

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

El teorema del semiespacio para funciones NET

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Edgar Arturo SAENZ MALDONADO

ASESOR

Bartleby ORDOÑEZ DELGADO

Lima, Perú

2022



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Saenz, E. (2022). *El teorema del semiespacio para funciones NET*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Edgar Arturo Saenz Maldonado
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	41391024
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Bartleby Ordoñez Delgado
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40430988
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-2668-3068
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Josué Alonso Aguirre Enciso
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41341744
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	William César Olano Diaz
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06819201
Datos de investigación	
Línea de investigación	Topología Combinatoria y Análisis

Grupo de investigación	Ninguno
Agencia de financiamiento	Ninguno
Ubicación geográfica de la investigación	USA-Perú
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 4:00 horas del viernes 11 de marzo del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso (PRESIDENTE), Mg. William César Olano Diaz (MIEMBRO) y el Dr. Bartleby Ordoñez Delgado (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: **"El Teorema del Semiespacio para Funciones NET"**, presentado por el señor Bachiller Edgar Arturo Saenz Maldonado, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación sobresaliente con mención con un calificativo promedio de 19,3 diecinueve con 3 decimas. (letras y números).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso, manifestó que el señor Bachiller Edgar Arturo Saenz Maldonado, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 5:20 pm horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso
PRESIDENTE

Mg. William César Olano Diaz
MIEMBRO

Dr. Bartleby Ordoñez Delgado
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

La Vicedecana (e) de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Mg. Zoraida Judith Huamán Gutiérrez, certifica virtualmente la participación del Jurado Evaluador, el titulando, el acto de instalación y el inicio, desarrollo y término del acto académico de sustentación, dejando constancia en el acta respectiva.

Agradecimientos

A mi asesor Dr. Bartleby Ordoñez Delgado por sus conocimientos matemáticos e interés mostrado en el tema. También quiero agradecer a los miembros del jurado de tesis, Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso y Mg. William César Olano Díaz, por tomarse el tiempo de leer este trabajo y sugerir correcciones.

El Teorema del Semiespacio para funciones NET

Edgar Arturo Saenz Maldonado

(RESUMEN)

Un cubrimiento ramificado $f : S^2 \to S^2$ que preserva orientación es una *función de Thurston casi Euclidiana* (NET) si cada punto crítico es simple y su conjunto de puntos poscríticos, P_f, tiene exactamente cuatro puntos. En este trabajo examinamos algunas propiedades cuantitativas y cualitativas de las funciones NET. Además, dada una función NET f, estudiamos algunos procedimientos algorítmicos que permiten detectar la no existencia de recíprocos negativos de pendientes de obstrucciones de Thurston en ciertos intervalos de la frontera de $\mathbb{H} = \text{Teich}(S^2, P_f)$.

Palabras Claves: Funciones de Thurston, funciones NET, obstrucciones de Thurston.

The Half-space Theorem for NET maps

Edgar Arturo Saenz Maldonado

(ABSTRACT)

An orientation-preserving branched covering $f : S^2 \to S^2$ is a *nearly Euclidean Thurston* (NET) map if each critical point is simple and its postcritical set, P_f, has exactly four points. In this work we examine some qualitative and quantitative properties of NET maps. Furthermore, given a NET map f, we study some algorithmic procedures that allow us to detect the non-existence of negative reciprocals of slopes of Thurston obstructions on certain intervals of the boundary of $\mathbb{H} = \text{Teich}(S^2, P_f)$.

Keywords: Thurston maps, NET-maps, Thurston obstructions.

Índice general

1. Introducción **4**

2. Preliminares **7**

2.1. Cubrimientos ramificados 7

2.2. Funciones de Thurston 9

2.3. Teoría de Teichmüller 11

2.4. El Teorema de Thurston 14

2.5. Regla finita de subdivisión. 17

3. Funciones de Thurston casi Euclidianas (NET) **18**

3.1. Definiciones y propiedades básicas 18

3.2. Factorización de funciones NET 25

3.3. Construcción del ejemplo principal 27

3.4. Preimágenes de curvas esenciales. 30

4. Presentación de funciones NET **39**

4.1. Diagrama de presentación NET 39

4.2. Algoritmo para hallar presentaciones NET 42

4.3. Ejemplos 46

5. La función pendiente **51**

5.1. La función pendiente y espejos giratorios 51

5.2. σ_f para el ejemplo principal 58

6. El Teorema del Semiespacio **67**

6.1. El espacio Teich(S^2, P) si $|P| = 4$ 67

6.2. Horodiscos en $\mathbb{H}$ 68

6.3. El Teorema del Semiespacio 72

6.4. Racionalidad del ejemplo principal 78

A. Topología Algebraica **80**

A.1. Homotopía y grupo fundamental 80

A.2. Cubrimientos y levantamientos 82

A.3. Superficies orientadas 84

A.4. CW-complejo y característica de Euler 85

B. Análisis Complejo **87**

B.1. Superficies de Riemann 87

C. Subaditividad de módulos de anillos **90**

C.1. Longitud extrema de una familia de curvas 90

C.2. Módulo de una familia de curvas 91

D. Modelo hiperbólico del semiplano superior **93**

D.1. Métrica y distancia hiperbólica en $\mathbb{H}$ 93

D.2. Isometrías en $(\mathbb{H}, \mathrm{d}_{\mathbb{H}})$. 94

Lista de Símbolos

$|X|$: cardinalidad del conjunto X.

$\sqcup$: unión disjunta.

$\mathbb{Z}$: conjunto de números enteros.

$\mathbb{Z}^+$: conjunto de números enteros positivos.

$\mathbb{Q}$: conjunto de números racionales.

$\overline{\mathbb{Q}}$: es la unión $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

$\mathbb{R}$: conjunto de números reales.

$\mathbb{R}^+$: conjunto de números reales positivos.

S^2: esfera topólogica 2-dimensional y orientada.

T: toro topólogico 2-dimensional.

$\chi(X)$: característica de Euler de X.

$\pi_1(X)$: grupo fundamental de X.

F_*: homomorfismo (sobre grupos fundamentales) inducido por F.

$\mathbb{R}^2$: plano Euclidiano.

$\mathbb{C}$: plano complejo.

$\overline{\mathbb{C}}$: esfera de Riemann.

$\bar{z}$: el conjugado de z.

$\mathrm{Re}(z)$: parte real de z.

$\mathrm{Im}(z)$: parte imaginaria de z.

$\deg(f)$: grado de un cubrimiento f.

$\deg(f, x)$: grado local de f en x.

C_f: conjunto de puntos críticos de f.

P_f: conjunto de puntos poscríticos de f.

$\mathcal{O}_f$: orbivariedad asociada a función de Thurston f.

$\mathbb{D}$: disco unitario contenido en $\mathbb{C}$ y centrado en el origen.

$\mathbb{H}$: semiplano superior de $\mathbb{R}^2$.

∂X: frontera de X como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

$\partial_\infty E$: es la unión $\partial E \cup \{\infty\}$, donde $E \subset \mathbb{H}$.

$\mathrm{d}_{\mathbb{H}}$: distancia hiperbólica en $\mathbb{H}$.

Λ: retículo planar.

Γ_Λ: grupo de isometrías de $\mathbb{R}^2$ generado por $\{\mathbf{x} \mapsto 2\lambda - \mathbf{x} : \lambda \in \Lambda\}$.

$\mathbb{R}^2/\Gamma_\Lambda$: espacio cociente inducido por la acción de Γ_Λ sobre $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{Z}^2$: retículo estándar generado por $(1,0)$ y $(0,1)$.

$[\Lambda_2 : \Lambda_1]$: índice de Λ_1 en Λ_2 (Λ_1 como subgrupo de Λ_2).

$\mathrm{Teich}(S^2, P)$: espacio de Teichmüller de (S^2, P).

Σ_f: función pullback de Thurston de f.

σ_f: función pendiente asociada a una función NET f.

δ_f: función multiplicador de Thurston asociada a una función NET f.

$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$: grupo de matrices 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}$ y determinante ± 1.

$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$: grupo de matrices 2×2 con entradas en $\mathbb{R}$ y determinante no cero.

$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$: subgrupo de isometrías de $(\mathbb{H}, \mathrm{d}_{\mathbb{H}})$ identificado con $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\}$.

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$: grupo de isometrías de $(\mathbb{H}, \mathrm{d}_{\mathbb{H}})$ que preservan orientación.

Λ_τ: retículo generado por 1 y τ, con $\tau \in \mathbb{H}$.

T_τ: toro complejo $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$.

$\Gamma_{p/q}$: conjunto de curvas simples y cerradas en T_τ con pendiente p/q.

$\mathrm{mod}_\tau(p/q)$: módulo de la familia de curvas $\Gamma_{p/q}$ en T_τ.

$B_m(p/q)$: horodisco tangente a $\partial\mathbb{H}$ en $-q/p$ y con diámetro Euclidiano $1/(mp^2)$.

$\lambda(\Gamma)$: longitud extrema de una familia de curvas Γ.

$\mathrm{mod}(\mathbf{A})$: módulo del anillo $\mathbf{A}$.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos complejos unidimensionales comenzó con los trabajos pioneros de Fatou y Julia alrededor de 1918. Su teoría (bien expuesta en [3]) muestra que para una función racional compleja de grado $d > 2$, la esfera de Riemann se divide en dos conjuntos disjuntos (ahora conocidos como los conjuntos de Fatou y Julia de f) basados en la dinámica de f. En la década de 1970, Mandelbrot utilizó computadoras para producir imágenes de estos conjuntos y de las curvas de separación entre ellos. Mandelbrot estudió particularmente los conjuntos de Julia de polinomios complejos cuadráticos, y caracterizó cuando estos conjuntos son conexos (esto produjo el famoso conjunto de Mandelbrot).

A principios de la década de 1980 se produjo una explosión de investigación en esta área, debido en parte al trabajo de Mandelbrot. Douady y Hubbard hicieron importantes avances en la teoría de polinomios complejos, especialmente cuadráticos [9], [10]. Hasta el día de hoy, los polinomios cuadráticos siguen siendo los mejores entendidos en esta teoría (ver [16, Capítulo 9]). Sin embargo, el trabajo de Bielefeld, Fisher y Hubbard sobre polinomios preperiódicos junto con el trabajo de Poirier en polinomios periódicos han mejorado enormemente nuestra comprensión fuera del caso cuadrático [4], [21]. Las funciones racionales no polinomiales han resultado ser más difíciles de estudiar; la mayoría de los resultados concernientes a esta familia de funciones se refieren únicamente a funciones de grado bajo y con conjunto poscrítico de cardinalidad pequeña.

En la década de 1980, Douady y Hubbard emplearon un procedimiento ahora conocido como *acoplamiento* para combinar pares de polinomios cuadráticos para producir funciones racionales cuadráticas. Esto les permitiría aplicar a funciones racionales su maquinaria para polinomios. Interesantemente, encontraron que el acoplamiento de algunos pares de polinomios cuadráticos no producen funciones racionales, por lo que surgió la pregunta de cuando dos

polinomios cuadráticos son "acoplables".

En 1983, en una conferencia de la Junta de Ciencias Matematicas en Duluth, Thurston abordó el problema de acoplamiento. Para contestar a la pregunta sobre acoplamiento, Thurston consideró una familia de cubrimientos ramificados de S^2 en S^2 que se asemejan topológicamente a funciones racionales complejas. Estas funciones ahora son comúnmente conocidas como las funciones de Thurston. Una función de Thurston es un cubrimiento ramificado $f : S^2 \to S^2$ que preserva orientación y cuyo conjunto poscrítico, denotado por P_f, es finito. Thurston caracterizó cuando estas funciones son equivalentes a funciones racionales complejas mediante la existencia o no existencia de *multicurvas obstructoras*. Los teoremas principales de Thurston fueron 1) que una función de Thurston f es equivalente a una función racional si y solo si la *funcion pullback de Thurston* Σ_f tiene un punto fijo, y 2) si la orbivariedad asociada a f es hiperbólica, entonces Σ_f tiene un punto fijo si y solo si f no admite *obstrucciones de Thurston* (ver Teorema 2.3.1 y Teorema 2.4.1 en el Capítulo 2). Aunque la combinación de ambos teoremas nos dice que una función de Thurston f es equivalente a una función racional o hay una obstrucción puramente topológica, estas obstrucciones son bastante difíciles de entender, y casi todo intento exitoso de clasificar las obstrucciones es un teorema mayor en sí mismo.

En el caso donde la orbivariedad inducida por una función de Thurston es hiperbólica (ver Capítulo 2), la correspondiente función pullback de Thurston es muy complicada –es trascendental– y en todos los ejemplos conocidos es infinito a uno. Por otro lado, mucho sobre las obstrucciones de Thurston sigue siendo un misterio. Aunque producir una obstrucción para un ejemplo específico puede no ser difícil, nadie ha descubierto todavía un algoritmo para determinar la existencia o no existencia de una multicurva obstructora en el contexto general. El teorema de Berstein-Levy para polinomios topológicos hiperbólicos (ver [4]) sigue siendo el mejor resultado para la inexistencia de una obstrucción: si la órbita futura de cada punto crítico contiene un ciclo atractor, entonces el polinomio topológico es equivalente a un polinomio complejo.

