Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Núcleo reproductor en el espacio de Hilbert

$$W_2^m[a,b]$$

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Alexander AVENDAÑO RODRIGUEZ

ASESOR

Dr. José Raúl LUYO SÁNCHEZ

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Avendaño, A. (2026). *Núcleo reproductor en el espacio de Hilbert* $W_2^m[a,b]$. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Alexander Avendaño Rodriguez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	77468730
URL de ORCID	-
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Dr. José Raúl Luyo Sánchez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09394743
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5120-5274
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43688114
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias y Parciales) y Análisis Funcional

Grupo de investigación	-
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Marzo, 2026
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:00 horas del día lunes 16 de marzo de 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (PRESIDENTE), Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO) y el Dr. José Raúl Luyo Sánchez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "**NÚCLEO REPRODUCTOR EN EL ESPACIO DE HILBERT $W_2^m[a,b]$**", presentado por el señor Bachiller ALEXANDER AVENDAÑO RODRIGUEZ, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ..... sobresaliente ..... con un calificativo promedio de ..... diecisiete ..... (17.).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, manifestó que el señor Bachiller ALEXANDER AVENDAÑO RODRIGUEZ, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 11:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
PRESIDENTE

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
MIEMBRO

Dr. José Raúl Luyo Sánchez
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. José Raúl Luyo Sánchez en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N.º 000758-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es **"NÚCLEO REPRODUCTOR EN EL ESPACIO DE HILBERT $W_2^m[a,b]$"**, presentado por el bachiller Alexander Avendaño Rodriguez para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 8% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Lima 4 de julio de 2026



Firma del Asesor:

Nombres y Apellidos del asesor: José Raúl Luyo Sánchez

DNI: 09394743

Resumen

Este trabajo tiene como propósito estudiar la existencia de núcleos reproductores en el espacio de Hilbert $W_2^m[a, b]$.

Para alcanzar este objetivo, se presenta una introducción a la teoría de espacios de Hilbert con núcleos reproductores. Este estudio se conecta con una caracterización de la existencia de núcleos reproductores en espacios de funciones de Hilbert. Con el fin de encontrar un núcleo reproductor en el espacio de Sobolev $W_2^m[a, b]$, se explora la existencia y posterior formulación de las condiciones derivadas de una ecuación diferencial parcial (EDP).

La EDP planteada se origina a partir de una ecuación diferencial generalizada, en la que la delta de Dirac forma parte de la solución general.

Además, la tesis demuestra que no todo espacio de Hilbert posee la propiedad de reproducción, como se evidencia en la sección 2.2 a través de un teorema de Bukhvalov.

Palabras clave: Espacio de Hilbert, núcleo reproductor, espacios de Sobolev, kernels, EDPs.

Abstract

This work aims to study the existence of reproducing kernels in the Hilbert space $W_2^m[a, b]$.

To achieve this goal, an introduction to the theory of Hilbert spaces with reproducing kernels is presented. This study connects with a characterization of the existence of reproducing kernels in Hilbert function spaces. In order to find a reproducing kernel in the Sobolev space $W_2^m[a, b]$, the existence and subsequent formulation of conditions derived from a partial differential equation (PDE) are explored.

The posed PDE originates from a generalized differential equation, in which the Dirac delta is part of the general solution.

Furthermore, the thesis demonstrates that not every Hilbert space possesses the reproducing property, as evidenced in Section 2.2 through a theorem by Bukhvalov.

Keywords: Hilbert space, reproducing kernel, Sobolev spaces, kernels, PDEs.

Índice general

Resumen I

Abstract II

1. Preliminares. **3**
1.1. Espacios de Hilbert 3
1.2. Espacio L^P 5
1.3. Teorema de la representación de Riesz 8
1.4. Funciones absolutamente continuas 8

2. Espacios de funciones con núcleo reproductor. **11**
2.1. Núcleo reproductor de un espacio vectorial de funciones 11
2.2. El espacio de Hilbert $L^2[0,1]$ no admite núcleo reproductor 20
2.3. Propiedades fundamentales del núcleo reproductor 26

3. El espacio $W_2^m[a,b]$ **34**
3.1. El espacio de Hilbert de funciones $W_2^m[a,b]$ 34
3.2. Propiedad reproductora de $W_2^m[a,b]$ 37
3.3. Expresión de los núcleos reproductores en $W_2^m[0,1]$ 42

4. Conclusiones del EHNR $W_2^m[a,b]$ **45**

Apéndice **46**

A. Teorema de Mercer **47**

Introducción

En la actualidad, los problemas de clasificación han adquirido un papel protagónico en diversas áreas del conocimiento, lo que ha impulsado el desarrollo del aprendizaje automático, una rama de la inteligencia artificial que ha demostrado ser eficaz en la resolución de estos problemas. Dado que muchos de estos métodos se fundamentan en una sólida base matemática, me he motivado a investigar los fundamentos teóricos que subyacen a diversos modelos de aprendizaje automático.

Este trabajo se basa en estudios pioneros desarrollados por N. Aronszajn sobre espacios de Hilbert con núcleo reproductor (EHNR) [2]. Estos núcleos, funciones definidas en dos puntos, fueron inicialmente considerados como núcleos continuos de operadores integrales definidos positivos en el artículo de James Mercer [22], gracias a una propiedad descubierta por él mismo en [21], la cual se presenta en la Proposición 2.6.

Posteriormente, Eliakim Moore introdujo estos núcleos como matrices hermitianas positivas en [25], [26] y [27], estableciendo una de las propiedades clave que en este trabajo se define como la propiedad reproductiva.

A lo largo del tiempo, los EHNR han demostrado ser herramientas fundamentales en diversas áreas. Por ejemplo, en la década de 1960, se descubrió que estos espacios surgen de manera natural en problemas de detección de señales. Este enfoque de EHNR para la inferencia estadística en procesos estocásticos Gaussianos se puede apreciar en los trabajos de [9] y [14]. Para un desarrollo más general de los problemas estadísticos de extracción, se recomienda consultar [32]. Como se evidencia, los EHNR no solo tienen aplicaciones en matemáticas, sino también en estadística, como se muestra en [24].

Además, los EHNR han sido ampliamente utilizados en problemas de aproximación [28], [17], interpolación [31]-[20], muestreo [29]-[13], resolución de EDPs no lineales de cuarto orden [11]-[19], y ecuaciones integrales [12]-[10].

En este trabajo, se realiza una exhaustiva recopilación sobre los EHNR en el Capítulo 2, que incluye una amplia gama de ejemplos ilustrativos. El objetivo principal de esta investigación es encontrar un núcleo reproductor para un espacio de Sobolev específico, definido como:

$$W_2^m[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f^{(m-1)} \text{ es absolutamente continua en } [a,b], f^{(m)} \in L^2[a,b]\}$$

Este objetivo se logra mediante una caracterización de la existencia de núcleos reproductores en estos espacios de Hilbert, demostrada en el Capítulo 2. Aunque esta caracterización

establece la existencia de dichos núcleos, no proporciona un método explícito para su determinación. Por ello, abordamos la tarea de encontrar un núcleo reproductor, lo que nos conduce a una ecuación diferencial parcial (EDP) con condiciones impuestas por la propia existencia del núcleo. Esta EDP se expresa como:

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{(2m)}} = \delta(x - y)$$

donde la distribución delta de Dirac desempeña un papel crucial.

Además, presentamos soluciones explícitas para casos específicos en el espacio $W_2^m[a, b]$. Los resultados obtenidos sugieren la posibilidad de extender el dominio de estos espacios de Sobolev, abriendo nuevas líneas de investigación en el área.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo presentaremos algunas definiciones y resultados que serán útiles en el desarrollo de este trabajo.

1.1. Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert son conjuntos donde las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales gozan de muchas propiedades, de esta manera damos inicio a este objeto matemático para construir la base de lo que queremos trabajar.

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial, una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ es una norma si satisface las siguientes propiedades:

1. $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in V$.
2. $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = 0$.
3. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, para todo $u \in V$.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in V$.

De este modo, si $\|\cdot\|$ es una norma sobre un espacio vectorial, entonces el par $(V, \|\cdot\|)$ es llamado espacio vectorial normado o espacio normado.

Definición 1.2. Sea V un espacio vectorial normado, una sucesión $(x_n)_n$ en V es convergente a $L \in V$ si y solo si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - L\| < \varepsilon, \ \forall n > N$$

Definición 1.3. Sea un espacio normado V

1. Una sucesión $(x_n)_n$ en V es llamada fundamental o de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$ entonces

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

2. Si toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento de V entonces diremos que este espacio es completo. En este caso diremos que V es un espacio de Banach, es decir un espacio normado y completo.

Ejemplo 1.1. El conjunto $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con la norma usual son ejemplos de espacios de Banach.

Ejemplo 1.2. El conjunto de las funciones continuas reales en un intervalo cerrado $I = [a, b]$ es un espacio de Banach con la norma del máximo:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\,, x \in I\}$$

Demostración:
Sea f_n una sucesión de Cauchy. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ naturales se verifica $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, como consecuencia para todo $x \in I$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|,\ x \in I\} \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Por tanto la función $f_n(x)$ es una sucesión de números reales convergente, digamos a $f(x)$. De esta forma se puede asociar para cada $x \in I$, $f(x)$.Resta mostrar que f es continua en I y f_n converge a f, dado que f_n es de Cauchy y $f_m(x)$ converge a $f(x)$ para todo $\varepsilon > 0$ existe n, m, N naturales tal que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Es decir f_n converge a f uniformemente en $I =$ y al ser f_n continuas en I, f tambien lo es.

Ejemplo 1.3. El conjunto de las sucesiones $(x_n)_n$ de números reales tales que, para $p \geq 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ y norma $\|x_n\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$ es un espacio de Banach, denotado como l_p.

Demostración. Ver en [16].

Definición 1.4. Un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$ en el que está definida una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, es llamada producto interno o producto escalar si satisface:

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, donde la barra representa al conjugado complejo.
2. $\langle u, u \rangle \geq 0$, para todo $u \in V$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$
3. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
4. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{K}$

Así diremos que un espacio vectorial V, en el que se define un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es un espacio con producto interno. denotado como $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
Dado un espacio con producto interno V es posible inducir una norma mediante la relación

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

en efecto, es evidente que 1, 2, 3 y 4 de la definición 1.1 se deduce de la siguiente desigualdad.

Lema 1.1. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean x, y pertenecientes a un espacio vectorial con producto interno, se tiene la siguiente desigualdad*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Demostración: Ver en Kolmogorov [15]

Definición 1.5. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio normado, diremos que V es un espacio de Hilbert si es completo con la norma que induce este producto interno.

Ejemplo 1.4. Los espacios $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son espacios de Hilbert con el producto interno usual.

Ejemplo 1.5. Del ejemplo 1.3 se tiene que si $p = 2$, l_p un espacio de Hilbert; sin embargo, para $p \neq 2$ no es un espacio de Hilbert. Ver en [16]

Observación 1.1. De este último ejemplo podemos notar que hay espacios de Banach que no son espacios de Hilbert; sin embargo, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach.

1.2. Espacio L^P

En esta sección introduciremos un resumen y algunos resultados importantes del espacio L^p, para la información completa, puede consultar [5].
Sean X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ una sigma-álgebra y μ una medida definida en $\mathcal{A}$. Al par $(X, \mathcal{A}, \mu)$ será llamado espacio de medida. Para una lectura profunda sobre la teoría de la medida, puede consultar el libro de Bogachev [4].

Definición 1.6. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $p \in [1, \infty[$

1. Definimos el conjunto

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} |\ f \text{ es } \mu\text{-medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

si $p = \infty$

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} |\ f \text{ es } \mu\text{-medible y } \exists C > 0,\ |f(x)| < C, \text{ c.t.p. de } X \}$$

2. El conjunto $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ es un espacio vectorial con la suma y producto por un escalar usual. Definimos el funcional $\|\cdot\|_p$ mediante

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq \text{p} < \infty$$

si $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{C > 0,\ |f(x)| < C \ \text{ c.t.p. de } X\}$$

Los conjuntos $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ son espacios vectoriales, sin embargo $\|f\|_p$ y $\|f\|_\infty$ no satisfacen el ítem 2 de la definición 1.1 de espacios vectoriales, en efecto, $1_{\{0\}}$ función característica en 0 definido como

$$1_{\{0\}} = \begin{cases} 1,\ x = 0 \\ 0,\ x \neq 0 \end{cases}$$

tiene por norma igual a cero, pero es diferente a la función nula.
Debido a esto, sobre el espacio $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ se introduce una relación de equivalencia:

$$\text{Dados } f, g \in \mathcal{L}^p(X,\mu), f \sim g \text{ si, solo si } f = g \ \text{ c.t.p. de } X.$$

Se define la clase de equivalencia de una función $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, arbitraria, como:

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \,|\, f = g \ \text{ c.t.p. de } X\}$$

Definición 1.7. El conjunto cociente de $\mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$ lo denotamos como $L^p(X,\mu)$, es decir

$$L^p(X,\mu) = \{[f] \,|\, f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)\}$$

y si $p = \infty$

$$L^\infty(X,\mu) = \{[f] \,|\, f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)\}$$

Denotaremos al conjunto $L^p(X,\mu)$ como simplemente $L^P(X)$ cuando no haya distinción en su medida ni sobre el dominio definido. Luego, con esta notación podemos definir ahora los espacios L^p

Definición 1.8. Sea $p \in [1,\infty\rangle$, el conjunto

$$L^p(X) = \left\{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty\right\}$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ f \text{ es medible y } \exists C > 0,\ |f(x)| < C \ \text{ c.t.p de X}\}$$

Teorema 1.1. *El conjunto L^p es un espacio vectorial normado, cuya norma $\|\cdot\|_p$ es definida como*

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f(x)|d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

y $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{C \mid |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. de } X\}$$

Demostración: Ver en Brezis [5] □

Teorema 1.2. *El espacio $L^p(X)$ es de Banach con la norma $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$ para $p = \infty$*

Demostración: ver en Brezis [5] □

Un caso particular podemos observar para $p = 2$ ya que además de ser normado es un espacio con producto interno el cual es definido como

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)g(x)d\mu$$

y junto a la norma que esta induce se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *El espacio $L^2(X)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración: ver Kolgomorov [15]. □

Además de la convergencia usual de funciones μ-medibles, es conveniente introducir unas definiciones de convergencia en medida y puntual, estas seran de gran utilidad en la sección 2.2.

Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ con μ no negativa. Se dice que una propiedad de puntos en X se cumple casi siempre en X si el conjunto $Z \in \mathcal{A}$ en donde todos los puntos de X, la propiedad no es satisfecha , tiene medida cero.

Lo dicho anteriormente aplicado a la propiedad de convergencia de funciones tenemos.

Definición 1.9. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y una sucesión de funciones μ-medible f_n en X.
Decimos que la sucesión $(f_n)_n$ converge casi siempre en X a una función f $\mu-$medible si

$$\mu(x \in X| \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)) = 0$$

Definición 1.10. Supongamos que tenemos un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ con una medida μ finita y una sucesión de funciones μ-medibles f_n.
Decimos que la sucesión $(f_n)_n$ converge en medida μ a una función $\mu-$medible f si para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \mu(x| \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon) = 0$$

Teorema 1.4. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con μ finito. Si la sucesión $(f_n)_n$ de funciones $\mu-$medibles converge casi siempre a f una función $\mu-$medible, entonces $(f_n)_n$ converge en medida.*

Demostración. Ver Bogachev [4]. □

Convergencia casi siempre no implica convergencia en medida necesariamente, ejemplo es la siguiente sucesión de funciones

$$f_n(x) = 1_{\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right]}(x), \text{ donde } n = 2^k + j - 1, \text{ con } 1 \leq j \leq 2^k$$

cuya demostración la presentaremos con mas detalle en la sección 2.2.

1.3. Teorema de la representación de Riesz

En esta sección veremos un resultado que está relacionado a un teorema de caracterización de espacios de funciones de este trabajo.
Sea H un espacio de Hilbert, una función f real definida en H es llamada funcional lineal si

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in H, \, \lambda \in \mathbb{R}$$

El siguiente teorema muestra que todo funcional lineal real en un espacio de Hilbert queda determinado por el producto interno y un único vector de H.

Teorema 1.5. *(**Teorema de la representación de Riesz-Fréchet**). Para cada φ, un funcional lineal en un espacio de Hilbert H, existe un único vector $v \in H$ tal que*

$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle, \ \forall u \in H$$

Demostración: Ver Brezis [5]

1.4. Funciones absolutamente continuas

Definición 1.11. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* en $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ familia de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos contenidos en $[a, b]$:

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

Proposición 1.6. *Una función absolutamente continua en el intervalo $[a, b]$ es uniformemente continua en $[a, b]$.*

Demostración. Sean $a_0, b_0 \in (a,b)$, sin pérdida de generalidad supongamos $a_0 < b_0$ se tiene que el intervalo (a_0, b_0) está contenido en $[a,b]$
Sea $\varepsilon > 0$, por la continuidad absoluta existe, $\delta > 0$ tal que si $|b_0 - a_0| < \delta$ implica que $|f(b_0) - f(a_0)| < \varepsilon$ es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 : \text{ si } |b_0 - a_0| < \delta \Rightarrow |f(b_0) - f(a_0)| < \varepsilon$$

Por lo tanto f es uniformemente continua en el intervalo $[a,b]$, luego f es continua $[a,b]$. □

La proposición 1.6 nos da a entender que las funciones absolutamente continuas en $[a,b]$ están incluidas dentro del conjunto de las funciones uniformemente continuas en $[a,b]$, sin embargo lo contrario no es satisfecha y como ejemplo tenemos a la función *escalera de cantor*, descrita en la página 385 en Kolmogorov [15].

Proposición 1.7. *Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces f es absolutamente continua.*

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$, si en el caso que $M = 0$ se tiene que la función es constante, luego tomando $\delta = \varepsilon$ se sigue el resultado fácilmente.

Si $M > 0$ tomemos $\delta = \varepsilon / M$.

Consideremos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ una familia de intervalos abiertos contenidos en $[a,b]$ disjuntos dos a dos tal que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$.
Por el teorema del valor medio en (a_k, b_k), se tiene

$$|f(b_k) - f(a_k)| = |f'(\xi_k)||b_k - a_k| \leq M(b_k - a_k)$$

donde $\xi_k \in (a_k, b_k) \subset [a,b]$,entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leq M \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < M\delta = M\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon$$

Entonces f es absolutamente continua en $[a,b]$. □

Cololario 1. *Si f' es continua en $[a,b]$, entonces f es absolutamente continua en $[a,b]$*

Demostración.
De la continuidad de f' en $[a,b]$, tenemos que f' es acotada en $[a,b]$, es decir existe $M \geq 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$, para todo $x \in [a,b]$,luego de la proposición 1.6 se tiene la continuidad absoluta de f. □

Lema 1.2. *Si f es una función integrable según Lebesgue en un conjunto A, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\left| \int_E f(x) d\mu \right| < \varepsilon$$

para cualquier conjunto medible $E \subset A$ tal que $\mu(E) < \delta$.

Demostración. Ver Kolmogorov [15] pag. 342

Proposición 1.8. *Si la función f es μ-integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_{[a,x]} f(t) d\mu$ es absolutamente continua en $[a, b]$*

Demostración.
Sea $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ una familia finita de intervalos abiertos disjuntos dos a dos en $[a, b]$.
Como f es μ-integrable, por el lema anterior, para $\varepsilon > 0$ arbitrario y $E = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces

$$\left| \int_E f(t) d\mu \right| < \varepsilon, \quad \text{donde } E = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$$

Si $\sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i) < \delta$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{[a,b_k]} f(t) d\mu - \int_{[a,a_k]} f(t) d\mu \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{[a,a_k]} f(t) d\mu + \int_{[a_k,b_k]} f(t) d\mu - \int_{[a,a_k]} f(t) d\mu \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{[a_k,b_k]} f(t) d\mu \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k]} |f(t)| d\mu \\
&= \int_{\bigcup_{k=1}^{n} (a_k,b_k)} |f(t)| d\mu = \int_E |f(t)| d\mu < \varepsilon \qquad \text{(Lema 1.2 a } |f|)
\end{aligned}$$

Es decir

$$\sum_{k=1}^{n} |F(a_k) - F(b_k)| < \varepsilon$$

Luego $F(x) = \int_{[a,x]} f(t) d\mu$ es absolutamente continua en $[a, b]$. □

Capítulo 2

Espacios de funciones con núcleo reproductor.

2.1. Núcleo reproductor de un espacio vectorial de funciones

Consideremos un conjunto E no vacío, para identificar al campo $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ usaremos el símbolo $\mathbb{K}$ y al conjunto de funciones complejas o reales definidas en E, por $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$.
Con la adición $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y el producto por un escalar $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$, donde $\lambda \in \mathbb{K}$, el conjunto $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Definición 2.1. Un subespacio vectorial $\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ y completo será denominado *Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductor*, si para cada $x \in E$ existe una función $R_x \in \mathcal{H}$ de tal forma que para todo $f \in \mathcal{H}$ se cumple la siguiente propiedad a la cual denominamos *propiedad reproductora* o *propiedad reproductiva*

$$\langle f, R_x\rangle_{\mathcal{H}} = f(x) \tag{2.1}$$

además, la función R_x es llamada *Núcleo Reproductor* de $\mathcal{H}$.

Se observa que de la definición, cada función R_x depende de $x \in E$, es decir, para cada $x \in E$ hay un núcleo reproductor.

Ejemplo 2.1. Sea $E = \{1, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ y a cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ le asociamos una función

$$f^x : E \to \mathbb{R}$$
$$f^x(i) = x_i$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y x_i es la i-ésima coordenada de x.
Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todas estas funciones, es decir $\mathcal{H} = \{f^x : E \to \mathbb{R} |\, x \in \mathbb{R}^n\}$, definimos

$$\langle f^x, f^y \rangle_{\mathcal{H}} := \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.2}$$

Debido a que el lado derecho de (2.2) resulta ser el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ define un producto interno en $\mathcal{H}$.
A partir de (2.2) podemos definir una norma en $\mathcal{H}$ como

$$\|f^x\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle f^x, f^x \rangle_{\mathcal{H}}} = \|x\|_{\mathbb{R}^n} \tag{2.3}$$

Además tengamos en cuenta que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$f^{x+y}(i) = (x+y)_{(i)} = x_i + y_i = f^x(i) + f^y(i),\ \forall i \in E$$

es decir $f^{x+y} = f^x + f^y$ y por tanto

$$\|f^x + f^y\|_{\mathcal{H}} = \|x + y\|_{\mathbb{R}^n} \tag{2.4}$$

Ahora probaremos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, para esto consideremos una sucesión $(f^{x_k})_k$ en $\mathcal{H}$ que sea de Cauchy, siendo $(x_k)_k$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$, es decir

$$(f^{x_k})_k = (f^{x_1}, f^{x_2}, \dots, f^{x_k}, \dots)$$

Como la sucesión es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, m > N$ entonces $\|f^{x_k} - f^{x_m}\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$.
De (2.4) tenemos que para cualquier natural k y m se cumple

$$\|f^{x_k} - f^{x_m}\|_{\mathcal{H}} = \|x_k - x_m\|_{\mathbb{R}^n}$$

Luego si $k, m > N$ deducimos que $\|x_k - x_m\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$.
Así hemos obtenido que la sucesión $(x_k)_k$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ y por tanto tiene límite en este espacio, sea x tal límite.
Luego como este límite x es elemento de $\mathbb{R}^n$ podemos determinar también una función f^x que pertenece a $\mathcal{H}$, ahora probaremos que $(f^{x_k})_k$ converge a f^x.

Dada la convergencia de la sucesión $(x_k)_k$ a x, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de tal manera que si $k > N_0$ entonces $\|x_k - x\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$

De (2.4) se sigue que $\|f^{x_k} - f^x\|_{\mathcal{H}} = \|x_k - x\|_{\mathbb{R}^n}$, entonces $\|f^{x_k} - f^x\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ para $k > N_0$. Y así probamos que $(f^{x_k})_k$ converge a f^x.
Por lo tanto $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

Ahora busquemos un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$, sea $m \in E$ y consideremos el vector canónico $e_m \in \mathbb{R}^n$ donde la m-ésima coordenada es 1 y las demás son cero, entonces este define una función

$$f^{e_m} : E \to \mathbb{R}$$

$$f^{e_m}(i) = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases} \tag{2.5}$$

Ahora mostraremos que verifica la definición de núcleo reproductor.
Es claro que $f^{e_m} \in \mathcal{H}$, sea $x \in \mathbb{R}^n$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y ahora consideremos $f^x \in \mathcal{H}$, se tiene

$$\langle f^x, f^{e_m} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, e_m \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \cdots + x_m \cdot 1 + \ldots x_n \cdot 0 = x_m = f^x(m)$$

Es decir

$$\langle f^x, f^{e_m} \rangle = f^x(m)$$

Por lo tanto f^{e_m} es un Núcleo Reproductor de $\mathcal{H}$ y así es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor.
Supongamos que una función en $\mathcal{H}$ satisface la propiedad reproductiva esto es, una función $R_j \in \mathcal{H}$ para cada $j \in E$, por la definición de $\mathcal{H}$ denotemos esta función como R^v, donde $v \in \mathbb{R}^n$.
Si $R_j = f^v$ es núcleo reproductor entonces para todo $f^x \in \mathcal{H}$, con $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\langle f^x, f^v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = f^x(j) = x_j$$

es decir,

$$\langle x, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_j$$

Esto es, $v = e_j$ para cada $j \in E$, es decir que $f^v = f^{e_j}$.
Así hemos probado que si una función $R_j = f^v$ es núcleo reproductor en $\mathcal{H}$, este tiene la forma de (2.5).

