

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Computación Científica

Análisis cualitativo y simulaciones de un modelo matemático de una presa y dos depredadores con respuesta funcional razón-dependiente y alimento alternativo para uno de los depredadores

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica

AUTOR

Marco Antonio ROMERO ORDOÑEZ

ASESOR

Mg. Luis Javier VÁSQUEZ SERPA

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Romero, M. (2025). *Análisis cualitativo y simulaciones de un modelo matemático de una presa y dos depredadores con respuesta funcional razón-dependiente y alimento alternativo para uno de los depredadores*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Matemáticas]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Marco Antonio Romero Ordoñez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	70254537
URL de ORCID	**https://orcid.org/0000-0002-7383-4837**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Luis Javier Vásquez Serpa
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43389380
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-5414-6764
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Roxana López Cruz
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10798114
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Renato Mario Benazic Tome
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445668
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Luis Javier Vásquez Serpa
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43389380
Datos de investigación	
Línea de investigación	Modelamiento matemático
Grupo de investigación	NO APLICA
Agencia de financiamiento	NO APLICA

Ubicación geográfica de la investigación	Lima
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2023-2024
URL de disciplinas OCDE	**Matemática aplicada** https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Escuela Profesional de Computación Científica

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

En la UNMSM, Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 15:05 horas del miércoles 09 de julio del 2025, se reunieron los docentes designados como miembros del Jurado Evaluador:

Presidente	: Dra. Roxana López Cruz
Miembro	: Dr. Renato Mario Benazic Tome
Miembro asesor	: Mg. Luis Javier Vásquez Serpa

para la sustentación de la tesis intitulada «ANÁLISIS CUALITATIVO Y SIMULACIONES DE UN MODELO MATEMÁTICO DE UNA PRESA Y DOS DEPREDADORES CON RESPUESTA FUNCIONAL RAZÓN-DEPENDIENTE Y ALIMENTO ALTERNATIVO PARA UNO DE LOS DEPREDADORES», presentada por el bachiller MARCO ANTONIO ROMERO ORDOÑEZ, para obtener el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Luego de la exposición de la Tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas. Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del jurado, el expositor mereció la aprobación con ....APROBADO..... , con un calificativo promedio de .....DOCE..... (..12..).

A continuación, los miembros del jurado, dan manifiesto que el participante Bachiller MARCO ANTONIO ROMERO ORDOÑEZ, en virtud de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Siendo las .16:22. horas, se levantó la Sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Roxana López C.
Dra. Roxana López Cruz
Presidente

Dr. Renato Mario Benazic Tome
Miembro

Mg. Luis Javier Vásquez Serpa
Miembro Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

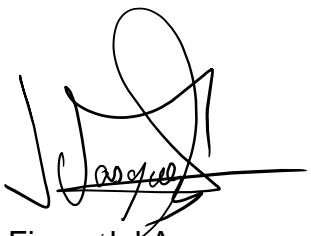
CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Luis Javier Vásquez Serpa en mi condición de asesor acreditado con Dictamen N° 000003-2025-EPCC-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es «ANÁLISIS CUALITATIVO Y SIMULACIONES DE UN MODELO MATEMÁTICO DE UNA PRESA Y DOS DEPREDADORES CON RESPUESTA FUNCIONAL RAZÓN-DEPENDIENTE Y ALIMENTO ALTERNATIVO PARA UNO DE LOS DEPREDADORES», presentado por el bachiller MARCO ANTONIO ROMERO ORDOÑEZ para optar el título de Licenciado en Computación Científica.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 6% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título correspondiente.

Lima, 28 de octubre de 2025



Firma del Asesor
Luis Javier Vásquez Serpa
DNI : 43389380

Dedicatoria

Esta tesis la dedico a mi familia, en especial a mis padres y hermanos, por su apoyo incondicional, sus sabios consejos y su paciencia durante todo este proceso. Gracias por estar siempre a mi lado.

A mis amigo, compañeros de esta travesía universitaria, por hacer de estos años una experiencia inolvidable.

Por último, agradezco profundamente a mis profesores y asesores, cuyo conocimiento, dedicación y guía fueron fundamentales para la realización de esta investigación.

Agradecimiento

En primer lugar, expreso mi más profundo agradecimiento a mis padres, Jorge Luis Romero Ames y Silvia Manuela Ordoñez Veliz, así como a mis hermanos, Jose Alonso Carlos Ordoñez y Adriana Paola Romero Ordoñez, por su apoyo incondicional, su constante aliento en los momentos más difíciles y su alegría en las buenas etapas. Su presencia ha sido fundamental para alcanzar este logro.

A mis profesores, quienes con sus enseñanzas y experiencia contribuyeron no solo a mi formación académica, sino también a mi crecimiento personal y profesional. A todos ellos, mi sincero reconocimiento.

De manera especial, agradezco a mi asesor, Mg. Luis Javier Vásquez Serpa, por su paciencia, dedicación y valiosa guía durante este proyecto. Su acompañamiento desde mis primeros trabajos de investigación hasta la culminación de esta licenciatura ha sido indispensable. Gracias por responder cada duda, brindar las pautas necesarias y motivarme en este camino.

Índice general

1. Preliminares 8

1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias 8

1.1.1. El problema de Cauchy 8

1.1.2. Existencia y unicidad 10

1.1.3. Método de comparación 11

1.1.4. Conjugación de Campos Vectoriales 11

1.2. Definiciones 12

1.3. Crecimiento logístico 13

1.4. Análisis cualitativo local 14

1.4.1. Polinomio de Hurwitz 14

1.5. Región de atracción 15

1.5.1. Funciones de Lyapunov 16

1.5.2. Teorema de Krasovskii 16

2. Estudio del modelo 18

2.1. Modelo base 19

2.2. Planteamiento del modelo 21

2.3. Acotación de las soluciones 23

2.4. Existencia y unicidad de las soluciones 26

2.5. Equivalencia topológica 27

2.6. Puntos críticos 29

2.6.1. Hallando el punto crítico de la forma $(u,\hat{}\ 0,w\hat{})$ 29

2.6.2. Hallando los puntos críticos de la forma $(u^*,v^*,0)$ 30

2.6.3. Hallando los puntos críticos de la forma $(u,\tilde{}\ v,\tilde{}\ w\tilde{})$ 31

3. Análisis cualitativo del modelo 35

3.1. Análisis cualitativo local 35

3.1.1. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_1,v_1,w_1) 35

3.1.2. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_2,v_2,w_2) 36

3.1.3. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_3,v_3,w_3) 38

3.1.4. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_4,v_4,w_4) 39

3.1.5. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_5,v_5,w_5) 40

3.1.6. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_6, v_6, w_6) 42
3.1.7. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_7, v_7, w_7) 44
3.2. Interdependencia 47
3.2.1. Primer caso 47
3.2.2. Segundo caso 48
3.2.3. Tercer caso 51
3.2.4. Región de atracción 53
4. Simulaciones 56
4.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden 56
4.2. Interfaz gráfica 57
4.3. Simulaciones alrededor del punto crítico (u_5, v_5, w_5) 58
4.3.1. Primer escenario 58
4.3.2. Segundo escenario 60
4.3.3. Tercer escenario 62

4.3.4. Cuarto escenario 64
4.3.5. Quinto escenario 66
4.3.6. Sexto escenario 68
Anexo 76
4.4. Calculo simbólico 76
4.4.1. Análisis cualitativo local 76
4.4.2. Análisis cualitativo global 77
4.5. Simulaciones 78
4.5.1. Valores de la simulación 78
4.5.2. Interfaz gráfica 78

Índice de cuadros

2.1. Variables del sistema (2.2) ..... **¡Error! Marcador no definido.**
2.2. Parámetros del sistema (2.2) 22
2.3. Variables del sistema (2.4) 23
2.4. Parámetros del sistema (2.4) 24
4.1. Primera y segunda simulación 63
4.2. Primera y segunda simulación 65
4.3. Tercera y cuarta simulación 66
4.4. Tercera y cuarta simulación 68
4.5. Quinta y sexta simulación 68
4.6. Quinta y sexta simulación 70
4.7. Séptima y octava simulación 71
4.8. Séptima y octava simulación 72
4.9. Novena y décima simulación 73
4.10. Novena y décima simulación 75
4.11. Décimo primer y décimo segunda simulación 76
4.12. Décima primera y décima segunda simulación 77

Índice de figuras

1. Respuesta funcional Holling tipo I. 5
2. Respuesta funcional Holling tipo II. 5
3. Respuesta funcional Holling tipo III. 6

4.1. Interfaz gráfica desarrollada. 57
4.2. Barra de herramientas de la interfaz gráfica desarrollada. 58
4.3. Primera simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.662,0.205,0.609)$. 59
4.4. Segunda simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.80,0.21,0.70)$. 60
4.5. Tercera simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.292,1.542,0.195)$. 61
4.6. Cuarta simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.15,0.2,0.4)$. . . 62
4.7. Quinta simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.361,0.734,0.144)$. 63
4.8. Sexta simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.95,1.1,0.35)$. . . 64
4.9. Séptima simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.412,2.006,0.251)$. 65
4.10. Octava simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.1,0.3,0.6)$. . . 66
4.11. Novena simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.190,1.729,0.258)$. 67
4.12. décima simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.2,0.1,0.3)$. . . 68
4.13. Décima simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.489,3.207,0.706)$. 69
4.14. décima segunda simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.97,0.25,1.35)$. 70

Resumen

En este trabajo se aplican técnicas para el análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales para modelos matemáticos ecológicos, luego respaldados por un análisis cuantitativo hecho por el método numérico Runge-Kutta de orden cuatro. El modelo en estudio describe el siguiente caso: dos depredadores que no interactúan y no compiten consumen una sola presa, agregando un alimento alternativo al habitual a uno de los depredadores y mejorando la tasa de encuentros presa-depredador, mediante la respuesta funcional razón-dependiente. Este caso está representado por un sistema tridimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El objetivo general de esta investigación consiste en analizar la dinámica poblacional mediante diferentes herramientas matemáticas y luego corrobar los hallazgos más favorables a la supervivencia de las poblaciones involucradas por medio de simulaciones. Ante esto, la hipótesis general consiste en que el depredador con alimento alternativo coexiste junto a la presa y un segundo depredador, con el cual compite por la misma presa. El problema general encontrado durante el desarrollo de esta investigación consiste en la siguiente pregunta: ¿El modelo propuesto asegura la supervivencia de las poblaciones involucradas?

Dicho análisis inicia con el estudio cualitativo del modelo, separado en dos partes, en la primera se realiza un análisis cualitativo local de los puntos críticos del sistema. Luego se estudia la estabilidad y/o inestabilidad de los puntos críticos que existen al mismo y la influencia que tienen entre si, para luego demostrar que el conjunto asociado al sistema en estudia, el cual representa matemáticamente el modelo propuesto, sea una región de atracción el cual asegura que cualquier influencia que tengan los puntos críticos no favorables para la supervivencia de las poblacional involucradas en el modelo, sobre los puntos críticos que si son favorables. Estos resultados son corroborados mediante simulaciones, las cuales se obtuvieron con el método numérico Runge-Kutta de orden cuatro construido en el lenguaje de programación Python (diseño propio).

Palabras clave: dos-depredadores, rázon-dependiente, alimento-alternativo, Routh-Hurwitz, Lyapunov, Región de atracción.

Abstract

In this work, techniques for the qualitative analysis of differential equations for ecological mathematical models are applied, then supported by a quantitative analysis done by the Runge-Kutta numerical method of order four. The model under study describes the following case: two non-interacting and noncompeting predators consume a single prey, adding an alternative food to the usual one to one of the predators and improving the rate of prey-predator encounters, by means of reason-dependent functional response. This case is represented by a three-dimensional system of ordinary differential equations.

The general objective of this research is to analyse population dynamics using different mathematical tools and then to corroborate the findings most favourable to the survival of the populations involved by means of simulations. The general hypothesis is that the predator with alternative food coexists alongside the prey and a second predator, with which it competes for the same prey. The general problem encountered during the development of this research is the following question: Does the proposed model ensure the survival of the populations involved?

This analysis begins with the qualitative study of the model, separated in two parts, in the first one a local qualitative analysis of the critical points of the system is carried out. Then, the stability and/or instability of the critical points that exist and the influence they have on each other is studied, to later demonstrate that the set associated with the system under study, which mathematically represents the proposed model, is a region of attraction which ensures that any influence that the critical points that are not favorable for the survival of the population involved in the model have on the critical points that are favorable. These results are corroborated by simulations, which were obtained with the Runge-Kutta numerical method of order four built in the Python programming language (own design).

Key words: two-predators, ratio-dependent, alternative-food, Routh-Hurwitz, Lyapunov, region of attraction.

Introducción

La biología, como ciencia natural, se centra en el estudio de la vida y sus manifestaciones, abarcando desde la estructura y función de los organismos hasta sus procesos evolutivos e interacciones ecológicas. Por su parte, la matemática (ciencia deductiva basada en entes abstractos) proporciona un marco riguroso para analizar patrones, relaciones y estructuras mediante herramientas formales, como ecuaciones, modelos estocásticos y geometría. La sinergia entre ambas disciplinas surge de la necesidad de cuantificar y predecir fenómenos biológicos complejos, dando lugar a la biomatemática: un campo interdisciplinario que emplea teorías y métodos matemáticos para resolver problemas en biología. En particular, esta tesis se enfoca en la dinámica de poblaciones, donde técnicas como ecuaciones diferenciales, teoría de grafos o análisis estocástico permiten modelar comportamientos poblacionales, predecir su evolución y optimizar estrategias de control.

La dinámica de poblaciones estudia los cambios en la estructura, tamaño y distribución espacial de poblaciones biológicas, analizando procesos fundamentales como la reproducción, mortalidad, migración y competencia intraespecífica. Estos fenómenos, caracterizados mediante parámetros demográficos clave (tasas de natalidad, mortalidad, razones sexuales), no solo determinan la viabilidad de una población a largo plazo, sino que también son críticos para diseñar estrategias de manejo y conservación. En este contexto, los modelos matemáticos emergen como herramientas esenciales para cuantificar y predecir la dinámica poblacional. Desde enfoques deterministas (ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales) hasta modelos discretos (ecuaciones en diferencias) y estocásticos (cadenas de Markov, procesos de ramificación), el marco matemático permite traducir hipótesis biológicas en relaciones formales, identificando patrones y escenarios futuros. El estudio matemático de poblaciones tiene sus raíces en el trabajo pionero de Malthus en 1798 [Malthus, 1798], quien propuso un modelo de crecimiento exponencial sin restricciones. Este planteamiento, aunque simplificado, sentó las bases para desarrollos posteriores.

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$

Donde, r representa la tasa de crecimiento de la población. Sin embargo, su formulación presentaba una limitación esencial: al asumir un crecimiento exponencial indefinido, no consideraba los factores ecológicos que restringen naturalmente las poblaciones, como la disponibilidad limitada de recursos o los mecanismos de competencia intraespecífica, es decir, la competencia por recursos entre miembros de la misma especie. Esta limitación motivó el desarrollo del modelo logístico por Verhulst en 1838 [Verhulst, 1838], que introduce un término de regulación dependiente de la densidad poblacional. La formulación matemática es

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde k representa la capacidad de carga del sistema. Este modelo captura tres propiedades fundamentales del crecimiento poblacional real:

- Un comportamiento aproximadamente exponencial para poblaciones pequeñas.
- Una desaceleración progresiva del crecimiento a medida que N se aproxima a K.
- Un equilibrio asintótico en $N = K$.

Este modelo no solo superó las limitaciones del enfoque malthusiano, sino que estableció un paradigma para el desarrollo posterior de modelos ecológicos más sofisticados. En particular, su estructura matemática ha demostrado ser lo suficientemente flexible como para incorporar extensiones, como lo demuestra el modelo Leslie-Gower.

Si bien los modelos uniespecie de Malthus y Verhulst proporcionan un marco teórico fundamental para el estudio de dinámicas poblacionales básicas, los sistemas ecológicos reales se caracterizan por complejas redes de interacciones biológicas. La generalización de estos modelos a sistemas multi-especie permite capturar fenómenos emergentes que surgen de las relaciones interespecíficas, entre los que destacan:

1. Interacciones antagónicas:
    1.1. Dinámicas depredador-presa.
    1.2. Relaciones parásito-huésped.
2. Interacciones mutualistas:
    2.1. Simbiosis obligadas.
    2.2. Cooperación facultativa.
    2.3. Relaciones planta-polinizador.

Este trabajo se enfoca particularmente en el sistema depredador-presa, cuyo marco matemático fue establecido independientemente por: Alfred J. Lotka en 1925 [Lotka, 1925] en el contexto de reacciones químicas y Vito Volterra en 1926 [Volterra, 1926] como respuesta a fluctuaciones pesqueras en el Adriático. El modelo clásico Lotka-Volterra, representado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases},$$

donde: x representa la densidad de presas e y la densidad de depredadores. Los parámetros a representa la tasa máxima de crecimiento per-cápita de presas, b representa el efecto de la presencia de depredadores en la tasa de crecimiento de presas. Mientras que el parámetro d representa la tasa de mortalidad per-cápita del depredador y por ultimo c representa el efecto de la presencia de presa en la tasa de crecimiento del depredador.

El modelo clásico de Lotka-Volterra, presenta importantes limitaciones en su capacidad para representar sistemas ecológicos reales. Entre sus principales deficiencias conceptuales destacan:

- Uso del crecimiento malthusiano de presas $(\frac{dx}{dt} = ax)$, ignorando mecanismos de autorregulación poblacional.
- La ecuación para depredadores ($_^{dy}{}_{dt} = -cy$) predice su extinción inevitable en ausencia de presas, fenómeno que contradice observaciones empíricas de estrategias de supervivencia.
- Ambos grupos se modelan como entidades homogéneas, sin considerar diferencias etarias o de comportamiento.

Para abordar estas deficiencias, Leslie propuso en El modelo de Leslie en 1948 [Leslie, 1948] introdujo una modificación fundamental al incorporar:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxy \\ \frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases},$$

donde:

- La ecuación de presas incluye crecimiento logístico: $(1 - x/k)$.
- La capacidad de carga de depredadores nx es proporcional a la biomasa disponible de presas. n
- representa la eficiencia de conversión de presas a depredadores.

En 1959, el ecólogo canadiense Howard P. Holling [Holling, 1959] propuso tres tipos de respuesta funcional, conocidos como respuesta funcional Holling tipo I, II y III. Holling observó que los depredadores y presas no interactúan de una manera simple, sino que la tasa de captura del depredador depende de varios factores, como la abundancia de presas, las limitaciones del depredador (tiempo y capacidad de *ÍNDICE DE FIGURAS*

manejo) y la complejidad del entorno. Propuso las respuestas funcionales para simplificar y categorizar estas interacciones en modelos matemáticos. Su objetivo principal era crear un marco teórico que explicara cómo la tasa de consumo de un depredador cambia en función de la densidad de sus presas. Estas respuestas fueron desarrolladas originalmente para entender los mecanismos detrás de la predación y cómo estas interacciones podrían influir en la dinámica de poblaciones y ecosistemas. A continuación se presenta los tres tipos de respuesta funcional tipo Holling, con sus respectivas gráficas en las Figuras (1), (2) y (3).

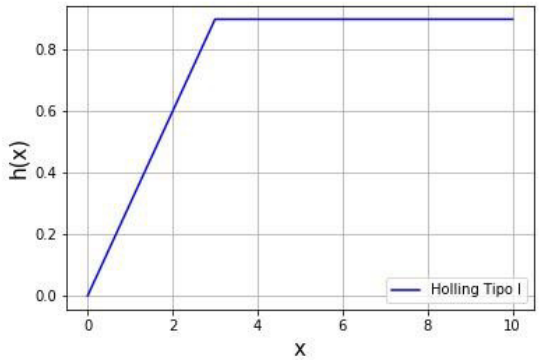


Figura 1: Respuesta funcional Holling tipo I.

La respuesta funcional Holling tipo I se obtiene suponiendo que el cambio en la densidad de población de depredadores es proporcional a la densidad de la población de presas disponibles, es decir, existe un aumento lineal de la tasa de ataque de la población de depredadores respecto a la densidad de población de presas, hasta llegar a un punto a partir del cual la tasa máxima de ataque se hace constante.

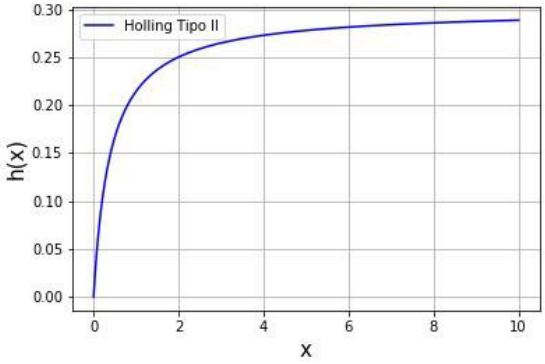


Figura 2: Respuesta funcional Holling tipo II.

La respuesta funcional Holling tipo II aparece el tiempo de manipulación, el cual trata del tiempo de perseguir, dominar y comer a cada presa, además del tiempo que el depredador toma para prepararse e ir a buscar más presas. En este caso, el tiempo de búsqueda disminuye y el tipo de respuesta resulta en un

incremento desacelerado del consumo a medida que aumenta la población de presas consumidas hasta que la función se estabiliza, puesto que el depredador se satura.

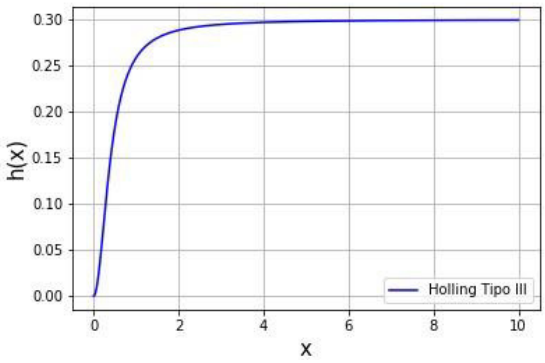


Figura 3: Respuesta funcional Holling tipo III.

La respuesta funcional Holling tipo III expresa una curva de crecimiento sigmoidea; el número de presas consumidas por unidad de tiempo se acelera con el aumento de la densidad de presas, hasta que el tiempo de manipulación comienza a limitar su consumo.

Los modelos depredador-presa se clasifican según la forma de su respuesta funcional, la cual describe la tasa de consumo de presas por un depredador en función de la densidad de presas. Algunos de estos grupo son modelos dependientes de la presa (modelos con respuesta funcional Holling) y modelos mixtos. Un ejemplo de estos últimos es la respuesta funcional razón-dependiente, propuesta por Arditi y Ginzburg en 1989 [Arditi & Ginzburg, 1989], la cual modifica cualquier respuesta funcional $h(x)$ en $h(x/y)$, donde x representa la densidad de presas e y la densidad de depredadores.

El modelo May-Holling-Tanner [Tanner, 1975] es una extensión del modelo Leslie-Gower que incorpora la respuesta funcional de Holling tipo II, lo que permite modelar de manera más realista la interacción entre depredadores y presas. Este modelo, definido por el sistema de ecuaciones (1), ha sido ampliamente estudiado en la literatura. Se han analizado diversos aspectos del modelo May-HollingTanner, como su estabilidad y bifurcaciones [Sáez & González-Olivares, 1999], el efecto Allee fuerte [Arancibia-Ibarra et al., 2019], el retardo en la interacción [Saha & Chakrabarti, 2009], la respuesta funcional razón-dependiente [Liang & Pan, 2007, Ding & Huang, 2018] y la presencia de un alimento alternativo para el depredador [Gonźalez-Olivares et al., 2019]. Además, se han considerado diversas modificaciones del modelo, como la inclusión del efecto Allee y un alimento alternativo para el depredador [Arancibia-Ibarra & Flores, 2020], así como la perturbación por razón dependiente y con un alimento alternativo para el depredador [Romero-Ordoñez et al., 2022].

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{qxy}{x+a} \\ \dfrac{dy}{dt} = sy\left(1-\dfrac{y}{nx}\right) \end{cases} \tag{1}$$

Esta tesis está organizada de la siguiente forma: en el capítulo (1) se presentan los resultados aplicados en esta investigación, como el método de comparación, el problema de Cauchy, conjugación de campos vectoriales, polinomio de Routh-Hurwitz, el criterio de Lienard-Chipart, el método directo de Lyapunov y el criterio de Bendixon-Dulac.

Luego, en el capítulo (2), se presenta un resumen de la literatura buscada sobre modelos depredadorpresa de tres poblaciones, dos presas y un depredador y una presa con dos depredadores. Además, se presenta el modelo base, el modelo propuesto en esta investigación, incluyendo el significado de los parámetros de este modelo. Además, se estudia la existencia y unicidad, positividad y acotación de las soluciones de este modelo. Luego, se presenta un modelo diferencialmente equivalente al modelo propuesto, y por último, se hallan los puntos críticos.

En el capitulo (3) Se realiza un análisis cualitativo al modelo, comprendido en dos partes, en la primera se analiza cualitativamente cada punto crítico mediante el criterio de Lienard-Chipart. Este análisis es muy importante, ya que ayuda a analizar la estabilidad de cada punto crítico de manera local. Luego naturalmente surge la pregunta: ¿Como afecta la estabilidad o inestabilidad de un punto *ÍNDICE DE FIGURAS*

crítico al resto de los mismo? Ante ello, en la segunda parte de este capitulo, se estudia la influencia que tienen algunos puntos crítico sobre otros para luego demostrar que el conjunto asociado al sistema representativo del modelo propuesto, es una región de atracción. Lo que asegura que los puntos críticos biologicamente favorables a la supervivencia de las poblaciones comprendidas en el modelo sobrevivan no se vean afectados por la estabilidad o inestabilidad de los restantes puntos críticos.

Tomando en consideración los diferentes resultados del análisis cualitativo, se simulan varios escenarios mediante una interfaz gráfica, programada en el lenguaje de programación Python, haciendo uso del método numérico Runge-Kutta de orden cuatro. Dichas simulaciones se encuentran en el capítulo (4). Adicionalmente, en Anexos (4.3.6), se encuentra el código de la interfaz gráfica. Además, durante el desarrollo de esta investigación se obtuvieron varios resultados complicados. Estos resultados son hallados gracias al lenguaje de programación Python. Estos códigos también se encuentran en anexos.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo recopila las herramientas matemáticas y los resultados de la literatura que fundamentan el análisis y los resultados de esta tesis. Se revisan conceptos esenciales para el modelo posterior, como las ecuaciones diferenciales ordinarias, el análisis cualitativo local y la región de atracción.

1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

A continuación, se presenta algunos resultados sobre ecuaciones diferenciales ordinarios de [Sotomayor, 1979, Benazic, 2007]. Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes. Se llama ecuación diferencial. Este tipo de ecuaciones son clasificadas por:

i) Tipo: Existen dos casos, la primera cuando una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se llaman ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.). El segundo caso consiste en una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables de dos o más variables independientes, se llama ecuación diferencial parcial (E.D.P.). Una ecuación diferencial de n-ésimo orden con una variable dependiente, tiene la siguiente forma.

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0.$$

ii) Orden: El orden de una ecuación diferencial, ya sea E.D.O. o E.D.P. es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

iii) Linealidad Una ecuación diferencial de n-ésimo orden se dice que es lineal si F es lineal en $y, y',\ldots,y^{(n)}$, es decir:

- La variable dependiente y y todas sus derivadas $y, y',\ldots,y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada término que contiene y es igual a uno.
- Los coeficientes de $y, y', \ldots, y^{(n)}$ dependen a lo más de la variable independiente.

1.1.1. El problema de Cauchy

A lo largo de la presente sección, para $n \geq 1$, se considera R^{n+1} como el conjunto de pares ordenados (t,x) tal que t es un número real (que representa a la variable temporal) y $x \in \mathrm{R}^n$ un vector (que representa a las variables espaciales, es decir,

$$\mathrm{R}^{n+1} = \mathrm{R} \times \mathrm{R}^n = \{(t,x);\ t \in \mathrm{R} \text{ y } x \in \mathrm{R}^n\}.$$

Además, se considera un subconjunto $S \subseteq \mathrm{R}^{n+1}$, el cual no es necesariamente un producto cartesiano de subconjunto de R^{n+1}.

Definición 1.1.1. Sean $S \subseteq \mathrm{R}^{n+1}$ no vacío y $f: S \longrightarrow \mathrm{R}^n$ una función.

1. Una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.) de primer orden asociada a f es una expresión del tipo:

$$x' = f(t,x). \tag{1.1}$$

2. Una solución de la E.D.O. (1.1) es una función diferenciable $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

   (a) $(t,\varphi(t)) \in S$, $\forall t \in J$.

   (b) $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$, $\forall t \in J$.

Observaciones:

1. Si $f = (f_1,f_2,\ldots,f_n)$ y $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$, entonces φ es solución de la E.D.O. (1.1) si y sólo si $(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)) \in S$, para todo $t \in J$ y

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_1'(t) = f_1(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)) \\ \varphi_2'(t) = f_2(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)) \\ \quad\vdots \\ \varphi_n'(t) = f_n(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)) \end{array}\right. \quad \forall t \in J.$$

2. Si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, entonces toda solución $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la E.D.O. (1.1) es de clase C^1.

Ejemplo 1.1.1. Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Sea $S = J \times \mathbb{R}$ y se define $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(t,x) = h(t)$. Es claro que S es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y f es una función integrable en S. La E.D.O. asociada a esta función es $x' = h(t)$, la cual, por el Teorema Fundamental del Cálculo, tiene solución $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\int_t \varphi(t) = h(s)ds$.

Se observa que φ no es la única solución de esta E.D.O., ya que, si se define $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\psi(t) = \varphi(t) + c,$$

donde c es cualquier constante real, entonces ψ también es solución de la E.D.O. dad. Por tanto ella tiene infinitas soluciones. Sin embargo, si se exige que la gráfica de la función solución pase por un punto determinado del plano, por ejemplo (t_0,x_0), donde $t_0 \in J$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces el problema

$$\left|\begin{array}{l} x' = h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. .$$

Tiene como solución única a la función $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} h(s)ds.$$

El ejemplo anterior, motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.2. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ no vacío, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función y $(t_0,x_0) \in S$.

1. El problema de Valor Inicial (P.V.I.) o Problema de Cauchy asociado a f, x_0 y t_0. Es dado por:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. . \qquad (1.2)$$

2. Una solución del P.V.I. (1.2) es una función $\varphi : I \longrightarrow E$ diferenciable en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que:

   (a) $t_0 \in I$.

   (b) $(t,\varphi(t)) \in \Omega$, $\forall t \in I$.

   (c) $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$, $\forall t \in I$.

   (d) $\varphi(t_0) = x_0$.

Hasta el momento solo se ha visto el caso en que la función o funciones incógnitas están afectadas por una derivada. Sin embargo, existe el caso en donde la función incógnita está afectada por dos o más derivadas. Tales ecuaciones son llamadas de orden superior.

