

Dr. Willy David Barahona Martínez
Miembro

Mg. Jesús Virgilio Luque Rivera
Miembro

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **Eugenio Cabanillas Lapa** en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la UPG N° 000066-2024-UPG-VDIP-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es «ESTABILIDAD EXPONENCIAL DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES», presentada por el Bachiller **GABRIEL HUARACA PARDO,** para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el **13%** de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional.

Lima, 06 de julio de 2026

Firma del Asesor 

Nombres y Apellidos del asesor: Eugenio Cabanillas Lapa

DNI: 06445518

* Según corresponda: bachiller, magíster, doctor; título profesional o título de segunda especialidad

La vigencia del presente certificado corresponde a un período de noventa (90) días desde la fecha de su emisión; siempre que no haya observaciones en el texto durante el proceso de revisión por el jurado informante o surja alguna contingencia.

A mis padres Melchora, Hilario y a mi hermana Bertha.

Agradecimientos

A mis padres por apoyarme en todo momento.

Un especial agradecimiento al Dr.Eugenio Cabanillas Lapa. Por sus sugerencias, su tiempo, dedicación y paciencia para empezar y culminar con este trabajo.

A mis colegas, compañeros de clase, profesores de la facultad que siempre me motivan.

Gabriel Huaraca Pardo

RESUMEN

ESTABILIDAD EXPONENCIAL DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES

GABRIEL HUARACA PARDO

Abril - 2025

Orientador: Dr.Eugenio Cabanillas Lapa.
Titulo obtenido: Magister en Matemática Aplicada

En el presente trabajo de tesis estudiaremos la estabilidad exponencial de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes $x' = Ax$, a través de las propiedades del espectro del operador A. Probaremos que, si cualquier autovalor de A tenga parte real menor que cero, entonces el sistema sera exponencialmente estable. Además, presentaremos una motivación para el estudio de la estabilidad exponencial en espacios de dimension infinita.

Palabras claves:

- Sistema lineal
- Estabilidad exponencial
- Matriz exponencial
- Espectro

ABSTRACT

EXPONENTIAL STABILITY OF SYSTEMS OF ORDINARY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

GABRIEL HUARACA PARDO

April - 2025

Advisor: Dr Eugenio Cabanillas Lapa.
Obtained Title: Master in Computational Mathematics

In this thesis, we study the exponential stability of a system of ordinary differential equations with constant coefficients $x' = Ax$ through the properties of the Spectrum of A. We will prove that if any eigenvalues of A has real part less than zero, then the system is exponentially stable. Furthemore, we present a motivation for the study of exponential stability for infinite-dimendional systems.

Keyword:

- Linear systems
- Exponential stability
- Matrix exponential
- Spectrum.

Lista de Símbolos

$\emptyset$	Conjunto vacío
$A \setminus B$	Diferencia de los conjuntos A y B
$\mathbb{N}$	Representa los números naturales
$\mathbb{R}$	Representa los números reales
$\mathbb{C}$	Representa los números complejos
$\mathbb{K}$	El cuerpo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$
$\lvert \cdot \rvert$	valor absoluto ó módulo
E	Espacio vectorial en $\mathbb{K}$
$\dim(E)$	Dimensión del espacio vectorial E
$\overline{A}$	La clausura del conjunto A
$(E, \lVert \cdot \rVert)$	Espacio vectorial normado con norma $\lVert \cdot \rVert$
(X, d)	Espacio métrico con la métrica d
$\mathcal{L}(E, F)$	Espacio de los operadores lineales continuos de E en F
$\langle x, y \rangle$	Producto interno de x e y
$c_0(\mathbb{K})$	Espacio de las sucesiones de escalares que convergen a cero
$\ell_p \, (0 < p < \infty)$	Espacio de las sucesiones de escalares absolutamente p-sumables
$\ell_\infty(\mathbb{K})$	Espacio de las sucesiones de escalares acotadas
$L_p[0,1]$	Espacio de funciones $f\colon [0,1] \to \mathbb{K}$ tales que f es medible y $\int_0^1 \lvert f \rvert^p < \infty$, donde $0 < p < \infty$
$M(n, \mathbb{K})$	Conjunto de matrices cuadradas de orden n con entradas (coeficientes) en $\mathbb{K}$

Índice general

Lista de Símbolos **1**

1. Introducción **5**

2. Preliminares **7**
2.1. Espacios vectoriales 7
2.1.1. Conjuntos de generadores, linealmente independiente y bases . . 8
2.2. Operadores lineales entre espacios vectoriales 9
2.3. Valores y vectores propios 9
2.4. Polinomio característico y polinomio minimal 10
2.5. Descomposición primaria 11
2.6. Espacios métricos 12
2.7. Aplicaciones y funciones continuas 13
2.7.1. Caracterizando la continuidad 13
2.8. Espacios Normados 15
2.8.1. Propiedades de espacios normados 15
2.8.2. Sucesiones 16
2.9. Espacios normados de dimensión finita 17
2.9.1. Espacios con producto interno 17
2.10. Operadores lineales continuos entre espacios normados 18
2.11. Caracterización de los operadores lineales continuos 18
2.12. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomos y no autónomos 19
2.13. Repaso de matrices 21
2.14. Nociones de cálculo matricial 23
2.15. Potencia o exponencial de una matriz 35
2.15.1. La descomposición S + N 36
2.15.2. Matriz fundamental 37

3. Comportamiento asintótico **40**
3.1. Estabilidad exponencial 40
3.2. Motivación 40
3.3. Existencia y unicidad 42
3.4. Estabilidad de soluciones de un sistema 44
3.5. Comportamiento asintótico de las soluciones 46
3.6. Teoría espectral 47
3.7. Teorema principal 52

4. Una generalización del resultado principal **61**

5. Cálculo numérico **66**
5.1. Algoritmo de E.J.Putzer 66
5.2. Estabilidad usando el algoritmo de Putzer 70
5.3. Implementación del algoritmo del Método de Putzer usando Matlab . . . 72
5.3.1. Pseudocódigo del algoritmo de Putzer 72

6. Trabajos futuros **77**

7. Conclusión **78**

8. Apéndice y Biografía **79**
8.1. Apéndice 1. 79
8.2. Apéndice 2. 80
8.3. Apéndice 3. 82

Índice de figuras

3.1. Región de estabilidad: $Re\lambda < 0$ 47

5.1. Resultado del programa:**Función** `putzer_exponencial1()`.
Al comparar este resultado con la solución analítica del ejemplo (5.1.1), no se aprecian diferencias, lo que demuestra una alta confiabilidad del método. 74
5.2. Resultado del programa:**Función** `putzer_exponencial1()`.
para el ejemplo (5.1.2). 75

Capítulo 1

Introducción

Desde I. Napier (1550-1617) a fines del siglo XVI (a nuestro modesto entender), y siguiendo con Galileo (1564-1642), Descartes (1596-1650), Newton (1642-1727), Fourier (1768-1830), Poisson (1781-1840), Hilbert (1862-1943), Birkhoff (1884-1944), Lions (1928-2001), Zua-Zua (1961) y otros ilustres matemáticos, las ecuaciones diferenciales se han constituido en herramientas poderosas para modelar y analizar sistemas que cambian con el tiempo, en diversas áreas de la ciencia pura y aplicada, como en otras. Por ejemplo, se utilizan en la descripción del movimiento de objetos, el crecimiento de poblaciones, la difusión del calor, las oscilaciones y el comportamiento social. Las técnicas para resolver estas ecuaciones permiten entender el comportamiento de sistemas complejos, hacer predicciones y diseñar controles en campos como la robótica, los circuitos eléctricos, la economía matemática y la epidemiología. En el mundo actual, proporcionan técnicas aplicadas al control no lineal, la dinámica de ecosistemas y las neurociencias computacionales.

Un aspecto importante sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias es probar la existencia de soluciones. Sin embargo, hay muy pocas ecuaciones para las cuales se puedan encontrar soluciones explícitas, excepto quizás las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes y lineales. Aun en esos casos, las cosas se complican a medida que se introducen sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor. Por ello, necesitamos optar por un estudio cualitativo de las soluciones, que generalmente proporciona información valiosa sobre el comportamiento del sistema y sus soluciones sin necesidad de resolverlas explícitamente. Esta metodología es especialmente útil cuando se desea conocer el comportamiento de un conjunto total de soluciones en lugar de una solución específica. A. M. Lyapunov y H. Poincaré fueron pioneros de esta moderna metodología de estudio, y sus ideas continúan ampliándose y aplicándose vigorosamente hasta el día de hoy.

Una buena aproximación a la resolución de estas ecuaciones es la linealización del sistema. Para fines prácticos, es sumamente útil contar, en un primer momento, con un buen conocimiento de las ecuaciones lineales del tipo $x' = Ax$ y de las herramientas que permitan obtener información de primera mano sobre el fenómeno estudiado. Desde este punto de vista, el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (o de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales) y sus métodos es de particular importancia para nuestro objetivo.

Al estudiar el sistema, se requieren criterios decisivos para determinar su com-

portamiento. Un primer problema es la formulación adecuada del fenómeno, por lo que recurrimos a la teoría de matrices. ¿Cómo podemos obtener información sobre el comportamiento de la(s) solución(es) expresadas matricialmente? Para ello, necesitamos estudiar los autovalores y autofunciones, es decir, realizar un análisis espectral matricial. Esta herramienta tiene múltiples aplicaciones, sobre todo en Física. Se plantea entonces el siguiente problema: ¿Qué condiciones sobre el espectro nos permiten investigar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema? ¿En qué circunstancias podemos determinar un decaimiento más rápido, como el decaimiento exponencial? ¿Existen condiciones de estabilidad para las soluciones?

En este trabajo, se presenta una metodología específica, que consiste en el estudio del signo de la parte real de los autovalores, para decidir sobre la estabilidad exponencial del sistema. En efecto, probaremos que si el máximo de todas las partes reales de los autovalores es negativo, entonces hay decaimiento exponencial de las soluciones del sistema, siguiendo el trabajo de Brauer y Nohel [1].

Es importante resaltar que esta investigación también motiva el estudio cualitativo de los sistemas de evolución en ecuaciones diferenciales parciales, a través de la teoría de semigrupos lineales en espacios de dimensión infinita. Se demuestra en los trabajos de Pruss [23] y [15] que si el máximo de todas las partes reales de los autovalores es negativo y la norma del resolvente de este operador es acotada uniformemente, entonces hay un decaimiento exponencial del semigrupo asociado, lo que implica que las soluciones del sistema también presentan decaimiento exponencial. Haremos algunos comentarios ilustrativos sobre estos puntos, sin profundizar en el tema.

Adicionalmente, realizamos un análisis numérico simple para aproximar el cálculo explícito de matrices exponenciales y soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizando la metodología estudiada, además se implementara un algoritmo computacional en la plataforma MATLAB del método de Putzer para calcular e^{At}.

La tesis esta organizada en nueve capítulos, capitulo uno introducción. el **Capítulo 2**, se presentan definiciones y resultados preliminares esenciales que servirán como base para el objetivo de este trabajo. El **Capítulo 3** se considera el çorazón"de la tesis, donde se expone el teorema de decaimiento exponencial y su aplicación en dimensión finita. En el **Capítulo 4**, abordamos una generalización del resultado principal, aplicándolo a sistemas en espacios de dimensión infinita. En el **Capítulo 5**, presenta un cálculo numérico relevante. Finalmente, los **Capítulos 6, 7, 8 y 9** se dedican a trabajos futuros, conclusiones, apéndice y bibliografía, respectivamente.

Capítulo 2

Preliminares

Presentaremos algunos resultados básicos sobre espacios métricos, normados y de Hilbert, así como también sobre matrices necesarias para el desarrollo de nuestro trabajo. Las definiciones, teoremas y corolarios, junto con sus demostraciones, pueden consultarse en [3],[12],[14] y [16].

2.1. Espacios vectoriales

En esta sección definiremos espacios vectoriales e presentaremos algunas propiedades básicas como existencia de bases algebraicas, coordenadas, sumas directas entre otros. La notación $\mathbb{K}$ por su vez, designará el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.1 *Un conjunto V no vacio es un espacio vectorial en $\mathbb{K}$ si podemos definir dos operaciones indicadas por $+$ y $\cdot$, como siguen:*

- *(***Adición de elementos***) Para cada par u, v de elementos de V, asociamos un elemento $u + v \in V$ satisfaciendo:*

  (A1) *$u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$.*

  (A2) *$(u + v) + w = v + (u + w)$ para todo $u, v, w \in V$.*

  (A3) *En V existe un vector, llamado vector nulo denotado por 0, tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$.*

  (A4) *A cada vector $v \in V$ existe un vector en V, denotado por $-v$ tal que $v + (-v) = 0$.*

- *(***Multiplicación por escalar***) Para cada $u \in V$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$, asociamos un elemento $\alpha u \in V$ satisfaciendo:*

  (M1) *$\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $u \in V$.*

  (M2) *$1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$.*

- *(***Leyes distributivas***) Además esas operaciones están relacionadas entre si por las propiedades siguientes:*

  (D1) *$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $u, v \in V$.*

  (D2) *$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$.*

Los elementos de un espacio vectorial son llamados vectores.

Ejemplo 2.1.1 *Un ejemplo de espacio vectorial es el conjunto* $\mathbb{K}^n$ *sobre* $\mathbb{K}$ *con las operaciones.*

$$u + v = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

donde $u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 2.1.2 *El conjunto* $\mathfrak{F} = \{f : S \longrightarrow \mathbb{K}\}$ *de funciones definidas en un conjunto* S *con dos operaciones, una de adición y otra de multiplicación por un escalar, dado por;*

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

donde $f, g \in \mathfrak{F}$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$, *es un espacio vectorial.*

Ejemplo 2.1.3 *Se denota* $\mathbb{R}[t]$ *al conjunto que reúne todos los polinomios con coeficientes en* $\mathbb{R}$. *Es un espacio vectorial, con las operaciones usuales de adición de polinomios y multiplicación por un escalar.*

Ejemplo 2.1.4 $\mathbb{C}$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *con las operaciones usuales de suma de complejos y multiplicación de un número complejo por un número real.*

Definición 2.1.2 *Un subconjunto* U *de un espacio vectorial* V *es un subespacio, si sus elementos satisfacen las propiedades que definen el espacio vectorial* V.

Ejemplo 2.1.5 *Para un espacio vectorial* V, *los subconjuntos* $\{0\}$ *y* V *son obviamente subespacios de* V.

Ejemplo 2.1.6 *Para cada* $m \geq 0$, *denote por* $\mathbb{R}[t]_m$ *el subconjunto de* $\mathbb{R}[t]$ *formado por todos los polinomios de grado menor o igual que* m *y conteniendo adicionalmente el polinomio nulo. Es claro ver que* $\mathbb{R}[t]_m$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}[t]$.

2.1.1. Conjuntos de generadores, linealmente independiente y bases

Definición 2.1.3 *Sea* V *un espacio vectorial en* $\mathbb{K}$.

(a) *Un vector* $w \in V$ *es una combinación lineal de los vectores* $w_1, w_2, ..., w_n \in V$ *si existen escalares* $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$ *tal que*

$$v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_n w_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i$$

(b) *Sea* B *un subconjunto de* V. *Decimos que* B *es conjunto generador de* V *(o que* B *genera a* V*) si todo elemento de* V *forma una combinación lineal de un número finito de elementos de* B.

(c) *Decimos que B es linealmente independiente(o l.i.) si $\beta_1 w_1 + ... + \beta_n w_n = 0$, para $w_i \in B$ y $\beta_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, ..., n$, implica que $\beta_1 = ... = \beta_n = 0$.*

(d) *El conjunto B es llamado linealmente dependiente(o l.d.) si no es linealmente independiente.*

(d) *Una base de V es un subconjunto $\mathcal{B} \subset V$ que es l.i. y genera V.*

(e) *Un espacio vectorial V tiene dimensión finita si posee una base con un número finito de elementos, o si $V = \{0\}$. Caso contrario, diremos que el tiene dimensión infinita.*

2.2. Operadores lineales entre espacios vectoriales

Definición 2.2.1 *Sean V, W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Un operador lineal T es una aplicación $T\colon V \longrightarrow W$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(a) $T(u + v) = T(u) + T(v),\ \forall u, v \in V.$

(b) $T(\alpha u) = \alpha T(u),\ \forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

Ejemplo 2.2.1 *Sea $V = \mathbb{R}[t]$. Entonces, la función derivada $\dfrac{d}{dt}$ que asocia cada polinomio $p(t)$ su derivada $\dfrac{dp}{dt}(t)$ es lineal.*

Ejemplo 2.2.2 *Sea $[a, b]$ un intervalo de la recta $\mathbb{R}$ y considere $\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ es continua $\}$. La función*

$$F\colon \mathcal{C}[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_a^b f(x)\, dx. \tag{2.1}$$

es una transformación lineal.

2.3. Valores y vectores propios

Definición 2.3.1 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T un operador lineal sobre V. Decimos que $\beta \in \mathbb{K}$ es un valor característico o valor propio de T si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \beta v$. Si β es un valor característico de T, entonces:*

(a) *Todo v tal que $T(v) = \beta v$ es llamado vector característico o vector propio asociado al valor característico β.*

(b) *El conjunto de todos los v tal que $T(v) = \beta v$ es llamado espacio característico o espacio propio asociado a β.*

Ejemplo 2.3.1 *Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el operador lineal definido por:*

$$T(x, y) = (-x + y, x - y).$$

El vector $\mathbf{v} = (-3, 3)$ es un autovector de T asociado a $\lambda = -2$. Pues note que $T(-3, 3) = (6, -6) = -2(-3, 3)$.

Ejemplo 2.3.2 *Todo $a \in \mathbb{R}$ es un autovalor del operador derivada*

$$D\colon C^\infty \longrightarrow C^\infty$$
$$f \longmapsto f'.$$

donde $C^\infty = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f$ es infinitamente diferenciable $\}$. Observe que dado $a \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(x) = e^{ax} \in C^\infty$ y

$$D(e^{ax}) = ae^{ax}.$$

Por lo tanto, $\alpha = a$, es un autovalor de D y $f(x) = e^{ax}$ es un autovector asociado a $\alpha = a$.

Sea T un operador lineal arbitrario y α es un escalar cualquiera, el conjunto de los vectores v tales que $T(v) = \alpha v$ es un subespacio de V. El espacio nulo de la transformacion lineal $T - \alpha I$. Decimos que α es un valor propio de T si este subespacio es distinto del subespacio nulo, si $(T - \alpha I)$ no fuese inyectiva. Si el espacio soporte V es de dimensión finita, $(T - \alpha I)$ dejará de ser inyectiva precisamente cuando su determinante es diferente de cero. En resumen:

Teorema 2.3.1 *Sea T un operador lineal sobre un espacio V de dimensión finita y sea α un escalar. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *α es un valor propio de T.*

(b) *El operador $(T - \alpha I)$ es singular (no-invertible).*

(c) $\det(T - \alpha I) = 0$.

El criterio (c) es muy importante, pues nos dice donde encontrar los valores característicos de T.

Demostración. Vea [12, Teorema 1, p. 182]. □

2.4. Polinomio característico y polinomio minimal

Sea $A \in M(n, \mathbb{K})$, asociamos dos polinomios para A.

1. El polinomio característico de A esta definido como $p(\lambda) = det(\lambda I - A)$, donde λ es la variable del polinomio. I representa la matriz identidad de la matriz. $p(\lambda)$ es un polinomio mónico de grado n.

2. El polinomio minimal de A, denotado por $m(\lambda)$ esta definido por las siguientes propiedades:

   a. $m(\lambda)$ es mónico es decir en coeficiente principal es 1,

   b. $m(A) = 0$,

   c. $m(\lambda)$ es el polinomio mónico de menor grado posible tal que $m(A) = 0$, también satisface:

   d. Si $g(\lambda)$ es otro polinomio, entonces $g(A) = 0$, si sólo si $m(\lambda)$ divide a $g(\lambda)$,

e. $p(\lambda)$ es un múltiplo de $m(\lambda)$.

Teorema 2.4.1 *Sea $A \in M(n, \mathbb{K})$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A si y solo si $p(\lambda) = 0$ de A.*

Demostración. Vea [28, Teorema 9.6, p. 201]. □

Corolario 2.4.1 *Si el polinomio denominado característico $p(\lambda)$ de la matriz $A \in M(n, \mathbb{K})$, es el resultado de un producto de factores lineales diferentes*

$$p(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)...(\lambda - a_n)$$

es decir, si $a_1, a_2, ..., a_n$ son raíces distintas de $p(\lambda)$, entonces A es similar a una matriz diagonal, los elementos de la diagonal son a_i donde $i = 1, 2, ..., n$.