Ejemplo 2.2. Sea l^2 el espacio de Hilbert, ver en [16], de las sucesiones de números reales cuadrado sumables, es decir

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{R} \,|\, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

Y junto al producto interno definido como

$$\langle (x_n)_n, (y_n)_n \rangle_{l^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{2.6}$$

y que a raíz de (1.5) obtenemos la norma

$$\|(x_n)_n\|_{l^2} = \sqrt{\langle (x_n)_n, (x_n)_n \rangle_{l^2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2}$$

Para cada $x = (x_n)_n \in l^2$ definimos $f^x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como $f^x(i) = x_i$.
Y denotemos al conjunto de todas estas funciones como

$$\mathcal{H} = \{ f^x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | x \in l^2 \}$$

Definimos en $\mathcal{H}$ la siguiente relación

$$\langle f^{(x_n)_n}, f^{(y_n)_n} \rangle_{\mathcal{H}} := \langle (x_n)_n, (y_n)_n \rangle_{l^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{2.7}$$

Como vemos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ es un producto interno de $\mathcal{H}$ pues esta resulta ser la misma relación de (2.5), es decir que (2.6) hereda las propiedades del producto interno de l^2.
De (2.6) obtenemos una norma para $\mathcal{H}$

$$\|f^{(x_n)_n}\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{\langle f^{(x_n)_n}, f^{(x_n)_n} \rangle_{\mathcal{H}}} = \langle (x_n)_n, (x_n)_n \rangle_{l^2} = \|(x_n)_n\|_{l^2} \tag{2.8}$$

Además tengamos en cuenta que si $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in l^2$ obtenemos

$$f^{x+y}(i) = (x+y)_{(i)} = x_i + y_i = f^x(i) + f^y(i), \forall i \in \mathbb{N}$$

es decir $f^{x+y} = f^x + f^y$ y por tanto

$$\|f^x + f^y\|_{\mathcal{H}} = \|x + y\|_{\mathbb{R}^n} \tag{2.9}$$

Para probar la completitud de $\mathcal{H}$ tomemos sucesión en este espacio que sea de Cauchy

$$(f^{x_1}, f^{x_2}, \dots, f^{x_n}, \dots) = (f^{x_n})_n$$

donde $x_n = (\xi_m^n)_m = (\xi_n^1, \xi_n^2, \dots, \xi_n^m, \dots) \in l^2$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $l, k > N$, entonces $\|f^{x_l} - f^{x_k}\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$
De (2.9) obtenemos que

$$\|f^{x_l} - f^{x_k}\|_{\mathcal{H}} = \|x_l - x_k\|_{l^2}$$

para todo natural l, k y como $\|f^{x_l} - f^{x_k}\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ con $l, k > N$, entonces

$$\|x_l - x_k\|_{l^2} < \varepsilon$$

para $l, k > N$.

En estas condiciones hemos probado que la sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy en l^2 y por su completitud converge a un elemento de l^2 al que lo vamos a denotar por x.
Ahora para este límite x se puede asociar una funcion f^x que pertenece a $\mathcal{H}$ y demostraremos que $(f^{x_n})_n$ converge a f^x.

Por la convergencia de $(x_n)_n \in l^2$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_0$, entonces $\|x_n - y\|_{l^2} < \varepsilon$.
De (2.9) tenemos que $\|f^{x_n} - f^x\|_{\mathcal{H}} = \|x_n - x\|_{l^2}$ para cualquier n natural y como $\|x_n - x\|_{l^2} < \varepsilon$ para $n > N_0$ entonces $\|f^{x_n} - f^x\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ es decir $(f^{x_n})_n$ converge a f^x.
Por tanto tenemos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

Ahora busquemos un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$, para $m \in \mathbb{N}$ sea $e_m = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ donde 1 está en la posición m-ésima, $e_m \in l^2$

$$f^{e_m} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f^{e_m}(i) = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases}$$

Ahora mostraremos que esta función verifica la definición de núcleo reproductor.

Es claro que $f^{e_m} \in \mathcal{H}$.

Sea $f^x \in \mathcal{H}$ arbitrario, verifiquemos la propiedad reproductora
$\langle f^x, f^{e_m} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle (x_n)_n, (e_m)_m \rangle_{l^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = x_1 \cdot 0 + \cdots + x_{m-1} \cdot 0 + x_m \cdot 1 + \cdots = x_m = f^x(m)$,
es decir

$$\langle f^x, f^{e_m} \rangle_{\mathcal{H}} = f^x(m)$$

Por tanto f^{e_m} es un Núcleo Reproductor de $\mathcal{H}$.

Ejemplo 2.3. Sea el espacio $L^2[a,b]$ de las funciones medibles cuadrado integrables, ver [4], es decir

$$L^2[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \int_{[a,b]} f^2 d\mu < \infty \right\}$$

Y consideremos el conjunto $\mathcal{K} = \{A \subset [a,b] \mid A \text{ es } \mu\text{-medible}, \mu(A) > 0\}$.
Para cada $f \in L^2[a,b]$ definimos una función

$$\phi^f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$$
$$\phi^f(A) = \int_A f(x) d\mu$$

Denotemos al conjunto de estas funciones como $\mathcal{H}$, es decir

$$\mathcal{H} = \{\phi^f : \mathcal{K} \to \mathbb{R} | f \in L^2[a,b]\}$$

y definimos un producto interno
Si $f_1, f_2 \in L^2[a,b]$

$$\langle \phi^{f_1}, \phi^{f_2} \rangle_{\mathcal{H}} := \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2[a,b]} \tag{2.10}$$

Y de (2.10) tenemos la norma en $\mathcal{H}$

$$\|\phi^f\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{\langle \phi^f, \phi^f \rangle_{\mathcal{H}}} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2[a,b]}} = \|f\|_{L^2[a,b]} \tag{2.11}$$

Además tengamos en cuenta que

$$\phi^{f_1+f_2}(A) = \int_A (f_1 + f_2) d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu = \phi^{f_1}(A) + \phi^{f_2}(A)$$

es decir

$$\phi^{f_1} + \phi^{f_2} = \phi^{f_1+f_2}$$

Por lo tanto de esta última relación tenemos

$$\|\phi^{f_1} + \phi^{f_2}\|_{\mathcal{H}} = \|f_1 + f_2\|_{L^2[a,b]} \tag{2.12}$$

Ahora para probar la completitud de $\mathcal{H}$, tomemos una sucesión $(\phi^{f_n})_n$ de Cauchy en este espacio donde $f_n \in L^2[a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|\phi^{f_n} - \phi^{f_m}\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$$

de (2.12) tenemos $\|\phi^{f_n} - \phi^{f_m}\|_{\mathcal{H}} = \|f_n - f_m\|_{L^2[a,b]}$ para $m, n > N$ luego $\|f_n - f_m\|_{L^2[a,b]} < \varepsilon$ y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se tiene $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $L^2[a,b]$ por tanto converge a un elemento de este espacio al cual denotaremos por f.
Ahora demostremos que $(\phi^{f_n})_n$ converge a la función $\phi^f \in \mathcal{H}$.

Como $(f_n)_n$ converge a f entonces para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $\|f_n - f\|_{L^2[a,b]} < \varepsilon$, luego por (2.12) se tiene

$$\|\phi^{f_n} - \phi^f\|_{\mathcal{H}} = \|f_n - f\|_{L^2[a,b]} < \varepsilon$$

Luego $\mathcal{H}$ es espacio de Hilbert.

Definamos un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$, sea $A \in \mathcal{K}$ y consideremos 1_A la función característica en A, que es 1 cuando $x \in A$ y 0 cuando $x \notin A$.
Luego al ser $1_A \in L^2[a,b]$ define la función en $\mathcal{H}$.

$$\phi^{1_A} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$$

$$B \to \phi^{1_A}(B) = \int_B 1_A d\mu = \begin{cases} 0, & A \cap B = \emptyset \\ \mu(A \cap B), & A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

Se tiene que como ϕ^{1_A}, definida de esta manera, pertenece a $\mathcal{H}$.
Para cualquier $f \in L^2[a,b]$, verifiquemos que ϕ^{1_A} satisface la propiedad reproductiva

$$\langle \phi^f, \phi^{1_A} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{[a,b]} f(x) 1_A d\mu = \int_{([a,b]-A)\cup A} f(x) 1_A d\mu = \int_{[a,b]-A} f(x) 1_A d\mu + \int_A f(x) 1_A d\mu = \int_A f(x) d\mu$$

Así

$$\langle \phi^f, \phi^{1_A} \rangle_{\mathcal{H}} = \phi^f(A), \ \ \forall \phi^f \in \mathcal{H}$$

Luego para cada $A \in \mathcal{K}$ tenemos que ϕ^{1_A} es un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$.

Ejemplo 2.4. Sea $E = [0,1]$ y

$$\mathcal{H} = \{\varphi : E \to \mathbb{C} \ \mid \ \varphi(0) = 0, \ \varphi \text{ es absolutamente continua}, \ \varphi' \in L^2[0,1]\}$$

donde φ' es la derivada de φ en casi todo punto de $[0,1]$.
Este espacio $\mathcal{H}$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{[0,1]} f'(x) \overline{g'(x)} d\mu$$

es un espacio de Hilbert conocido como el espacio de Sobolev, denotado como $W^{1,2}[0,1]$.
Para $y \in E$ la función R_y definida como

$$R_y : [0,1] \to \mathbb{C}$$

$$x \to R_y(x) = min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

está en $\mathcal{H}$ pues $R_y(0) = 0$, la derivada viene dada por

$$R'_y : [0,1]\backslash\{y\} \to \mathbb{C}$$
$$x \to R'_y(x) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & y < x \end{cases}$$

Notamos que la derivada de R_y es la función característica $1_{[0,y\rangle}$ que es integrable y también

$$min\{x, y\} = R_y(x) = \int_0^x R'_y(t)d(t)$$

entonces R_y es absolutamente continua y $R'_y \in L^2[0,1]$, entonces $R_y \in \mathcal{H}$.
Ahora mostraremos que R_y es un núcleo reproductor en este espacio, en efecto sea $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle f, R_y\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{[0,1]} f'(x)R'_y(x)dx \\ &= \int_{[0,y[} f'(x)R'_y(x)dx + \int_{]y,1]} f'(x)R'_y(x)dx \\ &= \int_{[0,y[} f'(x)dx \\ &= f(y) - f(0) = f(y) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.5. (Espacio de Hardy)
El espacio $\mathcal{H}$ de las funciones complejas de variable compleja que son analíticas en el disco de radio r y centro en el origen$B_r(0)$ y continuas en $z = r$, cuya norma se define como:

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(r\exp(i\theta)|)^2 d\lambda(\theta)$$

El núcleo reproductor llamado kernel de Szegö es

$$R_y(x) = \frac{r}{2\pi}(r^2 - yx)^{-1}$$

Puede encontrar este ejemplo en [18]

Ejemplo 2.6. (Espacio de Bergman [3])
El espacio $\mathcal{H}$, de las funciones complejas analíticas y cuadrado integrables en un disco unitario $\mathcal{S}$ del plano complejo. Con norma:

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{S}} \left|u(x+iy)^2 d\lambda(x)d\lambda(y)\right|$$

posee el núcleo reproductor

$$K_z(w) = \frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}$$

Ejemplo 2.7. (Espacio de los núcleos de Dirichlet [29])
En este ejemplo $\mathcal{H}$ es el espacio de los polinomios trigonométricos

$$u(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \exp(int)$$

cuya norma es

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\langle -\pi,\pi \rangle} u^2(t) d\lambda(t)$$

posee el núcleo reproductor

$$R_s(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)(t-s)}{2\pi \sin\left((t-s)/2\right)}$$

2.2. El espacio de Hilbert $L^2[0,1]$ no admite núcleo reproductor

En el ejemplo 2.3 se vio que a través de las funciones $f \in L^2[0,1]$ se puede construir un espacio de Hilbert que admita núcleo reproductor. Ahora se expone el siguiente problema, ¿Será que el espacio $L^2[0,1]$ posee esta propiedad? En esta sección veremos que esto es imposible, a través del resultado que vamos a deducir de un teorema en el artículo publicado por A. Bukhvalov en [8], este problema está relacionado con la siguiente definición.

Definición 2.2. Un operador lineal $U : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ es llamado operador integral en $L^2[0,1]$, o también diremos que U posee representación integral si existe una función real $\mu-$ medible K definido en $[0,1] \times [0,1]$ tal que

$$U_f(x) = \int_{[0,1]} K(x,t) f(t) d\mu \tag{2.13}$$

En 1935 Jhon von Neumann en [30] propone un problema sobre las condiciones que debe admitir un operador lineal en $L^2[0,1]$ para que tenga representación integral (2.13) en este mismo espacio. En 1974 A. Bukhvalov brinda una solución a este problema en [6], a través de sucesiones en $L^2[0,1]$, anunciamos la siguiente caracterización.

Teorema 2.1. *(Bukhvalov) Un operador lineal $U : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ es un operador integral si y solo si para toda sucesión $(f_n)_n$ en $L^2[0,1]$, tal que $0 \leq f_n \leq f \in L^2[0,1]$ y $f_n \to 0$ en medida, entonces $U_{f_n} \to 0$ casi siempre.*

La demostración de este teorema la proporcionó A. Bukhvalov en los artículos [6] y [7].
Para empezar a dar solución al problema expuesto al inicio de esta sección, el operador identidad I en $L^2[0,1]$ será fundamental para llegar al objetivo, ya que si el operador $I : L^2[0,2] \to L^2[0,1]$ definido como $I_g(x) = g(x)$ tiene representación integral, es decir

$$I_g(x) = g(x) = \int_{[0,1]} K(x,t) g(t) d\mu, \quad \forall g \in L^2[0,1]$$

Para cada $x \in [0,1]$, definimos

$$\begin{aligned} K_x : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ y &\to K_x(y) = K(x,y) \end{aligned}$$

luego con la notación K_x y la representación integral de I, en el supuesto que exista tal representación, toma la forma

$$I_g(x) = g(x) = \int_{[0,1]} K_x(t) g(t) d\mu, \quad \forall g \in L^2[0,1] \tag{2.14}$$

es decir que (2.14) toma la forma de (2.1) de la definición de núcleo reproductor.
De acuerdo al Teorema 2.1, I admite representación integral, esto es, tiene la forma (2.13)

si y solo si, para toda sucesión de funciones $(f_n)_n$ en $L^2[0,1]$ tal que, $0 \leq f_n \leq f \in L^2[0,1]$, sea convergente a 0 en medida y $I_{f_n} = f_n$ converja a 0 casi siempre.

