Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Expansión de Laurent y continuación holomorfa en C^n

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Franco Terry ESPINOZA GARATE

ASESOR

Dr. Leonardo Henry ALEJANDRO AGUILAR

Lima, Perú

2023



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Espinoza, F. (2023). *Expansión de Laurent y continuación holomorfa en* C^n. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Franco Terry Espinoza Garate
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	70970814
URL de ORCID	**https://orcid.org/0009-0004-8745-5143**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43069051
URL de ORCID	**https://orcid.org/0000-0001-5354-4325**
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445739
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09197486
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Complejo

Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima - Peru
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – Octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 09:00 horas del viernes 06 de octubre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023): Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (PRESIDENTE), Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci (MIEMBRO) y el Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**EXPANSIÓN DE LAURENT Y CONTINUACIÓN HOLOMORFA EN $\mathbb{C}^n$**", presentado por el señor **Bachiller FRANCO TERRY ESPINOZA GARATE**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación Sobresaliente con un calificativo promedio de Dieciocho (18)

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller FRANCO TERRY ESPINOZA GARATE** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 09:40 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
PRESIDENTE

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
MIEMBRO

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Yo Leonardo Henry Alejandro Aguilar en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 001543-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es EXPANSIÓN DE LAURENT Y CONTINUACIÓN HOLOMORFA EN $\mathbb{C}^n$, presentado por el bachiller Franco Terry Espinoza Garate para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 20% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título correspondiente.

Firma del Asesor_____

DNI: 43069051

Nombres y apellidos del asesor:

Leonardo Henry Alejandro Aguilar



Huella digital

Agradecimiento

Agradezco con todo mi ser a mis padres y mi hermano, quienes depositaron la confianza y el apoyo para poder realizar este estudio, a mi asesor Leonardo Alejandro por guiarme y hacer esto posible.

Índice general

Resumen iv

Abstrac v

Introducción vi

Notaciones vii

1. Series de Potencia y Expansión de Laurent en $\mathbb{C}^n$ **1**
1.1. Geometría de $\mathbb{C}^n$ 1
1.2. Funciones Holomorfas en varias variables complejas 7
1.2.1. Definición de una Función Holomórfica 7
1.2.2. Propiedades Básicas de Funciones Holomorfas 10
1.2.3. Funciones Parcialmente Holomorfas y las Ecuaciones Diferenciales de Cauchy-Riemann 12
1.3. La Fórmula Integral de Cauchy 17
1.4. El Espacio Topológico $\mathcal{O}(U)$ 20
1.4.1. Espacios localmente convexos 20
1.4.2. La Topología compacta-abierta en $\mathcal{C}(U, E)$ 24
1.4.3. Los Teoremas de Arzelà-Ascoli y Montel 29
1.5. Series de Potencia y Series de Taylor 38
1.5.1. Familias sumables en espacios de Banach 38
1.5.2. Series de Potencia 39
1.5.3. Dominios de Reinhardt y Expansión de Laurent 42

2. Continuación en dominios circulares y policirculares **52**
2.1. Continuación Holomorfa 52

2.2. Interpretación-representación teórica de las series de Laurent 60
2.3. Hartogs' Kugelsatz, caso especial 62

Conclusiones **65**

Bibliografía **65**

Resumen

Los temas principales en el presente trabajo de tesis son las series de Taylor y expansión de Laurent en $\mathbb{C}^n$ y la continuación holomorfa en $\mathbb{C}^n$. En el primer capítulo, demostramos las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann y las derivadas de Wirtinger en $\mathbb{C}^n$, la fórmula integral de Cauchy en $\mathbb{C}^n$ y los teorema de Arzelà-Ascoli y Montel; además, se demuestra la expansión de Taylor y la expansión de Laurent en $\mathbb{C}^n$. En el segundo capítulo, se define los dominios policirculares, se demuestra el teorema de continuación holomorfa sobre dominios de Reinhardt, se da una interpretación-representación teórica de las series de Laurent y se demuestra el teorema de Hartogs' Kugelsatz, caso especial.

Palabras claves: Función holomorfa, ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann, fórmula integral de Cauchy, expansión de Laurent, continuación holomorfa.

Abstrac

The main topics in the present thesis work are the Taylor series and Laurent expansion in $\mathbb{C}^n$ and the holomorphic continuation in $\mathbb{C}^n$. In the first chapter, we prove the Cauchy-Riemann differential equations and the Wirtinger derivatives in $\mathbb{C}^n$, the Cauchy integral formula in $\mathbb{C}^n$ and the Arzelà-Ascoli and Montel theorem; furthermore, we prove the Taylor expansion and the Laurent expansion in $\mathbb{C}^n$. In the second chapter, we define polycircular domains, prove the holomorphic continuation theorem on Reinhardt domains, give a theoretical interpretation-representation of Laurent series and prove Hartogs' Kugelsatz theorem, special case.

Keywords: Holomorphic function, Cauchy-Riemann differential equations, Cauchy integral formula, Laurent expansion, holomorphic continuation.

Introducción

El análisis complejo en varias variables es una rama profunda y sofisticada de las matemáticas que extiende los conceptos familiares del análisis complejo de una variable a un contexto multidimiensional. Estudiamos las propiedades del espacio $\mathbb{C}^n$ a través de los conceptos y propiedades que caracterizan a $\mathbb{C}$.
En el primer capítulo, primera sección, estudiamos la geometría del espacio $\mathbb{C}^n$. En la segunda sección, introducimos el concepto de función holomorfa en $\mathbb{C}^n$ y demostramos sus propiedades básicas; generalizamos las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann al espacio $\mathbb{C}^n$ y damos las derivadas de Wirtinger. En la tercera sección, generalizamos la fórmula integral de Cauchy al espacio $\mathbb{C}^n$. En la cuarta sección, estudiamos el espacio topológico de las funciones holomorfas $\mathcal{O}(U)$ y los espacios localmente convexos; además, investigamos las propiedades de la topología compacta-abierta en $\mathcal{C}(U, E)$ y demostramos los teoremas de Arzelà-Ascoli y Montel. Finalmente, en la quinta sección, se definen las familias sumables en espacios de Banach y estudiamos sus propiedades, demostramos la expansión de Taylor en $\mathbb{C}^n$, y además, demostramos la expasión de Laurent sobre los dominios de Reinhardt en $\mathbb{C}^n$.
En el segundo capítulo, primera sección, se demuestra el teorema de continuación holomorfa sobre dominios circulares y sobre dominios de Reinhardt en $\mathbb{C}^n$. En el segunda sección se da la interpretación-representación teórica de las series de Laurent. Finalmente, en la tercera sección, se demuestra el teorema de Hartogs' Kugelsatz, caso especial en $\mathbb{C}^n$.

Notaciones

$(z \mid w)$	Producto interno estándar
$\|z\|$	Norma
$[x, y],]x, y[$	Intervalo o segmento cerrado y abierto, respectivamente
$B_r^n(a)$	Bola en $\mathbb{C}^n$ con centro en a y radio r
$P_r^n(a)$	Policilindro $\mathbb{C}^n$ con centro en a y poliradio r
$T_r^n(a)$	Politoro $\mathbb{C}^n$ con centro en a y poliradio r
$\mathbb{T}^n$	Politoro unitario
$Df(a), f'(a)$	Derivada de f en a
∂X	Frontera del espacio topológico X
$\partial_{ex} X$	Conjunto de puntos extremos de X
$\mathcal{O}(X, Y)$	Espacio de aplicaciones holomorfas $f : X \to Y$
$\mathcal{O}(D)$	Álgebra de funciones holomorfas$f : D \to \mathbb{C}$
pr_k	Proyección en la $k-$ésima coordenada
$\mathcal{C}^k(X, Y)$	funciones reales $k-$veces diferenciable $f : X \to Y$
$d_a f$	Derivada real de f en a
$V^{\#}$	Espacio algebraico dual del espacio vectorial V
$\partial f, \overline{\partial} f$	Diferencial compleja y compleja conjugada de f en a, respectivamente
$D^\alpha f, \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$	Derivadas parciales de f
$\tau(D)$	Espacio absoluto de D
$A \subset\subset B$	A es subconjunto relativamente compacto de B

Capítulo 1

Series de Potencia y Expansión de Laurent en $\mathbb{C}^n$

1.1. Geometría de $\mathbb{C}^n$

El *espacio euclideano n-dimensional*, donde sus elementos están representados por n-uplas de números reales

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)/a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Además, denotamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, conocido como *el conjunto de los números complejos*, cuyos elementos son de la forma $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, donde i es la unidad imaginaria que satisface $i^2 = -1$.
Se define el conjunto $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$, que es el espacio vectorial complejo n-dimensional formado por todos los vectores $z = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{C}$.

Se define la conjugada de $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ por $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}^n$.
Dotamos al espacio $\mathbb{C}^n$ el producto interior euclideano:

$$(z|w) := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}, z = (z_1, z_2, ..., z_n), w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n \tag{1.1}$$

y la norma euclideana inducida

$$\|z\|_2 := \sqrt{(z|z)}, z \in \mathbb{C}^n \tag{1.2}$$

$\mathbb{C}^n$ con el producto interno (1.1) es un *espacio de Hilbert complejo* y la aplicación

$$\mathbb{R}^n \text{ x } \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n, (x, y) \mapsto x + iy$$

es una isometría. Debido a la isometría entre $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}^n$ todas las nociones métricas y topológicas de estos espacios coinciden.

Definición 1.1 *Dos normas $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ en un espacio vectorial V son llamadas equivalentes, si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que*

$$\alpha\mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2 \leq \beta\mathcal{N}_1(x), \text{ para todo } x \in V.$$

Proposición 1.1 *En un espacio vectorial finito dimensional V (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), todas las normas son equivalentes.*

Demostración:
Ver [6]. □

Observación 1.1 *Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq 1$. Para $z \in \mathbb{C}^n$ los siguientes expresiones definen normas en $\mathbb{C}^n$:*

$$\|z\|_\infty := \max_{j=1}^{n} |z_j|$$

y

$$\|z\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p \right)^{1/p}.$$

$\|.\|_\infty$ es llamada norma del máximo y $\|.\|_p$ es llamada p-norma. Como consecuencia de la proposición 1.1, todas las normas en $\mathbb{C}^n$ definen la misma topología.

Proposición 1.2 *El $\lim_{p\to\infty} \|z\|_p = \|z\|_\infty$, para todo $z \in \mathbb{C}^n$.*

Demostración:
Ver [2]. □

Si no nos referimos a una norma especial, utilizaremos la notación $\|.\|$ para cualquier norma (no solo p-normas).

Ejemplo:

En un espacio vectorial infinito dimensional no todas las normas son equivalentes. Consideramos el espacio vectorial infinito dimensional real $\mathcal{C}^1[0,1]$ de todas las funciones reales diferenciables con derivada continua en el intervalo $[0,1]$. Entonces podemos definir dos normas por

$$\|h\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |h(x)|$$

y

$$\|h\|_{\mathcal{C}^1} := \|h\|_\infty + \|h'\|_\infty.$$

La función $f(x) := x^m, m \in \mathbb{N}$, satisface

$$\|h\|_\infty = 1, \|h\|_{\mathcal{C}^1} = 1 + m.$$

Desde que m puede ser arbitrariamente largo, no existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|h\|_{\mathcal{C}^1} \leq c\|h\|_\infty$$

para todo $h \in \mathcal{C}^1[0,1]$.

Definición 1.2 *Sea E un espacio vectorial real y $x, y \in E$.*

1. *El segmento cerrado $[x,y]$ es el conjunto*

$$[x,y] := \{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

2. *El segmento abierto $]x,y[$ es el conjunto*

$$]x,y[:= \{tx + (1-t)y \mid 0 < t < 1\}.$$

3. *Un subconjunto $C \subset E$ es llamado convexo si $[x,y] \subset C$, para todo $x, y \in C$.*

4. *Sea $M \subset V$ un subconjunto arbitrario. La cápsula convexa $conv(M)$ de M es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a M.*

5. *Un elemento x de un conjunto convexo y compacto C es llamado un punto extremo de C si la condición $x \in]y,z[$ para algunos $y, z \in C$ implica que $x = y = z$. El subconjunto de los puntos extremos de C es denotado por $\partial_{ex}C$.*

Ejemplo:

Sea $r > 0$ y $a \in \mathbb{C}^n$. El conjunto

$$B_r^n(a) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - a\| < r\} \tag{1.3}$$

es llamado la *bola abierta n-dimensional* con centro en a y radio r con respecto a la norma $\|.\|$. Este es un conjunto convexo, desde que para todo $z, w \in B_r(a)$ y $t \in [0, 1]$, sigue de la desigualdad triangular que

$$\|tz + (1-t)w\| \leq t\|z\| + (1-t)\|w\| < tr + (1-t)r = r.$$

La *bola cerrada* es definida reemplazando $<$ por $\leq$ en (1.3).

Definición 1.3 *Sean $r > 0$ y $a \in \mathbb{C}^n$.*

1. *La bola abierta n-dimensional con radio r y centro a con respecto a la norma $\|.\|$ es el conjunto*

$$B_r^n(a) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - a\| < r\}$$

2. *La bola cerrada n-dimensional con radio r y centro a con respecto a la norma $\|.\|$ es el conjunto*

$$B_r^n[a] := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - a\| \leq r\}$$

Observación 1.2 *Las bolas abiertas y cerradas son conjuntos convexos en $\mathbb{C}^n$.*
En efecto, para todo $z, w \in B_r(a)$ en $t \in [0, 1]$ se sigue de la desigualdad triangular que:

$$\|tz + (1-t)w\| \leq t\|z\| + (1-t)\|w\| < tr + (1-t)r = r$$

La bola abierta (cerrada) en $\mathbb{C}^n$ es una generalización natural del disco abierto (cerrado) en $\mathbb{C}$. Esto, sin embargo, no es el único.

Definición 1.4 *Denotamos por $\mathbb{R}_+^n$ al conjunto de los vectores con componentes reales estrictamente positivos. Sean $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ y $a \in \mathbb{C}^n$*

1. *El conjunto*

$$P_r^n(a) := \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w_j - a_j| < r_j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq n\}$$

es llamado policilindro abierto con centro a y poliradio r.

2. *El conjunto*

$$T_r^n(a) := \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w_j - a_j| = r_j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq n\}$$

es llamado politoro con centro a y poliradio r. Si $r_j = 1$ para todo j y $a = 0$ es llamado politoro unitario y será denotado por $\mathbb{T}^n$.

Observación 1.3 *El policilindro es otra generalización de los discos abiertos unidimensionales, desde que este es el producto cartesiano de n discos abiertos en $\mathbb{C}$. Por tanto, también usamos la expresión polidiscos. Para $n = 1$, un policilindro y una bola abierta coinciden. $P_r^n(a)$ es también convexo.*

Lema 1.1 *Sea C un subconjunto convexo de $\mathbb{C}^n$. Entonces C es simplemente conexo.*

Demostración:

Sea $\gamma : [0,1] \to C$ una curva cerrada. Entonces

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}^n, (s,t) \mapsto s\gamma(0) + (1-s)\gamma(t)$$

define una homotopía de γ a $\gamma(0)$. Desde que C es convexo, tenemos

$$H(s,t) \in C$$

para todo $s, t \in [0,1]$. □

Como en el caso unidimensional, la noción de conexidad y de un dominio es importante en varias variables complejas. Recalcamos la definición para un espacio topológico general.