Demostración. Vea [28, Corolario 9.7, p. 201]. □

Teorema 2.4.2 *El polinomio mínimal $m(\lambda)$ de A es divisor de cualquier polinomio que tiene a A como cero. En particular, $m(\lambda)$ divide el polinomio característico $p(\lambda)$.*

Demostración. Vea [28, Teorema 9.10, p. 202]. □

Teorema 2.4.3 *Los polinomios característico y mínimo de una matriz A, tienen los mismos factores irreducibles.*

Demostración. Vea [28, Teorema 9.11, p. 203]. □

Teorema 2.4.4 *Sea $p(\lambda) = det(\lambda I - A)$ el polinomio denominado característico de A; se cumple que $p(A) = 0$.*

Demostración. Vea [28, p. 211]. □

2.5. Descomposición primaria

El siguiente teorema muestra que cualquier operador $T : V \to V$ puede descomponerse en operadores cuyos polinomios mínimos son potencias de polinomios irreductibles.

Teorema 2.5.1 *(Teorema de descomposición primaria). Sea $T : V \to V$ un operador lineal con polinomio mínimo $m(t) = f_1^{n_1} f_2^{n_2} ... f_r^{n_r}$ donde los $f_i(t)$ son polinomios mónicos irreductibles diferentes. Entonces V es suma directa de los subespacios T invariantes, $W_1, ..., W_r$ donde los W_i es el núcleo de $f_i(T)^{n_i}$. Además $f_i(T)^{n_i}$ es el polinomio mínimo de la restricción de T a W_i.*

Demostración. Vea [28, Teorema, 10.6, p. 225]. □

Teorema 2.5.2 *Supongamos que $T : V \to V$ es lineal y que $f(t) = g(t)h(t)$ son polinomios tales que $f(T) = 0$, $g(t)$ y $h(t)$ son primos relativos. Entonces V es la suma directa de los subespacios $T-$invariantes, donde $U = kerg(T)$ y $W = kerh(T)$.*

Demostración. Vea [28, Teorema, 10.7, p. 225]. □

Teorema 2.5.3 *Una matriz A es similar a una matriz diagonal si y solo si, su polinomio mínimal es un producto de polinomios lineales diferentes.*

Demostración. Vea [28, Teorema, 10.9, p. 225]. □

Definición 2.5.1 *Un vector $v \in H$ se llama autovector generalizado de orden k de la matriz A relativo al autovalor λ, si*

$$(A - \lambda I)^k v = 0 \qquad y \qquad (A - \lambda I)^{k-1} v \neq 0.$$

Definición 2.5.2 *(Suma directa). Si $W = S + T$, donde S y T son subespacios de un espacio vectorial W y $S \cap T = \{0\}$, escribiremos $W = S \oplus T$ y diremos que W es la suma directa de los subespacios S y T.*

Teorema 2.5.4 *Sea $A \in M(n, \mathbb{C})$, denote $p_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$ el polinomio característico de A, escribamos a $p_A(\lambda)$ en la forma*

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\gamma_1} ....(\lambda - \lambda_n)^{\gamma_m}.$$

Donde $\lambda_1, ..., \lambda_m$ son las distintas autovalores de A y $\gamma_1, ..., \gamma_m$ denotan las respectivas multiplicidades algebraicas. Entonces se tiene la descomposición en suma directa.

$$\mathbb{C}^n = ker(A - \lambda_1 I)^{\gamma_1} \oplus ... \oplus ker(A - \lambda_m I)^{\gamma_m}.$$

Los espacios $E(\lambda_j) = ker(A - \lambda_j I)^{\gamma_j}$ son llamados los autoespacios generalizados de A.

Demostración. Vea Apéndice, 1. □

2.6. Espacios métricos

Definición 2.6.1 *Una métrica d sobre un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifican las siguientes condiciones:*

(D1) *$d(x, y) \geq 0$, para todos $x, y \in X$.*

(D2) *$d(x, y) = 0 \iff x = y$.*

(D3) *$d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in X$.*

(D4) *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in X$ (Desigualdad Triangular).*

En este caso al par (X, d) se le llama espacio métrico, lo cual motiva la introducción de algunas definiciones.

Ejemplo 2.6.1 *La métrica más familiar es la determinada por la función valor absoluto en* $\mathbb{R}$*, es la función* $(a, b) \mapsto |a-b|$ *definida en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*. Esta métrica es llamada la métrica Euclidiana en* $\mathbb{R}$*.*

Ejemplo 2.6.2 *La métrica usual en* $\mathbb{C}$ *es la métrica Euclidiana determinada por la función modulo* $(z\,,\, w) \mapsto |z-w|$*, con* $z, w \in \mathbb{C}$*.*

Observación 2.6.1 *No es dificil ver que en cualquier espacio métrico* X*. Se tiene* $|d(x\,,\, y) - d(y\,,\, z| \leq d(x\,,\, z)$*, para todo* $x, y, z \in X$*.*

Definición 2.6.2 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es llamada de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que, } d(x_n, x_m) < \varepsilon, \text{ siempre que } n, m \geqslant n_0.$$

Definición 2.6.3 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si existe un* $x \in X$ *tal que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que, } d(x_n, x) < \varepsilon, \text{ siempre que } n \geqslant n_0.$$

Definición 2.6.4 *Sea* (X, d) *un espacio métrico, se dice que es completo si para cualquier sucesión de Cauchy de* X *es convergente.*

2.7. Aplicaciones y funciones continuas

Definición 2.7.1 *Los espacios métricos* (X, d) *y* (Y, ρ)*,* $z \in X$ *y una función* $f\colon X \longrightarrow Y$*, decimos;*

(a) f *es continua en* z *si para cualquier* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\varepsilon, z) > 0$*, tal que*

$$x \in X \text{ y } d(x, z) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

(b) f *es continua en* X *si es continua en todo punto de* X*.*

2.7.1. Caracterizando la continuidad

Teorema 2.7.1 *Sean* (X, d) *y* (Y, ρ) *espacios métricos y* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f *es continua en* X*.*

(b) *Para cada* $O \subset Y$ *abierto, la imagen inversa* $f^{-1}(O) \subset X$ *es abierto.*

(c) *Para cada* $C \subset Y$ *cerrado, la imagen inversa* $f^{-1}(C) \subset X$ *es cerrado.*

(d) *Para cada bola abierta* $B \subset Y$ *abierto, la imagen inversa* $f^{-1}(B) \subset X$ *es abierto.*

(e) *Para cada sucesión* $(x_n) \subset X$ *que converge en* X*, la sucesión* $(f(x_n))$ *converge en* Y*. Además*

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Demostración. Vea [17, Theorem 8.3.1, p. 130]. □

Definición 2.7.2 *Los espacios métricos (X,d) y (Y,ρ), una función $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación decimos;*

(a) *f es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que*

$$x, y \in X \text{ con } d(x,y) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(b *f es Lipschitziana, si existe $k \geq 0$, tal que*

$$\rho(F(x), F(y)) \leq kd(x,y)\ \forall x, y \in X.$$

Observación 2.7.1 *Veamos estas observaciones*

(a) *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es Lipschitziana, entonces f es uniformemente continua.*

(b) *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua, entonces f es continua en X.*

Definición 2.7.3 *El espacio métrico (Y,d) y sea $f\colon Y \longrightarrow Y$ una función*
Decimos que f es una contracción, si existe $k \in [0,1)$, tal que

$$d(f(y), f(w)) \leq kd(y,w)\ \forall y, w \in Y.$$

Observación 2.7.2 *Toda contracción es Lipschitziana, en particular continua.*

Presentaremos dos teoremas de vital importancia.

Teorema 2.7.2 *Sean, el espacio métrico completo (X,d) y sea $f\colon Y \longrightarrow Y$ una contracción. Entonces existe un único punto fijo para f, esto es $f(x) = x$. Además, $x \in Y$ es un atractor de f, esto es,*

$$\lim f^n(x) \longrightarrow x,$$

donde $f^n(x)$ es definido por $f(f^{n-1}(x))$.

Demostración. Vea [10, Teorema 1.1, p. 4]. □

El teorema siguiente nos señala que no requiere que f represente una contracción, sino que solo se necesita que alguna potencia de f lo haga.

Teorema 2.7.3 *Sean (X,d) un espacios métrico y sea $f\colon Y \longrightarrow Y$ una aplicación tal que f^m es una contracción para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces existe un único punto fijo para f.*

Demostración. Vea [10, Teorema 1.2, p. 6]. □

2.8. Espacios Normados

En esta parte, asumimos que conocemos el concepto del espacio vectorial. Por lo tanto. dadas las condiciones de un espacio vectorial X en el cuerpo K, que puede ser real o complejo, con un elemento nulo $\theta \in X$ con operaciones $+ : \mathbb{K} \times X \to X$ (suma) y $. : \mathbb{K} \times X \to X$ (multiplicación por escalar), se incorporan ciertas nociones fundamentales.

Definición 2.8.1 *La función* $\| \ . \ \| : X \to \mathbb{R}$ *se considera norma* X *si cumple las siguientes características*

(N1) $\| x \| \geqslant 0$, *para todo* $x \in X$ *y* $\| x \| = 0, \quad \Leftrightarrow x = \theta,$

(N2) $\| \beta x \| = | \beta | \| x \|$ *para todo* $\beta \in \mathbb{K}$ *para todo* $x \in X,$

(N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, *para todo* $x, y \in X$.

Sea X un espacio vectorial con norma $\| \ . \ \|$, se denomina espacio vectorial normado y se simboliza como $(X, \| \ . \ \|)$. En relación a esto es importante destacar que $(X, \| \ . \ \|)$ representa un espacio métrico (X, d), con $d(x, y) := \| x - y \|$, $\forall x, y \in X$ por ende todas las observaciones y los resultados relacionados con espacios métricos tienen validez en el presente contexto. Sin embargo, para mejorar la claridad de presentación varias de las definiciones se redifinen en base de la norma $\| \ . \ \|$.

Ejemplo 2.8.1 $\mathbb{K}^n$ *con las siguientes normas es un espacio vectorial normado*

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n} (|x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Ejemplo 2.8.2 $C[a, b]$ *es un espacio normado :*

$$\| x \| = \max_{t \in [a,b]} | x(t) |. \tag{2.2}$$

como norma.

2.8.1. Propiedades de espacios normados

Proposición 2.8.1 *Si* X *es un espacio normado. Por lo tanto* $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. *la función* $x \mapsto \| x \|$ *es continua de* X *en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $x, y \in X$, entonces

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

Sigue que $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Intercambiando x e y, tenemos $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$. Por lo tanto, de estas desigualdades obtenemos

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Finalmente, mostraremos la continuidad. Sea $y \in X$, dado $\varepsilon > 0$ considere $\delta = \delta(\varepsilon, y)) = \varepsilon$, tal que, si

$$x \in X \ \wedge \ \|x - y\| < \varepsilon \Longrightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Mostrando así lo que queríamos. □

Proposición 2.8.2 *Sea X un espacio normado.*

(a) *La suma de vectores es una aplicación continua de $X \times X$ en X.*

(b) *El producto de vectores por escalares es una función continua de $\mathbb{K} \times X$ en X.*

Demostración. Sean $a, b \in X$ y $\beta_0 \in \mathbb{K}$, tenemos

$$\begin{aligned} \|s(x,y) - s(a,b)\| &= \|(x,y) - (a,b)\| \\ &\leq \|x-a\| + \|y-b\| \\ &\leq 2\,\text{máx}\{\|x-a\|, \|y-b\|\} \\ &= 2\|(x,y) - (a,b)\|. \end{aligned}$$

Para todo $(x,y) \in X \times X$.

$$\begin{aligned} \|m(\beta;x) - m(\beta_0;a)\| &= \|\beta x - \beta_0 a\| \\ &= \|\beta x - \beta_0 x + \beta_0 x - \beta_0 a\| \\ &\leq \|x\|\|\beta - \beta_0\| + \|\beta_0\|\|x-a\|, \end{aligned}$$

para todo $(\beta, x) \in \mathbb{K} \times X$. De ahí se concluye que s es continua en $(a,b) \in X \times X$ y m es continua en $(\beta_0, a) \in \mathbb{K} \times X$. □

2.8.2. Sucesiones

Definición 2.8.2 *La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio vectorial con norma $(X, \| \ . \ \|)$ se define de Cauchy, cuando $\lim\limits_{p,q\to\infty} \| x_p - x_q \| = 0$, es decir*

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\| x_p - x_q \| < \varepsilon$ para todo $p, q \geqslant N$

Definición 2.8.3 *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del espacio vectorial normado $(X, \| \ . \ \|)$ es llamada de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que, } d(x_n, x_m) < \varepsilon, \text{ siempre que } n, m \geqslant n_0.$$

Definición 2.8.4 *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del espacio vectorial normado $(X, \| \ . \ \|)$ es convergente si existe un $x \in X$ tal que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que, } d(x_n, x) < \varepsilon, \text{ siempre que } n \geqslant n_0.$$

No es difícil probar que cualquier sucesión convergente se clasifica como de Cauchy, pero la inversa no se aplica en todos los casos, lo que lleva a la siguiente definición.

Definición 2.8.5 *Se denomina espacio completo o de Banach en el espacio vectorial normado $(X, \| \ . \ \|)$ si cualquier sucesión de Cauchy en X es convergente.*

En relacion a esto, el teorema siguiente establece una condición necesaria y suficiente para una sucesión de Cauchy converga. Indudablemente, la suficiencia posee un mayor interés y utilidad que la necesidad de esta condición.

Teorema 2.8.1 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $(X, \| \ . \ \|)$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si ella posee una subsucesión convergente.*

Demostración. Vea [17, Theorem 6.8.3, p. 94]. □

2.9. Espacios normados de dimensión finita

Definición 2.9.1 (Normas equivalentes) *Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial X se dice equivalente con otra norma $\|\cdot\|_0$ en X si existen $a, b > 0$ tales que*

$$a \| x \|_0 \leq \| x \| \leq b \| x \|_0$$

.

Teorema 2.9.1 *Sea X un espacio vectorial que tiene dimension finita, se cumple que todas las normas que existen son equivalentes.*

Demostración. Vea [14, Theorem 2.4-5 , p. 75]. □

Ejemplo 2.9.1 *En $\mathbb{R}^n$, sabemos que*

$$| y |_\infty = \text{máx}\{| y_i |, 1 \leq i \leq n\}$$

y

$$| y |_2 = (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{1/2}$$

son normas, donde $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$| y |_\infty \leq | y |_2 \leq n \, | y |_\infty, \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

2.9.1. Espacios con producto interno

Definición 2.9.2 *Un espacio vectorial Y sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. La función denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y \times Y \to \mathbb{R}$ se considera un producto escalar o producto interno sobre Y, cuando cumple las siguientes características:*

(P1) $\langle y, y \rangle \geqslant 0$, *para todo* $y \in Y$ $\langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow y = \theta$.

(P2) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, *para todo* $x, y \in X$.

(P3) $\langle \alpha y + \beta x, z \rangle = \alpha \langle y, z \rangle + \beta \langle x, z \rangle$, *para todo* $y, x, z \in X$.

El espacio vectorial Y, que se compone de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se conoce como espacio pre-Hilbert y se representa como $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Observación 2.9.1 *Es crucial destacar que en el caso real las propiedades (P2) y (P3) aseguran la linealidad del producto escalar en la segunda componente. No obstante, en el caso complejo ello no ocurre ya que (P2) y (P3) sólo implican que*

$$\langle y, \alpha x + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle y, x \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle, \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ y \text{ todo } y, x, z \in Y,$$

lo cual recibe el nombre de sesquilinealidad. Una consecuencia directa de la linealidad o sesquilinealidad, al usar simplemente que $\theta = 0 \cdot \theta$, es el hecho que el producto escalar del vector nulo con cualquier vector de Y es cero.

Teorema 2.9.2 *$(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert en el cuerpo $\mathbb{K}$, se cumple que*

$$|\langle y, x\rangle| \leq \langle y, y\rangle^{1/2} \langle x, x\rangle^{1/2} \quad \textit{para todo } y, x \in Y. \tag{2.3}$$

Demostración. Vea [10, Teorema 1.7, p. 12]. □

Teorema 2.9.3 *Consideremos $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y la función $\|\cdot\|: Y \to \mathbb{R}$ establecida como $\|y\| = \langle y, y\rangle^{1/2}$ para todo $y \in Y$. Se cumple que $\|\cdot\|$ es una norma en Y, la cual es conocida como norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Demostración. Vea [10, Teorema 1.8, p. 1]. □

Definición 2.9.3 *El espacio pre-Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es espacio de Hilbert si es completo con la norma que se genera a partir de su producto escalar.*

Ejemplo 2.9.2 *El conjunto $\mathbb{R}^n = \{y = (y_1, ..., \ldots, y_n) : y_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$, provisto del producto interno*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \textit{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo 2.9.3 *$L^2(\Omega) = \{f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}: f$ medible $\int_\Omega |f|^2 < +\infty\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, provisto del producto escalar*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

2.10. Operadores lineales continuos entre espacios normados

Se consideran $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. La función $T: X \to Y$ se conoce como operador de X en Y.

Definición 2.10.1 *Un operador $T: X \to Y$ es lineal continuo si*

- $T(ax + bz) = aT(x) + aT(z)$, *para todo* $a, b \in \mathbb{K}$, *y todo* $x, z \in X$.
- $\forall x_0 \in X$, *y* $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ / $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ *toda vez que* $x \in X \wedge \|x - x_0\| < \delta$.

Definición 2.10.2 *Se dice que un operador lineal $T: X \to Y$ es acotado si existe una constante $M \geq 0$ tal que*

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X.$$

2.11. Caracterización de los operadores lineales continuos

Teorema 2.11.1 *Sean X y Y espacios normados en $\mathbb{K}$ y un operador lineal $T: X \to Y$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| < +\infty$, *es decir, la imagen de la bola unitaria cerrada es acotada,*

(b) *T es acotado,*

(c) *T es uniformemente continuo,*

(d) *T es continuo,*

(e) *T es continuo en cero.*

Demostración. Vea [14, Theorem 27-9, p. 97]. □

Definición 2.11.1 *Se denota $\mathcal{L}(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales continuos de X en Y. Cuando $X = Y$ se escribe simplemente $\mathcal{L}(X)$ en vez de $\mathcal{L}(X,X)$.*

En $\mathcal{L}(X,Y)$, no es difícil demostrar que $(\mathcal{L}(X,Y),+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Definición 2.11.2 *El operador lineal acotado $T\colon X \to Y$, donde X e Y son espacios normados. Definimos*

$$\| T \|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|}.$$

Teorema 2.11.2 *Si tanto X como Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X,Y)$ es un espacio normado. Si Y es un espacio de Banach, también $\mathcal{B}(X,Y)$ es de Banach.*

Demostración. Vea [14, Theorem 2.10-2, p. 118]. □

Teorema 2.11.3 *Sean los espacios normados X, Y y W. Si $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ además, si $T \in \mathcal{B}(Y,W)$, entonces $TS \in \mathcal{B}(X,W)$ y $\| TS \| \leq \| T \| \, \| S \|$.*

Demostración. Vea [26, Lema 4.30, p. 106]. □

Corolario 2.11.1 *Sea X un espacio normado y $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces*

$$\| T^n \| \leq \| T \|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sigue del Teorema anterior y procediendo por inducción. □

2.12. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomos y no autónomos

A continuación establecemos nuestro principal objeto de estudio.

Definición 2.12.1 *Un conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden representado como;*

$$\begin{array}{rcl} y_1' &=& f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' &=& f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' &=& f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{array} \tag{2.4}$$

t representa el tiempo,t es una variable independiente, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ variables que dependen de t que toman valores reales, donde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones reales definidas en un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. A este conjunto de EDO de primer orden donde la funciones f que dependen de t se le llama sistema de ecuaciones diferenciaes ordinarias no autonomas.

Ejemplo 2.12.1

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{l}\sin x \end{aligned}$$

Ejemplo 2.12.2

$$\begin{aligned} x_1' &= mx - nxy \\ y_2' &= -px + qxy \end{aligned}$$

m, n, p y q números reales mayores que cero.