Definición 1.1.3. Sea $S \subseteq \mathrm{R}^{n+1}$ y $f: S \longrightarrow \mathrm{R}$. La Ecuación Diferencial Ordinaria de orden n, asociada a la función f es una expresión del tipo:

$$x^{(n)} = f(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)}), \tag{1.3}$$

en donde t es una variable independiente que denota al tiempo, x depende de t y $x^{(j)} = \frac{d^j x}{dt^j}$, $(1 \leq j \leq n)$.

Para los sistemas de E.D.O. de orden n, también existe un concepto de Problema de Valor Inicial y su correspondiente solución.

Definición 1.1.4. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(t_0, x_0^0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}) \in S$.

1. El problema de Valores Iniciales (P.V.I.) o Problema de Cauchy asociado a f, t_0, x_0^0, $x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}$ es dado por:

$$\left| \begin{array}{l} x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0^0, x'(t_0) = x_0^1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1} \end{array} \right. . \tag{1.4}$$

2. Una solución del P.V.I. (1.4) es una función $\phi: I \longrightarrow \mathrm{E}$ n-veces diferenciable en el intervalo $I \subseteq \mathrm{R}$, tal que:

   (a) $t_0 \in I$.

   (b) $(t,\phi(t),\phi'(t),\ldots,\phi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$, $\forall t \in I$.

   (c) $\phi^{(n)}(t) = f(t,\phi(t),\phi'(t),\ldots,\phi^{(n-1)}(t))$, $\forall t \in I$.

   (d) $\phi(t_0) = x_{00}$, $\phi'(t_0) = x_{10},\ldots,$ $\phi^{(n-1)}(t_0) = x_{n0-1}$.

1.1.2. Existencia y unicidad

Definición 1.1.5. Sea $U \subseteq \mathrm{R}^{n+1}$ un abierto y $f: U \longrightarrow \mathrm{R}^n$ una función.

1. f es Lipschitz con respecto a la segunda variable en U si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que,
$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq C|x - y|;\ \forall (t,x),(t,y) \in S.$$

2. f es localmente Lipschitz con respecto a la segunda variable en U si y sólo si para cualquier $(t_0,x_0) \in S$ existen $a,b > 0$ tales que $I_a(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq S$ y la restricción $f|_{I_a(t_0) \times B_b(x_0)} : I_a(t_0) \times B_b(x_0) \longrightarrow \mathrm{R}^n$ es Lipschitz con respecto a la segunda variable en $I_a(t_0) \times B_b(x_0)$.

A continuación, se define el concepto de función de clase C^1 con respecto a las variables espaciales. Sea $U \subseteq \mathrm{R}^{n+1}$ un abierto y $f: U \longrightarrow \mathrm{R}^n$. Dado $(t_0,x_0) \in U$, se define el conjunto.

$$U_{t_0} = \{x \in \mathrm{R}^n;\ (t_0,x_0) \in U\}.$$

Note que U_{t_0} es un subconjunto abierto y no vacío de R^n. Donde la función

$$f_{t_0} : U_{t_0} \longrightarrow \mathrm{R}^n \ x \ \mapsto f_{t_0}(x) = f(t_0,x)$$

Se dice que f es diferenciable con respecto a la segunda variable en el punto $(t_0,x_0) \in U$, si y sólo si f_{t_0} es diferenciable en x_0. Si este fuera el caso, se usa la siguiente notación

$$\partial_2 f(t_0, x_0) = f'_{t_0}(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Por lo tanto, f es diferenciable con respecto a la segunda variable en U, si y sólo si f es diferenciable con respecto a la segunda variable en (t,x), $\forall (t,x) \in U$.

Si $f: U \longrightarrow \mathrm{R}^n$ es diferenciable con respecto a la segunda variable en U, entonces, se define la función matricial.

$$\partial_2 f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(t,x) \mapsto \partial_2 f(t,x) = f'_t(x)$$

1.1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Se dice que $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en U con respecto a la segunda variable si y sólo si f es diferenciable con respecto a la segunda variable en U y la función matricial $\partial_2 f : S \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ en continua en U, donde.

$$\begin{aligned}\partial_2 f(t,x) &= \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(t,x) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t,x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t,x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t,x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(t,x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t,x) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A continuación, se presenta algunos resultados sobre existencia y unicidad de [López-Cruz, 2006, página 27]

Lema 1.1.1. *Sea* $F : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x)), \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

sea continuo y tenga derivadas parciales $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ *que existan y sean continuas en* $\mathbb{R}^n_+$ *para todo* $j,k = 1,2,\cdots,n$. *Entonces* F *es localmente continua de Lipschitz en* $\mathbb{R}^n_+$.

Teorema 1.1.1 (Existencia y unicidad). *Sea* $F : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *localmente lipschitz y para cada* $j = 1,2,\cdots,n$ *se satisface*

$$F_j \geq 0 \text{ donde } x \in \mathbb{R}^n_+,\ x_j = 0. \tag{1.5}$$

Entonces para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, *existe una única solución de* $x' = F(x)$, $x(0) = x_0$ *con valores en* $\mathbb{R}^n_+$ *donde es definido en algún intervalo* $\langle 0,b]$ *con* $b \in \langle 0,\infty]$. *Si* $b < \infty$, *entonces*

$$\sup_{0 \leq t \leq b} \sum_{j=1}^{n} x_j(t) = \infty$$

.

1.1.3. Método de comparación

El método de comparación es una técnica útil para acotar las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria (EDO). Se basa en comparar la EDO dad con otra EDO más sencilla cuya solución se conoce o es más fácil de calcular. La idea principal es encontrar una función que acote la solución de la EDO original superior y/o inferiormente.

Proposición 1.1.1 (Método de comparación). *Sea la EDO de la forma* $\frac{dy}{dt} = f(x(t), y(t))$ *y sean las funciones* $g(x(t))$ *y* $h(x(t))$ *tal que*

$$h(x(t)) \leq \frac{dy}{dt} \leq g(x(t)),$$

entonces

$$\int_0^t h(x(s)) \cdot ds \leq y(t) - y(0) \leq \int_0^t g(x(s)) \cdot ds.$$

1.1.4. Conjugación de Campos Vectoriales

Definición 1.1.6. Sean U_1, $U_2 \subseteq \mathrm{R}^n$ conjuntos abiertos, $X_1 \in \mathrm{X}^{k_1}\{U_1\}$, $X_2 \in \mathrm{X}^{k_2}\{U_2\}$ y sean $\varphi_1 : D_1 \to U_1$, $\varphi_2 : D_2 \to U_2$ los flujos generados por los campos X_1 y X_2 respectivamente.

i) Decimos que X_1 y X_2 son *topológicamente* conjugados si y sólo si existe un homeomorfismo $h : U_1 \to U_2$ llamado *conjugación topológica* tal que

$$h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(h(t,p)),\ \forall (t,p) \in D_1.$$

ii) Decimos que X_1 y X_2 son $C^r - conjugados$ (donde $r \leq \mathrm{m\acute{i}n}\{k_1,k_2\}$) si y sólo si existe un difeomorfismo $h : U_1 \to U_2$ de clase C^r, llamado conjugación de clase C^r, tal que

$$h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(h(t,p)),\ \forall (t,p) \in D_1.$$

Observaciones:

1. Si $X_1 \in \mathrm{X}^{k_1}\{U_1\}$ y $X_2 \in \mathrm{X}^{k_2}\{U_2\}$ son conjugados por $h : U_1 \to U_2$ entonces $I_1(p) = I_2(h(p)),\ \forall p \in U_1$.
2. X_1 y X_2 son conjugados sí y sólo si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & U_1 \\ {\scriptstyle (id,h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ D_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & U_2 \end{array}$$

3. Sea $p \in U$ (fijo, arbitrario), entonces la conjugación $h : U_1 \to U_2$ cumple:

$$h[\mathrm{O}_{X_1}(p)] = \mathrm{O}_{X_2}(h(p)).$$

4. Emplearemos la siguiente notación:
   $X_1 \sim_{top} X_2$ si y sólo si X_1 y X_2 son topológicamente conjugados. $X_1 \sim_{C^r} X_2$ si y sólo si X_1 y X_2 son $C^r - conjugados$.

Proposición 1.1.2. Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathrm{R}^n$ abiertos, $X_1 \in \mathrm{X}^r(U_1)$, $X_2 \in \mathrm{X}^r(U_2)$ y $h : U_1 \to U_2$ un difeomorfismo de clase C^r. Entonces h es una C^r conjugación entre X_1 y X_2 si y sólo si.

$$h'(p).X_1(p) = X_2(h(p)),\ \forall p \in U_1.$$

Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable entre variedades diferenciables cuya inversa también es diferenciable; es decir, es un isomorfismo de variedades diferenciables. Los cambios de coordenadas constituyen un caso particular de difeomorfismo.

Definición 1.1.7. *Un sistema es llamado topológicamente equivalente a otro sistema si existe un homeomorfismo* $h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ *que transforma órbitas del primer sistema en órbitas del segundo sistema, preservando la dirección del tiempo.*

1.2. Definiciones

A continuación se menciona definiciones relacionados a las ecuaciones diferenciales ordinarias, estas pueden ser encontradas en [Bamón, 1991] y [Delgado et al., 2020]. Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo, con un campo de vectores, se representa por:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1.6}$$

donde $f : U \longrightarrow \mathrm{R}^n$ es una función diferenciable continua definida en un conjunto $u \subset \mathrm{R}^n$.

Definición 1.2.1. *(Punto crítico)* Un punto x_0, se denomina punto crítico de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónoma (1.6) si $f(x_0) = 0$.

Definición 1.2.2. *(Estabilidad)* Dado un sistema autónomo (1.6), el punto x_0 es un punto crítico estable si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que si $x(t)$ es una solución del sistema y

$$||x(t_0) - x_0|| < \delta$$

entonces, $\forall t \geq t_0$

$$||x(t) - x_0|| < \epsilon.$$

1.3. CRECIMIENTO LOGÍSTICO

Es decir, si una solución está cerca del punto crítico x_0, entonces se mantendrá cerca de él para $t_0 \leq t \to \infty$.

Definición 1.2.3. *(Asintóticamente estable)* Dado un sistema autónomo (1.6), el punto x_0 es un punto crítico asintóticamente estable si $\exists \delta > 0$, tal que

$$||x(t_0) - x_0|| < \delta$$

entonces, cuando $t \to \infty$, se tiene que

$$x(t) \dashrightarrow x_0.$$

Es decir, las soluciones cercanas al punto crítico x_0 no sólo se mantendrán cerca de dicho punto, sino que tenderán a él para $t_0 \leq t \to \infty$.

Definición 1.2.4. *(Asintóticamente estable)* Dado un sistema autónomo (1.6), el punto x_0 es un punto crítico inestable si no es un punto crítico estable.

Es decir, si las soluciones están cerca del punto crítico x_0, entonces se alejarán de él para $t_0 \leq t \to \infty$.

Las definiciones anteriores son aplicables a cualquier punto de equilibrio x_0.

Definición 1.2.5. *(Autovalores y autovectores)* Sea A una matriz cuadrada de orden m. Sea un escalar $\lambda \in K (= R \; o \; C)$ un autovalor de A si existe un vector $v \in K^m$, $v = 0$, tal que $Av = \lambda v$, en cuyo caso se dice que v es un autovector de A asociado al autovalor λ.

Por ultimo,

Definición 1.2.6. *(Polinomio característico)* Si A una matriz cuadrada de orden m y $\lambda \in K (= R \; o \; C)$ es un autovalor de A, entonces el polinomio $p(\lambda) = det(A - \lambda I_m)$ se llama polinomio característico de la matriz A.

1.3. Crecimiento logístico

Es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) no lineal que modela cómo una población crece rápidamente cuando es pequeña, pero su tasa de crecimiento disminuye a medida que se acerca a un límite máximo llamado capacidad de carga del entorno.

La ecuación diferencial correspondiente a un crecimiento logístico es dado por:

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{k}\right)x \tag{1.7}$$

Resolviendo la ecuación (1.7)

$$\int_0^t \frac{dx(s)}{ds} \cdot ds = \int_0^t \frac{r}{k}(k - x(s))x(s) \cdot ds$$

$$\int_0^t \frac{1}{(k - x(s))x(s)} \cdot dx(s) = \int_0^t \frac{r}{k} \cdot ds.$$

Luego, por las fracciones parciales

$$\int_0^t \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k - x(s)} + \frac{1}{x(s)}\right) \cdot dx(s) = \int_0^t \frac{r}{k} \cdot dt$$

$$-\int_0^t \frac{1}{k - x(s)} \cdot d(k - x(s)) + \int_0^t \frac{1}{x(s)} \cdot dx(s) = \int_0^t r \cdot dt$$

$$-\ln(k - x(s))|_0^t + \ln(x(s))|_0^t = rt$$

$$-\ln(k - x(t)) + \ln(k - x(0)) + \ln(x(t)) - \ln(x(0)) = rt$$

$$\ln\left(\frac{k - x(0)}{k - x(t)}\right) + \ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right) = rt$$

$$\ln\left(\frac{x(t)(k - x(0))}{x(0)(k - x(t))}\right) = rt$$

$$\exp\left(\ln\left(\frac{x(t)(k - x(0))}{x(0)(k - x(t))}\right)\right) = \exp(rt)$$

$$\frac{x(t)(k - x(0))}{x(0)(k - x(t))} = \exp(rt)$$

$$\frac{x(t)}{k - x(t)} = \frac{x(0)\exp(rt)}{k - x(0)}$$

$$\frac{k - x(0)}{x(0)\exp(rt)} = \frac{k}{x(t)} - 1$$

$$\frac{k + x(0)(\exp(rt) - 1)}{x(0)\exp(rt)} = \frac{k}{x(t)}$$

En consecuencia,

$$x(t) = \frac{kx(0)\exp(rt)}{k + x(0)(\exp(rt) - 1)}. \tag{1.8}$$

Es claro que, cuando t tiende al ∞ genera la indeterminada $\frac{0}{0}$. Por ello, se aplica la regla Regla de L'Hôpital provocando así

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{(rt)kx(0)\exp(rt)}{(rt)x(0)\exp(rt)}$$

$$= k.$$

En consecuencia, la solución $x(t)$ de un crecimiento logístico es acotado.

Teorema 1.3.1 (Regla de L'Hôpital). Sea las funciones f y g derivables y $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene al valor a. Suponga que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad , \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

$$\text{o } \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad , \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.4. Análisis cualitativo local

El análisis cualitativo local es una herramienta poderosa que se centra en estudiar el comportamiento de un sistema cerca de un punto crítico, también llamado punto de equilibrio. Es decir, en una región pequeña alrededor de ese punto. A continuación, se presenta el polinomio de Hurwitz, el cual es la herramienta elegida para este análisis, ya que es muy buena para sistemas multidimensionales.

1.4.1. Polinomio de Hurwitz

En matemáticas, un polinomio de Hurwitz, nombrado por Adolf Hurwitz, es un polinomio cuyas raíces están localizadas en el semiplano izquierdo del plano complejo, esto quiere decir que la parte real de cada

raíz es cero o negativa. Existen diversos criterios para determinar cuando un polinomio es Hurwitz. Como el criterio de Routh-Hurwitz, las condiciones de Lienard-Chipart, el teorema de Hermite-Biehler, el teorema de leonhard-Mihailov o el algoritmo de Routh, revisar [Aguirre Hernández et al., 2017]. Si tras aplicar alguno de estos criterios nos da como resultado que todas las raíces están en el semiplano izquierdo, el sistema es estable, y si un mínimo de una raíz en el semiplano derecho, el sistema es inestable.

Teorema 1.4.1 (Routh-Hurwitz). Dado un polinomio con coeficientes reales $f(t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \ldots + b_{n-1}t + b_n$. Definimos la matriz Hurtwitz asociada a este polinomio de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & b_{2n-4} & b_{2n-5} & \ldots & \\ & b_{2n-2} & b_{2n-3} & \ldots & b_{n-2} \\ & & & & b_n \\ b_{2n-3} & & & & \\ b_{2n-1} & & & & \end{bmatrix},$$

donde $b_k = 0$, si $k > n$. Para que tal polinomio tenga todas sus raíces con parte real negativa, es necesario y suficiente que se satisfaga lo siguiente:

$$b_0\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad b_0\Delta_3 > 0,$$
$$\Delta_4 > 0, \quad \cdots,$$
$$\begin{cases} \text{si } n \text{ es impar}, \\ b_0\Delta_n > 0, \\ \Delta_n > 0, \quad \text{si } n \text{ es par}. \end{cases}$$

donde Δ_i son los menores principales de la matriz Hurwitz, es decir:

$$\Delta_1 = |b_1|, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \ldots$$

En caso de que $b_0 = 1$. La condición simplemente dice que los menores principales deben ser positivos, es decir.

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

El siguiente teorema, facilita descubrir si un polinomio es Hurwitz.

Teorema 1.4.2 (Lienard-Chipart). El polinomio $f(t)$ con $b_0 > 0$ es Hurwitz, si y sólo si, satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. $b_n > 0, b_{n-2} > 0, b_{n-4} \ldots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \ldots$ 2. $b_n > 0, b_{n-2} >$

$0, b_{n-4} \ldots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \ldots$

3. $b_n > 0, b_{n-1} > 0, b_{n-3} \ldots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \ldots$

4. $b_n > 0, b_{n-1} > 0, b_{n-3} \ldots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \ldots$

Observación: Un sistema se comporta asintoticamente estable alrededor de un punto crítico si el polinomio característico resultante de evaluar dicho punto critico en su matriz jacobiana, entonces es un polinomio de Hurwitz. Contrariamente si el polinomio característico no es de Hurwitz, entonces el sistema es inestable alrededor del mismo punto crítico.

1.5. Región de atracción

La región de atracción de un punto crítico en un sistema de EDOs se define como el conjunto de todos los puntos del campo de vectores desde los cuales las trayectorias del sistema convergen hacia ese punto crítico a medida que el tiempo tiende al infinito. Es decir, este método se enfoca en comprender el comportamiento general de un sistema de EDOs, en lugar de centrarse en los puntos críticos. Definición 1.5.1 (Región de atracción). Considerando el sistema de EDOs autónomo

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

asociado a la región $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, con un punto crítico asintóticamente estable $x_0 \in \Omega$. Sea $\varphi(t,x_0)$ una solución del sistema, se define a la región de atracción de x_0, $R \subset \Omega$ como $R = \{y_0 \in \Omega : \varphi(t,y_0)$ definida para todo $t \geq 0; \lim_{t\to\infty} ||\varphi(t,y_0) - x_0|| = 0\}$,

siendo $\varphi(t,y_0)$ una solución del sistema tal que $\varphi(0) = y_0$.

La región de atracción de un punto crítico es el conjunto de puntos de R^n tales que toda solución del sistema con condiciones iniciales en el conjunto, convergen al punto cuando $t \to \infty$. Un punto es atractor, si tiene como región de atracción algún entorno de si mismo. Por último, un atractor es globalmente atractor si su región de atracción es todo el dominio de definición de f (en este caso, Ω). De manera análoga se puede definir los conceptos de repulsor y región de repulsión. Además, debido a la naturaleza asintoticamente estable de la región R implica que cualquier influencia que pueda sufrir el punto crítico $x_0 \in R \subset \Omega$ se disipa mientras la variable t tiende al infinito lo cual es muy útil para estudiar la coexistencia de varios puntos críticos que existen al mismo, claro que con solo uno de ellos perteneciente a la región R. Revisar [Burchardt & Ratschan, 2007, LaSalle, 1968].

Este método trata de encontrar una función de Lyapunov que cumpla con todas sus condiciones pero unicamente en una región $R \subset \Omega$.

1.5.1. Funciones de Lyapunov

Se considera un punto de equilibrio x_0 para la ecuación diferencial autónoma.

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathrm{R}^n. \tag{1.9}$$

Una función continua $V : U \to \mathrm{R}$, donde $U \subseteq \mathrm{R}^n$ es un conjunto abierto con $x_0 \in U$, se llama función de Lyapunov para la ecuación diferencial (1.9) en x_0 siempre que

(i) $V(x_0) = 0$,

(ii) $V(x) > 0 \ \forall x \in U - \{x_0\}$,

(iii) la función $x \mapsto \mathrm{grad}V(x)$ es continua para $x \in U - \{x_0\}$ y $\dot{V}(x) := \mathrm{grad}V(x) \cdot f(x) \leq 0$.

Si, además,

(iv) $\dot{V}(x) < 0 \; \forall x \in U - \{x_0\}$, entonces V es llamada función estricta de Lyapunov.

Teorema 1.5.1 (Teorema de estabilidad de Lyapunov). Si x_0 es un punto crítico para la ecuación diferencial (1.9) y V es una función de Lyapunov para el sistema en x_0, entonces x_0 es estable. Si, además, V es una función estricta de Lyapunov, entonces x_0 es asintóticamente estable.

Este método es una generalización de los conceptos de energía asociados con sistemas mecánicos. La idea es construir una función escalar que represente la energía del sistema, con la finalidad de ver si ésta decrece. La limitación del método directo recae en el hecho de que generalmente es difícil encontrar una función escalar para un determinado sistema. Estos resultados o teoremas de estabilidad de Lyapunov proveen condiciones suficientes para establecer la estabilidad o estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio. Para más información, revise [Hale, 1980, Benazic, 2007, Sotomayor, 1979, Chicone, 2006].

1.5.2. Teorema de Krasovskii

Para determinar una función de Lyapunov para un sistema en especifico implica encontrar una función que cumpla con las condiciones antes mencionadas. Para ello se dispone de múltiples resultados, como el Teorema generalizado de Krasovskii, el cual propone función cuadrática como candidata a función de Lyapunov, recuperado de [Slotine, 1991][página 85] y anteriormente aplicado en [Pérez-Núñez, 2017].

Teorema 1.5.2 (Krasovskii generalizado). Consideremos el sistema $\dot{x} = f(x)$siendo el punto crítico de interés el origen, y sea $J(x)$ la matriz Jacobiana del sistema. Entonces, una condición suficiente para que

el origen sea asintóticamente estable es que existan dos matrices simétricas definidas positivas P y Q, tales que para todo $x \neq 0$, la matriz

$$F(x) = J^T P + PA + Q$$

sea semi-definida negativa en alguna vecindad Ω del origen. La función $V(x) = f^T P f$ es una función de Lyapunov para el sistema. Si la región Ω es todo el espacio de estados, y si además, $V(x) \to \infty$ como $||x|| \to \infty$, entonces el sistema es globalmente estable asintóticamente.

Además, el criterio de Sylvester, recuperado en [Horn & Johnson, 2013][página 439]:

Teorema 1.5.3 (Criterio de Sylvester). *Sea $A \in M_n$ una matriz Hermitiana.*

- *Si cada menor principal de A (incluyendo $det(A)$) es no negativo, entonces A es semi-definido positivo.*
- *Si cada menor principal de A es positivo (incluyendo $det(A)$), entonces A es definido positivo.*
- *Si los primeros $n-1$ menores mayores mayores (respectivamente, los últimos $n-1$ menores mayores finales) de A son positivos y $det(A) \geq 0$, entonces A es semi-definido positivo.*

Capítulo 2

Estudio del modelo

La siguiente revisión de la literatura se centra en los modelos matemáticos que describen la dinámica de cadenas alimentarias de tres especies, con especial énfasis en los modelos basados en ecuaciones diferenciales y en las técnicas de análisis de estabilidad. Esta revisión tiene como objetivo identificar las principales tendencias en la investigación sobre cadenas alimentarias de tres especies.

Una cadena alimentaria de tres especies, compuesta por una presa y dos depredadores, ha sido estudiada considerando dos tipos. La más popular considera que uno de los depredadores es superior al otro depredador, también llamado depredador medio. Es decir, el depredador superior consume a la presa y al depredador medio, mientras que este último solo puede consumir a la presa, como en [Hsu et al., 2003]. Donde se estudia un modelo de cadena alimentaria de tres niveles tróficos con respuestas funcionales de tipo Michaelis-Menten y razón-dependiente donde la presa es una especie de planta, el depredador medio la plaga y el depredador superior un agente de control biológico.

En [Pérez Núñez & López Cruz, 2017] se estudia un modelo depredador-presa razón-dependiente con respuesta funcional Holling tipo II, que agrega un depredador superior. Por otra parte, se investiga el sistema de la cadena alimentaria de tres especies con perturbaciones impulsivas constantes y periódicas del depredador de nivel medio y se dan las condiciones para la extinción de la presa de nivel más bajo y el depredador superior [Zhang & Chen, 2005]. Mientras tanto, los investigadores de [Maiti et al., 2008] estudian el efecto de la perturbación por retardo discreto en un modelo de cadena alimentaria tritrófica con respuesta funcional Holling tipo II. Por cierto, en [Chiu & Hsu, 1998] utilizan funciones de Lyapunov para analizar la estabilidad, y se da un criterio para la extinción del depredador superior para el caso en el que la presa es de crecimiento logístico y los depredadores tienen respuesta funcional Holling tipo II.

Con el fin de describir un mundo ecológico más realista, considera un sistema de cadena alimentaria de tres especies con dos tipos de respuesta funcional, tipo Holling y tipo Beddington-DeAngelis [Do et al., 2011]. También consideran los efectos de la interferencia del depredador superior en la dinámica de un modelo de cadena alimentaria que involucra un depredador intermedio y uno superior [Upadhyay et al., 2013]. Por otra parte, se analiza la interferencia de los depredadores superiores y el retraso de la gestación en la dinámica de un modelo de cadena alimentaria de tres especies que involucra poblaciones de depredadores intermedios y superiores [Jana et al., 2014].

En [Debnath et al., 2020] analiza un modelo de cadena alimentaria tritrófica continua sujeto al efecto Allee sobre la función de crecimiento de la presa con respuesta funcional Holling tipo II dependiente de la presa y el depredador intermedio, mientras que en [Blé et al., 2021] analizan la dinámica de una cadena alimentaria tritrófica, con respuestas funcionales Holling tipo III y II para el depredador medio y el depredador superior, respectivamente. Además, en la investigación [Sahoo & Samanta, 2021] se considera un modelo de cadena alimentaria tritrófica que incorpora una respuesta anti-depredación (efecto de miedo) y múltiples retrasos de tiempo para la conversión de biomasa de presa a depredador medio y superior.

En [Kumari & Kumar, 2022] se presenta la primera investigación sistemática sobre el efecto del canibalismo en un depredador medio en un modelo de cadena alimentaria tritrófica. Por otro lado, en la investigación [Gamaliel et al., 2018] se muestran la existencia de una bifurcación Andronov Hopf y Bautin de un modelo de cadena alimentaria tritrófica con respuestas funcionales de Holling tipo IV y II para

el depredador y super-depredador. Por último, en [Misra & Annavarapu, 2016] se propone y se analiza un modelo matemático no lineal para estudiar el efecto tóxico en un sistema de cadena alimentaria de tres especies.

Otra configuración posible en una cadena tritrófica consiste en un sistema depredador-presa compuesto por una única presa y dos depredadores, donde ninguno de los depredadores domina competitivamente al otro, es decir, ambos interactúan exclusivamente a través del consumo de la misma presa. Este tipo de sistema ha sido estudiado bajo diversos enfoques teóricos. En particular, [Ton & Hieu, 2011] analiza un modelo con respuestas funcionales de tipo Beddington-DeAngelis para ambos depredadores. Por su pare, [Arora & Kumar, 2022] investiga la influencia de fuentes alternativas de alimento en la dinámica de un sistema análogo, también con respuestas funcional Beddington-DeAngelis. Finalmente, [Patra et al., 2009] explora el efecto de retardos temporales en una cadena tritrófica con respuestas funcionales razón-dependiente de Michaelis-Menten.

Por otro lado, estudian sistemáticamente las propiedades cualitativas de un modelo de una presa y dos depredadores razón-dependiente en [Hsu et al., 2001]. Mientras que en [Dubey & Upadhyay, 2004] proponen y analizan un modelo matemático para estudiar la dinámica del sistema de una presa y dos depredadores con una tasa de crecimiento de depredadores razón-dependiente.

En [Mukhopadhyay & Bhattacharyya, 2016] se formula un modelo matemático de dos depredadores que viven de una sola presa; además, los dos depredadores interfieren directamente entre sí. Por otro lado, en [Kharbanda & Kumar, 2019] se formula un modelo matemático tridimensional de una presa y dos depredadores que involucran respuestas funcionales de Beddington-DeAngelis y Crowley-Martin.

Por último, en [Agrawal & Saleem, 2015] se analiza un modelo en el que dos depredadores que no interactúan y no compiten consumen una sola presa. Dicho modelo está representado por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \left(a_1 - b_1 x_1 - \dfrac{d_1 x_2}{\gamma_1 + x_1} - \dfrac{d_2 x_3}{\gamma_2 + x_1}\right) x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \left(a_2 - \dfrac{x_2}{c_1 x_1}\right) x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \left(a_3 - \dfrac{x_3}{c_2 x_1}\right) x_3 \end{cases} \tag{2.1}$$

El sistema en estudio se trata de perturbar el modelo matemático propuesto en [Agrawal & Saleem, 2015], usando la respuesta funcional razón-dependiente y agregando un alimento alternativo para el primer depredador. Además, se estudia la existencia y unicidad de las soluciones del modelo propuesto, seguido de la positividad y acotación de las soluciones, y por último se encuentran los puntos críticos.