Definición 1.5 *Sea X un espacio topológico.*

1. *El espacio X es llamado conexo si X no puede ser representado como la unión disjunta de dos subconjuntos abiertos no vacíos de X, es decir, si A, B son subconjuntos abiertos de X, $A \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B$, entonces $B = \emptyset$.*

2. *Un subconjunto conexo y abierto $D \subset X$ es llamado un dominio.*

Existen diferentes caracterizaciones equivalentes de conjuntos conexos que se indican en el siguiente lema.

Lema 1.2 *Sea X un espacio topológico y $D \subset X$ un subconjunto abierto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El conjunto D es un dominio.*

2. *Si $A \neq \emptyset$ es un subconjunto de D que es abierto y cerrado a la vez, entonces $A = D$.*

3. *Toda función localmente constante $f : D \to \mathbb{C}$ es constante.*

Demostración:
Ver libro [5]. □

Observación 1.4 *En el caso de una variable el famoso teorema del mapeo de Riemann establece que todos los dominios conexos en $\mathbb{C}$ son biholomórficamente equivalente a ya sea $\mathbb{C}$ o a un disco unitario. Este teorema es falso en el caso multivariable. Más adelante demostraremos que incluso las dos generalizaciones del disco unitario, es decir, la bola unitaria y el policilindro unitario, no son biholomórficamente equivalentes. Este es un ejemplo de las grandes diferencias entre el análisis complejo en una y en más de una variable.*

Observación 1.5 *Por el famoso teorema de Krein-Milman, todo subconjunto convexo compacto C de un espacio vectorial localmente convexo posee puntos extremos. Además, C puede ser reconstruido como el cápsula convexa cerrada de su subconjunto de puntos extremos:*

$$C = \overline{conv(\partial_{ex} C)}$$

Notación 1.1 *En lo sucesivo utilizaremos la expresión de que una proposición es válida cerca de un punto a o cerca de un conjunto X si existe una vecindad abierta de a respecto a X en la que es válida.*

1.2. Funciones Holomorfas en varias variables complejas

1.2.1. Definición de una Función Holomórfica

Definición 1.6 *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ un subconjunto abierto, $g : U \to \mathbb{C}^m$, $c \in U$ y $\|.\|$ una norma arbitraria en $\mathbb{C}^n$.*

1. *La función g es llamada $\mathbb{C}-$diferenciable en c, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ y una aplicación $\mathbb{C}$-lineal*

$$Dg(c) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m,$$

tal que para todo $w \in U$ con $\|w - c\| < \delta$ la desigualdad

$$\|g(w) - g(c) - Dg(c)(w - c)\| \leq \varepsilon\|w - c\|$$

se cumple. Si $Dg(c)$ existe es llamada la derivada compleja de g en c.

2. *La función g es llamada holomorfa en U si g es $\mathbb{C}-$diferenciable en todo $c \in U$.*

3. *El conjunto*

$$\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m) := \{g : U \to \mathbb{C}^m \mid g \text{ holomórfica}\}$$

es llamado conjunto de aplicaciones holomórficas en U. Si $m = 1$ escribimos

$$\mathcal{O}(U) := \mathcal{O}(U, \mathbb{C})$$

y llamar este conjunto el conjunto de funciones holomórficas en U.

Esta definición es independiente de la elección de la norma, desde que todas las normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes. La demostración de la siguiente proposición es análoga al caso de la variable real, así que podemos omitirlo.

Proposición 1.3 *Se verifican los siguientes resultados:*

1. *Si g es $\mathbb{C}$-diferenciable en c, entonces g es continua en c.*

2. *La derivada $Dg(c)$ es única.*

3. *El conjunto* $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ *es un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial y*

$$D(\lambda g + \mu h)(c) = \lambda Dg(c) + \mu Dh(c)$$

para todo $g, h \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ *y todo* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

4. *(Regla de cadena) Sean* $U \subset \mathbb{C}^n$, $V \subset \mathbb{C}^m$ *conjuntos abiertos,* $c \in U$ *y*

$$g \in \mathcal{O}(U, V) := \{\varphi : U \to V \mid \varphi \text{ holomorfa}\},$$

$h \in \mathcal{O}(V, \mathbb{C}^k)$. *Entonces* $h \circ g \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^k)$ *y*

$$D(h \circ g)(a) = Dh(g(c)) \circ Dg(c).$$

5. *Sea* $U \subset \mathbb{C}^n$ *un conjunto abierto. Una aplicación*

$$g = (g_1, \ldots, g_m) : U \to \mathbb{C}^m$$

es holomorfa si y solo su todas las componentes $g_1, ..., g_m$ *son funciones holomorfas en* U.

6. $\mathcal{O}(U)$ *es un* $\mathbb{C}$*-álgebra. Si* $f, g \in \mathcal{O}(U)$ *y* $g(z) \neq 0$ *para todo* $z \in U$, *entonces* $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}(U)$.

Proposición 1.4 *Sea* $U \subset \mathbb{C}^n$ *un subconjunto abierto y* $f : U \to \mathbb{C}$ *una función localmente constante. Entonces* f *es holomorfa y* $Df(a) = 0$ *para todo* $a \in U$.

Demostración:

Sea $a \in U$ y $\varepsilon > 0$. Desde que f es localmente constante, existe un $\delta > 0$, tal que $f(z) = f(a)$ para todo $z \in U$ con $\|z - a\| < \delta$. Por tanto:

$$\|f(z) - f(a)\| = 0 \leq \varepsilon \|z - a\|$$

para todo $z \in U$ con $\|z - a\| < \delta$, es decir, f es holomorfa con $Df(a) = 0$, para todo $a \in U$.

□

Proposición 1.5 *Para todo* $k = 1, \ldots, n$ *la proyección*

$$\mathrm{pr}_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (z_1, ..., z_n) \mapsto z_k$$

es holomorfa y $D\mathrm{pr}_k(a) = e_k$ *(el* k*-ésimo vector de la base canónica) para todo* $a \in \mathbb{C}^n$.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$|\mathrm{pr}_k(z) - \mathrm{pr}_k(a) - (z-a|e_k)| = 0 \leq \varepsilon \|z-a\|$$

para todo $z \in \mathbb{C}^n$. □

Ejemplo:

El *álgebra de los polinomios* es la subálgebra compleja $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Sus elementos son sumas de la forma

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} c_\beta z^\beta$$

donde $c_\beta \neq 0$ para un número finito, $z \in \mathbb{C}^n$ y $\beta \in \mathbb{N}^n$. Usamos la notación

$$z^\beta := {z_1}^{\beta_1} \dots {z_n}^{\beta_n}.$$

Por ejemplo, para la fórmula de expansión de Laplace, la función determinante

$$\det : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{C}, Z \mapsto \det Z$$

es una función polinomial en la n^2 variable z_{kl} para $k = 1, ..., n$, donde z_{kl} denota la entrada de la fila k y la columna l de la matriz Z.
El grado del polinomio

$$p(z) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ c_\beta = 0 \text{ para casi todo } \beta}} c_\beta z^\beta$$

es definido como

$$\deg p := \max\{\beta_1 + ... + \beta_n \mid \beta \in \mathbb{N}^n, c_\beta \neq 0\}.$$

Por ejemplo, el polinomio $p(z_1, z_2) := z_1^5 + z_1^3 z_2^3$ tiene grado 6. Por convención, el grado polinomial tiene grado $-\infty$. Las siguiente fórmulas para grados son fáciles de verificar por cálculo directo:

$$\deg(pq) = \deg p + \deg q,$$
$$\deg(p+q) \leq \max\{\deg p, \deg q\}.$$

1.2.2. Propiedades Básicas de Funciones Holomorfas

Retornamos a los análogos multidimensionales de algunos teoremas importantes del caso de una variable. La herramienta básica para ello es el siguiente lema.

Lema 1.3 *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, $a \in U, f \in \mathcal{O}(U), b \in \mathbb{C}^n$ y $V := V_{a,b;U} := \{t \in \mathbb{C} \mid a + tb \in U\}$.Entonces V es abierto en $\mathbb{C}, 0 \in V$ y la función*

$$\mathrm{g}_{a,b} : V \to \mathbb{C}/t \mapsto f(a + tb)$$

es holomorfa.

Demostración:

Para todo $a \in U$ se infiere que $0 \in V$. Si $b = 0$ entonces $V = \mathbb{C}$. Sea $b \neq 0$, si $t_0 \in V$ entonces $z_0 := a + t_0 b \in U$. Desde que U es abierto, existe algún $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(z_0) \in U$. Definamos $z_t := a + tb$. Entonces

$$\|z_0 - z_t\| = \|b\||t_0 - t| < \varepsilon$$

para todo t con $|t_0 - t| < \frac{\varepsilon}{\|b\|}$, es decir, $B_{\frac{\varepsilon}{\|b\|}}(t_0) \subset V$. Desde que $g_{a,b}$ es la composición del mapeo lineal a fin $t \mapsto a + tb$ y la función holomorfa f, la holomorfía de $g_{a,b}$ se deduce la regla de la cadena. □

Teorema 1.1 (Teorema de Liouville) *Si la función $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada, entonces es constante.*

Demostración:

Sea $a, b \in \mathbb{C}^n$. La función $g_{a,b-a}$ del Lema 1.3 es holomofa en $\mathbb{C}$ y satisface

- $g_{a,b-a}(0) = f(a)$.
- $g_{a,b-a}(1) = f(b)$.
- $g_{a,b-a}(\mathbb{C}) \subset f(\mathbb{C}^n)$.

Desde que f es acotado, $g_{a,b-a}$ es acotado. Por la versión unidimensional del teorema de Liouville $g_{a,b-a}$ es constante, por lo tanto, $f(a) = f(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{C}^n$. □

Teorema 1.2 (Teorema de la Identidad) *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ dominio, $a \in D, f \in \mathcal{O}(D)$, tal que $f = 0$ cerca a. Entonces f es la función cero.*

Demostración:

Sea

$$U := \{z \in D \mid f = 0 \text{ cerca a } z\}.$$

Por requisito previo $a \in U$. U es cerrado en D, porque ya sea $U = D$ (si f es la función cero) o, por continuidad de f, para todo $z \in D\backslash U$ existe una vecindad W, en que f no desaparece, es decir, $W \subset D\backslash U$. Sea $c \in U \cap D$. Existe un poliradio $r \in \mathbb{R}^n_+$, tal que el policilindro $P_r(c)$ está contenido en D y $P_r(c) \cap U \neq \emptyset$. Escogemos algún $z \in P_r(c)$ y $w \in P_r \cap U$. Del lema 1.3 obtenemos que el conjunto $V_{w,z-w;D}$ es abierto en $\mathbb{C}$ y puesto que $P_r(c)$ es convexo, tenemos $[0,1] \subset V_{w,z-w;D}$. Desde que f desaparece cerca de w,existe una vecindad abierta y conexa $W \subset \mathbb{C}$ de [0,1] en que $g_{w,z-w}$ desaparece. Esto implica que $P_r(c) \subset U$, así que U es abierto en D. Sin embargo, desde que D es conexo, el único conjunto abierto y cerrado de D es el mismo D. Por tanto, $U = D$, es decir, $f = 0$ en D. □

Teorema 1.3 (Teorema del aplicación abierta) *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ dominio, $U \subset D$ un subconjunto abierto y $f \in \mathcal{O}(D)$ una función no constante. Entonces $f(U)$ es abierto, es decir, toda función holomorfa es un mapeo abierto. En particular, $f(D)$ es un dominio en $\mathbb{C}$.*

Demostración:

$f(D)$ es conexo, puesto que D es conexo y f es continua. Tenemos que demostrar que $f(U)$ es abierto. Sea $b \in f(U)$. Existe algún $a \in U$ con $b = f(a)$. Desde que U es abierto, hay un policilindro $P_r(a) \subset U$. Por el teorema 1.2 f no es constante en $P_r(c)$, ya que de lo contrario f sería constante en todo D, contradiciendo la hipótesis. Esto implica que existe un $w \in \mathbb{C}^n, w \neq 0$, tal que $g_{a,w}$ del lema 1.3 no es constante en $V = V_{a,w;P_r(a)}$. De la teoría unidimensional obtenemos que $g_{a,w}(V)$ es una vecindad abierta en b. Porque

$$b \in g_{a,w}(V) \subset f(P_r(a)) \subset f(U),$$

$f(U)$ es una vecindad de b. Desde que b fue arbitraria, $F(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$. □

Teorema 1.4 (Teorema del Módulo Máximo) *Si $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio, $a \in D$ y $f \in \mathcal{O}(D)$, tal que $|f|$ tiene un máximo local en a, entonces f es constante.*

Demostración:
$f(D)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Desde que

$$|.| : \mathbb{C} \to [0, +\infty[$$

Es una aplicación abierta, la afirmación se deduce. □

Corolario 1.1 (Principio del módulo máximo para dominios acotados) *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio acotado y $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una función continua, cuya restricción a D es holomorfa. Entonces $|f|$ alcanza su máximo en la frontera ∂D.*

Demostración:
Desde que D es acotado, la cerradura $\overline{D}$ es compacto por el teorema de Heine-Borel. Así la función continua de variable real $|f|$ alcanza un máximo en un punto $p \in \overline{D}$. Si $p \in \partial D$ hemos concluído. Si $p \in D$, el teorema del módulo máximo dice que $f\ |_D$ es constante. Por continuidad, f es constante en $\overline{D}$ y así $|f|$ alcanza un máximo también en ∂D. □

En la versión unidimensional del Teorema de la Identidad es suficiente saber conocer los valores de una función holomorfa en un subconjunto de un dominio, que tiene punto de acumulación. Esto ya no es cierto en más de una dimensión.

Ejemplo:
La función holomorfa

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, (z, w) \mapsto zw$$

no es idénticamente cero, pero desaparece en los subconjuntos $\mathbb{C} \times 0$ y $0 \times \mathbb{C}$ de $\mathbb{C}^2$, que claramente tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}^2$.

1.2.3. Funciones Parcialmente Holomorfas y las Ecuaciones Diferenciales de Cauchy-Riemann

En comparativa con el cálculo de varias variables reales, en una función holomorfa multivariable podemos considerar fijas todas sus variables excepto una. Esto motiva a las definición de holomorfía parcial.

Definición 1.7 *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto, $c \in U$ y $g : U \to \mathbb{C}$. Para todo $j = 1, \ldots, n$ definimos*

$$U_j := \{z \in \mathbb{C} \mid (c_1, \ldots, c_{j-1}, z, c_{j+1}, \ldots, c_n) \in U\}$$

y

$$\widehat{g_j} : U_j \to \mathbb{C}, z \mapsto g(c_1, \ldots, c_{j-1}, z, c_{j+1}, \ldots, c_n).$$

g es llamada parcialmente holomorfa en U si todos los $\widehat{g_j}$ son holomorfas.

Una función f holomorfa en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ puede también ser considerado como una función totalmente diferenciable de $2n$ variables reales. Tomando este punto de vista definimos

$$\mathcal{C}^k(U) := \{g : U \to \mathbb{C} \mid g \text{ es } k \text{ veces } \mathbb{R}\text{-diferenciable}\},$$

donde, como es usual, $k = 0$ denota funciones continuas. En este caso, omitimos el superíndice. Sea $c \in U$ y $g \in \mathcal{C}^1(U)$. Entonces existe una función $\mathbb{R}$-lineal

$$d_c g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$$

llamado *diferencial real de g en c*, tal que

$$g(z) = g(c) + d_c g(z - c) + O\left(\|z - c\|^2\right).$$

Al contrastar esta con la definición 1.6 concluimos que g es $\mathbb{C}$-diferenciable en c si y solo si $d_c g$ es $\mathbb{C}$-lineal. Esto demuestra que tiene sentido en este punto mirar un poco más de cerca las relaciones entre funciones $\mathbb{R}$-lineales y $\mathbb{C}$-lineales de espacios vectoriales complejos.