Para comprender mejor la función pullback de Thurston y las obstrucciones de Thurston, Cannon-Floyd-Parry-Pilgrim (ver [8]) han introducido una clase interesante de funciones de Thurston llamadas funciones de Thurston casi Euclidianas (NET). Una función de Thurston f es una función NET si todos los puntos críticos de f son simples y $|P_f| = 4$. Estas funciones son las generalizaciones más sencillas de las funciones de Lattés. Si una función NET f posee algún punto poscrítico que es a su vez un punto crítico, entonces la orbivariedad asociada a f es hiperbólica. Estas son las funciones de Thurston más simples con orbivariedad hiperbólica y espacio de Teichmüller no trivial.

En este trabajo estudiamos propiedades cualitativas y cuantitativas de funciones NET. En el Capítulo 3 presentamos definiciones y propiedades básicas con respecto a las funciones NET. Entre ellas, probamos que toda función NET admite un levantamiento entre toros de dimension dos y que de este levantamiento podemos obtener un levantamiento de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo. También probamos que toda función NET es la postcomposición de un homeomorfismo especial y una función de Thurston Euclidiana.

Para determinar obstrucciones de Thurston es necesario calcular matrices de Thurston. El cálculo de matrices de Thurston requiere de grados y número de componentes esenciales en la preimagen de multicurvas estables (para mayores detalles ver Sección 2.4). Estos grados y número de componentes son descritos para funciones NET en el Capítulo 3. En este capítulo también presentamos nuestro ejemplo principal. La función NET en nuestro ejemplo principal es denotada por f. Este ejemplo fue diseñado de manera que, dada una curva esencial γ en $S^2 \setminus P_f$, no se puede predecir inmediatamente cuantas componentes esenciales hay en $f^{-1}(\gamma)$, o determinar si γ es f-estable.

Capítulo 4 aborda el problema de describir sucintamente una función NET de una manera computacionalmente efectiva. Esta descripción se logra mediante lo que llamamos un diagrama de presentación NET, una representación gráfica de lo que llamamos una presentación de una función NET. Aunque lejos de ser única, esta presentación es útil ya que proporciona datos de entrada para algoritmos para el cálculo de invariantes fundamentales tales como multicurvas estables y obstrucciones de Thurston.

Si $P \subseteq S^2$ con $|P| = 4$, entonces a cada clase de homotopía de curvas cerradas simples en $S^2 \setminus P$ podemos asignarle un único elemento en $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ que caracteriza la clase de homotopía. Tal elemento es llamado la pendiente de la clase de homotopía. Tomando preimágenes de curvas esenciales, una función NET f induce un función $\sigma_f : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}} \cup o$, donde o denota la unión de clases de curvas triviales y periféricas en $S^2 \setminus P_f$. En el Capítulo 5 damos un algoritmo para el cálculo de la función σ_f, donde f es obtenida a través de una presentación NET. La función σ_f es de suma importancia ya que la pendiente de una obstrucción de Thurston es -en particular- un punto fijo de σ_f.

En el Capítulo 6 enunciamos y demostramos el teorema principal de esta tesis. Este es un resultado que nos permite encontrar intervalos en la frontera de $\mathbb{H} = \text{Teich}(S^2, P_f)$, donde f es una función NET, que no contienen recíprocos negativos de pendientes de obstrucciones de Thurston. Como una aplicación de este teorema, mostramos que nuestro ejemplo principal es equivalente a una función racional haciendo uso de una presentación NET y del cálculo de pendientes de preimágenes de curvas esenciales. También proporcionamos una región en $\mathbb{H}$ donde se ubica el punto fijo de la función pullback de Thurston.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo establecemos las definiciones y los resultados más relevantes en el estudio de las funciones de Thurston tales como cubrimientos ramificados, espacio de Teichmüller sobre esferas marcadas, Teorema de Thurston y regla finita de subdivisión. Los contenidos de este capítulo son estándares en la literatura y se encuentran en [6], [7], [11], [15], [16]. Para mayor información sobre los términos topológicos utilizados, se sugiere al lector ver Apéndice A.

2.1. Cubrimientos ramificados

Definición 2.1.1. Sean M y N dos superficies orientadas. Decimos que una función continua $f : M \to N$ es un **cubrimiento ramificado** si para cada $y \in N$ existe un abierto $V \subset N$ con $y \in V$ tal que $f^{-1}(V)$ es una unión disjunta

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

de conjuntos abiertos $U_i \subset M$ tal que cada U_i contiene exactamente un punto $x_i \in f^{-1}(y)$. Además, requerimos que para cada $i \in I$, existe un entero $d_i \geq 1$ y dos homeomorfismos que preservan orientación $\varphi_i : U_i \to \mathbb{D}$ y $\psi : V \to \mathbb{D}$ con $\varphi_i(x_i) = 0$ y $\psi(y) = 0$ tales que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi_i^{-1}(z) = z^{d_i}$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

- El entero d_i es llamado **grado local** de f en x_i y es denotado por $\deg(f, x_i)$. Si $\deg(f, x_i) > 1$, decimos que x_i es un **punto crítico** de f con **multiplicidad** $\deg(f, x_i) - 1$. El conjunto de puntos críticos de f es denotado por C_f.
- Un punto $y \in N$ es un **valor crítico** de f si $f^{-1}(y)$ contiene algún punto crítico de f. El conjunto de valores críticos de f es denotado por V_f.

Si f no posee puntos críticos, entonces (f, M) es un cubrimiento de N en el sentido usual. En este caso decimos simplemente que f es un cubrimiento.

Teorema 2.1.1. Sea $f : M \to N$ un cubrimiento ramificado entre dos superficies orientadas. Se cumple lo siguiente.

(1) Para cada $y \in N$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es discreto.

(2) C_f es discreto en M.

(3) V_f es discreto en N.

(4) Si M es compacta, entonces existe $d \in \mathbb{Z}^+$, llamado el **grado de** f y denotado por $\deg(f)$, tal que $\sum_{f(x)=y} \deg(f, x) = d$ para todo $y \in N$.

Demostración. El enunciado (1) es una consecuencia inmediata de la definición de cubrimiento ramificado. Para probar el enunciado (2) fije un punto $x \in C_f$. Existe una vecindad U de x tal que la restricción de f sobre $U \setminus \{x\}$ es un homeomorfismo local. Entonces tal vecindad no puede contener puntos de $C_f \setminus \{x\}$. El enunciado (3) se prueba de manera similar al enunciado (2).

Para probar el enunciado (4) comenzamos usando (1) y (2). La compacidad de M implica que $f^{-1}(y)$ es finito para todo $y \in N$ y que C_f es finito. Entonces V_f es finito. Sea d el número de hojas del cubrimiento $f : M \setminus f^{-1}(V_f) \to N \setminus V_f$. Es claro que

$$\sum_{f(x)=y} \deg(f, x) = \sum_{f(x)=y} 1 = d$$

para todo $y \in N \setminus V_f$. Supongamos que $y \in V_f$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_r\}$ y $d_i = \deg(f, x_i)$. Sea V una vecindad de y como en la definición de cubrimiento ramificado, es decir, $f^{-1}(V) = \sqcup_{i=1}^{r} U_i$, $x_i \in U_i$ y $f|_{U_i} : U_i \to V$ en coordenadas locales está dado por $z \mapsto z^{d_i}$. Entonces cada $w \in V \setminus \{y\}$ tiene d_i preimágenes en U_i. Como la cardinalidad de $f^{-1}(w)$ es d, se sigue que $d_1 + \cdots + d_r = d$. Esto termina la prueba del enunciado (4). ■

El siguiente resultado relaciona los grados locales de los puntos críticos de un cubrimiento ramificado $f : M \to N$ y la caracteristica de Euler de las superficies M y N. La demostración puede ser encontrada en [15].

Teorema 2.1.2. (Fórmula de Riemann-Hurwitz) Sea $f : M \to N$ un cubrimiento ramificado entre dos superficies compactas y orientadas. Entonces

$$\chi(M) = d \cdot \chi(N) + \sum_{x \in M} (\deg(f, x) - 1),$$

donde $\chi(X)$ es la característica de Euler de la superficie X y $d = \deg(f)$.

2.2. Funciones de Thurston

En este sección estableceremos algunas notaciones y definiciones con respecto a las funciones de Thurston. Usaremos S^2 para denotar una esfera topólogica 2-dimensional y orientada, y usaremos $\overline{\mathbb{C}}$ para denotar la esfera de Riemann.

Sea $f : S^2 \to S^2$ un cubrimiento ramificado de grado $d \geq 2$. Para cada $x \in S^2$, denotaremos el grado topológico de f en x por $\deg(f, x)$. El conjunto de puntos críticos de f será denotado y definido por $C_f := \{x \in S^2 : \deg(f, x) > 1\}$. La fórmula de Riemann-Hurwitz implica que f posee $2d - 2$ puntos críticos contados con multiplicidad. Definimos el conjunto poscrítico de f por

$$P_f := \bigcup_{n>0} f^{\circ n}(C_f),$$

donde $f^{\circ n}$ es la composición de f consigo misma n veces; i.e., P_f es la unión de todas las órbitas futuras del conjunto the puntos críticos de f.

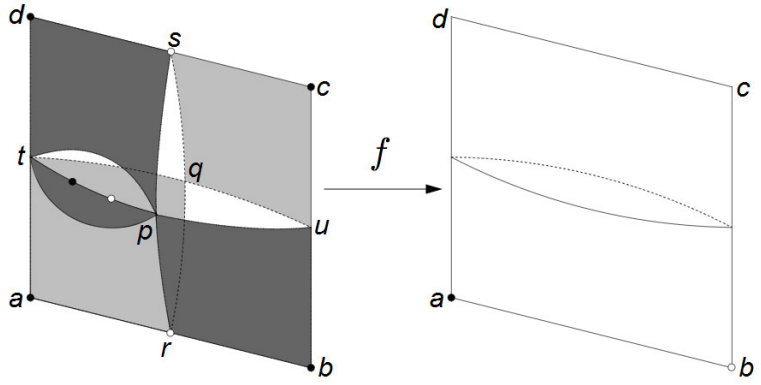
Definición 2.2.1. Si P_f es finito, decimos que f es una función de Thurston.

Ejemplo 2.2.1. Sea $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, donde $f(z) = z^2 - i$. El conjunto C_f esta dado por los puntos z en $\overline{\mathbb{C}}$ tales que $f'(z) = 0$. Es claro que $z = 0$ es el único punto crítico finito y que $\deg(f, 0) = 2$. Por otro lado, considerando la carta $\varphi(z) = 1/z$ tenemos que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^2(1 + iz^2 - z^4 - iz^6 + \cdots)$ si $|z| < 1$. En consecuencia $\deg(f, \infty) := \deg(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, 0) = 2$. Por tanto $C_f = \{0, \infty\}$. Podemos representar la acción de $f(z) = z^2 - i$ sobre $C_f = \{0, \infty\}$ mediante el siguiente esquema de mapeo.

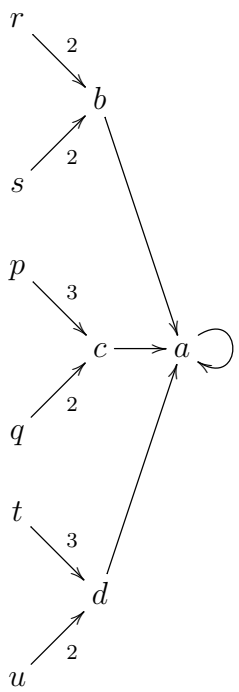
$$0 \xrightarrow{2} -i \longrightarrow -1 - i \longrightarrow i \qquad \infty \circlearrowright 2$$

Se sigue que $P_f = \{-i, -1-i, i, \infty\}$ y por tanto f es una función de Thurston.

Ejemplo 2.2.2. Una función de Thurston definida combinatoriamente.



En este caso el dominio de f y el codominio de f son esferas topológicas idénticas, cada una con una estructura CW-complejo. La esfera codominio tiene cuatro vértices a, b, c, d, cuatro aristas $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$, $[d, a]$ y dos caras, una cara frontal con vértices a, b, c, d orientados en sentido contrario a las agujas del reloj y una cara posterior con vértices a, b, c, d. La esfera dominio tiene doce vértices, veinte aristas y diez caras. Asumimos que la estructura CW-complejo en la esfera dominio es una subdivisión de la estructra CW-complejo, y definimos f del siguiente modo: f envía homeomorficamente (preservando orientación) el interior de cada cara en la esfera dominio en una cara de la esfera codominio. La cara con vértices a, r, p, t es enviada homeomorficamente en la cara frontal de la esfera codominio satisfaciendo las restricciones $f(a) = a$, $f(r) = b$, $f(p) = c$, $f(t) = d$. Procediendo de este modo (preservando orientación), obtenenos un cubrimiento ramificado $f : S^2 \to S^2$ de grado 5 verificando el siguiente esquema de mapeo.



La flecha dirigida con punto inicial en x y punto final en y indica que $f(x) = y$. El número sobre la flecha dirigida $x \longrightarrow y$ indica el grado local con el cual f mapea x en y, es decir, $\deg(f, x)$. En consecuencia $C_f = \{p, q, r, s, t, u\}$. Además, note que $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = a$. Entonces

$$P_f = \bigcup_{n>0} f^{\circ n}(C_f) = \{a, b, c, d\}.$$

Por tanto, f es una función de Thurston.