2.1. Modelo base

El sistema (2.2) describe el siguiente caso: dos depredadores que no interactúan y no compiten consumen una sola presa y donde la tasa de encuentros presa-depredador depende del tamaño poblacional de la especie presa. Propuesto en [Agrawal & Saleem, 2015].

$$X_\sigma(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = r\left(1 - \dfrac{x_1}{k}\right) x_1 - \dfrac{d_1 x_1 x_2}{\gamma_1 + x_1} - \dfrac{d_2 x_1 x_3}{\gamma_2 + x_1} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \left(a_2 - \dfrac{x_2}{c_1 x_1}\right) x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \left(a_3 - \dfrac{x_3}{c_2 x_1}\right) x_3 \end{cases}, \tag{2.2}$$

donde $\sigma = (r, k, a_2, a_3, c_1, c_2, d_1, d_2, \gamma_1, \gamma_2)$, y las variables dependientes del tiempo, son los siguientes

Variable	Descripción	Dimensión

$x_1(t)$	Densidad poblacional de presas en el tiempo t	$\frac{presa}{area}$
$x_2(t)$	Densidad poblacional de depredadores del primer tipo en el tiempo t	$\frac{Primer\ depredador}{area}$
$x_3(t)$	Densidad poblacional de depredadores del segundo tipo en el tiempo t	$\frac{Segundo\ depredador}{area}$

Cuadro 2.1: Variables del sistema (2.2)

A continuación, definición de parámetros del sistema (2.2)

Parámetros	Descripción	Dimensión
r	Tasa de crecimiento intrínseco de presas, es decir, la capacidad máxima de crecimiento de la población de presas en condiciones ideales	$\frac{1}{t}$
k	Capacidad de carga del ambiente para la población de presas. Representa la densidad poblacional máxima que el ambiente puede sostener a largo plazo, dadas las limitaciones de recursos como alimento, espacio, agua y otros factores esenciales	$presa$
a_2	Tasa máxima de crecimiento del primer depredador. Se refiere a la velocidad máxima a la que la población del primer depredador puede crecer en condiciones ideales, es decir, cuando la disponibilidad de presas es ilimitada y no hay restricciones como competencia o factores ambientales adversos	$\frac{1}{t}$
a_3	Tasa máxima de crecimiento del segundo depredador. Se refiere a la velocidad máxima a la que la población del segundo depredador puede crecer en condiciones ideales, es decir, cuando la disponibilidad de presas es ilimitada y no hay restricciones como competencia o factores ambientales adversos	$\frac{1}{t}$
d_1	Tasa máxima de consumo per-cápita del primer depredador, es decir, la cantidad máxima de presas que un individuo de la especie del primer depredador puede consumir por unidad de tiempo	$\frac{presa}{Primer\ depredador}$
d_2	Tasa máxima de consumo per-cápita del segundo depredador, es decir, la cantidad máxima de presas que un individuo de la especie del segundo depredador puede consumir por unidad de tiempo	$\frac{presa}{Segundo\ depredador}$
γ_1	Constante de semisaturación para el primer depredador. Se refiere a la densidad de presas necesaria para que el primer depredador alcance la mitad de su tasa máxima de consumo	$\frac{presa}{Primer\ depredador}$
γ_2	Constante de semisaturación para el segundo depredador. Se refiere a la densidad de presas necesaria para que el segundo depredador alcance la mitad de su tasa máxima de consumo	$\frac{presa}{Segundo\ depredador}$

c_1	Calidad del alimento e indica como la población del primer depredador convierte las presas consumidas en nuevos nacimientos de depredadores. Se refiere a la eficiencia de conversión de alimento, que indica cómo el primer depredador transforma las presas consumidas en nuevos individuos de su población	$\frac{Primer\ depredador}{presa}$
c_2	Calidad del alimento e indica como la población del segundo depredador convierte las presas consumidas en nuevos nacimientos de depredadores. Se refiere a la eficiencia de conversión de alimento, que indica cómo el segundo depredador transforma las presas consumidas en nuevos individuos de su población	$\frac{Segundo\ depredador}{presa}$

Cuadro 2.2: Parámetros del sistema (2.2)

Además, los parámetros del Cuadro (2.2) son positivos, es decir, $\sigma = (r,k,a_2,a_3,c_1,c_2,d_1,d_2,\gamma_1,\gamma_2) \in$

$\mathbb{R}^{10}_+$. El sistema (2.2), está definido en el siguiente conjunto.

$$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathrm{R}^3 : x_1 > 0; x_2 > 0; x_3 > 0\} \tag{2.3}$$

2.2. Planteamiento del modelo

Se perturba el sistema (2.2) por la respuesta funcional razón-dependiente y agregando un alimento alternativo para el primer depredador, como en [Romero-Ordoñez et al., 2022].

$$X_\varsigma(x_1,x_2,x_3): \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = r\left(1-\dfrac{x_1}{k}\right)x_1 - \dfrac{d_1x_1x_2}{\gamma_1x_2+x_1} - \dfrac{d_2x_1x_3}{\gamma_2x_3+x_1} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \left(a_2 - \dfrac{x_2}{c_1x_1+b}\right)x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \left(a_3 - \dfrac{x_3}{c_2x_1}\right)x_3 \end{cases} . \tag{2.4}$$

El sistema (2.4) describe el siguiente caso: dos depredadores que no interactúan y no compiten, pero consumen una misma presa tomando en cuenta un alimento alternativo al habitual para uno de los depredadores. Además, la tasa de encuentros presa-depredador depende del tamaño poblacional de las especies que participan en dicho encuentro. Donde $\varsigma = (r,k,b,a_2,a_3,c_1,c_2,d_1,d_2,\gamma_1,\gamma_2)$, y las variables dependientes del tiempo son las siguientes.

Variable	Descripción	Dimensión
$x_1(t)$	Densidad poblacional de presas en el tiempo t	$\frac{presa}{area}$
$x_2(t)$	Densidad poblacional de depredadores del primer tipo en el tiempo t	$\frac{Primer\ depredador}{area}$
$x_3(t)$	Densidad poblacional de depredadores del segundo tipo en el tiempo t	$\frac{Segundo\ depredador}{area}$

Cuadro 2.3: Variables del sistema (2.4)

Definición de los parámetros del sistema (2.4)

Parámetros	Descripción	Dimensión
b	Representa la contribución del alimento alternativo a la capacidad de carga del depredador. Significa que el primer depredador no depende exclusivamente de una sola especie de presa para sobrevivir.	*Recurso alternativo*
r	Tasa de crecimiento intrínseco de presas, es decir, la capacidad máxima de crecimiento de la población de presas en condiciones ideales	$\frac{1}{t}$
k	Capacidad de carga del ambiente para la población de presas. Representa la densidad poblacional máxima que el ambiente puede sostener a largo plazo, dadas las limitaciones de recursos como alimento, espacio, agua y otros factores esenciales	*presa*
a_2	Tasa máxima de crecimiento del primer depredador. Se refiere a la velocidad máxima a la que la población del primer depredador puede crecer en condiciones ideales, es decir, cuando la disponibilidad de presas es ilimitada y no hay restricciones como competencia o factores ambientales adversos	$\frac{1}{t}$
a_3	Tasa máxima de crecimiento del segundo depredador. Se refiere a la velocidad máxima a la que la población del segundo depredador puede crecer en condiciones ideales, es decir, cuando la disponibilidad de presas es ilimitada y no hay restricciones como competencia o factores ambientales adversos	$\frac{1}{t}$
d_1	Tasa de búsqueda o eficiencia de ataque del depredador, es decir, medida que cuánto de eficaz es un depredador x_2 para localizar, capturar y matar a una presa.	$\frac{presa}{Primer\ depredador}$

d_2	Tasa de búsqueda o eficiencia de ataque del depredador, es decir, medida que cuánto de eficaz es un depredador x_3 para localizar, capturar y matar a una presa.	$\frac{presa}{Segundo\ depredador}$
γ_1	Representa el tiempo de manejo del primer depredador. Es el tiempo total que un miembro del primer depredador invierte en una presa, desde el momento de la captura hasta que está listo para buscar la siguiente.	$\frac{presa}{Primer\ depredador}$
γ_2	Representa el tiempo de manejo del segundo depredador. Es el tiempo total que un miembro del segundo depredador invierte en una presa, desde el momento de la captura hasta que está listo para buscar la siguiente.	$\frac{presa}{Segundo\ depredador}$
c_1	Calidad del alimento e indica como la población del primer depredador convierte las presas consumidas en nuevos nacimientos de depredadores. Se refiere a la eficiencia de conversión de alimento, que indica cómo el primer depredador transforma las presas consumidas en nuevos individuos de su población	$\frac{Primer\ depredador}{presa}$
c_2	Calidad del alimento e indica como la población del segundo depredador convierte las presas consumidas en nuevos nacimientos de depredadores. Se refiere a la eficiencia de conversión de alimento, que indica cómo el segundo depredador transforma las presas consumidas en nuevos individuos de su población	$\frac{Primer\ depredador}{presa}$

Cuadro 2.4: Parámetros del sistema (2.4)

2.3. ACOTACIÓN DE LAS SOLUCIONES

Los cuadros (2.2), (2.1), (2.4), (2.3) siguen la misma línea de deducción que en los trabajos: [Pérez Núñez, 2014], [Pérez Núñez & López Cruz, 2017] y [Romero & Fernández, 2022]. Se denota por ς al vector que contiene todos los parámetros del Cuadro (2.4).

$\varsigma = (b, r, k, a_2, a_3, c_1, c_2, d_1, d_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}_+^{11}$. El sistema (2.4) está definido en el siguiente conjunto.

$$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 : x_1 > 0; x_2 > 0; x_3 > 0\} \quad (2.5)$$

2.3. Acotación de las soluciones

Dado que se está trabajando sobre un modelo ecológico-biológico, ver Sección (2.2), se muestra la positividad y acotación de las soluciones del problema planteado en (2.4); ya que se está considerando que la población no crece indefinidamente.

Definición 2.3.1. Un conjunto M es invariante por un sistema de ecuaciones diferenciales $X' = F(x,t)$ si para cualquier solución que inicie en un punto de M dicha solución permanece en M para todo t en R.

Proposición 2.3.1. El conjunto Ω es invariante por el sistema (2.4). Si

$(x_1(0),x_2(0),x_3(0)) \in \Omega$. Entonces $(x_1(t),x_2(t),x_3(t)) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. Para demostrar la invariante del conjunto Ω del sistema (2.4), se hará uso del sistema (2.24), el cual puede tomar la siguiente forma.

$$\begin{cases} x'_1(t) = r\left(1 - \dfrac{x_1(t)}{k} - \dfrac{d_1 x_2(t)}{\gamma_1 x_2(t) + x_1(t)} - \dfrac{d_2 x_3(t)}{\gamma_2 x_3(t) + x_1(t)}\right) x_1(t) \\ x'_2(t) = \left(a_2 - \dfrac{x_2(t)}{c_1 x_1(t) + b}\right) x_2(t) \\ x'_3(t) = \left(a_3 - \dfrac{x_3(t)}{c_2 x_1(t)}\right) x_3(t) \\ x_1(0) > 0 \\ x_2(0) > 0 \\ x_3(0) > 0 \end{cases} . \tag{2.6}$$

Entonces,

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) \in \Omega.$$

Por ende, se tiene que $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \neq (0,0,0)$, por lo tanto.

$$x_1(t) = x_1(0) \exp\left\{\int_0^t \left(r - \frac{r}{k} x_1(s) - \frac{d_1 x_2(s)}{\gamma_1 x_2(s) + x_1(s)} - \frac{d_2 x_3(s)}{\gamma_2 x_3(s) + x_1(s)}\right) ds\right\} > 0$$

$$x_2(t) = x_2(0) \exp\left\{\int_0^t \left(a_2 - \frac{x_2(s)}{c_1 x_1(s) + b}\right) ds\right\} > 0.$$

$$x_3(t) = x_3(0) \exp\left\{\int_0^t \left(a_3 - \frac{x_3(s)}{c_2 x_1(s)}\right) ds\right\} > 0.$$

Así se tiene que el conjunto Ω es invariante por el sistema (2.4). □

Teorema 2.3.1. Las soluciones (x_1, x_2, x_3) del sistema (2.30) están acotadas para todo $t \geq 0$.

Demostración. Esta demostración se divide en tres partes. En primer lugar de la primera ecuación del sistema (2.4)

$$\frac{dx_1}{dt} = r\left(1 - \frac{x_1}{k}\right) x_1 - \frac{d_1 x_1 x_2}{\gamma_1 x_2 + x_1} - \frac{d_2 x_1 x_3}{\gamma_2 x_3 + x_1},$$

el cual es equivalente a

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \underbrace{r\left(1 - \frac{x_1(t)}{k}\right) x_1(t)}_{f_1(x_1)} - \frac{d_1 x_1(t) x_2(t)}{\gamma_1 x_2(t) + x_1(t)} - \frac{d_2 x_1(t) x_3(t)}{\gamma_2 x_3(t) + x_1(t)}. \tag{2.7}$$

Luego, es claro la siguiente desigualdad

$$\frac{dx_1(t)}{dt} < r\left(1 - \frac{x_1(t)}{k}\right) x_1(t) = g_1(x_1), \tag{2.8}$$

Considerando el siguiente P.V.I. asociados a (2.7)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1) \\ x_1(0) > 0 \end{cases},$$

y el P.V.I. asociado a (2.8)

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}_1(t)}{dt} = g_1(\bar{x}_1) \\ \bar{x}_1(0) > 0 \end{cases}.$$

Luego, por el método de comparación (1.1.3) se cumple que

$$x_1(t) < \bar{x}_1(t)$$

para $t \geq 0$ y como la ecuación $g_1(\bar{x}_1)$ es conocido como la ecuación logística (1.3), se cumple que

$$\lim \bar{x}_1(t) = k.$$

$t\to\infty$

En consecuencia

$$x_1(t) < k. \tag{2.9}$$

En segundo lugar, la segunda ecuación del sistema (2.4)

$$\frac{dx_2}{dt} = \left(a_2 - \frac{x_2}{c_1x_1 + b}\right)x_2,$$

el cual es equivalente a

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \underbrace{a_2\left(1 - \frac{x_2(t)}{a_2c_1x_1(t) + a_2b}\right)x_2(t)}_{f_2(x_2)}. \tag{2.10}$$

Luego, es claro que por la cota (2.9)

$$\frac{dx_2(t)}{dt} < a_2\left(1 - \frac{x_2(t)}{a_2c_1k + a_2b}\right)x_2(t) = g_2(x_2). \tag{2.11}$$

Considerando el siguiente P.V.I. asociados a (2.10)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_2) \\ x_2(0) > 0 \end{cases},$$

y el P.V.I. asociado a (2.11)

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x_2}(t)}{dt} = g_2(\bar{x_2}) \\ \bar{x_2}(0) > 0 \end{cases}.$$

Luego, por el método de comparación (1.1.3) se cumple que

$$x_2(t) < \bar{x}_2(t),$$

para $t \geq 0$ y como la ecuación $g(\bar{x}_2)$ es análoga a la ecuación logística (1.3), se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} \bar{x}_2(t) = a_2(c_1k + b).$$

En consecuencia

$$x_2(t) < a_2(c_1k + b). \tag{2.12}$$

2.3. ACOTACIÓN DE LAS SOLUCIONES

Por ultimo, la tercera ecuación del sistema (2.4)

$$\frac{dx_3}{dt} = \left(a_3 - \frac{x_3}{c_2x_1 + b}\right)x_3,$$

el cual es equivalente a

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \underbrace{a_3\left(1 - \frac{x_3(t)}{a_3c_2x_1(t)}\right)x_3(t)}_{f_3(x_3)}. \tag{2.13}$$

Luego, es claro que por la cota (2.9)

$$\frac{dx_3(t)}{dt} < a_3\left(1 - \frac{x_3(t)}{c_2a_3k}\right)x_3(t) = g_3(x_3). \tag{2.14}$$

Considerando el siguiente P.V.I. asociados a (2.13)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_3(t)}{dt} = f_3(x_3) \\ x_3(0) > 0 \end{cases},$$

y el P.V.I. asociado a (2.14)

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x_3}(t)}{dt} = g_3(\bar{x_3}) \\ \bar{x_3}(0) > 0 \end{cases}.$$

Luego, por el método de comparación (1.1.3) se cumple que

$$x_3(t) < \bar{x}_3(t),$$

para $t \geq 0$ y como la ecuación $g_3(\bar{x}_3)$ es análoga a la ecuación logística (1.3), se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} \bar{x}_3(t) = a_3c_2k.$$

En consecuencia

$$x_3(t) < a_3c_2k. \tag{2.15}$$

Entonces, de los resultados (2.9), (2.12), y (2.15), se tiene que las soluciones del sistema (2.4) son acotadas:

$$x_1(t) < k, \tag{2.16}$$
$$x_2(t) < a_2(c_1k + b), \tag{2.17}$$
$$x_3(t) < a_3c_2k. \tag{2.18}$$

Entonces las soluciones (x_1,x_2,x_3) del sistema (2.30) están acotadas para todo $t \geq 0$. □

En consecuencia, se deduce que el crecimiento de la población de la presa está restringido a la cantidad de alimento disponible en el ambiente que habita dicha presa. Análogamente el crecimiento de la población del segundo depredador está limitado por la cantidad de presas que puede consumir. Por ultimo el crecimiento del primer depredador está limitado por la cantidad de presas y del alimento alternativo que puede consumir.

Por otro lado, dado que la solución está acotada y del procedimiento anterior, la invarianza del sistema se restringe al siguiente conjunto:

$$\bar{\Omega} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / 0 < x_1 < k; 0 < x_2 < a_2(c_1k + b); 0 < x_3 < a_3c_2k\}. \tag{2.19}$$

2.4. Existencia y unicidad de las soluciones

Con el objetivo de simplificar el modelo de estudio dado en (2.4), se define las funciones

$$\begin{aligned} F_i \quad : \quad \Omega \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) \quad &\mapsto \quad F_i(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

entonces, se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = F_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}. \tag{2.20}$$

donde

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = r\left(1 - \frac{x_1}{k}\right)x_1 - \frac{d_1x_1x_2}{\gamma_1x_2 + x_1} - \frac{d_2x_1x_3}{\gamma_2x_3 + x_1}. \tag{2.21}$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = \left(a_2 - \frac{x_2}{c_1x_1 + b}\right)x_2. \tag{2.22}$$

$$F_2(x_1,x_2,x_3)=\left(a_3-\frac{x_3}{c_2x_1}\right)x_3. \tag{2.23}$$

Además, el P.V.I. asociado al sistema (2.4) es

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=r\left(1-\dfrac{x_1}{k}\right)x_1-\dfrac{d_1x_1x_2}{\gamma_1x_2+x_1}-\dfrac{d_2x_1x_3}{\gamma_2x_3+x_1}\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\left(a_2-\dfrac{x_2}{c_1x_1+b}\right)x_2\\ \dfrac{dx_3}{dt}=\left(a_3-\dfrac{x_3}{c_2x_1}\right)x_3\\ x_1(0)>0\\ x_2(0)>0\\ x_3(0)>0\end{cases}. \tag{2.24}$$

Luego, las derivadas parciales de la función F son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}F_1(x_1,x_2,x_3)&=r-\frac{2r}{k}x_1-\frac{d_1\gamma_1(x_2)^2}{(\gamma_1x_2+x_1)^2}-\frac{d_2\gamma_2(x_3)^2}{(\gamma_2x_3+x_1)^2}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}F_1(x_1,x_2,x_3)&=-\frac{d_1(x_1)^2}{(\gamma_1x_2+x_1)^2},\\ \frac{\partial}{\partial x_3}F_1(x_1,x_2,x_3)&=-\frac{d_2(x_1)^2}{(\gamma_2x_3+x_1)^2},\\ \frac{\partial}{\partial x_1}F_2(x_1,x_2,x_3)&=-\frac{c_1(x_2)^2}{(c_1x_1+b)^2}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}F_2(x_1,x_2,x_3)&=a_2-\frac{2x_2}{c_1x_1+b},\\ \frac{\partial}{\partial x_3}F_2(x_1,x_2,x_3)&=0,\\ \frac{\partial}{\partial x_1}F_3(x_1,x_2,x_3)&=\frac{(x_3)^2}{(c_2x_1)^2},\\ \frac{\partial}{\partial x_2}F_3(x_1,x_2,x_3)&=0,\\ \frac{\partial}{\partial x_3}F_3(x_1,x_2,x_3)&=a_3-\frac{2x_2}{c_2x_1}.\end{aligned},$$

Es claro que las derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{x_j}(x_1,x_2,x_3)$ con $i,j\in\{1,2,3\}$ son continuas en el conjunto Ω. Teniendo, así que los F_i es de clase C^1 en el conjunto asociado, entonces por el Lema (1.1.1). F es localmente lipschitz en Ω.

2.5. EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA

Luego, es claro que

$$F_1(0,x_2(0),x_3(0))=0.$$
$$F_2(x_1(0),0,x_3(0))=0.$$
$$F_3(x_1(0),x_2(0),0)=0.$$

Para cualquier $(x_1(0),x_2(0),x_3(0))\in\Omega$. Por el Teorema (1.1.1) existe una única solución del P.V.I.(2.24) en algún intervalo $[0,T\rangle$.

Afirmación: el intervalo maximal de la solución del P.V.I. (2.24) es $[0,+\infty\rangle$.

En efecto, suponiendo que $T<\infty$, entonces por el Teorema (2.3.1)

$$N(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)<k+a_2(c_1k+b)+a_3c_2k. \tag{2.25}$$

Es claro que la cota de $N(t)$ es independiente de la variable t, es decir, si $t \to +\infty$ está cota se mantiene. Entonces $T = +\infty$.

Afirmación: La solución $N(t)$ es controlada por el crecimiento exponencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt} + \frac{dx_3(t)}{dt}.$$

Luego, del sistema (2.4) se desprende que

$$\frac{dx_1(t)}{dt} < rx_1(t), \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} < a_2x_2(t), \qquad \frac{dx_3(t)}{dt} < a_3x_3(t),$$

por eso

$$\begin{aligned}
\frac{dN(t)}{dt} &< rx_1(t) + a_2x_2(t) + a_3x_3(t),\\
\frac{dN(t)}{dt} &< D(x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)) = DN(t)\\
\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)}ds &< \int_0^t Dds,\\
\exp(\ln(N(t))) - \exp(\ln(N(0)) &< \exp(Dt),\\
\exp\left(\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)\right) &< \exp(Dt),\\
N(t) &< N_0\exp(Dt),
\end{aligned}$$

donde $D = \max\{r,a_2,a_3\}$ con $t \in [0,T)$, lo que implica

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) < (x_1(0) + x_2(0) + x_3(0))\exp(Dt).$$

2.5. Equivalencia topológica

Se procede a realizar un cambio de variables, con el objetivo de encontrar expresiones de parámetros que se repiten, el cual nos induce a realizar un cambio de parámetros y así tener un sistema equivalente al original pero con menor número de parámetros.

$$u = \frac{x_1}{k},\ v = \frac{x_2d_1}{kr},\ w = \frac{x_3d_2}{kr}.$$

Al realizar el cambio de variables en el sistema (2.4), se tiene que:

$$\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = k\dfrac{du}{dt} = r(1-u)ku - \dfrac{(uk)(krv)}{\frac{\gamma_1kr}{d_1}v + ku} - \dfrac{(uk)(krw)}{\frac{\gamma_2kr}{d_2}w + ku}\\
\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{kr}{d_1}\dfrac{dv}{dt} = \left(a_2 - \dfrac{\frac{kr}{d_1}v}{c_1ku + b}\right)\dfrac{kr}{d_1}v\\
\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{kr}{d_2}\dfrac{dw}{dt} = \left(a_3 - \dfrac{\frac{kr}{d_2}w}{c_2ku}\right)\dfrac{kr}{d_2}w
\end{cases}. \tag{2.26}$$

Teniendo así el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = r(1-u)u - \dfrac{ruv}{\dfrac{\gamma_1 r}{d_1}v + u} - \dfrac{ruw}{\dfrac{\gamma_2 r}{d_2}w + u} \\ \dfrac{dv}{dt} = \left(a_2 - \dfrac{rv}{d_1 c_1 u + \dfrac{d_1 b}{k}}\right) v \\ \dfrac{dw}{dt} = \left(a_3 - \dfrac{r}{d_2 c_2}\dfrac{w}{u}\right) w \end{cases}.$$

Luego, se realiza el cambio de variable independiente.

$$t = \frac{1}{r}\tau.$$

Luego se aplica lo siguiente.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \dfrac{du}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\tau} \\ \dfrac{dv}{d\tau} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\tau} \\ \dfrac{dw}{d\tau} = \dfrac{dw}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\tau} \end{cases}.$$

Por lo tanto.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \left(r(1-u)u - \dfrac{ruv}{\dfrac{\gamma_1 r}{d_1}v + u} - \dfrac{ruw}{\dfrac{\gamma_2 r}{d_2}w + u}\right)\dfrac{1}{r} \\ \dfrac{dv}{d\tau} = \left(a_2 - \dfrac{rv}{d_1 c_1 u + \dfrac{d_1 b}{k}}\right)\dfrac{v}{r} \\ \dfrac{dw}{d\tau} = \left(a_3 - \dfrac{r}{d_2 c_2}\dfrac{w}{u}\right)\dfrac{w}{r} \end{cases}. \tag{2.28}$$

Por ende, se tiene.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = (1-u)u - \dfrac{uv}{\dfrac{\gamma_1 r}{d_1}v + u} - \dfrac{uw}{\dfrac{\gamma_2 r}{d_2}w + u} \\ \dfrac{dv}{d\tau} = \left(\dfrac{a_2}{r} - \dfrac{v}{d_1 c_1 u + \dfrac{d_1 b}{k}}\right) v \\ \dfrac{dw}{d\tau} = \left(\dfrac{a_3}{r} - \dfrac{1}{d_2 c_2}\dfrac{w}{u}\right) w \end{cases}. \tag{2.29}$$

Después se realiza el siguiente cambio de parámetros.

$$p_1 = \frac{\gamma_1 r}{d_1},\ p_2 = \frac{\gamma_2 r}{d_2},\ p_3 = \frac{a_2}{r},\ p_4 = d_1 c_1,\ p_5 = \frac{d_1 b}{k},\ p_6 = \frac{a_3}{r},\ p_7 = \frac{1}{d_2 c_2}.$$

Así se obtiene lo siguiente.

$$U_\rho(u,v,w):\begin{cases}\dfrac{du}{d\tau}=(1-u)u-\dfrac{uv}{p_1v+u}-\dfrac{uw}{p_2w+u}\\ \dfrac{dv}{d\tau}=\left(p_3-\dfrac{v}{p_4u+p_5}\right)v\\ \dfrac{dw}{d\tau}=\left(p_6-p_7\dfrac{w}{u}\right)w\end{cases}. \tag{2.30}$$

Donde$\rho=(p_1,\,p_2,\,p_3,\,p_4,\,p_5,\,p_6,\,p_7)\in\mathbb{R}^7_+$. El sistema (2.30), esta definido en el siguiente conjunto.

$$\tilde{\Omega}=\left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3/0<u\leq 1;0<v<p_3(p_4+p_5);0<w<\frac{p_6}{p_7}\right\}. \tag{2.31}$$

Así mismo, el cambio de variable efectuado es un difeomorfismo. φ : Ω˜ × R −→ Ω˜ × R, tal que $\varphi(u,v,w,\tau)=(ku,\frac{kr}{d_1}v,\frac{kr}{d_2}w,\frac{1}{r}\tau)=(x_1,x_2,x_3,t)$. La matriz jacobiana que se genera es

$$J_0=\begin{pmatrix}k & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{kr}{d_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{kr}{d_2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{r}\end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Donde$Det(J_0)=\frac{rk^3}{d_1d_2}>0$. Por lo tanto, el difeomorfismo preserva la orientación del tiempo. El trabajar con un sistema equivalente pero con menor número de parámetros permite reducir considerablemente los cálculos del análisis cualitativo de los puntos críticos.

2.6. Puntos críticos

Los puntos críticos son soluciones constantes del sistema donde todas las derivadas son cero. Representan estados en los que el sistema permanece indefinidamente si no hay perturbaciones. Por lo tanto, para encontrar las soluciones constantes, se iguala cada ecuación del sistema a cero.

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau}&=\left(1-u-\frac{v}{p_1v+u}-\frac{w}{p_2w+u}\right)u &&=0\\ \frac{dv}{d\tau}&=\left(p_3-\frac{v}{p_4u+p_5}\right)v &&=0,\\ \frac{dw}{d\tau}&=\left(p_6-p_7\frac{w}{u}\right)w &&=0.\end{aligned},$$

Luego de igualar a cero el sistema, se tiene que los puntos que anulan al sistema (2.30) son de la forma: (1,0,0), (u,ˆ 0,wˆ), (u^*,v^*,0) y (u,˜ v,˜ w˜) (también llamado equilibrios). De estos puntos, es claro que solo los puntos de la forma (u,˜ v,˜ w˜) pertenecen al conjunto $\tilde{\Omega}$ asociada al sistema (2.30) y por ello, se les denominara como puntos críticos del sistema (2.30). En consecuencia, el análisis se centra en los puntos de la forma (u,˜ v,˜ w˜). No obstante, se presenta todos los puntos capaces de anular al sistema (2.30) obtenidos, incluyendo aquellos ajenos al conjunto $\tilde{\Omega}$ en aras de la exhaustividad y rigor matemático.

Se procede a calcular los puntos de la forma $(\hat{u},0,\hat{w})$, $(u^*,v^*,0)$ y $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$.

2.6.1. Hallando el punto crítico de la forma (u,ˆ 0,wˆ)

Para el punto crítico (u,ˆ 0,wˆ), es necesario v = 0. Además, de la tercera ecuación del sistema (2.30) se desprende que

$$\left(p_6-p_7\frac{\hat{w}}{\hat{u}}\right)\hat{w}=0.$$

En consecuencia,

$$\hat{w} = \frac{p_6}{p_7}\hat{u}.$$

Luego, reemplazando este resultado en la primera linea del sistema (2.30), Se desprende que

$$\begin{aligned}
1 - \hat{u} - \frac{\frac{p_6}{p_7}\hat{u}}{\frac{p_2 p_6}{p_7}\hat{u} + \hat{u}} &= 0 \\
1 - \hat{u} - \frac{p_6}{p_2 p_6 + p_7} &= 0, \\
1 - \frac{p_6}{p_2 p_6 + p_7} &= \hat{u}, \\
\frac{p_6(p_1 - 1) + p_7}{p_2 p_6 + p_7} &= \hat{u}, \\
\mu &= \hat{u},
\end{aligned}$$

Entonces el segundo punto crítico es $\left(\mu, 0, \frac{p_6}{p_7}\mu\right)$, donde

$$\mu = \frac{p_6(p_1 - 1) + p_7}{p_2 p_6 + p_7}.$$

2.6.2. Hallando los puntos críticos de la forma $(u^*, v^*, 0)$

De manera similar para el punto $(u^*, v^*, 0)$, es necesario que $w = 0$ provocando que la segunda linea del sistema (2.30) queden de la siguiente forma:

$$\left(p_3 - \frac{v^*}{p_4 u^* + p_5}\right) v^* = 0,$$

se deduce que $v^* = p_3(p_4 u^* + p_5)$.

Reemplazando este ultimo resultado en la primera linea del sistema (2.30) se tiene que

$$\begin{aligned}
1 - u^* &= \frac{p_3(p_4 u^* + p_5)}{p_1 p_3(p_4 u^* + p_5) + u^*}, \\
\frac{p_1 p_3(p_4 u^* + p_5) + u^*}{p_3(p_4 u^* + p_5)} &= \frac{1}{1 - u^*}, \\
p_1 + \frac{u^*}{p_3(p_4 u^* + p_5)} &= \frac{1}{1 - u^*}, \\
\frac{u^*}{p_3(p_4 u^* + p_5)} &= \frac{1 + p_1(u^* - 1)}{1 - u^*}, \\
u^*(1 - u^*) &= p_3(p_4 u^* + p_5)[1 + p_1(u^* - 1)]
\end{aligned}$$

Provocando el siguiente polinomio de grado 2:

$$P_1 = u^{*2}(p_1 p_3 p_4 + 1) + u^*(p_3 p_4(1 - p_1) + p_1 p_3 p_5 - 1) + p_5(1 - p_1) = 0. \tag{2.33}$$

Donde, la discriminante del polinomio (2.33) es

$$\Delta_1 = (p_1 p_3(p_5 - p_4 + 1) - 1)^2 + 4p_5(p_1 p_3 p_4 + 1)(p_1 - 1).$$

Por lo tanto, se tiene los siguientes casos:

1. $\Delta_1 > 0$: Dos raíces reales del polinomio P_1.
2. $\Delta_1 = 0$: Una raíz real del polinomio P_1.
3. $\Delta_1 < 0$: Ninguna raíz real del polinomio P_1.