Lema 1.4 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $V^\#$ su dual algebraico, es decir,*

$$V^\# := \{\nu : V \to \mathbb{C} \mid \nu \text{ es } \mathbb{C} - lineal\}.$$

Además, definimos

$$\begin{aligned} \overline{V}^\# &:= \{\nu : V \to \mathbb{C} \mid \nu \text{ es } \mathbb{C} - antilineal\} \\ &= \{\nu : V \to \mathbb{C} \mid \overline{\nu} \text{ es } \mathbb{C} - lineal\} \end{aligned}$$

y

$$V_{\mathbb{R}}^\# := \{\nu : V \to \mathbb{C} \mid \nu \text{ es } \mathbb{R} - lineal\}$$

Entonces $V_{\mathbb{R}}^\#$ es un espacio vectorial complejo, $V^\#, \overline{V}^\#$ son subespacios de $V_{\mathbb{R}}^\#$ y tenemos la descomposición directa

$$V_{\mathbb{R}}^\# = V^\# \oplus \overline{V}^\#.$$

Demostración:

Las primeras proposiciones son claras. Solo tenemos que demostrar la descomposición directa. En este sentido, sea $\nu \in V^{\#} \cap \overline{V}^{\#}$ y $z \in V$. Desde que ν es complejo lineal y antilineal al mismo tiempo, tenemos

$$\nu(iz) = i\nu(z) = -i\nu(z),$$

que solo se cumple si $\nu = 0$. Para comprobrar la propiedad de descomposición, sea $\nu \in V_{\mathbb{R}}^{\#}$. Definimos

$$\nu_1(z) := \frac{1}{2}(\nu(z) - i\nu(iz)),$$
$$\nu_2(z) := \frac{1}{2}(\nu(z) + i\nu(iz)).$$

Un cálculo sencillo muestra que ν_1, ν_2 son $\mathbb{R}$-lineal y que $\nu_1 + \nu_2 = \nu$. Ahora

$$\begin{aligned}\nu_1(iz) &= \frac{1}{2}(\nu(iz) - i\nu(-z)),\\ &= i\frac{1}{2}(\nu(z) - i\nu(iz)) = i\nu_1(z)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\nu_2(iz) &= \frac{1}{2}(\nu(iz) + i\nu(-z))\\ &= -i\frac{1}{2}(\nu(z) + i\nu(iz)) = -i\nu_2(z)\end{aligned}$$

que demuestra que $\nu_1 \in V^{\#}$ y $\nu_2 \in \overline{V}^{\#}$. □

Observación 1.6 *Usamos este lema en el caso*

$$V := \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n.$$

Sea $w = u + iv \in V$. Para $1 \leq j \leq n$ consideramos las funciones lineales

$$dx_j, dy_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ dx_j(w) := u_j, dy_j(w) := v_j.$$

Claramente, $dx_j, dy_j \in V_{\mathbb{R}}^{\#}$ y

$$dx_j(iw) = -v_j, dy_j(iw) = u_j.$$

Ahora definimos

$$dz_j(w) := dx_j(w) + idy_j(w),\ \overline{dz_j}(w) := dx_j(w) - idy_j(w).$$

Entonces

$$dz_j(w) = u_j + iv_j = dx_j(w) - idx_j(iw),$$
$$d\overline{z_j}(w) = u_j - iv_j = dx_j(w) + idx_j(iw).$$

Como en el lema 1.4, obtenemos

$$dz_j \in V^{\#},\ d\overline{z_j} \in \overline{V}^{\#}.$$

Aplicando combinaciones lineales de los dz_j y $d\overline{z_j}$ a los vectores bases canónicos $e_1, ..., e_n$ de $\mathbb{C}^n$ obtenemos que los conjuntos $\{dz_1, ..., dz_n\}$ y $\{d\overline{z_1}, ..., d\overline{z_n}\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$, formando así bases para $V^{\#}$ y $\overline{V}^{\#}$. Su unión forma entonces una base para $V_{\mathbb{R}}^{\#}$ por el lema 1.4. Esto nos conlleva a la siguiente representación de la diferencial real $d_a f$:

$$d_a f = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j(f,a)dz_j + \beta_j(f,a)d\overline{z_j}) \tag{1.4}$$

con únicos coeficientes $\alpha_j(f,a), \beta_j(f,a) \in \mathbb{C}$.

Notación 1.2 *Sea $\alpha_j(f,a), \beta_j(f,a)$ los únicos coeficientes en la representación 1.4. Escribimos*

$$\partial_j f(a) := \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) := \alpha_j(f,a),\ \overline{\partial_j} f(a) := \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) := \beta_j(f,a).$$

Definición 1.8 *La funcional lineal*

$$\partial_a f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, w \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)w_j$$

es llamada la diferencial compleja de f en a.
La función antilineal

$$\overline{\partial_a} f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a)d\overline{z_j} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, w \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a)\overline{w_j}$$

es llamada diferencial compleja conjugada de f en a.

Con estas definiciones podemos descomponer la diferencial real

$$d_a f = \partial_a f + \overline{\partial_a} f \in (\mathbb{C}^n)^{\#} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{\#}.$$

Estos resultados pueden ser resumidos en

Teorema 1.5 *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto y $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La función f es holomorfa en U.*
2. *Para todo $\alpha \in U$ la diferencial $d_\alpha f$ es $\mathbb{C}$-lineal, es decir, $d_\alpha f \in (\mathbb{C}^n)^{\#}$.*
3. *Para todo $\alpha \in U$ se cumple la ecuación $\overline{\partial_\alpha} f = 0$.*
4. *Para todo $\alpha \in U$ la función f satisface las* ecuaciones diferenciales Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(\alpha) = 0 \text{ para todo } j = 1, \ldots, n$$

en U.

Demostración:
Ver [4]. □

Proposición 1.6 (Derivadas de Wirtinger) *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, $a \in U$ y sea $f \in \mathcal{C}^1(U)$.*

1. *Se verifica*

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)(a),\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)(a)$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}, \dfrac{\partial f}{\partial y_j}$ denota las derivadas reales parciales.

2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, $a \in U$ y $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$. Sea $Df(a) = (\alpha_{kl}) \in M(m, n; \mathbb{C})$, denotado como el conjunto de matrices $m \times n$ complejas, la derivada compleja de f en a. Entonces*

$$\alpha_{kl} = \frac{\partial f_k}{\partial z_l}(a)$$

para todo $k = 1, \ldots, m$ y $l = 1, \ldots, n$.

3. *Sea $\widehat{f_j}$ definido como en la definición 1.7. Si f es holomorfa en U, entonces f es parcialmente holomorfa y satisface las ecuaciones*

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) = \widehat{f_j}'(a_j), \text{ para todo } j = 1, \ldots, n.$$

Demostración:
Ver [9]. □

Observación 1.7 *Es un teorema profundo de Hartogs que lo opuesto de la proposición 1.6.3 también se cumple: Toda función parcialmente holomorfa es ya holomorfa. La demostración de este teorema no es de mucha importancia en esta tesis; sin embargo, usaremos el resultado. Nótese la diferencia fundamental con el caso real, donde una función parcialmente diferenciable ni siquiera necesita ser continua, como el conocido ejemplo muestra*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} \tag{1.5}$$

1.3. La Fórmula Integral de Cauchy

Probablemente la más famosa fórmula en el análisis complejo de una variable es la fórmula integral de Cauchy, desde que implica teoremas fundamentales en la teoría unidimensional. La fórmula integral de Cauchy permite una generalización a la dimensión n en el sentido de las integrales lineales múltiples. Para $a \in \mathbb{C}^n$ y $r \in \mathbb{R}^n_+$, definimos el politoro

$$T^n_r(a) := \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w_j - a_j| = r_j, 1 \leq j \leq n\}.$$

$T_r^n(a)$ es una copia de n círculos en el plano complejo y está contenido en el polidisco acotado $P_r^n(a)$. Sea

$$f : T_r^n(a) \to \mathbb{C}$$

continua y definimos $h : P_r^n(a) \to \mathbb{C}$ por la integral lineal iterada

$$\begin{aligned} h(z) &:= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T_r^n(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^1}\, dw \\ &:= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|w_n-a_n|=r_n} \cdots \int\limits_{|w_1-a_1|=r_1} \frac{f(w)dw_1 \dots dw_n}{(w_n-z_n)\dots(w_1-z_1)}, \end{aligned}$$

donde las notación $\int_{|w_j-a_j|=r_j}$ representa la integral de línea sobre el círculo alrededor de a_j de radio r_j. Recordemos que la integral es independiente de una parametrización particular, por ello usaremos esta notación simbólica.

Lema 1.5 *La función h es parcialmente holomorfa en $P_r^n(a)$.*

Demostración:

Sea $b \in P_r^n(a)$. Escogemos un $\delta > 0$, tal que $|z_j - a_j| < r_j$ para todo z que satisface $|z_j - b_j| < \delta$, $j = 1, \dots, n$. Entonces la función

$$\widehat{h_j} : B_\delta^1(b_j) \to \mathbb{C}, z_j \mapsto h(b_1, \dots, b_{j-1}, z_j, b_{j+1}, \dots, b_n)$$

es continua. Escogemos un triángulo cerrado $\Delta \subset B_\delta^1(b_j)$. Los teoremas de Fubini-Tonelli y Goursat ceden que

$$\int\limits_{\delta\Delta} \widehat{h_j}(z_j) dz_j = 0.$$

Por teorema de Morera $\widehat{h_j}$ es holomorfa. □

Aplicando el teorema de Hartogs, h es holomorfa.

Notación 1.3 *Si $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Llamamos a β un* multiíndice. *Definimos*

$$\begin{aligned} |\beta| &:= \beta_1 + \cdots + \beta_n, \\ \beta + 1 &:= (\beta_1 + 1, \dots, \beta_n + 1), \\ \beta! &:= \beta_1! \dots \beta_n!. \end{aligned}$$

Para $z \in \mathbb{C}^n$ y un multiíndice β, escribimos

$$z^\beta := z_1^{\beta_1} \dots z_n^{\beta_n}$$

y definimos los operadores derivados parciales

$$Dz^\beta := \frac{\partial^\beta}{\partial z_1^{\beta_1} \dots \partial z_n^{\beta_n}}.$$

Teorema 1.6 *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, $a \in U$, $r \in \mathbb{R}_+^n$, tal que el policilindro cerrado $\overline{P_r^n(a)}$ está contenido en U. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ parcialmente holomorfo. Entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y todo $z \in P_r^n(a)$:*

1. ***Fórmula Integral de Cauchy, FIC**:*

$$D^\alpha f(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T_r^n(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{\alpha+1}}\, dw$$

2. ***Desigualdad de Cauchy***

$$|D^\alpha f(z)| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} \left\| f \mid_{T_r^n(a)} \right\|_\infty .$$

Demostración:

1. Provemos la fórmula por inducción en n. El caso $n = 1$ es conocido. Escogemos $r' \in \mathbb{R}_+^n$, tal que $r_j < r'_j$ para todo j y tal que $\overline{P_r^n(a)} \subset P_{r'}^n(a) \subset U$. Sea $z = (z_1, ..., z_n) \in P_{r'}^n(a)$. Entonces la función de una variable compleja

$$\zeta \mapsto f(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta)$$

es holomorfa en un disco abierto definido por $|\zeta - a_n| < r'_n$. La versión unidimensional de FIC es

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w_n - a_n|} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, w_n)}{w_n - z_n} dw_n.$$

Para w_n fijo, la función

$$(z_1, \dots, z_{n-1}) \mapsto f(z_1, \dots, z_{n-1}, w_n)$$

es parcialmente holomorfa en el polidisco definido por $|z_j| < r'_j, j = 1, ..., n-1$. El resto de la prueba sigue ahora por la hipótesis inductiva y diferenciación bajo la integral.

2. El cálculo estimado para las integrales lineales sobre círculos, como en una dimensión.

□

Observación 1.8 *Sea $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}^n$ el politoro unitario y $\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$, entonces se verifica*

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\zeta^\mu}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta = \delta_{\nu\mu}$$

donde, $\delta_{\nu\mu}$ es la delta Kronecker.

1.4. El Espacio Topológico $\mathcal{O}(U)$

Analizamos la convergencia en el espacio $\mathcal{O}(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$ conjunto abierto, de funciones holomorfas. Para ello introducimos la topología compacta-abierta en $\mathcal{O}(U)$, que convierte a $\mathcal{O}(U)$ en un espacio de Fréchet. Los resultados principales de esta sección son: El Teorema de convergencia de Weierstrass y el teorema de Montel.

1.4.1. Espacios localmente convexos

Recogemos algunos hechos básicos sobre espacios localmente convexos, es decir, espacios vectoriales topológicos cuyas topologías están definidas por una familia de seminormas.

Definición 1.9 *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una seminorma en V es una aplicación $p : V \to [0, +\infty[$ que verifica:*

1. *La aplicación p es positivamente homogéneo, es decir, $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $x \in V$.*

2. *La aplicación p es subaditiva, es decir, $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ para todo $x, y \in V$.*

Observación 1.9 *En un espacio vectorial, toda norma es una seminorma.*

Ejemplo:

Sea $\mathcal{R}[a,b]$ el espacio de funciones Riemann- integrables en el intervalo $[a,b]$, y sea

$$p : \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f|(t)|dt.$$

Entonces, p es una seminorma que no es norma. Por ejemplo, tomemos la función

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 1 & , t = a \\ 0 & , t \neq a \end{cases}.$$

Las seminormas en espacios vectoriales pueden ser usados para construir topologías en estos espacios. A diferencia de las topologías definidas por normas, las topologías definidas por seminormas no necesitan ser Hausdorff.

Lema 1.6 *Sea I un conjunto fijo, V un espacio vectorial (real o complejo) y $(p_i)_{i\in I}$ una familia de seminormas en V. Para un subconjunto finito $F \subset I$ y $\varepsilon > 0$ ponemos*

$$U_{F;\varepsilon} := \bigcap_{i\in F} \{x \in V \mid p_i(x) < \varepsilon\}$$

y definimos

$$\mathfrak{U} := \{U_{f;\varepsilon} \mid \varepsilon > 0, F \subset I, \#F < \infty\}.$$

Entonces el conjunto

$$\mathcal{T} := \{O \subset V \mid \textit{para todo } x \in O \textit{ hay un } U \in \mathfrak{U}, \textit{ tal que } x + O \subset U\}$$

define una topología en V.