Definición 2.2.2. Dos funciones de Thurston $f : S^2 \to S^2$ y $g : S^2 \to S^2$ son **combinatoriamente equivalentes** si existen homeomorfismos $\varphi : S^2 \to S^2$ y $\varphi' : S^2 \to S^2$ tales que:

(1) $\varphi \circ f = g \circ \varphi'$

(2) φ y φ' son isotópicos por una isotopía relativa a P_f.

Parte (2) significa que existe una aplicación continua $\Phi : [0,1] \times S^2 \to S^2$ tal que $\Phi_t : S^2 \to S^2$ es un homeomorfismo para cada $t \in [0,1]$, $\Phi_0 = \varphi$, $\Phi_1 = \varphi'$, y además $\Phi_t|_{P_f} = \varphi|_{P_f}$ para todo $t \in [0,1]$. En particular $\varphi|_{P_f} = \varphi'|_{P_f}$.

Por (1) y usando el hecho que los grados locales se multiplican bajo composición de funciones, $\deg(\varphi, f(x)) \deg(f, x) = \deg(g, \varphi'(x)) \deg(\varphi', x)$ para todo $x \in S^2$. Como φ y φ' son homeomorfismos, $\deg(\varphi, f(x)) = \deg(\varphi', x) = 1$. Entonces, $x \in C_f$ si y solo si $\varphi'(x) \in C_g$. Por tanto $\varphi'(C_f) = C_g$. Usando el hecho que $\varphi|_{P_f} = \varphi'|_{P_f}$, concluimos que $\varphi'(P_f) = P_g$. Aplicando el mismo argumento a la ecuación $\varphi^{-1} \circ g = f \circ \varphi'^{-1}$, obtenemos $\varphi(P_f) = P_g$. En particular, el siguiente diagrama es commutativo

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_f) & \xrightarrow{\varphi'} & (S^2, P_g) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (S^2, P_f) & \xrightarrow{\varphi} & (S^2, P_g). \end{array}$$

Si en caso g es una función racional (i.e., el cociente de dos polynomials en una variable compleja) diremos que f es **realizable** por g.

2.3. Teoría de Teichmüller

En esta sección repasaremos algunas definiciones y resultados concernientes a espacios de Teichmüller modelados sobre esferas marcadas (S^2, P) donde P es finito. Estos resultados serán esenciales en la discusión que sigue. Para mayores detalles ver [15], y las referencias allí.

Sea P un subconjunto finito de S^2. El **espacio de Teichmüller** $\mathrm{Teich}(S^2, P)$ es el espacio de las estructuras complejas modelado sobre (S^2, P); esto es,

$$\mathrm{Teich}(S^2, P) = \{\phi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}\}/\sim$$

donde $\phi_2 \sim \phi_1$ si ϕ_1, ϕ_2 son homeomorfismos de S^2 en $\overline{\mathbb{C}}$ y existe una transformación de Möbius M tal que $M \circ \phi_1(x) = \phi_2(x)$ para todo $x \in P$, y las

aplicaciones $M \circ \phi_1$ y ϕ_2 son isotópicas por una isotopía relativa a P. El espacio $\text{Teich}(S^2, P)$ es una variedad compleja (ver [15, Capítulo 6]).

El **espacio de módulos** $\text{Mod}(S^2, P)$ es el espacio de todas las inyecciones $\psi : P \to \overline{\mathbb{C}}$ módulo poscomposición con transformaciones de Möbius; esto es, si $\psi_1, \psi_2 : P \to \overline{\mathbb{C}}$ son funciones inyectivas, entonces $\psi_1 \sim \psi_2$ si existe una transformación de Möbius μ tal que $\psi_2 = \mu \circ \psi_1$. Si ϕ representa un elemento de $\text{Teich}(S^2, P)$, la restricción $[\phi] \mapsto \phi|_P$ induce un cubrimiento universal $\pi : \text{Teich}(S^2, P) \to \text{Mod}(S^2, P)$ el cual es un biholomorfismo local con respecto a las estructuras complejas de $\text{Teich}(S^2, P)$ y $\text{Mod}(S^2, P)$.

Supongamos que $P = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ con $n \geq 3$, y sea $\psi \in \text{Mod}(S^2, P)$. Sea μ una transformación de Möbius tal que $\mu(\psi(x_1)) = 0$, $\mu(\psi(x_2)) = 1$, y $\mu(\psi(x_n)) = \infty$. El elemento ψ puede entonces ser especificado deacuerdo a las imágenes de $P \setminus \{x_1, x_2, x_n\}$ bajo la función $\mu \circ \psi$. De este modo identificamos $\text{Mod}(S^2, P)$ con un subconjunto abierto de $\overline{\mathbb{C}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{C}}$ donde hay $|P| - 3$ copias de $\overline{\mathbb{C}}$, y todas las coordenadas son dos a dos distintas y diferentes de 0, 1, ∞. Entonces podemos identificar $\text{Mod}(S^2, P)$ con un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^{|P|-3}$ donde todas las coordenadas son dos a dos distintas y diferentes de 0, 1. Por tanto, si $|P| \geq 3$, $\dim(\text{Teich}(S^2, P)) = \dim(\text{Mod}(S^2, P)) = |P| - 3$.

Sea $f : S^2 \to S^2$ una función de Thurston y sea P_f el conjunto de puntos poscríticos de f. Sea $\tau \in \text{Teich}(S^2, P_f)$ y supongamos que $\phi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ es un representante de τ. Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$(S^2, P_f) \xrightarrow{f} (S^2, P_f) \xrightarrow{\phi} (\overline{\mathbb{C}}, \phi(P_f))$$

Las restricciones de $\phi \circ f$ a subconjuntos abiertos de S^2 donde la composición $\phi \circ f$ es injectiva definen una estructura compleja sobre S^2 salvo en los puntos críticos de f. Si $w \in C_f$ podemos escoger una rama de $(\phi \circ f)^{1/\deg(f,w)}$ que es un homeomorfismo local. Por tanto, usando $\phi \circ f$ como nuevas cartas es posible dotar de una estructura compleja a S^2. Con esta estructura compleja S^2 es una superficie de Riemann homeomorfa a la esfera y la función $\phi \circ f$ es holomorfa. Por el Teorema de uniformización de Riemann, existe un isomorfismo conforme $\psi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que el siguiente diagrama commuta y donde la aplicación $f_\tau : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definida por $f_\tau := (\phi \circ f) \circ \psi^{-1}$ es holomorfa y por tanto racional.

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_f) & \xrightarrow{\psi} & (\overline{\mathbb{C}}, P_g) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_\tau} \\ (S^2, P_f) & \xrightarrow{\phi} & (\overline{\mathbb{C}}, P_g). \end{array}$$

Sea $[\psi]$ la clase de equivalencia de ψ en $\text{Teich}(S^2, P_f)$. Usando argumentos

apropriados de levantamientos de clases de homotopía (ver [5, Sección 1.3]), se concluye que si hay otra aplicación $\psi' : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ que hace que el diagrama arriba sea commutativo, entonces debemos tener $\psi' \in [\psi]$ en $\text{Teich}(S^2, P_f)$.

Definición 2.3.1. Sean f, P_f, ϕ, ψ como arriba. La aplicación

$$\Sigma_f : \text{Teich}(S^2, P_f) \to \text{Teich}(S^2, P_f),$$

donde $\Sigma_f : [\phi] \mapsto [\psi]$ es llamada la **función pullback de Thurston**.

El siguiente resultado, tomado de [16], nos da un criterio analítico para determinar cuando una función de Thurston es realizable por una función racional.

Teorema 2.3.1. (Douady, Hubbard) Una función de Thurston f es combinatoriamente equivalente a función racional si y solo si la función pullback de Thurston Σ_f tiene un punto fijo.

Demostración. Si f es combinatoriamente equivalente a una función racional g, entonces existen homeomorfismos $\varphi, \varphi' : (S^2, P_f) \to (\overline{\mathbb{C}}, P_g)$ que coinciden en P_f, que son isotópicos por una isotopía relativa a P_f, y tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_f) & \xrightarrow{\varphi'} & (\overline{\mathbb{C}}, P_g) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (S^2, P_f) & \xrightarrow{\varphi} & (\overline{\mathbb{C}}, P_g). \end{array}$$

commuta. Esto significa que $g = f_\tau$ donde $\tau = [\varphi] \in \text{Teich}(S^2, P_f)$. Entonces $\Sigma_f(\tau) = \tau'$ esta representado por φ'. Pero las funciones φ y $i_d \circ \varphi'$ coinciden en P_f y son isotópicas por una isotopía relativa a P_f, esto significa que $\tau = \tau'$ en $\text{Teich}(S^2, P_f)$, entonces τ es un punto fijo de Σ_f.

Para el converso, sea $\tau \in \text{Teich}(S^2, P_f)$ tal que $\Sigma_f(\tau) = \tau$ y supongamos que $\phi : (S^2, P_f) \to (\overline{\mathbb{C}}, \phi(P_f))$ es un representante de τ. Sea ψ como en la definición de Σ_f. Entonces tenemos el siguiente diagrama commutativo

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_f) & \xrightarrow{\psi} & (\overline{\mathbb{C}}, \psi(P_f)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_\tau} \\ (S^2, P_f) & \xrightarrow{\phi} & (\overline{\mathbb{C}}, \phi(P_f)). \end{array}$$

La condición $\Sigma_f(\tau) = \tau$ nos dice que $\psi : (S^2, P_f) \to (\overline{\mathbb{C}}, \psi(P_f))$ es también un representante de τ. Entonces existe una transformación de Möbius α tal que

el triángulo superior en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & (\overline{\mathbb{C}}, \phi(P_f)) \\ & \overset{\phi}{\nearrow} & \downarrow \alpha \\ (S^2, P_f) & \xrightarrow{\psi} & (\overline{\mathbb{C}}, \psi(P_f)) \\ f \downarrow & & \downarrow f_\tau \\ (S^2, P_f) & \xrightarrow{\phi} & (\overline{\mathbb{C}}, \phi(P_f)) \end{array}$$

commmuta sobre P_f y donde $\alpha \circ \phi$ es isotópica a ψ por una isotopía relativa a P_f. Sea $\beta := \alpha^{-1} \circ \psi$. Luego el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_f) & \xrightarrow{\beta} & (\overline{\mathbb{C}}, \psi(P_f)) \\ f \downarrow & & \downarrow f_\tau \circ \alpha \\ (S^2, P_f) & \xrightarrow{\phi} & (\overline{\mathbb{C}}, \phi(P_f)) \end{array}$$

tiene las propiedades correctas para que f y la función racional $f_\tau \circ \alpha$ sean combinatoriamente equivalentes: el diagrama commuta, y las aplicaciones β y ϕ son isotópicas por una isotopía relativa a P_f. ■

2.4. El Teorema de Thurston

Antes de enunciar el teorema de Thurston, requerimos de algunas definiciones adicionales. Las definiciones y resultados presentados en esta sección se pueden encontrar en [16, Capítulo 10].

Definición 2.4.1. Orbivariedad bidimensional.

- Una orbivariedad 2-dimensional es un par (X, ν) donde X es una superficie orientada y $\nu : X \to \{1, 2, \cdots, \infty\}$ es una función tal que $\{x \in X : \nu(x) > 1\}$ es un conjunto discreto.
- La *característica de Euler* de una orbivariedad 2-dimensional compacta (X, ν) es
$$\chi(X, \nu) := \chi(X) - \sum_{x \in X} \Big(1 - \frac{1}{\nu(x)}\Big).$$
Desde que un subconjunto discrete de un espacio compacto es finito, sólo hay una cantidad finita de puntos $x \in X$ satisfaciendo $\nu(x) > 1$.
- Una orbivariedad (X, ν) es llamada *hiperbólica* si $\chi(X, \nu) < 0$.

Sea $f : S^2 \to S^2$ una función de Thurston y sea P_f su conjunto poscrítico. La orbivariedad $\mathcal{O}_f$ associada a f es el par (S^2, ν_f) donde la función peso $\nu_f : S^2 \to \{1, 2, \cdots, \infty\}$ se define por

$$\nu_f(x) = \begin{cases} \text{mcm}(D_f(x)) & \text{si } D_f(x) \text{ es finito,} \\ \infty & \text{si } D_f(x) \text{ es infinito,} \end{cases}$$

donde $D_f(x) = \{n \in \mathbb{Z}^+ : \exists m, \exists y \text{ con } f^{\circ m}(y) = x \text{ y } \deg(f^{\circ m}, y) = n\}$, y mcm denote el mínimo común múltiplo. La definición de ν_f implica que $\nu_f(x) > 1$ si y solo si $x \in P_f$. Entonces la caracteristica de Euler de $\mathcal{O}_f$ es

$$\chi(\mathcal{O}_f) = 2 - \sum_{x \in P_f} \Big(1 - \frac{1}{\nu_f(x)}\Big).$$

La orbivariedad $\mathcal{O}_f$ es llamada *hiperbólica* si $\chi(\mathcal{O}_f) < 0$. Note que si $|P_f| \geq 5$ entonces O_f es hiperbólica.