En este trabajo solo se verá los casos en donde las raíces son reales. Por ello:

Proposición 2.6.1. Si $1 < p_1$ y $p_5 - p_4 + 1 < \frac{1}{p_1 p_3}$, entonces $\Delta_1 > 0$.

Demostración. Sea $1 < p_1$ y $p_5 - p_4 + 1 < \frac{1}{p_1 p_3}$, se deduce que

$$p_1p_3(p_5 - p_4 + 1) < 1 \qquad 0 < p_1 - 1$$
$$p_1p_3(p_5 - p_4 + 1) - 1 < 0 \qquad 0 < (p_1p_3p_4 + 1)(p_1 - 1),$$

en consecuencia,

$$(p_1p_3(p_5 - p_4 + 1) - 1)^2 \geq 0 \qquad 4p_5(p_1p_3p_4 + 1)(p_1 - 1) > 0.$$

Entonces

$$\Delta_1 > 0.$$

□

Por lo tanto $$u^*_{1,2} = \frac{1 + p_1p_3(p_4 - p_5 - 1) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2(p_1p_3p_4 + 1)} = \alpha_{1,2}$$

Además,

$$v^*_{1,2} = p_3(p_4\alpha_{1,2} + p_5).$$

El tercer y cuarto punto crítico son:

$$(u^*_1, v_1^*, 0) = (\alpha_1, p_3(p_4\alpha_1 + p_5), 0).$$
$$(u^*_2, v_2^*, 0) = (\alpha_2, p_3(p_4\alpha_2 + p_5), 0).$$

Donde,

$$\alpha_1 = \frac{1 + p_1p_3(p_4 - p_5 - 1) + \sqrt{\Delta_1}}{2(p_1p_3p_4 + 1)}$$
$$\alpha_2 = \frac{1 + p_1p_3(p_4 - p_5 - 1) - \sqrt{\Delta_1}}{2(p_1p_3p_4 + 1)},$$

Proposición 2.6.2. Si $p_1 = 1$ y $p_5 - p_4 + 1 = \frac{1}{p_3}$, entonces $\Delta_1 = 0$.

Demostración. Sea $p_1 = 1$ y $p_5 - p_4 + 1 = \frac{1}{p_3}$, en consecuencia

$$\Delta_1 = (p_3(p_5 - p_4 + 1) - 1)^2.$$

Entonces

$$\Delta_1 = 0.$$

□

Por lo tanto, el quinto punto crítico es

$$(u^*, v^*, 0) = (0, p_3p_5, 0).$$

Sin embargo, hay que mencionar que al reemplazar en la primera y tercera linea del sistema (2.30) se obtiene como resultado el indefinido $\frac{0}{0}$. Por ello, no se cuenta este punto crítico en el estudio.

2.6.3. Hallando los puntos críticos de la forma $(u,\tilde{} v,\tilde{} w\tilde{})$

De manera análoga para el punto $(u,\tilde{} v,\tilde{} w\tilde{})$, se iguala a cero el sistema (2.30), tomando en cuenta que $(u,\tilde{} v,\tilde{} w\tilde{}) \neq (0,0,0)$, es decir,

$$0 = \left(1 - \tilde{u} - \frac{\tilde{v}}{p_1\tilde{v} + \tilde{u}} - \frac{\tilde{w}}{p_2\tilde{w} + \tilde{u}}\right)\tilde{u},$$
$$0 = \left(p_3 - \frac{\tilde{v}}{p_4\tilde{u} + p_5}\right)\tilde{v},$$
$$0 = \left(p_6 - p_7\frac{\tilde{w}}{\tilde{u}}\right)\tilde{w},$$

en consecuencia,

$$\tilde{u} = 1 - \frac{\tilde{v}}{p_1\tilde{v} + \tilde{u}} - \frac{\tilde{w}}{p_2\tilde{w} + \tilde{u}}, \tag{2.34}$$
$$\tilde{v} = p_3(p_4\tilde{u} + p_5)\ , \tag{2.35}$$
$$\tilde{w} = \frac{p_6}{p_7}\tilde{u}, \tag{2.36}$$

reemplazando las ecuaciones (2.35) y (2.36) en (2.34), se tiene

$$\tilde{u} = 1 - \frac{p_3(p_4\tilde{u} + p_5)}{p_1p_3(p_4\tilde{u} + p_5) + \tilde{u}} - \frac{p_6\tilde{u}}{p_2p_6\tilde{u} + p_7\tilde{u}}$$
$$\tilde{u} = \frac{p_2p_6 + p_7 - p_6}{p_2p_6 + p_7} - \frac{p_3(p_4\tilde{u} + p_5)}{p_1p_3(p_4\tilde{u} + p_5) + \tilde{u}}.\ ,$$

Luego, se tiene

$$\tilde{u} + \frac{p_3(p_4\tilde{u} + p_5)}{p_1p_3(p_4\tilde{u} + p_5) + \tilde{u}} = \frac{p_6p_2 + p_7 - p_6}{p_2p_6 + p_7},$$
$$\frac{\tilde{u}p_1p_3(p_4\tilde{u} + p_5) + \tilde{u}^2 + p_3(p_4\tilde{u} + p_5)}{\tilde{u}(p_1p_3p_4 + 1) + p_1p_3p_5} = 1 - \frac{p_6}{p_2p_6 + p_7},$$
$$\frac{\tilde{u}^2(p_1p_3p_4 + 1) + \tilde{u}p_3(p_1p_5 + p_4) + p_3p_5}{\tilde{u}(p_1p_3p_4 + 1) + p_1p_3p_5} - 1 = -\frac{p_6}{p_2p_6 + p_7},$$
$$\frac{\tilde{u}^2(p_1p_3p_4 + 1) + \tilde{u}(p_1p_3p_5 + p_3p_4 - p_1p_3p_4 - 1) + p_3p_5(1 - p_1)}{\tilde{u}(p_1p_3p_4 + 1) + p_1p_3p_5} = -\frac{p_6}{p_2p_6 + p_7},$$
$$(p_2p_6 + p_7)[\tilde{u}^2(p_1p_3p_4 + 1) + \tilde{u}(p_1p_3p_5 + p_3p_4 - p_1p_3p_4 - 1) + p_3p_5(1 - p_1)] = -p_6(\tilde{u}(p_1p_3p_4 + 1) + p_1p_3p_5).$$

$(p_2p_6 + p_7)(p_1p_3p_4 + 1)\tilde{u}^2 + p_3p_5(p_2p_6 + p_7)(1 - p_1) + p_1p_3p_5p_6.\ \tilde{u}[(p_2p_6 + p_7)(p_1p_3p_5 + p_3p_4 - p_1p_3p_4 - 1) + p_6(p_1p_3p_4 + 1)]$.

Resultando el polinomio de grado dos:

$$P_2 = \tilde{u}^2AB + \tilde{u}(AC + p_6B) + p_3p_5(AD + p_1p_6) = 0, \tag{2.37}$$

donde:

$$A = p_2p_6 + p_7,$$
$$B = p_1p_3p_4 + 1,$$
$$C = p_1p_3p_5 + p_3p_4 - p_1p_3p_4 - 1,$$
$$D = 1 - p_1,$$
$$E = -C,$$
$$= 1 + p_1p_3p_4 - p_3p_4 - p_1p_3p_5$$

Luego, la cantidad de raíces del polinomio (2.37), depende de su discriminante:

$$\Delta_2 = (AC + p_6B)^2 - 4p_3p_5AB(AD + p_1p_6). \tag{2.38}$$

Teniendo así los siguiente casos:

1. $\Delta_2 > 0$: Dos raíces reales del polinomio P_2.
2. $\Delta_2 = 0$: Una raíz real del polinomio P_2.
3. $\Delta_2 < 0$: Ninguna raíz real del polinomio P_2.

En este trabajo solo se verá los casos en donde las raíces son reales, por ello

Observación (1): Si $(AC + p_6B)^2 > 4p_3p_5AB(AD + p_1p_6)$. Entonces $\Delta_2 > 0$, en consecuencia,

$$\tilde{u}_1 = \frac{AE - p_6B + \sqrt{\Delta_2}}{2AB} = \theta_1, \tag{2.39}$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{AE - p_6B - \sqrt{\Delta_2}}{2AB} = \theta_2. \tag{2.40}$$

reemplazando (2.39) y (2.40) en (2.35) y (2.36), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= p_3(p_4\theta_1 + p_5) \\ \tilde{w}_1 &= \frac{p_6}{p_7}\theta_1, \\ \tilde{v}_2 &= p_3(p_4\theta_2 + p_5), \\ \tilde{w}_2 &= \frac{p_6}{p_7}\theta_2. \end{aligned},$$

Por lo tanto, el sexto y séptimo punto crítico son:

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1) &= \left(\theta_1, p_3(p_4\theta_1 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_1\right) \\ (\tilde{u}_2, \tilde{v}_2, \tilde{w}_2) &= \left(\theta_2, p_3(p_4\theta_2 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_2\right). \end{aligned},$$

Donde,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{AE - p_6B + \sqrt{\Delta_2}}{2AB} \\ \theta_2 &= \frac{AE - p_6B - \sqrt{\Delta_2}}{2AB}. \end{aligned},$$

Observación (2): Si $(AC + p_6B)^2 = 4p_3p_5AB(AD + p_1p_6)$. Entonces $\Delta_2 = 0$, en consecuencia,

$$\tilde{u}_3 = \frac{AE - p_6B}{2AB} = \theta_3, \tag{2.41}$$

reemplazando (2.41) en (2.35) y (2.36), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{v}_3 &= p_3(p_4\theta_3 + p_5) \\ \tilde{w}_3 &= \frac{p_6}{p_7}\theta_3. \end{aligned},$$

Por lo tanto, el octavo punto crítico es:

$$(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3, \tilde{w}_3) = \left(\theta_3, p_3(p_4\theta_3 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_3\right).$$

Donde,

$$\theta_3 = \frac{AE - p_6B}{2AB}.$$

En resumen, los puntos encontrados son

(2.42)

(2.43)

(2.44)

$$(u_1, v_1, w_1) = (1, 0, 0),$$
$$(u_2, v_2, w_2) = \left(\mu, 0, \frac{p_6\mu}{p_7}\right),$$
$$(u_3, v_3, w_3) = (\alpha_1, p_3(p_4\alpha_1 + p_5), 0),$$
$$(u_4, v_4, w_4) = (\alpha_2, p_3(p_4\alpha_2 + p_5), 0),$$
$$(u_5, v_5, w_5) = \left(\theta_1, p_3(p_4\theta_1 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_1\right). \quad (2.45)\ (2.46)$$
$$(u_6, v_6, w_6) = \left(\theta_2, p_3(p_4\theta_2 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_2\right), \quad (2.47)$$
$$(u_7, v_7, w_7) = \left(\theta_3, p_3(p_4\theta_3 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_3\right). \quad (2.48)$$

Note que los siete puntos críticos no existen al mismo tiempo ya que su existencia esta ligado a diferentes escenarios, los cuales serán analizados de manera cualitativa en el siguiente capítulo. Además,

$$\mu = \frac{p_6(p_1 - 1) + p_7}{A},$$
$$\alpha_1 = \frac{E + \sqrt{\Delta_1}}{2B},$$
$$\alpha_2 = \frac{E - \sqrt{\Delta_1}}{2B},$$
$$\theta_1 = \frac{AE - p_6B + \sqrt{\Delta_2}}{2AB},$$
$$\theta_2 = \frac{AE - p_6B - \sqrt{\Delta_2}}{2AB}$$
$$\theta_3 = \frac{AE - p_6B}{2AB}.$$

,

Donde,

$$\Delta_1 = E^2 - 4p_5BD$$

$$\Delta_2 = (AC + p_6B)^2 - 4p_3p_5AB(AD + p_1p_6),$$

$$A = p_2p_6 + p_7,$$

$$B = p_1p_3p_4 + 1,$$

$$C = p_1p_3p_5 + p_3p_4 - p_1p_3p_4 - 1,$$

$$D = 1 - p_1,$$

$$E = 1 + p_1p_3p_4 - p_3p_4 - p_1p_3p_5$$

A continuación, se muestra la interpretación de los siete puntos críticos:

1. $(1,0,0)$: La presa sobrevive, pero tanto el primer depredador como el segundo depredador se extinguen.
2. $\left(\mu, 0, \frac{p_6\mu}{p_7}\right)$
3. $(\alpha_1, p_3(p_4\alpha_1 + p_5), 0)$: La presa y el primer depredador sobreviven, pero el segundo depredador se extingue.
4. $(\alpha_2, p_3(p_4\alpha_2 + p_5), 0)$: La presa y el primer depredador sobreviven, pero el segundo depredador se extingue.
5. $\left(\theta_1, p_3(p_4\theta_1 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_1\right)$: Tanto la presa como ambos depredadores sobreviven, es decir, alcanzan el equilibrio ecológico.
6. $\left(\theta_2, p_3(p_4\theta_2 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_2\right)$: Tanto la presa como ambos depredadores sobreviven, es decir, alcanzan el equilibrio ecológico.
7. $\left(\theta_3, p_3(p_4\theta_3 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_3\right)$: Tanto la presa como ambos depredadores sobreviven, es decir, alcanzan el equilibrio ecológico.

Capítulo 3

Análisis cualitativo del modelo

En este capítulo se realiza un análisis cualitativo exhaustivo del modelo propuesto en (2.30). El estudio comienza con un análisis de estabilidad local en torno a los puntos críticos mediante el criterio de Routh-Hurwitz, siguiendo metodologías establecidas en la literatura [Pérez Núñez & López Cruz, 2017, Dubey & Upadhyay, 2004, Arora & Kumar, 2022, Do et al., 2011]. Posteriormente, se extiende el análisis a propiedades de estabilidad de todos los puntos críticos del sistema que coexisten, con especial énfasis en su influencia mutua.

3.1. Análisis cualitativo local

El análisis cualitativo local inicia con el cálculo de la matriz jacobiana del sistema (2.30), también llamada matriz variacional:

$$J = \begin{pmatrix} 1-2u-\dfrac{p_1v^2}{(p_1v+u)^2}-\dfrac{p_2w^2}{(p_2w+u)^2} & -\dfrac{u^2}{(p_1v+u)^2} & -\dfrac{u^2}{(p_2w+u)^2} \\ \dfrac{p_4v^2}{(p_4u+p_5)^2} & p_3-\dfrac{2v}{p_4u+p_5} & 0 \\ \dfrac{p_7w^2}{u^2} & 0 & p_6-\dfrac{2p_7w}{u} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

3.1.1. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_1,v_1,w_1)

Se reemplaza el punto crítico (u_1,v_1,w_1) en el Jacobiano J

$$J_1 = J(1,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_6 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

En consecuencia, su polinomio característico es:

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-p_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-p_6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-p_6)(\lambda+1)(\lambda-p_3), \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(1-p_3-p_6) + \lambda(p_3p_6-p_3-p_6) + p_3p_6. \tag{3.3}$$

De acuerdo al Teorema (1.4.1),

$$b^1{}_0 = 1,\ b^1{}_1 = 1-p_3-$$

$$p_6,\ b_{12} = p_3p_6 - p_3 -$$

$$p_6,\ b_{13} = p_3p_6.$$

Entonces, la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.3), es:

$$R_1 = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_0^1 & 0 \\ b_3^1 & b_2^1 & b_1^1 \\ 0 & 0 & b_3^1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

En consecuencia, el segundo menor principal de la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.3), es:

$$\begin{aligned} det(R_1(2,2)) &= \begin{vmatrix} b_1^1 & b_0^1 \\ b_3^1 & b_2^1 \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} 1-p_3-p_6 & 1 \\ p_3p_6 & p_3p_6-p_3-p_6 \end{vmatrix}, \\ &= (1-p_3-p_6)(p_3p_6-p_3-p_6)-p_3p_6, \\ &= (p_3)^2+2p_3p_6+(p_6)^2-p_3-p_6-(p_3)^2p_6-p_3(p_6)^2 \\ &= (p_3+p_6)^2-(p_3+p_6)(1+p_3p_6), \\ &= (p_3+p_6)(p_3+p_6-1-p_3p_6). \end{aligned},$$

En consecuencia es claro que

1. Si $p_3 + p_6 > 1 + p_3p_6$, entonces $det(R_1(2,2)) > 0$ y por la segunda o cuarta opción del Teorema (1.4.2), el polinomio (3.3) es un polinomio Hurwitz. Por lo tanto, el punto critico (u_1,v_1,w_1) es asintoticamente estable.

2. Si $1 + p_3p_6 > p_3 + p_6$, entonces $det(R_1(2,2)) < 0$, es decir, el polinomio (3.3) no es un polinomio Hurwitz. Por lo tanto, el punto critico (u_1,v_1,w_1) es inestable.

3.1.2. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_2,v_2,w_2)

Se reemplaza el punto crítico (u_2,v_2,w_2) en el Jacobiano J

$$J_2 = J\left(\mu, 0, \frac{p_6\mu}{p_7}\right) = \begin{pmatrix} M_1 & -1 & -M_2 \\ 0 & p_3 & 0 \\ \dfrac{(p_6)^2}{p_7} & 0 & -p_6 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

donde:

$$\begin{aligned} M_1 &= 1-2\mu-\frac{p_2(p_6)^2}{(p_2p_6+p_7)^2}, \\ &= 1-\frac{p_6(p_1-1)+p_7}{p_2p_6+p_7}-\mu-\frac{p_2(p_6)^2}{(p_2p_6+p_7)^2}, \\ &= \frac{p_6(p_2+1-p_1)}{p_2p_6+p_7}-\mu-\frac{p_2(p_6)^2}{(p_2p_6+p_7)^2}, \\ &= \frac{p_6(p_2+1-p_1)(p_2p_6+p_7)-p_2(p_6)^2}{(p_2p_6+p_7)^2}-\mu, \\ &= \frac{p_6(p_2-p_1)(p_2p_6+p_7)+p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}-\mu, \\ &= \frac{p_6(p_2-p_1)}{p_2p_6+p_7}+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}-\frac{p_6(p_1-1)+p_7}{p_2p_6+p_7} \\ &= \frac{p_6(p_2-2p_1+1)}{p_2p_6+p_7}+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}-\frac{p_7}{p_2p_6+p_7}, \\ &= \frac{p_6(p_2+1-2p_1)}{p_2p_6+p_7}+\frac{p_7(p_6-p_2p_6-p_7)}{(p_2p_6+p_7)^2}, \\ M_2 &= \frac{(p_7)^2}{(p_2p_6+p_7)^2}. \end{aligned},$$

En consecuencia, su polinomio característico es:

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - M_1 & 1 & M_2 \\ 0 & \lambda - p_3 & 0 \\ -\dfrac{(p_6)^2}{p_7} & 0 & \lambda + p_6 \end{vmatrix},$$
$$= (\lambda - p_3)\left((\lambda - M_1)(\lambda + p_6) + \frac{M_2(p_6)^2}{p_7}\right).$$

Por lo tanto

$$P_2(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(p_6 - p_3 - M_1) + \lambda\left(p_6\left(\frac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right) + p_3(M_1 - p_6)\right) - p_3p_6\left(\frac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right). \quad (3.6)$$

De acuerdo al Teorema (1.4.1),

$$\begin{aligned} b_0^2 &= 1, \\ b_1^2 &= p_6 - p_3 - M_1, \\ b_2^2 &= p_6\left(\frac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right) + p_3(M_1 - p_6) \\ b_3^2 &= -p_3p_6\left(\frac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right). \end{aligned},$$

Entonces, la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.6), es:

$$R_2 = \begin{pmatrix} b_1^2 & b_0^2 & 0 \\ b_3^2 & b_2^2 & b_1^2 \\ 0 & 0 & b_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

En consecuencia, el segundo menor principal de la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.6), es:

$$\begin{aligned} det(R_2(2,2)) &= \begin{vmatrix} b_1^2 & b_0^2 \\ b_3^2 & b_2^2 \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} p_6 - p_3 - M_1 & 1 \\ -p_3p_6\left(\dfrac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right) & p_6\left(\dfrac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right) + p_3(M_1 - p_6) \end{vmatrix}, \\ &= p_6(p_6 - p_3 - M_1)\left(\frac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right) + p_3(p_6 - p_3 - M_1)(M_1 - p_6) + p_3p_6\left(\frac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right) \\ &= p_6(p_6 - M_1)\left(\frac{p_6M_2}{p_7} - M_1\right) - p_3p_6(p_6 - M_1) - p_3(M_1 - p_6)(p_3 + M_1), \\ &= p_6(p_6 - M_1)\left(\frac{p_6M_2}{p_7} - M_1 - p_3\right) + p_3(p_6 - M_1)(p_3 + M_1), \\ &= \frac{M_2(p_6)^2}{p_7}(p_6 - M_1) + (p_3 - p_6)(p_6 - M_1)(p_3 + M_1), \\ &= (p_6 - M_1)\left(\frac{M_2(p_6)^2}{p_7} + (p_3 - p_6)(p_3 + M_1)\right). \end{aligned},$$

En consecuencia es claro que

1. Si $p_6 > M_1$ y $p_3 > p_6$, entonces $det(R_2(2,2)) > 0$ y por la segunda o cuarta opción del Teorema (1.4.2), el polinomio (3.6) es un polinomio Hurwitz. Por lo tanto, el punto critico (u_2,v_2,w_2) es asintoticamente estable.
2. Si $M_1 > p_6$, $p_6 > p_3$ y $0 > \frac{M_2(p_6)^2}{p_7} + (p_3 - p_6)(p_3 + M_1)$, entonces $det(R_2(2,2)) > 0$ y por la segunda o cuarta opción del Teorema (1.4.2), el polinomio (3.6) es un polinomio Hurwitz. Por lo tanto, el punto critico (u_2,v_2,w_2) es asintoticamente estable.
3. Si $p_6 > M_1$, $p_6 > p_3$ y $0 > \frac{M_2(p_6)^2}{p_7} + (p_3 - p_6)(p_3 + M_1)$, entonces $det(R_2(2,2)) < 0$, es decir, el polinomio (3.6) no es un polinomio Hurwitz. Por lo tanto, el punto critico (u_2,v_2,w_2) es inestable.
4. Si $M_1 > p_6$ y $p_3 > p_6$, entonces $det(R_2(2,2)) < 0$, es decir, el polinomio (3.6) no es un polinomio Hurwitz. Por lo tanto, el punto critico (u_2,v_2,w_2) es inestable.

3.1.3. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_3,v_3,w_3)

Se reemplaza el punto crítico (u_3,v_3,w_3) en el Jacobiano J

$$J_3 = J(\alpha_1, p_3(p_4\alpha_1 + p_5), 0) = \begin{pmatrix} M_3 & -M_4 & -1 \\ p_4(p_3)^2 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_6 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

donde:

$$M_3 = 1 - 2\alpha_1 - p_1(p_3)^3\left(\frac{p_4\alpha_1 + p_5}{\alpha_1 B + p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$M_4 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 B + p_1p_3p_5}\right)^2.$$

En consecuencia, su polinomio característico es:

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - M_3 & M_4 & 1 \\ -p_4(p_3)^2 & p_3 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - p_6 \end{vmatrix},$$
$$= (\lambda - p_6)[(\lambda - M_3)(\lambda + p_3) - M_4(p_3)^2p_4],$$

Por lo tanto

$P_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(p_3 - p_6 - M_3) + \lambda[p_3(M_4p_3p_4 - M_3) - p_6(p_3 - M_3)] - p_3p_6(M_4p_3p_4 - M_3)$. (3.9) De acuerdo al Teorema (1.4.1),

$b^3_0 = 1$,

$b_{31} = p_3 - p_6 - M_3$,

$b_{32} = p_3(M_4p_3p_4 - M_3) - p_6(p_3 - M_3)$, $b_{33} =$

$-p_3p_6(M_4p_3p_4 - M_3)$.

Entonces, la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.9), es:

$$R_3 = \begin{pmatrix} b^3_1 & b^3_0 & 0 \\ b^3_3 & b^3_2 & b^3_1 \\ 0 & 0 & b^3_3 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

En consecuencia, el segundo menor principal de la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.9), es:

$$det(R_3(2,2)) = \begin{vmatrix} b^3_1 & b^3_0 \\ b^3_3 & b^3_2 \end{vmatrix},$$
$$= \begin{vmatrix} p_3 - p_6 - M_3 & 1 \\ -p_3p_6(M_4p_3p_4 - M_3) & p_3(M_4p_3p_4 - M_3) - p_6(p_3 - M_3) \end{vmatrix},$$
$$= p_3(M_4p_3p_4 - M_3)(p_3 - p_6 - M_3) - p_6(p_3 - M_3)(p_3 - p_6 - M_3) + p_3p_6(M_4p_3p_4 - M_3)$$
$$= p_3(M_4p_3p_4 - M_3)(p_3 - M_3) - p_6(p_3 - M_3)(p_3 - p_6 - M_3),$$
$$= (p_3 - M_3)[p_3(M_4p_3p_4 - M_3) - p_6(p_3 - p_6 - M_3)],$$

En consecuencia es claro que

Teorema 3.1.1. Si $M_3 < 0$ y $p_3 - p_6 - M_3 < 0$. Entonces el punto critico (u_3,v_3,w_3) es asintoticamente estable.

Demostración. Sea $M_3 < 0$ y $p_3 - p_6 - M_3 < 0$, lo que significa que

$$p_3 - M_3 > 0, \qquad M_4p_3p_4 - M_3 > 0, \qquad p_6(p_3 - p_6 - M_3) < 0.$$

En consecuencia,

$$(p_3 - M_3)[p_3(M_4p_3p_4 - M_3) - p_6(p_3 - p_6 - M_3)] > 0.$$

Por lo tanto $det(R_3(2,2)) > 0$ y por la segunda o cuarta opción del Teorema (1.4.2), el polinomio (3.9) es un polinomio Hurwitz. Entonces, el punto critico (u_3,v_3,w_3) es asintoticamente estable. □

Teorema 3.1.2. Si $p_3 > p_6 + M_3$ y $M_4p_3p_4 < M_3$. Entonces el punto critico (u_3,v_3,w_3) es inestable.

Demostración. Sea $p_3 > p_6 + M_3$ y $M_4p_3p_4 < M_3$, lo que significa que

$$p_3 - M_3 > 0, \qquad M_4p_3p_4 - M_3 < 0, \qquad p_6(p_3 - p_6 - M_3) > 0.$$

En consecuencia,

$$(p_3 - M_3)[p_3(M_4p_3p_4 - M_3) - p_6(p_3 - p_6 - M_3)] < 0.$$

Por lo tanto $det(R_3(2,2)) < 0$, es decir, el polinomio (3.9) no es un polinomio Hurwitz. Entonces, el punto critico (u_3,v_3,w_3) es inestable. □

3.1.4. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_4,v_4,w_4)

Se reemplaza el punto crítico (u_4,v_4,w_4) en el Jacobiano J

$$J_4 = J(\alpha_2, p_3(p_4\alpha_2 + p_5), 0) = \begin{pmatrix} M_5 & -M_6 & -1 \\ p_4(p_3)^2 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_6 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

donde:

$$M_5 = 1 - 2\alpha_2 - p_1(p_3)^2\left(\frac{\alpha_2 p_4 + p_5}{\alpha_2 B + p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$M_6 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 B + p_1p_3p_5}\right)^2.$$

En consecuencia, su polinomio característico es:

$$P_4(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - M_5 & M_6 & 1 \\ -p_4(p_3)^2 & p_3 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - p_6 \end{vmatrix},$$
$$= (\lambda - p_6)[(\lambda - M_5)(\lambda + p_3) - M_6(p_3)^2p_4],$$

Por lo tanto

$P_4(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(p_3 - p_6 - M_5) + \lambda[p_3(M_6p_3p_4 - M_5) - p_6(p_3 - M_5)] - p_3p_6(M_6p_3p_4 - M_5)$. (3.12) De acuerdo al Teorema (1.4.1),

$b^4_0 = 1$,

$b_{41} = p_3 - p_6 - M_5$,

$b_{42} = p_3(M_6p_3p_4 - M_5) - p_6(p_3 - M_5)$, $b_{43} = -p_3p_6(M_6p_3p_4 - M_5)$.

Entonces, la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.12), es:

$$R_4 = \begin{pmatrix} b^4_1 & b^4_0 & 0 \\ b^4_3 & b^4_2 & b^4_1 \\ 0 & 0 & b^4_3 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

En consecuencia, el segundo menor principal de la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.12), es:

$$
\begin{aligned}
det(R_4(2,2)) &= \begin{vmatrix} b_1^4 & b_0^4 \\ b_3^4 & b_2^4 \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} p_3 - p_6 - M_5 & 1 \\ -p_3p_6(M_6p_3p_4 - M_5) & p_3(M_6p_3p_4 - M_5) - p_6(p_3 - M_5) \end{vmatrix}, \\
&= p_3(M_6p_3p_4 - M_5)(p_3 - p_6 - M_5) - p_6(p_3 - M_5)(p_3 - p_6 - M_5) + p_3p_6(M_6p_3p_4 - M_5) \\
&= p_3(M_6p_3p_4 - M_5)(p_3 - M_5) - p_6(p_3 - M_5)(p_3 - p_6 - M_5), \\
&= (p_3 - M_5)[p_3(M_6p_3p_4 - M_5) - p_6(p_3 - p_6 - M_6)]
\end{aligned}
,
$$

En consecuencia es claro que

Teorema 3.1.3. Si $M_5 > 0$ y $p_3 - p_6 - M_5 < 0$. Entonces el punto critico (u_4, v_4, w_4) es asintoticamente estable.

Demostración. Sea $M_5 > 0$ y $p_3 - p_6 - M_5 < 0$, lo que significa que

$$p_3 - M_5 > 0, \qquad M_6p_3p_4 - M_5 > 0, \qquad p_6(p_3 - p_6 - M_5) < 0.$$

En consecuencia,

$$(p_3 - M_5)[p_3(M_6p_3p_4 - M_5) - p_6(p_3 - p_6 - M_5)] > 0.$$

Por lo tanto $det(R_4(2,2)) > 0$ y por la segunda o cuarta opción del Teorema (1.4.2), el polinomio (3.12) es un polinomio Hurwitz. Entonces, el punto critico (u_4, v_4, w_4) es asintoticamente estable. □

Teorema 3.1.4. Si $p_3 > p_6 + M_5$ y $M_6p_3p_4 < M_5$. Entonces el punto critico (u_4, v_4, w_4) es inestable.