Cuando las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dependen solo de las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y no t en este caso (2.4) sera de la forma siguiente;

$$\begin{array}{rcl} y_1' &=& f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &=& f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' &=& f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array} \tag{2.5}$$

(2.5) sera llamado un sistema EDO autónomos.

Seguidamente, veremos la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 2.12.2 *El conjunto de n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ con valores reales y definidas en un mismo intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$, es una solución de (2.4) si cumplen las siguientes condiciones;*

(a) $(t, y_1(t)), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \in D$, *para todo* $t \in J$.

(b) *Cada y_i es diferenciable en J y para cada $t \in J$ se cumple*

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) &=& f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \\ y_2'(t) &=& f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(t) &=& f_n(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \end{array} \tag{2.6}$$

Definición 2.12.3 *El conjunto de n funciones $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ con valores reales y definidas en un mismo intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$, es una solución del sistema autónomo (2.6) si cumplen las siguientes condiciones;*

(a) $(t, y_1(t)), y_2(t), \ldots, y_n(t))) \in D$, *para todo* $t \in J$.

(b) *Cada y_i es diferenciable en J y para cada $t \in J$ se cumple*

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) &=& f_1(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \\ y_2'(t) &=& f_2(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(t) &=& f_n(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \end{array} \tag{2.7}$$

Cuando las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son de la forma

$$f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_{i1}(t)y_1 + a_{i2}(t)y_2 + \cdots + a_{in}(t)y_n + b_i(t)$$

donde a_{ij} y b_i $(1 \leq i, j \leq n)$ son funciones definidas en cierto intervalo J de la recta real $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$. El sistema tiene la forma

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ y_2'(t) & = & a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \ldots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(t) & = & a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{array} \tag{2.8}$$

(2.8) es llamado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Ahora si denotamos

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

y

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

entonces (2.8) toma la forma

$$y' = A(t)y + b(t). \tag{2.10}$$

2.13. Repaso de matrices

Con el objetivo de fijar notaciones y escribir los sistemas de EDO's en una manera compacta, recordaremos algunas propiedades fundamentales del álgebra de matrices. En lo que sigue, vamos asumir que tenemos conceptos básicos del álgebra lineal y que, conceptos tales como espacio vectorial, base, dimensión, autovalores, autovectores, autoespacios, transformación lineal, núcleo e isomorfismo entre espacios vectoriales le son familiares. Supondremos también que el lector conoce los conceptos de grupo, grupo abeliano, anillo; así como también sus principales propiedades. En todo caso recomendamos la lectura de [13], [7], [5]. En adelante, $\mathbb{K}$ denota al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Dados m y n enteros positivos e i, j enteros tales que $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Una matriz de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{K}$ es un arreglo rectangular de elementos de $\mathbb{K}$, denotamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \tag{2.11}$$

Denotamos por $\mathbb{K}^{m \times n}$ al conjunto de todas de las matrices de m filas y n columnas.

(a) Cuando $m = n$, decimos que la matriz A es una matriz cuadrada.

(b) Cuando $m = 1$, decimos que la matriz A es una matriz fila.

(c) Caso similar si $n = 1$, decimos que la matriz A es una matriz columna.

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ dos matrices y $c \in \mathbb{K}$ un escalar.

(a) Decimos que ambas matrices son iguales si $a_{ij} = bij$ para todos los i, j tales que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

(b) Definimos la suma de las matrices A y B como $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

(c) Definimos el producto del escalar c por la matriz A, como $cA = [ca_{ij}]$.

No es difícil ver que $\mathbb{K}^{m\times n}$ con las operaciones dadas arriba es un espacio vectorial de dimensión mn.

Notamos también que $\mathbb{K}^{m\times n}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$, vía el isomorfismo.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longleftrightarrow (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \tag{2.12}$$

Sea la matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$, la transpuesta de A, denotada por A^t, es definida por

$$A^t = [a_{ji}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{m2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Sean dos matrices $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B = [a_{jk}] \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Definimos el producto de dos matrices A y B, denotado por $C = A\dot{B}$, donde $C = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times p}$ definida como $A\dot{B} = [c_{ik}]$, donde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. Es importante señalar que el producto de matrices no siempre es conmutativa es decir $AB \neq BA$. No es difícil probar que el conjunto de las matrices cuadradas $\mathbb{K}^{n\times n}$ con la suma de matrices y producto de matrices es un anillo no conmutativo con elemento identidad.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $k \geq 0$, se define la potencia k de la matriz A denotado A^k como sigue:

$$A^0 = I, \quad A^k = AA^{k-1} \text{ para todo } 2 \leq k.$$

.

Decimos que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz inversible, si existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $A\,B = B\,A = I$, A^{-1} representa a la matriz inversa de A, si la matriz no es inversibles son llamadas singulares, al conjunto de todas las matrices que son inversibles se llama grupo lineal de $\mathbb{K}^{n\times n}$ sera denotado como $\mathbb{GL}(n)$.

2.14. Nociones de cálculo matricial

En esta sección, vamos a suponer que el lector está familiarizado con el cálculo diferencial e integral de funciones reales de variable real así como el de caminos. Se define como función matricial a una función definida en un intervalo J de la recta real con valores en $\mathbb{K}^{m\times n}$.

$$\begin{aligned} A:\, J &\longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n} \\ t &\longmapsto A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} = [a_{ij}(t)] \end{aligned} \tag{2.14}$$

puede ser vista como un camino en $\mathbb{R}^{m\,n}$.

$$\begin{aligned} A\colon J &\longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n} \\ t &\longmapsto A(t) = (a_{11}(t),\, \cdots, a_{1n}(t), a_{m1}(t),\, \cdots, a_{mn}(t)) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Así, la función matricial $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{K}^{n\,m}$ queda definida como una colección de $n\,m$ funciones reales de variable real a_{ij} denominadas funciones coordenadas de A. Note que $a_{i\,j\,:\,J\longmapsto\mathbb{K}}$, para todo $(i,j) \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 2.14.1

$$\begin{aligned} \Phi:\, [1,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{K}^{3\times 3} \\ t &\longmapsto \Phi(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) & t^2+1 & e^t t + e^{t^2+1} \\ \cosh t^3 + 9 & t^2 & \ln t \\ \arcsin(t^4) & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.14.2

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K}^4 \\ t &\longmapsto \Phi(t) = \left(t^2+2t, \log\left(\frac{t}{\pi\cosh(t+1)}\right), 1, \frac{t^3+9}{7t^{10}}\right) \end{aligned}$$

.

Definición 2.14.1 *La función matricial $\Psi:\, J \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $\Psi(t) = [a_{ij}(t)]$ para todo $t \in J$. Decimos que si $t_0 \in J$ la matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es el límite de Ψ cuando t tiende a t_0, lo que denotamos por $\lim\limits_{t\to t_0} \Psi(t) = A$ si solo si $\lim\limits_{t\to t_0} a_{ij}(t) = a_{ij}$, para todo $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le n$.*

Ejemplo 2.14.3

$$\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{k} \\ -\frac{b}{k} & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} cos(b) & sen(b) \\ -sen(b) & cos(b) \end{bmatrix}$$

Teorema 2.14.1 *Sean las funciones $\varphi, \psi : J \longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n}$ y $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que cumplen $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = A$, $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = B$ y $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = c$, donde $t_0 \in J$, entonces se cumplen;*

(a) $\lim_{t\to t_0}(\varphi \pm \psi)(t) = A \pm B.$

(b) $\lim_{t\to t_0}(g\varphi)(t) = c\,A.$

(c) $\lim_{t\to t_0}(\varphi \cdot \psi)(t) = A \cdot B$, *siempre que* $m = n$.

Definición 2.14.2 *Sea* $\varphi\colon J \longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n}$ *una función matricial tal que para todo* $t \in J$, $\varphi(t) = [a_{ij}(t)]$. *Decimos que* φ *es continua en* $t_0 \in J$, *si cada* a_{ij} *es continua en* $t_0 \in J$.

Definición 2.14.3 *Sea* $\varphi\colon J \longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n}$ *donde* J *es un intervalo abierto. Decimos que* φ *es diferenciable en* $t_0 \in J$ *si existe el siguiente límite:*

$$\lim_{t\to t_o} \frac{1}{t - t_0}[\varphi(t) - \varphi(t_0)]. \tag{2.16}$$

Proposición 2.14.1 *Sea* $\varphi\colon J \longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n}$ *una función matricial tal que* $\varphi(t) = [a_{ij}(t)]$, *para todo* $t \in J$. *Entonces* φ *es diferenciable en* $t_0 \in J$ *sí y solo sí* a_{ij} *es diferenciable en* t_0, *para todo* $1 \le i \le m$ *y* $1 \le j \le n$. *Además se verifica:*

$$\varphi(t_0) = [a_{ij}(t_0)]. \tag{2.17}$$

Definición 2.14.4 *Decimos que la función matricial* $\varphi\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ *es de clase* C^1 *en el intervalo* J *si* φ *es diferenciable en* J *y la función derivada* φ *es continua en* J. *Decimos que* φ *es de clase* C^k $(k > 1)$ *en el intervalo* J *si* $\varphi^{(k-1)}$ *es diferenciable en* J *y la función derivada* $k-$ *ésima* φ^k *es continua en* J.

Definición 2.14.5 *Sea* $\varphi\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n}$ *una función matricial tal que* $\varphi(t) = [a_{ij}(t)]$, $\forall t \in [a, b]$. *Decimos que* φ *es integrable en* $[a, b]$ *si cada* $a_{i,j}$ *es integrable en* $[a, b]$. *En caso afirmativo tenemos:*

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \left[\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right]. \tag{2.18}$$

Se observa que muchas propiedades del cálculo diferencial e integral en $\mathbb{R}$ son generalizadas al cálculo matricial.

Definición 2.14.6 *Sean* $A\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ *y* $b\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ *funciones matriciales. Una función* $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ *es una solución de la EDO.* (2.10) *si* ϕ *es diferenciable en el intervalo* $I \subset J$ *y se cumple*

$$\phi(t) = A(t)\phi(t) + b(t), \quad \textit{para todo } t \in I.$$

El sistema (2.8) o la ecuación (2.10) en $I \times \mathbb{R}^n$ se llama lineal homogénea si $b(t) = 0$. Consideremos el sistema lineal con coeficientes constantes

$$x' = Ax. \tag{2.19}$$

Ejemplo 2.14.4 *El movimiento de dos cuerpos es descrito por la ecuación diferencial de segundo orden, que se representa por medio del sistema de ecuaciones diferenciales como:*

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{2.20}$$

haciendo $x_1 = x,\ x_2 = x', x_3 = z,\ x_4 = z'$ *obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente a (2.20).*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1})x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= -\frac{k_2}{m_2}(x_3 - x_1) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Si A es la matriz de coeficientes de la ecuación (2.21) como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

podemos definir los vectores

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

entonces el sistema (2.21) se representa matricialmente como:

$$x' = Ax. \tag{2.24}$$

Ejemplo 2.14.5 *Sea el sistema*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - ty_2 + e^t \\ y_2' &= t^2 y_1 - y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3 + 2e^{-t}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

La matriz asociada al sistema (2.25) es

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ t^2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Denotemos

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

y

$$b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

El sistema (2.25) lo podemos escribir como:

$$y' = A(t)y + b(t).$$

Definición 2.14.7 *Para $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, una norma $\|\cdot\|$ es definida como:*

$$\| A \| = \text{máx}\{| a_{ij} | \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Es fácil verificar directamente de la definición que esta función

$$\begin{aligned} \| \cdot \| \colon \mathbb{K}^{n\times n} &\to \mathbb{R} \\ A &\to \|A\| \end{aligned} \tag{2.26}$$

tiene las siguientes propiedades:

(a) $\| A \| \geqslant 0$ y $\| A \| = 0$, sí y solo sí $A = 0$.

(b) $\| \alpha A \| = |\alpha| \| A \|$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

(c) $\| A \pm B \| \leq \| A \| + \| B \|$.

(d) $\| AB \| \leq n \| A \| \| B \|$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Las primeras tres propiedades (a)-(c) son los axiomas generales de lo que se requiere para que cualquier función abstracta sea una norma. La propiedad (c) es conocida como la desigualdad triangular. Usando una norma en $\mathbb{K}^{n\times n}$, como esta nos permite extender todos los resultados de sucesiones y series de números reales o complejas para sucesiones y series de matrices. Además veremos que estos resultados se parecen completamente a su homólogo real o complejo. Sea $\{A_k\}_{k=0}^{\infty} = \{A_0, \ldots, A_k \ldots\}$ una sucesión de matrices. En términos de las entradas, la k-ésima matriz de esta sucesión se ve así

$$A_k = \{a_{jk}\} = \begin{bmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & . & . & . & a_{1n}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & . & . & . & a_{2n}^k \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}^k & a_{n2}^k & . & . & . & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

La norma $\|\cdot\|$ nos da una forma de medir distancias entre los elementos. En nuestro espacio $\mathbb{K}^{n\times n}$ de matrices, y esto a su vez conduce a la noción natural de límite de una secuencia de matrices.

Definición 2.14.8 *Definiremos lo siguiente:*

(a) *Una distancia entre dos matrices $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es $\| A - B \|$.*

(b) *Una sucesión $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ en $\mathbb{K}^{n\times n}$ converge a la matriz B, si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\| A_k - B \| < \varepsilon,$$

para todo $k \geqslant N$. Usamos la notación habitual:

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = B.$$

(c) *Una sucesión $\{A_k\}_{k=0}^{+\infty}$ de matrices se llama sucesión de Cauchy, si*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ tal} \quad \text{que } \| A_k - A_l \| < \varepsilon, \forall\, k, l \geqslant N.$$

La noción de sucesión de matrices de Cauchy es la misma que para sucesiones de números reales: es una sucesión cuyos términos están muy próximos unos de otros cuanto queramos. La siguiente proposición es fácil de demostrar a partir de las definiciones.

Proposición 2.14.2 *(Convergencia y succeciones de matrices de Cauchy)*
Sea $\{A_k\}_{k=0}^{+\infty}$ *una sucesión de matrices. Entonces*

(a) *La sucesión converge para* B

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = B,$$

si y solo si cada una de las entradas converge a la correspondiente entrada de B*, esto es,*

$$\lim_{k\to+\infty} a_{ij} = b_{ij}.$$

(b) *La sucesión de matrices es de Cauchy si y solo si cada una de sus entradas es de Cauchy.*

(c) *Si la sucesión de matrices es de Cauchy entonces la sucesión converge.*

Demostración. Vea [2, Proposition C.4, p. 604]. □

Definición 2.14.9 *Sea* $\{C_k\}_{k=0}^{+\infty}$ *una sucesión de matrices en* $\mathbb{K}^{n\times n}$*. Diremos que la serie de matrices*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k \tag{2.27}$$

converge para la matriz C *si la sucesión de sus sumas parciales converge a* C*. Cuando esto ocurre escribimos:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k = C$$

Recuerde que, al igual que para las series de números reales, para (2.27) tenemos:

$$\begin{aligned}
s_0 &= \sum_{k=0}^{0} C_k \\
s_1 &= \sum_{k=0}^{1} C_k \\
s_2 &= \sum_{k=0}^{2} C_k \\
&\vdots \\
s_k &= \sum_{k=0}^{k} C_k \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Tenga en cuenta que cualquier serie $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k$ de matrices $n \times n$ esta compuesto de n^2 series de números reales: $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k$ formado a partir de las entradas de series matriciales. Además, por la última proposición, es fácil ver que la serie de matrices $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k$ converge para la matriz C si y solo si para cada i, j, la serie correspondiente de entrada $\sum_{k=0}^{+\infty} c_{ij}^k$ converge para $\sum_{k=0}^{+\infty} C_{ij}$ de C. Simbólicamente:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} c_{11}^k & c_{12}^k & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n}^k \\ c_{21}^k & c_{22}^k & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2n}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}^k & c_{n2}^k & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{11}^k & \sum_{k=0}^{+\infty} c_{12}^k & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1n}^k \\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_{21}^k & \sum_{k=0}^{+\infty} c_{22}^k & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2n}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n1}^k & \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n2}^k & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=0}^{+\infty} c_{nn}^k \end{bmatrix}$$

A pesar del hecho, recién dicho, de que la convergencia de series de matrices es equivalente a la convergencia de las entradas a menudo es bastante imposible examinar eficazmente la serie de entradas.

Definición 2.14.10 *La serie matricial $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k$ se denomina absolutamente convergente si la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \| C_k \|$ en $\mathbb{R}$ es convergente.*

La siguiente proposición muestra que la convergencia absoluta es una noción más fuerte que la simple convergencia ordinaria.

Proposición 2.14.3 *Si la serie de matrices $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k$ converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. Vea [2, Proposition C.5, p. 606]. □

La función exponencial matricial es fundamental para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Este capítulo se centra en las propiedades de la matriz exponencial y también sobre la teoría de la estabilidad.

Ejemplo 2.14.6 *Una aplicación importante de la última proposición trata de la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

donde $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ e I es la matriz identidad. Para ver que esto serie de matrices converge para cualquier matriz A, utilizamos el criterio de de la razón;

$$\begin{aligned} \frac{\left\| \frac{1}{(k+1)!} A^{k+1} \right\|}{\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|} &= \frac{1}{k+1} \frac{\| A\, A^k \|}{\| A^k \|} \\ &\leq \frac{1}{k+1} \frac{n \| A \| \, \| A^k \|}{\| A^k \|} = \frac{n}{k+1} \| A \|. \end{aligned}$$

Definición 2.14.11

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{2.29}$$

Teorema 2.14.2 *La exponencial de una matriz definida por la serie (2.29) tiene las siguientes propiedades:*

(a) *Si A y B conmutan, esto es, $AB = BA$ entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.*

(b) *Para cualquier matriz A, la matriz e^A es inversible y tiene inversa dada por:*

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}.$$

(c) *Si P es cualquier matriz inversible, entonces $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.*

(d) *Si $Av = \lambda v$, entonces $e^A v = e^\lambda v$. En particular, esto da una asociación entre los autovalores/vectores de A y e^A.*

Demostración. Vea [2, Theorem C.4, p. 608]. □

Lema 2.14.3

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k$$

para toda matriz $n \times n$ y todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Vea [20, p. 127]. □

Seguidamente veremos algunos conceptos del calculo en el espacio de matrices. En primer lugar, examinaremos la ecuación

$$A\overrightarrow{x} = y \tag{2.30}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{a_2} \\ . \\ . \\ . \\ \overrightarrow{a_n} \end{pmatrix}$$

donde $\overrightarrow{a_i} = [a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}], i = 1, 2, ..., n$.

Luego si

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

se tiene

$$A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{a_2} \\ . \\ . \\ . \\ \overrightarrow{a_n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$

donde $\overrightarrow{a}_i.\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ (El producto interno usual en $\mathbb{R}^n$).