Observación 1.10 *Un espacio vectorial, cuya topología es inducida por una familia de seminormas como la descrita anteriormente, se denomina espacio localmente convexo. La topología $\mathcal{T}$ convierte a V en un espacio vectorial topológico, es decir, la adición vectorial y la multiplicación con un escalar son aplicaciones continuas con respecto a esta topología. Los espacios localmente convexos son estudiados a fondo en el análisis funcional.*

Demostración:

Trivialmente, $\mathcal{T}$ contiene a V y el conjunto vacío. Sea J un conjunto de índices y $(O_j)_{j\in J}$ una familia arbitraria en $\mathcal{T}$. Ponemos

$$O := \bigcup_{j\in J} O_j$$

y sea $x \in O$. Entonces $x \in O_j$ para algún j. Desde que $O_j \in \mathcal{T}$, existe un $U \in \mathfrak{U}$ con

$$x + U \subset O_j \subset O,$$

por lo tanto, $O \in \mathcal{T}$. Ahora, sea $O_1, ..., O_n$ conjuntos abiertos, es decir, son elementos de $\mathcal{T}$. Pongamos

$$O := \bigcap_{j=1}^{n} O_j$$

y sea $x \in O$. Desde que todo O_j es abierto, existen conjuntos $U_j \in \mathfrak{U}$, tal que

$$x + U_j \in O_j.$$

Para todo U_j es de la forma

$$U_j = U_{F_j;\varepsilon_j}$$

con F_j un subconjunto finito de I y $\varepsilon_j > 0$. Ponemos

$$\varepsilon := \min_{j=1}^{n} \varepsilon_j,\ F := \bigcup_{j=1}^{n} F_j.$$

Entonces $\varepsilon > 0$ y F es también un subconjunto finito de I. Además

$$U_{F;\varepsilon} \subset O,$$

por tanto,

$$x + U_{F;\varepsilon} \subset \bigcap_{j=1}^{n} (x + U_j) \subset O.$$

□

Proposición 1.7 *Sea V un espacio de Hausdorff localmente convexo cuya topología es $\mathcal{T}$ es inducida por una familia contable de seminormas $(p_i)_i \in \mathbb{N}$. Entonces la definición*

$$d(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \text{ para todo } x, y \in V$$

es una métrica en V y que la topología inducida $\mathcal{T}_d$ por esta métrica coincide con $\mathcal{T}$.

Observación 1.11 *Los espacios vectoriales topológicos cuyas topologías pueden ser inducidas por una métrica se denominan metrizables. Si la topología puede ser inducida por una norma, son llamados normables. Observe que la métrica de la proposición 1.7 no es inducida por una norma, desde que*

$$d(0,x) \leq 2$$

para todo $x \in V$. Si d fuera inducida por una norma $\|.\|$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $x \in V$,

$$d(0,\lambda x) = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

Si $x \neq 0$podemos escoger un λ con $|\lambda| > \dfrac{2}{\|x\|}$.

En la definición abstracta en los espacios generales localmente convexos, los conjuntos $U_{F;\varepsilon}$ desempeñan el papel de ε-bolas abiertas $B_\varepsilon^n(0)$ en $\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{R}^n$, es decir, forman una base de vecindades abiertas de cero. Esta analogía se refleja en la definición de convergencia.

Definición 1.10 *Sea $(V,(p_i)_{i\in I})$ un espacio localmente convexo, $\mathcal{T}$ la topología inducida por la familia de seminormas $(p_i)_{i\in I}$ y $\mathfrak{U}$ la base de vecindades abiertas de cero definido por el lema 1.6.*

1. *Una sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en V converge en el límite $x \in V$ si para todo $U \in \mathfrak{U}$ existe un $N = N_U \in \mathbb{N}$, tal que $x - x_j \in U$ para todo $j \geq N$.*

2. *Las succeciones $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es llamado sucesión de Cauchy si para todo $U \in \mathfrak{U}$ existe un $N = N_U \in \mathbb{N}$, tal que $x_k - x_l \in U$ para todo $k, l \geq N$.*

3. *El espacio V es llamado secuencialmente completa con respecto a la topología $\mathcal{T}$ si toda sucesión de Cauchy converge en V.*

Observación 1.12 *En análisis funcional, la noción general de completitud se define mediante las llamadas redes de Cauchy, que son una generalización de las secuencias de Cauchy, y puede revisarse en la bibliografía [8]. Para nuestro propósito es suficiente la noción de completitud secuencial.*

Lema 1.7 *La sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in V$ si y solo si*

$$\lim_{j\to\infty} p_i(x_j - x) = 0, \forall j \in I.$$

Demostración:

La sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in V$ si y solo si para todo $U \in \mathfrak{U}$, existe un $N_U \in \mathbb{N}$, tal que

$$x - x_j \in U$$

para todo $j \geq N_U$. Por la definición de $\mathfrak{U}$ es equivalente a la condición que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $i \in I$, existe un $N_i \in \mathbb{N}$, tal que

$$p_i(x - x_j) < \varepsilon$$

para todo $j \geq N_i$. □

Proposición 1.8 *Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y $K \subset D$ un subconjunto compacto. Definimos $p_K : \mathcal{C}(D) \to \mathbb{R}$ por*

$$p_K(f) := \|f|_K\|_\infty,$$

entonces

1. *p_K define una seminorma en $\mathcal{C}(D)$.*
2. *Si K tiene puntos interiores, entonces p_K define una norma en el subespacio $\mathcal{O}(D)$ de funciones holomorfas.*

1.4.2. La Topología compacta-abierta en $\mathcal{C}(U, E)$

Los conocimientos adquiridos sobre espacios localmente convexos y el concepto de convergencia en estos espacios serán aplicados al espacio $\mathcal{C}(U, E)$ de aplicaciones

continuas, donde $U \subset \mathbb{C}^n$ es un conjunto abierto y $(E, \|.\|_E)$ es un espacio de Banach. La razón de considerar aquí los mapas valorados en el espacio de Banach es principalmente que los resultados se aplican a los mapas valorados escalarmente y a los valorados vectorialmente al mismo tiempo. Es bien sabido que para un conjunto compacto K el espacio $\mathcal{C}(K, E)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|f\|_{E,\infty} := \sup_{x \in K} \|f(x)\|_E.$$

Esto puede generalizarse a funciones continuas definidas en conjuntos abiertos eligiendo un agotamiento compacto de U.

Lema 1.8 *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto. Para todo $j \in \mathbb{N}_+$ definimos*

$$K_j := \left\{ z \in U \mid \|z\|_\infty \leq j, \operatorname{dist}_{\|.\|_\infty}(z, \mathbb{C}^n \backslash U) \geq \frac{1}{j} \right\}. \tag{1.6}$$

Entonces:

1. *Todo K_j es un conjunto compacto.*
2. *Para todo $j \geq 1$ se tiene $K_j \subset K_{j+1}^\circ$.*
3. *$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.*
4. *Si K es un subconjunto compacto de U, entonces existe un $j_K \in \mathbb{N}_+$, tal que $K \subset K_{j_K}$.*

Demostración:

1. Para todo K_j es la intersección de dos conjuntos cerrados y está contenido en la bola de radios j. Por el teorema de Heine-Borel, K_j es compacta.
2. El conjunto

$$\left\{ z \in U \mid \|z\|_2 < j + 1, \operatorname{dist}_{\|.\|_2}(z, \mathbb{C}^n \backslash U) \geq \frac{1}{j+1} \right\}$$

es abierto, contiene K_j y es contenido en K_{j+1}, por ende $K_j \subset K_{j+1}^\circ$

3. Si $U = \emptyset$ no hay nada que probar. Sea $U \neq \emptyset$. Desde que U es un conjunto abierto, para todo $z \in U$ tiene una distancia positiva al complemento de U, es decir, existe un $j_1 \in \mathbb{N}_+$, tal que

$$\operatorname{dist}_{\|.\|_\infty}(z, \mathbb{C}^n \backslash U) \geq \frac{1}{j_1}.$$

También, existe un $j_2 \in \mathbb{N}_+$, tal que

$$\|z\|_\infty \leq j_2.$$

Entonces $z \in K_{j_3}$, donde $j_3 := \max\{j_1, j_2\}$. Desde que todo K_j es un subconjunto de U, la demostración termina.

4. Si K es un subconjunto compacto de U, los conjuntos $\left\{K_j^\circ \mid j \in \mathbb{N}_+\right\}$ forman una cobertura abierta de K. La compacidad de K implica la existencia de algún $j_K \in \mathbb{N}_+$, tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{j_K} K_j,$$

pero desde que $K_j \subset K_{j+1}$, para todo j, esto implica $K \subset K_{j_K}$

□

Observación 1.13 *Una sucesión de conjuntos compactos que tienen las propiedades 2 y 3 del lema 1.8 es llamado agotamiento compacto. Un espacio de Hausdorff localmente compacto X que tiene un agotamiento compacto se llama numerable en el infinito. Así, en el lenguaje de la topología general, el lema 1.8 afirma que todo conjunto abierto en $\mathbb{C}^n$ es numerable en el infinito.*

Usando el agotamiento compacto del lema 1.8 definimos una topología $\mathcal{T}_{CO}$ en el espacio $\mathcal{C}(U, E)$ por la familia $(\mathrm{p}_{K_j})_{j \in \mathbb{N}_+}$ de seminormas

$$\mathrm{p}_{K_j} : \mathcal{C}(U, E) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \sup_{x \in K_j} \|f(x)\|_E$$

Véase la proposición 1.8. Observemos que esto convierte a $\mathcal{C}(U, E)$ en un espacio métrico como se demostró en la proposición 1.7.

Definición 1.11 *La topología $\mathcal{T}_{CO}$ en $\mathcal{C}(U,E)$ es llamado topología compacto-abierto o la topología de convergencia compacta.*

El nombre de topología de convergencia compacta procede del siguiente resultado.

Proposición 1.9 *Una sucesión $(f_i)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(U,E)$ converge con respecto a la topología $\mathcal{T}_{CO}$ si y solo si $(f_i)_{j\in\mathbb{N}}$ converge compactamente en U.*

Demostración:

Sea $K \subset U$ compacto. Por el lema 1.8, existe un índice j_K tal que $K \subset K_{j_K}$. Si $f_j \to f$ con respecto a $\mathcal{T}_{CO}$, entonces

$$\sup_{x\in K} \|f_j(x) - f(x)\|_E = p_K(f_i - f) \leq p_{K_{j_K}}(f_i - f) \to 0,$$

por lo tanto la sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente en K. Por el contrario, si

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in K} \|f_j(x) - f(x)\|_E = 0$$

para todo conjunto compacto $K \subset U$, entonces esto se cumple en particular para el agotamineto compacto (1.6). El lema 1.7 implica que $f_i \to f$ con respecto a $\mathcal{T}_{CO}$. □

Puede demostrarse que la topología $\mathcal{T}_{CO}$ no depende de la elección especial del agotamiento compacto, es decir, si $\left(K'_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ es cualquier agotamiento compacto de U, entonces la topología inducida por la seminorma $p_{K'_j}$ coincide con $\mathcal{T}_{CO}$ definido anteriormente. Saltamos la prueba de esto, porque no necesitamos el resultado en lo que sigue, y se puede ver en [3] para los detalles.

Proposición 1.10 *$(\mathcal{C}(U,E), \mathcal{T}_{CO})$ es completo.*

Demostración:

Sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(U,E)$ y $K \subset U$ un conjunto compacto. Entonces $(f_j|_K)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la norma $\|.\|_{E,\infty}$. Desde que $(\mathcal{C}(K,E), \|.\|_{E,\infty})$ es un espacio de Banach, existe un $f^K \in \mathcal{C}(K,E)$, que es el límite uniforme de $(f_j|_K)_{j\in\mathbb{N}}$. Sea $z \in U$ un punto arbitrario. Existe una vecindad

abierta U_z de z, tal que la clausura $\overline{U_z}$ es compacto y está contenido en U. Con el argumento anterior, tenemos $\lim_{j\to\infty} f_j|_{\overline{U_z}} = f^{\overline{U_z}}$. Cuando definimos

$$f : U \to \mathbb{C}, z \mapsto \lim_{j\to\infty} f_j(z)$$

encontramos que $f_j|_{\overline{U_Z}}$ converge uniformemente hacia $f_j|_{\overline{U_z}} = f^{\overline{U_z}} \in \mathcal{C}(\overline{U_z})$, por lo tanto, f es continua en z. Desde que $z \in U$, concluímos que $f \in \mathcal{C}(U, E)$. □

Observación 1.14 *Observando la demostración anterior encontramos que la única característica que necesitábamos del conjunto abierto U era el hecho de que cada punto $z \in U$ tiene una vecindad compacta contenida en U. Por lo tanto, la proposición 1.10 es válida para el espacio $\mathcal{C}(X, E)$ de las aplicaciones continuas en todos los espacios de Hausdorffs localmente compactos de X. Un espacio vectorial topológico metrizable completo se denomina espacio de Fréchet. Por tanto, $\mathcal{C}(X, E)$ es un espacio de Fréchet. Más precisamente, desde que la multiplicación en $\mathcal{C}(X, E)$ es continua, es un álgebra de Fréchet.*

El espacio $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ de aplicaciones holomorfas hereda la topología de convergencia compacta de $\mathcal{C}(U, \mathbb{C}^m)$.

Teorema 1.7 (Weierstrass) *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto. Entonces $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(U, \mathbb{C}^m)$ con respecto a la topología de convergencia compacta. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ el operador lineal*

$$D^\alpha : \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m) \to \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m), f \mapsto D^\alpha f$$

es continua. En caso $m > 1$, es decir, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el operador D^α debe aplicarse a cada componente.

Demostración:

Dado que la afirmación se cumple si y solo si se cumple en cada componente por separado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m = 1$. Desde que $\mathcal{C}(U)$ es metrizable basta con demostrar que para cada sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^n} \subset \mathcal{O}(U)$ converge compactamente a un $f \in \mathcal{C}(U)$, tenemos $f \in \mathcal{O}(U)$ y la sucesión $(D^\alpha f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge compactamente hacia $D^\alpha f$. Como en una variable, la principal herramienta utilizada aquí es la fórmula integral de Cauchy. Si $a \in U$ existe en un polidisco $P_r^n(a)$, que es relativamente compacto en U. La sucesión $\left(f_j|_{\overline{P_r^n(a)}}\right)_{j\in\mathbb{N}^n}$ converge uniformemente

hacia $f|_{\overline{P_r^n(a)}}$. Sea $T_r^n(a)$ el politoro contenido en la frontera de $P_r^n(a)$. Para todo $w \in T_r^n(a)$ y todo $z \in P_r^n(a)$,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{f_j(w)}{(w-z)^1} = \frac{f(w)}{(w-z)^1}$$

uniformemente en w. La fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{j\to\infty} f_j(z) \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T_a^n(r)} \frac{f_j(w)}{(w-z)^1} dw \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T_a^n(r)} \frac{f(w)}{(w-z)^1} dw \end{aligned}$$

y el lema 1.5 dice que f es holomorfa. Además, por el FIC tenemos

$$D^\alpha f(z) = \alpha! \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T_a^n(r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{\alpha+1}} dw$$

Sea $K \subset U$ compacto. Existe un conjunto compacto $K' \subset U$ y un poliradio $r' \in \mathbb{R}_+^n$ tal que para todo $a \in K$ el polidisco $P_{r'}^n(a)$ es realtivamente compacto en K'. Por la desigualdad de Cauchy,

$$\begin{aligned} \left|\frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} - \frac{D^\alpha f_j(a)}{\alpha!}\right| &\leq \frac{1}{(r')^\alpha} \sup_{T_{r'}^n(a)} |f - f_j| \\ &\leq \frac{1}{(r')^\alpha} \sup_{K'} |f - f_j|. \end{aligned}$$

Desde que f_j converge compactamente hacia f y $a \in K$ es arbitrario, encontramos que $D^\alpha f_j$ converge hacia $D^\alpha f$ compactamente en U, por lo tanto, D^α es continua. □

1.4.3. Los Teoremas de Arzelà-Ascoli y Montel

Consideramos la cuestión de la compacidad de los espacios $\mathcal{C}(U, E)$ y $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ que conduce a la versión multivariable del teorema de Montel. Recoredemos que en una variable, la teoría del teorema de Montel es una herramienta importante en la prueba

del teorema de aplicación de Riemann. La demostración del Teorema de Montel usa el teorema de Arzelà-Ascoli, que incluimos en su forma más general, y que también tiene aplicaciones fuera del análisis complejo.