Sin embargo, vamos a ver que para el operador identidad en $L^2[0,1]$, la necesidad del Teorema 2.1 no es satisfecha, para esto vamos a construir una sucesión de funciones en $L^2[0,1]$ de manera que converja a cero en medida pero que no casi siempre.

Dos lemas serán de mucha ayuda para la construcción de la sucesión ya mencionada.
Vamos a empezar con el siguiente lema que nos da como resultado que el intervalo $[0,1]$ se puede expresar como partición de subintervalos, el principio arquimediano, como puede ver en V. Zorich en [34], nos ayudará para demostrarlo.

Lema 2.1. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, el intervalo $[0,1]$ se puede expresar como*

$$[0,1] = \bigcup_{j=1}^{2^k} \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right]$$

Presentamos aquí algunas subdivisiones del intervalo $[0,1]$ para $k = 1, 2, 3$

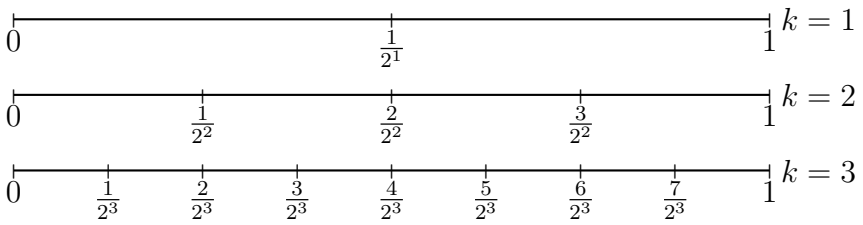

Figura 2.1

Demostración. La prueba la haremos por doble inclusión y empecemos por tomar $x \in [0,1]$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, 0 pertenece al intervalo $[0, \frac{1}{2^k}]$, que de acuerdo a la construcción se da con $j = 1$, así mismo 1 pertenece al intervalo $[\frac{2^k-1}{2^k}, 1]$ para el caso de $j = 2^k$.
Ahora consideremos $x \in \langle 0,1 \rangle$ y como $k \in \mathbb{N}$ por el principio arquimediano, como se ve en el texto del Zorich [34], existe un único número natural j de manera que

$$\frac{j-1}{2^k} \leq x < \frac{j}{2^k} \tag{2.15}$$

La desigualdad en (2.16) manifiesta que x pertenece al intervalo $[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\rangle$. Ahora resta probar que $j \leq 2^k$ para que $[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\rangle \subset [0,1]$.
Si tuviéramos lo contrario, es decir si $j > 2^k$ entonces existe un número natural p, tal que $j = 2^k + p$ y usaremos esto al lado izquierdo de (2.16):

$$\frac{j-1}{2^k} = \frac{2^k + p - 1}{2^k} = 1 + \frac{p-1}{2^k} \geq 1$$

Ahora se tiene que

$$1 \leq \frac{j-1}{2^k} \leq x$$

esto contradice el hecho de que x está en $\langle 0, 1\rangle$, luego se debe tener $j \leq 2^k$.
Por lo tanto si $x \in [0, 1]$, existe un número natural j tal que

$$x \in \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right] \subset [0, 1]$$

donde $1 \leq j \leq 2^k$.

Ahora la inclusión $\bigcup_{j=1}^{2^k} \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right] \subset [0, 1]$ es inmediata desde que $\frac{j}{2^k} \leq 1$. □

Lema 2.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un único $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $n = 2^k + j - 1$ donde $1 \leq j \leq 2^k$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, desde que $n \geq 1$ tenemos que el siguiente conjunto

$$A = \{2^m \in \mathbb{N} \mid 2^m \leq n,\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

es no vacío y además como A está acotado superiormente posee un máximo, es decir existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que 2^k es maximo de A y $2^k \leq n$. De esta última desigualdad se tiene que existe un número entero $j' \geq 0$ tal que

$$n = 2^k + j' \tag{2.16}$$

No es posible que $j' \geq 2^k$ porque si así lo fuera, tendríamos que $2^k + j' \geq 2^k + 2^k$, luego por (2.16) se tiene $n \geq 2^{k+1}$, sin embargo esto contradice que 2^k sea máximo de A.
Por lo tanto se tiene que

$$n = 2^k + j', \quad 0 \leq j' \leq 2^k - 1 \tag{2.17}$$

El resultado lo obtenemos haciendo $j = j' + 1$ luego se tiene lo siguiente

$$n = 2^k + j - 1, \;\; 1 \leq j \leq 2^k$$

□

Estos lemas son cruciales para explicar como es la construcción de la sucesión de funciones que veremos en la demostración del siguiente teorema, que viene a ser el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.2. *El espacio $L^2[0, 1]$ no admite núcleo reproductor.*

Demostración.
Supongamos que el espacio $L^2[0,1]$ admita núcleo reproductor, esto es para cada $x \in [0,1]$ existe una función $R_x \in L^2[0,1]$ tal que

$$\langle f, R_x \rangle_{L^2[0,1]} = f(x) \tag{2.18}$$

es decir

$$\int_{[0,1]} R_x(t) f(t) d\mu = f(x)$$

Como habíamos expuesto antes que $L^2[0,1]$ admita núcleo reproductor es equivalente a que el operador lineal I identidad en este mismo espacio tenga una representación integral.
A seguir vamos a presentar una sucesión de funciones en $L^2[0,1]$ que no satisfaga la equivalencia en el Teorema de Bukhvalov.
Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define

$$f_n(x) = 1_{\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right]}(x), \text{ donde } n = 2^k + j - 1, \text{ con } 1 \leq j \leq 2^k \tag{2.19}$$

En la figura 2.2 se detalla de como es la construcción de las funciones f_n. El Lema 2.1 define el dominio de cada función f_n para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mientras que el Lema 2.2 asegura que el índice n de f_n en (2.19) sea expresado de manera única para todo k y además cada color determina en donde f_n toma el valor de 1.

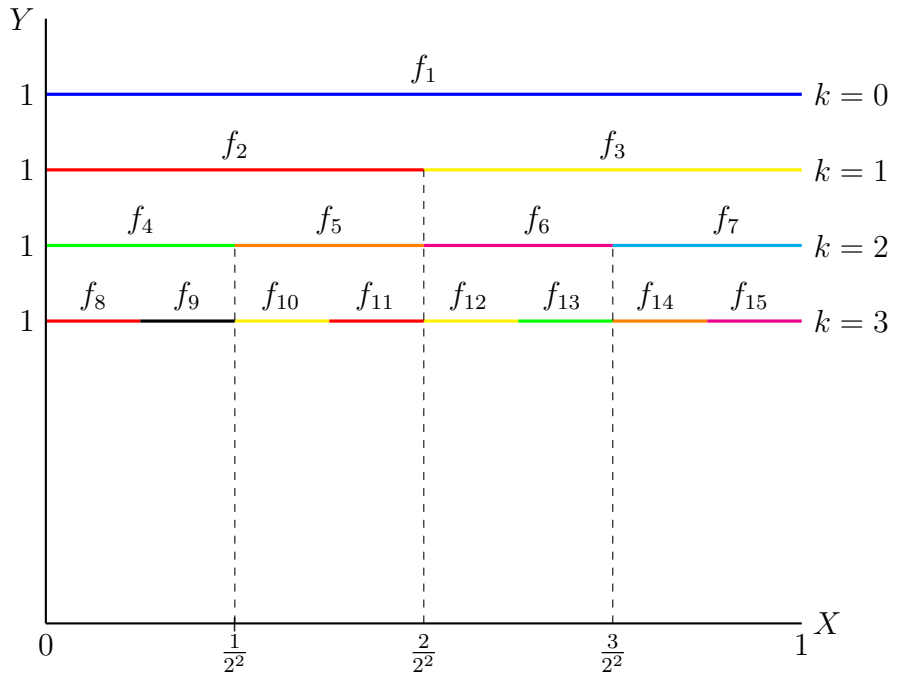

Figura 2.2: Gráficas de la sucesión f_n

Demostraremos que la sucesión definida en (2.19) converge en medida a cero y no converge casi siempre a cero.
Para la convergencia a 0 en medida debemos probar que para todo ε positivo:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in [0,1] \mid |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\} = 0$$

Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se puede considerar $E_n = \{x \in [0,1] |\ \ f_n(x) \geq \varepsilon\}$ ya que por (2.19), $n = 2^k + j - 1$, demostraremos que $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$

Si $\varepsilon > 1$, entonces el conjunto $E_n = \emptyset$ para todo n, ya que $f_n(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$. y así $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$

Consideramos ahora $\varepsilon \leq 1$, vamos a mostrar que $E_n = [\frac{j}{2^k}, \frac{j-1}{2^k}]$, por doble inclusión.
Si $x \in E_n$ entonces $f_n(x) \geq \varepsilon$, como ε es distinto de 0 y f_n solo toma valores 0 y 1, se concluye que $f_n(x) = 1$ luego $x \in [\frac{j}{2^k}, \frac{j-1}{2^k}]$. De manera inmediata se tiene que si $x \in [\frac{j}{2^k}, \frac{j-1}{2^k}]$, entonces $f_n(x) = 1 \geq \varepsilon$, luego $x \in E_n$.
Ahora como $E_n = [\frac{j}{2^k}, \frac{j-1}{2^k}]$ se tiene que

$$\mu(E_n) = \mu([\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]), \text{ entonces } \ \mu(E_n) = \frac{1}{2^k} \tag{2.20}$$

Luego como $n = 2^k + j - 1$, tenemos que si k tiende al infinito, entonces n tambien tiende al infinito es decir en (2.21) se toma límite n al infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$$

Por lo tanto ya se tiene que $(f_n)_n$ converge a cero en medida.

Ahora mostraremos que $(f_n)_n$ no converge a 0 casi siempre.
Sea $x \in [0,1]$, si $k \in \mathbb{N}$ entonces por el Lema 2.1 existe $j \in \mathbb{N}$, con $1 \leq j \leq 2^k$, de manera que $x \in [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}]$ y $f_n(x) = 1$ donde $n = 2^k + j - 1$ y al mismo tiempo existe $j' \neq j$ con $1 \leq j' \leq 2^k$ que cumpla que $f_m(x) = 0$ donde $m = 2^k + j' - 1$. Hemos probado así que para todo $k \in \mathbb{N}$ existen m, n índices tal que la sucesión definida en (2.19) tome valores 0 y 1, esto es la sucesión $(f_n)_n$ toma el valor de 0 y 1 para infinitos índices y para todo $x \in [0,1]$, esto quiere decir que

$$\{x \in [0,1] \mid (f_n(x))_n \text{ no converge})\} = [0,1]$$

luego la medida de los conjuntos son iguales

$$\mu\{x \in [0,1] \mid (f_n(x))_n \text{ no converge})\} = \mu([0,1]) = 1$$

Por lo tanto $(f_n)_n$ no converge a 0 casi siempre.
Así hemos construido una sucesión $(f_n)_n$ en $L^2[0,1]$ que converge 0 en medida y que no

converge casi siempre a 0, por lo tanto no se tiene la suficiencia del teorema de Bukhvalov y así el operador identidad I no tiene representación integral, contradiciendo lo que habíamos supuesto que $L^2[0,1]$ admite núcleo reproductor. $\square$

2.3. Propiedades fundamentales del núcleo reproductor

De ahora en adelante usaremos **EHNR** para nombrar a un espacio de Hilbert con núcleo reproductor.
Y para estas propiedades el espacio $\mathcal{H}$ se entenderá como el espacio de la familia de funciones complejas o reales definidas sobre un conjunto E no vacío.

Proposición 2.3. *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR, $y \in E$, la función R_y como en la definición 1.1, entonces*

$$R_y(x) = \overline{R_x(y)}, \qquad \forall x \in E \tag{2.21}$$

Esta propiedad es llamada simétrica conjugada del núcleo reproductor en $\mathcal{H}$.