Ejemplo 2.4.1. Sea $f(z) = z^2 - i$. Por el Ejemplo 2.2.1, sabemos que $C_f = \{0, \infty\}$, $P_f = \{-i, -1 - i, i, \infty\}$. Usando el esquema de mapeo del Ejemplo 2.2.1, se sigue que $\nu_f(-i) = 2 = \nu_f(-1 - i) = 1 = \nu_f(i) = 2$ y $\nu_f(\infty) = \infty$. Entonces

$$\chi(\mathcal{O}_f) = 2 - \Big[\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(1 - \frac{1}{\infty}\Big)\Big] = -\frac{1}{2}.$$

En este caso, $\mathcal{O}_f$ es hiperbólica.

Definición 2.4.2. Una curva de Jordan γ en $S^2 \setminus P_f$ es:

- **esencial** si cada componente conexa de $S^2 \setminus \gamma$ contiene por lo menos dos puntos poscríticos.
- **periférica** si una de las componentes conexas de $S^2 \setminus \gamma$ contiene exactamente un punto poscrítico.
- **trivial** si una de las componentes conexas de $S^2 \setminus \gamma$ no contiene puntos de P_f.

Una multicurva $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ es una colección finite de curvas de Jordan en $S^2 \setminus P_f$ que son disjuntas, essenciales, y dos a dos no homótopicas en $S^2 \setminus P_f$. Una multicurva Γ es llamada **f-estable** si cada elemento de $f^{-1}(\Gamma)$ o es una curva trivial, o es periférica, o es homotópica en $S^2 \setminus P_f$ a un elemento de Γ.

La matriz de Thurston $A^\Gamma : \mathbb{R}^{|\Gamma|} \to \mathbb{R}^{|\Gamma|}$, para una multicurva f-estable, es definida en coordenadas por

$$A^\Gamma_{\gamma\delta} = \sum_\alpha \frac{1}{\deg(f : \alpha \to \delta)},$$

donde la suma es tomada sobre las componentes α de $f^{-1}(\delta)$ que son homotópicas a γ en $S^2 \setminus P_f$. La matriz A^Γ tiene entradas no negativas, entonces por el Teorema de Perron-Frobenius el radio espectral de A^Γ, denotado por λ_Γ, es un autovalor positivo de A^Γ.

Ahora podemos enunciar la caracterización topológica de funciones racionales dada por Thurston. La demostración escrita por Douady y Hubbard se puede encontrar en [11].

Teorema 2.4.1. (Thurston). Una función de Thurston f con orbivariedad hiperbólica $\mathcal{O}_f$ es equivalent a una función racional si y solo si para cualquier multicurva Γ que es f-estable se tiene que $\lambda_\Gamma < 1$. En tal caso, la función racional es única salvo conjugación con transformaciones de Möbius.

Definición 2.4.3. Sea f una función de Thurston con orbivariedad hiperbólica $\mathcal{O}_f$. Si Γ es una multicurva f-estable con $\lambda_\Gamma \geq 1$, entonces diremos que Γ es una **obstrucción de Thurston**. Si f no es equivalente a una función racional, entonces diremos que f es **obstruida**.

En [11, Sección 9], Douady and Hubbard muestran que para cualquier función de Thurston f, $\chi(\mathcal{O}_f) \leq 0$. Si en caso $\mathcal{O}_f$ no es hiperbólica, entonces $\chi(\mathcal{O}_f) = 0$ y en consecuencia

$$\sum_{x \in P_f} \Big(1 - \frac{1}{\nu_f(x)}\Big) = 2.$$

En tal caso, el conjunto de valores de ν_f distintos de 1 corresponde a exactamente una de las siguientes listas:

$$(\infty, \infty);\ (2, 2, \infty);\ (2, 4, 4);\ (2, 3, 6);\ (3, 3, 3);\ (2, 2, 2, 2).$$

Las cinco primeras listas corresponden a funciones de Thurston f con $|P_f| \leq 3$. En estos cinco primeros casos, el espacio de Teichmüller $\mathrm{Teich}(S^2, P_f)$ se reduce a un punto y f es equivalente a una función racional. La última lista de valores para ν_f solo puede ocurrir si f posee exactamente cuatro puntos poscríticos y además $\nu_f(x) = 2$ para todo $x \in P_f$. En este último caso se prueba que la orbivariedad $\mathcal{O}_f$ es doblemente cubierta por un toro T_f, que la función f puede ser levantada a una función de cubrimiento de este toro, y que existe una matriz A_f de orden 2×2 que representa el mapeo inducido sobre homología $H_1(T_f, \mathbb{Z}) \to H_1(T_f, \mathbb{Z})$. Para mayores detalles ver [16, Anexo C8]. En este caso, el teorema de characterización de Thurston es el siguiente.

Teorema 2.4.2. (Thurston). Sea f una función de Thurston con orbivaridad $(2, 2, 2, 2)$. Entonces, f es equivalente a una función rational si y solo si los autovalores de A_f son no reales, ó si A_f es un múltiplo de la identidad.

2.5. Regla finita de subdivisión.

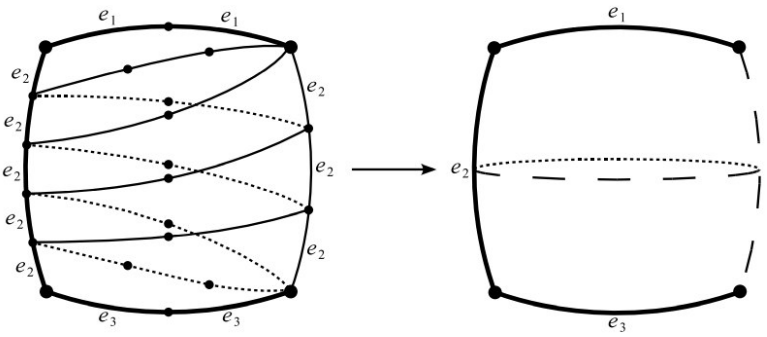
Una forma de producir ejemplos de funciones de Thurston es mediante reglas finitas de subdivisión sobre S^2. Siguiendo la definición dada en [7], una **regla finita de subdivisión $\mathcal{R}$ sobre** S^2 consiste de una estructura CW-complejo finita sobre S^2 (**complejo inicial**) denotado por $S_{\mathcal{R}}$, una subdivisión $\mathcal{R}(S_{\mathcal{R}})$ de $S_{\mathcal{R}}$ (esto significa que $\mathcal{R}(S_{\mathcal{R}})$ es un CW-complejo sobre S^2 tal que cada una de sus células cerradas está contenida en alguna célula cerrada de $S_{\mathcal{R}}$), y una función continua $\sigma_{\mathcal{R}}\colon\ \mathcal{R}(S_{\mathcal{R}}) \to S_{\mathcal{R}}$ (**mapeo de subdivisión**) cuya restricción a cada célula abierta es un homeomorfismo sobre una célula abierta. En particular, $\sigma_{\mathcal{R}}$ es una aplicación celular. Además, para cada célula cerrada $\tilde{t}$ de dimensión 2 en $S_{\mathcal{R}}$ existe:

(i) una estructura celular t (llamada el **tipo de loseta** de $\tilde{t}$) sobre el disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ tal que el primer esqueleto de t es $\partial\mathbb{D}$, y

(ii) una aplicación continua y surjectiva $\psi_t\colon\ t \to \tilde{t}$ (llamada la **aplicación característica** de $\tilde{t}$) cuya restricción a cada célula abierta es un homeomorfismo sobre una célula abierta.

Es claro que la función $\sigma_{\mathcal{R}}$ es una función de Thurston si tiene grado mayor que 1. Por otro lado, una función de Thurston f es el mapeo de subdivisión de una regla finita de subdivisión si y solo si existe un grafo conexo y finito G que es f-estable (i.e., $G \subseteq f^{-1}(G)$) y que contiene al conjunto P_f. Tal grafo G sirve como el primer esqueleto de un complejo inicial.

Ejemplo 2.5.1. La función abajo, que llamaremos f, es celular, cada arista con etiqueta e_i en la esfera dominio es enviada homeomorficamente en la arista con etiqueta e_i en la esfera codominio. Se sigue que, los puntos poscríticos de f son las cuatro "esquinas" de la "almohada" que representa la esfera codominio. Por tanto f es una función de Thurston. Desde que el grafo $G = e_1 \cup e_2 \cup e_3$ en la esfera codominio es f-estable, concluimos que f es el mapeo de subdivisión de una regla de subdivisión finita. En esta regla finita de subdivisión solo hay un tipo de loseta: hexágono.



Capítulo 3

Funciones de Thurston casi Euclidianas (NET)

En este capítulo establecemos el concepto de función NET y discutimos algunas de sus propiedades básicas. Mostramos que estas funciones se comportan como las funciones Lattés (ver [19]), es decir, pueden ser levantadas a funciones entre toros de dimensión 2. En virtud de este levantamiento, deducimos que siempre es posible asociar un diagrama commutativo a toda función NET. Además, mostramos que si f es una función NET y si δ es una curva esencial en $S^2 \setminus P_f$ entonces es posible determinar el número de preimages esenciales en $f^{-1}(\delta)$ en función de la pendiente de la curva δ y de la información codificada en el diagrama commutativo inherente a f.

Los resultados y el ejemplo principal discutidos en este capítulo pueden ser encontrados en [8, Sección 1]. Sin embargo, para una mejor exposición del tema, el autor de esta tesis ha incorporado algunos ejemplos y ha extendido de manera más detallada varias pruebas del artículo original. En particular, la prueba del Lema 3.1.2, los ejemplos dados en Observación 3.2.1, y los ejemplos en la Sección 3.4 son propios del autor.

3.1. Definiciones y propiedades básicas

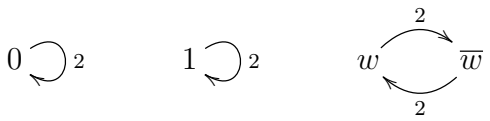
Definición 3.1.1. Una función de Thurston $f : S^2 \to S^2$ es **Euclidiana** si $\deg(f, x) = 2$ para todo $x \in C_f$, $|P_f| \leq 4$ y $C_f \cap P_f = \emptyset$.

Definición 3.1.2. Una función de Thurston $f : S^2 \to S^2$ es **casi Euclidiana (NET)** si $\deg(f, x) = 2$ para todo $x \in C_f$ y $|P_f| = 4$.

Ejemplo 3.1.1. Sea $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$f(z) = \frac{3z^2}{2z^3 + 1}.$$

Los puntos críticos de f son las soluciones de la ecuación $f'(z) = 0$. Desde que $f'(z) = 6z(1 - z^3)/(2z^3 + 1)^2$, $C_f = \{0, 1, w, \overline{w}\}$ donde $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$. Como los puntos críticos de f son ceros simples de f', $\deg(f, x) = 2$ para todo $x \in C_f$. Por otro lado, la acción de f sobre $C_f = \{0, 1, w, \overline{w}\}$ esta representada en el siguiente esquema de mapeo.



Por tanto $P_f = \{0, 1, w, \overline{w}\}$ y f es una función NET no Euclidiana.

Aunque la definición sólo requiere que una función de Thurston Euclidiana tenga a lo más cuatro puntos poscríticos, el primer enunciado del siguiente lema muestra que el número de puntos poscríticos es exactamente cuatro.

Lema 3.1.1. Se cumple lo siguiente.

(1) Toda función de Thurston Euclidiana tiene exactamente cuatro puntos poscríticos.
(2) Sea $f : S^2 \to S^2$ una función NET con conjunto poscrítico P_f. Entonces, $f^{-1}(P_f)$ contiene exactamente cuatro puntos no críticos. La función f es Euclidiana si y solo si estos cuatro puntos son los puntos de P_f.

Demostración. Para probar el enunciado (1), sea $f : S^2 \to S^2$ una función de Thurston Euclidiana con conjunto postcrítico P_f y grado $d > 1$. Cada punto de S^2 tiene d preimágenes bajo f contadas con multiplicidad. En consecuencia $f^{-1}(P_f)$ tiene $d|P_f|$ puntos contados con multiplicidad. La fórmula de Riemann-Hurwitz implica que $\sum_{x \in C_f}(\deg(f, x) - 1) = 2d - 2$. Usando el hecho que $\deg(f, x) = 2$ para todo $x \in C_f$, se tiene $|C_f| = 2d - 2$. Desde que $C_f \sqcup P_f \subseteq f^{-1}(P_f)$, obtenemos la desigualdad $2(2d - 2) + |P_f| \leq d|P_f|$. Entonces $(4 - |P_f|)(d - 1) \leq 0$ lo cual implica que $|P_f| \geq 4$. Por hipótesis $|P_f| \leq 4$, por tanto $|P_f| = 4$. Esto prueba el enunciado (1).