En adelante, retiraremos las flechas, si no hay lugar a confusión. Luego,

$$\|y\|^2 = \|Ax\|^2 = (a_1.x)^2 + (a_2.x)^2 + ... + (a_n.x)^2 \leq \|a_1\|^2\|x\|^2 + \|a_2\|^2\|x\|^2 + ... + \|a_n\|^2\|x\|^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^2)\|x\|^2$$

Pero $\|a_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$, i fijo, $1 \leq i \leq n$, luego

$$\|y\| \leq (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)\|x\|$$

Definiendo

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

resulta, de lo anterior desigualdad

$$\|y\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Haremos dos ejemplos de norma de matrices, para eso veremos algo previo. En el espacio de matrices cuadradas tenemos una norma en $\mathbb{K}^{n\times 1}$

$$\| A \| = \sup\{\| Ax \| : x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$

Probaremos que $\| A \|$ sea una norma. Primero veremos que $\| A \|$ es un número real, en efecto $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ en $\mathbb{K}^{n\times 1}$ es un espacio vectorial de dimensión n. Tiene una base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base canónica, x es de la forma $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$

$$Ax = A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n)$$

$$Ax = \alpha_1 Ae_1 + \alpha_2 Ae_2 + ... + \alpha_n Ae_n$$

Tomo norma

$$\| Ax \| = \| \alpha_1 Ae_1 + \alpha_2 Ae_2 + ... + \alpha_n Ae_n \|$$

$$\| Ax \| \leq \| \alpha_1 Ae_1 \| + ... + \| \alpha_n Ae_n \|$$

$$\| \alpha_1 Ae_1 \| + ... + \| \alpha_n Ae_n) \| \leq k(| \alpha_1 | + ... | \alpha_n |)$$

donde $k = \text{máx}\{\| Ae_1 \|, ..., \| Ae_n \|\}$ entonces

$$\| Ax \| \leq k(| \alpha_1 | + ... | \alpha_n |)$$

si $\| x \| \leq 1$ entonces $| \alpha_1 | \leq 1, | \alpha_2 | \leq 1, ..., | \alpha_n | \leq 1$ entonces

$$\| Ax \| \leq nk$$

kn es una cota superior entonces

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \{\| Ax \|\} \leq kn$$

entonces el supremo existe. Veamos ahora que $\| A \|$ es en efecto una norma:

I) $\| A \| \geq 0, \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inmediata por la definición

II)$\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$
($\Leftarrow$) si $A = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$ entonces el

$$\sup\{\| Ax \|: x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\} = 0$$

($\Rightarrow$) si $\| A \| = 0$ por demostrar que $A = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$

$$0 = \| A \| = sup\{\| Ax \|: x \in \mathbb{K}^{n\times n}, \| x \| \leq 1\}$$

entonces

$$\| Ax \| \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1$$

entonces $\| Ax \| = 0, \forall x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1$, sea $y \in \mathbb{K}^{n\times 1}, y \neq 0$ entonces $u = \dfrac{y}{\| y \|}$ vemos que $\| u \| = 1$ entonces

$$\| \frac{Ay}{\| y \|} \| = 0$$

entonces $\| Ay \| = 0$ entonces

$$\| Ay \| = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$$

III) sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ por probar que $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|$ entonces

$$\| \alpha A \| = \sup\{\| (\alpha A)x \|: \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$
$$= \sup\{| \alpha | \| Ax \|: \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$
$$= | \alpha | \sup\{\| Ax \|: \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$
$$= | x | \| A \|$$

IV) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\| A + B \| = \sup\{\| (A + B)x \|: x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$
$$= \sup\{\| A(x) + B(x) \|: x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$
$$\leq \sup\{\| A(x) \| + \| B(x) \|: x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$
$$\leq \sup\{\| A(x) \|: x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\} + \sup\{\| B(x) \|: x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$
$$= \| A \| + \| B \|$$

entonces dado $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ cualquier matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\| A \| = \sup\{\| A \|: x \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \| x \| \leq 1\}$$

es una norma en $\mathbb{K}^{n\times n}$

Ejemplo 2.14.7 *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *hallaremos su norma*

$$Aw = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ahora observando que la norma euclidiana de Aw *es* $\sqrt{x^2+y^2}$ *se tiene:*

$$\| A \| = \sup\{\| Aw \| : w \in \mathbb{K}^{2\times 1}, \| w \| \leq 1\}$$

$$= \sup\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in \mathbb{K}^{2\times 1}, \| (x,y) \| \leq 1\} = 1$$

Entonces $\| A \| = 1$

Ejemplo 2.14.8 *Sea la matriz* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *hallaremos su norma*

$$Bw = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Observando que $\| w \| = \sqrt{4x^2+4y^2}$ *se tiene:*

$$\| B \| = \sup\{\| Bw \| : w \in \mathbb{K}^{2\times 1}, \| w \| \leq 1\}$$

$$= \sup\{\sqrt{4x^2+4y^2} : (x,y) \in \mathbb{K}^{2\times 1}, \| (x,y) \| \leq 1\}$$

$$= \sup\{2\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in \mathbb{K}^{2\times 1}, \| (x,y) \| \leq 1\}$$

$$= 2\sup\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in \mathbb{K}^{2\times 1}, \| (x,y) \| \leq 1\}$$

Entonces $\| B \| = 2$.

A continuación, veremos algunos conceptos del cálculo diferencial e integral en el espacio de matrices. Sea

$$A(t, \triangle t) = A(t+\triangle t) - A(t) = [a_{ij}(t+\triangle t) - a_{ij}(t)]_{1\leq i,j\leq n}$$

Definición 2.14.12 *Sea* $A(t) = [a_{ij}(t)]_{1\leq i,j\leq n} \in M(n,\mathbb{K}), t \in \mathbb{R}$.

a. $A(t)$ es continua en $t = t_0$ si

$$\lim_{\triangle t \to 0} A(t_0, \triangle t) = 0$$

b. La derivada de la matriz A en el punto t_0, denotada $A'(t_0)$ esta dada por la relación

$$A'(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{A(t_0, \triangle t)}{\triangle t} \quad \textit{si el limite existe.}$$

Evidentemente;

a'. $A(t)$ es continua en $t = t_0$, si $a_{ij}(t)$ es continua en $t = t_0$, $1 \leq i, j \leq n$.

b'. $A'(t_0)$, existe si $a'_{ij}(t_0)$ existe, $1 \leq i, j \leq n$. En este caso $A'(t_0) = [a'_{ij}(t_0)]_{1\leq i,j\leq n}$.

c. Si $A(t)$ es continua en $[t_1, t_2]$, definimos la integral de A mediante la relación

$$\int_{t_1}^{t} A(s)ds = [\int_{t_1}^{t} a_{ij}(s)ds]_{1\leq i,j\leq n}, \;\; t \in [t_1, t_2].$$

Se puede verificar que:

i. $\frac{d}{dt}\int_0^t A(s)ds = A(t)$

ii. $B\int_0^t A(s)ds = \int_0^t BA(s)ds; \int_0^t A(s)Cds = (\int_0^t A(s)ds)C$ *cuando B y C son matrices constantes.*

iii. $\|\int_0^t A(s)ds\| \leq \int_0^t \|A(s)\|ds.$

Además se verifican las siguientes propiedades:

$$\int_{t_1}^{t_2} (A+B)(s)ds = \int_{t_1}^{t_2} A(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} B(s)ds, \;\; t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$$

Sea $c \in \mathbb{R}$

$$\int_{t_1}^{t_2} (cA)(s)ds = c\int_{t_1}^{t_2} A(s)ds$$

Sean $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} (\alpha A(s) + \beta B(s))ds = \alpha\int_{t_1}^{t_2} A(s)ds + \beta\int_{t_1}^{t_2} B(s)ds \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Definición 2.14.13 *Si $A_k \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, afirmamos que A representa el límite de la sucesión (A_k). Lo señalaremos $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, si y solo si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un un $k_0 \in \mathbb{N}$ que si $k \geq k_0$, entonces $\|A_k - A\| < \varepsilon$. Cuando una matriz presenta un límite, afirmamos que es convergente, mientras que en caso contrario sería divergente.*

Definición 2.14.14 *Sea A que pertenece a $M(n, \mathbb{K})$. Considere un escalar λ en $\mathbb{K}$ y v un vector columna diferente de cero del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$. Si se verifica que $Av = \lambda v$, se afirmará que λ es un autovalor de A y que v es un autovector de A. También se mencionará que λ es un autovalor de A asociado al autovector v, y que v es un autovector de A asociado al autovalor λ.*

Se dice que λ es un autovalor de A en $\mathbb{K}$ si se cumple que $det(\lambda I. - A) = 0$. A partir de esto, se puede formar la matriz $(\lambda I - A)$ y definir el polinomio $p(\lambda) = det(\lambda I - A)$. Así, los valores propios de A en $\mathbb{K}$ son aquellos λ en $\mathbb{K}$ para los cuales $p(\lambda) = 0$. Por ello, el polinomio $p(\lambda)$ se conoce como la ecuación característica o polinomio característico de A. Es importante señalar que $p(\lambda)$ es un polinomio mónico de grado n. Más adelante, proporcionaremos más detalles sobre el polinomio característico y sus características.

Definición 2.14.15 *(Matriz semejante). Sean $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, se dice que B es similar o semejante a A sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz inversible $P \in M(n, \mathbb{K})$ tal que $B = P^{-1}AP$.*

Definición 2.14.16 *Sea $A \in M(n, \mathbb{K})$, decimos que A es diagonalizable si hay una matriz P que es invertible, de manera que la matriz*

$$D = P^{-1}AP.$$

resulta ser diagonal. Afirmaremos que P diagonaliza la matriz A.

Teorema 2.14.4 *Sean matrices similares A y B de orden $n \times n$, entonces;*

(1) $det(A) = det(B)$.

(2) A *es invertible si y solo si* B *es invertible.*

Definición 2.14.17 *(Espacio propio). El espacio propio del valor propio* λ *de* A *se define por*

$$E_\lambda = \ker(\lambda I - A).$$

Ejemplo 2.14.9 *Sea la matriz A:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica o polinomio característico $p_A(\lambda) =\mid \lambda I - A \mid$ *entonces:*

$$p_\lambda(A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

luego tenemos;

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 \\ &= (\lambda - 3)^2(\lambda - 4). \end{aligned}$$

Los autovalores son; $\lambda_1 = 3$ *con multiplicidad* 2 *y* $\lambda_2 = 4$ *con multiplicidad* 1*, los autovectores asociado a* $\lambda_1 = 3$ *son;* $\{(1,1,0);(1,0,1)\}$ *que generan los vectores asociados al autovalor* $\lambda_1 = 3$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 4$ *el autovector asociado es:* $\{(2,1,2)\}$ *es el único vector generador de los vectores propios asociados al autovalor* $\lambda_2 = 4$*. Luego formamos la matriz* P *que tiene como columnas a los vectores propios hallados, entonces:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

como $\mid P \mid = -1 \neq 0$ *y* $\{(1,1,0);(1,0,1);(2,1,2)\}$ *es una base de los vectores característicos, según un teorema previo* A *se puede diagonalizar y* P *es la matriz que transforma a la matriz* A *en su forma diagonal, por lo tanto*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2.15. Potencia o exponencial de una matriz

Se puede determinar la función exponencial de un escalar α a través de la serie infinita como:

$$exp(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{\alpha}.$$

Esta definición se generaliza naturalmente para matrices $n \times n$

$$exp(B) = I + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!} = e^{B}$$

donde $B^n = B.B.B...B$ es una matriz de orden $n \times n$ que se obtiene al multiplicar n veces la matriz B con la misma, lo que indica que $exp(B)$ es una matriz de orden $n \times n$.

Proposición 2.15.1 *Sean A y B matrices de orden $n \times n$ satisfaciendo $AB = BA$ entonces: $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Proposición 2.15.2 *Sean P, S, T operadores en $\mathbb{R}^n$, entonces:*

a). Si $Q = PTP^{-1}$, entonces $e^Q = Pe^T P^{-1}$

b). Si $ST = TS$, entonces $e^{S+T} = e^S e^T$

c). $e^{-S} = (e^S)^{-1}$

d). Si $n = 2$

$$T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^T = e^a \begin{bmatrix} cosb & -senb \\ senb & cosb \end{bmatrix}$$

La demostración de d ver Apéndice, 2.

Definición 2.15.1 *Si la exponencial depende de t, se define la exponencial de la matriz At como*

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + ... + A^k\frac{t^k}{k!} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

con I la matriz identidad también $A^0 = I$.

Ejemplo 2.15.1 *Hallaremos la exponencial de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Desarrollando $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$ tenemos:

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i)$$

los autovalores son; $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1-i,\ \lambda_3 = 1+i$ *cuyos autovectores asociados son:* $(0,0,1)$, $(-1-i,1,0)$, $(-1+i,1,0)$ *respectivamente, como los autovectores son linealmente independientes, por un teorema anterior la matriz* A *puede ser diagonalizada, creamos la matriz* P *que contiene a los autovectores como columnas de la siguiente manera:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ -\frac{i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $J = P^{-1}AP$, J *es de la forma :*

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

luego $A = PJP^{-1}$ *entonces* $e^A = Pe^JP^{-1}$

$$e^A = \begin{pmatrix} 0 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 \\ 0 & e^{1-i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{1+i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ -\frac{i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$e^A = \begin{pmatrix} e(cos1 - sen1) & -2e.sen1 & 0 \\ 2e.sen1 & e(cos1 + sen1) & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

2.15.1. La descomposición S + N

Teorema 2.15.1 *Sea* $A \in M(n,\mathbb{C})$, *entonces existen dos matrices* S *y* N *tal que se cumple* $A = S + N$, *donde* $NS = SN$, *siendo* S *diagonalizable y* N *nilpotente.*

Ejemplo 2.15.2 *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$ *obtenemos:*

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

autovalores $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, *resolviendo las ecuaciones homogéneas* $(A-I)x = 0$ *y* $(A-2)^2 = 0$ *tenemos los autovectores* $(1,0,2), (1,1,0)$ *y* $(0,0,1)$ *entonces:*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

como $S_0 = P^{-1}S_1P$ *donde* $S_1 = Diag(1,2,2)$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

luego, $N = A - S_0$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

notar que $NS_0 = S_0N$ *entonces*

$$A = S_0 + N$$

S_0 *es diagonalizable y* N *nilpotente.*

Como ya tenemos las matrices S_0*, que es diagonalizable y* N *nilpotente de indice de nilpotencia* 2 *entonces* $e^A = e^{S+N}$ *donde* $SN = SN$ *tendremos:*

$e^A = e^S e^N$ *como* S *es diagonalizable, existe* P *invertible tal que* $S = PDP^{-1}$ *donde* D *representa a la matriz diagonal de los autovalores de* S

$$e^A = Pe^D P^{-1} e^N$$

$$e^A = e \begin{pmatrix} 1+2e & e-1 & -e \\ 2e & e & -e \\ e(1+e) & 2(e-1) & -e \end{pmatrix}$$

Definición 2.15.2 *Sea* $T : X \to X$ *un operador lineal y sea* Y *un subespacio de* X *decimos* Y *invariante por* T *ó* $T-$ *invariante si* $T(Y) \subset Y$ *es decir si*

$$\alpha \in Y \Rightarrow T(\alpha) \in Y.$$

2.15.2. Matriz fundamental

Definición 2.15.3 *(Conjunto fundamental). Si* $\{X_1, ..., X_n\}$ *representa un conjunto de* n *vectores que son soluciones linealmente independientes del sistema (2.24) en el intervalo* I*, se le denomina conjunto fundamental de soluciones en* I*.*

Definición 2.15.4 *Si* $\{X_1, ..., X_n\}$ *representa al conjunto fundamental de soluciones del sistema (2.24) en* I*. La solución general del sistema se expresa como:*

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n,$$

donde a_i *para* $1 \leq i \leq n$ *son constantes elegidas arbitrariamente. De este modo se obtiene:*

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ . \\ . \\ . \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ . \\ . \\ . \\ x_{n2} \end{pmatrix}, ..., X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ . \\ . \\ . \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

entonces la solución escribimos como:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & . & x_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & . & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & . & x_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & . & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Es la matriz fundamental del sistema (2.24) en un intervalo I.

Ejemplo 2.15.3 *Sea el sistema lineal:*

$$\begin{aligned} x' &= x + 3y \\ y' &= 5x + 3y \end{aligned} \tag{2.31}$$

luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los vectores solución son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 3e^{6t} \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\phi(t)$ matriz fundamental de (2.31).

Teorema 2.15.2 *La matriz*

$$\phi(t) = e^{At}$$

es la matriz fundamental de (2.19) con $\phi(0) = I$, en $-\infty < t < +\infty$.

Demostración. Vea [1, Teorema 2.7, p. 57]. □

Corolario 2.15.1 *Cada solución Φ del sistema (2.19) tiene la forma*

$$\Phi(t) = e^{At}\eta, -\infty < t < +\infty$$

para un vector constante η, convenientemente elegido.

Lema 2.15.3 *Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, para todo $k > 0$:*

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\varepsilon t} t^k = 0.$$

De ahí que para cualquier polinomio $p(t)$, $e^{-\varepsilon t}p(t)$ es acotado para $t \geq 0$.

Demostración. Consideramos la función $f(t) = e^{-\varepsilon t}t^k$. Queremos mostrar que

$$f(t) \to 0 \quad \text{cuando } t \to +\infty.$$

Note que $\lim_{t\to+\infty} t^k = \infty$. Sin embargo $\lim_{t\to+\infty} e^{-\varepsilon t} = 0$. Reescribiendo $f(t)$ como

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^k}{e^{\varepsilon t}}.$$

Aplicamos L'Hôpital k veces, derivando el numerador y el denominador. Después de aplicar k veces la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k!}{e^k e^{\varepsilon/t}}$$

Como $e^{\varepsilon t} \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow +\infty$, se concluye que:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

Para cualquier polinomio $p(t)$ de la forma:

$$p(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0,$$

donde $\alpha_n \neq 0$, el término dominante será $\alpha_n t^n$ para t grande. Así, podemos escribir:

$$e^{-\varepsilon t}p(t) = e^{-\varepsilon t}\left(\alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0\right).$$

Cada término $e^{-\varepsilon t}t^k$ (donde k varía de 0 a n) se comporta como se demostró anteriormente, es decir, cada uno tiende a 0. Por lo tanto:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\varepsilon t}p(t) = 0.$$

Así, dado $M \geq 0$, $e^{-\varepsilon t}p(t)$ es acotado para $t \geq 0$.

□

Capítulo 3

Comportamiento asintótico

3.1. Estabilidad exponencial

Este capítulo es la parte central de esta investigación. Primero, veremos algunos resultados relacionados con la existencia y unicidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales representadas como $x' = A(t)x+b(t)$. A continuación, desarrollaremos el tema principal de esta tesis.

3.2. Motivación

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria:

$$x' = ax \tag{3.1}$$

donde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Observamos que si x es solución de (3.1), entonces

$$x'(t) - ax(t) = 0.$$

Así, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}x(t)) = e^{-at}x'(t) - ax(t)e^{-at} = e^{-at}(x'(t) - ax(t)) = 0.$$

Por lo tanto, $e^{-at}x(t)$ es constante, lo que implica que: $x(t) = ce^{at}$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

Recíprocamente, si $x(t) = ce^{at}$, para algún $c \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$x'(t) = ace^{at} = ax(t)$$

Concluimos que x es solución de (3.1) si y solo si, $x(t) = ce^{at}$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, consideremos ahora el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rl} \dfrac{x_1}{dt} & = a_{11}x_1(t) + ... + a_{1n}x_n(t) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \dfrac{x_n}{dt} & = a_{n1}x_1(t) + ... + a_{nn}x_n(t) \end{array} \tag{3.2}$$

que se representa en forma matricial como:

$$x' = Ax \tag{3.3}$$

donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observación 3.2.1 *Veremos algunas observaciones:*

(a) Para resolver (3.3) comenzamos con la importante observación que las soluciones están íntimamente ligadas a los autovalores y autofunciones de la matriz A.

(b) Recordemos que λ es un autovalor de A si existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. También decimos que es un autovector asociado con el autovalor λ, si $Av = \lambda v$.

(c) Es conocido que el conjunto de autovectores de A constituye un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$. La matriz real A puede tener autovalores complejos, por lo que es conveniente permitir soluciones complejas a (3.3) de la siguiente manera: Si

$$\phi(t) = u(t) + iv(t)$$

con $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una solución compleja de (3.3), resulta

$$\phi'(t) = u'(t) + iv'(t)$$

$$A\phi(t) = Au(t) + iAv(t)$$

Luego la ecuación $\phi'(t) = A\phi(t)$ implica $u'(t) = Au(t)$ y $v'(t) = Av(t)$ por lo que ϕ es solución compleja de (3.3) si y solo si, $Re\phi$ e $Im\phi$ son soluciones de (3.3).

Lema 3.2.1 *Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$. $\phi(t) = e^{\lambda t}v$ es solución de la ecuación (3.3) si y solo si, $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$ y $Av = \lambda v$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$)Si $Av = \lambda v$, entonces

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}v = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av.$$

Es decir $\dfrac{d\phi(t)}{dt} = A\phi(t)$ esto es $\phi(t) = e^{\lambda t}$ es solución de (3.3).
($\Longleftarrow$) Recíprocamente, supongamos que $\lambda = \alpha + i\beta, v = u + i\omega$, si $e^{\lambda t}v \in \mathbb{R}^n$ entonces $\beta = 0$ y $\omega = 0$ así $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Por hipótesis $\phi(t) = e^{\lambda t}v$ es solución en $\mathbb{R}^n$. Luego

$$\lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v$$

lo que implica $\lambda v = Av$. □

Recordemos la siguiente definición.