Demostración.
Para cualquier $x \in E$ existe una función R_x que es núcleo reproductor, ya que $\mathcal{H}$ es EHNR.
Por la propiedad reproductora de R_x tenemos que

$$\langle R_y, R_x \rangle = R_y(x)$$

Por la propiedad del producto interno $\langle R_y, R_x \rangle = \overline{\langle R_x, R_y \rangle}$, entonces

$$\overline{\langle R_x, R_y \rangle} = R_y(x)$$

Y por la propiedad reproductora de R_y al lado izquierdo de la anterior identidad, tenemos

$$\overline{R_x(y)} = R_y(x)$$

□

Observación 2.1. En la identidad (2.21) las barra denota el conjugado de un número complejo, si $\mathcal{H}$ fuera un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, entonces simplemente se tendría $R_x(y) = R_y(x)$ para todo $x, y \in E$ el cual la propiedad pasaría a llamarse simetría del núcleo reproductor.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR, existe un único núcleo reproductor para cada $y \in E$.*

Demostración.
Sea R_y un núcleo reproductor, si existe otro núcleo reproductor denotado por R'_y, entonces probaremos que $R'_y = R_y$.
Para cualquier $x \in E$ existe R_x que es núcleo reproductor ya que $\mathcal{H}$ es EHNR.
Usando la propiedad reproductora de R_x

$$\langle R'_y, R_x \rangle = R'_y(x) \tag{2.22}$$

Por el conjugado complejo del producto interno y la propiedad reproductora de R'_y tenemos

$$\begin{aligned}\langle R'_y, R_x\rangle &= \overline{\langle R_x, R'_y\rangle} \\ &= \overline{R_x(y)} \\ &= R_y(x)\end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia de la proposición (2.1) y, por lo tanto, de (2.22) tenemos que

$$R'_y(x) = R_y(x), \forall x \in E.$$

□

Proposición 2.5. *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR, para todo núcleo reproductor R_x, donde $x \in E$, se tiene que $R_x(x) \geq 0$. Además $R_x(x) = 0$ si y sólo si $\mathcal{H} = \{\theta\}$, donde θ es la función nula de $\mathcal{H}$.*

Demostración.
Desde que la norma de $\mathcal{H}$ es no negativa, tenemos que para todo $x \in E$

$$0 \leq \|R_x\|^2_{\mathcal{H}} = \langle R_x, R_x\rangle \tag{2.23}$$

donde R_x es núcleo reproductor, luego por la propiedad reproductiva de R_x tenemos que

$$\langle R_x, R_x\rangle = R_x(x) \tag{2.24}$$

entonces de (2.23) y (2.24) ya podemos ver que $R_x(x)$ no es negativo.
Ahora veamos que si para cualquier núcleo reproductor R_x, donde $x \in E$ satisface $R_x(x) = 0$, entonces mostraremos que el espacio de Hilbert de funciones $\mathcal{H}$ solamente tiene como único elemento a la función nula. De $R_x(x) = 0$ y (2.24) tenemos que $\langle R_x, R_x\rangle = 0$ por tanto $R_x = \theta$.
Entonces para cualquier $f \in \mathcal{H}$

$$\langle f, R_x\rangle_{\mathcal{H}} = f(x)$$

Como R_x es la funcion nula entonces

$$f(x) = 0, \qquad \forall x \in X$$

Como f fue arbitrario tenemos que $\mathcal{H} = \{\theta\}$
Ahora si $\mathcal{H} = \{\theta\}$ con $\mathcal{H}$ como EHNR entonces para cualquier $x \in E$ el núcleo reproductor R_x es la función θ esto es $R_x(x) = 0$. □

Definición 2.3. Sean los conjuntos finitos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$ y $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \subset \mathbb{C}$, una función simétrica será llamada función definido positivamente si $R : E \times E \to \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(x_i, x_j)\overline{\xi_j}\xi_i \geq 0$$

Para cada $x \in E$, definimos

$$\begin{aligned} R_x : E &\to \mathbb{R} \\ y &\to R_x(y) = R(x,y) \end{aligned}$$

luego con la notación R_x podemos mostrar la siguiente proposición

Proposición 2.6. *Si $\mathcal{H}$ un EHNR entonces todo núcleo reproductor es definido positivamente, es decir para $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$ y $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \subset \mathbb{C}$ se tiene*

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{x_i}(x_j)\overline{\xi_j}\xi_i \geq 0$$

donde R_{x_i} es núcleo reproductor para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración.
Desde que la norma de $\mathcal{H}$ es no negativa

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i R_{x_i} \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i R_{x_i}, \sum_{j=1}^{n} \xi_j R_{x_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi_j} \langle R_{x_i}, R_{x_j} \rangle && \text{(Linealidad de } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi_j} R_{x_i}(x_j) && \text{(Propiedad Reproductiva de } R_{x_j}) \end{aligned}$$

Luego ya tenemos lo que queríamos demostrar. □
La siguiente proposición nos ayuda a determinar si un espacio de Hilbert de funciones posee núcleo de reproducción, es decir, si es EHNR.

Teorema 2.7. *Un espacio de Hilbert de funciones $\mathcal{H}$ es EHNR si, y sólo si para cualquier $x \in E$ el funcional lineal*

$$\begin{aligned} I_x : \mathcal{H} &\to \mathbb{K} \\ f &\to I_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

es acotado.

Demostración.
Si $\mathcal{H}$ es un EHNR demostraremos que el funcional $I_x : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ definido como $I_x(f) = f(x)$

es acotado para cualquier $x \in E$, en efecto.

$$\begin{aligned} |I(f)| &= |f(x)| \\ &= |\langle f, R_x\rangle_{\mathcal{H}}| && \text{(prop. reproductiva de } R_x) \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}}\|R_x\|_{\mathcal{H}} && \text{(desigualdad de Cauchy-Schwarz)} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}}\sqrt{\langle R_x, R_x\rangle} && \text{(identidad de la norma)} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}}\sqrt{R_x(x)} && \text{(prop. reprodcutiva de } R_x) \end{aligned}$$

Supongamos el caso que $\mathcal{H} \neq \{\theta\}$, de lo contrario $|I(f)| = 0$ y ya es acotada, luego $R_x(x) = M > 0$
por tanto $|I(f)| \leq M\|f\|_{\mathcal{H}}$

Ahora demostraremos que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones definidas en E, tal que para cualquier $x \in E$ el funcional lineal I_x es acotado, entonces $\mathcal{H}$ es un EHNR, en efecto.
Por el teorema de la representación de Riesz, para todo $x \in E$ el funcional lineal I_x se representa de la siguiente forma

$$I_x(f) = \langle f, z\rangle_{\mathcal{H}}, \forall f \in \mathcal{H} \tag{2.25}$$

donde $z \in \mathcal{H}$ es único y depende de I_x, es decir, que depende de la elección de $x \in E$, esto es, la función z que depende de x, y así podemos definirla como $z = R_x \in \mathcal{H}$ y así (2.25) se reescribe como

$$f(x) = \langle f, R_x\rangle, \forall f \in \mathcal{H}$$

Y así definido, R_x es un Núcleo Reproductor en $\mathcal{H}$. □

Continuando con el espacio $\mathcal{H}$ ejemplo 2.4, vamos a construir un espacio de Hilbert de funciones que no admita núcleo reproductor para cualquier elemento de $[0, 1]$. En dicho ejemplo teníamos que el conjunto

$$\mathcal{H} = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \varphi(0) = 0,\ \varphi \text{ es absolutamente continua},\ \varphi' \in L^2[0,1]\}$$

para $y \in [0, 1]$, la función R_y definida como

$$\begin{aligned} R_y : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ x &\to R_y(x) = min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2} \end{aligned}$$

es núcleo reproductor de $\mathcal{H}$
En primer lugar, veamos que la familia de funciones $\{R_y\}_{y\in E}$ es un conjunto linealmente independiente. Tomemos una combinación lineal finita de elementos en $\{R_y\}_{y\in E}$, es decir

$\{y_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]$. Además, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $y_i \leq y_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, 3 \ldots, n$. Consideremos escalares $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_{y_i} = 0$$

al derivar esta suma de funciones ya vimos que se obtiene una suma de funciones características, esto es

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i R'_{y_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{[0,y_i[} = 0$$

Si para cada $i = n, n-1, \ldots, 2, 1$ evaluamos en cada $x \in]y_{i-1}, y_i[$ entonces se anularán todas las funciones $R'_{y_{i-1}}$ y esto nos conduce a que $\alpha_i = 0$ para $i = n, n-1, \ldots, 2, 1$. Por tanto, se tiene la independencia lineal de $\{R_y\}_{y\in E}$.

Ahora denotemos por $\mathcal{H}_0$ al subespacio generado por $\{R_y\}_{y\in E}$ y consideremos a $\mathcal{S}$ el complemento algebraico de $\mathcal{H}_0$, esto es

$$\forall f \in \mathcal{H} : \ f = f_0 + s_0, \ \ f_0 \in \mathcal{H}_0, s_0 \in \mathcal{S}.$$

Definamos la función

$$\mathcal{I} : \mathcal{H} \to \mathcal{F}(E; \mathbb{C})$$

Para $f \in \mathcal{H}$, tenemos $f = f_0 + s_0$ con $f_0 \in \mathcal{H}_0$ y $s_0 \in \mathcal{S}$, puede ocurrir que $f_0 = 0$ y definimos $\mathcal{I}(f) = s_0$ y si $f_0 \neq 0$ entonces existen $\{a_i\}_{i=1}^n$ escalares y $\{x_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]$ tales que

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i R_{x_i}$$

y así definimos $\mathcal{I}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\cdot\, x_i) + s_0$

Por tanto tenemos

$$\mathcal{I}(f) = \begin{cases} s_0 & f = s_0, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\cdot\, x_i) + s_0, & f = \sum_{i=1}^{n} a_i R_{x_i} + s_0 \end{cases} \tag{2.26}$$

Observación. El punto $\cdot$ indica la posición del argumento de la función $\mathcal{I}(f)$, de esta manera $\mathcal{I}(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(x \cdot x_i) + s_0$.

Proposición. La función $\mathcal{I}$ definida por (2.26) es lineal, es decir, para todos $f, g \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\mathcal{I}(\alpha f + g) = \alpha \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g). \tag{2.27}$$

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Consideremos los siguientes casos:
Caso 1: $f, g \in \mathcal{S}$ Si $f = s_f$ y $g = s_g$, con $s_f, s_g \in \mathcal{S}$, entonces:

$$\alpha f + g = \alpha s_f + s_g \in \mathcal{S}$$

Aplicando $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}(\alpha f + g) = \alpha s_f + s_g = \alpha \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g).$$

Caso 2: f tiene parte en $\mathcal{S}$ y $g \in \mathcal{S}$ es decir, si $f = f_0 + s_f$, donde

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i R_{x_i}, \quad s_f \in \mathcal{S},$$

y $g = s_g$, con $s_g \in \mathcal{S}$, entonces:

$$\alpha f + g = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i R_{x_i} + \overbrace{\alpha s_f + s_g}^{\in \mathcal{S}}.$$

Aplicando $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}(\alpha f + g) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\cdot x_i) + \alpha s_f + s_g = \alpha \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g).$$

Caso 3: f y g tienen partes en $\mathcal{S}$, es decir si $f = f_0 + s_f$ y $g = g_0 + s_g$, donde

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i R_{x_i}, \quad g_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i R_{y_i}, \quad s_f, s_g \in \mathcal{S},$$

entonces

$$\alpha f + g = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i R_{x_i} + \sum_{i=1}^{m} b_i R_{y_i} + \overbrace{\alpha s_f + s_g}^{\in \mathcal{S}}.$$

Aplicando $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\alpha f + g) &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\cdot x_i) + \sum_{i=1}^{m} b_i \cos(\cdot y_i) + \alpha s_f + s_g \\
&= \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\cdot x_i) + s_f \right) + \sum_{i=1}^{m} b_i \cos(\cdot y_i) + s_g \\
&= \alpha \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)
\end{aligned}$$

□

Luego, demostrada la linealidad de la función $\mathcal{I}$, es posible demostrar
Proposición. El subespacio

$$\mathcal{I}(\mathcal{H}) = \{g : E \to \mathbb{C} \mid g = \mathcal{I}(f),\ f \in \mathcal{H}\}$$

con la siguiente relación es un espacio con producto interno

$$\langle g_1, g_2\rangle_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} := \int_E f_1' \overline{f_2'} d\mu = \langle f_1, f_2\rangle_{\mathcal{H}} \tag{2.28}$$

donde $g_i = \mathcal{I}(f_i)$ para $i = 1, 2$.
Demostración. Veamos que si $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \alpha g_1 + g_2, g_3\rangle_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} &= \langle \alpha\mathcal{I}(f_1) + \mathcal{I}(f_2), \mathcal{I}(f_3)\rangle_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} = \langle \mathcal{I}(\alpha f_1 + f_2), \mathcal{I}(f_3)\rangle_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} = \langle \alpha f_1 + f_2, f_3\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \alpha f_1, f_3\rangle_{\mathcal{H}} + \langle f_2, f_3\rangle_{\mathcal{H}} = \alpha\langle f_1, f_3\rangle_{\mathcal{H}} + \langle f_2, f_3\rangle_{\mathcal{H}} = \alpha\langle g_1, g_3\rangle_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} \\ &= \alpha\langle g_1, g_3\rangle_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} + \langle g_2, g_3\rangle_{\mathcal{I}(\mathcal{H})}\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que (2.28) es un producto interno en $\mathcal{I}(\mathcal{H})$. □

Luego de (2.28) la norma en $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ se define como

$$\|g\|_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} = ||\mathcal{I}(f)||_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} := \|f\|_{\mathcal{H}}$$

Proposición *El espacio $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ es un espacio de Hilbert.*
Demostración.
Sea $(g_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{I}(\mathcal{H})$, al ser $g_n \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$, entonces

$$g_n = \mathcal{I}(f_n),\ f_n \in \mathcal{H},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.29}$$

Para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$, entonces

$$\|g_n - g_m\|_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} < \varepsilon$$

Como

$$\begin{aligned}\|g_n - g_m\|_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} &= \|\mathcal{I}(f_n) - \mathcal{I}(f_m)\|_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} && \text{(por (2.29))} \\ &= \|\mathcal{I}(f_n - f_m)\|_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} && \text{(por (2.27))} \\ &= \|f_n - f_m\|_{\mathcal{H}} && \text{(def. norma en } \mathcal{I}(\mathcal{H}))\end{aligned}$$

por lo tanto $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ para $n > N$, luego $(f_n)_n$ es una sucesión de cauchy en $\mathcal{H}$ y al ser este un espacio de Hilbert, $(f_n)_n$ converge a un elemento de $\mathcal{H}$, denotemos a este límite por f.