Para probar el enunciado (2) asumimos que f es una función NET y procedemos como en el párrafo anterior. La igualdad $f^{-1}(P_f) = C_f \sqcup \left(f^{-1}(P_f) \setminus C_f\right)$ implica que $4d = 2(2d - 2) + |f^{-1}(P_f) \setminus C_f|$. Entonces $|f^{-1}(P_f) \setminus C_f| = 4$. Desde que $P_f \subseteq f^{-1}(P_f)$, tenemos $P_f \setminus C_f \subseteq f^{-1}(P_f) \setminus C_f$. Por consiguiente f es Euclidiana si y solo si $P_f = f^{-1}(P_f) \setminus C_f$. ■

Las funciones NET están estrechamente relacionadas a las funciones de Lattés. Una función de Lattés como en el artículo de Milnor [19] (la definición en [20] es más general) es una función racional que es a la vez una función de Thurston Euclidiana. Una importante propiedad de las funciones de Lattés es que estas pueden ser levantadas a funciones entre toros con estructura compleja de una manera especial. Para ser más precisos, si $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es una función de Lattés entonces existe un retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}$, una función afín $L : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$ de la forma $L(z) = az + b$ y una función holomorfa $\Theta : \mathbb{C}/\Lambda \to \overline{\mathbb{C}}$ de grado 2 tales que el diagrama

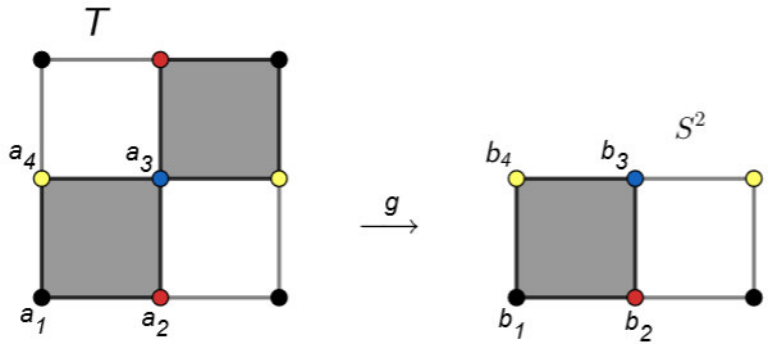
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{L} & \mathbb{C}/\Lambda \\ {\scriptstyle\Theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Theta} \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

es commutativo.

Mostraremos que las funciones NET pueden ser levantadas a funciones entre toros de una manera más general que las funciones de Lattés. Para ello, primero probaremos el siguiente lema.

Lema 3.1.2. Sea T un toro topológico y sea $P \subseteq S^2$ con $|P| = 4$. Entonces existe un cubrimiento ramificado de grado 2 de T en S^2 cuyo conjunto de valores críticos es P.

Demostración. Primero considere T y S^2 con descomposición celular como en la figura abajo. El toro T es obtenido identificando de manera usual los lados opuestos del cuadrado más grande, mientras que S^2 es obtenido identificando las dos mitades del segmento superior, las dos mitades del segmento inferior, y los lados verticales del rectángulo. En este caso, la esfera S^2 luce como una "almohada"con esquinas en los vertices b_1, b_2, b_3, b_4.



Sea $g : T \to S^2$ la aplicación celular definida arriba. Esta aplicación induce una orientación en T. Los colores indican la correspondiente imagen bajo g. Es claro que $g(a_i) = b_i$ y $\deg(g, a_i) = 2$ para $1 \leq i \leq 4$. Entonces g es un cubrimiento ramificado de grado 2, con $C_g = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y $V_g = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Supongamos que $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Sea $h : S^2 \to S^2$ un homeomorfismo que preserva orientación con $h(b_i) = x_i$ para $1 \leq i \leq 4$. Desde que los grados locales son invariantes bajo homeomorfismos, la aplicación $f = h \circ g$ es un cubrimiento ramificado de grado 2 de T en S^2 cuyo conjunto de valores críticos es P. ■

Teorema 3.1.1. Sea $f : S^2 \to S^2$ una función de Thurston. Entonces f es una función NET si y sólo si existen dos cubrimientos ramificados $p_1 : T_1 \to S^2$ y $p_2 : T_2 \to S^2$ de grado 2 definidos en toros topológicos tales que el conjunto de valores críticos de p_2 es P_f y existe una función continua $\tilde{f} : T_1 \to T_2$ tal que $p_2 \circ \tilde{f} = f \circ p_1$. Si f es una función NET, entonces f es Euclidiana si y solo si el conjunto de valores críticos de p_1 es P_f.

Demostración. Comenzaremos con la demostración del converso de la primera afirmación. Sean p_1, p_2 y $\tilde{f}$ como en el enunciado. Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz obtenemos $\chi(T_i) = \deg(p_i)\chi(S^2) - \sum_{x \in T_i}(\deg(p_i, x) - 1)$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Como $\deg(p_i) = 2$ y $\chi(T_i) = 0$ para cada $i \in \{1, 2\}$, y $\chi(S^2) = 2$, se sigue que $\sum_{x \in T_i}(\deg(p_i, x) - 1) = 4$. Entonces cada p_i posee exactamente cuatro puntos críticos simples y cuatro valores críticos. Por tanto $|P_f| = 4$. Si $\tilde{f} : T_1 \to T_2$ tuviera puntos críticos, por la fórmula de Riemann-Hurwitz tendríamos $\chi(T_2) = \deg(\tilde{f})\chi(T_1) - \sum_{x \in T_1}(\deg(\tilde{f}, x) - 1)$ con $\sum_{x \in T_1}(\deg(\tilde{f}, x) - 1) \neq 0$. Esto no es possible ya que $\chi(T_i) = 0$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Por tanto $\tilde{f} : T_1 \to T_2$ es un cubrimiento. A continuación probaremos que el grado local de f en cada uno de sus puntos críticos es 2. Sea $x \in S^2$ y sea $w \in T_1$ tal que $p_1(w) = x$. Usando el hecho que los grados locales se multiplican bajo composición de funciones y que el grado local de $\tilde{f}$ en cada punto es 1, tenemos

$$\begin{aligned} \deg(f, x)\deg(p_1, w) &= \deg(f \circ p_1, w) \\ &= \deg(p_2 \circ \tilde{f}, w) \\ &= \deg(p_2, \tilde{f}(w))\deg(\tilde{f}, w) \\ &= \deg(p_2, \tilde{f}(w)). \end{aligned}$$

Como el grado local de p_2 en cada punto es 1 ó 2 concluimos que el grado local de f en cada uno de sus puntos críticos es 2. Esto prueba el converso de la primera afirmación.

Para probar la implicación directa de la primera afirmación asumimos que $f : S^2 \to S^2$ es una función NET cuyo conjunto poscrítico es P_2. Lema 3.1.1 implica que $P_1 := f^{-1}(P_2) \setminus C_f$ tiene exactamente cuatro elementos. Sean T_1 y T_2 toros topológicos. Para cada $i \in \{1, 2\}$ sea $p_i : T_i \to S^2$ un cubrimiento ramificado de grado 2 tal que el conjunto de valores críticos de p_i es P_i (la existencia de estos cubrimientos ramificados está garantiza por el Lema 3.1.2). La restricción $p_2 : T_2 \setminus p_2^{-1}(P_2) \to S^2 \setminus P_2$ es un cubrimiento, y la restricción

$f \circ p_1 : T_1 \setminus p_1^{-1}(f^{-1}(P_2)) \to S^2 \setminus P_2$ es una función continua. En consecuencia tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & & T_2 \setminus p_2^{-1}(P_2) \\ & & \downarrow p_2 \\ T_1 \setminus p_1^{-1}(f^{-1}(P_2)) & \xrightarrow{f \circ p_1} & S^2 \setminus P_2. \end{array}$$

Nuestro objetivo es probar que la imagen de $(f \circ p_1)_*$ está contenida en la imagen de $(p_2)_*$ y usar el Teorema A.2.2 para obtener el levantamiento deseado.

En este párrafo determinaremos la imagen del homomorfismo inducido $(p_2)_*$. Recordar que el grupo fundamental $\pi_1(S^2 \setminus P_2)$ está generado por las clases de homotopía de cuatro lazos alrededor de los elementos de P_2. Fije $x_0 \in S^2 \setminus P_2$ y $\widetilde{x}_0 \in T_2 \setminus p_2^{-1}(P_2)$ con $p_2(\widetilde{x}_0) = x_0$. Sea $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ un conjunto de generadores de $\pi_1(S^2 \setminus P_2, x_0)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $g_1 g_2 g_3 g_4 = [c_{x_0}]$ y que $g_j = [\beta_j]$ donde β_j es un lazo con base en x_0 encerrando un solo elemento de P_2. Note que cada levantamiento de β_j es un arco con punto inicial en $\widetilde{x}_0$ y punto final en la otra preimagen de x_0 bajo p_2. Entonces g_j no está en la imagen de $(p_2)_*$. Sin embargo, un levantamiento del producto $\beta_j \beta_k$ es un lazo con base en $\widetilde{x}_0$. Entonces $g_j g_k$ está en la imagen de $(p_2)_*$. Sea N el subgrupo de $\pi_1(S^2 \setminus P_2, x_0)$ cuyos elementos pueden escribirse como productos finitos de longitud par de elementos del conjunto $\{g_1, g_2, g_3, g_4\} \cup \{g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}, g_4^{-1}\}$. Es claro que N es un subgrupo normal en $\pi_1(S^2 \setminus P_2, x_0)$ con índice 2 y que N está contenido en la imagen de $(p_2)_*$. Como el número de hojas del cubrimiento $p_2 : T_2 \setminus p_2^{-1}(P_2) \to S^2 \setminus P_2$ es 2, la imagen de $(p_2)_*$ es también un subgrupo normal en $\pi_1(S^2 \setminus P_2, x_0)$ con índice 2. En consecuencia, la imagen de $(p_2)_*$ en $\pi_1(S^2 \setminus P_2, x_0)$ es N.

Para determinar la imagen de $(f \circ p_1)_*$ será suficiente analizar las imágenes de las clases de homotopía de los lazos alrededor de elementos de $p_1^{-1}(f^{-1}(P_2))$. Fije $\widetilde{z}_0 \in T_1 \setminus p_1^{-1}(f^{-1}(P_2))$ con $(f \circ p_1)(\widetilde{z}_0) = x_0$. Sea α un lazo con base en $\widetilde{z}_0$ encerrando a un solo elemento de $p_1^{-1}(f^{-1}(P_2))$ que denotamos por w. Sea $\gamma = f(p_1(\alpha))$. Note que γ es un lazo con base en x_0 dando vueltas alrededor de un elemento de P_2. Desde que $p_1(w) \in P_1 \sqcup C_f$, tenemos dos casos.

- Si $p_1(w) \in P_1$, entonces $\deg(p_1, w) = 2$ y $\deg(f, p_1(w)) = 1$. En consecuencia, el número de vueltas de γ alrededor $f(p_1(w))$ es 2.
- Si $p_1(w) \in C_f$, entonces $\deg(p_1, w) = 1$ y $\deg(f, p_1(w)) = 2$. En consecuencia, el número de vueltas de γ alrededor de $f(p_1(w))$ es 2.

En cualquier caso, $[\gamma] = g^2$ para algún $g \in \pi_1(S^2 \setminus P_2, x_0)$. La definición del subgrupo N implica que $[\gamma] = g^2 \in N$. Como α es un lazo arbitrario con base

en $\widetilde{z_0}$ encerrando un solo elemento de $p_1^{-1}(f^{-1}(P_2))$ concluimos que la imagen de $(f \circ p_1)_*$ está contenida en la imagen de $(p_2)_*$. Por el Teorema A.2.2, existe un levantamiento de $f \circ p_1$ definido en $T_1 \setminus p_1^{-1}(f^{-1}(P_2))$ tomando valores en $T_2 \setminus p_2^{-1}(P_2)$. Luego, podemos extender este levantamiento a un levantamiento $\tilde{f} : T_1 \to T_2$ tal que $p_2 \circ \tilde{f} = f \circ p_1$. Esto prueba la implicación directa de la primera afirmación.

Ahora probaremos la segunda afirmación. Sea f una función NET y sean p_1, p_2 y $\tilde{f}$ como en el enunciado de la primera afirmación. Si $w \in C_{p_1}$, la igualdad $\deg(f, p_1(w)) \deg(p_1, w) = \deg(p_2, \tilde{f}(w))$ implica que $p_1(w) \in f^{-1}(P_f) \setminus C_f$. Luego $p_1(C_{p_1}) \subseteq f^{-1}(P_f) \setminus C_f$. Desde que $P_f \subseteq f^{-1}(P_f) = C_f \sqcup (f^{-1}(P_f) \setminus C_f)$ y $|P_f| = |p_1(C_{p_1})| = 4$, f es Euclidiana si y solo si $p_1(C_{p_1}) = P_f$. ■

Sea f una función NET y sean p_1, p_2 y $\tilde{f}$ como en el Teorema 3.1.1. A continuación deduciremos un diagrama commutativo asociado a f. Sea P_j el conjunto de valores críticos de p_j en S^2 para $j \in \{1, 2\}$. El conjunto P_2 es el conjunto de puntos postcríticos de f.

Sea $j \in \{1, 2\}$ y sea $q_j : \mathbb{R}^2 \to T_j$ un cubrimiento universal del toro T_j. Por el Corolario A.2.2 la restricción $p_j : T_j \setminus p_j^{-1}(P_j) \to S^2 \setminus P_j$ es un cubrimiento regular, entonces la función $p_j \circ q_j : \mathbb{R}^2 \to S^2$ es un cubrimiento ramificado y regular con grado local igual a 2 en cada punto crítico. Sea $\Lambda_j \subseteq \mathbb{R}^2$ el conjunto de todos los puntos críticos de $p_j \circ q_j$ y sea Γ_j el grupo de transformaciones deck de $p_j \circ q_j$. Escogiendo q_j apropiadamente, podemos asumir que Γ_j es generado por el conjunto de todas las rotaciones Euclidianas de orden 2 centradas en puntos de Λ_j, es decir, $\Gamma_j = \langle \{x \mapsto 2\lambda - x : \lambda \in \Lambda_j\} \rangle$. Dadas dos rotaciones $x \mapsto 2\lambda - x$ y $x \mapsto 2\mu - x$ de orden 2 centradas en los puntos λ, $\mu \in \Lambda_j$, su composición, la segunda seguida de la primera, es la traslación $x \mapsto x + 2(\lambda - \mu)$. Normalizando, podemos assumir que $(0, 0) \in \Lambda_j$. Se sigue que Λ_j es un retículo en $\mathbb{R}^2$ y que los elementos de Γ_j son las funciones de la forma $x \mapsto 2\lambda \pm x$ para algún $\lambda \in \Lambda_j$.