Definición 1.12 *Sea (X, d_X) un espacio métrico, $(E, \|.\|_E)$ un espacio de Banach (real o complejo), $U \subset X$ un subconjunto abierto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones $f : U \to E$.*

1. La familia $\mathcal{F}$ es llamado *acotado* si para todo subconjunto compacto $K \subset U$ existe una constante $0 \leq M_K < \infty$ tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{x \in K} \|f(x)\|_E \leq M_K.$$

2. La familia $\mathcal{F}$ es llamado *localmente acotado* si para todo $a \in U$ existe una vecindad abierta $V = V(a)$ tal que

$$\mathcal{F}|_V := \{f|_A \mid f \in \mathcal{F}\}$$

   es acotado.

3. La familia $\mathcal{F}$ es llamado *equicontinua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

   para todo $f \in \mathcal{F}$ y todo $x, y \in U$ satisface $d_X(x, y) < \delta$.

4. La familia $\mathcal{F}$ es llamado *localmente equicontinua* si para todo $a \in U$ hay una vecindad abierta $V = V(a)$ tal que $\mathcal{F}|_V$ es equicontinua.

Trivialmente, si $\mathcal{F}$ es equicontinua, entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, E)$. La siguiente proposición muestra que para familias de funciones holomorfas la condición más débil de acotación local ya implica equicontinuidad. Esto será usado en la demostración del Teorema de Montel.

Proposición 1.11 *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ una familia localmente acotado. Entonces $\mathcal{F}$ es localmente equicontinua en U.*

Demostración:

Desde que todas las normas en $\mathbb{C}^m$ son equivalentes, es suficiente considerar la norma del máximo $\|.\|_\infty$ en $\mathbb{C}^m$, $a \in U$, $r > 0, M > 0$ tal que

$$\overline{P_r(a)} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - a\|_\infty \leq r\} \subset U$$

y

$$\left\| f|_{\overline{P_r(a)}} \right\|_\infty \leq M$$

para todo $f \in \mathcal{F}$. Esto es posible, puesto que U es abierto $\overline{P_r(a)}$ es compacto y $\mathcal{F}$ es localmente acotado. Definimos

$$K := \overline{P_{\frac{r}{2}}(a)}$$

y sea $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{F}$ y $x, y \in K$ arbitrarios. Aplicando el teorema del valor medio en $\mathbb{R}^{2n}$ para f, da

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty \sup_{z \in K} \|Df(z)\|,$$

donde

$$\sup_{z \in K} \|Df(z)\| = \sup_{z \in K} \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Df(z)x\|_\infty.$$

Asumimos, sin pérdida de generalidad, que

$$Df(z)x = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m(z)}{\partial z_k} x_k \right)$$

alcanza su máximo valor absoluto sobre K y la esfera $\|x\|_\infty = 1$ en la primera componente, es decir,

$$\begin{aligned} \sup_{z \in K} \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Df(z)x\|_\infty &= \sup_{z \in K} \sup_{\|x\|_\infty = 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_k} x_k \right| \\ &\leq \sup_{z \in K} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_k} \right| \\ &\leq n \max_{k=1}^{n} \sup_{z \in K} \left| \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_k} \right|. \end{aligned}$$

Para todo $z \in K = \overline{P_{\frac{r}{2}}(a)}$ y $\zeta \in T_r^n(a)$ tenemos para todo k,

$$|\zeta_k - z_k| \geq \frac{r}{2}$$

Esto, junto con la fórmula integral de Cauchy, implica

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f_1(z)}{\partial z_k}\right| &= \left|\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T_r^n(a)} \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta_k - z_k)^2} d\zeta\right| \\ &\leq 4r^{n-2} \sup_{\zeta \in T_r^n(a)} |f_1(\zeta)| \leq 4r^{n-2}M.\end{aligned}$$

Escogiendo

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4r^{n-2}M}$$

da para todo $x, y \in K$ con $\|x - y\|_\infty < \delta$ tenemos

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon,$$

por tanto, $\mathcal{F}$ es localmente equicontinua. □

Lema 1.9 *Sea X un espacio métrico conexo y localmente compacto y $K \subsetneq X$ un subconjunto propio compacto. Entonces existe un conjunto compacto $K \subset H^\circ$ y* $\operatorname{dist}(K, \partial H) > 0$.

Demostración:

X es localmente compacto. Por lo tanto, para todo $x \in K$ tiene una vecindad $U = U(x) \subset\subset X$. El conjunto

$$\mathcal{U} := \{U(x) \mid x \in K\}$$

entonces forma un cubrimiento abierto de K conteniendo a un subcubrimiento finito

$$U_1(x_1), \ldots, U_l(x_l).$$

Desde que X es conexo, no contiene subconjuntos propios que sean a la vez abiertos y cerrados. Esto implica que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{l} U_j(x_j) \subsetneq \bigcup_{j=1}^{l} \overline{U_j(x_j)} =: H.$$

Por construcción H es compacto y contiene a K en su interior. Desde que la frontera ∂H es cerrada, tenemos

$$K \cap \partial H = \emptyset,$$

así,

$$\text{dist}(K, \partial H) > 0.$$

□

Lema 1.10 *Sea X un espacio métrico conexo y localmente compacto, $K \subsetneq X$ un subconjunto compacto, $A \subset K$ un subconjunto denso, E un espacio de Banach, $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K, E)$ una familia equicontinua de aplicaciones continua y $(f_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{F}$ una sucesión puntualmente convergente en A. Entonces $(f_j)_{j\geq 1}$ converge uniformemente en K.*

Demostración:

Solo tenemos que demostrar que $(f_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy uniforme en K. La convergencia se deduce de la completitud de E. Sea $\varepsilon > 0$. Del lema 1.9 sabemos que hay un conjunto compacto H conteniendo a K en su interior tal que K tiene una distancia positiva a la frontera de H. La equicontinuidad de $\mathcal{F}$ en K implica que podemos encontrar un $\delta = \delta_\varepsilon$ tal que

$$0 < \delta \leq \frac{1}{2}\text{dist}(K, \partial H)$$

y

$$\|f_j(x) - f_j(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $x, y \in K$ satisface $d(x, y) \leq \delta$ y para todo $j \geq 0$. Las δ-bolas abiertas

$$\{B_\delta(x) \mid x \in K\}$$

forma un cubrimiento abierto de K y puesto que $\delta \leq \frac{1}{2}\text{dist}(K.\partial H)$, tenemos

$$K \subset \bigcup_{x\in K} B_\delta(x) \subset \bigcup_{x\in K} \overline{B_\delta(x)} \subset H.$$

Este cubrimiento abierto contiene subcubrimientos finitos y porque A es denso en K, podemos elegir un número finito de puntos

$$x_1, \ldots, x_p \in A$$

tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \underbrace{\overline{B_\delta(x_j)}}_{=:K_j}.$$

$(f_j)_{j\geq 0}$ is una sucesión de Cauchy puntualmente convergente en A, por lo que existe $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k(x_j) - f_l(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $k, l \geq N$ y todo $j = 1, \ldots, p$. Si $x \in K$ existe un índice $q \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $x \in K_q$, que implica $d(x, x_q) \leq \delta$. Ahora, podemos concluir que para todo $k, l \geq N$ y todo $x \in K$,

$$\begin{aligned} \|f_k(x) - f_l(x)\| &\leq \|f_k(x) - f_k(x_q)\| + \|f_k(x_q) - f_l(x_q)\| + \|f_l(x_q) - f_l(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.8 (Arzelà-Ascoli) *Sea X un espacio métrico convexo localmente compacto, $K \subset X$ un subconjunto compacto que contiene un subconjunto denso numerable $A \subset K$, E un espacio dimensional finito de Banach sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K, E)$ una familia de funciones equicontinuas y $(f_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{F}$ una sucesión acotada, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\sup_{j\geq 1} \sup_{x\in K} \|f_j(x)\| \leq C.$$

Entonces $(f_j)_{j\geq 0}$ contiene una subsucesión uniformemente convergente en K.

Demostración:

Desde que A es numerable, escribiremos $A = \{x_1, x_2, ...\}$. Puesto que

$$\sup_{j\geq 1} \sup_{l\geq 1} \|f_j(x_l)\| \leq C$$

la sucesión $(f_j(x_1))_{j\geq 1}$ es acotado en E. Como E es de dimensión finita, por el teorema de Bolzano-Weierstrass es válido en E. Por ende, hay una subsucesión convergente $(f_{p_k}(x_1))_{k\geq 1}$ de $(f_j(x_1))_{j\geq 1}$. A causa de

$$\left\| \sup_{k\geq 1} f_{p_k}(x_2) \right\| \leq C,$$

por el mismo argumento, obtenemos una subsucesión convergente

$$(f_{q_k}(x_2))_{k\geq 1}$$

de $(f_j(x_1))_{j\geq 1}$, donde $(q_k)_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $(p_k)_{k\geq 1}$. Una iteración de este proceso produce una serie de subsucesiones de $(f_j(x_1))_{j\geq 1}$,

$$\begin{array}{cccc} f_{p_1} & f_{p_2} & f_{p_3}\cdots & \text{converge en } x_1 \\ f_{q_1} & f_{q_2} & f_{q_3}\cdots & \text{converge en } x_1, x_2 \\ f_{r_1} & f_{r_2} & f_{r_3}\cdots & \text{converge en } x_1, x_2, x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ddots & \end{array}$$

Aquí, la sucesión in la k-ésima fila forma una subsucesión de la sucesión en la $(k-1)$-ésima fila. Por tanto, la sucesión diagonal $f_{p_1}, f_{q_2}, f_{r_3}, ...$ converge puntualmenteen todo A. El lema 1.10, sin embargo, afirma que la convergencia es uniforme en K. □

Corolario 1.2 *Si $U \subset X$ es abierto y $(f_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión localmente acotada y localmente equicontinua, entonces $(f_j)_{j\geq 1}$ contiene una subsucesión localmente que converge uniformemente localmente en U.*

Demostración:

Desde que X es localmente compacto, para todo $a \in U$ posee una vecindad relativamente compacta $V \subset\subset U$. Aplicamos el teorema de Arzelà-Ascoli en el conjunto compacto $\overline{V}$. □

Observación 1.15 *En el caso $X = \mathbb{C}^n$, una elección adecuada para el conjunto A es el conjunto de puntos de K con coordenadas racionales, es decir,*

$$A = K \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$$

Ahora estamos listos para considerar conjuntos compactos en el espacio $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ de aplicaciones holomorfas. Recordemos que en un espacio métrico, las nociones de compacidad y compacidad sucesiva coinciden. En el espacio $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$, provista de la topología de convergencia compacta, una sucesión (f_j) converge si y solo si esta converge uniformemente en todo subconjunto compacto K de D. La siguiente proposición afirma que $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Proposición 1.12 *Toda sucesión localmente acotada $(f_j) \subset \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ contiene una subsucesión convergente.*

Demostración:

De la proposición 1.11, sabemos que toda sucesión localmente acotada en $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ es localmente equicontinua, por lo tanto, contiene una subsucesión que converge localmente de manera uniforme en D por el corolario 1.2. □

Teorema 1.9 (Montel) *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ una familia de aplicaciones holomorfas. Entonces, son equivalentes:*

1. *La familia $\mathcal{F}$ es localmente acotada.*
2. *La familia $\mathcal{F}$ es relativamente compacta en $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$.*

Demostración:

1. $\Rightarrow$ 2. Sea $(f_j) \subset \overline{\mathcal{F}}$ una sucesión. Entonces (f_j) es localmente acotada y de la proposición 1.12 sabemos que (f_j) contiene una subsucesión convergente. Así, $\overline{\mathcal{F}}$ es secuencialmente compacto, por tanto, compacto.
2. $\Rightarrow$ 1. Sea $K \subset U$ un conjunto compacto. La función

$$\varphi : \overline{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_+, f \mapsto \|f|_K\|_\infty$$

es continua y desde que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto, $\varphi(\mathcal{F})$ es acotada. Por lo tanto,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f|_K\|_\infty < \infty.$$

□

Corolario 1.3 *Un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ es compacto si y solo si $\mathcal{F}$ es cerrado y acotado.*

Demostración:

Si $\mathcal{F}$ es compacto, $\mathcal{F}$ es cerrado y acotado. Esto es válido en todos los espacios métricos. Si $\mathcal{F}$ es cerrado y acotado, el teorema de Montel, afirma que $\mathcal{F}$ es compacto. □

Observación 1.16 *Los espacios localmente convexos en los que los conjuntos compactos son exactamente los que están cerrados y acotados se denominan espacios de Montel. Nótese la analogía con la caracterización de los conjuntos compactos en doble $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ dada por el Teorema de Heine-Borel.*

Ejemplo:

El teorema de Montel no es válido para las funciones analíticas reales. Por ejemplo, la familia $\mathcal{F}$ formada por las funciones

$$f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(jx)$$

es acotado en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, pero es relativamente compacto. Esto puedo ser visto como sigue. Desde que

$$\|f_j\|_\infty \leq 1, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

la familia $\mathcal{F}$ es acotado. Si $\overline{\mathcal{F}}$ fuera compacto, toda sucesión en $\overline{\mathcal{F}}$ contendría una subsucesión convergente. Sin embargo, en el conjunto compacto $K := \{\pi\}$, tenemos

$$\cos(k\pi) - \cos(l\pi) = \begin{cases} -2 & \text{, si } k \equiv 1 \text{ mód } 2, l \equiv 0 \text{ mód } 2 \\ 0 & \text{, si } k \equiv 0 \text{ mód } 2, l \equiv 0 \text{ mód } 2 \\ 2 & \text{, si } k \equiv 0 \text{ mód } 2, l \equiv 1 \text{ mód } 2 \end{cases},$$

así, $(f_j|_K)_{j\in\mathbb{N}}$ no contiene una subsucesión de Cauchy.

Definición 1.13 *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Un subconjunto $A \subset D$ es llamado conjunto de unicidad si para todo $f \in \mathcal{O}(D)$, la condición $f|_A = 0$ implica que $f = 0$.*

Ejemplo:

Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, entonces todo subconjunto abierto $A \subset D$ es un conjunto de unicidad por el teorema de la identidad. También, todo subconjunto denso de D es un conjunto de unicidad, porque $\mathcal{O}(D) \subset \mathcal{C}(D)$.

1.5. Series de Potencia y Series de Taylor

En una dimensión se utiliza la fórmula integral de Cauchy para demostrar que toda función holomorfa puede expandirse en su serie de Taylor en cualquier lugar en que esté definida. Lo mismo ocurre en varias variables y la demostración también es análoga. Antes de llegar a esto introduciremos series de potencias generales de n variables complejas. Desde que $\mathbb{N}^n$ no lleva un orden natural, empezamos recordando algunos hechos bien conocidos sobre sumabilidad en espacios de Banach.

1.5.1. Familias sumables en espacios de Banach

Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach e I un conjunto numerable.

Definición 1.14 *Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia numerable en E. $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ es llamado absolutamente sumable si existe una biyección*

$$\tau : \mathbb{N} \to I,$$

tal que la serie $\sum_{n\geq 0} \|a_{\tau(n)}\|$ converge.

Lema 1.11 *Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ absolutamente sumable en el espacio de Banach E. Entonces, se cumple lo siguiente:*

1. *$\sum_{n\geq 0} a_{\varphi(n)}$ converge para toda biyección $\varphi : \mathbb{N} \to I$ en el mismo límite.*
2. *Si $I = \mathbb{N}^n$, el límite puede calcularse a partir de la expresión homogénea*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \right).$$

Demostración:
Véase [1]. □

Observación 1.17 *Del lema anterior, la expresión*

$$\sum_{\alpha\in I} a_\alpha := \sum_{n\geq 0} a_\tau(n)$$

está bien definido. Decimos que $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ converge absolutamente.