Demostración. Sea $p_3 > p_6 + M_5$ y $M_6p_3p_4 < M_5$, lo que significa que

$$p_3 - M_5 > 0, \qquad M_4p_3p_4 - M_5 < 0, \qquad p_6(p_3 - p_6 - M_5) > 0.$$

En consecuencia,

$$(p_3 - M_5)[p_3(M_6p_3p_4 - M_5) - p_6(p_3 - p_6 - M_5)] < 0.$$

Por lo tanto $det(R_4(2,2)) < 0$, es decir, el polinomio (3.12) no es un polinomio Hurwitz. Entonces, el punto critico (u_4, v_4, w_4) es inestable. □

3.1.5. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_5, v_5, w_5)

Se reemplaza el punto crítico (u_5, v_5, w_5) en el Jacobiano J

$$J_5 = J\left(\theta_1, p_3(p_4\theta_1 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_1\right) = \begin{pmatrix} 1 - M_7 & -M_8 & -\dfrac{(p_7)^2}{(p_2p_6 + p_7)^2} \\ (p_3)^2p_4 & -p_3 & 0 \\ \dfrac{(p_6)^2}{p_7} & 0 & -p_6 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
M_7 &= 2\theta_1 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1(p_3)^2\left(\frac{p_4\theta_1 + p_5}{\theta_1 B + p_1p_3p_5}\right)^2 > 0, \\
M_8 &= \left(\frac{\theta_1}{\theta_1 B + p_1p_3p_5}\right)^2 > 0.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, su polinomio característico es:

$$P_5(\lambda) = \begin{vmatrix} M_7 - 1 + \lambda & M_8 & \dfrac{(p_7)^2}{(p_2p_6 + p_7)^2} \\ -(p_3)^2 p_4 & p_3 + \lambda & 0 \\ -\dfrac{(p_6)^2}{p_7} & 0 & p_6 + \lambda \end{vmatrix},$$

$$= (M_7 - 1 + \lambda)(p_3 + \lambda)(p_6 + \lambda) + M_8(p_3)^2 p_4(p_6 + \lambda) + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}(p_3 + \lambda),$$

Por lo tanto

$$P_5(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(p_3 + p_6 + M_7 - 1) + \lambda\left[p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right] + p_3p_6\left[M_7 - 1 + M_8p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right] \tag{3.15}$$

De acuerdo al Teorema (1.4.1)

$$\begin{aligned} b_0^5 &= 1, \\ b_1^5 &= p_3 + p_6 + M_7 - 1, \\ b_2^5 &= p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2} \\ b_3^5 &= p_3p_6\left[M_7 - 1 + M_8p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right]. \end{aligned},$$

Entonces, la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.15), es:

$$R_5 = \begin{pmatrix} b_1^5 & b_0^5 & 0 \\ b_3^5 & b_2^5 & b_1^5 \\ 0 & 0 & b_3^5 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

En consecuencia, el segundo menor principal de la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.15), es:

$$\begin{aligned} det(R_5(2,2)) &= \begin{vmatrix} b_1^5 & b_0^5 \\ b_3^5 & b_2^5 \end{vmatrix}, \\ &= (p_3 + p_6 + M_7 - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &- p_3p_6\left(M_7 - 1 + M_8p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right), \\ &= (M_7 - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &+ p_3\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &+ p_6\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &- p_3p_6\left(M_7 - 1 + M_8p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right), \\ &= (M_7 - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &+ p_3\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8{p_3}^2 p_4\right) \\ &+ p_6\left(p_3p_6 + p_6(M_7 - 1) + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right), \end{aligned}$$

En consecuencia es claro que

Teorema 3.1.5. Si $M_7 \geq 1$, entonces el punto crítico (u_5, v_5, w_5) es asintoticamente estable.

Demostración. Sea $M_7-1 \geq 0$, y asumiendo que θ_1 es positivo por la Proposición (3.2.1), lo que significa que

$$\begin{aligned}(M_7-1)\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_7-1)+M_8{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)\geq 0,\\ p_3\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_7-1)+M_8{p_3}^2p_4\right)>0\\ p_6\left(p_3p_6+p_6(M_7-1)+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)>0.\end{aligned},$$

Por lo tanto $det(R_5(2,2)) > 0$ y por la segunda o cuarta opción del Teorema (1.4.2), el polinomio (3.15) es un polinomio Hurwitz. Entonces el punto crítico (u_5,v_5,w_5) es asintoticamente estable. □

Teorema 3.1.6. Si $p_3+p_6+M_7-1<0,\ p_3p_6+(p_3+p_6)(M_7-1)+M_8{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$ y $M_7-1+M_8p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$, entonces el punto crítico (u_5,v_5,w_5) es inestable.

Demostración. Sea $p_3+p_6+M_7-1<0,\ p_3p_6+(p_3+p_6)(M_7-1)+M_8{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$ y $M_7-1+M_8p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$, y asumiendo que θ_1 es positivo por la Proposición (3.2.1) significa que

$$\begin{aligned}&=(p_3+p_6+M_7-1)\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_7-1)+M_8{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)\\ &-p_3p_6\left(M_7-1+M_8p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)<0-\end{aligned}$$

Por lo tanto $det(R_5(2,2)) < 0$, es decir, el polinomio (3.15) no es un polinomio Hurwitz. Entonces el punto crítico (u_5,v_5,w_5) es inestable. □

3.1.6. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_6,v_6,w_6)

Se reemplaza el punto crítico (u_6,v_6,w_6) en el Jacobiano J

$$J_6=J\left(\theta_2,p_3(p_4\theta_2+p_5),\frac{p_6}{p_7}\theta_2\right)=\begin{pmatrix}1-M_9 & -M_{10} & -\frac{(p_7)^2}{(p_2p_6+p_7)^2}\\ (p_3)^2p_4 & -p_3 & 0\\ \frac{(p_6)^2}{p_7} & 0 & -p_6\end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

donde:

$$\begin{aligned}M_9&=2\theta_2+p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2+p_1(p_3)^2\left(\frac{p_4\theta_2+p_5}{\theta_2B+p_1p_3p_5}\right)^2\\ M_{10}&=\left(\frac{\theta_2}{\theta_2B+p_1p_3p_5}\right)^2>0.\end{aligned},$$

En consecuencia, su polinomio característico es:

$$P_6(\lambda) = \begin{vmatrix} M_9 - 1 + \lambda & M_{10} & \dfrac{(p_7)^2}{(p_2p_6 + p_7)^2} \\ -(p_3)^2 p_4 & p_3 + \lambda & 0 \\ -\dfrac{(p_6)^2}{p_7} & 0 & p_6 + \lambda \end{vmatrix},$$

$$= (M_9 - 1 + \lambda)(p_3 + \lambda)(p_6 + \lambda) + M_{10}(p_3)^2 p_4(p_6 + \lambda) + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}(p_3 + \lambda),$$

Por lo tanto

$$P_6(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(p_3 + p_6 + M_9 - 1) + \lambda\left[p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right] + p_3p_6\left[M_9 - 1 + M_{10}p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right] \tag{3.18}$$

De acuerdo al Teorema (1.4.1)

$$\begin{aligned} b_0^6 &= 1, \\ b_1^6 &= p_3 + p_6 + M_9 - 1, \\ b_2^6 &= p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2} \\ b_3^6 &= p_3p_6\left[M_9 - 1 + M_{10}p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right]. \end{aligned}$$

Entonces, la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.18), es:

$$R_6 = \begin{pmatrix} b_1^6 & b_0^6 & 0 \\ b_3^6 & b_2^6 & b_1^6 \\ 0 & 0 & b_3^6 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

En consecuencia, el segundo menor principal de la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.18), es:

$$\begin{aligned} det(R_6(2,2)) &= \begin{vmatrix} b_1^6 & b_0^6 \\ b_3^6 & b_2^6 \end{vmatrix}, \\ &= (p_3 + p_6 + M_9 - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &- p_3p_6\left(M_9 - 1 + M_{10}p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right), \\ &= (M_9 - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &+ p_3\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &+ p_6\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &- p_3p_6\left(M_9 - 1 + M_{10}p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right), \\ &= (M_9 - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right) \\ &+ p_3\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10}{p_3}^2 p_4\right) \\ &+ p_6\left(p_3p_6 + p_6(M_9 - 1) + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right), \end{aligned}$$

En consecuencia es claro que

Teorema 3.1.7. Si $M_9 \geq 1$, entonces el punto crítico (u_6, v_6, w_6) es asintoticamente estable.

Demostración. Sea $M_9 - 1 \geq 0$, lo que significa que

$$(M_9-1)\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_9-1)+M_{10}{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)\geq 0$$
$$p_3\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_9-1)+M_{10}{p_3}^2p_4\right)>0,$$
$$p_6\left(p_3p_6+p_6(M_9-1)+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)>0.$$

,

Por lo tanto $det(R_6(2,2)) > 0$ y por la segunda o cuarta opción del Teorema (1.4.2), el polinomio (3.18) es un polinomio Hurwitz. Entonces el punto crítico (u_6,v_6,w_6) es asintoticamente estable. □

Teorema 3.1.8. Si $p_3+p_6+M_9-1<0,\ p_3p_6+(p_3+p_6)(M_9-1)+M_{10}{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$ y $M_9-1+M_{10}p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$, entonces el punto crítico (u_6,v_6,w_6) es inestable.

Demostración. Sea $p_3+p_6+M_9-1<0,\ p_3p_6+(p_3+p_6)(M_9-1)+M_{10}{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$ y $M_9-1+M_{10}p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$ significa que

$$=(p_3+p_6+M_9-1)\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_9-1)+M_{10}{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)$$
$$-p_3p_6\left(M_9-1+M_{10}p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)<0-$$

Por lo tanto $det(R_6(2,2)) < 0$, es decir, el polinomio (3.18) no es un polinomio Hurwitz. Entonces el punto crítico (u_6,v_6,w_6) es inestable. □

3.1.7. Análisis cualitativo local del punto crítico (u_7,v_7,w_7)

Se reemplaza el punto crítico (u_7,v_7,w_7) en el Jacobiano J,

$$J_7=J\left(\theta_3,p_3(p_4\theta_3+p_5),\frac{p_6}{p_7}\theta_3\right)=\begin{pmatrix}1-M_{11} & -M_{12} & -\frac{(p_7)^2}{(p_2p_6+p_7)^2}\\ (p_3)^2p_4 & & 0\\ \frac{(p_6)^2}{p_7} & 0 & \\ & -p_3 & \\ & & -p_6\end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

donde:

$$M_{11}=2\theta_3+p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2+p_1(p_3)^2\left(\frac{p_4\theta_3+p_5}{\theta_3B+p_1p_3p_5}\right)^2 \quad > 0, > 0.$$
$$M_{12}=\left(\frac{\theta_3}{\theta_3B+p_1p_3p_5}\right)^2$$

En consecuencia, su polinomio característico es:

$$P_7(\lambda) = \begin{vmatrix} M_{11} - 1 + \lambda & M_{12} & \dfrac{(p_7)^2}{(p_2p_6 + p_7)^2} \\ -(p_3)^2 p_4 & p_3 + \lambda & 0 \\ -\dfrac{(p_6)^2}{p_7} & 0 & p_6 + \lambda \end{vmatrix},$$

$$= (M_{11} - 1 + \lambda)(p_3 + \lambda)(p_6 + \lambda) + M_{12}(p_3)^2 p_4(p_6 + \lambda) + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}(p_3 + \lambda),$$

Por lo tanto

$$P_7(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(p_3 + p_6 + M_{11} - 1) + \lambda\left[p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_{12}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right]$$
$$+ p_3p_6\left[M_{11} - 1 + M_{12}p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right] \tag{3.21}$$

De acuerdo al Teorema (1.4.1)

$$\begin{aligned} b_0^7 &= 1, \\ b_1^7 &= p_3 + p_6 + M_{11} - 1, \\ b_2^7 &= p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_8{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2} \\ b_3^7 &= p_3p_6\left[M_{11} - 1 + M_{12}p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right]. \end{aligned},$$

Entonces, la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.21), es:

$$R_7 = \begin{pmatrix} b_1^7 & b_0^7 & 0 \\ b_3^7 & b_2^7 & b_1^7 \\ 0 & 0 & b_3^7 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

En consecuencia, el segundo menor principal de la matriz Hurtwitz asociada al polinomio (3.21), es:

$$det(R_7(2,2)) = \begin{vmatrix} b_1^7 & b_0^7 \\ b_3^7 & b_2^7 \end{vmatrix},$$
$$= (p_3 + p_6 + M_{11} - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_{12}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right)$$
$$- p_3p_6\left(M_{11} - 1 + M_{12}p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right),$$
$$= (M_{11} - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_{12}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right)$$
$$+ p_3\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_{12}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right)$$
$$+ p_6\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_{12}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right)$$
$$- p_3p_6\left(M_{11} - 1 + M_{12}p_3p_4 + \frac{p_6p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right),$$
$$= (M_{11} - 1)\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_{12}{p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right)$$
$$+ p_3\left(p_3p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_{12}{p_3}^2 p_4\right)$$
$$+ p_6\left(p_3p_6 + p_6(M_{11} - 1) + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2p_6 + p_7)^2}\right),$$

En consecuencia es claro que

Teorema 3.1.9. Si $M_{11} \geq 1$, entonces el punto crítico (u_7,v_7,w_7) es asintoticamente estable.

Demostración. Sea $M_{11}-1 \geq 0$, y asumiendo que θ_3 es positivo por la Proposición (3.2.2), lo que significa que

$$(M_{11}-1)\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_{11}-1)+M_{12}{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)\geq 0,$$
$$p_3\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_{11}-1)+M_{12}{p_3}^2p_4\right)>0$$
$$p_6\left(p_3p_6+p_6(M_{11}-1)+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)>0.$$

Por lo tanto $det(R_7(2,2)) > 0$ y por la segunda o cuarta opción del Teorema (1.4.2), el polinomio (3.21) es un polinomio Hurwitz. Entonces el punto crítico (u_7,v_7,w_7) es asintoticamente estable. □

Teorema 3.1.10. Si $p_3+p_6+M_{11}-1<0$, $p_3p_6+(p_3+p_6)(M_{11}-1)+M_{12}{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$ y $M_{11}-1+M_{12}p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$, entonces el punto crítico (u_7,v_7,w_7) es inestable.

Demostración. Sea $p_3+p_6+M_{11}-1<0$, $p_3p_6+(p_3+p_6)(M_{11}-1)+M_{12}{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$ y $M_{11}-1+M_{12}p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}>0$, y asumiendo que θ_3 es positivo por la Proposición (3.2.2) significa que

$$=(p_3+p_6+M_{11}-1)\left(p_3p_6+(p_3+p_6)(M_{11}-1)+M_{12}{p_3}^2p_4+\frac{(p_6)^2p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)$$
$$-p_3p_6\left(M_{11}-1+M_{12}p_3p_4+\frac{p_6p_7}{(p_2p_6+p_7)^2}\right)<0-$$

Por lo tanto $det(R_7(2,2)) < 0$, es decir, el polinomio (3.21) no es un polinomio Hurwitz. Entonces el punto crítico (u_7,v_7,w_7) es inestable. □

Resumiendo lo obtenido:

1. El punto crítico $(u_1,v_1,w_1) = (1,0,0)$ es:
   1.1. Asintóticamente estable si $p_3 + p_6 > 1 + p_3p_6$.
   1.2. Inestable si $1 + p_3p_6 > p_3 + p_6$.
2. El punto crítico $(u_2,v_2,w_2)=\left(\mu,0,\frac{p_6\mu}{p_7}\right)$ es:
   2.1. Asintóticamente estable si $p_6 > M_1$ y $p_3 > p_6$.
   2.2. Asintóticamente estable si $M_1>p_6$, $p_6>p_3$ y $0>\frac{M_2(p_6)^2}{p_7}+(p_3-p_6)(p_3+M_1)$.
   2.3. Inestable si $p_6>M_1$, $p_6>p_3$ y $0>\frac{M_2(p_6)^2}{p_7}+(p_3-p_6)(p_3+M_1)$.
   2.4. Inestable $M_1 > p_6$ y $p_3 > p_6$.
3. El punto crítico $(u_3,v_3,w_3) = (\alpha_1,p_3(p_4\alpha_1 + p_5),0)$ es:
   3.1. Asintóticamente estable si $M_3 < 0$ y $p_3 - p_6 - M_3 < 0$.
   3.2. Inestable si $p_3 > p_6 + M_3$ y $M_4p_3p_4 < M_3$.
4. El punto crítico $(u_4,v_4,w_4) = (\alpha_2,p_3(p_4\alpha_2 + p_5),0)$ es:
   4.1. Asintóticamente estable si $M_5 < 0$ y $p_3 - p_6 - M_5 < 0$.
   4.2. Inestable si $p_3 > p_6 + M_5$ y $M_6p_3p_4 < M_5$.
5. El punto crítico $(u_5,v_5,w_5)=\left(\theta_1,p_3(p_4\theta_1+p_5),\frac{p_6}{p_7}\theta_1\right)$ es:

5.1. Asintóticamente estable si $M_7 \geq 1$.

5.2. Inestable si $p_3 + p_6 + M_7 - 1 < 0,\ p_3 p_6 + (p_3 + p_6)(M_7 - 1) + M_8 {p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2 p_6 + p_7)^2} > 0$ y $M_7 - 1 + M_8 p_3 p_4 + \frac{p_6 p_7}{(p_2 p_6 + p_7)^2} > 0$.

6. El punto crítico $(u_6, v_6, w_6) = \left(\theta_2, p_3(p_4\theta_2 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_2\right)$ es:

6.1. Asintóticamente estable si $M_9 \geq 1$.

6.2. Inestable si $p_3 + p_6 + M_9 - 1 < 0,\ p_3 p_6 + (p_3 + p_6)(M_9 - 1) + M_{10} {p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2 p_6 + p_7)^2} > 0$ y $M_9 - 1 + M_{10} p_3 p_4 + \frac{p_6 p_7}{(p_2 p_6 + p_7)^2} > 0$.

7. El punto crítico $(u_7, v_7, w_7) = \left(\theta_3, p_3(p_4\theta_3 + p_5), \frac{p_6}{p_7}\theta_3\right)$ es:

7.1. Asintóticamente estable si $M_{11} \geq 1$.

7.2. Inestable si $p_3 + p_6 + M_{11} - 1 < 0,\ p_3 p_6 + (p_3 + p_6)(M_{11} - 1) + M_{12} {p_3}^2 p_4 + \frac{(p_6)^2 p_7}{(p_2 p_6 + p_7)^2} > 0$ y $M_{11} - 1 + M_{12} p_3 p_4 + \frac{p_6 p_7}{(p_2 p_6 + p_7)^2} > 0$.

Donde:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{p_6(p_1 - 1) + p_7}{A}, \\
\alpha_1 &= \frac{E + \sqrt{\Delta_1}}{2B}, \\
\alpha_2 &= \frac{E - \sqrt{\Delta_1}}{2B}, \\
\theta_1 &= \frac{AE - p_6 B + \sqrt{\Delta_2}}{2AB}, \\
\theta_2 &= \frac{AE - p_6 B - \sqrt{\Delta_2}}{2AB} \\
\theta_3 &= \frac{AE - p_6 B}{2AB}.
\end{aligned}
,
$$

Además,

$$\Delta_1 = E^2 - 4p_5BD$$

$$\Delta_2 = (AC + p_6B)^2 - 4p_3p_5AB(AD + p_1p_6),$$

$$A = p_2p_6 + p_7,$$

$$B = p_1p_3p_4 + 1,$$

$$C = p_1p_3p_5 + p_3p_4 - p_1p_3p_4 - 1,$$

$$D = 1 - p_1,$$

$$E = 1 + p_1p_3p_4 - p_3p_4 - p_1p_3p_5.$$ Asimismo,

$$M_1 = \frac{p_6(p_2 + 1 - 2p_1)}{A} + \frac{p_7(p_6 - p_2p_6 - p_7)}{(A)^2}, \qquad M_2 = \frac{(p_7)^2}{(A)^2},$$

$$M_3 = 1 - 2\alpha_1 - p_1(p_3)^2\left(\frac{\alpha_1p_4 + p_5}{\alpha_1B + p_1p_3p_5}\right)^2, \qquad M_4 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1B + p_1p_3p_5}\right)^2.$$

$$M_5 = 1 - 2\alpha_2 - p_1(p_3)^2\left(\frac{\alpha_2p_4 + p_5}{\alpha_2B + p_1p_3p_5}\right)^2, \qquad M_6 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2B + p_1p_3p_5}\right)^2,$$

$$M_7 = 2\theta_1 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_1 + p_5}{\theta_1B + p_1p_3p_5}\right)^2, \qquad M_8 = \left(\frac{\theta_1}{\theta_1B + p_1p_3p_5}\right)^2,$$

$$M_9 = 2\theta_2 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_2 + p_5}{\theta_2B + p_1p_3p_5}\right)^2, \qquad M_{10} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_2B + p_1p_3p_5}\right)^2$$

$$M_{11} = 2\theta_3 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_3 + p_5}{\theta_3B + p_1p_3p_5}\right)^2, \qquad M_{12} = \left(\frac{\theta_3}{\theta_3B + p_1p_3p_5}\right)^2.$$

3.2. Interdependencia

Hay que tener en cuenta que los siete puntos críticos no existen al mismo tiempo. La existencia de los puntos críticos (u_1,v_1,w_1) y (u_2,v_2,w_2) no tienen restricciones, es decir, existen en todo momento. Mientras que la existencia de los puntos críticos (u_3,v_3,w_3) y (u_4,v_4,w_4), queda sujeto a $\Delta_1 > 0$. Por otro lado, cuando $\Delta_2 > 0$ significa que los puntos críticos (u_5,v_5,w_5) y (u_6,v_6,w_6) existen al mismo tiempo y cuando $\Delta_2 = 0$ provoca que exista (u_7,v_7,w_7). Todas estas posibilidades en camina a estudiar que injerencia tiene la estabilidad o inestabilidad de un punto crítico sobre los demás. Por ello a continuación, se presenta algunos resultados que contemplan lo antes mencionado. Se divide en diferentes casos, en el primer caso, se considera solo a los dos primeros puntos críticos. En el segundo se estudia la influencia entre los puntos críticos (u_3,v_3,w_3) y (u_4,v_4,w_4). Por ultimo en el tercer caso se estudia la estabilidad entre los puntos críticos (u_5,v_5,w_5) y (u_6,v_6,w_6).

3.2.1. Primer caso

1. Sea $p_6 > 1$, $p_3 > 1$ y $p_3 > p_6$, entonces:

$$-1 > -p_6,$$

$$0 > 1 - p_6,$$

$$1 - p_6 > p_6(1 - p_6),\ p_6(1 - p_6) > p_3(1 - p_6),$$

$$1 - p_6 > p_3(1 - p_6),\ 1 + p_3p_6 > p_3 + p_6.$$

Luego, es claro que:

1.1. El primer caso de estabilidad asintótica del punto crítico (u_2,v_2,w_2) y sea $p_6 > 1$, $p_3 > 1$ asegura la inestabilidad del punto crítico (u_1,v_1,w_1).

1.2. El segundo caso de inestabilidad del punto crítico (u_2,v_2,w_2) y sea $p_6 > 1$, $p_3 > 1$ asegura la inestabilidad del punto crítico (u_1,v_1,w_1).

2. Sea $1 > p_6$, $1 > p_3$ y $p_6 > p_3$, entonces:

$$\begin{aligned} -p_6 &> -1, \\ 1 - p_6 &> 0, \\ 1 - p_6 &> p_6(1 - p_6),\ p_6(1 - p_6) \\ &> p_3(1 - p_6)(1 - p_6), \\ 1 - p_6 &> p_3(1 - p_6),\ 1 \\ &+ p_3p_6 > p_3 + p_6. \end{aligned}$$

Luego, es claro que:

2.1. El segundo caso de estabilidad asintótica del punto crítico (u_2,v_2,w_2) y sea $1 > p_6$, $1 > p_3$ asegura la inestabilidad del punto crítico (u_1,v_1,w_1).

2.2. El primer caso de inestabilidad del punto crítico (u_2,v_2,w_2) y sea $1 > p_6$, $1 > p_3$ asegura la inestabilidad del punto crítico (u_1,v_1,w_1).

3. Sea $p_6 > 1 > p_3$, entonces:

$$\begin{aligned} -1 &> -p_6, \\ 0 &> 1 - p_6, \\ p_3(1 - p_6) &> 1 - p_6,\ p_3 + \\ p_6 &> 1 + p_3p_6. \end{aligned}$$

Luego, es claro que:

3.1. El segundo caso de estabilidad asintótica del punto crítico (u_2,v_2,w_2) y sea $p_6 > 1 > p_3$ asegura la estabilidad asintótica del punto crítico (u_1,v_1,w_1).

3.2. El primer caso de inestabilidad del punto crítico (u_2,v_2,w_2) y sea $p_6 > 1 > p_3$ asegura la estabilidad asintótica del punto crítico (u_1,v_1,w_1).

4. Sea $p_3 > 1 > p_6$, entonces:

$$\begin{aligned} -1 &> -p_3, \\ 0 &> 1 - p_3, \\ p_6(1 - p_3) &> 1 - p_3,\ p_3 + \\ p_6 &> 1 + p_3p_6. \end{aligned}$$

Luego, es claro que:

4.1. El primer caso de estabilidad asintótica del punto crítico (u_2,v_2,w_2) y sea $p_3 > 1 > p_6$ asegura la estabilidad asintótica del punto crítico (u_1,v_1,w_1).

4.2. El segundo caso de inestabilidad del punto crítico (u_2,v_2,w_2) y sea $p_3 > 1 > p_6$ asegura la estabilidad asintótica del punto crítico (u_1,v_1,w_1).

3.2.2. Segundo caso

Por la naturaleza de α_1 y α_2 es claro que $\alpha_1 > \alpha_2$, en consecuencia

$$1 - 2\alpha_2 > 1 - 2\alpha_1$$

Por otro lado, es claro que

$$p_3{}^2\left(\frac{p_4\alpha_1 + p_5}{\alpha_1 B + p_1 p_3 p_5}\right)^2 = \left(\frac{p_3(p_4\alpha_1 + p_5)}{p_1 p_3(p_4\alpha_1 + p_5) + \alpha_1}\right)^2, \tag{3.23}$$

$$= \frac{1}{\left(p_1 + \frac{\alpha_1}{p_3(p_4\alpha_1 + p_5)}\right)^2}, \tag{3.24}$$

$$= \frac{1}{\left(p_1 + \frac{1}{p_3 p_4}\left(1 - \frac{p_3 p_5}{p_3(p_4\alpha_1 + p_5)}\right)\right)^2}, \tag{3.25}$$

$$= \frac{1}{\left(p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_1 + p_5)}\right)^2}. \tag{3.26}$$

De manera análoga para α_2

$$p_3{}^2\left(\frac{p_4\alpha_2 + p_5}{\alpha_2 B + p_1 p_3 p_5}\right)^2 = \frac{1}{\left(p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_2 + p_5)}\right)^2}.$$

Luego, es claro que

$$p_3 p_4(p_4\alpha_1 + p_5) > p_3 p_4(p_4\alpha_2 + p_5), \tag{3.27}$$

$$\frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_2 + p_5)} > \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_1 + p_5)}, \tag{3.28}$$

$$-\frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_1 + p_5)} > -\frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_2 + p_5)}, \tag{3.29}$$

$$p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_1 + p_5)} > p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_2 + p_5)}, \tag{3.30}$$

$$\frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_2 + p_5)}} > \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_1 + p_5)}}. \tag{3.31}$$

Sin embargo, no queda de todo claro la relación entre

$$\frac{1}{\left(p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_1 + p_5)}\right)^2} \tag{3.32}$$

y

$$\frac{1}{\left(p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_2 + p_5)}\right)^2}. \tag{3.33}$$

Como no es claro el signo de α_1 y α_2, entonces es posible que

$$\frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_1 + p_5)}} = -\frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\alpha_2 + p_5)}}.$$

Provocando que las ecuaciones (3.32) y (3.33) sean iguales. Las otras opciones consiste en que la ecuación (3.32) sean mayor que (3.33) y que la ecuación (3.33) sea mayor que (3.32). Por ello, a continuación se presenta los efectos en la estabilidad local que esto conlleva.

1. Si las ecuaciones (3.32) y (3.33) son iguales, entonces:

$$1-2\alpha_2-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_2+p_5}{\alpha_2B+p_1p_3p_5}\right)^2>1-2\alpha_1-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_1+p_5}{\alpha_1B+p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$M_5>M_3.$$

Entonces la condición de estabilidad asintótica del punto crítico (u_4,v_4,w_4) provoca que el punto crítico (u_3,v_3,w_3) sea asintóticamente estable.

2. Si la ecuación (3.32) es mayor que (3.33), entonces:

$$1-2\alpha_2-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_2+p_5}{\alpha_2B+p_1p_3p_5}\right)^2>1-2\alpha_1-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_1+p_5}{\alpha_1B+p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$M_5>M_3.$$

Entonces la condición de estabilidad asintótica del punto crítico (u_4,v_4,w_4) provoca que el punto crítico (u_3,v_3,w_3) sea asintóticamente estable.

3. Si la ecuación (3.33) es mayor que (3.32), entonces no es claro la relación entras las siguientes ecuaciones

$$1-2\alpha_2-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_2+p_5}{\alpha_2B+p_1p_3p_5}\right)^2, \qquad 1-2\alpha_1-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_1+p_5}{\alpha_1B+p_1p_3p_5}\right)^2.$$

Suponiendo:

3.1. $M_5 \geq M_3$, entonces la condición de estabilidad asintótica del punto crítico (u_4,v_4,w_4) provoca que el punto crítico (u_3,v_3,w_3) sea asintóticamente estable.

3.2. $M_3 \geq M_5$, entonces la condición de estabilidad asintótica del punto crítico (u_3,v_3,w_3) provoca que el punto crítico (u_4,v_4,w_4) sea asintóticamente estable.

Los resultados anteriores están relacionados a la estabilidad asintótica. Ahora se presenta resultados que relacionan la inestabilidad.

Re-escribiendo convenientemente M_4:

$$M_4=\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1B+p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$=\frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_1}\right)^2}$$

De manera análoga para M_6

$$M_6=\frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_2}\right)^2}.$$

Luego, es claro que

$$\alpha_1>\alpha_2,$$
$$B+\frac{p_1p_2p_3}{\alpha_2}>B+\frac{p_1p_2p_3}{\alpha_1}$$
$$\frac{1}{B+\frac{p_1p_2p_3}{\alpha_1}}>\frac{1}{B+\frac{p_1p_2p_3}{\alpha_2}},$$

Sin embargo, no queda de todo claro la relación entre

$$\frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_1}\right)^2} \tag{3.34}$$

y

$$\frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_2}\right)^2}. \tag{3.35}$$

Como no es claro el signo de α_1 y α_2, entonces es posible que

$$\frac{1}{B+\frac{p_1p_2p_3}{\alpha_2}} = -\frac{1}{B+\frac{p_1p_2p_3}{\alpha_1}}$$

Provocando que las ecuaciones (3.34) y (3.35) sean iguales. Las otras opciones consiste en que la ecuación (3.34) sean mayor que (3.35) y que la ecuación (3.35) sea mayor que (3.34). Por ello, a continuación se presenta los efectos en la inestabilidad local que esto conlleva.