Desde que $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, $(\tilde{f} \circ q_1)_*(\pi_1(\mathbb{R}^2)) = (q_2)_*(\pi_1(\mathbb{R}^2))$. Por el Teorema A.2.2, existe una función continua $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $q_2 \circ h = \tilde{f} \circ q_1$. La aplicación q_2 es un homeomorfismo local y $\tilde{f}$ es un cubrimiento, entonces h es también un cubrimiento. Por el Corolario A.2.1, h es un homeomorfismo. Reemplazamos q_1 por $q_1 \circ h^{-1}$. Como resultado, la función identidad de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es un levantamiento de $\tilde{f}$. En consecuencia, podemos asumir que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ y $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. De esta manera obtenemos el **diagrama commutativo estándar** en Figura 3.1, donde la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es la función identidad y las funciones definidas en Λ_1 y Λ_2 son inclusiones.

El grupo Γ_j contiene el grupo de transformaciones deck de q_j. Este es el subgrupo de índice 2 consistiendo de traslaciones de la forma $x \mapsto 2\lambda + x$ con

$\lambda \in \Lambda_j$. Por ello, podemos identificar T_j con $\mathbb{R}^2/2\Lambda_j$. El diagrama commutativo estándar implica que tanto $\mathbb{R}^2/\Gamma_1$ como $\mathbb{R}^2/\Gamma_2$ se identifican con S^2. Por lo tanto existe una **función identificación** $\phi : \mathbb{R}^2/\Gamma_2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma_1$. De manera más precisa, para evaluar f en algún punto x, consideramos x como un elemento de $\mathbb{R}^2/\Gamma_1$, lo levantamos a $\mathbb{R}^2$, luego proyectamos este levantamiento a $\mathbb{R}^2/\Gamma_2$ y finalmente aplicamos la identificación ϕ para obtener $f(x)$. En el caso de funciones de Thurson Euclidianas, usualmente construiremos esta identificación usando un automorfismo afín sobre $\mathbb{R}^2$ el cual se restringe a un isomorfismo afín de Λ_2 en Λ_1.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_1 & \xrightarrow{i_c} & \Lambda_2 \\
{\scriptstyle i_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_c} \\
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{i_d} & \mathbb{R}^2 \\
{\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\
T_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & T_2 \\
{\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\
S^2 & \xrightarrow{f} & S^2
\end{array}$$

Figura 3.1: Diagrama commutativo estándar.

En este párrafo discutiremos como la identificación ϕ puede obtenerse de un isomorfismo afín. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un isomorphismo afín tal que $\Phi(\Lambda_2) = \Lambda_1$. Toda rotación en Γ_2 tiene la forma $x \mapsto 2\lambda - x$ para algún $\lambda \in \Lambda_2$. Supongamos que $\Phi(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^2$. Sea $\lambda \in \Lambda_2$. Entonces $\Phi(2\lambda - x) = A(2\lambda - x) + b = 2(A\lambda + b) - (Ax + b) = 2\Phi(\lambda) - \Phi(x)$. La condición $\Phi(\Lambda_2) = \Lambda_1$ y el hecho que $\Gamma_j = \langle x \mapsto 2\lambda - x : \lambda \in \Lambda_j \rangle$, para cada $j \in \{1, 2\}$, implican que Φ induce un homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2/\Gamma_2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma_1$.

Debido a que un levantamiento de $\tilde{f}$ es la función identidad, cuando interpretamos $\tilde{f}$ en términos de teoría de grupos, vemos que $\tilde{f}$ es el homomorfismo canónico de grupos de $\mathbb{R}^2/2\Lambda_1$ en $\mathbb{R}^2/2\Lambda_2$ El núcleo de este homomorfismo es el grupo cociente $2\Lambda_2/2\Lambda_1 \cong \Lambda_2/\Lambda_1$. Por tanto $\deg(f) = \deg(\tilde{f}) = |\Lambda_2/\Lambda_1|$.

Teorema 3.1.2. Sea f una función NET. Entonces $q_1^{-1}(p_1^{-1}(P_2)) \subseteq \Lambda_2$.

Demostración. Sea $x \in P_2$ y sea $y \in T_1$ tal que $p_1(y) = x$. Usando el diagrama commutativo estándar tenemos $p_2(\tilde{f}(y)) = f(p_1(y)) = f(x) \in P_2$. Entonces $\tilde{f}(y)$ es uno de los cuatro puntos críticos de p_2 en T_2. Desde que $\deg(\tilde{f}) = \deg(f)$, concluimos que $p_1^{-1}(P_2)$ está contenido en el conjunto de $4\deg(f)$ puntos de T_1 que es mapeado mediante $\tilde{f}$ en el conjunto de puntos críticos de p_2. Esto implica que $q_1^{-1}(p_1^{-1}(P_2)) \subseteq \Lambda_2$. ■

3.2. Factorización de funciones NET

En esta sección explicaremos como obtener nuevas funciones NET a partir de funciones NET ya conocidas mediante poscomposición con homeomorfismos.

Teorema 3.2.1. Si $g : S^2 \to S^2$ es una función NET y $h : S^2 \to S^2$ es un homeomorfismo que preserva orientación tal que $h(P_g) \subseteq g^{-1}(P_g)$, entonces $f = h \circ g$ es una función NET si posee por lo menos cuatro puntos poscríticos.

Demostración. Es claro que f es un cubrimiento ramificado que preserva orientación. Como h es un homeomorfismo, $x \in C_f$ si y sólo si $x \in C_g$. Sea $x \in C_f$, entonces $g(x) \in P_g$ y en consecuencia $f(x) \in h(P_g)$. Por tanto los valores críticos de f están en $h(P_g)$. Por otro lado, la inclusión $h(P_g) \subseteq g^{-1}(P_g)$ implica que $f(h(P_g)) \subseteq h(P_g)$. Entonces P_f está contenido en $h(P_g)$ que es un conjunto con cuatro elementos. Si f posee por lo menos cuatro puntos poscríticos, concluimos que f es una función NET. ■

Corolario 3.2.1. Si $g : S^2 \to S^2$ es una función NET cuyo grado es 3 ó mayor que 4, y $h : S^2 \to S^2$ es un homeomorfismo que preserva orientación tal que $h(P_g) \subseteq g^{-1}(P_g)$, entonces $f = h \circ g$ es una función NET.

Demostración. Note que si todo elemento de P_g es la imagen bajo g de un punto crítico de g, entonces todo elemento de $h(P_g)$ es la imagen bajo f de un punto crítico de f y en tal caso f tendría al menos cuatro puntos poscríticos. El enunciado (2) del Lema 3.1.1 muestra que $g^{-1}(P_g)$ contiene exactamente cuatro puntos que no son puntos críticos de g. Si algún punto $x \in P_g$ no es la imagen bajo g de un punto crítico de g, entonces $g^{-1}(x)$ contiene a lo sumo cuatro puntos y en consecuencia $\deg(g) \leq 4$. Concluimos que si $\deg(g) \geq 5$, entonces f tiene por lo menos cuatro puntos poscríticos. Luego, por el Teorema 3.2.1, f es una función NET si $\deg(g) \geq 5$.

Ahora supongamos que $\deg(g) = 3$. En este caso la preimagen bajo g de cada elemento de P_g contiene tres puntos contados con multiplicidad. Entonces, para cada $x \in P_g$, $g^{-1}(x)$ no puede contener dos puntos críticos. En consecuencia $|g^{-1}(x) \cap C_g| \leq 1$ y $|g^{-1}(x) \setminus C_g| \geq 1$ para todo $x \in P_g$. Por otro lado si $g^{-1}(a)$ no posee puntos críticos para algún $a \in P_g$, obtendríamos

$$|g^{-1}(P_g) \setminus C_g| = |g^{-1}(a)| + \sum_{x \in P_g \setminus \{a\}} |g^{-1}(x) \setminus C_g| \geq 3 + 3 = 6,$$

lo cual contradice el enunciado (2) del Lema 3.1.1. En consecuencia, $g^{-1}(x)$ contiene exactamente un punto crítico y un punto no crítico. Por tanto, si $\deg(g) = 3$, entonces f posee por lo menos cuatro puntos poscríticos. Luego, por el Teorema 3.2.1, f es una función NET si $\deg(g) = 3$. ■

Observación 3.2.1. La conclusión del corolario anterior puede no ser válida si $\deg(g) = 2$ ó si $\deg(g) = 4$. Los homeomorfismos en los siguientes ejemplos preservan orientación.

- Para el caso $\deg(g) = 2$ considere la función racional $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dada por $g(z) = (z - \mathbf{i})^2/(z + \mathbf{i})^2$. Note que $g(\mathbf{i}) = 0$, $g(-\mathbf{i}) = \infty$ y que $\deg(g, \pm i) = 2$. Entonces $C_g = \{\pm\mathbf{i}\}$. Además, se verifica fácilmente que $g(0) = g(\infty) = 1$ y $g(1) = g(-1) = -1$. Por tanto $P_g = \{\pm 1, 0, \infty\}$ y g es una función de Thurston Euclidiana. Sea $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ un homeomorfismo tal que $h(0) = \mathbf{i}$, $h(\infty) = -\mathbf{i}$, $h(1) = 1$ y $h(-1) = -1$. Se sigue que $h(P_g) \subseteq g^{-1}(P_g) = \{\pm 1, \pm\mathbf{i}, 0, \infty\}$. Sea $f = h \circ g$. Es claro que $C_f = \{\pm\mathbf{i}\}$ y que f fija $\pm\mathbf{i}$. Entonces $|P_f| = 2$ y por tanto f no es una función NET.
- Para el caso $\deg(g) = 4$ la considere la función racional $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dada por $g(z) = (z^2 + 1)^2/(4z^3 - 4z)$. Resolviendo la ecuación $g'(z) = 0$ deducimos que $C_g = \{1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{2}, \pm\mathbf{i}\}$. Como los puntos críticos de g son ceros simples de g', $\deg(g, x) = 2$ para todo $x \in C_g$. Además, se verifica fácilmente que $g(1 \pm \sqrt{2}) = 1$, $g(-1 \pm \sqrt{2}) = -1$, $g(\pm\mathbf{i}) = 0$, y $g(\pm 1) = g(0) = g(\infty) = \infty$. Por tanto $P_g = \{\pm 1, 0, \infty\}$ y g es una función de Thurston Euclidiana. Sea $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ un homeomorfismo tal que $h(0) = \mathbf{i}$, $h(\infty) = -\mathbf{i}$, $h(1) = 1 + \sqrt{2}$ y $h(-1) = -1 - \sqrt{2}$. Entonces $h(P_g) \subseteq C_g \subseteq g^{-1}(P_g)$. Sea $f = h \circ g$. Como h es un homeomorfismo, $C_f = C_g$. Por otro lado, no es difícil verificar que $f(1 \pm \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$, $f(-1 \pm \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2}$, y que $f(\pm\mathbf{i}) = \mathbf{i}$. Entonces $|P_f| = 3$ y por tanto f no es una función NET.

Teorema 3.2.2. Sea f una función NET con $P_1 = P_1(f)$ y $P_2 = P_2(f)$ bajo las notaciones usuales. Sea $h : S^2 \to S^2$ cualquier homeomorfismo que preserva orientación tal que $h(P_1) = P_2$. Entonces $f = h \circ g$, donde $g : S^2 \to S^2$ es una función de Thurston Euclidiana con $P_g = P_1$ y $P_2 \subseteq g^{-1}(P_g)$, de manera que $h(P_g) \subseteq g^{-1}(P_g)$.

Demostración. Sea $g := h^{-1} \circ f$. Como $P_1 \subseteq f^{-1}(P_f)$ y $P_2 = P_f$, tenemos que $h^{-1}(P_f) \subseteq f^{-1}(P_f)$. Repitiendo el argumento dado en la demostración del Teorema 3.2.1, se sigue que $P_g \subseteq h^{-1}(P_f)$. Desde que $|P_f| = 4$, $|P_g| \leq 4$. Como h es un homeomorfismo, $C_g = C_f$. Entonces $P_g \cap C_g = \emptyset$ ya que $P_g \subseteq h^{-1}(P_f) = P_1$ y $P_1 \cap C_f = \emptyset$. Además $\deg(g, x) = \deg(f, x)$ para todo $x \in S^2$, lo cual implica que $\deg(g, x) = 2$ para todo $x \in C_g$. Por tanto g es una función de Thurston Euclidiana. Por el enunciado (1) del Lema 3.1.1, $|P_g| = 4$. En consecuencia $P_g = h^{-1}(P_f) = P_1$. Por otro lado, es claro que $f(P_f) \subseteq P_f$. Entonces $h^{-1}(f(P_f)) \subseteq h^{-1}(P_f)$, lo cual significa que $g(P_f) \subseteq P_g$ y por tanto $P_f \subseteq g^{-1}(P_g)$. ■

3.3. Construcción del ejemplo principal

Ejemplo 3.3.1. Nuestro ejemplo principal (tomado de [8]) será una función NET de la forma $f = h \circ g$, donde g es una función de Thurston Euclidiana. En el proceso de definir g y f, mostraremos que cada uno hereda la estructura adicional de ser un mapeo de subdivisión para una regla de subdivisión finita. Para definir f, primero definimos g y luego definimos h.