Definición 3.2.1 *Sea $A(t) = [a_{i,j}(t)]_{n\times n}$ con las componentes a_{ij} diferenciables en $[t_o, t_1] \subseteq \mathbb{R}$, $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$. La derivada de A es la función matricial definida por:*

$$A'(t) = [a'_{ij}(t)]_{n\times n}$$

A seguir consideremos el sistema

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) & = & \eta \end{array} \tag{3.4}$$

donde $A : [t_0, t_1] \to M(n, \mathbb{R})$, $b : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n\times 1}, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Observación 3.2.2 *Los resultados que seguidamente mencionaremos en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Se pueden extender naturalmente para $\mathbb{C}^{n\times n}$ y para vectores $b : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}^{n\times 1}$.*

3.3. Existencia y unicidad

Tenemos el teorema de existencia y unicidad para demostrar tanto la existencia como la unicidad de la solución para el sistema (3.4).

Teorema 3.3.1 *(Picard-Lindelóf) Considere el problema*

$$\begin{array}{rcl} x' & = & f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) & = & \eta \end{array} \tag{3.5}$$

para $f : \Omega \subset [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua, satisfaciendo la condición de Lipschitz

$$\mid f(t, x) - f(t, \bar{x}) \mid \leq L \mid x - \bar{x} \mid,\ \forall (t, x) \in \Omega$$

Para algún, $L > 0$ y $\eta \in \mathbb{R}^n$ es un vector dado, para $t \in [t_0, t_1]$ y $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces el problema propuesto tiene una única solución.

Demostración. Vea [18, p. 87]. □

Teorema 3.3.2 *(Teorema de Cauchy - Peano) Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{array}{rcl} x' & = & f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_1],\ x(t) \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) & = & \eta \end{array} \tag{3.6}$$

para $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y acotada. Entonces existe una solución al problema

Demostración. Vea [18, p. 89]. □

Lema 3.3.3 (Lema de Gronwall) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, sea $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que para todo $t \in [a, b]$*

$$x(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)x(s)ds$$

entonces

$$x(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(u)du}ds \quad \forall t \in [a, b].$$

En particular, si $f(t) = k$, k es constante

$$x(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)ds}$$

Demostración. Vea [1, Theorem 1.4, p. 31]. □

Teorema 3.3.4 *Sean $A(t)$ y $b(t)$ funciones continuas definidas en el intervalo $J = [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ entonces el problema de valor inicial (PVI)*

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) & = & \eta \end{array} \tag{3.7}$$

Tiene exactamente una solución $x(t)$ para cada $\eta \in \mathbb{R}^n$, (ó $\mathbb{C}^n$, si $A \in M(n, \mathbb{C})$ y $b : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}^{n\times 1}$), $\forall t \in J$

Si J' un subintervalo compacto de J, con $t_0 \in J'$ y

$$\mid A(t) \mid \leq A_0, \quad \mid b(t) \mid \leq \delta, \quad \forall t \in J', \quad \forall \mid \eta \mid \leq \gamma$$

Para algunos A_0, δ, γ constantes positivas, entonces $x(t)$ satisface

$$\mid x(t) \mid \leq \gamma e^{A_0|t-t_0|} + \frac{\delta}{A_0}(e^{A_0|t-t_0|} - 1), \quad \forall t \in J' \tag{3.8}$$

Demostración.

Consideremos:

$$f(t, \xi) = A(t)\xi + b(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \left|f(t,\xi) - f(t,\bar{\xi})\right| &= \left|(A(t)\xi + b(t)) - (A(t)\bar{\xi} + b(t))\right| \\ &\leq \left|A(t)(\xi - \bar{\xi})\right| \\ &\leq |A(t)| \left|\xi - \bar{\xi}\right| \\ &\leq \left(\max_{t\in[t_0,t_1]} |A(t)|\right) \left|\xi - \bar{\xi}\right|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mid f(t,\xi) - f(t,\bar{\xi} \mid \leq L \mid \xi - \bar{\xi} \mid,$$

donde $L = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \mid A(t) \mid$, así f es Lipschitziana con constante L, además f es continua en $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ porque es la combinación de las funciones continuas. Por lo tanto según el teorema (3.3.1) el PVI (3.7) admite una única solución sobre un intervalo I.

Para mostrar que $x(t)$ existe en $J = [a, b]$, será suficiente mostrar que $\mid x(t) \mid$ es acotada por una constante independiente de t. En efecto para $t \in I$ se tiene

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

Integrando de t_0 a t resulta

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} b(s)ds, \quad t \in I$$

luego

$$| x(t) | \leq | \eta | + \int_{t_0}^{t} | A(s) | | x(s) | ds + \int_{t_0}^{t} | b(s) | ds. \tag{3.9}$$

Sea ahora $t \geq t_0$ pero

$$\begin{aligned} | \eta | + \int_{t_0}^{t} b(s)ds &\leq | \eta | + (\max_{t \in J} | b(t) |) | t - t_0 | \\ &\leq | \eta | + (\max_{t \in J} | b(t) |)(b - a) \equiv k_1 \end{aligned}$$

y denote $k_2 = \max_{t \in J} | A(t) |$ resulta

$$\int_{t_0}^{t} | A(s) | | x(s) | ds \leq \max_{t \in J} | A(t) | (\int_{t_0}^{t} | x(s) | ds) = k_2 \int_{t_0}^{t} | x(s) | ds$$

luego, en (3.9)

$$| x(t) | \leq k_1 + k_2 \int_{t_0}^{t} | x(s) | ds, \quad \forall t \in I$$

Análogamente para $t \leq t_0$, obtenemos

$$| x(t) | \leq k_1 + k_2 \int_{t}^{t_0} | x(s) | ds$$

Luego, por la desigualdad de Gronwall para ambos casos;

$$| x(t) | \leq k_1 e^{k_2 |t - t_0|} \leq k_1 e^{(b-a)k_2}, \quad t \in I$$

así $x(t)$ existe en J, por un teorema de prolongamiento.
Para probar (3.8), usaremos nuevamente el Lema de Gromwall (3.3.3), se tiene de las hipótesis y (3.9):

$$\begin{aligned} | x(t) | &\leq \gamma + \delta(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} [\gamma + \delta(s - t_0)] A_0 e^{\int_s^t A_0 ds} ds \\ &\leq \gamma e^{A_0 |t - t_0|} + \frac{\delta}{A_0}(e^{A_0 |t - t_0|} - 1), \quad \forall t \in J' \end{aligned}$$

□

3.4. Estabilidad de soluciones de un sistema

La estabilidad en la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es una propiedad muy importante en el estudio del comportamiento de éstas y nos proporciona información de la similitud con el comportamiento de la solución exacta.

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R}^n$ y el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x' = f(t, x), \ t \geq t_0 \tag{3.10}$$

y D es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n \times 1}$.

Asumimos que $f(t, 0) = 0, \ \forall\, t \geq t_0$. Luego $\varphi(t) = 0$ es una solución estacionaria (ó punto de equilibrio) de (3.10).

Definición 3.4.1 *Se dice que el sistema (3.10) es estable (en el sentido de Lyapunov) alrededor del punto de equilibrio $\varphi = 0$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $t_0 \geq 0$, existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que*

$$| x(t_0) | < \delta \Rightarrow | x(t) | < \varepsilon, \ \forall\, t \geq t_0$$

Se dice que esta estabilidad es uniforme con respecto al dato inicial si $\delta = \delta(\varepsilon)$ es independiente de t_0, sobre todo el intervalo $[0, +\infty[$.

Definición 3.4.2 *Se dice que el sistema (3.10) es asintóticamente estable (alrededor del punto de equilibrio $\varphi = 0$) si es estable y además existe $\sigma = \sigma(t_0) > 0$ tal que*

$$| x(t_0) | < \sigma \Rightarrow | x(t) | \to 0 \ \ si \ \ t \to +\infty.$$

Esta estabilidad asintótica es uniforme si σ es independiente de t_0 sobre $[0, +\infty[$.

Definición 3.4.3 *Se dice que el sistema (3.10) es exponencialmente estable(alrededor del punto de equilibrio $\varphi = 0$) si toda solución $x(t)$ asintóticamente estable satisface*

$$| x(t_0) | < \delta \Rightarrow | x(t) | \leqslant \alpha e^{-\gamma t}, \ \forall \ t \geqslant t_0.$$

para algunas constantes α y γ positivos.

Ejemplo 3.4.1 *Para esta ecuación diferencial de segundo orden*

$$y''(t) + \alpha y'(t) + y(t) = e^{-t}, \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

Veamos su estabilidad, haciendo $x_1(t) = y(t)$ y $x_2 = y'(t)$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

haciendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \ \ b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

La ecuación diferencial (3.11) se traduce en

$$x' = Ax + b(t)$$

Entonces $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$ obteniendo

$$p(\lambda) \ = \ \lambda^2 \ + \ \alpha\lambda \ + \ 1$$

$$= \left[\lambda - \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right] \left[\lambda - \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right]$$

para el sistema homogéneo

$$x' = Ax \tag{3.12}$$

se verifica (será comprobado más adelante) que

i. Si $\alpha > 2$, luego $\alpha > \sqrt{\alpha^2 - 4}$, resulta que

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

Son reales negativos y distintos, luego (3.12) es asintóticamente estable,

ii. Si $\alpha = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ el sistema es asintóticamente estable,

iii. Si $0 < \alpha < 2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ y $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0$ por lo que el sistema es asintóticamente estable y

$$\mid x(t) \mid \leq ce^{-\gamma t}$$

para algún c y γ positivos

iv. Si $\alpha = 0, \lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$, el sistema es estable aunque no asintóticamente estable,

v. Si $-2 < \alpha < 0$, el sistema se dice inestable.

Observación 3.4.1 *Veremos algunas observaciones*

i. Se demuestra en teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias $x' = Ax$ es estable(asintóticamente estable) si y solo si $x' = Ax + b$ es estable(asintóticamente estable)

ii. Considere $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

note que $x(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ *es solución de $x' = B(t)x$ y que A y B tienen el valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Así $x' = Ax$ es exponencialmente estable pero $x' = B(t)x$ es inestable.*

3.5. Comportamiento asintótico de las soluciones

Ahora estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema:

$$x'(t) = Ax(t),$$

en la que A una matriz de constante real de orden $n \times n$. Comenzaremos con el caso simple

$$x'(t) = \lambda x(t), \tag{3.13}$$

donde $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la solución es $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ (donde $x_0 \in \mathbb{R}$ es dado).

i) Si $\lambda > 0$, entonces $\mid x(t) \mid = \mid x_0 \mid e^{\lambda t} \to +\infty$ si $t \to +\infty$, (se dice que la solución es inestable).

ii) Si $\lambda < 0$, entonces $\mid x(t) \mid = \mid x_0 \mid e^{\lambda t} \to 0$ si $t \to +\infty$, (se dice que la solución es asintóticamente estable)

Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = a + ib$, $Re(\lambda) = a$

$$e^{\lambda t} = e^{at}(cosbt + isenbt)$$

Observamos que si $Re\lambda < 0$, entonces

$$\mid x(t) \mid = \mid x_0 \mid\mid e^{\lambda t} \mid = \mid x_0 \mid e^{(Re\lambda)t} \to 0 \qquad \text{si} \qquad t \to +\infty$$

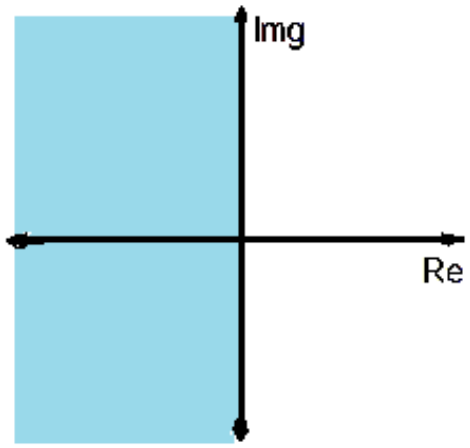


Figura 3.1: Región de estabilidad: $Re\lambda < 0$

Ahora bien, para el caso de ser A una matriz $n \times n$ sabemos que cualquier solución de (3.3) puede escribirse en la forma

$$x(t) = x_0 e^{tA}$$

Afín de analizar esta expresión, veamos el vínculo que tiene los autovalores (y autofunciones) de A con los autovalores y autofunciones de e^{tA}, esto representa en lenguaje simple un caso especial del teorema espectral para matrices (operadores acotados).

3.6. Teoría espectral

Daremos unas definiciones generales de la teoría espectral. Consideremos que H es un espacio de Hilbert y

$$\mathcal{L}(H) = \{T : H \to H/T \text{ es lineal y acotado}\}$$

Decimos que el operador lineal $T : H \to H$ es acotado si:

$$\| T \| = \sup_{|\zeta| \leq 1} \mid T\zeta \mid < +\infty$$

Observación 3.6.1 *Note que, si H es de dimensión finita (como es el caso en este trabajo de tesis), entonces todos los operadores lineales son acotados.*

Definición 3.6.1 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. El conjunto espectro de T, denotado por $\sigma(T)$ es el conjunto*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\lambda I - T \text{ no es invertible}\}.$$

Observación 3.6.2 *No se restringe la definición de espectro a los números reales para evitar que sea vació para operadores lineales continuos.*

Lema 3.6.1 *Supongamos que $\dim(H) < +\infty$. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, entonces $\sigma(T) \neq \phi$. Además $\lambda \in \sigma(T)$, si y solo si λ es un autovalor de T.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(T)$, entonces, $T - \lambda I$ no es invertible. Así, existe $v_0 \neq 0$ tal que $v_0 \in \ker(T - \lambda I)$. Esto implica que:

$$(T - \lambda I)v_0 = 0.$$

Luego, se tiene que $Tv_0 = \lambda v_0$, con $v_0 \neq 0$. Por lo tanto, λ es un valor propio de T.

Recíprocamente. Sea λ un valor propio de T, con el autovector asociado $v \in H \setminus \{0\}$, tenemos:

$$(T - \lambda I)(v) = Tv - \lambda v = 0.$$

Luego, dado que $v \neq 0$, se tiene que $v \in \ker(T - \lambda I)$. Así, $T - \lambda I$ no es invertible, es decir, $\lambda \in \sigma(T)$. □

Observación 3.6.3 *Gracias al lema, se tiene*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un autovalor de } T\}$$

e identificando T con su matriz asociada $A_T \equiv A$, se tiene que $det(A - \lambda I) = 0$ si y solo si $\lambda \in \sigma(T)$ $(= \sigma(A))$. También

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

Notamos que si λ es un autovalor de T entonces el subespacio

$$ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

Este se llama el autoespacio correspondiente a λ. Un vector no nulo $v \in ker(T - \lambda I)$, es justamente un autovector de T correspondiente al autovalor λ.

Definición 3.6.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. El conjunto resolvente de T denotado por $\rho(T)$ es el complemento del espectro de T en $\mathbb{C}$; esto es,*

$$\rho(T) = \mathbb{C} \diagdown \sigma(T)$$

Ahora observamos que, si $A \in M(n, \mathbb{C})$ con autovector v y su correspondiente autovalor λ se tiene:

$$e^{tA}v = (I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + ...)v$$

$$= (\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!})\upsilon = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\upsilon$$

$$= (\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\upsilon) = e^{\lambda t}\upsilon$$

Luego, υ es un autovector de $e^{\lambda t}$, por lo que hemos probado una version (particular) del teorema espectral.

Teorema 3.6.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ con $\dim(H) < +\infty$. Entonces*

$$\sigma(e^T) = e^{\sigma(T)} = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = e^\lambda, \text{ para algún } \lambda \in \sigma(T)\}$$

(Además, si A es la matriz asociada a T, entonces $\sigma\left(e^A\right) = e^{\sigma(A)}$)

Ejemplo 3.6.1 *Un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= -x_2 + 4x_3 \\ x^3 &= x_3 \end{aligned}$$

los coeficientes de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar la solución con la condición inicial

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \eta$$

Encontrar la matriz fundamental. Hallando el polinomio característico

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = 1 \text{ y } \lambda_2 = -1$$

con multiplicidades $n_1 = 1$ y $n_2 = 2$ para λ_1 y λ_2 respectivamente. Consideramos el sistema de ecuación algebraica

$$(A - I)x = 0 \qquad y \qquad (A - 2I)^2 x = 0$$

Para determinar lo subespacio X_1 y X_2, tenemos:

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Primero

$$(A-I)x = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)^t$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

Por lo tanto, X_1 *es el subespacio generado por* $(x_1, x_2, x_3)^t$ *con* $x_1 = 0$, $x_2 = 2x_3$ *vemos que* $dim X_1 = 1$.
Segundo

$$(A+I)^2 x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} x = 0,$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)^t$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto, X_2 *es el subespacio generado por* $(x_1, x_2, x_3)^t$ *con* $x_3 = 0$, $x_1 \neq x_2$ *vemos que* $dim X_2 = 2$. *Ahora deseamos encontrar vectores* $v_1 \in X_1$ *y* $v_2 \in X_2$ *entonces podemos escribir el vector inicial* η

$$\eta = v_1 + v_2$$

donde

$$v_1 \in X_1, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

donde α *es un escalar*

$$v_2 \in X_2, v_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para escalares β *y* γ *por lo tanto*

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\eta_1 = \beta$, $\eta_2 = 2\alpha + \gamma$ *y* $\eta_3 = \alpha$ *resolviendo para* α,β *y* γ *tenemos*

$$\alpha = n_3, \beta = \eta_1, \gamma = \eta_2 - 2\eta_3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\eta_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 - 2\eta_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tal que por (3.18). Encontramos que la solución ϕ *tal que* $\phi(0) = \eta$ *esta dado por:*

$$\phi(t) = e^{-t} v_1 + e^t (I + t(A+I)) v_2$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}0\\2\eta_3\\\eta_3\end{pmatrix} + e^{t}\left(I + t\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&4\\0&0&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\2\eta_3\\\eta_3\end{pmatrix}$$

Para encontrar la, matriz fundamental pondremos a η como, $(1,0,0)^t$,$(0,1,0)^t$,$(0,0,1)^t$ sucesivamente en esta fórmula, obtendremos las tres soluciones linealmente independiente, usamos la columna de la matriz

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix}e^t & te^t & -2te^t\\0 & e^t & 2e^{-t} - 2e^t\\0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\phi(t)$ es la matriz fundamental.

Ejemplo 3.6.2 *En este ejemplo analizaremos el sistema*

$$\begin{aligned} y_1' &= -5y_1 - 2y_2\\ y_2' &= 7y_1 + y_2\end{aligned}$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix}-5 & -2\\7 & 1\end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación

$$det(\lambda I - A) = 0$$

Hallaremos los autovalores

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{5}i \qquad y \qquad \lambda_2 = -2 - \sqrt{5}i$$

la matriz exponencial asociada a la solución del sistema es:

$$e^{tA} = e^{-2t}\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{5}}sen(\sqrt{5}t) + cos(\sqrt{5}t) & \frac{-2}{\sqrt{5}}sen(\sqrt{5}t)\\ \frac{7}{\sqrt{5}}sen(\sqrt{5}t) & -\frac{3}{\sqrt{5}}sen(\sqrt{5}t) + cos(\sqrt{5}t)\end{pmatrix}$$

luego,

$$\mid e^{tA} \mid \leq ce^{-2t} \to 0,$$

Si $t \to +\infty$ note aquí que la parte real de los autovalores son negativos.
Adicionalmente, por la regla de Cramer sabemos que

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{det(\lambda I - A)} adj(\lambda I - A)$$

Así, como información adicional, tenemos que si

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

entonces

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{p(\lambda)}\begin{pmatrix}\lambda - a_{22} & a_{12}\\a_{21} & \lambda - a_{11}\end{pmatrix}$$

donde $p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ luego

i. $Sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} = Sup\{-2\} = -2 \leq 0$

ii. $\mid (\lambda I - A)^{-1} \mid = \dfrac{1}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} Max\{|\lambda - 1|, |\lambda + 5|, 2, 7\} < +\infty$

Como veremos más adelante, al comentar sobre la situación en espacios de dimensión infinita, las condiciones de tipo *i)* y *ii)* permitirán obtener el decaimiento exponencial.