1. Si las ecuaciones (3.32) y (3.33) son iguales, entonces:

$$1-2\alpha_2-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_2+p_5}{\alpha_2B+p_1p_3p_5}\right)^2 > 1-2\alpha_1-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_1+p_5}{\alpha_1B+p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$M_5 > M_3.$$

   Al mismo tiempo que la ecuación (3.34) es igual a la ecuación (3.35):

$$\frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_2}\right)^2} = \frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_1}\right)^2}$$
$$M_6 = M_4.$$

   Entonces la condición de inestabilidad del punto crítico (u_4,v_4,w_4) provoca que el punto crítico (u_3,v_3,w_3) sea inestable.

2. Si la ecuación (3.33) es mayor que (3.32) al mismo tiempo que (3.35) es mayor que (3.34), entonces:

$$1-2\alpha_1-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_1+p_5}{\alpha_1B+p_1p_3p_5}\right)^2 > 1-2\alpha_2-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_2+p_5}{\alpha_2B+p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$M_3 > M_5.$$

   y

$$\frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_2}\right)^2} > \frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_1}\right)^2}$$
$$M_6 > M_4.$$

   Entonces las condiciones de inestabilidad de los puntos críticos (u_4,v_4,w_4) y (u_3,v_3,w_3) se cumplen al mismo tiempo.

3. Si la ecuación (3.32) es mayor que (3.33), entonces no es claro la relación entras las siguientes ecuaciones

$$1-2\alpha_2-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_2+p_5}{\alpha_2B+p_1p_3p_5}\right)^2, \qquad 1-2\alpha_1-{p_1p_3}^2\left(\frac{p_4\alpha_1+p_5}{\alpha_1B+p_1p_3p_5}\right)^2.$$

   Al mismo tiempo que la ecuación (3.34) es mayor que la ecuación (3.35), entonces:

$$\frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_1}\right)^2} > \frac{1}{\left(B+\frac{p_1p_3p_5}{\alpha_2}\right)^2}$$
$$M_4 > M_6.$$

   Suponiendo que:

   3.1. $M_5 \geq M_3$, entonces la condición de inestabilidad de los puntos críticos (u_4,v_4,w_4) y (u_3,v_3,w_3) se cumple al mismo tiempo.

3.2. $M_3 \geq M_5$, entonces no queda claro el comportamiento de las orbitas alrededor de los puntos críticos (u_4,v_4,w_4) y (u_3,v_3,w_3) al mismo tiempo.

3.2.3. Tercer caso

Por la Proposición (3.2.1), se sabe que $\theta_1 > \theta_2$, en consecuencia

$$2\theta_1 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 > 2\theta_2 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2$$

Por otro lado, es claro que

$$p_3{}^2\left(\frac{p_4\theta_1 + p_5}{\theta_1 B + p_1 p_3 p_5}\right)^2 = \left(\frac{p_3(p_4\theta_1 + p_5)}{p_1 p_3(p_4\theta_1 + p_5) + \theta_1}\right)^2, \tag{3.36}$$

$$= \frac{1}{\left(p_1 + \dfrac{\theta_1}{p_3(p_4\theta_1 + p_5)}\right)^2}, \tag{3.37}$$

$$= \frac{1}{\left(p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4}\left(1 - \dfrac{p_3 p_5}{p_3(p_4\theta_1 + p_5)}\right)\right)^2}, \tag{3.38}$$

$$= \frac{1}{\left(p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4} - \dfrac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_1 + p_5)}\right)^2}. \tag{3.39}$$

De manera análoga para θ_2

$$p_3{}^2\left(\frac{p_4\theta_2 + p_5}{\theta_2 B + p_1 p_3 p_5}\right)^2 = \frac{1}{\left(p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4} - \dfrac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_2 + p_5)}\right)^2}.$$

Luego, es claro que

$$p_3 p_4(p_4\theta_1 + p_5) > p_3 p_4(p_4\theta_2 + p_5), \tag{3.40}$$

$$\frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_2 + p_5)} > \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_1 + p_5)}, \tag{3.41}$$

$$-\frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_1 + p_5)} > -\frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_2 + p_5)}, \tag{3.42}$$

$$p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_1 + p_5)} > p_1 + \frac{1}{p_3 p_4} - \frac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_2 + p_5)}, \tag{3.43}$$

$$\frac{1}{p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4} - \dfrac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_2 + p_5)}} > \frac{1}{p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4} - \dfrac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_1 + p_5)}}. \tag{3.44}$$

Sin embargo, no queda de todo claro la relación entre

$$\frac{1}{\left(p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4} - \dfrac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_1 + p_5)}\right)^2} \tag{3.45}$$

y

$$\frac{1}{\left(p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4} - \dfrac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_2 + p_5)}\right)^2}. \tag{3.46}$$

De la proposición (3.2.1) es claro que $\theta_1 > 0$ y $0 > \theta_2$, entonces es posible que

$$\frac{1}{p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4} - \dfrac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_1 + p_5)}} = -\frac{1}{p_1 + \dfrac{1}{p_3 p_4} - \dfrac{p_5}{p_3 p_4(p_4\theta_2 + p_5)}}.$$

Provocando que las ecuaciones (3.45) y (3.46) sean iguales. Las otras opciones consiste en que la ecuación (3.45) sean mayor que (3.46) y que la ecuación (3.46) sea mayor que (3.45). Por ello, a continuación se presenta los efectos en la estabilidad local que esto conlleva.

1. Si las ecuaciones (3.45) y (3.46) son iguales, entonces:

$$2\theta_1 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_1 + p_5}{\theta_1 B + p_1p_3p_5}\right)^2 > 2\theta_2 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_2 + p_5}{\theta_2 B + p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$M_7 > M_9.$$

   Entonces la condición de estabilidad asintótica del punto crítico (u_6,v_6,w_6) provoca que el punto crítico (u_5,v_5,w_5) sea asintóticamente estable.

2. Si la ecuación (3.45) es mayor que (3.46), entonces:

$$2\theta_1 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_1 + p_5}{\theta_1 B + p_1p_3p_5}\right)^2 > 2\theta_2 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_2 + p_5}{\theta_2 B + p_1p_3p_5}\right)^2$$
$$M_7 > M_9.$$

   Entonces la condición de estabilidad asintótica del punto crítico (u_6,v_6,w_6) provoca que el punto crítico (u_5,v_5,w_5) sea asintóticamente estable.

3. Si la ecuación (3.46) es mayor que (3.45), entonces no es claro la relación entras las siguientes ecuaciones

$$2\theta_1 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_1 + p_5}{\theta_1 B + p_1p_3p_5}\right)^2, \qquad 2\theta_2 + p_2\left(\frac{p_6}{A}\right)^2 + p_1{p_3}^2\left(\frac{p_4\theta_2 + p_5}{\theta_2 B + p_1p_3p_5}\right)^2.$$

   Suponiendo:

   3.1. $M_7 \geq M_9$, entonces la condición de estabilidad asintótica del punto crítico (u_6,v_6,w_6) provoca que el punto crítico (u_5,v_5,w_5) sea asintóticamente estable.

   3.2. $M_9 \geq M_7$, entonces la condición de estabilidad asintótica del punto crítico (u_5,v_5,w_5) provoca que el punto crítico (u_6,v_6,w_6) sea asintóticamente estable.

No se considera otros casos, ya que al aumentar la cantidad de puntos críticos que existen al mismo tiempo aumenta la dificultad de estudiar la influencia que tienen entre si. Como se vio en el análisis hecho, estudiar dicha interferencia resulta ser muy complicado a continuación se presenta una soluciones valida.

3.2.4. Región de atracción

Una estrategia rigurosa para controlar el comportamiento caótico de las órbitas en torno a los puntos críticos biológicamente relevantes (inducido por la influencia dinámica de los demás puntos críticos del sistema) consiste en demostrar que el conjunto $\tilde{\Omega}$ asociado al sistema (2.30) constituye una región de atracción (o región asintóticamente estable). Formalmente, esto garantiza que cualquier perturbación dentro de $\tilde{\Omega}$ se amortigua asintóticamente, preservando la estabilidad del punto crítico en estudio. La demostración se fundamenta en restringir el método directo de Lyapunov en $\tilde{\Omega}$.

Este enfoque metodológico tiene precedentes en [Hammami & Rettab, 2020], donde se aplico al sistema de Lorenz y en [Kumar & Freedman, 1989, Kumar & Freedman, 2002, Rai et al., 2013] donde se aplico a un modelo mutualista. El método directo de Lyapunov ha sido aplicado con éxito a sistemas tridimensionales en investigaciones como [Mukhopadhyay & Bhattacharyya, 2016, Ton & Hieu, 2011] y en [Kharbanda & Kumar, 2019, Arora & Kumar, 2022].

Como herramienta central, el Teorema generalizado de Krasovskii (1.5.2) proporciona una función candidata cuadrática de Lyapunov mediante una matriz simétrica definida positiva P de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Los menores principales de la matriz P son:

$$\begin{aligned} det\left(\begin{bmatrix} u^2 \end{bmatrix}\right) &= u^2 > 0, \\ det\left(\begin{bmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{bmatrix}\right) &= (uv)^2 > 0, \\ det\left(\begin{bmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix}\right) &= (uvw)^2 > 0 \end{aligned},$$

En consecuencia, por el criterio de Sylvester (1.5.3), la matriz P está definida positiva. Luego por el Teorema generalizado de Krasovskii (1.5.2), la función de Lyapunov para el sistema (2.30) es:

$$V(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{du}{d\tau} & \frac{dv}{d\tau} & \frac{dw}{d\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \\ \frac{dw}{d\tau} \end{bmatrix}.$$

Donde

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{du}{d\tau} & \frac{dv}{d\tau} & \frac{dw}{d\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1-u)u - \frac{uv}{p_1 v+u} - \frac{uw}{p_2 w+u} & v\left(p_3 - \frac{v}{p_4 u+p_5}\right) & w\left(p_6 - \frac{p_7 w}{u}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u^3\left(1 - u - \frac{v}{p_1 v+u} - \frac{w}{p_2 w+u}\right) & v^3\left(p_3 - \frac{v}{p_4 u+p_5}\right) & w^3\left(p_6 - \frac{p_7 w}{u}\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$V(u,v,w) = \begin{bmatrix} u^3\left(1 - u - \frac{v}{p_1 v+u} - \frac{w}{p_2 w+u}\right) & v^3\left(p_3 - \frac{v}{p_4 u+p_5}\right) & w^3\left(p_6 - \frac{p_7 w}{u}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u\left(1 - u - \frac{v}{p_1 v+u} - \frac{w}{p_2 w+u}\right) \\ v\left(p_3 - \frac{v}{p_4 u+p_5}\right) \\ w\left(p_6 - \frac{p_7 w}{u}\right) \end{bmatrix}$$

$$V(u,v,w) = u^4\left(1 - u - \frac{v}{p_1 v+u} - \frac{w}{p_2 w+u}\right)^2 + v^4\left(p_3 - \frac{v}{p_4 u+p_5}\right)^2 + w^4\left(p_6 - \frac{p_7 w}{u}\right)^2 \tag{3.48}$$

La función $V(u,v,w)$ es una función polinómica y por lo tanto continua en todo el espacio. Además, es claro que la función $V(u,v,w)$ se anula en todos los puntos críticos del sistema (2.30). Por ello, a continuación se demuestra que el conjunto $\tilde{\Omega}$ es una región de atracción, logrando así que todas las condiciones que debe cumplir la función $V(u,v,w)$ para sera una función estricta de lyapunov se cumplan unicamente en el conjunto $\tilde{\Omega}$. Es claro que

$$\begin{aligned} 1 - u - \frac{v}{p_1 v+u} - \frac{w}{p_2 w+u} &< 1, \\ p_3 - \frac{v}{p_4 u+p_5} &< p_3 \\ p_6 - \frac{p_7 w}{u} &< p_6, \end{aligned},$$

estas cotas superiores ocurren para todo el espacio. Sin embargo, solo en el conjunto $\tilde{\Omega}$ se cumple que

$$u < 1, \qquad v < p_3(p_4 + p_5), \qquad w < \frac{p_6}{p_7.}$$

Por ende, es claro que

$$u^4\left(1-u-\frac{v}{p_1v+u}-\frac{w}{p_2w+u}\right)^2<1,$$
$$v^4\left(p_3-\frac{v}{p_4u+p_5}\right)^2<(p_3)^6(p_4+p_5)^4$$
$$w^4\left(p_6-\frac{p_7w}{u}\right)^2<\frac{(p_6)^6}{(p_7)^4}.$$

Es decir, la función $V(u,v,w)$ está acotada superiormente por p_9 en el conjunto $\tilde{\Omega}$, donde

$$p_9=1+(p_3)^6(p_4+p_5)^4+\frac{(p_6)^6}{(p_7)^4}.$$

Entonces, $\dot{V}(u,v,w)<0$ en el conjunto $\tilde{\Omega}$. Por lo tanto el conjunto $\tilde{\Omega}$ es un conjunto de atracción, es decir, cualquier orbita del conjunto $\tilde{\Omega}$ tiende al punto crítico que exista en dicho conjunto. Pero solo cuando el conjunto $\tilde{\Omega}$ contenga un único punto crítico. No existen ningún problema con el punto critico (u_7,v_7,w_7). Sin embargo, los puntos críticos (u_5,v_5,w_5) y (u_6,v_6,w_6) presentan un inconveniente de pertenencia, ya que en el escenario que ambos pertenezcan al conjunto $\tilde{\Omega}$, este ya no seria una región de atracción. Por lo tanto, a continuación, se presenta un resultado que asegura que el punto critico (u_5,v_5,w_5) pertenece al conjunto $\tilde{\Omega}$ y que el punto critico (u_6,v_6,w_6) permanezca fuera de este. se elije (u_5,v_5,w_5) convenientemente ya que por su naturaleza es el que muestra más indicios de pertenecer al conjunto $\tilde{\Omega}$.

Proposición 3.2.1. Si $AE<p_6B+\sqrt{\Delta_2}$ y $p_6B<AE+\sqrt{\Delta_2}$, entonces $(u_5,v_5,w_5)\in\tilde{\Omega}$, $(u_6,v_6,w_6)\notin\tilde{\Omega}$.

Demostración. Sea $AE<p_6B+\sqrt{\Delta_2}$, en consecuencia

$$AE-p_6B-\sqrt{\Delta_2}<0$$
$$\frac{AE-p_6B-\sqrt{\Delta_2}}{2AB}<0,$$

en consecuencia $\theta_2<0$. En consecuencia $(u_6,v_6,w_6)\notin\tilde{\Omega}$. Por otro lado, de la segunda hipótesis se desprende que

$$\theta_1=\frac{AE-p_6B+\sqrt{\Delta_2}}{2AB}>0.$$

Luego, como θ_1 es una solución de la primera ecuación del sistema (2.30), es decir $\theta_1\leq 1$ en consecuencia.

$$0<\theta_1\leq 1$$

Luego, es claro que $0<p_3(p_4\theta_1+p_5)$. Además, como $p_3(p_4\theta_1+p_5)$ es una solución de la segunda ecuación del sistema (2.30), es decir $p_3(p_4\theta_1+p_5)\leq p_3(p_4+p_5)$ por eso

$$0<p_3(p_4\theta_1+p_5)\leq p_3(p_4+p_5)$$

De manera análoga, es claro que $0<\frac{p_6\theta_1}{p_7}$. Luego, $\frac{p_6}{p_7}$ es una solución de la tercera ecuación del sistema (2.30), es decir

$$0<\frac{p_6\theta_1}{p_7}\leq\frac{p_6}{p_7}$$

Entonces $(u_5,v_5,w_5)\in\tilde{\Omega}$ y $(u_6,v_6,w_6)\notin\tilde{\Omega}$. □

Proposición 3.2.2. Si $AE>p_6B$, entonces $(u_7,v_7,w_7)\in\tilde{\Omega}$.

Demostración. Sea $AE>p_6B$, en consecuencia

$$AE - p_6 B > 0$$
$$\frac{AE - p_6 B}{2AB} > 0,$$

en consecuencia $\theta_3 > 0$. Luego, como θ_3 es una solución de la primera ecuación del sistema (2.30), es decir $\theta_3 \leq 1$ en consecuencia.

$$0 < \theta_3 \leq 1$$

Luego, es claro que $0 < p_3(p_4\theta_3+p_5)$. Además, como $p_3(p_4\theta_3+p_5)$ es una solución de la segunda ecuación del sistema (2.30), es decir $p_3(p_4\theta_3 + p_5) \leq p_3(p_4 + p_5)$ por eso

$$0 < p_3(p_4\theta_3 + p_5) \leq p_3(p_4 + p_5)$$

De manera análoga, es claro que $0 < \frac{p_6\theta_3}{p_7}$. Luego, $\frac{p_6}{p_7}$ es una solución de la tercera ecuación del sistema (2.30), es decir Entonces $(u_7,v_7,w_7) \in \tilde{\Omega}$. $0 < \frac{p_6\theta_3}{p_7} \leq \frac{p_6}{p_7}$ □

Capítulo 4

Simulaciones

En el presente capítulo se tiene como objetivo corroborar los resultados del análisis cualitativo obtenidos en el capitulo (3). Cabe decir, que cada gráfica es descrita. Mientras que su interpretación ecológica se encuentra en las conclusiones. Además, cada simulación está desarrollada con ayuda del método numérico Runge-Kutta de orden cuatro, programado en conjunto con una interfaz gráfica en el lenguaje de programación Python. Se elige este método numérico por encima de otros, por su alta precisión y su poca complejidad computacional, como en [Romero-Ordoñez et al., 2022, Pérez Núñez & López Cruz, 2017].

4.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El método numérico de Runge-Kutta es una técnica ampliamente utilizada para resolver problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de manera aproximada. Este método implica calcular valores aproximados de la solución en diferentes puntos, utilizando una combinación ponderada de pendientes calculadas en esos puntos. A medida que se aumenta el orden del método, se logra una mayor precisión en la aproximación de la solución. Por ejemplo, el método de Runge-Kutta de cuarto orden es uno de los más utilizados debido a su equilibrio entre precisión y complejidad computacional.

Además, existen variantes de este método, como el de tercer orden, que requiere al menos cuatro etapas para su cálculo. Estas variantes permiten adaptar la precisión del método a las necesidades específicas del problema a resolver. En la práctica, el método de Runge-Kutta se implementa en software como Matlab para realizar iteraciones y obtener soluciones numéricas en intervalos específicos.

Los métodos de Runge-Kutta son métodos diseñados pensando en imitar las expansiones de Taylor pero usando solo evaluaciones de la función $f(t,y)$. El método clásico de Runge-Kutta de orden cuatro tiene error de truncamiento local $O\left(h^4\right)$. Este método se puede escribir como:

$$\begin{cases} y_0 &= y(a), \\ y_{i+1} &= y_i + \dfrac{1}{3}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \ i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{h}{2} f\left(t_i, y_i\right), \\ k_2 &= \frac{h}{2} f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1\right) \\ k_3 &= \frac{h}{2} f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2\right), \\ k_4 &= \frac{h}{2} f\left(t_i + h, y_i + 2k_3\right), \end{aligned}$$

Data: $f(t,y),m,a,b,y_0,n$

Result: Imprime las aproximaciones $(t_i, y_i), i = 0,1,\cdots,n$ $h = (b - a)/n$;

$t_0 = a$;

for $i = 1 \rightarrow n$ do

$$k_1 = \frac{h}{2}(t_i, y_i);$$

$$k_2 = \frac{h}{2} f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1\right);$$

$$k_3 = \frac{h}{2} f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2\right);$$

$$k_4 = \frac{h}{2}(t_i + h, y_i + 2k_3);$$

$$y_1 = y_i + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$t_0 = a + i \cdot h$;

$y_0 = y_1$;

$print((t_0, y_0))$;

end

Algorithm 1: Runge-Kutta de orden cuatro.

Ver ([Mora, 2015]) y ([Burden et al., 2010]).

4.2. Interfaz gráfica

Una interfaz gráfica de usuario (GUI, del ingles Graphical User Interface) es un sistema visual que permite a los usuarios interactuar con dispositivos electrónicos, programas o sistemas informáticos mediante elementos gráficos como iconos, ventanas, botones, menús y punteros, en lugar de utilizar comando basados en texto. Su objetivo es simplificar y hacer más intuitiva la interacción humano-computador.

La interfaz gráfica desarrollada luce de la siguiente manera:

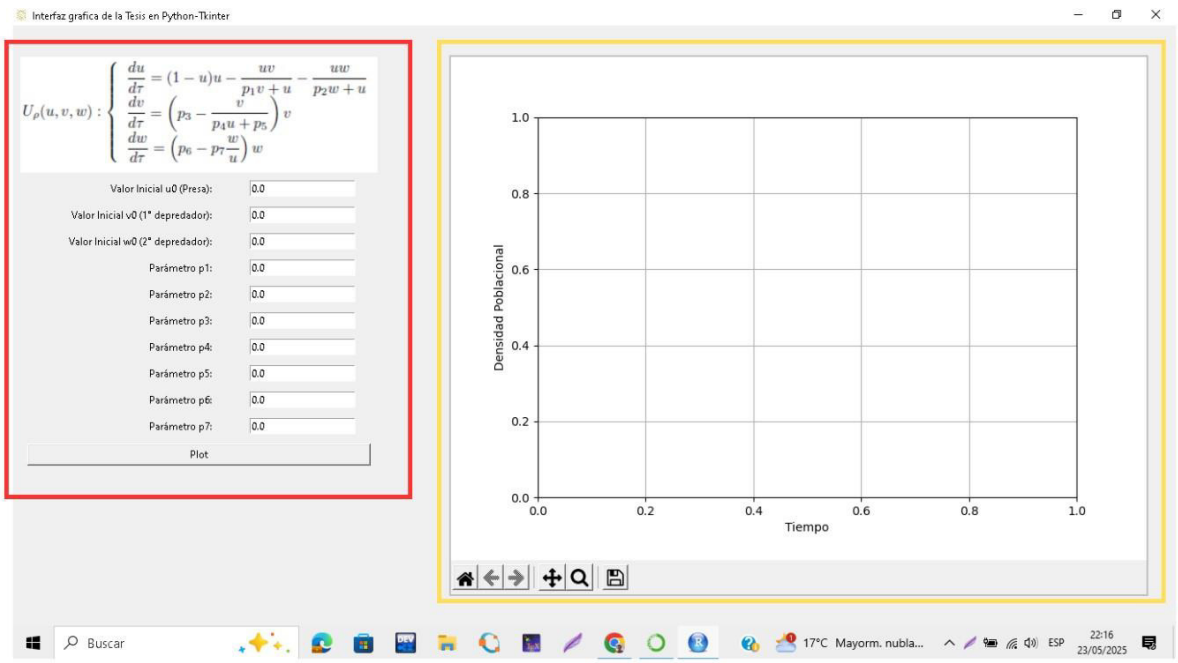


Figura 4.1: Interfaz gráfica desarrollada.

El código fuente en Python correspondiente a la interfaz gráfica desarrollada (Figura 4.1) se encuentra disponible en el Anexo.

La interfaz gráfica desarrollada consta de dos ventanas, indicadas por los marcos de color rojo y amarillo, según la Figura (4.1). La primera ventana (color rojo), tiene como función presentar el sistema equivalente al sistema en estudio e indica que parámetros se pueden ingresar por teclado. Estos parámetros consta del valor inicial para la simulación, denotado como $(u0,v0,w0)$ y los parámetros $\{p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7\}$. Una vez terminado de ingresar estos valores, la simulación es desarrollada una vez se halla presionado el botón *Plot*.

La segunda ventana (color amarillo), tiene como objetivo mostrar la simulación hecha, además de mostrar siete botones aplicables en la simulación.



Figura 4.2: Barra de herramientas de la interfaz gráfica desarrollada.

Cabe resaltar que los siete botones vienen incorporadas con la barra de herramientas.

- Botón Home Ñ : Restaura la visión original de la gráfica.
- Botón Back : Regresa a la vista anterior (historial de navegación).
- Botón Forward : Avanza a la siguiente vista (si se ha usado el botón Back).
- Botón Pan § : Permite arrastrar/mover la gráfica con el mouse.
- Botón Zoom Û : Permite hacer zoom en un área rectangular.

Botón Save Ö : Guarda la gráfica en formato PNG, SVG, PDF, etc.

4.3. Simulaciones alrededor del punto crítico (u_5,v_5,w_5)

Las simulaciones presentadas en este trabajo se derivan de la Proposición (3.2.1) y del Teorema (3.1.5) junto con las observaciones (1). Es importante destacar que las simulaciones realizadas en el modelo original [Agrawal & Saleem, 2015] se enfocan en resultados relacionados con ciclos límites, a diferencia de las simulaciones que se presentan en esta tesis.

4.3.1. Primer escenario

En este primer escenario, se presenta dos simulaciones generadas bajo los mismos parámetros pero con valores iniciales distintos. La primera simulación es coherente con: la Proposición (3.2.1), el Teorema (3.1.5) y la observación (1), ya que su valor inicial se sitúa muy próximo al punto crítico. En contraste, la segunda simulación considera un valor inicial alejado de dicho punto. Los parámetros específicos utilizados en amas simulaciones se detallan en el Cuadro (4.1).

Parámetros iniciales
$p_1 = 1.2$; $p_2 = 8.0$; $p_3 = 0.1$; $p_4 = 0.7$; $p_5 = 1.6$; $p_6 = 2.3$; $p_7 = 2.5$.
Parámetros principales
$A = 20.9$; $B = 1.084$; $C = -0.822$; $D = -0.2$; $E = 0.822$; $\Delta_2 = 236.2856288399999$, $M_1 = 1.4852346281405946$; $V^{*}\ (0.80,0.21,0.70) = -0.024400097813327686$.
Puntos críticos
$(u_5,v_5,w_5) =$ $(0.6633720826527905,0.20643604578569535,0.6103023160405672)$ $(u_6,v_6,w_6) =$ $(-0.015117346516912418,0.15894178574381615,-0.013907958795559422)$
Valor inicial de la primera simulación
$(0.662,0.205,0.609)$
Cotas superiores de las soluciones
$(1.0,0.23,0.92)$

Valor inicial de la segunda simulación
$(0.80,0.21,0.70)$

Cuadro 4.1: Primera y segunda simulación

En consecuencia, las simulaciones generadas bajo los parámetros iniciales específicos en el Cuadro (4.1) y con las condiciones iniciales $(0.662, 0.205, 0.609)$ y $(0.80, 0.21, 0.70)$ revelan que:

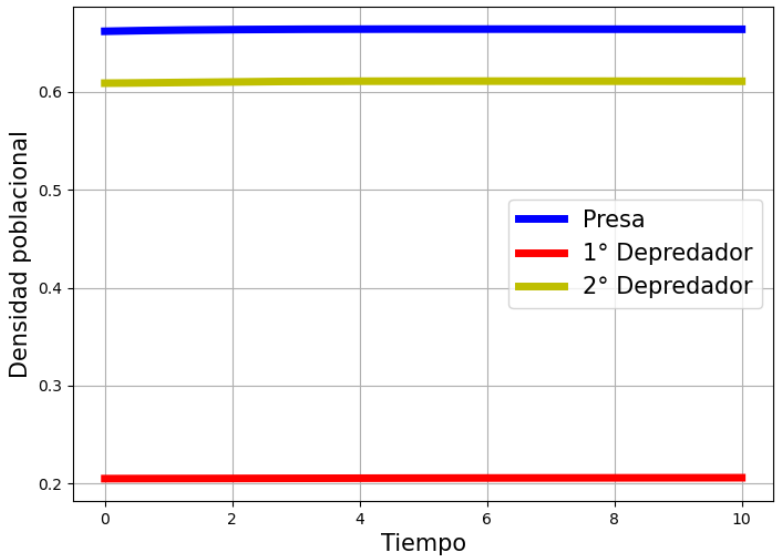


Figura 4.3: Primera simulación del punto crítico (u_5, v_5, w_5) para la condición inicial $(0.662, 0.205, 0.609)$.

De la primera simulación (4.3) se concluye que la población de la presa se mantiene notablemente constante a lo largo del tiempo. Su densidad poblacional no experimenta fluctuaciones significativas, lo que sugiere un equilibrio dinámico en el que la tasa de crecimiento de la presa es aproximadamente igual a la tasa de depredación combinada de ambos depredadores. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador se mantiene en un nivel muy bajo y constante a lo largo del tiempo. Es posible que esté dependiendo principalmente de su fuente de alimento alternativa y que la presa principal no sea un componente importante de su dieta. Por ultimo, la población del segundo depredador se mantiene en un nivel constante y relativamente alto a lo largo del tiempo. Esto sugiere que la presa es suficiente para sostener una

específicos utilizados en amas simulaciones se detallan en el Cuadro (

población considerable del segundo depredador, y que la presencia del primer depredador no está afectando significativamente su acceso a este recurso.

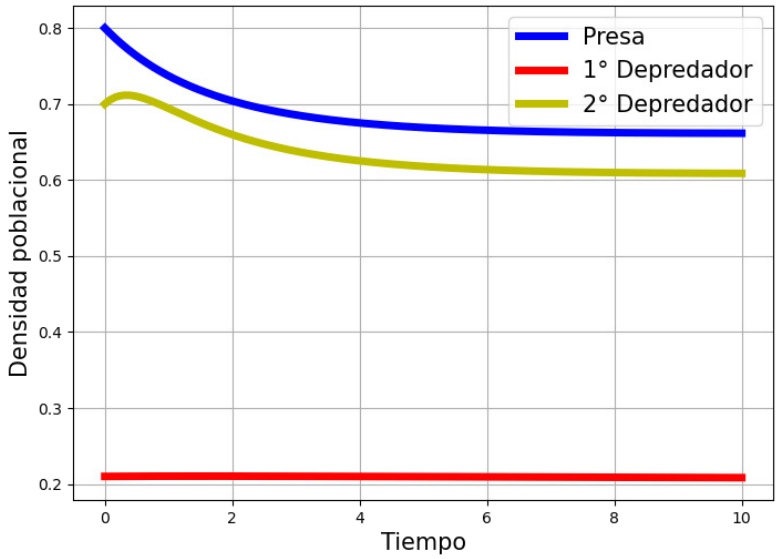


Figura 4.4: Segunda simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.80,0.21,0.70)$.

De la segunda simulación (4.4) se concluye que la población de la presa disminuye inicialmente y luego se estabiliza. Esto sugiere que la depredación por ambos depredadores tiene un impacto inicial, pero luego se alcanza un equilibrio donde la presa puede mantener una densidad poblacional constante. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador se mantiene baja y relativamente constante a lo largo del tiempo. Esto indica que, al tener una fuente de alimento alternativa, su población no depende exclusivamente de la presa en cuestión. Esto le permite mantener una población estable incluso cuando la densidad de la presa varía. Por ultimo, la población del segundo depredador tiene un aumento, luego disminuye y se estabiliza, pero siempre por debajo de la población de la presa. Este comportamiento sugiere que este depredador depende casi exclusivamente de la presa. El aumento inicial podría ser debido a una disponibilidad alta de la presa, pero luego, a medida que la presa disminuye debido a la depredación combinada, la población del depredador especialista se ajusta a la baja hasta alcanzar un equilibrio.

La Tabla (4.2) contiene el valor de los parámetros originales para la primera y segunda simulación.