Aquí $\mathbb{R}^2_1 = \mathbb{R}^2_2 = \mathbb{R}^2$, los subíndices son solo para clarificar. Comenzamos la definición de g estableciendo que $\Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$. Sea $\mathcal{S}_2$ el teselado del plano $\mathbb{R}^2_2$ que surge de cubrir el plano $\mathbb{R}^2_2$ con rectángulos de ancho 2 y altura 1 tales que las esquinas de los rectángulos están localizadas en los puntos $(x, y) \in 2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ como en la Figura 3.2. Como cada uno de estos rectángulos contiene seis elementos de Λ_2, cada uno de estos rectángulos debe ser visto como un hexágono en lugar de un cuadrilátero. Recordar que Γ_j es el grupo generado por todas las rotaciones Euclidianas de orden 2 centradas en puntos de Λ_j para $j \in \{1, 2\}$. Cada uno de estos rectángulos es un dominio fundamental para la acción de Γ_2 sobre $\mathbb{R}^2_2$. Denotaremos por F_2 el rectángulo cuyas esquinas son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 1)$.

Sea $\Lambda_1 = \langle(2, -1), (0, 5)\rangle$, el subretículo de Λ_2 generado por $(2, -1)$ y $(0, 5)$. Un dominio fundamental F_1 para la acción de Γ_1 sobre $\mathbb{R}^2_1$ es la región sombreada en la Figura 3.2. Daremos a F_1 de una estructura celular de manera que la frontera de F_1 es su primer esqueleto con vértices en $(0, 0)$, $(2, -1)$, $(4, -2)$, $(4, 3)$, $(2, 4)$ y $(0, 5)$. Vamos a considerar los rectángulos en la región sombreada en la Figura 3.2 como una subdivisión de F_1. Sea $\mathcal{S}_1$ el teselado del plano $\mathbb{R}^2_1$ que surge de cubrir el plano $\mathbb{R}^2_1$ con las imágenes de F_1 bajo elementos de Γ_1.

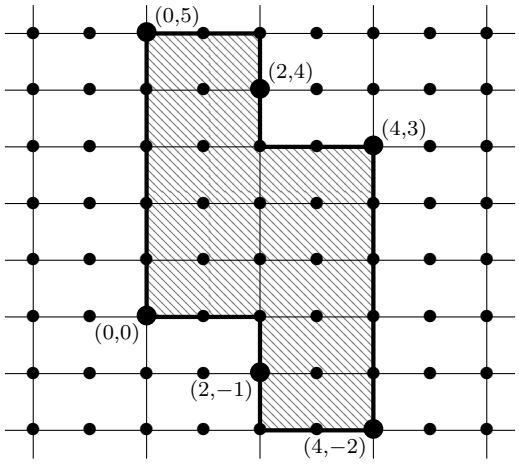


Figura 3.2: Un dominio fundamental para Γ_1 en el ejemplo principal.

Sea $j \in \{1,2\}$. Sea $T_j = \mathbb{R}^2_j/2\Lambda_j$, y sean $q_j : \mathbb{R}^2_j \to T_j$, $p_j : T_j \to \mathbb{R}^2_j/\Gamma_j$ las aplicaciones cociente canónicas. Definimos $\pi_j := p_j \circ q_j$. Como $\Lambda_1 < \Lambda_2$, $\Gamma_1 < \Gamma_2$. Entonces la aplicación identidad $i_d : \mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}^2_2$ induce un cubrimiento ramificado $\overline{i_d} : \mathbb{R}^2_1/\Gamma_1 \to \mathbb{R}^2_2/\Gamma_2$ de grado 10 tal que $\overline{i_d} \circ \pi_1 = \pi_2$.

A continuación, construiremos una función identificación $\phi : \mathbb{R}^2_2/\Gamma_2 \to \mathbb{R}^2_1/\Gamma_1$ para g. Como deseamos preservar la estructura celular, en lugar de usar directamente un automorfismo afín de $\mathbb{R}^2$ como en la Sección 3.1, procedemos como sigue. El teselado $\mathcal{S}_j$ induce un teselado de $\mathbb{R}^2/\Gamma_j$ con un solo tipo de loseta. Existe un homeomorfismo celular $\phi : \mathbb{R}^2_2/\Gamma_2 \to \mathbb{R}^2_1/\Gamma_1$ que envía $\pi_2(0,0)$ en $\pi_1(0,0)$. Tal homeomorfismo ϕ se puede construir como sigue. Comenzamos definiendo ϕ en los cuatro puntos $\pi_2(1,0)$, $\pi_2(0,0)$, $\pi_2(0,1)$, $\pi_2(1,1)$. A rigor, definimos ϕ de manera que envía los cuatro puntos $\pi_2(1,0)$, $\pi_2(0,0)$, $\pi_2(0,1)$, $\pi_2(1,1)$ biyectivamente en los cuatro puntos $\pi_1(2,-1)$, $\pi_1(0,0)$, $\pi_1(0,5)$, $\pi_1(2,4)$ en ese orden específico. La imagen de ∂F_2 en $\mathbb{R}^2_2/\Gamma_2$ es un arco uniendo los primeros cuatro puntos en orden, y la imagen de ∂F_1 en $\mathbb{R}^2_1/\Gamma_1$ es un arco uniendo los segundos cuatro puntos en orden. Luego extendemos ϕ a un homeomorfismo que va del primer arco en el segundo arco. Finalmente, extendemos esta función a un homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2_2/\Gamma_2 \to \mathbb{R}^2_1/\Gamma_1$ que perserva orientación. Usamos este homeomorfismo para identificar estos dos espacios e identificamos el resultado con S^2. Con esta identificación, el conjunto de valores críticos de π_1 es igual al conjunto de valores críticos de π_2. Esta función identificación es isotópica a la función identificación inducida por el automorfismo lineal de $\mathbb{R}^2$ cuya representación matricial con respecto a la base canónica es $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

Sea $g : S^2 \to S^2$ definida $g := \phi \circ \overline{i_d}$. Por la construcción arriba, g es una función de Thurston Euclidiana de grado 10. El conjunto poscrítico P_g es el conjunto de valores críticos de π_1. Mas aún, g es el mapeo de subdivisión de una regla de subdivisión finite sobre S^2. El complejo inicial sobre S^2 es obtenida de la imagen directa de $\mathcal{S}_1$ bajo π_1 mientras que la primera subdivisión es obtenida de la imagen directa de $\mathcal{S}_2$ bajo π_1. Figura 3.3 indica la acción de g. La parte derecha de la Figura 3.3 muestra la imagen directa de $\mathcal{S}_1$ bajo π_1 en S^2 y la parte izquierda muestra la imagen directa de $\mathcal{S}_2$ bajo π_1 en S^2. La mayoría de los vértices en la parte izquierda están etiquetados con preimágenes en $\mathbb{R}^2_1$ que se encuentran en el dominio fundamental F_1.

Por ahora tenemos la función g. Para $h : S^2 \to S^2$ escogemos un homeomorfismo que preserva orientación verificando lo siguiente.

- h mapea el primer esqueleto de $\pi_1(\mathcal{S}_1)$ en el primer esqueleto de $\pi_1(\mathcal{S}_2)$,
- h fija las imágenes de $(1,0), (0,0), \cdots (0,5), (1,5)$ bajo π_1.
- h mapea la imagen de $(2,4)$ bajo π_1 en la imagen de $(2,5)$ bajo π_1 y mapea la imagen de $(2,-1)$ bajo π_1 en la imagen de $(2,0)$ bajo π_1.

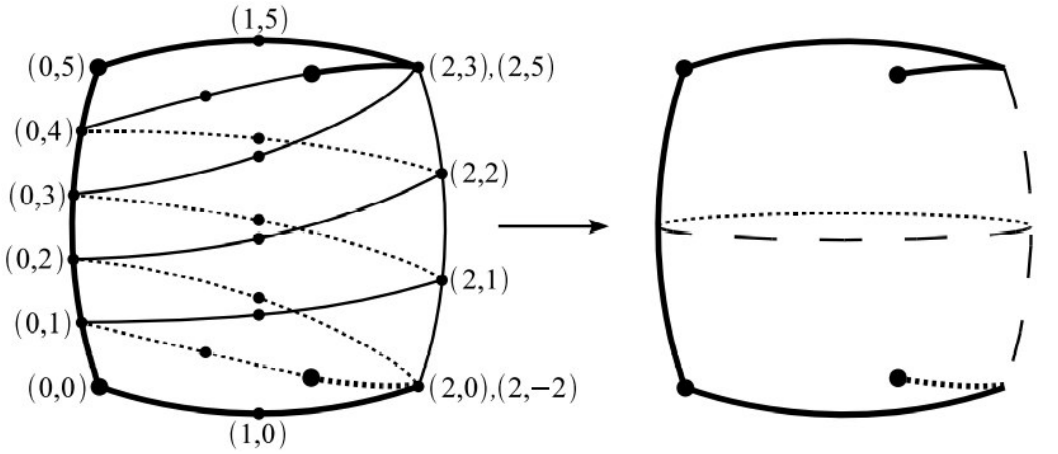


Figura 3.3: La función g en el ejemplo principal.

Sea $f = h \circ g$. La acción de f es indicada en la Figura 3.4. La función f mapea biyectivamente aristas con etiqueta e_i en aristas con etiqueta e_i. Por construcción, es claro que $h(P_g) \subseteq g^{-1}(P_g)$. Como el grado de g es 10 podemos usar el Corolario 3.2.1 y concluir que f es una función NET. Mas aún, por construcción, f es el mapeo de subdivisión de una regla de subdivisión finita $\mathcal{R}$. El único tipo de loseta de $\mathcal{R}$ es un hexágono. La subdivisión del hexágono es mostrada en la Figura 3.5.

Por otro lado, la Figura 3.6 muestra el esquema de mapeo de f. Los puntos están etiquetados con preimagenes en F_1 bajo la aplicación π_1.[1] El esquema de mapeo de f muestra que $P_f \cap C_f$ es no vacío. Por tanto $\mathcal{O}_f$ es hipérbolica.

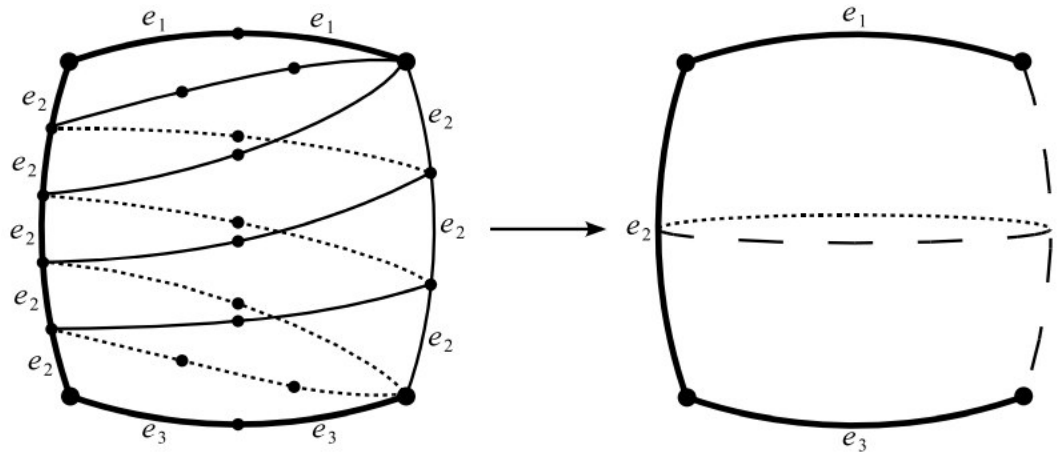


Figura 3.4: La función f en el ejemplo principal.

[1]Figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 han sido tomadas de [8].

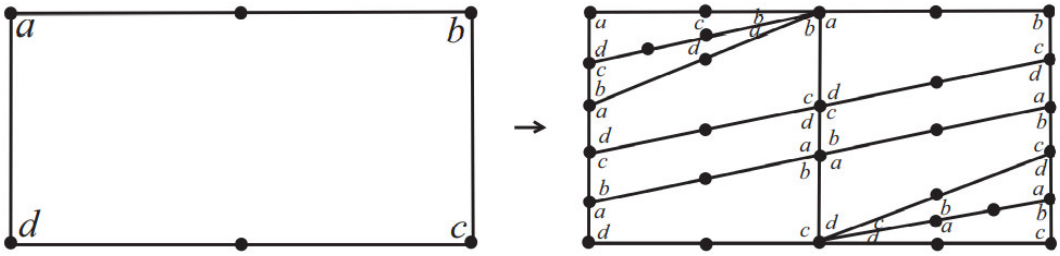


Figura 3.5: Visualizando f como un mapeo de subdivisión.