Lema 1.12 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La familia $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ es absolutamente sumable.*
2. *Las series $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ converge absolutamente.*
3. *Existe una constante $C \geq 0$, tal que $\sum_{\alpha\in F} \|a_\alpha\| < C$ para todo subconjunto finito $F \subset I$.*

Demostración:
Véase en [1]. □

1.5.2. Series de Potencia

Definición 1.15 *Sea $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \subset \mathbb{C}$. La expresión*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha (z-a)^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z_n-a_n)^{\alpha_n}$$

es llamado series de potencias en n-variables complejas $z_1,\ldots,z_n$ centrado en $a \in \mathbb{C}^n$.

Por simplicidad en la notación, consideramos $a = 0$. Tiene sentido preguntarse por el conjunto de puntos de $\mathbb{C}^n$, en los que converge una serie de potencias.

Definición 1.16 *Sea $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha$ una serie de potencias. El interior del conjunto de puntos en el que la serie converge es llamado dominio de convergencia de series.*

Ejemplo:
La *serie geométrica*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} z^\alpha$$

converge al policilindro unitario. Esto puede ser visto como sigue. Sea $z \in P_1^n(0)$ y F un subconjunto finito de $\mathbb{N}^n$. Entonces, existe un $q \in [0,1[$, tal que $|z_j| \leq q$ para todo $j = 1,...,n$. Por ende,

$$\sum_{\alpha\in F} |z^\alpha| = \sum_{\alpha\in F} |z_1|^{\alpha_1}\ldots|z_n|^{\alpha_n} \leq \sum_{\alpha\in F} q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} \leq \prod_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{(1-q)^n}.$$

Más aún, por la expansión homogénea se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} z^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=k} z^\alpha\right)\\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} {z_1}^{\alpha_1}\ldots {z_n}^{\alpha_n}\\ &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} {z_1}^{\alpha_n}\right)\cdots\left(\sum_{k_n=0}^{\infty} {z_n}^{\alpha_n}\right) = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-z_j}.\end{aligned}$$

Como en una variable, este ejemplo se puede generalizar, lo que conduce finalmente a la fórmula de expansión de Taylor para funciones holomorfas en n variables.

Lema 1.13 (Abel) *Sea $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\subset\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}^n_+$, tal que la familia $(c_\alpha t^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ es acotado y $r\in\mathbb{R}^n_+$, tal que $r_k<t_k$ para todo $k=1,\ldots,n$. Entonces la serie de potencias*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha$$

converge absolutamente y uniformemente en el policilindro cerrado $\overline{P^n_r(0)}$.

Demostración:

Definimos $s:=\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n}|c_\alpha t_1^{\alpha_1}\ldots t_n^{\alpha_n}|$. Desde que $(c_\alpha t^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ es acotado, tenemos $0\le s<\infty$. Definimos

$$q:=\max_{k=1}^{n}\frac{r_k}{t_k}.$$

Para $z\in\overline{P^n_r(0)}$, tenemos

$$|c_\alpha z^\alpha|\le|c_\alpha t^\alpha|\left|\frac{r^\alpha}{t^\alpha}\right|\le sq^{|\alpha|},$$

por lo tanto

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}|c_\alpha z^\alpha|\le\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} sq^{|\alpha|}=\frac{s}{(1-q)^n}<\infty.$$

□

Corolario 1.4 (Series de Taylor) *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto, $a \in U$, $r \in \mathbb{R}^n_+$, tal que $\overline{P^n_r(a)} \subset U$ y $f \in \mathcal{O}(U)$. Entonces se cumplen:*

1. *Las potencia de series*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$$

converge compactamente en $P^n_r(a)$.

2. *La función*

$$j_f : P^n_r(a) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$$

es holomorfa.

3. *Para todo $z \in P^n_r(a)$, se cumple la ecuación*

$$f(z) = j_f(z).$$

Demostración:

1. Sea $K \subset P^n_r(a)$ un subconjunto compacto y $T^n_r(a)$ el politoro compacto. Por la desigualdad de Cauchy

$$\left\| \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} \right\| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} \left\| f|_{T^r_n(a)} \right\|_\infty .$$

Desde que K es compacto, es acotado. Por tanto, para todo $z \in K$, la familia

$$\left(\frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha \right)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$$

es acotado. La proposición sigue ahora del lema de Abel.

2. Se sigue de 1. que

$$j_f(z) = \lim_{k \to \infty} \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$$

compactamente en $P_r(a)$. Por holomorfía de polinomios y el teorema de Weierstrass, implica que j_f es holomorfa en $P^n_r(a)$.

3. Sea $z \in P_r^n(a)$ fijo. Escogemos $\rho \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $\rho_j < r_j, j = 1, ..., n$ y

$$z \in \overline{P_\rho^n(a)} \subset P_r^n(a).$$

Si $w \in T_r^n(a)$, entonces

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^\alpha$$

uniformemente en $w \in T_r^n(a)$. De la fórmula integral de Cauchy, se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int\limits_{T_r^n(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (z-a)^\alpha \int\limits_{T_r^n(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{\alpha+1}} dw \\ &= j_f(z) \end{aligned}$$

□

1.5.3. Dominios de Reinhardt y Expansión de Laurent

En esta sección se estudian las formas de expandir una función holomorfa f en una serie que no sea una serie de potencias. Resulta que la geometría del dominio subyacente sobre el que se define f desempeña un papel crucial. Los resultados de este capítulo conducirán a un fenómeno ajeno a la teoría en una variable, es decir, en más de una variable hay dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ tal que *toda* función $f \in \mathcal{O}(D)$ se extiende holomórficamente a un dominio estrictamente mayor. Empezaremos analizando la geometría del dominio de convergencia de una serie de potencias. Esto nos llevará a la definición de los dominios de Reinhardt.
Para el estudio de los subconjuntos de $\mathbb{C}^n$, a veces es útil una imagen del llamado espacio absoluto. Consideramos la aplicación

$$\tau : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n, (w_1, ..., w_n) \mapsto (|w_1|, ..., |w_n|). \tag{1.7}$$

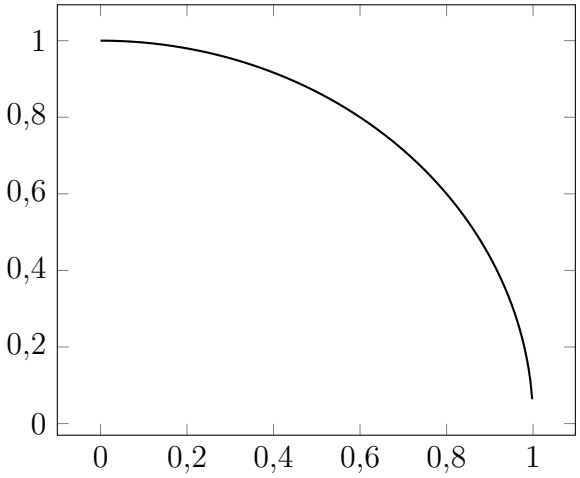
Si $U \subset \mathbb{C}^n$, el conjunto $\tau(U)$ es llamado el *espacio absoluto* de U.

Ejemplo:

Sea B la bola unitaria en $\mathbb{C}^2$ con respecto a la norma euclideana $\|.\|_2$. El espacio absoluto de B es el conjunto

$$\tau(B) = \left\{(|z_1|, |z_2|) \in \mathbb{R}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\right\}$$

que es el dominio plano delimitado por los dos ejes y el cuarto de círculo en el cuadrante positivo en $\mathbb{R}^2$.



Espacio absoluto de $\tau(B)$

Nótese que cada punto del espacio absoluto en esta imagen representa un 2-toro.

Observación 1.18 *Si para la potencia de series $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ converge absolutamente en $z \in \mathbb{C}^n$, entonces por el lema de Abel también por potencia de series*

$$\sum_\alpha c_\alpha (\zeta_1 z_1)^{\alpha_1} \dots (\zeta_n z_n)^{\alpha_n}$$

converge para todo $\zeta_1, ..., \zeta_n \in \mathbb{T}^1$. Sea

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{T}^1 \times \cdots \times \mathbb{T}^1}_{n-veces} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid |\zeta_j| = 1, 1 \leq j \leq n\}$$

el politoro unitario en $\mathbb{C}^n$. $\mathbb{T}^n$ lleva una estructura de grupo abeliano definida por la multiplicación por componentes

$$\zeta \cdot \xi := (\zeta_1 \xi_1, \dots, \zeta_n \xi_n).$$

El elemento neutro es el vector $(1, \dots, 1) \in \mathbb{T}^n$.

Definición 1.17 *Sea G un grupo con elemento neutro e y X un conjunto arbitrario.*

1. *Se dice que G actúa sobre X desde la izquierda si existe una aplicación*

$$\mu : G \times X \to X$$

con las propiedades

$$\mu(e, x) = x, \text{ para todo } x \in X$$

y

$$\mu(ab, x) = \mu(a, \mu(b, x)), \text{ para todo } a, b \in G \text{ y todo } x \in X.$$

Las acciones sobre la derecha se definen de manera obvia.

2. *Sea E un espacio vectorial y $\mathcal{L}(E)$ un espacio vectorial de endomorfismo lineal de E. Un homomorfismo*

$$\mu : G \to \mathcal{L}(E)$$

es llamado representación de G en E.

Ejemplo:
Las representaciones de grupos siempre existen, ya que la aplicación definida por

$$\mu(g) := \mathrm{id}_E, \text{ para todo } g \in G,$$

donde id_E denota la aplicación de identidad de E, es una representación, llamada la *representación trivial*.

Observación 1.19 *Los conceptos de acción de grupo y representación de grupos son equivalentes de la siguiente manera. Si $\mu : G \times E \to E$ determina un grupo acción a la izquierda en un espacio vectorial E, que tiene la propiedad adicional de que μ es lineal en el segundo argumento, podemos definir una representación G en E por*

$$G \to \mathcal{L}(E), g \mapsto \mu_g,$$

donde $\mu_g(x) := \mu(g,x)$ *para todo* $x \in E$. *Viceversa, si* $\widetilde{\mu} : G \to \mathcal{L}(E)$ *es una representación de* G *en* E, *entonces* G *actúa sobre* E *por la izquierda*

$$\mu : G \times E \to E, (g,x) \mapsto \widetilde{\mu}(g)(x).$$

Si $D \subset \mathbb{C}^n$ *es el dominio de convergencia de alguna serie de potencias, es fácil ver que* $\mathbb{T}^n$ *actúa en* D *con multiplicación por componentes*

$$\mu : \mathbb{T}^n \times D \to D, (\zeta, z) \mapsto (\zeta_1 z_1, ..., \zeta_n z_n). \tag{1.8}$$

Además, para todo $\zeta \in \mathbb{T}^n$, *la aplicación*

$$\mu_\zeta : D \to D, z \mapsto \mu(\zeta, z)$$

es holomorfa. Notemos que $\mathbb{T}^n$ *no actúa en subconjuntos arbitrarios de* $\mathbb{C}^n$. *Usamos la siguiente notación. Si* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, *escribimos*

$$e^{i\theta} \cdot z := (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n).$$

Proposición 1.13 *Sea* $D \subset \mathbb{C}$ *un dominio. Si* $\mathbb{T}^1$ *actúa en* D, *entonces* D *o es todo el plano complejo o un disco centrado en cero o un anillo centrado en cero.*

Demostración:

Si $\mathbb{T}^1$ actúa en D y $z \in D$, entonces D también contiene el círculo

$$C_{|z|} := \left\{ |z| e^{it} \mid 0 \leq t \leq 2\pi \right\}.$$

Porque $z \in C_{|z|} \subset D$ para todo $z \in D$, tenemos

$$D = \bigcup_{z \in D} C_{|z|},$$

que puede ser todo el plano, un disco centrado en cero o un anillo centrado en cero. □

Definición 1.18 *Un subconjunto* $D \subset \mathbb{C}^n$ *es llamado policircular si* $\mathbb{T}^n$ *actúa en* D *por multiplicación por componentes. Si* D *es un dominio, entonces* D *es llamado un dominio de Reinhardt.*

Con la definición anterior podemos decir que los dominios de convergencia de las series de potencias son dominios de Reinhardt. Notemos que la propiedad de ser un dominio Reinhardt no es invariante bajo equivalencia biholomórfica. Por ejemplo, el teorema de aplicaciones de Riemann en una variable dice que todo dominio simplemente conexo D contenida adecuadamente en $\mathbb{C}$ es biholomórficamente equivalente al disco unitario abierto, que es un dominio de Reinhardt, aunque D no lo sea.

Ejemplo:

Sea $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y sea $r > 0$. Entonces la bola de radio r con respecto a $\|.\|_p$ centrado en cero

$$B_r^n(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\|_p < R\}$$

es un dominio de Reinhardt, porque para todo $\zeta \in \mathbb{T}^n$ y $p \in \mathbb{N}$,

$$\|\zeta \cdot z\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|z\|_p.$$

El caso $p = \infty$ sigue de la proposición 1.2.

Definición 1.19 *Para $j = 1, \ldots, n$, sea $0 \leq r_j < R_j \leq \infty$. Sea $a \in \mathbb{C}^n$. El conjunto*

$$A_{r,R}^n(a) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid r_j < |z_j - a_j| < R_j, j = 1, ..., n\}$$

es llamado polianillo con poliradio r y R con centro en a.

Un polianillo es producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ del anillo unidimensional. Si $a = 0$ entonces es un dominio Reinhardt.

Proposición 1.14 *Sea D un dominio de Reinhardt. Entonces, para todo $a \in D$, existe un poliradio $r < R$ tal que*

$$a \in A_{r,R}^n(0) \subset D.$$

Em particular, todo dominio de Reinhardt es la unión de polianillos.