Demostraremos ahora que $(g_n)_n$ converge a $\mathcal{I}(f) \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$, sea $\varepsilon > 0$ y desde la convergencia de $(f_n)_n$ a f existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ para $n > N_0$, además

$$\begin{aligned} \|g_n - \mathcal{I}(f)\|_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} &= \|\mathcal{I}(f_n) - \mathcal{I}(f)\|_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} && \text{por (2.29)} \\ &= \|\mathcal{I}(f_n - f)\|_{\mathcal{I}(\mathcal{H})} && \text{por 2.27} \\ &= \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon \end{aligned}$$

luego $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ es un espacio de Hilbert. □

Ahora veremos que $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ no es espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Para $0 \in E$ se define el funcional lineal

$$\begin{aligned} J_0 :&\mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} \\ &J_0(f) \to f(0) \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n = nR_{\frac{1}{n}}$, esto es, una sucesión $(f_n)_n$ en $\mathcal{H}$.
Luego

$$\mathcal{I}(f_n)(x) = n \cos \frac{x}{n}$$

y sea $g_n = \mathcal{I}(f_n)$, entonces

$$|J_0(g_n)| = |g_n(0)| = |\mathcal{I}(f_n)(0)| = \left| n \cos \frac{0}{n} \right| = |n|$$

Así, el funcional lineal J_0 no está acotado, luego por el teorema 2.7 $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ no es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor.

Capítulo 3

El espacio $W_2^m[a,b]$

3.1. El espacio de Hilbert de funciones $W_2^m[a,b]$

Definimos el conjunto de funciones $W_2^m[a,b]$ como:

$$W_2^m[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f^{(m-1)} \text{ es absolutamente continua en } [a,b], f^{(m)} \in L^2[a,b]\}$$

Este conjunto, con la suma y producto escalar usuales, se convierte en un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$.
Para $f, g \in W_2^m[a,b]$ se define el funcional $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^m} : W_2^m, \times W_2^m \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle f, g \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx \tag{3.1}$$

es un producto interno en $W_2^m[a,b]$, en efecto

$$\langle \alpha f + g, h \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha f + g)^{(i)}(a) h^{(i)}(a) + \int_a^b (\alpha f + g)^{(m)}(x) h^{(m)}(x) dx$$

por la linealidad de la sumatoria,derivada e integral,

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) h^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) h^{(m)}(x) dx \right) + \\
&\left(\sum_{i=0}^{m-1} g^{(i)}(a) h^{(i)}(a) + \int_a^b g^{(m)}(x) h^{(m)}(x) dx \right) \\
&= \alpha \langle f, h \rangle_{W_2^m} + \langle g, h \rangle_{W_2^m} \qquad \text{(def. } \langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^m}\text{)}
\end{aligned}$$

entonces tenemos la linealidad de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_2^m}$
Ahora veamos la simetría

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} g^{(i)}(a)f^{(i)}(a) + \int_a^b g^{(m)}(x)f^{(m)}(x)dx \\ &= \langle g,f\rangle_{W_2^m}\end{aligned}$$

Veamos ahora la no negatividad de W_2^m

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)f^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)f^{(m)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (f^{(i)})^2 + \int_a^b (f^{(m)})^2(x)dx \\ \langle f,f\rangle_{W_2^m} &\geq 0\end{aligned}$$

Luego tenemos que $(\langle\cdot,\cdot\rangle, W_2^m)$ es un espacio vectorial con producto interno. Además, esta induce la siguiente norma:

$$\|f\|_{W_2^m} = \sqrt{\langle f,f\rangle_{W_2^m}} \tag{3.2}$$

Ahora veamos la completitud de $W_2^m[a,b]$ con la norma definida en (3.2)

Teorema 3.1. *El espacio de las funciones $W_2^m[a,b]$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Tomemos una sucesión $(f_n)_n$ de Cauchy en $W_2^m[a,b]$.
Para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $r,n > N$ entonces $\|f_r - f_n\|_{W_2^m} < \varepsilon$, debemos mostrar que $(f_n)_n$ converge a una función en $W_m^2[a,b]$.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r = n+p > N$ donde $p \in \mathbb{N}$, así podemos ver que $\|f_{n+p} - f_n\|_{W_2^m}$ converge a 0 cuando n tiende al infinito, esto es.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{n+p} - f_n\|_{W_2^m}^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} [f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x)]^2 dx \right) = 0$$

y como la suma no es negativa:

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a) = 0, \quad i = 0,1,\ldots,m-1 \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x)]^2 dx = 0 \tag{3.4}$$

Podemos ver que de (3.3) la sucesión $(f_n^{(i)}(a))_n$ es de Cauchy de números reales por tanto es convergente para cada $i = 0, 1, \ldots, m-i$.
Análogamente, de (3.4) la sucesión $(f_n^{(m)})_n$ de funciones es de Cauchy en $L^2[a,b]$, que es convergente en este mismo espacio.
Por tanto existen números reales λ_i tal que $(f_n^{(i)}(a))_n$ converge a λ_i para cada
$i = 1, 2, \ldots, m-1$ y existe una función $h \in L^2[a,b]$ tal que $(f_n^{(m)})_n$ converge a h. Esto es

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(i)}(a) = \lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - h(x)]^2 dx = 0$$

Observe que decir que $(f_n^{(m)})_n \to h$ es lo mismo que decir que $\|f_n^{(m)} - h\|^2_{L^2[a.b]} \to 0$ cuando $n \to \infty$
Ahora definamos

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda_k}{k!}(x-a)^k + \overbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}^{\text{m-veces}} h(x)dx$$

donde $x \in [a,b]$
Demostremos que $g \in W_2^m[a,b]$.

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{m-1} k\frac{\lambda_k}{k!}(x-a)^{k-1} + \overbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}^{m-1-\text{veces}} h(x)dx$$

$$g''(x) = \sum_{k=0}^{m-1} k\cdot(k-1)\frac{\lambda_k}{k!}(x-a)^{k-2} + \overbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}^{m-2-\text{veces}} h(x)dx$$

$$g'''(x) = \sum_{k=0}^{m-1} k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\frac{\lambda_k}{k!}(x-a)^{k-3} + \overbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}^{m-3-\text{veces}} h(x)dx$$

$$g^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} + \int_a^b h(x)dx$$

como $h \in L^2[a,b]$, es integrable y se tiene $g^{(m-1)}$ es absolutamente continua en $[a,b]$. Además, tenemos que

$$g^{(m)}(x) = h(x) \in L^2[a,b]$$

Ahora veamos que $(f_n)_n$ converge a g es decir, demostraremos que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\| = 0$.
Desde que $f_n^{(i)}(a)$ converge a λ_i y $(f_n^{(m)})_n$ converge a h para $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1$, entonces $\left|f_n^{(i)}(a) - \lambda_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2m}}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$

también existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_2$, entonces $\int_{[a,b]} (f_n^{(m)}(x) - h(x))^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Si hacemos $N = \text{mín}\{N_1, N_2\}$, entonces si $n > N$

$$\begin{aligned}
\|f_n - g\|^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - g^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - g^{(m)}(x)]^2 dx \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - \lambda_i]^2 + \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - h(x)]^2 dx \\
&< (m \cdot (\frac{\varepsilon}{\sqrt{2m}})^2 + \varepsilon^2 \\
&< \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2
\end{aligned}$$

por tanto si $n > N$, entonces

$$\|f_n - g\| < \varepsilon$$

esto prueba la completitud de $W_2^m[a,b]$.

3.2. Propiedad reproductora de $W_2^m[a,b]$

Como se vio anteriormente, el conjunto $W_2^m[a,b]$ es un espacio de Hilbert, ahora resta buscar un núcleo reproductor, pero para ese trabajo primero mostraremos que sí existe un núcleo reproductor. Para este fin, primero veamos el siguiente lema que relaciona la integral de Lebuesge y la continuidad absoluta en $[a,b]$.

Lema 3.1. *La derivada de una función absolutamente continua F, en $[a,b]$, es integrable. Además, para todo $x \in [a,b]$ se tiene*

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(t)dt$$

La demostración la vemos en Kolmogorov página 387 [15]

Teorema 3.2. *El Espacio $W_2^m[a,b]$ es un espacio con núcleo reproductor.*

Demostración.
Para la demostración, usaremos la proposición (2.7) y para eso vamos a considerar $x \in [a,b]$ y el funcional lineal.

$$\begin{aligned}
I : W_2^m[a,b] &\to \mathbb{R} \\
I(f) &= f(x)
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que este funcional lineal es acotado.
Sea $f \in W_2^m[a,b]$, entonces $f^{(m-1)}$ es absolutamente continua y por el lema 3.1

$$f^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(a) + \int_{[a,x]} f^{(m)}(t)dt$$

con el fin de querer acotar $I(f)$ tomemos el valor absoluto

$$\begin{aligned}
\left|f^{(m-1)}(x)\right| &= \left|f^{(m-1)}(a) + \int_{[a,x]} f^{(m)}(t)dt\right| \\
&\leq \left|f^{(m-1)}(a)\right| + \left|\int_{[a,x]} f^{(m)}(t)dt\right| \\
&\leq \underbrace{\left|f^{(m-1)}(a)\right|}_{i} + \underbrace{\left|\int_{[a,b]} f^{(m)}(t)dt\right|}_{ii} \qquad ([a,x] \subset [a,b],\ \forall x \in [a,b])
\end{aligned}$$

Estudiamos cada sumando de la última desigualdad.
i) Desde que $(f^{(i)}(a))^2 \leq \sum_{k=1}^{m-1}(f^{(k)}(a))^2$ para todo $i = 0,1,2\ldots,m-1$, entonces

$$(f^{(i)}(a))^2 \leq \sum_{k=0}^{m-1}(f^{(k)}(a))^2 + \int_{[a,b]}(f^m(t))^2dt = \sqrt{\|f\|_{W_2^m}}$$

por lo tanto

$$\left|f^{(i)}(a)\right| \leq \|f\|_{W_2^m}, \quad i = 0,1,2\ldots,m-1 \tag{3.5}$$

ii) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $f^{(m)}$ y 1 en el espacio L^2.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[a,b]} f^{(m)}(t)\cdot 1dt\right| &\leq \|f^{(m)})\|_{L^2}\|1\|_{L^2} = \left(\int_{[a,b]}(f^{(m)}(t))^2dt)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{[a,b]} 1dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[a,b]}(f^{(m)}(t))^2dt + \sum_{k=0}^{m-1}(f^{(k)}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= M_0\|f\|_{W_2^m} \qquad (M_0 = (b-a)^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left|f^{(m-1)}(x)\right| \leq M_0\|f\|_{W_2^m} + \|f\|_{W_2^m}$.

$$\left|f^{(m-1)}(x)\right| \leq M_1\|f\|_{W_2^m} \tag{3.6}$$

Vamos acotar de manera análoga para $f^{(m-2)}$, antes veamos lo siguiente.
Como $f^{(m-1)}$ es absolutamente continua en $[a,b]$, entonces $f^{(m-1)}$ es continua en [a,b]. Por lo tanto, del corolario 1 de la proposición 1.7, $f^{(m-2)}$ es absolutamente continua en $[a,b]$.

Por el lema 3.2

$$f^{(m-2)}(x) = f^{(m-2)}(a) + \int_{[a,x]} f^{(m-1)}(t)dt$$

ahora proseguimos,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(m-2)}(x)\right| &= \left|f^{(m-2)}(a) + \int_{[a,x]} f^{(m-1)}(t)dt\right| \\
&\leq \left|f^{(m-2)}(a)\right| + \left|\int_{[a,x]} f^{(m-1)}(t)dt\right| \\
&\leq \left|f^{(m-2)}(a)\right| + \left|\int_{[a,b]} f^{(m-1)}(t)dt\right| \\
&\leq \|f\|_{W_2^m} + \int_{[a,b]} M_1\|f\|_{W_2^m}dt \qquad \text{por (3.6) y (3.5)} \\
&= \|f\|_{W_2^m} + M_1\|f\|_{W_2{}^m}(b-a)
\end{aligned}$$

por lo tanto, si $M_2 = 1 + M_1(b-a)$, entonces

$$\left|f^{(m-2)}(x)\right| \leq M_2\|f\|_{W_2^m} \tag{3.7}$$

Continuando de esta manera m veces, vamos a obtener que

$$|f(x)| \leq M_m\|f\|_{W_2^m}$$

donde $M_m \geq 0$ y entonces ya podemos ver que el funcional lineal es acotado, luego por el teorema 2.7 se ve que $W_2^m[a,b]$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. □

Ahora busquemos la manera de ver cómo son estos núcleos reproductores de $W_2^m[a,b]$, para esto sea $y \in [a,b]$ y R_y un núcleo reproductor de este espacio, entonces para cualquier $f \in W_2^m[a,b]$

$$\langle f, R_y\rangle_{W_2^m} = f(y)$$

por la definición del producto interno, tenemos

$$\langle f, R_y\rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)R_y^{(i)}(a) + \int_{[a,b]} f^{(m)}(x)R_y^{(m)}(x)dx \tag{3.8}$$

Vamos a aplicar la integral por partes a $f^{(m)}R_y^{(m)}$

$$\int_{[a,b]} f^{(m)}(x)R_y^{(m)}(x)dx = f^{(m-1)}(x)R_y^{(m)}(x)\Big|_a^b - \int_{[a,b]} f^{(m-1)}(x)R_y^{(m+1)}(x)dx$$