Teorema 3.6.3 *Suponga que λ es un autovalor de multiplicidad m de A y y_0 es un vector satisfaciendo $(A - \lambda I)^m y_0 = 0$ es decir que $y_0 \in ker(T - \lambda I)^m$. Si $y = y(t)$ es solución del PVI.*

$$y' = Ay$$
$$y(t_0) = y_0.$$

se cumple $(A - \lambda I)^m y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Vea [25, Theorem 3.4.1 p. 60]. □

3.7. Teorema principal

El teorema que se presenta a continuación el resultado principal de este trabajo de tesis. En pocas palabras, este teorema nos dice que si todos los autovalores de la matriz asociada al sistema de ecuaciones diferenciales, tienen parte real menor que cero, entonces el sistema es exponencialmente estable, en otras palabras, la solución decae exponencialmente.

Teorema 3.7.1 *(Estabilidad exponencial del sistema) Si todos los valores propios de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tienen parte real menor que cero (y así $\gamma = \sup\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$). Entonces cada solución $\phi(t)$ del sistema*

$$x' = Ax. \tag{3.14}$$

tiende a cero cuando $t \to +\infty$. Más precisamente, existen constantes $\bar{k} > 0$ y $\delta > 0$ tal que

$$\mid \phi(t) \mid \leq \bar{k} e^{-\delta t}, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Demostración. Sabemos por el corolario (2.15.1) que

$$\phi(t) = e^{At}\eta, \ \ -\infty < t < +\infty, \tag{3.15}$$

para un vector convenientemente elegido η. Denotemos con $\lambda_1, ..., \lambda_m$ los autovalores de A, con $\gamma_1, ..., \gamma_m$ sus respectivas multiplicidades. Por el Teorema (2.5.4)

$$\eta = \upsilon_1 + \upsilon_2 + ... + \upsilon_m.$$

para υ_j conveniente en

$$ker(A - \lambda_j I)^{\gamma_j}, \ \ 1 \leq j \leq m.$$

Así, en particular

$$(A - \lambda_j I)^{\gamma_j} \upsilon_j = 0 \ \ j = 1, 2, ..., m \tag{3.16}$$

y

$$e^{tA}\eta = e^{tA}\sum_{j=1}^{m} \upsilon_j = \sum_{j=1}^{m} e^{tA}\upsilon_j \tag{3.17}$$

Pero

$$e^{tA}\upsilon_j = e^{t\lambda_j}[e^{t(A-\lambda_j I)}\upsilon_j]$$

$$= e^{t\lambda_j}[I + t(A-\lambda_j I) + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda_j I)^2 + ... + \frac{t^{\gamma_j - 1}}{(\gamma_j - 1)!}(A-\lambda_j I)^{\gamma_j - 1}]\upsilon_j$$

$$= e^{t\lambda_j}[\sum_{k=0}^{\gamma_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k]\upsilon_j$$

Luego,

$$e^{tA}\upsilon_j = e^{t\lambda_j}[\sum_{k=0}^{\gamma_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k]\upsilon_j \tag{3.18}$$

Aquí observamos que los vectores

$$\omega_j = (A-\lambda_j I)^p \upsilon_j, \;\; p = 0, 1, ..., \gamma_{j-1}$$

pertenecen a $E(\lambda_j)$ debido a que

$$(A-\lambda_j)^{\gamma_j}\omega_j = (A-\lambda_j I)^{\gamma_j}(A-\lambda_j I)^p \upsilon_j = (A-\lambda_j I)^{\gamma_j + p}\upsilon_j = 0.$$

Por lo que $e^{tA}\upsilon_j \in E(\lambda_j)$, para $t \in \mathbb{R}$, luego de (3.17) y (3.18)

$$\phi(t) = e^{tA}\eta = \sum_{j=1}^{m} e^{t\lambda_j}\left[\sum_{k=0}^{\gamma_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k\right]\upsilon_j.$$

y

$$\mid \phi(t) \mid \leq \sum_{j=1}^{m} e^{Re(t\lambda_j)} \mid \sum_{k=0}^{\gamma_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k \upsilon_j \mid$$

$$\mid \phi(t) \mid \leq \sum_{j=1}^{m} e^{Re(t\lambda_j)} \sum_{k=0}^{\gamma_{j-1}} a_k t^k \tag{3.19}$$

donde $a_0 = \mid \upsilon_j \mid$, $a_k = \dfrac{\mid (A-\lambda_j I)^k \upsilon_j \mid}{k!}$, $k = 1, 2, , ..., \gamma_{j-1}$.

Por otro lado, del lema (2.15.3) $\forall \varepsilon > 0, \;\; \forall k > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\varepsilon t} t^k = 0, \;\; \forall t \geqslant 0$$

y para cualquier polinomio $p(t) = \sum_{k=0}^{s} a_k t^k$, existe $M > 0$ tal que

$$\mid e^{-\varepsilon t} p(t) \mid \leqslant M$$

ahora escogiendo un $\delta > 0$ tal que

$$-\varepsilon_j = Re(\lambda_j) + \delta, \;\; \forall 1 \leqslant j \leqslant m$$

resulta

$$e^{tRe(\lambda_j)}p(t) = e^{-\varepsilon_j t}p(t)e^{-\delta t} \leqslant M_j e^{-\delta t}$$

Por lo tanto, de (3.19)

$$\mid \phi(t) \mid \leqslant \sum_{j=0}^{m} M_j e^{-\delta t} \leqslant \bar{k}e^{-\delta t}.$$

donde $\bar{k} = \sum_{j=0}^{m} M_j > 0$.

Obviamente, de la anterior acotación

$$\phi(t) \to 0, \text{ si } t \to +\infty.$$

□

Ejemplo 3.7.1 *Analicemos dos masas m_1 y m_2, que están conectadas a través de un resorte con constante k_2 y a las paredes mediante resortes con constantes k_1 y k_3 respectivamente. Denotamos $u(t)$ como el desplazamiento de m_1 desde su posición de equilibrio en el instante t, y $v(t)$ como el desplazamiento de m_2 desde su posición de equilibrio en el mismo instante t (consideramos la dirección positiva hacia la derecha) y c representa el coeficiente de fricción de la superficie en la cual las masas se deslizan. Utilizando la segunda ley de Newton, se genera.*

$$\begin{aligned} m_1u'' &= -cu' - (k_1 + k_2)u + k_2v \\ m_2v'' &= -cv' - (k_2 + k_3)v + k_2u. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Contamos con un conjunto de ecuaciones diferenciales de orden dos. Para transformarlo en un conjunto de ecuaciones de orden uno, efectuamos la siguiente sustitución de variables: $x_1 = u$, $x_2 = u'$, $x_3 = v$ y $x_4 = v'$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Haciendo que todos los parámetros sean iguales a uno, en ese caso tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Esto es,

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 3)$$

Los autovalores son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i, \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Luego, el espectro de A es:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$$

Ahora hallaremos los autovectores correspondientes a los autovalores obtenidos. Para cada autovalor λ, buscamos los autovectores v resolviendo la siguiente ecuación:

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Esto implica que debemos encontrar los vectores v que satisfacen esta ecuación para cada uno de los autovalores.

a) *Si* $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$ *y*

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i \end{pmatrix}$$

Usando $(A - \lambda_1 I)_{v_1} = 0$ *donde* I *un matriz identidad de orden* 4×4 *y*

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos un sistema de tres ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} x_1 + (-\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}i}{6})x_4 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 + (-\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}i}{6})x_4 &= 0 \end{aligned}$$

calculando el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$ *es*

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}i}{6} \\ -1 \\ -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}i}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

podemos usar propiedades de autovector complejos entonces el otro autovector sera el conjugado de v_1.

b) *Entonces el autovector asociado para* $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}i}{2}$ *haciendo* $(A - \lambda_2 I)_{v_2} = 0$, *lo mismo que lo anterior obtenemos*

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}i}{6} \\ -1 \\ -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}i}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) *Si* $\lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$$

Obtenemos un sistema de tres ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} x_1 + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})x_4 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \\ x_3 + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})x_4 &= 0 \end{aligned}$$

calculando el autovector asociado al autovalor $\lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ *es*

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

podemos usar propiedades de autovector complejos entonces el otro autovector sera el conjugado de v_3.

d) *Entonces el autovector asociado para* $\lambda_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$ *haciendo* $(A - \lambda_4 I)_{v_4} = 0$, *lo mismo que lo anterior obtenemos*

$$v_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces, la matriz P formado por los autovectores es el siguiente

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}i}{6} & \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}i}{6} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}i}{6} & -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}i}{6} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de P es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{11}i}{22} & -\frac{11}{44} - \frac{\sqrt{11}i}{44} & \frac{3\sqrt{11}i}{22} & \frac{11}{44} + \frac{\sqrt{11}i}{44} \\ \frac{3\sqrt{11}i}{22} & -\frac{11}{44} + \frac{\sqrt{11}i}{44} & -\frac{3\sqrt{11}i}{22} & \frac{11}{44} - \frac{\sqrt{11}i}{44} \\ \frac{\sqrt{3}i}{6} & \frac{3}{12} + \frac{\sqrt{3}i}{12} & \frac{\sqrt{3}i}{2} & \frac{3}{12} + \frac{\sqrt{3}i}{12} \\ -\frac{\sqrt{3}i}{6} & \frac{3}{12} - \frac{\sqrt{3}i}{12} & -\frac{\sqrt{3}i}{6} & \frac{3}{12} - \frac{\sqrt{3}i}{12} \end{pmatrix}$$

La matriz D

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

Se prueba $A = PDP^{-1}$ Para hallar la matriz fundamental, usaremos operaciones de matriz por bloque así evita operaciones innecesarias, para eso hacemos lo siguiente: Sea las matrices

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}i}{6} & \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}i}{6} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}i}{2} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

entonces la matriz P,D quedaría como:

$$P = \begin{pmatrix} B & C \\ -B & C \end{pmatrix} \qquad y \qquad D = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

Hallaremos la matriz P^{-1} inversa de P haremos $PP^{-1} = I$ sea

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} M & N \\ Q & R \end{pmatrix}$$

tendremos

$$\begin{pmatrix} B & C \\ -B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & N \\ Q & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} BM+CQ & BN+CR \\ -BM+CQ & -BN+CR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Obtenemos los siguientes resultados por igualada de matrices

$$2CQ = I, 2CR = I, 2BM = I, 2BN = -I$$

Haciendo operaciones tendremos

$$Q = \frac{C^{-1}}{2}, R = \frac{C^{-1}}{2} \rightarrow Q = R$$

también,

$$M = \frac{B^{-1}}{2}, N = -\frac{B^{-1}}{2} \rightarrow M = -N$$

entonces la matriz P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{B^{-1}}{2} & -\frac{B^{-1}}{2} \\ \frac{C^{-1}}{2} & \frac{C^{-1}}{2} \end{pmatrix}$$

se prueba $PP^{-1} = I$. *como* $A = PDP^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ -B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{B^{-1}}{2} & -\frac{B^{-1}}{2} \\ \frac{C^{-1}}{2} & \frac{C^{-1}}{2} \end{pmatrix}$$

haciendo $H_1 = e^H, H_2 = e^S$ *tendremos*

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} B & C \\ -B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{B^{-1}}{2} & -\frac{B^{-1}}{2} \\ \frac{C^{-1}}{2} & \frac{C^{-1}}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} BH_1 & CH_2 \\ -BH_1 & CH_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1} \\ C^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

quedando

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} BH_1B^{-1} + CH_2C^{-1} & -BH_1B^{-1} + CH_2C^{-1} \\ -BH_1B^{-1} + CH_2C^{-1} & BH_1B^{-1} + CH_2C^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Haciendo

$$z = a + bi, \overline{z} = a - bi, H_1 = e^{at}e^{ImZ}, H_2 =^{at} e^{-ImZ}$$

entonces

$$B = \begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \frac{i}{2b}\begin{pmatrix} -1 & -\overline{z} \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} e^{z} & 0 \\ 0 & e^{\overline{z}} \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} e^{Im(z)} & 0 \\ 0 & e^{-Im(\overline{z})} \end{pmatrix}$$

entonces

$$BH_1B^{-1} = \frac{ie^{at}}{2b} \begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{Im(z)} & 0 \\ 0 & e^{-Im(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\overline{z} \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ie^{at}}{2b} \begin{pmatrix} \overline{z}e^{-Im(z)} - ze^{Im(z)} & -z\overline{z}e^{Im(z)} + z\overline{z}e^{-Im(z)} \\ e^{Im(z)} - e^{-Im(z)} & \overline{z}e^{Im(z)} - ze^{-Im(z)} \end{pmatrix}$$

operando se tiene

$$BH_1B^{-1} = \frac{ie^{at}}{2b} \begin{pmatrix} -2i(bcosbt + asenbt) & -2iz\overline{z}senbt \\ 2isen(bt) & 2i(asenbt - bcosbt) \end{pmatrix}$$

$$BH_1B^{-1} = \frac{e^{at}}{b} \begin{pmatrix} bcosbt + asenbt & z\overline{z}senbt \\ -senbt & bcosbt - asenbt \end{pmatrix}$$

Reemplazando $a = \frac{1}{6}, b = \frac{\sqrt{11}}{2}, Im(z) = \frac{\sqrt{11}}{2}$ *así*

$$BH_1B^{-1} = e^{-t/2} \begin{pmatrix} cos\frac{\sqrt{11}t}{2} + \frac{\sqrt{11}}{11}sen\frac{\sqrt{11}t}{2} & \frac{2\sqrt{11}t}{11}sen\frac{\sqrt{11}t}{2} \\ -\frac{6\sqrt{11}}{11}sen\frac{\sqrt{11}t}{2} & \frac{\sqrt{11}}{11}sen\frac{\sqrt{11}}{2} + cos\frac{\sqrt{11}t}{2} \end{pmatrix}$$

de igual forma con CHC^{-1}*, como* C *tiene la forma*

$$C = \begin{pmatrix} -z & -\overline{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C = -\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tiene la forma de la matriz B *ya no es necesario operar*

$$CH_2C^{-1} = -\frac{ie^{at}}{2b} \begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{Im(z)} & 0 \\ 0 & e^{-Im(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\overline{z} \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

$$CH_2C^{-1} = -\frac{e^{at}}{b} \begin{pmatrix} bcosbt + asenbt & z\overline{z}senbt \\ -senbt & bcosbt - asenbt \end{pmatrix}$$

Para este caso el

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, \overline{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

así

$$CH_2C^{-1} = e^{-t/2} \begin{pmatrix} cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2}sen\frac{\sqrt{3}t}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}t}{2} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}}{3} + cos\frac{\sqrt{3}t}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente en la ecuación (3.21)

$$e^{At} = \frac{e^{-t/2}}{2} \begin{pmatrix} a(1,1) & a(1,2) \\ a(2,1) & a(2,2) \end{pmatrix}$$

haciendo $a = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$ *y notar que* $a(1,1) = a(2,2),\ a(1,2) = a(2,1)$ *donde*

$$a(1,1) = \begin{pmatrix} cos\frac{\sqrt{11}t}{2} + asen\frac{\sqrt{11}t}{2} + cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2}sen\frac{\sqrt{3}t}{2} & 2asen\frac{\sqrt{11}t}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}t}{2} \\ -6asen\frac{\sqrt{11}t}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}}{2} & asen\frac{\sqrt{11}}{2} + cos\frac{\sqrt{11}t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}}{3} + cos\frac{\sqrt{3}t}{2} \end{pmatrix}$$

$$a(1,2) = \begin{pmatrix} -cos\frac{\sqrt{11}t}{2} - asen\frac{\sqrt{11}t}{2} + cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2}sen\frac{\sqrt{3}t}{2} & -2asen\frac{\sqrt{11}t}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}t}{2} \\ 6asen\frac{\sqrt{11}t}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}}{2} & -asen\frac{\sqrt{11}}{2} - cos\frac{\sqrt{11}t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}}{3} + cos\frac{\sqrt{3}t}{2} \end{pmatrix}$$

luego

$$\mid e^{tA} \mid \leq ce^{-t/2} \to 0, \quad si\ t \to +\infty$$

Capítulo 4

Una generalización del resultado principal

Aquí mencionaremos una generalización importante del teorema (3.7.1) aplicada al estudio del comportamiento asintótico de las soluciones a ecuaciones de evolución, descritas por operadores lineales definidos en espacios de Hilbert (de dimensión finita o infinita) como son los espacios de funciones con algún orden de derivabilidad (por ejemplo los espacios de Sobolev), así nuestro trabajo es la base motivadora para resultados más potentes en la investigación de las propiedades cualitativas de las soluciones de dichas ecuaciones.

Consideremos H un espacio de Hilbert, con $A : D(A) \subseteq H \to H$, $U_0 \in H$ como operador lineal. Tomemos en cuenta el sistema evolutivo:

$$\begin{vmatrix} U'(t) &= AU(t) \\ U(0) &= U_0 \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

denominado problema de Cauchy abstracto. Nuestro problema consiste en hallar (y estudiar las propiedades asintóticas de) una función $U \in C([0, +\infty[, H) \cap C^1([0, +\infty[, H)$ tal que para $t > 0$, $U(t) \in D(A)$ y (4.1) se verifica (la derivada y los espacios funcionales serán precisados en el apéndice).
Observemos que al menos formalmente el sistema (4.1) tiene semejanza con el sistema (3.14), por lo que esperamos que una solución formal de (4.1) está relacionada con la función exponencial en algún sentido. Recordemos que eventualmente H puede ser de dimensión infinita y el operador A podría no ser acotado.

Profundizando un poco en la función exponencial sabemos que cuando $A \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$ función $E : [0. + \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $E(t) = e^{tA}$ satisface:

a). $E(0) = 1$,

b). $E(t + s) = E(t)E(s)$,

c). $\lim_{t \to 0^+} E(t) = 1$.

Generalizando estas ideas en el espacio de Hilbert H. Denotamos el siguiente, como $\mathcal{L}(H) = \{T : H \to H : T$ es lineal y continua $\}$ con la norma :

$$|T|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{| Tx |}{| x |}$$

resulta ser un espacio normado completo. También esta norma induce un producto escalar $\mathcal{L}(H)$, así $\mathcal{L}(H)$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 4.0.1 *Sea* $E : [0, +\infty[\to \mathcal{L}(H)$ *una función que cumple las siguientes condiciones:*

a). $E(0) = I$;

b). $E(t + s) = E(t)E(s)$;

c). $\mid E(t) - I \mid \to 0$, *si* $t \to 0^+$.

Si y solo si

$$E(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \quad para \quad A \in \mathcal{L}(H).$$

Obviamente el teorema (4.0.1) también es válido en espacio de dimensión finita y motiva un conocimiento de semigrupo de operadores lineales.

Definición 4.0.1 *Se dice que la aplicación* $S : [0, +\infty[\to \mathcal{L}(H)$ *es un semigrupo de operadores lineales acotados de* H, *si:*

a). $S(0) = I$, I *operador identidad de* $\mathcal{L}(H)$;

b). $S(t + s) = S(t)S(s)$; *para todo* $t, s \in [0, +\infty[$;
Si además de a) y b), S *satisface*

c). $\lim_{t \to 0^+} |(S(t) - I)x|_H = 0$, *para todo* $x \in H$.

se dice que S *es un semigrupo de clase* C_0.

Definición 4.0.2 *Sea* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *un semigrupo de clase* C_0. *El operador lineal* $A : D(A) \subseteq H \to H$ *definido por:*

$$D(A) = \left\{ x \in H : \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \, existe \right\}$$

y

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \ \forall x \in D(A)$$

es llamado el generador infinitesimal o simplemente como generador del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq o}$ *cuando* A *es el generador del semigrupo* C_0, $\{S(t)\}_{t \geq o}$, *denotamos* $S(t) = e^{tA}$.

Observación 4.0.1 *Gracias al teorema (4.0.1) concluimos que para* $A \in \mathcal{L}(H)$ *(y en particular cuando* $A \in M(n, \mathbb{C})$*)* $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ *es un semigrupo de clase* C_0. *Así mismo:*

$$\left| \frac{e^{hA} - I}{h} x - Ax \right|_{\mathcal{L}(H)} \leq \Big| \, A \mid (e^{h|A|} - 1) \mid x \, \Big|_H \to 0, \qquad si \qquad h \to 0.$$

Luego el generador del semigrupo $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ *es* A.