Teorema 1.10 (Expansión de Laurent) *Sea $A := A_{r,R}^n(a)$ un polianillo con centro $a \in \mathbb{C}^n$ y $f \in \mathcal{O}(A)$. Sea $r_j < \rho < R_j, j = 1, \ldots, n$. Entonces f tiene una expansión de Laurent*

$$f(z) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha (z - a)^\alpha$$

converge compactamente en A. Los coeficientes c_α son obtenidos por

$$c_\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|w_n - a_n| = \rho_n} \cdots \int\limits_{|w_1 - a_1| = \rho_1} \frac{f(w)}{(w - a)^{\alpha + 1}} dw.$$

Demostración:

Probaremos el teorema por inducción en n. El caso $n = 1$ es conocido. Supongamos $n \geq 2$. Para $z \in \mathbb{C}^n$, escribimos

$$z = (z_1, z')$$

donde $z' = (z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Para w_1 fijo con $|w_1 - a_1| = \rho_1$ la función $f(w_1, .)$ es holomorfa en $A_2 \times \cdots \times A_n$. Por hipótesis inductiva, tenemos

$$f(w_1, z') = \sum_{\alpha' \in \mathbb{Z}^{n-1}} (z' - a')^{\alpha'} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|w_n - a_n| = \rho_n} \cdots \int\limits_{|w_2 - a_2| = \rho_2} \frac{f(w_1, w')}{(w' - a')^{\alpha'+1}} dw'$$

También, para z' fijo, tenemos la expansión de Laurent unidimensional

$$f(z_1, z') = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w_1 - a_1| = \rho_1} \frac{f(w_1, z')}{(w_1 - a_1)^{\alpha_1+1}} dw_1.$$

Combinando estas dos expansiones se obtiene que para todo z satisface

$$r_j < |z_j - a_j| < \rho_j,$$

para todo j, la ecuación

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|w_n - a_n| = \rho_n} \cdots \int\limits_{|w_1 - a_1| = \rho_1} \frac{f(w)}{(w - a)^{\alpha+1}} (z - a)^{\alpha} dw$$

se cumple puntualmente en A. Para probar la convergencia compacta, sea $K \subset A$ un conjunto compacto. Si definimos

$$\rho_j^- := \min_{z \in K} |z_j - a_j|, \rho_j^+ := \max_{z \in K} |z_j - a_j|$$

y escogemos r_j^-, R_j^- tal que

$$r_j < r_j^- < \rho_j^- \leq \rho_j^+ < R_j^- < R_j,$$

concluímos que el teorema de la integral de Cauchy (la versión homotópica) que los coeficientes c_α satisface

$$c_\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|w_n - a_n| = r_n{}^{sgn\alpha_n}} \cdots \int\limits_{|w_1 - a_1| = r_1{}^{sgn\alpha_1}} \frac{f(w)}{(w - a)^{\alpha+1}} dw$$

donde

$$r_j^{sgn\alpha_j} := \begin{cases} r_j^+, \text{ si } \alpha_j \geq 0 \\ r_j^-, \text{ si } \alpha_j < 0 \end{cases}.$$

Entonces, para todo $z \in K$ y todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ obtenemos de la estimación estándar para integrales de línea sobre círculos

$$|c_\alpha (z-a)^\alpha| \leq \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \geq 0}}^{n} \left(\frac{\rho_j^+}{R_j^-} \right)^{\alpha_j} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j < 0}}^{n} \left(\frac{r_j^-}{\rho_j^-} \right)^{|\alpha_j|} \sup_{w \in \overline{A^n_{r^-, R^-(a)}}} |f(w)|.$$

Con

$$q := \max_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\rho_j^+}{R_j^-}, \frac{r_j^-}{\rho_j^-} \right\}$$

y

$$M_K := \sup_{w \in \overline{A^n_{r^-, R^-(a)}}} |f(w)|$$

tenemos

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |c_\alpha (z-a)^\alpha| \leq M_K \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} q^{|\alpha|} = \frac{M_K}{(1-q)^n} < \infty$$

en K. □

Teniendo en cuenta la proposición 1.14, podemos decir que el teorema 1.10 se cumple localmente para toda función holomorfa en un dominio de Reinhardt. Usamos la expansión de Laurent para dar otra expansión en serie para funciones holomorfas en dominios de Reinhardt.

Teorema 1.11 *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f \in \mathcal{O}(D)$. Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ definimos*

$$f_\alpha : D \to \mathbb{C}, z \mapsto \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\mathbb{T}^n} \frac{f(\zeta \cdot z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta, \tag{1.9}$$

donde $\zeta \cdot z = (\zeta_1 z_1, \ldots, \zeta_n z_n)$. Entonces, $f_\alpha \in \mathcal{O}(D)$ y las series

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} f_\alpha(z)$$

converge compactamente en D hacia f.

Demostración:

Desde que D es un dominio de Reinhardt para todo $z \in D$, el conjunto

$$X_z := \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid \zeta \cdot z \in D\}$$

es policircular y contiene al politorio unitario $\mathbb{T}^n$. También es un conjunto abierto en $\mathbb{C}^n$, porque la aplicación

$$\zeta \mapsto \zeta \cdot z$$

es continua. Por lo tanto, existe un polianillo abierto A_z centrado en cero, tal que

$$\mathbb{T}^n \subset A_z \subset X_z.$$

Definimos

$$g_z : A_z \to \mathbb{C}, \zeta \mapsto f(\zeta \cdot z).$$

Entonces, g_z es holomorfa en A_z. Del teorema 1.10, obtenemos la expansión de Laurent en cero

$$g_z(\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha(z)\zeta^\alpha,$$

con

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{g_z(\zeta \cdot z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{f(\zeta \cdot z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta \\ &= f_\alpha(z). \end{aligned}$$

Escogemos $\zeta = (1, \ldots, 1)$, encontramos que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} f_\alpha(z)$$

puntualmente en D. Sea $K \subset D$ compacto. Entonces también

$$\mathbb{T}^n \cdot K := \{\zeta \cdot z \mid \zeta \in \mathbb{T}^n, z \in K\}$$

es compacto por continuidad de la acción y está contenida en D. Esto implica la existencia de un $R > 1$ tal que

$$(R-1)\sup_{z\in K}\|z\|_\infty < \delta := \text{dist}_{\|.\|_\infty}(\mathbb{T}^n.K, \partial D).$$

Afrimamos que para todo $z \in K$, el anillo compacto

$$A := \left\{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid \frac{1}{R} \leq |\zeta_j| \leq R, j = 1, ..., n\right\}$$

está contenida en A_z. Esto puede ser visto como sigue. Si $\frac{1}{R} < |\zeta_j| < R$, entonces

$$|\zeta_j| - 1 \leq R - 1, 1 - |\zeta_j| \leq 1 - \frac{1}{R} = \frac{R-1}{R} < R - 1,$$

por ende, $||\zeta_j| - 1| \leq R - 1$. Si$z \in K$, entonces para todo $j = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned}\left|\zeta_j z_j - \frac{\zeta_j}{|\zeta_j|}z_j\right| &= \left|(|\zeta_j| - 1)\frac{\zeta_j}{|\zeta_j|}z_j\right| \\ &= ||\zeta_j| - 1||z_j| \\ &\leq (R-1)\|z\|_\infty \\ &< \delta,\end{aligned}$$

así, $\zeta.z \in D$. Esto implica $\zeta \in A_z$. Por la versión homotópica del teorema integrak de Cauchy, tenemos

$$\begin{aligned}f_\alpha(z) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{f(\zeta.z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|\zeta_n|=R^{sgn\alpha_n}} \cdots \int\limits_{|\zeta_1|=R^{sgn\alpha_1}} \frac{f(\zeta.z)}{\zeta^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

Definimos

$$M_K := \text{máx}\left\{|f(\zeta z)| \mid z \in K, \frac{1}{R} \leq |\zeta_j| \leq R, 1 \leq j \leq n\right\}.$$

Entonces, la estimación estándar nos da

$$|f_\alpha(z)| \leq \frac{M_K}{R^{|\alpha|}},$$

que implica que $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f_\alpha(z)$ converge absoluta y uniformemente en K. □

Proposición 1.15 *Un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ es llamado circular si $\mathbb{T}^1$ actúa en D por la multiplicación escalar, es decir,*

$$\mu : \mathbb{T}^1 \times D \to D, (\zeta, z) \mapsto \zeta z := (\zeta_1 z_1, ..., \zeta_n z_n)$$

Sea D un dominio circular y $f \in \mathcal{O}(D)$. Entonces

1. *Para todo $k \in \mathbb{Z}$, la fórmula*

$$f_k(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}^1} \frac{f(\zeta z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta$$

   define una función holomorfa en D que satisface

$$f_k(\zeta z) = \zeta^k f_k(z)$$

   para todo $\zeta \in \mathbb{T}^1$, $z \in D$.

2. *La serie*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k$$

   converge compactamente en D a la función f.

3. *Si $0 \in D$, entonces $f_k = 0$ para todo $k < 0$.*

Capítulo 2

Continuación en dominios circulares y policirculares

En la teoría de la función unidimensional, se sabe que para cada dominio $D \in \mathbb{C}$ existe una función $f \in \mathcal{O}(D)$ que no puede ser extendida holomórficamente a un dominio estrictamente más grande. Por ejemplo, la función f definido por $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ es holomorfa en el disco unitario $B_1^1(0)$ y es no acotada cerca de cada punto frontera de $B_1^1(0)$. Así, no puede ser expandido a cualquier dominio estrictamente más grande que $B_1^1(0)$. En dimensiones $n \geq 2$, la situación cambia. Aquí encontramos dominios D que tienen la propiedad de que toda función $f \in \mathcal{O}(D)$ puede ser holomórficamente extendida a un dominio más grande. Esto tiene varios resultados interesantes que demuestran una gran diferencia entre el análisis complejo de una variable y el de más de una.

2.1. Continuación Holomorfa

Definición 2.1 *Sea D_1, D dos dominios en $\mathbb{C}^n$ con $D_1 \subset D$ y $f \in \mathcal{O}(D_1)$. Decimos que f puede ser holomórficamente extendida (o continuado) a D si existe una función $F \in \mathcal{O}(D)$ cuya restricción a D_1 coincide con f, es decir,*

$$F|_{D_1} = f.$$

Ejemplo:
Sea $P_1^n(0)$ el polidisco unitario en $\mathbb{C}^n$. La función

$$f : P_1^n(0) \to \mathbb{C}$$

definido por la serie geométrica

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} z^\alpha$$

puede ser extendida holomórficamente en $\mathbb{C}^n \backslash A$ por

$$F(z) := \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - z_j},$$

donde

$$A := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \exists j : 1 \leq j \leq n : z_j = 1\}.$$

Proposición 2.1 *Sea $\emptyset \neq D_1 \subset D \subset \mathbb{C}^n$ dos dominios. Si una función $f \in \mathcal{O}(D_1)$ admite una extensión holomorfa $F \in \mathcal{O}(D)$, esta extensión es necesariamente única.*

Demostración:
Si $F, G \in \mathcal{O}(D)$ son dos extensiones holomorfas, estos coinciden en D_1, que es abierto. Por el teorema de la identidad $F = G$ en D. □

Una formulación equivalente de la proposición 2.1 es que la función restricción

$$\rho : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D_1), F \mapsto F|_{D_1} \tag{2.1}$$

es inyectiva. ρ es un homomorfismo (continuo) de álgebras complejas, así que una pregunta natural es: ¿Bajo qué circunstancias ρ es un isomorfismo? ρ es sobreyectiva, si y solo si para todo $f \in \mathcal{O}(D_1)$ es la restricción de un $F \in \mathcal{O}(D)$, esto es, si todo $f \in \mathcal{O}(D_1)$ admite una continuación holomorfa en D.

Definición 2.2 *Un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ es llamado balanceado si $0 \in D$, D es circular y en forma de estrella respecto al origen.*

Ejemplo:

Para todo $p \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$ y todo $r > 0$ la bola

$$\{z \in \mathbb{C}^n | \|z\|_p < r\}$$

es un dominio balanceado.

Lema 2.1 *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio circular y $0 \in D$. Entonces existe un único dominio $\widetilde{D}$, llamada* cápsula balanceada *de D, con las siguientes propiedades:*

1. *El conjunto $\widetilde{D}$ es balanceado y está contenido en D.*
2. *Si D' es cualquier dominio balanceado que contiene a D, entonces $\widetilde{D} \subset D'$.*

Demostración:

1. Definimos $\widetilde{D}$ por

   $$\widetilde{D} := [0,1].D := \{tz \mid t \in [0,1], z \in D\}.$$

   Entonces $0 \in D \subset \widetilde{D}$ y $\widetilde{D}$ es forma de estrella con respecto a 0, por tanto, conexo. Desde que $0 \in D$, tenemos

   $$\widetilde{D} = \bigcup_{0<t\leq 1} tD.$$

   Los conjuntos $tD = \{tz \mid z \in D\}$ son abiertos, porque para $t > 0$ la aplicación $z \mapsto tz$ es homeomorfismo. Esto muestra que $\widetilde{D}$ es también abierto.

2. Sea $D \subset D'$ un dominio balanceado. Desde que D' es forma de estrella con respecto al original tenemos

   $$tz \in D'$$

   para todo $t \in [0,1]$ y todo $z \in D$, por tanto, $\widetilde{D} \subset D'$.

□

Teorema 2.1 (Continuación en dominios circulares) *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio circular con $0 \in D$ y sea $\widetilde{D}$ la cápsula balanceada de D. Entonces la restricción*

$$\rho : \mathcal{O}(\widetilde{D}) \to \mathcal{O}(D), F \mapsto F|_D$$

es un isomorfismo de álgebras.

Demostración:

Por el lema 2.1, $\widetilde{D}$ es un dominio. Junto con la proposición 2.1, esto muestra que ρ es inyectivo. Sea $f \in \mathcal{O}(D)$. Para $k \in \mathcal{N}$ definimos $f_k : D \to \mathbb{C}$ por

$$f_k := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}^1} \frac{f(\zeta z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta.$$

Como se mostró en la proposición 1.15, cada f_k es holomorfa y la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

converge a f compactamente en D. Mostramos que esta serie incluso converge de forma compacta en $\widetilde{D}$ y, por tanto, define una extensión holomorfa F de f. Un dominio en $\mathbb{C}^n$ es localmente compacta. Por lo tanto, existe un cubrimiento abierto

$$(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

relativamente compacto de subconjuntos de D. Sea $K' \subset \widetilde{D}$ un subconjunto compacto. Entonces

$$K' \subset \bigcup_{0<t\leq 1} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} tU_\lambda = \widetilde{D}.$$

Desde que todos los conjuntos tU_λ son abiertos y K' es compacto, este cubrimiento abierto contiene un subcubrimiento finito, es decir, existen $M, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$K' \subset \bigcup_{k=1}^{M} \bigcup_{k=1}^{N} t_k U_{\lambda_l}.$$

El conjunto

$$K := \bigcup_{l=1}^{N} \overline{U_{\lambda_l}}$$

es entonces un subconjunto compacto de D. Por lo tanto, la serie $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge absoluta y uniformemente en K. Por construcción, tenemos

$$K' \subset [0,1] \cdot K.$$

Desde que para $t \in [0,1]$ y $z \in K$,

$$|f_k(tz)| = \left|t^k f_k(z)\right| \leq |f_k(z)|$$

tenemos

$$\sup_{z \in K'} |f_k(z)| \leq \sup_{z \in K} |f_k(z)|.$$

Esto implica que $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge absoluta y uniformemente en K'. Así, la función

$$F : \widetilde{D} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k \geq 0} f_k(z)$$

define una continuación holomorfa de f al cápsula balanceada $\widetilde{D}$, que prueba la sobreyectividad de ρ. □

Obsérvese que este teorema revela su fuerza sólo si $n \geq 2$, porque si $n = 1$, entonces todo dominio circular $D \subset \mathbb{C}$ que contiene cero coincide con su cápsula balanceada.

Definición 2.3 *Si $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de Reinhardt que contiene al origen, su cápsula polibalanceada $\widetilde{\widetilde{D}}$ es definido como*

$$\widetilde{\widetilde{D}} := \{(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n) \mid z \in D, t_j \in [0,1], j = 1, \ldots, n\}.$$

Teorema 2.2 (Continuación de dominios de Reinhardt) *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de Reinhardt que contiene al origen y $\widetilde{\widetilde{D}}$ su cápsula polibalanceada. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Para todo $f \in \mathcal{O}(D)$ la serie*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha$$

converge a f compactamente en D.

2. *La restricción*

$$\rho : \mathcal{O}(\widetilde{\widetilde{D}}) \to \mathcal{O}(D), F \mapsto F|_D$$

es un isomorfismo de álgebras.