Parámetros originales
$b = 3.0$; $r = 1.0$; $k = 1.0$; $a_2 = 0.1$; $a_3 = 2.3$; $d_1 = 0.5$; $d_2 = 0.1$; $\gamma_1 = 0.6$; $\gamma_2 = 0.8$; $c_1 = 1.4$; $c_2 = 4.0$.

Cuadro 4.2: Primera y segunda simulación

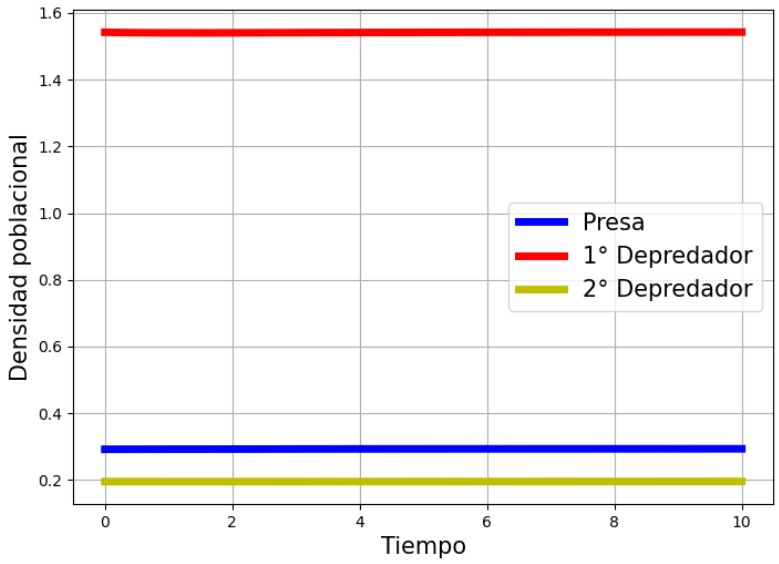
4.3.2. Segundo escenario

En este segundo escenario, se presenta la tercera y cuarta simulación generados bajo los mismos parámetros pero con valores iniciales distintos. La tercera simulación es coherente con: la Proposición (3.2.1), el Teorema (3.1.5) y la observación (1), ya que su valor inicial se sitúa muy próximo al punto crítico.
En contraste, la segunda simulación considera un valor inicial alejado de dicho punto. Los parámetros
4.3).

Parámetros iniciales
$p_1 = 2.0$; $p_2 = 2.5$; $p_3 = 1.3$; $p_4 = 2.0$; $p_5 = 0.6$; $p_6 = 1.0$; $p_7 = 1.5$.
Parámetros principales
$A = 4.0$; $B = 6.2$; $C = -2.04$, $D = -1.0$, $E = 2.04$; $\Delta_2 = 158.5936$; $M_1 = 1.1600197632934122$; $V^{\cdot}(0.15,0.2,0.4) = -4.685873713005771$.
Puntos críticos
$(u_5,v_5,w_5) = (0.2934152236744913,1.5428795815536773,0.19561014911632754)$ $(u_6,v_6,w_6) = (-0.2143829656099751,0.2226042894140647,-0.14292197707331675)$
Valor inicial de la tercera simulación
$(0.292,1.542,0.195)$
Cotas superiores de las soluciones
$(1.0,3.38,0.7)$
Valor inicial de la cuarta simulación
$(0.15,0.2,0.4)$

Cuadro 4.3: Tercera y cuarta simulación

En consecuencia, las simulaciones generadas bajo los parámetros iniciales específicos en el Cuadro (4.3) y con las condiciones iniciales $(0.292,1.542,0.195)$ y $(0.15,0.2,0.4)$ revelan que:



específicos utilizados en amas simulaciones se detallan en el Cuadro (

Figura 4.5: Tercera simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.292,1.542,0.195)$.

De la tercera simulación (4.5) se concluye que la densidad poblacional de la presa se mantiene constante en un nivel relativamente bajo a lo largo del tiempo. Esto sugiere que la presa está siendo controlada por los depredadores. Luego, de la misma simulación la densidad poblacional del primer depredador se mantiene constante en un nivel alto a lo largo del tiempo. Esto es posible porque tiene acceso a una fuente de alimento alternativa además de la presa. Por lo tanto, su población no se ve tan afectada por las fluctuaciones en la población de la presa. Por ultimo, la densidad poblacional del segundo depredador se mantiene constante en un nivel bajo a lo largo del tiempo. Esto indica que este depredador depende completamente de la presa para su supervivencia. Dado que la presa se mantiene en un nivel bajo, la población del segundo depredador también se mantiene baja.

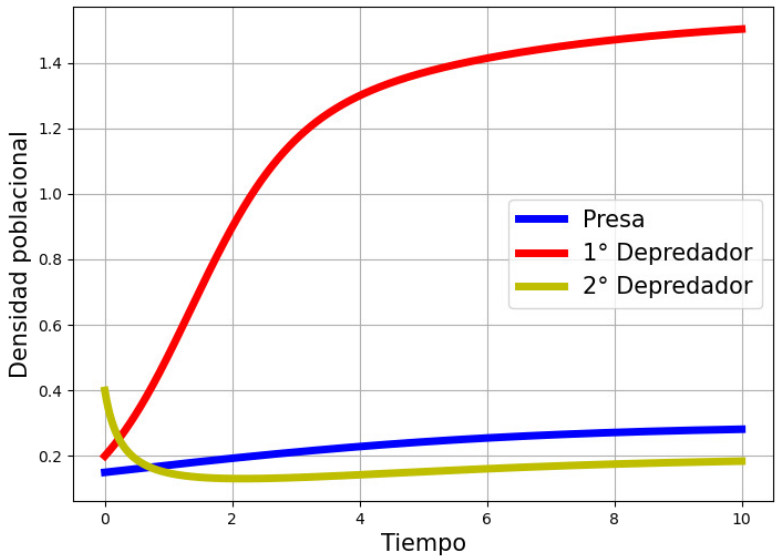


Figura 4.6: Cuarta simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.15,0.2,0.4)$.

De la cuarta simulación (4.6) se concluye que la población de la presa aumenta con el tiempo, aunque de forma moderada. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador experimenta un crecimiento masivo y continuo a lo largo del tiempo. Esto sugiere que la presa en cuestión es una fuente de alimento muy valiosa para este depredador, o que la otra fuente de alimento permite un aumento en su población. Por ultimo, la población del segundo depredador disminuye drásticamente y se mantiene en un nivel bajo. Esto sugiere que la competencia con el primer depredador o la baja poblacional inicial de la presa le dificulta sobrevivir.

La Tabla (4.4) contiene el valor de los parámetros originales para la tercera y cuarta simulación.

Parámetros originales

$b = 0.2$; $r = 0.5$; $k = 0.25$; $a_2 = 1.0$; $a_3 = 0.5$; $d_1 = 0.75$; $d_2 = 1.0$; $\gamma_1 = 0.75$; $\gamma_2 = 1.25$; $c_1 = 2.7$; $c_2 = 0.7$.

Cuadro 4.4: Tercera y cuarta simulación

4.3.3. Tercer escenario

En este escenario, se presenta las quinta y sexta simulación generados bajo los mismos parámetros pero con valores iniciales distintos. La quinta simulación es coherente con: la Proposición (3.2.1), el Teorema (3.1.5) y la observación (1), ya que su valor inicial se sitúa muy próximo al punto crítico.
En contraste, la segunda simulación considera un valor inicial alejado de dicho punto. Los parámetros
4.5).

Parámetros iniciales
$p_1 = 1.7$; $p_2 = 3.0$; $p_3 = 0.5$; $p_4 = 1.3$; $p_5 = 1.0$; $p_6 = 0.8$; $p_7 = 2.0$.
Parámetros principales
$A = 4.4$; $B = 2.105$; $C = -0.605$, $D = -0.7$, $E = 0.605$; $\Delta_2 = 32.817764$, $M_1 = 1.1769707273314876$; $V^{*}(0.95,1.1,0.35) = -0.3453303706549362$.
Puntos críticos
$(u_5,v_5,w_5) =$ $(0.36205350247558643,0.7353347766091312,0.14482140099023458)$ $(u_6,v_6,w_6) =$ $(-0.25646075792797257,0.3333005073468178,-0.10258430317118904)$
Valor inicial de la quinta simulación
$(0.361,0.734,0.144)$
Cotas superiores de las soluciones
$(1.0,1.15,0.4)$
Valor inicial de la sexta simulación
$(0.95,1.1,0.35)$

Cuadro 4.5: Quinta y sexta simulación

En consecuencia, las simulaciones generadas bajo los parámetros iniciales específicos en el Cuadro (4.5) y con las condiciones iniciales $(0.361,0.734,0.144)$ y $(0.95,1.1,0.35)$ revelan que:

específicos utilizados en amas simulaciones se detallan en el Cuadro (

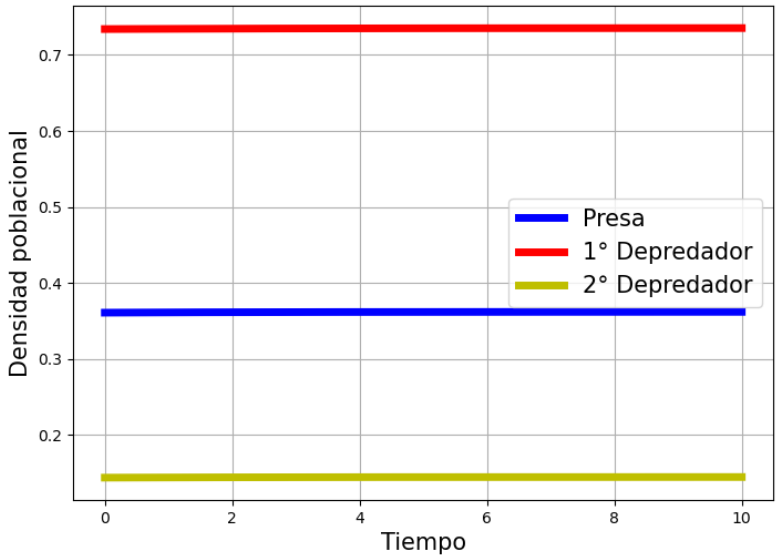


Figura 4.7: Quinta simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.361,0.734,0.144)$.

De la quinta simulación (4.7) se concluye que la densidad poblacional de la presa se mantiene constante en un nivel medio a lo largo del tiempo. Esto sugiere que hay un equilibrio entre la tasa de reproducción de la presa y la tasa de depredación. Luego, de la misma simulación la densidad poblacional del primer depredador es alta y constante a lo largo del tiempo, incluso superior a la de la presa. Al tener fuentes de alimento alternativas, su población no depende exclusivamente de la disponibilidad de la presa y puede mantenerse en un nivel alto. Por ultimo, la densidad poblacional del segundo depredador es baja y constante. Esto indica que su población está limitada por la disponibilidad de la presa, ya que es su única fuente de alimento.

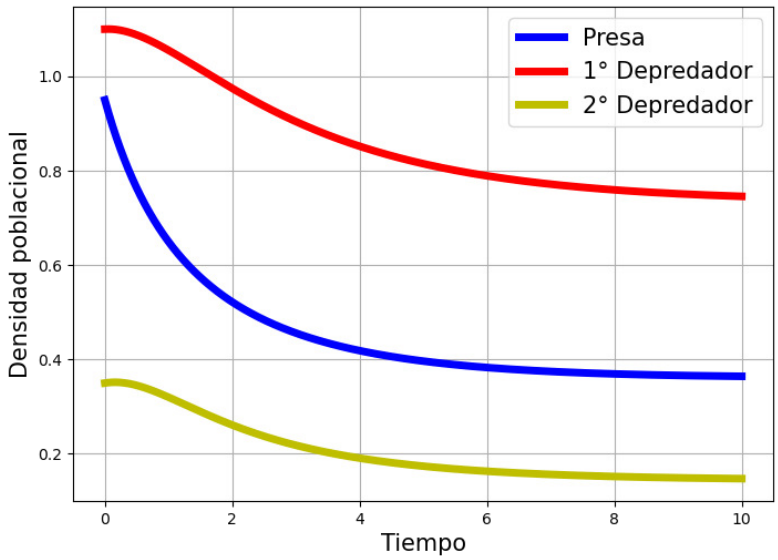


Figura 4.8: Sexta simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.95,1.1,0.35)$.

De la sexta simulación (4.8) se concluye que la población de la presa disminuye drásticamente con el tiempo y se estabiliza, pero a un nivel mucho más bajo que al inicio. Esto indica que la depredación tiene un impacto muy fuerte y duradero en la población de la presa. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador también disminuye con el tiempo y se estabiliza, pero a un nivel más alto que la presa. Esto sugiere que aunque la presa es una fuente de alimento importante, este depredador puede sobrevivir y mantener una población estable gracias al alimento alternativo. Por ultimo, la población del segundo depredador disminuye notablemente con el tiempo, hasta alcanzar una densidad poblacional baja. Esto refleja que, al depender exclusivamente de la presa, la disminución de esta última afecta severamente su capacidad de supervivencia y reproducción.

La Tabla (4.6) contiene el valor de los parámetros originales para la quinta y sexta simulación.

Parámetros originales
$b = 0.25$; $r = 0.4$; $k = 0.125$; $a_2 = 0.8$; $a_3 = 0.32$; $d_1 = 0.5$; $d_2 = 0.4$; $\gamma_1 = 2.125$; $\gamma_2 = 3.0$; $c_1 = 2.6$; $c_2 = 1.25$.

Cuadro 4.6: Quinta y sexta simulación

4.3.4. Cuarto escenario

En este cuarto escenario, se presenta la séptima y octava simulación generados bajo los mismos parámetros pero con valores iniciales distintos. La séptima simulación es coherente con: la Proposición (3.2.1), el Teorema (3.1.5) y la observación (1), ya que su valor inicial se sitúa muy próximo al punto crítico.
En contraste, la octava simulación considera un valor inicial alejado de dicho punto. Los parámetros
4.7).

Parámetros iniciales
$p_1 = 3.0$; $p_2 = 2.0$; $p_3 = 0.6$; $p_4 = 3.5$; $p_5 = 1.9$; $p_6 = 1.1$; $p_7 = 1.8$.
Parámetros principales
$A = 4.0$; $B = 7.3$; $C = -1.78$, $D = -2.0$, $E = 1.78$; $\Delta_2 = 626.6424999999997$, $M_1 = 1.26928996433881$; $V^{*}(0.1,0.3,0.6) = -740.2783639817039$.
Puntos críticos
$(u_5,v_5,w_5) = (0.4130621309223089,2.0074304749368483,0.25242685778585544)$ $(u_6,v_6,w_6) = (-0.4442265144839529,0.20712431958369884,-0.2714717588513046)$
Valor inicial de la séptima simulación
$(0.412,2.006,0.251)$
Cotas superiores de las soluciones
$(1.0,3.24,0.61)$
Valor inicial de la octava simulación
$(0.1,0.3,0.6)$

específicos utilizados en amas simulaciones se detallan en el Cuadro (

Cuadro 4.7: Séptima y octava simulación

En consecuencia, las simulaciones generadas bajo los parámetros iniciales específicos en el Cuadro (4.7) y con las condiciones iniciales $(0.412,2.006,0.251)$ y $(0.1,0.3,0.6)$ revelan que:

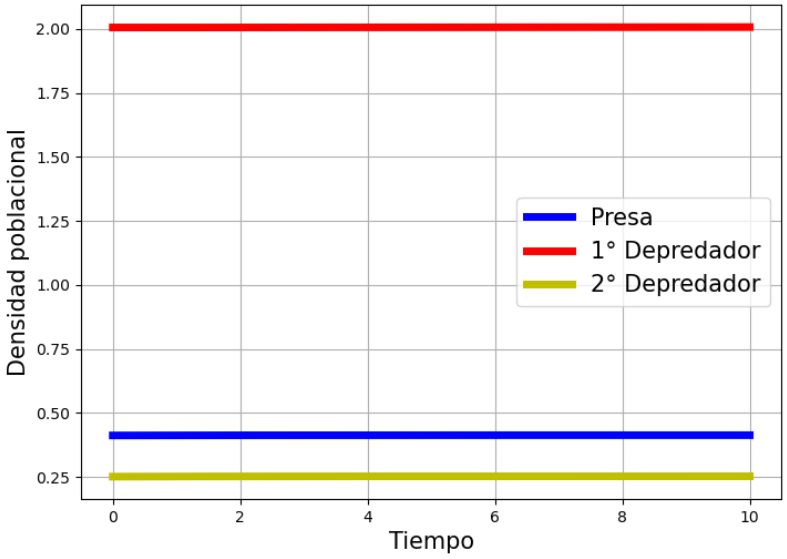


Figura 4.9: Séptima simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.412,2.006,0.251)$.

De la séptima simulación (4.9) se concluye que la densidad poblacional de la presa se mantiene constante a lo largo del tiempo. Esto sugiere que la presa está siendo controlada por ambos depredadores. Luego, de la misma simulación la densidad poblacional del primer depredador es alta y constante a lo largo del tiempo, incluso superior a la de la presa. Al tener una fuente de alimento alternativa, el primer depredador no depende exclusivamente de la presa, lo que contribuye a la estabilidad de ambas poblaciones. Por ultimo, la densidad poblacional del segundo depredador al depender exclusivamente de la presa, este depredador podría ser más susceptible a fluctuaciones en la población de la presa. Sin embargo, como se observa que su población también se mantiene estable se sugiere que la población de la presa es lo suficientemente grande como para sostener al segundo depredador.

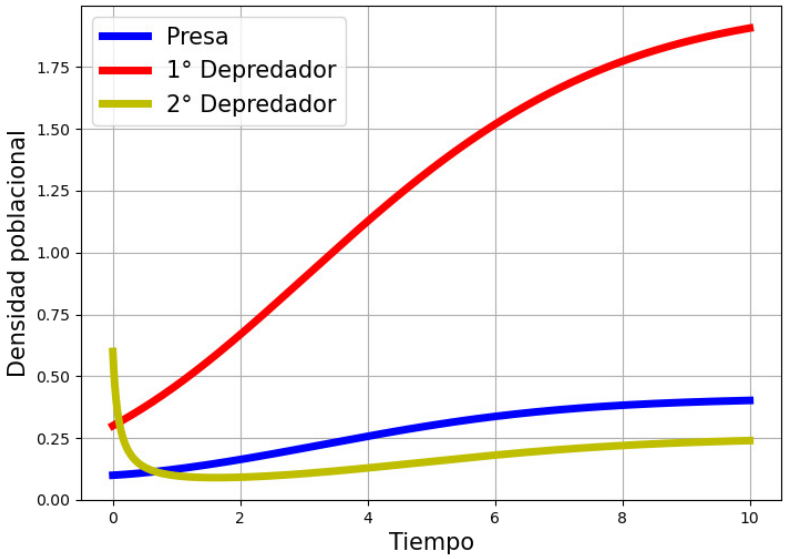


Figura 4.10: Octava simulación del punto crítico (u_5, v_5, w_5) para la condición inicial $(0.1, 0.3, 0.6)$.

De la octava simulación (4.10) se concluye que la población de la presa inicialmente disminuye drásticamente y luego se estabiliza, pero a un nivel muy bajo. Esto indica que la depredación tiene un fuerte impacto en la población de la presa, especialmente al inicio. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador crece rápidamente y de manera continua. Esto sugiere que la presa es una fuente de alimento importante y disponible, pero también que este depredador podría estar aprovechando su alimento alternativo para mantener su crecimiento. Por ultimo, la población del segundo depredador disminuye inicialmente y luego se estabiliza a un nivel bajo. Esto refleja que la disminución inicial de la presa afecta significativamente su capacidad de supervivencia, y que la competencia con el primer depredador podría estar limitando su recuperación.

La Tabla (4.8) contiene el valor de los parámetros originales para la séptima y octava simulación.

Parámetros originales
$b = 1.9$; $r = 2.5$; $k = 2.5$; $a_2 = 1.5$; $a_3 = 2.75$; $d_1 = 2.5$; $d_2 = 1.25$; $\gamma_1 = 3.0$; $\gamma_2 = 1.0$; $c_1 = 1.4$; $c_2 = 0.4$.

Cuadro 4.8: Séptima y octava simulación

4.3.5. Quinto escenario

En este escenario, se presenta la novena y décima simulación generados bajo los mismos parámetros pero con valores iniciales distintos. La novena simulación es coherente con: la Proposición (3.2.1), el Teorema (3.1.5) y la observación (1), ya que su valor inicial se sitúa muy próximo al punto crítico.
En contraste, la décima simulación considera un valor inicial alejado de dicho punto. Los parámetros

específicos utilizados en amas simulaciones se detallan en el Cuadro (

4.9).

Parámetros iniciales
$p_1 = 2.3$; $p_2 = 1.8$; $p_3 = 1.1$; $p_4 = 3.0$; $p_5 = 1.0$; $p_6 = 1.9$; $p_7 = 1.4$.
Parámetros principales
$A = 4.82$; $B = 8.59$; $C = -2.76$, $D = -1.3$, $E = 2.76$; $\Delta_2 = 354.5141779600001$, $M_1 = 1.0574427103663024$; V^* $(0.2,0.1,0.3) = -0.00225954556745705$.
Puntos críticos
$(u_5,v_5,w_5) =$ $(0.19093352408754496,1.7300806294888986,0.2591240684045253)$ $(u_6,v_6,w_6) =$ $(-0.26382055378047164,0.22939217252444358,-0.3580421801306401)$
Valor inicial de la novena simulación
$(0.190,1.729,0.258)$
Cotas superiores de las soluciones
$(1.0,4.4,1.3571428571428572)$
Valor inicial de la décima simulación
$(0.2,0.1,0.3)$

Cuadro 4.9: Novena y décima simulación

En consecuencia, las simulaciones generadas bajo los parámetros iniciales específicos en el Cuadro (4.9) y con las condiciones iniciales $(0.190,1.729,0.258)$ y $(0.2,0.1,0.3)$ revelan que:

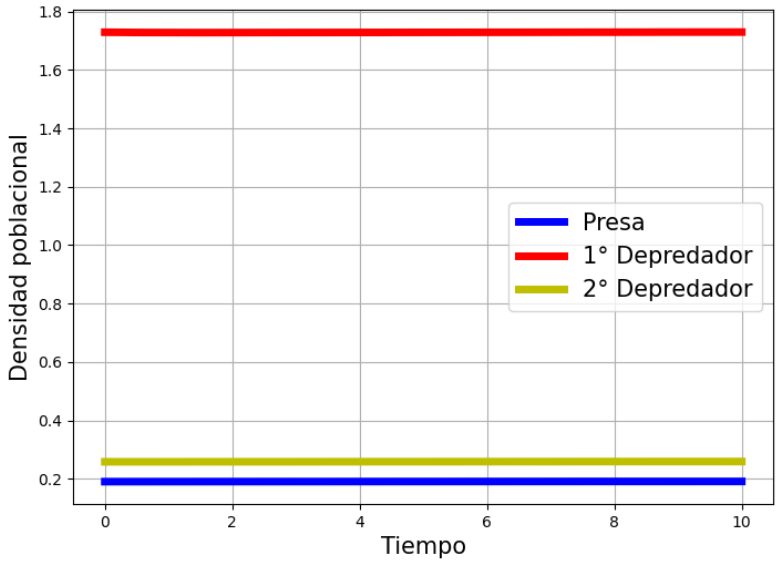


Figura 4.11: Novena simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.190,1.729,0.258)$.

De la novena simulación (4.11) se concluye que la densidad poblacional de la presa se mantiene constante a lo largo del tiempo. Esto sugiere que hay un equilibrio entre la tasa de reproducción de la presa y la tasa de depredación. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador se mantiene muy alto y constante a lo largo del tiempo. Es posible que esté dependiendo principalmente de su fuente de alimento alternativa y que la presa principal no sea un componente importante de su dieta. Por ultimo, la densidad poblacional del segundo depredador al depender exclusivamente de la presa, este depredador podría ser más susceptible a fluctuaciones en la población de la presa. Sin embargo, se observa que su población también se mantiene estable, lo que sugiere que la población de la presa es lo suficientemente grande como para sostener al segundo depredador.

específicos utilizados en amas simulaciones se detallan en el Cuadro (

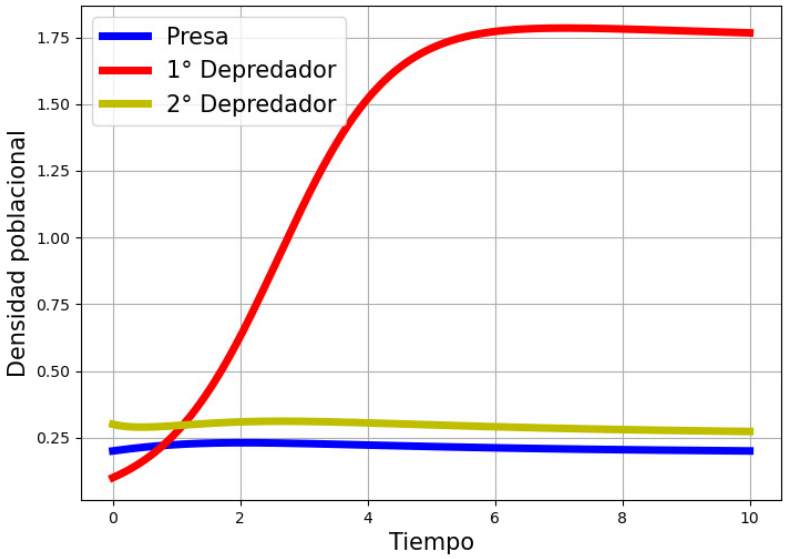


Figura 4.12: décima simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.2,0.1,0.3)$.

De la décima simulación (4.12) se concluye que la población de la presa se mantiene relativamente estable y baja a lo largo del tiempo. Esto sugiere que la presión de los depredadores, tanto del primer como el segundo, está controlando su crecimiento poblacional. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador muestra un crecimiento significativo a lo largo del tiempo, alcanzando una densidad poblacional mucho mayor que la de la presa y de el segundo depredador. Esto debido a su capacidad para consumir otras fuentes de alimento además de la presa en cuestión. Por ultimo, la población del segundo depredador se mantiene baja y relativamente constante a lo largo del tiempo. Esto sugiere que su población está limitada por la disponibilidad de la presa específica de la que se alimenta.

La Tabla (4.10) contiene el valor de los parámetros originales para la novena y décima simulación.

Parámetros originales
$b = 3.0$; $r = 0.4$; $k = 0.6$; $a_2 = 0.44$; $a_3 = 0.76$; $d_1 = 0.2$; $d_2 = 0.25$; $\gamma_1 = 1.15$; $\gamma_2 = 1.125$; $c_1 = 15$; $c_2 = 2.9$.

Cuadro 4.10: Novena y décima simulación

4.3.6. Sexto escenario

En este escenario, se presenta la décimo primero y décimo segundo simulación generados bajo los mismos parámetros pero con valores iniciales distintos. La décima primero simulación es coherente con: la Proposición (3.2.1), el Teorema (3.1.5) y la observación (1), ya que su valor inicial se sitúa muy próximo al punto crítico. En

la

Parámetros iniciales
$p_1 = 2.5$; $p_2 = 6.8$; $p_3 = 1.0$; $p_4 = 4.0$; $p_5 = 1.25$; $p_6 = 2.6$; $p_7 = 1.8$.
Parámetros principales
$A = 19.48$; $B = 11.0$; $C = -3.875$, $D = -1.5$, $E = 3.875$; $\Delta_2 = 26540.411225000003$, $M_1 = 1.4555204775450954$; $V(0.97,0.25,1.35) = -0.5123223294238136$.
Puntos críticos
$(u_5,v_5,w_5) = (0.48954004285958286,3.2081601714383314,0.7071133952416198)$ $(u_6,v_6,w_6) = (-0.2707375414595456,0.16704983416181762,-0.3910653376637881)$
Valor inicial de la décima primera simulación
$(0.489,3.207,0.706)$
Cotas superiores de las soluciones
$(1.0,5.25,1.4)$
Valor inicial de la décima segunda simulación
$(0.97,0.25,1.35)$

contraste, décima segunda simulación considera un valor inicial alejado de dicho punto. Los parámetros específicos utilizados en amas simulaciones se detallan en el Cuadro (4.11).

Cuadro 4.11: Décimo primer y décimo segunda simulación

En consecuencia, las simulaciones generadas bajo los parámetros iniciales específicos en el Cuadro (4.11) y con las condiciones iniciales $(0.489,3.207,0.706)$ y $(0.97,0.25,1.35)$ revelan que:

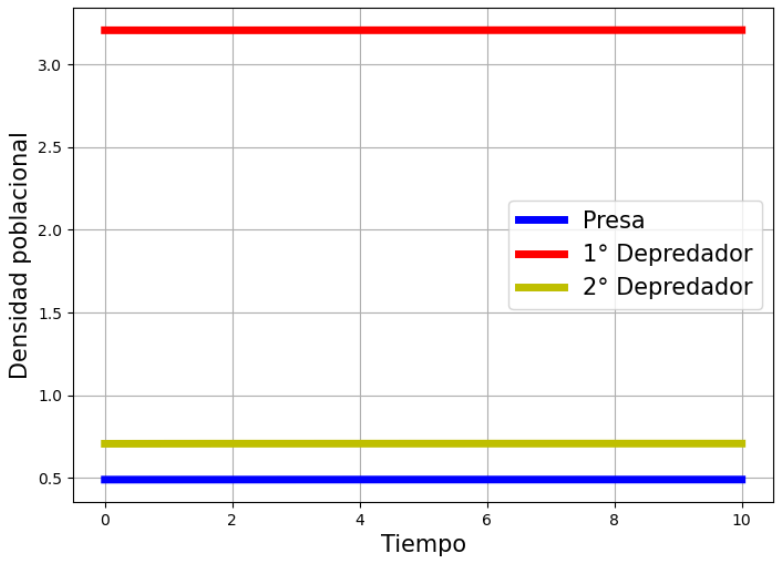


Figura 4.13: Décima simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.489,3.207,0.706)$.

De la décima primera simulación (4.13) se concluye que la población de la presa es constante a lo largo del tiempo. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador se mantiene muy alto y constante a lo largo del tiempo. Al tener una fuente de alimento alternativa, este depredador no depende exclusivamente de la presa, lo que contribuye a la estabilidad de ambas poblaciones. Por ultimo, la densidad poblacional del segundo depredador al depender exclusivamente de la presa, este depredador podría ser más susceptible a fluctuaciones en la población de la presa. Sin embargo, se observa que su población también se mantiene estable, lo que sugiere que la población de la presa es lo suficientemente grande como para sostener al depredador especialista.