Teorema 4.0.2 *consideremos $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ como un semigrupo perteneciente a la clase C_0 y A como su generador infinitesimal. Entonces, para cualquier $x \in D(A), S(t)x \in D(A)$ y*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

En particular, $U(t) = S(t)x$ satisface:

$$\begin{vmatrix} U'(t) &=& AU(t) & \forall t \geq 0 \\ U(0) &=& x & \forall x \in D(A). \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

Demostración. Ver [21]. □

Observación 4.0.2 *Se demuestra (ver Pazy [21])que si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0, existen constantes $w \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que*

$$\mid S(t) \mid_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{wt}, \ \forall t \geq 0.$$

Cuando $w = 0$ y $M = 1$, se dice que $\{S(t)\}_{\mathcal{L}(H)}$ es un semigrupo C_0 de contracciones.

Definición 4.0.3 *Sea $A : D(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal, con $\overline{D(A)} = H$. Decimos que A es disipativo si para cualquier $x \in D(A)$*

$$Re(Ax, x) \leq 0.$$

Definición 4.0.4 *Decimos que el semigrupo $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable si se presentan constantes $\alpha > 0$ y $M \geq 1$ de modo que:*

$$\mid e^{At} \mid_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{-\alpha t}, \ \forall t \geq 0.$$

En este trabajo se usara el teorema de Lumer- Phillips para determinar el generador infinitesimal de un semigrupo. Combinándolo con el teorema (4.0.5) tendremos una herramienta para verificar la existencia de soluciones al problema (4.1).

Teorema 4.0.3 *(Lumer- Phillips) Sea $A : D(A) \subseteq H \to H$ con $\overline{D(A)} = H$. Si A es disipativo y existe $\lambda_0 \geq 0$ donde $R(\lambda_0 I - A) = H$, por lo tanto A es el generador infinitesimal de los semigrupos C_0 con contracciones en H.*

Demostración. Ver [21] □

Teorema 4.0.4 *Consideremos H un espacio de Hilbert y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ el semigrupo generado por A, por lo que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones si únicamente si A es disipativo.*

Demostración. Ver [19] □

Teorema 4.0.5 *Sea A un generador infinitesimal de un semigrupo C_0 entonces, para cada $x \in D(A)$, el problema de Cauchy (3,16) tiene una única solución $U(t) = S(t)x$, en la clase*

$$U \in C([0, \infty[, H) \cap C^1([0, \infty[, H)$$

tal que $U(t) \in D(A)$ $\forall t > 0$.

Demostración. Ver [29] □

Como ya se dijo, los teoremas (4.0.3) y (4.0.5) nos ha permitido verificar la existencia de soluciones regulares del problema (4.2) para investigar el decaimiento exponencial de la (energía)$E(t)$ del sistema, sera suficiente establecer la estimativa

$$E(t) \leq ce^{-wt},\ \forall t \geq 0$$

o de manera similar establecer la estabilidad exponencial del semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ asociado, esto es

$$\mid S(t) \mid_{\mathcal{L}(H)} \leq ce^{-wt},\ \forall t \geq 0$$

Al respecto tenemos los siguientes teoremas:

Teorema 4.0.6 *En un espacio de Hilbert, se considera $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ un semigrupo C_0 . Por lo tanto:*
$\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable, si únicamente si, se satisfacen:

i. $sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$;

ii. $\sup\limits_{Re\lambda \geq 0} \mid (\lambda I - A)^{-1} \mid < +\infty$.

Demostración. Ver [13] □

Teorema 4.0.7 *En un espacio de Hilbert, se considera $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ un semigrupo C_0 de contracciones. así pues, si y solo si cumplen, $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable,*

i. $i\mathbb{R} \equiv \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A)$;

ii. $\lim\limits_{|\beta|\to+\infty} sup \mid (\lambda I - A)^{-1} \mid < +\infty$.

Demostración. Ver [11]. □

Liu y Sheng demuestran que, bajo la condición de que $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones en un espacio de Hilbert, los teoremas, (4.0.6) y (4.0.7) resultan ser equivalentes.

Ejemplo 4.0.1 *Consideremos la ecuación de la onda con disipación friccional*

$$\begin{vmatrix} u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t & = 0 & en]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0,t) & = 0 & = u(L,t)\ \ \forall t \geq 0 \\ u(x,0) & = u_0(x) & u_t(x,0)) = u_1(x) \qquad x \in [0, L[\end{vmatrix} \tag{4.3}$$

Denotando $v = u_t$ y

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

se tiene

$$U' = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = AU.$$

esto es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha I \end{bmatrix}$$

Luego (4.3) se expresa $U' = AU$. Construimos el espacio de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con el producto escalar

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)_H = \int_0^L u_1 u_2 dx + \int_0^L v_1 v_2 dx$$

y $D(A) = (H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

Observemos que $\overline{D(A)} = H$. *También*

$$(AU, U)_H = \left(\begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H$$

$$= \int_0^L v_x u_x dx + \int_0^L (u_{xx} - \alpha v) v dx$$

$$= \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} v - \alpha v^2) dx = -\alpha \int_0^L v^2 dx \leq 0$$

donde en la ultima igualdad hemos aplicado integración por partes y las condiciones de frontera. Luego $(AU, U)_H \leq 0$, *por lo que* A *es disipativo también se prueba que:*

$$R(I - A) = H_0^1(\Omega) x L^2(\Omega) = H.$$

Así en el teorema (4.0.3), A *es generador de un semigrupo de contracciones* $\{S(tA)\}_{t \geq 0}$ *y* $U(t) = S(t)u_0$ *es solución de (4.3).*

Para probar el decaimiento exponencial se aplica el teorema 4.0.7 en la primera parte se supone que la condición i) es falsa, luego se tendrá la inclusión

$$\{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \sigma(A)$$

y se llega a una contradicción.

Para verificar ii), nuevamente se procede por contradicción, es decir, suponemos que

$$\lim_{|\beta| \to +\infty} sup \mid (i\beta I - A)^{-1} \mid = +\infty.$$

Por lo que hay, una sucesión de vectores

$$U_\gamma \in D(A) \text{ con } \mid U_\gamma \mid_H = 1$$

Se usa la propiedad de ser A disipativo, y se llega aún absurdo. En consecuencia existen $C > 0$ y $\omega > 0$ tal que:

$$\mid S(t) \mid_{\mathcal{L}(H)} \leq Ce^{-\omega t}$$

por tanto,

$$\mid U(t) \mid_H \leq \mid S(t)U_0 \mid_H \leq C \mid U_0 \mid e^{-\omega t}.$$

Para detalles de la prueba de este decaimiento ver [24].

Capítulo 5

Cálculo numérico

En este capitulo desarrollamos el algoritmo de Putzer (ver sección 5.1), este método permite calcular e^{At} sin necesidad de pasar por la forma canónica de Jordan. El algoritmo de Putzer también permite mostrar la estabilidad de la solución de $x' = Ax$ cuando todos los autovalores de A tienen parte real negativa, (ver sección5.2). Finalmente en la sección (5.3) implementaremos el algoritmo de Putzer en el programa MATLAB.

5.1. Algoritmo de E.J.Putzer

Se presenta formalmente el algoritmo de Putzer, su desarrollo y aplicación en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, para ello se toma en cuenta el sistema lineal de ecuaciones diferenciales con valores iniciales de la forma:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t),\ t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Donde $A \in M(n, \mathbb{R})$. La solución de ecuación (5.1) se reduce a hallar la matriz fundamental e^{tA}. El método se basa en un importante teorema del álgebra lineal, el **teorema de Cayley-Hamilton**.

Teorema 5.1.1 *(Cayley-Hamilton) Toda matriz de orden nxn que satisface su ecuación característica dada por: $P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$, es decir, si*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right)$$

entonces

$$P_A(A) = (-1)^n \left(A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \ldots + a_{n-1}A + a_nI\right) = 0$$

Demostración. Sea $(\lambda I - A)^{-1}$ inversa de la matriz $\lambda I - A$, entonces

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(\lambda I - A)} \,.\, \text{adj}(\lambda I - A)$$

$$I.\det(\lambda I - A) = (\lambda I - A).\,\text{adj}(\lambda I - A)$$

$$I.P_A(\lambda) = (\lambda I - A).\,\text{adj}(\lambda I - A)$$

La matriz $adj(\lambda I - A)$ tiene entradas que son cofactores de $(\lambda I - A)$. Cada cofactor es un determinante de orden $(n-1) \times (n-1)$, por lo que es un polinomio en λ de grado a lo más $n-1$. La matriz adjunta se puede expresar como:

$$adj(\lambda I - A) = C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + C_1\lambda + C_0$$

para $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ que son matrices cuadradas de orden $n \times n$ (independientes de λ).

Remplazando

$$I.p(\lambda) = (\lambda I - A)(C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + C_1\lambda + C_0)$$

$$= C_{n-1}\lambda^n + (C_{n-2} - AC_{n-1})\lambda^{n-1} + (C_{n-3} - AC_{n-2})\lambda^{n-2} + \cdots + (C_0 - AC_1)\lambda - AC_0$$

para $\lambda = A$ resolviendo, luego

$$P_A(A) = 0$$

así $P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$. □

El teorema E.J.Putzer, fundamentado en el teorema de Cayley-Hamilton.

Teorema 5.1.2 *Sea A una matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$ o $(\mathbb{C}^{n\times n})$ y sean sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en cualquier orden y sin considerar multiplicidades. Defínase el vector n-componente dependiente del tiempo $r(t)$ mediante la sucesión de problemas de valor inicial de primer orden*

$$r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t),\ r_1(0) = 1;\ r_j'(t) = \lambda_j r_j(t) + r_{j-1}(t), \quad r_j(0) = 0,\ j = 2, 3, \ldots, n. \quad (5.2)$$

Defínase las matrices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ recursivamente mediante las fórmulas

$$P_0 = I, \qquad P_j = \prod_{k=1}^{j}(A - \lambda_k I), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (5.3)$$

Entonces

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)P_j. \quad (5.4)$$

Demostración. Definamos

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)P_j.$$

Nótese que $\Phi(0) = I$.

$$\Phi(t) = r_1(t)P_0 + r_2(t)P_1 + r_3(t)P_2 + r_4(t)P_3 + \ldots + r_n(t)P_{n-1}$$

Su derivada respecto de t es

$$\Phi'(t) = r_1'(t)P_0 + r_2'(t)P_1 + r_3'(t)P_2 + r_4'(t)P_3 + \ldots + r_n'(t)P_{n-1}$$

de la ecuación (5.2) reemplazando tenemos

$$\dot{\Phi} = \sum_{j=0}^{n-1} \dot{r}_{j+1}(t) P_j = \lambda_1 r_1 P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{j+1} r_{j+1} + r_j) P_j. \tag{5.5}$$

Por otro lado,

$$A\Phi = r_1(t) A P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} r_{j+1}(t) A P_j.$$

Ahora,

$$AP_j = P_{j+1} + \lambda_j P_j \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

por definición. Por lo tanto,

$$A\Phi = r_1(t) A P_0 + (\lambda_2 r_2 + r_1) P_1 + \cdots + (\lambda_n r_n + r_{n-1}) P_{n-1} + r_n P_n. \tag{6}$$

(5.5) coincide término a término con la expresión (6), excepto por el último término. Pero recordamos que por (5.3)

$$P_n = 0$$

por el teorema de Cayley–Hamilton, de modo que

$$\dot{\Phi} = A\Phi \quad \text{y} \quad \Phi(0) = I;$$

Esto quiere decir que Φ es solución de

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= I \end{aligned} \tag{5.6}$$

desde que e^{At} es solución de (5.6) por unicidad de solución de (5.6) se sigue que

$$e^{At} = \Phi(t)$$

por tanto queda demostrado (5.4). □

Observación 5.1.1 *Recordar:*

a. Las ecuaciones (5.2) anteriores pueden reescribirse en forma integral:

$$r_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad r_{j+1}(t) = e^{\lambda_{j+1} t} \int_0^t e^{-\lambda_{j+1} s} r_j(s)\, ds \tag{5.7}$$

para $j = 1, \ldots, n-1$.

Un ejemplo, resuelto analíticamente usando el algoritmo de E.J.Putzer, luego comparar este el resultado con el resultado que resultara de usar el algoritmo que se implementara en Matlab.

Ejemplo 5.1.1 *Sea un sistema ecuación diferencial de dos ecuaciones dado por:*

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_2 \\ x_2' &= -x_1 - 4x_2 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Primero llamemos A a la matriz asociada al sistema (5.8) como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico como:

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -2 + i$ y $\lambda_2 = -2 - i$. Usaremos el teorema E.J.Putzer para $\lambda_1 = -2 + i$ como $r_1' = \lambda_1 r_1$, con $r_1(0) = 1$ tendríamos

$$r_1'(t) = (-2 + i)r_1$$
$$r_1(t) = e^{(-2+i)t}.e^C$$

para $r_1(0) = 1$

$$r_1(t) = e^{(-2+i)t}, \qquad e^C = 1$$

Ahora para $r_2'(t) = \lambda_2 r_2(t) + r_1(t)$ como $\lambda_2 = -2 - i$ tendremos

$$r_2'(t) = (-2 - i)r_2(t) + e^{(-2+i)t}$$

$$r_2'(t) + (2 + i)r_2(t) = e^{(-2+i)t}$$

calculando

$$r_2(t) = \frac{e^{(-2+i)t}}{2i} + C.e^{-(2+i)t}$$

para $r_2(0) = 0$ entonces $C = -\dfrac{1}{2i}$

$$r_2(t) = \frac{e^{(-2+i)t}}{2i} - \frac{e^{-(2+i)t}}{2i}$$

finalmente

$$r_2(t) = e^{-2t}sent$$

Ahora hallaremos la matriz fundamental e^{At}, que tiene la forma de :

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1} P_j(A)$$

Para nuestro caso será:

$$e^{At} = r_1 P_0(A) + r_2 P_1(A)$$

$$e^{At} = e^{(-2+i)t}.I + e^{-2t}sent(A - (-2 + i).I)$$

donde $P(0)A = I$

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{pmatrix} cost + 2sent & 5sent \\ -sent & cost - 2sent \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.1.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donde el polinomio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = -(\lambda + 3)(\lambda - 3)^2$, *el polinomio minimal es* $M(\lambda) = \lambda^2 - 9$, *si ordenamos las raíces características como* $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$, *haciendo cálculo se tiene*

$$r_1 = e^{3t}, \;\; r_2 = te^{3t}, \;\; r_3 = \frac{1}{6}te^{3t} - \frac{1}{36}e^{3t} + \frac{1}{36}e^{-3t}.$$

donde

$$P_0 = I, \;\; P_1 = A - 3I, \;\; P_2 = (A - 3I)^2$$

podemos formar la expresión e^{At} *dada en la ecuación (5.4) anterior. Separar estos en potencias de* A *conduce a la fórmula*

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-3t})I + \frac{1}{6}(e^{3t} - e^{-3t})A \\ &= \cosh(3t)I + \frac{1}{3}\sinh(3t)A \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}senh(3t) + cosh(3t) & \frac{2}{3}senh(3t) & -\frac{1}{3}senh(3t) \\ \frac{2}{3}senh(3t) & -\frac{1}{3}senh(3t) + cosh(3t) & \frac{2}{3}senh(3t) \\ -\frac{1}{3}senh(3t) & \frac{2}{3}senh(3t) & \frac{2}{3}senh(3t) + cosh(3t) \end{pmatrix}$$

5.2. Estabilidad usando el algoritmo de Putzer

En esta sección, usando el algoritmo de Putzer demostraremos la estabilidad de sistemas lineales con autovalores con parte real negativa, (ver corolario 5.2.1) cabe mencionar que este ya fue abordado en el teorema(3.7.1).

Teorema 5.2.1 *Ordénense los autovalores* $\{\lambda_j\}$ *de modo que sus partes reales formen una sucesión no decreciente; es decir, si* $\lambda_j = \rho_j + i\sigma_j$, *entonces* $\rho_j \leq \rho_{j+1}$ *para todo* j. *Bajo este orden, se cumple la siguiente desigualdad:*

$$|r_j(t)| \leq \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\rho_j t} \quad \textit{para } t > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.10}$$

Demostración. Como para $j = 1, r_1(t) = e^{\lambda_1 t}$. Supongamos que se cumple para j. Entonces, por la ecuación (5.7), usando (5.2), haciendo cálculos tenemos

$$|r_{j+1}(t)| \leq e^{\rho_{j+1}t} \int_0^t e^{-\rho_{j+1}s} \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} e^{\rho_j s}\, ds. \tag{5.11}$$

Los autovalores están ordenados ascendentemente, esto hace que en la integral el factor

$$e^{(\rho_j - \rho_{j+1})s} \leq 1 \tag{5.12}$$

porque el ordenamiento de los autovalores hace que el exponente sea negativo. Por tanto

$$|r_{j+1}(t)| \leq e^{\rho_{j+1}t}\frac{1}{(j-1)!}\int_0^t s^{j-1}\,ds = \frac{t^j}{j!}e^{\rho_{j+1}t}, \tag{5.13}$$

demostrando la afirmación por inducción. □

Corolario 5.2.1 *Considere el sistema*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde A tiene todos sus autovalores con parte real negativa. Si $x(t)$ es solucion de (5.14), $x(t) = e^{At}x_0$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} x(t) = 0$$

Demostración. Sea $\lambda_j = \rho_j + i\sigma_j$ los n autovalores de A tal que $\rho_j \leq \rho_{j+1}$, $j = 1, ..., n-1$ por el teorema (5.2.1), se tiene

$$\mid r_j(t) \mid \leq \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\rho_n t},\ \forall\, j = 1, ..., n \tag{5.15}$$

desde que $\lim_{t\to\infty} \dfrac{t^m}{e^{\lambda t}} = 0$ para algún $m \in \mathbb{Z}^+, \lambda > 0$ se sigue $\exists\, k > 0$ tal que

$$t^m \leq ke^{\lambda t},\ \forall\, t > 0$$

De (5.16)

$$\mid r_j(t) \mid \leq ke^{\lambda+\rho_n}, \forall\, t$$

como $\rho_n < 0$ podemos elegir $\lambda > 0$. Haciendo $\rho = -(\lambda + \rho_n)$. Entonces

$$\mid r_j(t) \mid \leq ke^{-\rho t},\ \forall t \geq 0\, \forall\, j = 1, ..., n$$

por Putzer

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{j=1}^{n-1} r_{j+1}(t)P_j \\ \Rightarrow \|e^{tA}x_0\| &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |r_{j+1}(t)|\, \|P_j x_0\| \\ &\leq Ke^{-\rho t}\sum_{j=1}^{n-1} \|P_j x_0\| \end{aligned} \tag{5.16}$$

como $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \|P_j x_0\|$ no depende de t y $\rho > 0$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \| e^{tA}x_0 \| = 0$$

por tanto

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x_0 = 0$$

□

5.3. Implementación del algoritmo del Método de Putzer usando Matlab

La implementación del algoritmo del método de Putzer, con la plataforma Matlab. Diseñado para cualquier sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma de $x'(t) = Ax(t),\ A \in M(n, \mathbb{K})$ dará como resultado los autovalores, el polinomio característico, la matriz fundamental, estabilidad, no estabilidad y finalmente una representación más simple de matriz solución.
La matriz de entrada debe ser una matriz constante de orden nxn, para; $n > 3$ hace que aumente el número de operaciones, por consiguiente hace que la máquina tenga dificultades para procesar los datos y operaciones matemáticas por lo tanto se necesitará una maquina más potente. Para $n \leq 3$ resulta óptimo y no se tendrá dificultades.