Demostración:

1. Desde que $0 \in D$, existe un polidisco $P \subset D$ que contiene a 0 tal que la expansión de Taylor

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \frac{D^\nu f(0)}{\nu!} z^\nu$$

converge compactamente en P. Así, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ y todo $z \in P$, tenemos

$$\begin{aligned} f_\alpha(z) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathbb{T}^n} \frac{f(\zeta z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathbb{T}^n} \frac{f(\zeta z)}{\zeta^{\alpha+1}} \underbrace{\left(\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \frac{D^\nu f(0)}{\nu!} \zeta^\nu z^\nu\right)}_{\text{converge uniformemente para } \zeta \in \mathbb{T}^n} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \frac{D^\nu f(0)}{\nu!} z^\nu \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\zeta^\nu}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta}_{=\delta_{\alpha\nu} \text{ obs}} \\ &= \begin{cases} \frac{D^\alpha f(0) z^\alpha}{\alpha!}, & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}^n \\ 0, & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}^n \end{cases}. \end{aligned}$$

Desde que D es un dominio y $P \subset D$ es abierto, esta igualdad cumple en todo D. El teorema 1.11, implica

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} f_\alpha(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha$$

compactamente en D.

2. Desde que D es abierto en $\mathbb{C}^n$, hay un cubrimiento abierto $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de D consistente en subconjuntos relativos compactos de D. Entonces, los cápsulas polibalanceadas $\widetilde{\widetilde{U}}_\lambda$ son subconjutos relativamente compactos $\widetilde{\widetilde{D}}$ y forma un cubrimiento abierto de $\widetilde{\widetilde{D}}$. Si $K \subset \widetilde{\widetilde{D}}$ es un conjunto compacto, entonces existe

un subcubrimiento finito $\left(\widetilde{\widetilde{U_{\lambda_j}}}\right)_{j=1,\dots,m}$ de K. Definimos

$$K' := \bigcup_{j=1}^{m} \overline{U_{\lambda_j}}.$$

Entonces K' es compacto en D y $K \subset \widetilde{\widetilde{K'}}$. Ahora, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tenemos

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}z^\alpha\right| \leq \sup_{z\in\widetilde{\widetilde{K'}}}\left|\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}z^\alpha\right| = \sup_{z\in K'}\left|\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}z^\alpha\right|.$$

De 1., sabemos que $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}z^\alpha$ converge a f compactamente en D, así, por lo que, según la estimación anterior, esto también es válido para el cápsula polibalanceada $\widetilde{\widetilde{D}}$. Por lo tanto, la función

$$F : \widetilde{\widetilde{D}} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}z^\alpha$$

define una continuación holomorfa de f de D a $\widetilde{\widetilde{D}}$.

□

Proposición 2.2 *El isomorfismo construido en el teorema anterior es un homeomorfismo.*

Teorema 2.3 *Sea D un subconjunto policircular de $\mathbb{C}^n$. Definimos una partición del conjunto $\{1,\dots,n\}$ por*

$$\begin{aligned} I_D :=& \{k \in \{1,\dots,n\} \mid \exists z \in D : z_k = 0\},\\ J_D :=& \{l \in \{1,\dots,n\} \mid \forall z \in D : z_l \neq 0\} \end{aligned}$$

y definimos

$$\mathbb{N}^{I_D} \times \mathbb{Z}^{J_D} := \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid \alpha_j \geq 0 \text{ para todo } j \in I_D\}.$$

Si D es un dominio de Reinhardt y $f \in \mathcal{O}(D)$ entonces

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{I_D}\times\mathbb{Z}^{J_D}}\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}z^\alpha$$

compactamente en D.

Demostración:

Del teorema 1.11, sabemos que $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f_\alpha$ converge a f compactamente en D, donde, como es usual

$$f_\alpha(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{f(\zeta z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta.$$

Demostramos que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$, se cumple lo siguiente:

1. Si existe algún $j \in I_D$ con $\alpha_j < 0$ entonces $f_\alpha = 0$.
2. Si $\alpha_j \geq 0$ para todo $j \in I_D$ entonces $f_\alpha(z) = \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha$.

Sea $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ fijo tal que $\alpha_j < 0$ para algún $j \in I_D$. Sin pérdida de generalidad, asumiremos $j = 1$, es decir, hay algún $z \in D$ con $z_1 = 0$. Desde que D es abierto, existe un disco abierto $B_\epsilon(0) \subset \mathbb{C}$ y un polidisco abierto $P' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ tal que

$$D' := B_\epsilon(0) \times P' \subset D.$$

La expansión de Laurent en D' no da

$$f(z) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n \\ \alpha_1\geq 0}} c_\alpha z^\alpha$$

implica

$$\begin{aligned} f_\alpha(z) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{f(\zeta z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{\zeta^{\alpha+1}} \sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^n \\ \mu_1\geq 0}} c_\mu \zeta^\mu z^\mu \\ &= \sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^n \\ \mu_1\geq 0}} c_\mu z^\mu \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \underbrace{\int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\zeta^\mu}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta}_{=\delta_{\alpha\mu}}. \end{aligned}$$

Desde que $\alpha_1 < 0$, concluímos que $f_\alpha = 0$ en D'. Por el teorema de la identidad, $f_\alpha = 0$ en D.

Ahora, sea $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\alpha_j \geq 0$ para todo $j \in I_D$. Entonces, al función

$$z \mapsto \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha$$

es holomorfa en D, puesto que por la definición de J_D, tenemos $z_j \neq 0$, para todo $j \in J_D$. Escogiendo un polidisco $P \subset D$ y comparando con la expansión de Laurent de f en P con la expansión homogénea $\sum_\alpha f_\alpha$ del teorema 1.11 da por resultados análogos a los anteriores

$$f_\alpha(z) = \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha$$

en P. Aplicamos el teorema de la identidad de nuevo para ver que esta ecuación se cumple en todo D. □

Corolario 2.1 *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de Reinhardt. Sea $1 \leq p \leq n$ tal que para todo $k = 1, \ldots, p$, hay un $z \in D$ con $z_k = 0$ y para todo $l = p+1, \ldots, n$, tenemos $z_l \neq 0$ para todo $z \in D$. Además, sea*

$$\widehat{D} := \{(t_1 z_1, \ldots, t_p z_p, z_{p+1}, \ldots, z_n) \mid z \in D, 0 \leq t_j \leq 1, 1 \leq j \leq p\}.$$

Entonces

$$\rho : \mathcal{O}(\widehat{D}) \to \mathcal{O}(D), F \mapsto F|_D$$

es un isomorfismo.

Demostración:

La prueba es análogo al caso $0 \in D$, es decir, $p = n$. □

Observación 2.1 *Notemos que si $n = 1$, el corolario 2.1 es trivial, porque en este caso que tenemos $0 \in D$, que implica $\widehat{D} = D$.*

2.2. Interpretación-representación teórica de las series de Laurent

Los resultados sobre la expansión de Laurent pueden interpretarse en un marco teórico de la representación. Si D es un dominio de Reinhardt, la acción

$$\mathbb{T}^n \times D \to D, (\zeta, z) \mapsto \zeta \cdot z$$

define una representación

$$\pi : \mathbb{T}^n \to \mathcal{L}(\mathcal{O}(D))$$

de $\mathbb{T}^n$ en el espacio $\mathcal{O}(D)$ de funciones holomorfas en D por

$$\pi(\zeta)(f)(z) := f(\zeta \cdot z). \tag{2.2}$$

Para simplificar, definimos $G := \mathbb{T}^n$. Generalmente, en la teoría de la representación, uno está interesado en los vectores propios simultáneos de la representación, es decir, en este caso, en todas las funciones holomorfas $f \in \mathcal{O}(D), f \neq 0$, para que exista un función $\chi : G \to \mathbb{C}$ tal que

$$\pi(g)(f) = \chi(g)f$$

para todo $g \in G$. Esta noción, por supuesto, se aplica a representaciones de grupos genéricos G sobre un espacio vectorial V. Del hecho de que π es una representación se deduce que χ es un homomorfismo de grupo de G a $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$. Estos homomorfismos de grupo se denominan *caracteres de grupo* de G (ver [7]). Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, tenemos un caracter de grupo continuo

$$\chi_\alpha : G \to \mathbb{C}^\times, \zeta \mapsto \zeta^\alpha.$$

Observación 2.2 $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ *es el grupo de Lie complejo de dimensión compleja* n^2*, puede representarse por matrices* $n \times n$ *con determinante diferente de cero.*

Teorema 2.4 *Sea* D *un dominio de Reinhardt, sea* π *la representación (2.2) y para* $\alpha \in \mathbb{Z}^n$*, sea* f_α *la función (1.9). Entonces se cumple lo siguiente*

1. *Los vectores propios de* π *son exactamente aquellos monomios* $z^\alpha, z \in D, \alpha \in \mathbb{Z}^n$*, que pueden ser extendidos en todo* D*. En otras palabras, si existe un* $z \in D$ *con* $z_j = 0$ *para algún* j*, entonces solo estos* $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ *con* $\alpha_j \geq 0$ *aparecen.*

2. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{Z}^n$*, la función* $p_\alpha : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D)$ *definido por* $p_\alpha(f) := f_\alpha$ *define proyecciones continuas en el espacio propio correspondiente al caracter* χ_α*.*

3. *Los vectores propios de* π *foman un subconjunto denso de* $\mathcal{O}(D)$*.*

Demostración:

1. Si $f \in \mathcal{O}(D)$ con expansión de Laurent $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$, entonces
$$\pi(\zeta)(f)(z) = f(\zeta \cdot z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha \zeta^\alpha z^\alpha.$$
Se sigue de la unicidad de los coeficientes de Laurent que f es un vector propio si y solo si existe un $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ tal que $f(z) = c_\alpha z^\alpha$. Del teorema 2.2, obtenemos que $\alpha_j \geq 0$ si $z_j = 0$.

2. De la convergencia uniforme de las series de Laurent en el conjunto compacto $\mathbb{T}^n \cdot z$, obtenemos
$$\begin{aligned} p_\alpha(f)(z) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{f(\zeta \cdot z)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta \\ &= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} \frac{c_\beta}{(2\pi i)^n} z^\beta \int\limits_{\mathbb{T}^n} \zeta^{\beta-\alpha-1} d\zeta \\ &= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} \frac{c_\beta}{(2\pi i)^n} z^\beta \delta_{\beta\alpha} = c_\alpha z^\alpha. \end{aligned}$$
En particular, $p_\alpha(c_\alpha \mathrm{id}^\alpha)(z) = c_\alpha z^\alpha$.

3. Esto es una consecuencia inmediata del teorema 1.11.

□

Observación 2.3 *El teorema 2.4 ofrece una interpretación teórica de la representación de la expansión de Laurent de funciones holomorfas en dominios de Reinhardt. Dentro de este marco hay teoremas que contienen los teoremas de expansión de Laurent en dominios de Reinhardt como casos especiales. Sin embargo, esta teoría requiere un conocimiento mucho más profundo del análisis de funciones.*

2.3. Hartogs' Kugelsatz, caso especial

Como una aplicación del corolario 2.1, demostramos una forma especial de Hartogs'Kugelsatz. Afirma que toda función holomorfa en la envoltura de una bola puede extenderse a la bola completa. Como una consecuencia, se sigue que las funciones

holomorfas de $n \geq 2$ variables no tienen ni singularidades aisladas ni ceros aislados. Teniendo en cuenta que en una variable buena parte de la teoría se basa en la existencia de singularidades aisladas, especialmente la teoría de residuos con todas sus aplicaciones, por ejemplo en la teoría analítica de números, se trata de un hecho bastante notable.

Teorema 2.5 (Kugelsatz, caso especial) *Sea $n \geq 2, 0 < r < R \leq \infty, \|.\|$ una norma arbitraria en $\mathbb{C}^n$ y $B_r^n(0), B_R^n(0)$ las bolas de radio r y R respectivamente a $\|.\|$ (en el caso $R = \infty$, esto significa en todo $\mathbb{C}^n$). Sea*

$$B^n(r, R) := B_R^n(0) \backslash \overline{B_r^n(0)}.$$

Entonces la restricción

$$\rho : \mathcal{O}(B_R^n(0)) \to \mathcal{O}(B^n(r, R)), F \mapsto F|_{B^n(r,R)}$$

es un isomorfismo de álgebras topológicas.

Demostración:

Claramente, $B^n(r, R)$ es un dominio de Reinhardt. Sea $e_1, ..., e_n$ las bases canónicas de $\mathbb{C}^n$ y fijamos algún $\lambda \in]r, R[$. Entonces, $B^n(r, R)$ contiene todos los vectores λe_j que tienen λ en la j-ésima componente y cero en caso contrario, es decir, tenemos $p = n$ en el corolario 2.1.
Por tanto,

$$\begin{aligned}\widehat{B^n(r, R)} &= \{(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n) \mid z \in B(r, R), 0 \leq t_j \leq 1, j = 1, \ldots, n\} \\ &= \{(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n) \mid r < \|z\| < R, 0 \leq t_j \leq 1, j = 1, \ldots, n\} \\ &= B_R^n(0).\end{aligned}$$

El corolario 2.1 dice que

$$\rho : \mathcal{O}(B_R^n(0)) \to \mathcal{O}(B^n(r, R)), F \mapsto F|_{B(r,R)}$$

es un isomorfismo de álgebras. Esto sigue de la proposición 2.2 que este isomorfismo es también topológico. □
Este teorema tiene consecuencias llamativas.

Corolario 2.2 *Una función holomorfa de $n \geq 2$ variables no tiene singularidades aisladas no removibles.*

Demostración:

Sea f holomorfo en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ con $n \geq 2$ y sea $a \in U$. Por un desplazamiento de coordenadas podemos suponer $a = 0$ sin pérdida de generalidad. Como U es abierto podemos elegir $0 < r < R$ tal que

$$0 \notin B^n(r, R) \subset U.$$

Desde que $f \in \mathcal{O}(U)$ la restricción $f|_{B^n(r,R)}$ es holomorfa. Por el teorema 2.5 hay un único $F \in \mathcal{O}(B_R^n(0))$, que prolonga f holomórficamente, por lo que la singularidad 0 es removible. □

Ejemplo:

Sea $\Omega := B^2\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap (\mathbb{C} \times \{0\})$ y

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, (z, 0) \mapsto \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}.$$

f no permite ninguna extensión holomorfa en $B^2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, puesto que si fuese una extensión

$$F \in \mathcal{O}\left(B^2\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)$$

de f, la aplicación del teorema 2.5 produciría otra extensión holomorfa

$$G \in \mathcal{O}\left(B_1^2(0)\right)$$

de F. Esta extensión, sin embargo, no puede existir , porque G tendría que ser acotado cerca al punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \in B_1^2(0)$, mientras f no lo es. Esto es una contradicción.

Conclusiones

- Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en múltiples variables establecen las condiciones para que una función sea diferenciable y analítica en su dominio.
- La expansión de Laurent permite representar funciones complejas en dominios con singularidades esenciales, ofreciendo una descripción precisa del comportamiento de las funciones en los puntos críticos.
- El teorema de continuidad holomorfa sobre los dominios de Reinhardt nos proporciona una convergencia compacta para funciones holomorfas.

Bibliografía

[1] Martin Barner and Friedrich Flohr. *Analysis I*. Walter de Gruyter, 2011.

[2] Robert G Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.

[3] John B Conway. *Functions of one complex variable II*, volume 159. Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Lars Hormander. *An introduction to complex analysis in several variables*. Elsevier, 1973.

[5] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.

[6] Bryan Rynne and Martin A Youngson. *Linear functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2007.

[7] Mitsuo Sugiura. *Unitary representations and harmonic analysis: an introduction*. Elsevier, 1990.

[8] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 2006.

[9] Wilhelm Wirtinger. Zur formalen theorie der funktionen von mehr komplexen veränderlichen. *Mathematische Annalen*, 97(1):357–375, 1927.