Nuevamente a $f^{(m-1)}R_y^{(m+1)}$

$$\int_{[a,b]} f^{(m-1)}(x)R_y^{(m+1)}(x)dx = f^{(m-2)}(x)R_y^{(m+1)}(x)\Big|_a^b - \int_{[a,b]} f^{(m-2)}(x)R_y^{(m+2)}(x)dx$$

y así sucesivamente

$$\int_{[a,b]} f^{(m-2)}(x)R_y^{(m+2)}(x)dx = f^{(m-3)}(x)R_y^{(m+2)}(x)\Big|_a^b - \int_{[a,b]} f^{(m-3)}(x)R_y^{(m+3)}(x)dx$$

$$\int_{[a,b]} f^{(m-3)}(x)R_y^{(m+3)}(x)dx = f^{(m-4)}(x)R_y^{(m+3)}(x)\Big|_a^b - \int_{[a,b]} f^{(m-4)}(x)R_y^{(m+4)}(x)dx$$

continuando hasta llegar a f

$$\int_{[a,b]} f'(x)R_y^{(2m-1)}(x)dx = f(x)R_y^{(2m-1)}(x)\Big|_a^b - \int_{[a,b]} f(x)R_y^{(2m)}(x)dx$$

por tanto tenemos

$$\int_{[a,b]} f^{(m)}(x)R_y^{(m)}(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}f^{(i)}(x)R_y^{2m-1-i}(x)\Big|_a^b + (-1)^m\int_{[a,b]} f(x)R_y^{(2m)}(x)dx \tag{3.9}$$

ahora reemplazando (3.9) en (3.8)

$$\begin{aligned}
\langle f, R_y\rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)R_y^{(i)}(a) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1}f^{(i)}(x)R_y^{(2m-1-i)}(x)\Big|_a^b \\
&\quad + (-1)^m\int_{[a,b]} f(x)R_y^{(2m)}(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)(R_y^{(i)}(a) - (-1)^{m-i-1}R_y^{(2m-1-i)}(a)) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1}f^{(i)}(b)R_y^{(2m-1-i)}(b) + \int_{[a,b]} f(x)(-1)^m R_y^{(2m)}(x)dx
\end{aligned}$$

por tanto tenemos

$$\begin{aligned} f(y) = \langle f, R_y \rangle_{W_2^m} = & \int_{[a,b]} f(x)(-1)^m R_y^{(2m)}(x)dx \\ & + \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)(R_y^{(i)}(a) - (-1)^{m-i-1} R_y^{(2m-1-i)}(a)) \\ & + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) R_y^{(2m-1-i)}(b) \end{aligned}$$

La propiedad reproductora de R_y en $W_2^m[a,b]$ exige que la integral de f con otra función sea exactamente a $f(y)$ y es acá donde entra el papel de la función generalizada $\delta(x-y)$, con la siguiente propiedad

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y)dx \tag{3.10}$$

entonces, tenemos

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{(2m)}} = \delta(x-y)$$

sin embargo debemos exigir las condiciones de frontera, es decir, eliminar las condiciones de derivada del núcleo reproductor R_y.
Así R_y es la solución de la siguiente ecuación diferencial generalizada

$$\begin{cases} (-1)^m \dfrac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{(2m)}} = \delta(x-y) \\ \dfrac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \dfrac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{(2m-i-1)}} = 0 \\ \dfrac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{(2m-i-1)}} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{3.11}$$

Siempre que $x \neq y$ es fácil determinar que $R_y(x)$ es la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden $2m$, es decir

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y}{\partial x} = 0 \tag{3.12}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \dfrac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{(2m-i-1)}} = 0 \\ \dfrac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{(2m-i-1)}} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{3.13}$$

La ecuación (3.12) tiene como polinomio característico $\lambda^{2m}=0$ cuya solucion es $\lambda=0$ con multiplicidad $2m$, por tanto la solucion general de (3.11) esta determinada por

$$R_y(x)=\begin{cases} lR_y(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{2m} c_i(y)x^{i-1},\ x<y \\ rR_y(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{2m} d_i(y)x^{i-1},\ y<x \end{cases} \tag{3.14}$$

Ahora estamos listo para calcular los coeficientes $c_i(y)$ y $d_i(y)$, $i=1,2,\ldots,2m$.
Ya que

$$(-1)^m\frac{\partial^{2m}R_y(x)}{\partial x}=\delta(x-y)$$

tenemos que, debido a que necesitamos la continuidad de las derivadas en y, es decir

$$\frac{\partial^i lR_y(y)}{\partial x^i}=\frac{\partial^i rR_y(y)}{\partial x^i},\ \ i=0,1,2,\ldots,2m-2 \tag{3.15}$$

y como $\delta(x-y)=u'(x)$, donde u es la función de Heavisade

$$(-1)^m\left(\frac{\partial^{2m-1}lR_y(y^+)}{\partial x^{2m-1}}-\frac{\partial^{2m-1}rR_y(y^-)}{\partial x^{2m-1}}\right)=1 \tag{3.16}$$

Las $2m$ ecuaciones en (3.15) y (3.16) nos proveen $2m$ condiciones para porder encontrar los coeficientes $c_i(y)$ y $d_i(y)$ $(i=1,2,3,\ldots,2m)$ en (3.14). Además notar que (3.13) nos da $2m$ condiciones de frontera, por tanto tenemos en total $4m$ ecuaciones (3.15) (3.16) y (3.13). Estas $4m$ ecuaciones son lineales en las variables $c_i(y)$ y $d_i(y)$ así estas pueden ser resueltas por algún método.
Siempre y cuando los coeficientes $c_i(y)$ y $d_i(y)$ sean conocidos, la expresion exacta del nucleo reproductor R_y de $W_2^m[a,b]$ podrá ser calculado de (3.14).

3.3. Expresión de los núcleos reproductores en $W_2^m[0,1]$

Presentamos algunas unas expresiones para los núcleos reproductores de $W_2^m[0,1]$ en base a los enfoques anteriores.

- Cuando m=1 el espacio $W_2^1[0,1]$ posee el núcleo reproductor

$$R_y(x)=\begin{cases} 1+x,\ \ x\le y \\ 1+y,\ \ x\ge y \end{cases}$$

En efecto, dada la condición de la solución del núcleo reproductor R_y en (3.14), con $y\in[0,1]$ fijo, tenemos que

$$R_y(x)=\begin{cases} c_0+c_1x,\ \ x\le y \\ d_0+d_1x,\ \ x>y \end{cases}$$

por lo tanto para determinar los coeficientes c_0, c_1, d_0, d_1 recurrimos a (3.15), (3.16) y las condiciones de frontera para R_y en (3.13).
Asi obtenemos

$$\begin{cases} R_y(0) - \dfrac{\partial R_y}{\partial x}(0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial R_y}{\partial x}(1) = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} lR_y(y) = rR_y(y) \\ \\ (-1)^1 \left(\dfrac{\partial R_y}{\partial x}(y^+) - \dfrac{\partial R_y}{\partial x}(y^-) \right) = 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

Así obtenemos las 4 ecuaciones resultantes

$$\begin{cases} c_0 - c_1 = 0 \\ \\ d_1 = 0 \\ \\ c_0 + c_1 y = d_0 + d_1 \\ \\ -(d_1 - c_1) = 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

por tanto los coeficientes serian

$$\begin{cases} c_0 = c_1 & = 1 \\ d_0 & = 0 \\ d_1 & = 1 + y \end{cases}$$

- Cuando m=3 el espacio $W_2^3[0,1]$ posee el núcleo reproductor

$$R_y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^5}{120} + \frac{1}{12}x^2y^2(3+x) + xy\left(1 - \frac{x^4}{24}\right), & x \leq y \\ 1 + \frac{y^5}{120} + \frac{1}{12}y^2x^2(3+y) + xy\left(1 - \frac{y^4}{24}\right), & x > y \end{cases}$$

En efecto, de forma análoga que en $m = 1$ tendriamos que buscar las $(4m)$ 6 ecuaciones que determinarian los coeficientes de R_y.

- Cuando m=7 el espacio $W_2^7[0,1]$ posee el núcleo reproductor

$$\begin{cases} R_y(x) = \frac{1}{51011754393600}\,(8192y^7(1716x^6 - 1287x^5y + 715x^4y^2 \\ -286x^3y^3 + 78x^2y^4 - 13xy^5 + y^6) + 8192(6227020800 + x^{13} \\ -13x(x^{11} - 479001600)y + 78x^2(19958400 + x^9)y^2 \\ -286x^3(x^7 - 604800)y^3 + 715x^4(15120 + x^5)y^4 - 1287x^5(x^3 - 336)y^5 \\ +1716x^6(7 + x)y^6) - 7028736x^6y^6(x + y + |y - x|) \\ +1317888x^5y^5(x + y + |y - x|)^3 - 183040x^4y^4(x + y + |y - x|)^5 \\ +18304x^3y^3(x + y + |y - x|)^7 - 1248x^2y^2(x + y + |y - x|)^9 \\ +52xy(x + y + |y - x|)^{11} - (x + y + |y - x|)^{13})\,. \end{cases}$$

Capítulo 4

Conclusiones del EHNR $W_2^m[a,b]$

Hasta el momento hemos proporcionado un fundamento teórico para el cálculo de kernels para el espacio $W_2^m[a,b]$ con producto interno

$$\langle f,g\rangle_{W_2^m}=\sum_{i=0}^{m-1}f^{(i)}(a)g^{(i)}(a)+\int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx$$

Sin embargo podemos construir subespacios del EHNR $W_2^m[a,b]$ imponiendo varias condiciones de frontera, incluso aumentar la dimención del dominio $[a,b]$

Definición 4.1. Sea el espacio de funciones

$$W_2^m[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\,|f\in W_2^m[a,b]\,(\text{de la sección 1.3}),f'(a)=0,\,f(b)=0\}\qquad(4.1)$$

De manera análoga como en lo anterior se puede mostrar que es un EHNR, además el kernel Q_y de $W_2^m[a,b]$ es diferente a R_y de $W_2^m[a,b]$.

Tambien consideramos el mismo espacio $W_2^m[a,b]$ pero con producto interno diferente esto es:

Definición 4.2. Sea el espacio de funciones

$$A_2^m[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f^{(m-1)}\text{ es absolutamente continua en }[a,b],f^{(m)}\in L^2[a,b]\}\qquad(4.2)$$

con producto interno

$$\langle f,g\rangle_A=\int_a^b\left(\sum_{i=0}^{m}f^{(i)}(x)g^{(i)}(x)\right)dx$$

Este espacio es un EHNR y el kernel, para $m=1$, viene definido por

$$R_y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{(e^{1-y}+e^{-1+y})(e^{1+x}+e^{-1-x})}{e^2-1} & x\le y\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{(e^{1+y}+e^{1-y})(e^{-1+x}+e^{1-x})}{e^2-1} & y<x\end{cases}$$

los detalles, y para $m > 1$, los encuentra en [1]

En algunos casos, también pueden imponerse varias condiciones homogéneas no locales en el espacio. Por ejemplo.

Definición 4.3. Sea el espacio

$$W_2^m[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|f \in W_2^m[a,b] \,(\text{de la sección 1.3}), \int_a^b \rho(x)f(x)dx = 0\} \qquad (4.3)$$

donde ρ es una función de peso.

Esta es la clave para la resolución de diferentes problemas de ecuaciones diferenciales, la construcción de nuevos EHNR con diferentes condiciones de frontera resolverá muchos problemas prácticos.

Como habíamos mencionado es posible aumentar la dimensión del dominio a $\mathbb{R}^2$ del espacio $W_2^m[a,b]$, a a un dominio $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ en la cual deberíamos tener en cuenta la definición de una función absolutamente continua en $\mathcal{D}$, así el espacio de Hilbert debería ser definido como

$$W_2^{(m,n)}(\mathcal{D}) = \left\{ f : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\partial^{m+n+2} f(x,y)}{\partial x^{m-1}\partial y^{n-1}} \text{ es absolutamente continua en } \mathcal{D},\ \frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \in L^2(\mathcal{D}) \right\}$$

con norma:

$$\begin{aligned}\langle f(x,y), g(x,y)\rangle_{W_2^{(m,n)}(\mathcal{D})} =& \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a,y) \frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{\partial^i}{\partial x^i} g(a,y) \right] dy \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x,c), \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(x,c) \right\rangle \\ &+ \int\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x,y) \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x,y) dxdy\end{aligned}$$

El espacio $W_2^{(m,n)}(\mathcal{D})$ es un EHNR con núcleo

$$R_{(\xi,\eta)}(x,y) = R_\xi(x) R_\eta(y)$$

donde R_ξ y R_η son los núcleos reproductores de $W_2^m[a,b]$ y $W_2^n[c,d]$, respectivamente, esto está demostrado en [23].

Finalmente el estudio de los EHNR da lugar al método llamado método de espacio de Hilbert de núcleo reproductor que da resolución como por ejemplo a problemas no lineales de valor límite de cuarto orden [11], ecuaciones integrales [12] y [10], problemas de valor en la frontera [19], etc.

Apéndice A

Teorema de Mercer

En este apéndice presentamos un enfoque clásico acerca de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor. Estos espacios pueden ser construidos a partir de funciones núcleo, núcleo de Mercer.
El teorema de Mercer proporciona que el núcleo reproductor posee una representación en términos de series.

Definición A.1. Una matriz $K[x]$ es llamada un núcleo de Graman en X. Nosotros diremos que K es un núcleo de Mercer si K es continua, simétrica y definida positiva (pd).