5.3.1. Pseudocódigo del algoritmo de Putzer

El pseudocódigo para la implementación del algoritmo es el siguiente: Para la implementación computacional del algoritmo de Putzer, véase el repositorio del autor.[1]

1. Entradas y Salidas

Entrada: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matriz cuadrada)
$t \in \mathbb{R}$ (tiempo)

Salida: $e^{At} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matriz exponencial)

2. Polinomio Característico

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$

Autovalores: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (raíces de $p(\lambda) = 0$)

Clasificación:

- $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0 \Rightarrow$ Estable
- $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0 \Rightarrow$ Marginal
- $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0 \Rightarrow$ Inestable

3. Algoritmo de Putzer – Inicialización

$P_0 = I$ (matriz identidad)
$r_1(t) = e^{\lambda_1 t}$

[1] `https://github.com/mategabriel25-stack/putzer_exponencial1.m`

4. Hallando P_k

Recursión para P_k:

Para $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

$P_k = (A - \lambda_k I) \cdot P_{k-1}$

5. Hallando $r_k(t)$

Recursión para $r_k(t)$:

Para $k = 2, 3, \ldots, n$:

$r_k(t) = \int_0^t e^{\lambda_k (t-s)} \cdot r_{k-1}(s)\, ds$

Forma cerrada (autovalores distintos):

$r_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{\lambda_j t}}{\prod_{m \neq j} (\lambda_j - \lambda_m)}$

6. Hallando e^{At}

Resultado final:

$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) \cdot P_k$

7. Estudio del Decaimiento

$\rho_{\text{máx}} = \text{máx}\{\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2), \ldots, \text{Re}(\lambda_n)\}$

Cota de Gronwall: $\|e^{At}\| \leq k \cdot e^{\rho_{\text{máx}} t}$

Condición	Comportamiento	Decaimiento
$\rho_{\text{máx}} < 0$	Asintóticamente estable	$e^{\rho_{\text{máx}} t} \to 0$
$\rho_{\text{máx}} = 0$	Marginalmente estable	Acotado, no decae
$\rho_{\text{máx}} > 0$	Inestable	Crece como $e^{\rho_{\text{máx}} t}$

8. Factorización Principal

Factorizando: $e^{At} = e^{\lambda t} Q(t)$

Fórmula de Moivre: $e^{a+bi} = e^{at}(\cos b + i \sin b)$

9. Comparación de Resultados

Comparación: longitud de cada forma (número de caracteres)

10. Salida: Mejor Expresión

Matriz fundamental de e^{At}

Fin de programa.

Ejemplo 5.3.1 *El ejemplo es mostrar la efectividad del algoritmo que sera de mucha importancia porque reduce el tiempo en su solución. Sea la ecuación diferencial ordinaria de la forma:*

$$x_1' = 5x_2$$
$$x_2' = -x_1 - 4x_2$$

Al programa solo ingresaremos la matriz asociada al sistemas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

```
>> Putzer_exponencial1
  --- MATRIZ INGRESADA A ---
       0     5
      -1    -4

   El polinomio caracteristico es:

   ans = x^2 + 4*x + 5
 ======================================
  1. AUTOVALORES DE A (INVERTIDOS)
 ======================================

 Autovalores originales de A:
   lambda_orig_1 = - 2 - 1i

   lambda_orig_2 = - 2 + 1i
 ========================================
  2. ALGORITMO DE PUTZER
 ========================================

  --- Calculo de matrices P_k ---
  P_0 = I =
  [1, 0]
  [0, 1]
 P_1 = (A - lambda_1*I) * P_0 =
 [2 - 1i,        5]
 [    -1, - 2 - 1i]
 ========================================
  3. RESOLUCION DE r_k(t)
 ========================================

r_1(t) = exp(t*(- 2 + 1i))
r_2(t) = exp(t*(- 2 - 1i))*sin(t)*(cos(t) + sin(t)*1i)

 ========================================
  4. EXPONENCIAL e^(At)
 ========================================
 Forma simplificada de e^(At):

 ========================================
  5. APLICANDO FORMULA DE DE MOIVRE
 ========================================

 e^(At) simplificada con De Moivre (expresion real):
 [exp(-2*t)*(cos(t) + 2*sin(t)),            5*exp(-2*t)*sin(t)]
 [            -exp(-2*t)*sin(t), exp(-2*t)*(cos(t) - 2*sin(t))]

 ========================================
  6. ANALISIS DE CONVERGENCIA ABSOLUTA
   (Estabilidad asintotica usando autovalores y normas)
 ========================================

--- Nota teorica ---
La serie exponencial e^(At) = sum_{k=0}^{∞} (A^k t^k)/k! converge
absolutamente para toda matriz A y para todo t finito.
Sin embargo, el comportamiento cuando t → ∞ depende de los autovalores.

>>> CONCLUSION: La solucion es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE a cero
    cuando t → ∞ (sistema asintoticamente estable). <<<

 ========================================
   7. FACTORIZACION PRINCIPAL
 ========================================

  Autovalor dominante: lambda_1 = - 2 + 1i
  Factorizando e^(At) = e^(- 2 + 1i * t) * Q(t)

 >>> La forma DE MOIVRE es mas simple. <<<

 --- MEJOR EXPRESION DE e^(At) ---
 [exp(-2*t)*(cos(t) + 2*sin(t)),            5*exp(-2*t)*sin(t)]
 [            -exp(-2*t)*sin(t), exp(-2*t)*(cos(t) - 2*sin(t))]


 ¿Desea ver la otra representacion? (s/n): n

 --- FIN DEL PROGRAMA ---
```

Figura 5.1: Resultado del programa:**Función** `putzer_exponencial1()`.
Al comparar este resultado con la solución analítica del ejemplo (5.1.1), no se aprecian diferencias, lo que demuestra una alta confiabilidad del método.

.

Ejemplo 5.3.2 *Sea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:*

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

La matriz asociada al sistema dado es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Probando el programa **Función** `putzer_exponencial1()`

```
>> Putzer_exponencial1
 --- MATRIZ INGRESADA A ---
      2     2    -1
      2    -1     2
     -1     2     2

 El polinomio caracteristico es:
 ans =  x^3 - 3*x^2 - 9*x + 27
 ====================================
  1. AUTOVALORES DE A (INVERTIDOS)
 ====================================
 Autovalores originales de A:
   lambda_orig_1 = -3
   lambda_orig_2 = 3
   lambda_orig_3 = 3
 ====================================
  2. ALGORITMO DE PUTZER
 ====================================
 --- Calculo de matrices P_k ---
 P_0 = I =
 [1, 0, 0]
 [0, 1, 0]
 [0, 0, 1]
 P_1 = (A - lambda_1*I) * P_0 =
 [-1,  2, -1]
 [ 2, -4,  2]
 [-1,  2, -1]
 P_2 = (A - lambda_2*I) * P_1 =
 [  6, -12,   6]
 [-12,  24, -12]
 [  6, -12,   6]

 ========================================
  3. RESOLUCION DE r_k(t)
 ========================================
 r_1(t) = exp(3*t)
 r_2(t) = t*exp(3*t)
 r_3(t) = exp(-3*t)*((exp(6*t)*(6*t - 1))/36 + 1/36)
 ========================================
  4. EXPONENCIAL e^(At)
 ========================================
 Construyendo e^(At) = sum r_{k+1}(t) * P_k:

 ========================================
  5. APLICANDO FORMULA DE DE MOIVRE

 e^(At) simplificada con De Moivre (expresion real):
 [(exp(-3*t)*(5*exp(6*t) + 1))/6,             (2*sinh(3*t))/3,                 -sinh(3*t)/3]
 [               (2*sinh(3*t))/3,(exp(-3*t)*(exp(6*t) + 2))/3,               (2*sinh(3*t))/3]
 [                  -sinh(3*t)/3,             (2*sinh(3*t))/3, (exp(-3*t)*(5*exp(6*t) + 1))/6]

 ========================================
  6. ANALISIS DE CONVERGENCIA ABSOLUTA
   (Estabilidad asintotica usando autovalores y normas)
 ========================================
--- Nota teorica ---
La serie exponencial e^(At) = sum_{k=0}^{∞} (A^k t^k)/k! converge
absolutamente para toda matriz A y para todo t finito.
Sin embargo, el comportamiento cuando t → ∞ depende de los autovalores.
  >>> CONCLUSION: La solucion NO converge a cero; diverge
      (o crece sin cota) cuando t → ∞ (sistema inestable).


 ========================================
   7. FACTORIZACION PRINCIPAL
 ========================================
 Autovalor dominante: lambda_1 = 3
 Factorizando e^(At) = e^(3 * t) * Q(t)

 Q(t) =
 [exp(-6*t)/6 + 5/6,     1/3 - exp(-6*t)/3, exp(-6*t)/6 - 1/6]
 [1/3 - exp(-6*t)/3, (2*exp(-6*t))/3 + 1/3, 1/3 - exp(-6*t)/3]
 [exp(-6*t)/6 - 1/6,     1/3 - exp(-6*t)/3, exp(-6*t)/6 + 5/6]

 --- MEJOR EXPRESION DE e^(At) ---
 [(exp(-3*t)*(5*exp(6*t) + 1))/6,             (2*sinh(3*t))/3,                 -sinh(3*t)/3]
 [               (2*sinh(3*t))/3, (exp(-3*t)*(exp(6*t) + 2))/3,               (2*sinh(3*t))/3]
 [                  -sinh(3*t)/3,             (2*sinh(3*t))/3, (exp(-3*t)*(5*exp(6*t) + 1))/6]

 ¿Desea ver la otra representacion? (s/n): n

 --- FIN DEL PROGRAMA ---
```

Figura 5.2: Resultado del programa:**Función** `putzer_exponencial1()`.
para el ejemplo (5.1.2).

Consideraciones

a. El algoritmo está diseñado solo para sistemas lineales de EDOs de primer orden con coeficientes constantes de la forma $x' = Ax(t)$, donde A es una matriz cuadrada constante.

b. Las limitaciones de este algoritmo son: no se puede aplicar directamente a EDOs no lineales de la forma $x' = Ax(t) + f(x,t)$, ni para sistemas lineales con coeficientes variables $A(t)$. En este último caso, la matriz exponencial ya no se obtiene tan fácilmente.

c. Una ventaja es la robustez, porque funciona para cualquier tipo de matriz cuadrada, sea diagonalizable o no. Es ideal para cómputo simbólico, porque es un método algebraico que opera con los autovalores; es muy adecuado para obtener expresiones analíticas exactas y eficiente para cálculos repetidos. Si necesitas evaluar la matriz exponencial, el algoritmo es muy rápido.

d. Las desventajas son la alta complejidad computacional para matrices grandes ($n > 3$), ya que la carga de trabajo crece cuando aumentamos el orden del sistema de EDOs y suele ser menos eficiente que métodos numéricos modernos.

Capítulo 6

Trabajos futuros

Evidentemente, se pueden plantear diversas investigaciones en el futuro, motivados por este trabajo de tesis:

1. Investigar la estabilidad exponencial de sistemas no lineales del tipo

$$x' = Ax + F(t, x)$$

donde F es una no linealidad, que por ejemplo decaiga exponencialmente, es decir

$$F(t, x) \leq C_o e^{-\beta t}.$$

2. Estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones del problema perturbado

$$x' = (A + B)x$$

donde B es una matriz que eventualmente podría no tener todos sus autovalores con parte real negativa.

3. Investigar el comportamiento cualitativo de sistemas del tipo

$$x' = A(t)x, \text{ y } x' = A(t)x + F(t, x)$$

donde $A(t)$ es una matriz con elementos dependientes de t.

Capítulo 7

Conclusión

En este trabajo de tesis hemos estudiado en detalle una metodología matemática para estudiar la estabilidad de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Explícitamente se ha probado que si la matriz del sistema tiene todos sus valores propio con parte real negativa el sistema es asintóticamente estable.

Aún más la solución del sistema decae exponencialmente; en la práctica esto significa que si el sistema se perturba, eventualmente regresará a su estado original de equilibrio(punto de equilibrio estable). Así pequeñas perturbaciones al sistema se amortiguarán con el tiempo, en lugar de amplificarse sin control.

Además, este trabajo es la base motivadora para estudiar el decaimiento exponencial de la energía en sistemas definidas en espacios de dimensión infinita, por ejemplo al estudiar ecuaciones de onda con disipación friccional. En resumen, por medio del estudio del espectro(autovalores con parte real negativa) hemos conseguido la estabilidad exponencial, para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Capítulo 8

Apéndice y Biografía

8.1. Apéndice 1.

Teorema 8.1.1 *Sea $A \in M(n, \mathbb{C})$, denote $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ el polinomio característico de A, escribamos a $p_A(\lambda)$ en la forma*

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\gamma_1}....(\lambda - \lambda_n)^{\gamma_m},$$

donde $\lambda_1, ..., \lambda_m$ son las distintas autoespacios de A y $\gamma_1, ..., \gamma_m$ denotan las respectivas multiplicidades algebraicas. Entonces se tiene la descomposición en suma directa.

$$\mathbb{C}^n = ker(A - \lambda_1 I)^{\gamma_1} \oplus ... \oplus ker(A - \lambda_m I)^{\gamma_m}.$$

Los espacios $E(\lambda_j) = ker(A - \lambda_j I)^{\gamma_j}$ son llamados los autoespacios generalizados de A.

Demostración. Haciendo, $g_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{v_k}$, tal que

$$p_A(\lambda) = g_1(\lambda)....g_k(\lambda)...g_m(\lambda),$$

para cada $k = 1, 2, ..., m$ los polinomios $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$,..., $g_{k-1}(\lambda)$ y $g_k(\lambda)$ son primos relativos, no tienen raíces comunes. Entonces para $\lambda = A$ tendremos

$$ker(g_1(A)g_2(A)...g_{k-1}(A)g_k(A)) = ker(g_1(A)g_2(A)...g_{k-1}(A)) \oplus ker(g_k(A))$$

luego repetimos este procedimiento hasta que resulte la descomposición de suma directa

$$ker(p_A(A)) = ker(g_1(A)) \oplus ker(g_2(A)) \oplus ... \oplus ker(g_m(A)).$$

Por el teorema de Cayley -Hamilton $p_A(A) = 0$ tal que $ker(p_A(A)) = \mathbb{C}^n$. resultando la descomposición de $\mathbb{C}^n$ de autoespacios generalizados:

$$\mathbb{C}^n = ker(g_1(A)) \oplus ker(g_2(A)) \oplus ... \oplus ker(g_m(A)).$$

□

8.2. Apéndice 2.

Sea T la matriz 2×2 de la forma

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Polinomio característico $p_T(\lambda) =\mid T - \lambda I \mid$

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} \tag{8.2}$$

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$

$$p_T(\lambda) = [\lambda - (a+ib)][\lambda - (a-ib)]$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = a + ib, \;\; \lambda_2 = a - ib$$

Hallamos los autovectores usando al forma $(T - \lambda I)_v = 0$, para $\lambda_1 = a + ib$

$$\begin{pmatrix} a-(a+ib) & -b \\ b & a-(a+ib) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Obtenemos $ix + y = 0$ luego, $y = -ix$ el autovector asociado al autovalor λ_1 es

$$v_1 = (1, -i)$$

Para $\lambda_1 = a - ib$

$$\begin{pmatrix} a-(a-ib) & -b \\ b & a-(a-ib) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} ib & -b \\ b & ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Obtenemos $ix - y = 0$ luego $y = ix$ el autovector asociado al autovalor λ_2 es

$$v_2 = (1, i)$$

La matriz P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \end{pmatrix}$$

Calculando la matriz e^T

$$e^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{a+ib} & 0 \\ 0 & e^{a-ib} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^T = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{a+ib} + e^{a-ib}}{2} & \dfrac{ie^{a+ib} - ie^{a-ib}}{2} \\ \dfrac{ie^{a-ib} - ie^{a+ib}}{2} & \dfrac{e^{a+ib} + e^{a-ib}}{2} \end{pmatrix}$$

Sacando el factor e^a

$$e^T = e^a \begin{pmatrix} \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} & \dfrac{ie^{ib} - ie^{-ib}}{2} \\ \dfrac{ie^{-ib} - ie^{ib}}{2} & \dfrac{e^{ib} + e^{ib}}{2} \end{pmatrix}$$

Por la fórmula de Euler donde:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + iseny)$$

$$e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = e^x(cosy - iseny)$$

usando esto quedaría

$$e^T = e^a \begin{pmatrix} cosb & -senb \\ senb & cosb \end{pmatrix}.$$

8.3. Apéndice 3.

Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 8.3.1 *Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq +\infty$; se define el espacio*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ medible y } \mid f \mid^p \text{ es Lebesgue- integrable} \right\}$$

dotado de la norma

$$\| f \|_{L^p} = \left| \int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx \right|^{1/p}.$$

Observación 8.3.1 *Las funciones*

$$\| \, . \, \|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+, 1 \leq p < \infty$$

es una norma.

Los espacios $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq +\infty$ son espacios de Banach.

Espacios de Sobolev

Los resultados de esta sección pueden ser vistas en Brezis [3]

Definición 8.3.2 *Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq +\infty$ denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ a todas las funciones u de $L^p(\Omega)$ tal que para todo $\mid \alpha \mid \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada distribucional de u. El conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden m relativo al espacio $L^p(\Omega)$.*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \mid \alpha \mid \leq m \right\}$$

donde las derivadas son entendidas en sentido distribucional.

El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$

Se llama espacio de Sobolev de orden uno sobre Ω al espacio:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

Se define en $H^1(\Omega)$ el producto escalar

$$(v, v)_{1,\Omega} = \int_\Omega (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv) dx$$

y se denota

$$\| v \|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{1/2}$$

la norma correspondiente.

El espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$

Esta definido por:

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \mid \alpha \mid \leq 2; \text{en sentido distribucional} \right\}$$

El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Se designa por $H_0^1(\Omega)$ la adherencia de $D(\Omega)$ en el espacio $H^1(\Omega)$ esto es :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

para Ω abierto, acotado y de clase C^∞ se prueba que :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u \mid_{\Gamma=\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : u \mid_{\Gamma} = 0 \right\}$$

Observación 8.3.2 *Se tienen los dos resultados*

1. *Si* Ω *es acotado :* $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$
2. *Si* $\Omega = \mathbb{R}^n$*:* $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Presentamos el código en Matlab del programa Putzer.

Bibliografía

[1] Brauer F & Nohel J. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Euations an Introduction*, University of Wisconsin E.E.U.U, 1989.

[2] Betounes, David *Differential Equations: Theory and Applications*(2010), Springer.

[3] Brezis H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, (Vol. 2, New York: Springer.

[4] Barreira L.& Valls C. *Ordinaryu differential Equations Qualitative Theory* Amnerican Mathematical Society .

[5] Coddington E & Levinson N and T.(1956) *Theory of ordinary differential equations.* American Institute of Physics

[6] Chen, Chi-Tsong(1970) *Introduction to linear system theory*,

[7] Chen, Guanrong(2024) *Nonlinear Systems: Stability, Dynamics and Control*, World Scientific.

[8] Chicona C.(1999) *Ordinary Differential Equations With Applications* . university of Missouri USA.

[9] Lima, Elon Lages. *Elementos de topologia geral*, Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.

[10] Gatica, Gabriel N (2013) *Introductory functional analysis with applications*, Reverté.

[11] Gearhart L.(1975) *On the spectral theory of the trnslation semigroup and its commutant* . Thesis,of Illinois USA.

[12] Hoffman K. *Algebra Lineal*, Editorial Prentice/Hall internacional.

[13] Huang .(1991) *Strong asymptotic stability theopry for linear dynamical systems, in Banach spces*, JDE.

[14] Kreyszig, Erwin (1991) *Introducción al análisis funcional. Teoría y Aplicaciones*, John Wiley & Sons.

[15] Liu Z. & Zheng S. (1999) *Semigroups associated with dissipative systems*, CRC Press.

[16] Lowey J.& Dean S.(1967) *Elementos de álgebra lineal*, Universidad de Zaragoza, editorial Reverte,España.

[17] O'Searcoid, Mícheál(2006) *Metric spaces*, Springer Science & Business Media.

[18] Miguel de Guzman *Ecuaciones diferenciales Ordinarias Teoría de Estabilidad y Control*(1975), Universidad Complutense de Madrid.

[19] Muñoz J. *Teoria de semigrupos y su estabilidad.* LNCC IM. UFRJ Brazil.

[20] Morris W. & Smale S.(1974) *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal.* Academic press,new York, EEUU.

[21] Pazy A. *semi groups of linear operators and aplications to partial Differential Equations.*

[22] Putzer E.J (1966) *Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients* The American Mathematical Monthly, Vol.73

[23] Pruss J. *On the spectrum of c_o semigroups*, Trans AMS, 1984.

[24] Raposo C. *Semigrupos aplicado a sistemas dissipativos en EDP* . Departamento de matemáticas UFSJ.

[25] David E. Sanchez. *Ordinary Differential Equations and Stability Theory: an Introduction*, University of New Mexico. Dover Publications. 1967.

[26] Rynne, Bryan and Youngson, Martin A, *Linear functional analysis*(2007), Springer Science & Business Media.

[27] Norman Lebovit. *Putzer's Algorithm*(September, 2016)

[28] Seymour Lipschutz. (1970) *Algebra Lineal*, McGraw Hill, 1970.

[29] Zheng S. (2004) *Nonlinear Evolutions Equations*, Chapman Hall/CRC.