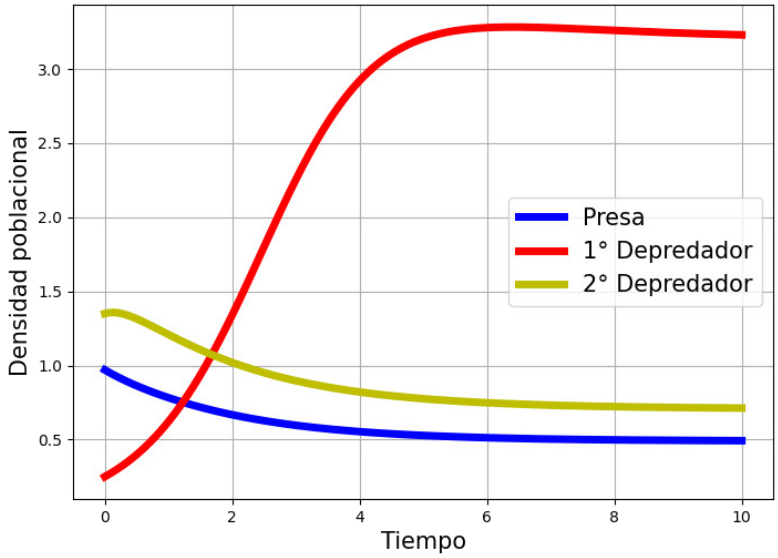


Figura 4.14: décima segunda simulación del punto crítico (u_5,v_5,w_5) para la condición inicial $(0.97,0.25,1.35)$.

De la décima segunda simulación (4.14) se concluye que la población de la presa comienza con una densidad relativamente alta, pero disminuye significativamente a lo largo del tiempo hasta estabilizarse en un nivel más bajo. Esto sugiere que inicialmente, la presa tiene una población abundante, pero la presión de los depredadores, especialmente en las etapas iniciales, reduce su número. Luego, de la misma simulación la población del primer depredador muestra un crecimiento exponencial desde niveles bajos en las etapas iniciales, alcanzando una alta densidad poblacional en un período relativamente corto. Este rápido crecimiento indica que este depredador está aprovechando la abundancia inicial de la presa y posiblemente complementando su dieta con otras fuentes de alimento. Por ultimo, la población del segundo depredador comienza con una densidad alta y luego disminuye gradualmente con el tiempo, estabilizándose en un nivel más bajo, aunque aún por encima de la población de la presa. Esto sugiere que inicialmente hay suficiente presa disponible para sostener una población considerable del segundo depredador. Sin embargo, a medida que la población de la presa disminuye debido a la depredación de ambos depredadores, la población del segundo depredador también se reduce, aunque no tan drásticamente como la de la presa.

La Tabla (4.12) contiene el valor de los parámetros originales para la décima primera y décima segunda simulación.

Parámetros originales
$b = 2.5$; $r = 1.0$; $k = 1.0$; $a_2 = 1.0$; $a_3 = 2.6$; $d_1 = 0.5$; $d_2 = 0.25$; $\gamma_1 = 1.25$; $\gamma_2 = 1.7$; $c_1 = 8.0$; $c_2 = 5.0$.

Cuadro 4.12: Décima primera y décima segunda simulación

Sugerencias

El punto crítico (u_7,v_7,w_7) existe cuando la discriminante Δ_2 es igual a cero, algo muy difícil por su naturaleza. Por ello no se tomo en cuenta para el análisis aplicado en esta investigación. Sin embargo, se presta para el estudio de bifurcaciones punto silla y transcrita. Dicho estudio se ignoró para ser presentado más adelante en conjunto con el estudio de bifurcación en el punto crítico (u_5,v_5,w_5).

Por otro lado, a pesar de los cambios introducidos, modelos como este son limitados. La respuesta funcional Holling tipo II puede ser utilizada en diversos contextos. No obstante, donde realmente brilla es cuando las poblaciones que modela son invertebrados y en vertebrados pequeños [Fernández-Arhex & Corley, 2004], se recomienda que, a pesar de ser afectadas por la respuesta funcional razón-dependiente, se mantenga esta misma línea de estudio. Para proyectos futuros, se puede añadir el efecto Allee débil, el efecto Allee fuerte, un doble efecto Allee, tener en cuenta el canibalismo del depredador, las estrategias de la presa para prevenir su caza, como la defensa grupal, la búsqueda de refugio o el impacto del miedo indirecto que experimentan las presas. Convertir este modelo ecológico en un modelo ecoepidemiológico; en lugar de una EDO, se pueden aplicar ecuaciones con retraso o una EDP.

Bibliografía

[Agrawal & Saleem, 2015] Agrawal, T. & Saleem, M. (2015). Complex dynamics in a ratio-dependent two-predator one-prey model. *Computational and Applied Mathematics*, 34(1), 265–274.

[Aguirre Hernández et al., 2017] Aguirre Hernández, B., Loredo Villalobos, C. A., Díaz González, E. C., & Campos Cantón, E. (2017). Estabilidad de sistemas por medio de polinomios hurwitz. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 24(1), 61–77.

[Arancibia-Ibarra & Flores, 2020] Arancibia-Ibarra, C. & Flores, J. (2020). Modelling and analysis of a modified may-holling-tanner predator-prey model with allee effect in the prey and an alternative food source for the predator. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 17(6), 8052–8073.

[Arancibia-Ibarra et al., 2019] Arancibia-Ibarra, C., Flores, J. D., Pettet, G., & Van Heijster, P. (2019). A holling–tanner predator–prey model with strong allee effect. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 29(11), 1930032.

[Arditi & Ginzburg, 1989] Arditi, R. & Ginzburg, L. R. (1989). Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. *Journal of theoretical biology*, 139(3), 311–326.

[Arora & Kumar, 2022] Arora, C. & Kumar, V. (2022). Dynamics of one-prey and two-predator system highlighting the significance of additional food for predators with beddington–deangelis functional response. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 30(2), 411–431.

[Bamón, 1991] Bamón, R. (1991). Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos. *Pro Mathematica*, 5(9-10), 146–169.

[Benazic, 2007] Benazic, R. (2007). *Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Lima, Perú: UNI-VERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA, FACULTAD DE CIENCIAS.

[Blé et al., 2021] Blé, G., Castellanos, V., & Castillo-Santos, F. E. (2021). Bistability and hopf bifurcation of a tritrophic system with holling functional responses. *Heliyon*, 7(2), e06212.

[Burchardt & Ratschan, 2007] Burchardt, H. & Ratschan, S. (2007). Estimating the region of attraction of ordinary differential equations by quantified constraint solving. In *Proceedings Of The 3rd WSEAS International Conference On Dynamical Systems And Control*, volume 241: Citeseer.

[Burden et al., 2010] Burden, R., Faires, J., & Burden, A. (2010). *Análisis Numérico*. Brooks Cole, 9ed. edition.

[Chicone, 2006] Chicone, C. (2006). *Ordinary differential equations with applications*. Springer, 2nd edition.

[Chiu & Hsu, 1998] Chiu, C.-H. & Hsu, S.-B. (1998). Extinction of top-predator in a three-level foodchain model. *Journal of Mathematical Biology*, 37(4), 372–380.

[Debnath et al., 2020] Debnath, S., Ghosh, U., & Sarkar, S. (2020). Global dynamics of a tritrophic food chain model subject to the allee effects in the prey population with sexually reproductive generalizedtype top predator. *Computational and Mathematical Methods*, 2(2), e1079.

[Delgado et al., 2020] Delgado, J. A. C., Delgado, E. R., Avalos, L. C. M., & Catacora, J. G. A. (2020). Estabilidad de los puntos de críticos de los sistemas dinámicos autónomos lineales. *Ciencias*, 4(4), 61–81.

[Ding & Huang, 2018] Ding, W. & Huang, W. (2018). Global dynamics of a ratio-dependent holling– tanner predator–prey system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 460(1), 458–475.

[Do et al., 2011] Do, Y., Baek, H., Lim, Y., & Lim, D. (2011). A three-species food chain system with two types of functional responses. *Abstract and Applied Analysis*, 2011, Art. ID 934569, 16.

[Dubey & Upadhyay, 2004] Dubey, B. & Upadhyay, R. (2004). Persistence and extinction of one-prey and two-predators system. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 9(4), 307–329.

[Fernández-Arhex & Corley, 2004] Fernández-Arhex, V. & Corley, J. C. (2004). La respuesta funcional: una revisión y guía experimental. *Ecología austral*, 14(1), 83–93.

[Gamaliel et al., 2018] Gamaliel, B., Víctor, C., & Iván, L.-H. (2018). Andronov–hopf and bautin bifurcation in a tritrophic food chain model with holling functional response types iv and ii. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2018(78), 1–27.

[Gonźalez-Olivares et al., 2019] Gonźalez-Olivares, E., Arancibia-Ibarra, C., Rojas-Palma, A., & Gonźalez-Yãnez, B. (2019). Bifurcations and multistability on the may-holling-tanner predation model considering alternative food for the predators. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 16(5), 4274–4298.

[Hale, 1980] Hale, J. K. (1980). *Ordinary differential equations*. Krieger.

[Hammami & Rettab, 2020] Hammami, M. & Rettab, N. (2020). On the region of attraction of dynamical systems: Application to lorenz equations. *Archives of Control Sciences*, 30.

[Holling, 1959] Holling, C. S. (1959). The components of predation as revealed by a study of smallmammal predation of the european pine sawfly1. *The Canadian Entomologist*, 91(5), 293–320.

[Horn & Johnson, 2013] Horn, R. A. & Johnson, C. R. (2013). *Matrix analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, second edition.

[Hsu et al., 2001] Hsu, S.-B., Hwang, T.-W., & Kuang, Y. (2001). Rich dynamics of a ratio-dependent one-prey two-predators model. *Journal of Mathematical Biology*, 43(5), 377–396.

[Hsu et al., 2003] Hsu, S.-B., Hwang, T.-W., & Kuang, Y. (2003). A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control. *Mathematical biosciences*, 181(1), 55–83.

[Jana et al., 2014] Jana, D., Agrawal, R., & Upadhyay, R. K. (2014). Top-predator interference and gestation delay as determinants of the dynamics of a realistic model food chain. *Chaos, Solitons & Fractals*, 69, 50–63.

[Kharbanda & Kumar, 2019] Kharbanda, H. & Kumar, S. (2019). Asymptotic stability of one prey and two predators model with two functional responses. *Ricerche di Matematica*, 68(2), 435–452.

[Kumar & Freedman, 1989] Kumar, R. & Freedman, H. (1989). A mathematical model of facultative mutualism with populations interacting in a food chain. *Mathematical biosciences*, 97(2), 235–261.

[Kumar & Freedman, 2002] Kumar, R. & Freedman, H. I. (2002). Mathematical analysis in a model of obligate mutualism with food chain populations. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 2(1), 25–44.

[Kumari & Kumar, 2022] Kumari, N. & Kumar, V. (2022). Controlling chaos and pattern formation study in a tritrophic food chain model with cannibalistic intermediate predator. *The European Physical Journal Plus*, 137(3), 1–23.

[LaSalle, 1968] LaSalle, J. P. (1968). Stability theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential equations*, 4(1), 57–65.

[Leslie, 1948] Leslie, P. H. (1948). Some further notes on the use of matrices in population mathematics. *Biometrika*, 35(3/4), 213–245.

[Liang & Pan, 2007] Liang, Z. & Pan, H. (2007). Qualitative analysis of a ratio-dependent holling–tanner model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334(2), 954–964.

[López-Cruz, 2006] López-Cruz, R. (2006). *Structured SI epidemic models with applications to HIV epidemic*. Arizona State University.

[Lotka, 1925] Lotka, A. J. (1925). *Elements of physical biology*. Williams & Wilkins.

[Maiti et al., 2008] Maiti, A., Pal, A., & Samanta, G. (2008). Effect of time-delay on a food chain model. *Applied Mathematics and Computation*, 200(1), 189–203.

[Malthus, 1798] Malthus, T. (1798). An essay on the principle of population. printed for j. johnson. *St. Paul's church-yard, London*, (pp. 1–126).

[Misra & Annavarapu, 2016] Misra, O. P. & Annavarapu, R. B. (2016). A model for the dynamical study of food-chain system considering interference of top predator in a polluted environment. *Journal of Mathematical Modeling*, 3(2), 189–218.

[Mora, 2015] Mora, W. (2015). *Introducción a los Métodos Numéricos.* Instituto Tecnológico de Costa Rica, Revista digital Matemática Educación e Internet.

[Mukhopadhyay & Bhattacharyya, 2016] Mukhopadhyay, B. & Bhattacharyya, R. (2016). Effects of harvesting and predator interference in a model of two-predators competing for a single prey. *Applied Mathematical Modelling*, 40(4), 3264–3274.

[Patra et al., 2009] Patra, B., Maiti, A., & Samanta, G. (2009). Effect of time-delay on a ratio-dependent food chain model. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 14(2), 199–216.

[Pérez Núñez & López Cruz, 2017] Pérez Núñez, J. & López Cruz, R. (2017). Mathematical analysis of a food chain: prey-predator-biological control. *Selecciones Matemáticas*, 4(1), 112–123.

[Pérez Núñez, 2014] Pérez Núñez, J. R. (2014). *Dinámica del control biológico basado en un modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos*. Tesis de licenciatura, E. A. P. Computación Científica, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

[Pérez-Núñez, 2017] Pérez-Núñez, J. R. (2017). *Análisis y simulación de un modelo matemático glucosainsulina en personas con diabetes tipo I*. PhD thesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima Perú.

[Rai et al., 2013] Rai, B., Khare, P., & Singh, M. (2013). Mutualistic interactions leading to coexistence in competitive ecological communities: mathematical approach and simulation studies. *J. Int. Acad. Phys. Sci.*, 17(4), 325–354.

[Romero & Fernández, 2022] Romero, N. P. & Fernández, C. U. S. (2022). Modelo matemático de una cadena alimenticia depredador-presa: plancton-anchoveta. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 29(1), 71–104.

[Romero-Ordoñez et al., 2022] Romero-Ordoñez, M., Pérez-Núñez, J., Vásquez-Serpa, L., et al. (2022). Análisis cualitativo y simulaciones de un modelo depredador-presa tipo may-holling-tanner rázondependiente con una fuente alternativa de alimento para el depredador. *Selecciones Matemáticas*, 9(01), 196–209.

[Sáez & González-Olivares, 1999] Sáez, E. & González-Olivares, E. (1999). Dynamics of a predator-prey model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 59(5), 1867–1878.

[Saha & Chakrabarti, 2009] Saha, T. & Chakrabarti, C. (2009). Dynamical analysis of a delayed ratiodependent holling–tanner predator–prey model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 358(2), 389–402.

[Sahoo & Samanta, 2021] Sahoo, D. & Samanta, G. (2021). Comparison between two tritrophic food chain models with multiple delays and anti-predation effect. *International Journal of Biomathematics*, 14(03), 2150010.

[Slotine, 1991] Slotine, J. J. E. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall International Inc.

[Sotomayor, 1979] Sotomayor, J. (1979). *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume Único of *Projeto Euclides*. IMPA.

[Tanner, 1975] Tanner, J. T. (1975). The stability and the intrinsic growth rates of prey and predator populations. *Ecology*, 56(4), 855–867.

BIBLIOGRAFÍA

[Ton & Hieu, 2011] Ton, T. V. & Hieu, N. T. (2011). Dynamics of species in a model with two predators and one prey. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74(14), 4868–4881.

[Upadhyay et al., 2013] Upadhyay, R. K., Naji, R. K., Raw, S. N., & Dubey, B. (2013). The role of top predator interference on the dynamics of a food chain model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(3), 757–768.

[Verhulst, 1838] Verhulst, P.-F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corresp. Math. Phys.*, 10, 113–126.

[Volterra, 1926] Volterra, V. (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, 118(2972), 558–560.

[Zhang & Chen, 2005] Zhang, S. & Chen, L. (2005). Chaos in three species food chain system with impulsive perturbations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(1), 73–83.

Anexo

4.4. Calculo simbólico

Durante esta investigación, se realizo varios cálculos matemáticos, los cuales se hicieron mediante el lenguaje de programación Python. Se presenta los paquetes usados.

```
import numpy as np import sympy as sy from scipy
import integrate as inte from PIL import Image,
ImageTk import matplotlib.pyplot as plt import
tkinter as tk
from matplotlib.figure import Figure from
matplotlib.backends.backend_tkagg
                                    import (FigureCanvasTkAgg,NavigationToolbar2Tk)
```

Listing 4.1: Paquetes.

```
import numpy as np from scipy import integrate as inte
from PIL import Image, ImageTk import matplotlib.pyplot
as plt import tkinter as tk from matplotlib.figure import
Figure from matplotlib.backends.backend_tkagg

                                    import (FigureCanvasTkAgg,NavigationToolbar2Tk)
```

Listing 4.2: Paquetes.

```
p1 = sy.Symbol('p1',real = True) p2 =
sy.Symbol('p2',real = True) p3 = sy.Symbol('p3',real
= True) p4 = sy.Symbol('p4',real = True) p5 =
sy.Symbol('p5',real = True) p6 = sy.Symbol('p6',real
= True) p7 = sy.Symbol('p7',real = True) p8 =
sy.Symbol('p8',real = True) mu = sy.Symbol('mu',real
= True) al1 = sy.Symbol('al1',real = True) al2 =
sy.Symbol('al2',real = True) H1 = sy.Symbol('H1',real
= True) u = sy.Symbol('u') v = sy.Symbol('v') w =
sy.Symbol('w')
```

4.4.1. Análisis cualitativo local

```
3
4
5
6
7
8
 9 10
11
12
13
14
15
```

```
f1 = (1-u)*u - (u*v)/((p1*v)+u) - (u*w)/((p2*w)+u) f2 = (p3-(v/((p4*u)+p5)))*v
f3 = w*(p6-p7*w/u) v11 = sy.simplify(sy.diff(f1,u)) v12 =
sy.simplify(sy.diff(f1,v)) v13 = sy.simplify(sy.diff(f1,w)) v21 =
sy.simplify(sy.diff(f2,u)) v22 = sy.simplify(sy.diff(f2,v)) v23 =
sy.simplify(sy.diff(f2,w)) v31 = sy.simplify(sy.diff(f3,u)) v32 =
sy.simplify(sy.diff(f3,v))
```

Listing 4.3: Preparando variables y parametros.

```
1
2
3
4
5
6
7
8
 9 10
11
```

4.4. CALCULO SIMBÓLICO

```
j11 = v11.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0) j12 =
v12.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0) j13 =
v13.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0) j21 =
v21.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0) j22 =
v22.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0) j23 =
v23.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0) j31 =
v31.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0) j32 =
v32.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0) j33 =
v33.subs(u,1).subs(v,0).subs(w,0)
J1 = np.array(
[[j11,j12,j13], [j21,j22,j23],
  [j31,j32,j33]])
J1

v33 = sy.simplify(sy.diff(f3,w))
```

Listing 4.4: Calculo de la matrix jacobiana.

```
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
```

```
j11 = sy.simplify(v11.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0)) j12 =
sy.simplify(v12.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0)) j13 =
sy.simplify(v13.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0)) j21 =
sy.simplify(v21.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0)) j22 =
sy.simplify(v22.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0)) j23 =
sy.simplify(v23.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0)) j31 =
sy.simplify(v31.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0)) j32 =
sy.simplify(v32.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0)) j33 =
sy.simplify(v33.subs(u,al2).subs(v,p3*(p4*al2 +p5)).subs(w,0))
J4 = np.array(
[[j11,j12,j13], [j21,j22,j23],
[j31,j32,j33]])
J4
```

Listing 4.5: Jacobiano del primer punto crítico.

```
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
```

Listing 4.6: Jacobiano del tercer punto crítico.

```
u, v, w = sy.symbols('u v w')
p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8 = sy.symbols('p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8', real=True) sy.init_printing(use_unicode=True)
```

4.4.2. Análisis cualitativo global

```
1
2
3
```

```
P = sy.Matrix([
        [pow(u,2),    0,    0],    [0,
        pow(v,2), 0],
        [0, 0, pow(w,2)]
])
```

Listing 4.7: Preparando el calculo simbolico.

```
1
2
3
4
5
```

```
F1 =u*(1 -u) -(u*v)/(p1*v +u) -(u*w)/(p2*w +u)
F2 = (p3 -v/(p4*u +p5))*v F3 = (p6 -
(p7*w)/u)*w f =sy.Matrix([[F1], [F2],
                          [F3]])
```

Listing 4.8: Matriz P.

```
1
2
3
4
5
6
```

```
f1 =np.matmul(f.T,P)
V =np.matmul(f1,f)
V[0][0]
```

Listing 4.9: Conviertiendo el sistema en estudio en una matriz.

```
1
2
3
```

Listing 4.10: Función de Lyapunov por Krasovskii.

4.5. Simulaciones

En esta sección se presenta los programas en Python para las simulaciones

4.5.1. Valores de la simulación

A continuación se presenta el código programada en Python para encontrar los parámetros adecuados para cada simulaciones hecho.

```
p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7 =2.5, 6.8, 1.0, 4.0, 1.25, 2.6, 1.8
A   =p2*p6 +p7
B   =p1*p3*p4 +1
C   =p1*p3*p5 +p3*p4 -p1*p3*p4 -1
D   =1 -p1
E   =-C
D2 = pow((A*C +p6*B),2) -4*A*B*p3*p5*(A*D +p1*p6) tet1 =(A*E -p6*B
+pow(D2,1/2))/(2*A*B) tet2 =(A*E -p6*B -pow(D2,1/2))/(2*A*B)
M1 =2*tet1 +p2*pow((p6/A),2) +p1*pow(p3,2)*pow(p4*tet1 +p5,2)/pow(tet1*B +p1*p3*p5,2)
D2, tet1, tet2, A, B, C, D, E, M1
```

```
u6 =tet1
v6 =p3*(p4*tet1 +p5) w6
=(tet1*p6)/p7
################################ u7 =tet2
v7 =p3*(p4*tet2 +p5) w7 =(tet2*p6)/p7
################################ u6,v6,w6, u7,v7,w7
```

Listing 4.11: Parametros iniciales y principales.

```
A*E <p6*B +pow(D2,1/2), A*E +pow(D2,1/2) >p6*B, M1>=1
```

Listing 4.12: Puntos criticos.

Listing 4.13: Proposición (5.6.3) y Teorema (6.1.1).

4.5.2. Interfaz gráfica

A continuación se presenta el código de la interfaz gráfica programada en Python.

```
def grafica():
    u0 = float(cuadroInx.get()) v0 =
    float(cuadroIny.get()) w0 =
    float(cuadroInz.get()) p1 =
    float(cuadroP1.get()) p2 =
    float(cuadroP2.get()) p3 =
    float(cuadroP3.get()) p4 =
    float(cuadroP4.get()) p5 =
    float(cuadroP5.get()) p6 =
    float(cuadroP6.get()) p7 =
    float(cuadroP7.get())

    tf, ti, part = 10, 0, 10001
    h=(tf-ti)/part
    T,listau,listav,listaw = [ti],[u0],[v0],[w0] for i in range(part):
        k1=h*fun1(listau[i],listav[i],listaw[i],p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7) q1=h*fun2(listau[i],listav[i],listaw[i],p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7)
        c1=h*fun3(listau[i],listav[i],listaw[i],p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7)

        k2=h*fun1(listau[i] +(k1/2),listav[i] +(q1/2),listaw[i] +(c1/2),p1,p2,p3,p4,p5,
    p6,p7) q2=h*fun2(listau[i] +(k1/2),listav[i] +(q1/2),listaw[i] +(c1/2),p1,p2,p3,p4,p5,
    p6,p7) c2=h*fun3(listau[i] +(k1/2),listav[i] +(q1/2),listaw[i] +(c1/2),p1,p2,p3,p4,p5,
    p6,p7)
```

4.5. SIMULACIONES

```
                                    k3=h*fun1(listau[i] +(k2/2),listav[i] +(q2/2),listaw[i] +(c2/2),p1,p2,p3,p4,p5,
```

```
p6,p7) q3=h*fun2(listau[i] +(k2/2),listav[i] +(q2/2),listaw[i] +(c2/2),p1,p2,p3,p4,p5,
p6,p7) c3=h*fun3(listau[i] +(k2/2),listav[i] +(q2/2),listaw[i] +(c2/2),p1,p2,p3,p4,p5,
p6,p7)

        k4=h*fun1(listau[i] +k3,listav[i] +q3,listaw[i] +c3,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7) q4=h*fun2(listau[i] +k3,listav[i] +q3,listaw[i]
                +c3,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7) c4=h*fun3(listau[i] +k3,listav[i] +q3,listaw[i] +c3,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7)

    x=listau[i]+(k1+(2*k2)+(2*k3)+k4)/6 listau.append(x)
    y=listav[i]+(q1+(2*q2)+(2*q3)+q4)/6 listav.append(y)
    z=listaw[i]+(c1+(2*c2)+(2*c3)+c4)/6
    listaw.append(z)
    t=(ti+h*(i+1))
    T.append(t) ax.clear() ax.plot(T,listau,color='b', label='Presa', linewidth=5)
ax.plot(T,listav,color='r', label='1 Depredador', linewidth=5) ax.plot(T,listaw,color='y', label='2
Depredador', linewidth=5) ax.grid(True) ax.legend(loc='best',fontsize=15)
ax.set_xlabel('Tiempo', fontsize=15)
ax.set_ylabel('Densidad poblacional', fontsize=15) graf.draw()
```

```
def fun1(u,v,w,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7):
    return u*(1-u)-(u*v)/(p1*v+u)-(u*w)/(p2*w+u)
```

Listing 4.14: Funcion que grafica.

```
def fun2(u,v,w,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7):
    return v*(p3-(v)/(p4*u+p5))
```

Listing 4.15: Funcion u.

```
def fun3(u,v,w,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7):
    return w*(p6-(p7*w)/(u))
```

Listing 4.16: Funcion v.

Listing 4.17: Funcion w.

```
raiz = tk.Tk()
raiz.title("Interfaz grafica de la Tesis en Python-Tkinter") raiz.iconbitmap("logo.ico")#Opcional
raiz.geometry('1200x600')

miFrame=tk.Frame(raiz) miFrame.place(relx=0.005, rely=0.05, relwidth=0.4, relheight=0.9)

miFrame2=tk.Frame(raiz, bg='#C0C0C0', bd=1.5) miFrame2.place(relx=0.375, rely=0.05, relwidth=0.6,
relheight=0.9)

varX = tk.DoubleVar() varY =
tk.DoubleVar() varZ = tk.DoubleVar()
varP1 = tk.DoubleVar() varP2 =
tk.DoubleVar() varP3 = tk.DoubleVar()
varP4 = tk.DoubleVar() varP5 =
tk.DoubleVar() varP6 = tk.DoubleVar()
varP7 = tk.DoubleVar()

#------------------cajas-----------------------------

cuadroInx=tk.Entry(miFrame, textvariable = varX) cuadroInx.grid(row=4, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroInx.config(fg="black", justify="left")
```

```
cuadroIny=tk.Entry(miFrame, textvariable = varY) cuadroIny.grid(row=5, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroIny.config(fg="black", justify="left")

cuadroInz=tk.Entry(miFrame, textvariable = varZ) cuadroInz.grid(row=6, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroInz.config(fg="black", justify="left")

cuadroP1=tk.Entry(miFrame, textvariable = varP1) cuadroP1.grid(row=7, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroP1.config(fg="black", justify="left")

cuadroP2=tk.Entry(miFrame, textvariable = varP2) cuadroP2.grid(row=8, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroP2.config(fg="black", justify="left")

cuadroP3=tk.Entry(miFrame, textvariable = varP3) cuadroP3.grid(row=9, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroP3.config(fg="black", justify="left")

cuadroP4=tk.Entry(miFrame, textvariable = varP4) cuadroP4.grid(row=10, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroP4.config(fg="black", justify="left")

cuadroP5=tk.Entry(miFrame, textvariable = varP5) cuadroP5.grid(row=11, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroP5.config(fg="black", justify="left")

cuadroP6=tk.Entry(miFrame, textvariable = varP6) cuadroP6.grid(row=12, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroP6.config(fg="black", justify="left")

cuadroP7=tk.Entry(miFrame, textvariable = varP7) cuadroP7.grid(row=13, column=1, padx=5, pady=5)
cuadroP7.config(fg="black", justify="left")

#------------------imagen del modelo-------------------

miImagen = tk.PhotoImage(file = "modelo_tesis_2.png")#Foto del modelo imagen1 = tk.Label(miFrame, image = miImagen).grid(row=0,
column=0, columnspan=2, sticky ="nsew")

#------------------Textos-----------------------------

valorInx=tk.Label(miFrame, text="Valor Inicial u0 (Presa): ") valorInx.grid(row=4, column=0, sticky="e", padx=10, pady=5)

valorIny=tk.Label(miFrame, text="Valor Inicial v0 (1 depredador): ") valorIny.grid(row=5, column=0, sticky="e", padx=10, pady=5)

valorInz=tk.Label(miFrame, text="Valor Inicial w0 (2 depredador): ") valorInz.grid(row=6, column=0, sticky="e", padx=10, pady=5)

nombreLabel1=tk.Label(miFrame, text="Parametro p1: ") nombreLabel1.grid(row=7, column=0, sticky="e", padx=10,
pady=5)

nombreLabel2=tk.Label(miFrame, text="Parametro p2: ") nombreLabel2.grid(row=8, column=0, sticky="e", padx=10,
pady=5)

nombreLabel3=tk.Label(miFrame, text="Parametro p3: ") nombreLabel3.grid(row=9, column=0, sticky="e", padx=10,
pady=5)

nombreLabel4=tk.Label(miFrame, text="Parametro p4: ") nombreLabel4.grid(row=10, column=0, sticky="e", padx=10,
pady=5)

nombreLabel5=tk.Label(miFrame, text="Parametro p5: ") nombreLabel5.grid(row=11, column=0, sticky="e", padx=10,
pady=5)

nombreLabel6=tk.Label(miFrame, text="Parametro p6: ") nombreLabel6.grid(row=12, column=0, sticky="e", padx=10,
pady=5) nombreLabel7=tk.Label(miFrame, text="Parametro p7: ")
28
29
30
```

4.5. SIMULACIONES

```
nombreLabel7.grid(row=13, column=0, sticky="e", padx=10, pady=5)
```

```
#------------------------------botones--------------------------

plot_button = tk.Button(miFrame, text = "Plot", width = 3, command = grafica) plot_button.grid(row=15, column=0,
padx=10, pady=5, columnspan=2, sticky="nsew")

#------------------------------Grafica--------------------------

figure = plt.Figure(figsize=(5,4), dpi=100) ax = figure.add_subplot(111)
ax.grid(True),ax.set_xlabel('Tiempo'),ax.set_ylabel('Densidad Poblacional') graf = FigureCanvasTkAgg(figure,
miFrame2) graf.get_tk_widget().pack(side=tk.LEFT, fill=tk.BOTH,expand=1)

#----------------------Barra de Herramientas

class CustomToolbar(NavigationToolbar2Tk):
        def __init__(self, canvas, window):
                super().__init__(canvas, window) self.children["!button4"].pack_forget()

barra = CustomToolbar(graf, miFrame2) barra.update() graf.get_tk_widget().pack(side=tk.TOP,
fill=tk.BOTH, expand=1) raiz.mainloop()
```

Listing 4.18: Interfaz grafica.