- Vamos a suponer que X es un espacio métrico completo.
- Para $x \in X$ denotaremos K_x a la función

$$\begin{aligned} K_x :& X \to \mathbb{R} \\ & t \to K_x(t) = K(x,t) \end{aligned}$$

Ejemplo A.1. Sea la función núcleo definida como:

$$\begin{aligned} \tilde{K} : \quad & [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \\ & (x,y) \mapsto \tilde{K}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n(x-y)), \end{aligned}$$

donde $a_n > 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

Verificamos que $\tilde{K}$ cumple las condiciones de un núcleo de Mercer:

- **Definida positiva:**

Para todo $k \leq 2$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset [0, 2\pi]$ y $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\} \subset \mathbb{R}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} c_i c_j \tilde{K}(x_i, x_j) &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} c_i c_j \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n(x_i - x_j)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} c_i c_j \cos(n(x_i - x_j)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \cos(n x_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} c_i \sin(n x_i) \right)^2 \right] \geq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{K}$ es definida positiva.

- **Continuidad:**
  Como $|a_n \cos(n(x-y))| \leq a_n$ para todo $x, y \in [0, 2\pi]$ y dado que $\sum a_n < \infty$, sabemos que la serie
  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n(x-y))$$
  converge uniformemente en $[0, 2\pi]$ (por el criterio de Weierstrass). Como el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua, se concluye que $\tilde{K}$ es continua.

- **Simetría:**

$$\begin{aligned}\tilde{K}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n(x-y)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(-n(y-x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n(y-x)) = \tilde{K}(y, x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{K}$ es simétrica.

$\therefore$ $\tilde{K}$ es un núcleo de Mercer.

Ejemplo A.2. Sea la función núcleo definida como:

$$\begin{aligned}W: \quad & [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \\ & (x, y) \mapsto W(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in(x-y)}, \quad a_n > 0.\end{aligned}$$

Definida positiva:
Para todo $k \geq 2$, sean $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset [0, 2\pi]$ y $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\} \subset \mathbb{C}$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\overline{c_j}W(x_i, x_j) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\overline{c_j}\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in(x_i - x_j)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\overline{c_j}e^{inx_i}e^{-inx_j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{i=1}^{k} c_i e^{inx_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \overline{c_j}e^{-inx_j}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left|\sum_{i=1}^{k} c_i e^{inx_i}\right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, W es definida positiva.

Ejemplo A.3. Sea la función constante:

$$\begin{aligned} W: \quad & X \times X \to \mathbb{C}, \\ & (x, y) \mapsto W(x, y) = c, \quad c \geq 0. \end{aligned}$$

Definida positiva:
Para todo conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$ y coeficientes $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\} \subset \mathbb{C}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\overline{c_j}W(x_i, x_j) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\overline{c_j}c \\ &= c\sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{k} \overline{c_j} \\ &= c\left|\sum_{i=1}^{k} c_i\right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, W es definida positiva.

Ejemplo A.4. Sea una función $f : X \to \mathbb{C}$, y definimos el núcleo

$$\varphi(x, y) = f(x)\overline{f(y)}.$$

Definida positiva:

Para todo $k \geq 2$, sean $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$ y $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\} \subset \mathbb{C}$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\overline{c_j}\varphi(x_i, x_j) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\overline{c_j} f(x_i)\overline{f(x_j)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} c_i f(x_i)\right)\left(\overline{\sum_{j=1}^{k} c_j f(x_j)}\right) \\ &= \left|\sum_{i=1}^{k} c_i f(x_i)\right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es definida positiva.

Sea $K : X \times X \to \mathbb{R}$ un kernel de Mercer.

Teorema A.1. *Existe un únio espacio de Hilbert $(H_k, \langle\ ,\ \rangle_{H_k})$ de funciones sobre X satisfaciendo lo siguiente*

- *Para todo $x \in X$, se tiene que $K_x \in H_k$.*
- *El spam del conjunto $\{K_x\}_{x\in X}$ es denso en H_k.*
- *Para todo $f \in H_k$, $x \in X$ se tiene que $f(x) = \langle K_x, f\rangle_{H_k}$. adicionalmente*
- *H_k consiste espacio de funciones continuas y la inclusión $I_k : H_k \to \mathcal{F}(X)$ es acotada con*

$$\|I_k\| \leq c_k, \quad c_k = \sup_{x\in X}\sqrt{K(x,x)}$$

Definición A.2. El espacio H_k del teorema anterior se llama **Espacio de Hilbert con núcleo reproductor** (*Reproducing Kernel Hilbert Space*, RKHS).

Demostración del teorema.
Sea $H_0 = \text{span}\{K_x : x \in X\}$ y definimos un producto interno en H_0 por

$$f = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i K_{x_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{r} \beta_j K_{x_j}$$

$$\langle f, g\rangle_{H_0} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i\beta_j K(x_i, x_j).$$

Verificamos las propiedades del producto interno:

- **Simetría:**

$$\langle f, g\rangle_{H_0} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i\beta_j K(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} \beta_j\alpha_i K(x_j, x_i) = \langle g, f\rangle_{H_0}.$$

- **Linealidad en la primera variable:** Para cualquier $h = \sum_{l=1}^{m} c_l K_{x_l}$,

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle_{H_0} &= \left\langle \sum_{i=1}^{s} \alpha_i K_{x_i} + \sum_{j=1}^{r} \beta_j K_{x_j}, \sum_{l=1}^{m} c_l K_{x_l} \right\rangle_{H_0} \\ &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{m} \alpha_i c_l K(x_i, x_l) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} \beta_j c_l K(x_j, x_l) \\ &= \langle f, h\rangle_{H_0} + \langle g, h\rangle_{H_0}.\end{aligned}$$

- **Multiplicación por escalar:** Para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle \lambda f, g\rangle = \lambda \langle f, g\rangle.$$

- **Positividad:**

$$\langle f, f\rangle = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \geq 0, \quad \text{pues } K \text{ es definida positiva.}$$

- **Definido positivo:** $\langle f, f\rangle = 0 \iff f = 0$.

  Si $\langle f, f\rangle = 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) = 0.$$

  Para cualquier $t \in X$ y $\varepsilon > 0$,

$$\langle f + \varepsilon K_t, f + \varepsilon K_t\rangle = \langle f, f\rangle + 2\varepsilon\langle f, K_t\rangle + \varepsilon^2 \langle K_t, K_t\rangle \geq 0.$$

  Haciendo $\varepsilon \to 0$,

$$2\sum_{i=1}^{s} \alpha_i K(x_i, t) + \varepsilon K(t, t) = 0.$$

  Como K es definida positiva, se concluye que

$$f(t) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i K(x_i, t) = 0, \quad \forall t \in X.$$

Definición de H_k.
Sea H_k la completación de H_0 con la norma asociada $\|f\|_{H_k} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{H_k}}$. Definimos

$$H_k := \overline{\text{span}\{K_x : x \in X\}}.$$

Si $f \in H_k$, entonces f admite una expansión:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i K_{x_i}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle K_x, f\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle K_x, K_{x_i}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i K(x, x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i K(x_i, x) \\ &= f(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Esto demuestra la propiedad de *reproducción*.

Unicidad de H_k.

Supongamos que H es otro espacio de Hilbert de funciones sobre X que satisface las mismas condiciones. Queremos probar que

$$H_k = H, \quad \text{con} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_k} = \langle \cdot, \cdot \rangle_H.$$

Dado que $H_0 \subset H$, para todo $x, t \in X$ se tiene:

$$\langle K_x, K_t \rangle_H = K_t(x) = K(x, t) = \langle K_x, K_t \rangle_{H_k}.$$

Por la linealidad del producto interno, se concluye que para todo $f, g \in H$:

$$\langle f, g \rangle_H = \langle f, g \rangle_{H_k}.$$

Dado que H_k y H son completaciones de H_0, se sigue la unicidad de la completación.

Continuidad de las funciones en H_k.

Para $f \in H_k$ y $x \in X$, se tiene la estimación:

$$|f(x)| = |\langle K_x, f\rangle_H| \leq \|f\|_{H_k} \|K_x\|_{H_k} = \|f\|_{H_k} \sqrt{K(x, x)}.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|_\infty \leq C_k \|f\|_{H_k}, \quad C_k = \sup_{x \in X} \sqrt{K(x, x)}.$$

Finalmente, el operador de inclusión $I_k : H_k \to \mathcal{C}(X)$ cumple

$$\|I_k\| = \sup_{\|f\|_{H_k} = 1} \|f\|_\infty \geq C_k.$$

Esto implica que la convergencia en $\|\cdot\|_{H_k}$ conlleva la convergencia en $\|\cdot\|_\infty$, mostrando que f es continua.

Teorema A.2. *(Teorema de Mercer) Sean K un núcleo de Mercer en X, μ una medida finita de Borel con soporte en X y $T_k : L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ el operador integral asociado. Entonces existe una colección contable de funciones continuas ortonormales $\{e_n\}$ en X tal que son autovectores de T_k con los correspondientes autovalores $\{\lambda_n\}$ tal que para todo $g \in L^2(X,\mu)$ se tiene*

$$T_k g = \sum_n \lambda_i \langle g, e_n \rangle e_n$$

Además $K(x,y) = \sum_n \lambda_n e_n(x)\overline{e_n(y)}$

Demostración: [33]

Bibliografía

[1] Akgül, A., Akgül, E. K., and Korhan, S. (2020). New reproducing kernel functions in the reproducing kernel Sobolev spaces. *AIMS Math.*, 5(1):482–496.

[2] Aronszajn, N. (1950). Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3):337–404.

[3] Bergman, S. (1950). *The Kernel Function and Conformal Mapping*, volume No. 5 of *Mathematical Surveys*. American Mathematical Society, New York.

[4] Bogachev, V. I. (2006). *Measure Theory*. Springer.

[5] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York.

[6] Bukhvalov, A. V. (1974). On the integral representation of linear operators. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 47:5–14.

[7] Bukhvalov, A. V. (1975). Integral representability criterion for linear operators. *Funktsional. Anal.i Prilozhen.*, 1:51.

[8] Bukhvalov, A. V. (1983). *Application of Methods of the Theory of Order-Bounded Operators to the Theory of Operators in L^p-spaces*.

[9] Capon, J. (1965). Hilbert space methods for detection theory and pattern recognition. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-11:247–259.

[10] El-Gamel, M. and Mohamed, O. (2022). Nonlinear second order systems of Fredholm integro-differential equations. *SeMA J.*, 79(2):383–396.

[11] Geng, F. (2009). A new reproducing kernel Hilbert space method for solving nonlinear fourth-order boundary value problems. *Appl. Math. Comput.*, 213(1):163–169.

[12] Geng, F. (2012). Solving integral equations of the third kind in the reproducing kernel space. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 38(3):543–551.

[13] Jorgensen, P. and Tian, J. (2020). Sampling with positive definite kernels and an associated dichotomy. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 24(1):125–154.

[14] Kallianpur, G. (1970). The role of reproducing kernel Hilbert spaces in the study of Gaussian processes. In *Advances in Probability and Related Topics, Vol. 2*, pages 49–83. Dekker, New York.

[15] Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V. (1972). *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análsis Funcional*. MIR.

[16] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Jhon Wiley.

[17] Kwapień, S. a. and Mycielski, J. (2001). On the Kaczmarz algorithm of approximation in infinite-dimensional spaces. *Studia Math.*, 148(1):75–86.

[18] Larkin, F. M. (1970). Optimal approximation in Hilbert spaces with reproducing kernel functions. *Math. Comp.*, 24:911–921.

[19] Li, X. and Wu, B. (2011). Reproducing kernel method for singular fourth order four-point boundary value problems. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)*, 34(1):147–151.

[20] Li, Y. H. (1998). An interpolation approximation operator in the reproducing kernel space W_2^l. *Heilongjiang Daxue Ziran Kexue Xuebao*, 15(3):17–20.

[21] Mercer, J. (1909). Xvi. functions of positive and negative type, and their connection to the theory of integral equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, (209):441–458.

[22] Mercer, J. (1912). Iv. sturm-liouville series of normal functions in the theory of integral equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 211(471-483):111–198.

[23] Minggen, C. and L., Y. (2008). *Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space*. Nova Science Publishers.

[24] Mirskaja, T. I., Pabedinskaĭte, A. S., and Tempel man, A. A. (1967). Hilbert spaces of certain reproducing kernels and the equivalence of Gaussian measures. *Litovsk. Mat. Sb.*, 7:459–469.

[25] Moore, E. H. (1916). On properly positive hermitian matrices. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 23.

[26] Moore, E. H. (1935). General analysis. 1(1):vi+231.

[27] Moore, E. H. (1939). General analysis. 2: The fundamental notions of general analysis(1):vi+255.

[28] Mycielski, J. and Świerczkowski, S. a. (1996). Uniform approximation with linear combinations of reproducing kernels. *Studia Math.*, 121(2):105–114.

[29] Nashed, M. Z. and Walter, G. G. (1991). General sampling theorems for functions in reproducing kernel Hilbert spaces. *Math. Control Signals Systems*, 4(4):363–390.

[30] Neumann, J. V. (1935). çharakterisierung des spektrums eines integraloperators". *Actualites Sci. et Ind.*, 27(2):20.

[31] Partington, J. R. (1997). *Interpolation, identification, and sampling*, volume 17 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

[32] Parzen, E. (1963). Probability density functionals and reproducing kernel Hilbert spaces. In *Proc. Sympos. Time Series Analysis (Brown Univ., 1962)*, pages 155–169. Wiley, New York-London.

[33] Paulsen, V. I. and Raghupathi, M. (2016). *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces*, volume 152. Cambridge university press.

[34] Zorich, V. A. (2004). *Mathematical Analysis I (1º edición)*. Springer.