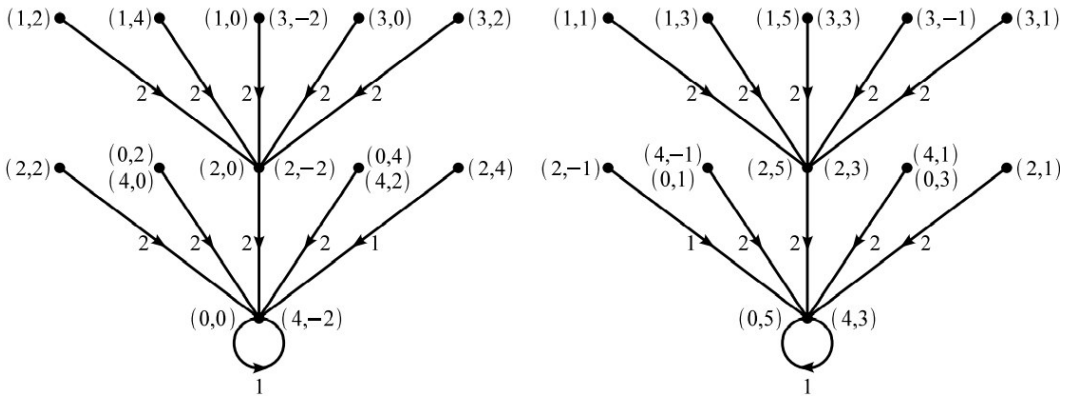


Figura 3.6: Esquema de mapeo del ejemplo principal.

3.4. Preimágenes de curvas esenciales.

Sea f una función NET, $j \in \{1, 2\}$ y sea (λ_j, μ_j) una base ordenada de Λ_j. En esta sección mantenemos todas las notaciones establecidas en la Sección 3.1.

Una curva de Jordan γ contenida en $S^2 \setminus P_j$ es llamada **trivial** si es homotópica a un punto de $S^2 \setminus P_j$, es llamada **periférica** si una de las componentes conexas de $S^2 \setminus \gamma$ contiene exactamente un punto de P_j, y es llamada **esencial** si cada una de las componentes conexas de $S^2 \setminus \gamma$ contiene dos puntos de P_j.

El cubrimiento $p_j \circ q_j : \mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_j \to S^2 \setminus P_j$ es de grado 2 y por tanto regular. Escogiendo convenientemente q_j podemos asumir que el grupo de transformaciones deck de $p_j \circ q_j$ es Γ_j. Sea α una curva esencial en $S^2 \setminus P_j$. Supongamos

que α tiene un levantamiento en $\mathbb{R}^2$ con punto inicial x y punto final y. Ya que α es no trivial, $x \neq y$. Como los elementos de Γ_j son isometrías Euclidianas y desde que este levantamiento de α es también el levantamiento de una curva cerrada en $T_j = \mathbb{R}^2/2\Lambda_j$, existe una traslación $\varphi \in \Gamma_j$ tal que $y = \varphi(x)$. Se sigue que la pendiente de la línea recta que pasa por x e y es independiente de la elección del levantamiento de α en $\mathbb{R}^2$. La pendiente de tal línea recta con respecto a la base ordenada (λ_j, μ_j) de Λ_j es llamada la **pendiente de** α.

Si γ una curva esencial en $S^2 \setminus P_j$, entonces γ separa dos puntos, x e y, de P_j de los otros dos puntos de P_j. Un arco en S^2 disjunto de γ que une x e y es llamado **arco principal de** γ. Una clase de homotópia de una curva esencial en $S^2 \setminus P_j$ es equivalente a una clase de homotópia de estos arcos.

Ejemplo 3.4.1. Sean $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ y $\Gamma = \langle \{x \mapsto 2\lambda - x : \lambda \in \Lambda\} \rangle$ y denotemos por $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/2\Lambda$ y por $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ los mapeos cocientes canónicos. Identificamos $\mathbb{R}^2/\Gamma$ con S^2. El lado derecho de la Figura 3.7 muestra un curva esencial γ (en azúl) y un arco principal para γ (en rojo) contenidos en $S^2 \setminus P$ donde $P = p(q(\Lambda)) = \{a, b, c, d\}$. El lado izquierdo muestra un levantamiento de δ y un levantamiento del arco principal. Por tanto la pendiente de δ con respecto a la base canónica de Λ es $1/2$.

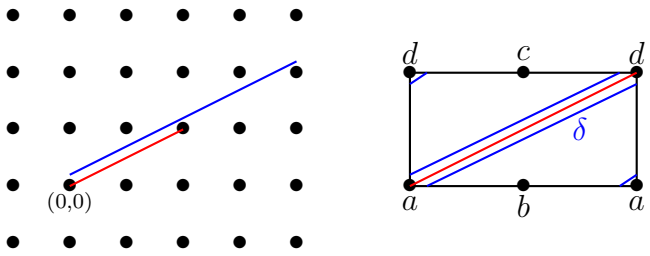


Figura 3.7: Levantamiento de una curva esencial y su pendiente.

A continuación daremos una definición que será usada en la prueba del teorema principal de esta sección.

Definición 3.4.1. Sea A un grupo Abelian finito y sea $H \subseteq A$ dado por $H = \{\pm h_1\} \sqcup \{\pm h_2\} \sqcup \{\pm h_3\} \sqcup \{\pm h_4\}$, es decir, H la unión disjunta de cuatro pares inversos. (Es posible que $h_i = -h_i$.) Sea B un subgroup cíclico de A tal que A/B es cíclico, y sea $a \in A$ tal que $a + B$ genera A/B. Sea n el orden de A/B. Para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ existe un único entero c con $0 \leq c \leq n/2$ tal que $(ca + B) \cap \{\pm h_k\} \neq \emptyset$. Sean c_1, c_2, c_3, c_4 estos cuatro enteros ordenados de manera que $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$. (El entero c_k no necesariamente corresponde al elemento $\pm h_k$.) Estos cuatro números son llamados los **niveles** de H relativos a B y al generador $a + B$ de A/B.

Ejemplo 3.4.2. Sea $A = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ y $H = \{(0,0), \pm(1,0), (2,0), \pm(1,2)\}$. Si B es un subgrupo cíclico de A tal que A/B es cíclico, entonces $|B| = 4$ y $A/B = \{B, a+B, 2a+B, -a+B\}$ donde $a+B$ genera A/B.

- Si consideramos $B = \langle(0,1)\rangle$ y $a = (1,1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2a+B &= \{(2,2), (2,3), (2,0), (2,1)\}, \\ 1a+B &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,0)\}, \\ 0a+B &= \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3)\}. \end{aligned}$$

  En este caso los niveles de H relativos al subgrupo $B = \langle(0,1)\rangle$ y al generador $(1,1)+B$ de A/B son $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$ y $c_4 = 2$.

- Si consideramos $B = \langle(1,0)\rangle$ y $a = (3,1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2a+B &= \{(2,2), (3,2), (0,2), (1,2)\}, \\ 1a+B &= \{(3,1), (0,1), (1,1), (2,1)\}, \\ 0a+B &= \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0)\}. \end{aligned}$$

  En este caso los niveles de H relativos al subgrupo $B = \langle(1,0)\rangle$ y al generador $(3,1)+B$ de A/B son $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ y $c_4 = 2$.

En el contexto de funciones de Thurston casi Euclidianas, estamos interesados en los niveles que corresponden a subconjuntos de $A = \Lambda_2/2\Lambda_1$, donde Λ_1 y Λ_2 son los retículos establecidos en la Sección 3.1. Si (λ, μ) es una base de Λ_2, entonces $B = \langle\lambda + 2\Lambda_1\rangle$ es un subgrupo cíclico de A tal que A/B es cíclico y $a = \mu + 2\Lambda_1$ es un elemento de A cuya imagen en A/B genera A/B. Recordemos que al final de la Sección 3.1 deducimos que $q_1^{-1}(p_1^{-1}(P_2)) \subseteq \Lambda_2$, entonces tiene sentido hablar de los niveles de $H = p_1^{-1}(P_2)$ relativos a B y a. Llamaremos a estos niveles los **niveles de $q_1^{-1}(p_1^{-1}(P_2))$ relativos a λ y μ**. Note que el nivel que corresponde al elemento $\eta \in q_1^{-1}(p_1^{-1}(P_2))$ es el menor entero no negativo c para el cual existe un entero b tal que $\pm\eta \in b\lambda + c\mu + 2\Lambda_1$.

Teorema 3.4.1. Sea f una función NET. Sea δ una curva esencial en $S^2 \setminus P_2$ con pendiente p/q, donde p and q son enteros coprimos. Sea $\lambda = q\lambda_2 + p\mu_2 \in \Lambda_2$. Sea d el orden de la imagen de λ en Λ_2/Λ_1 y sea d' el entero positivo tal que $dd' = |\Lambda_2/\Lambda_1| = \deg(f)$. Desde que p y q son coprimos existe $\mu \in \Lambda_2$ tal que λ y μ forman otra base de Λ_2. Sean c_1, c_2, c_3, c_4 los niveles para los elementos de $q_1^{-1}(p_1^{-1}(P_2))$ relativos a λ y μ. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Cada componente conexa de $f^{-1}(\delta)$ es mapeada en δ con grado d.

(2) El número de componentes esenciales en $f^{-1}(\delta)$ es $c_3 - c_2$.

(3) El número de componentes periféricas en $f^{-1}(\delta)$ es $c_2 - c_1 + c_4 - c_3$.

(4) El número de componentes triviales en $f^{-1}(\delta)$ es $c_1 - c_4 + d'$.

(5) The líneas rectas en $\mathbb{R}^2$ con pendiente p/q relativas a la base ordenada (λ_2, μ_2) de Λ_2 que son mapeadas en curvas esenciales en $S^2 \backslash P_2$ bajo $p_1 \circ q_1$ son precisamente los Γ_1-trasladados de las líneas con forma paramétrica $(x, y) = t\lambda + \kappa\mu$ con parámetro t y $c_2 < \kappa < c_3$.

Demostración. Debido a que δ tiene pendiente p/q, la curva δ es homotópica a la imagen en $S^2 \setminus P_2$, bajo la aplicación $p_2 \circ q_2$, de una línea recta en $\mathbb{R}^2$ que tiene una parametrización de la forma $(x, y) = \nu + t\lambda$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que δ es la imagen en $S^2 \setminus P_2$ bajo $p_2 \circ q_2$ de tal línea recta. Desde que p y q son coprimos, la aplicación $p_2 \circ q_2$ mapea el segmento de línea uniendo ν y $\nu + 2\lambda$ inyectivamente en $S^2 \setminus P_2$ (excepto en los puntos terminales). Tal segmento de línea es mostrado en Figura 3.8[2] junto con algunas de sus Γ_1-traslaciones, dibujados como segmentos de línea punteados.

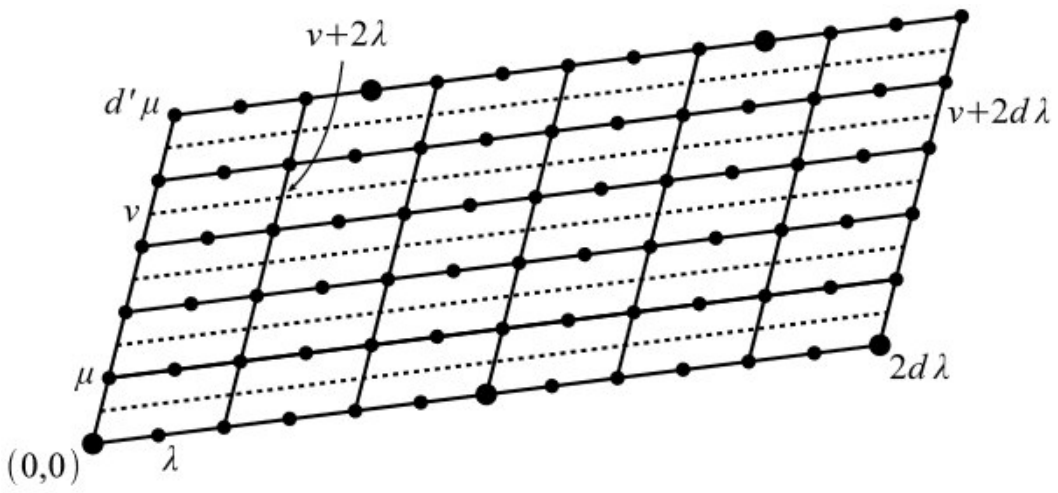


Figura 3.8: Probando Teorema 3.4.1

Los puntos sólidos en la Figura 3.8 son elements de Λ_2. Los puntos sólidos más grandes son elementos de Λ_1. Cada uno de los pequeños paralelogramos que están acotados por segmentos de línea sólidos en la Figura 3.8 es un dominio fundamental para la acción del grupo Γ_2 sobre $\mathbb{R}^2$. El paralelogramo subdividido por estos pequeños paralelogramos es un dominio fundamental F para la acción del grupo Γ_1 sobre $\mathbb{R}^2$. Como tal, F contiene exactamente un levantamiento en $\mathbb{R}^2$, bajo $p_1 \circ q_1$, de cada componente conexa de $f^{-1}(\delta)$.

[2]Figura 3.8 ha sido tomada de [8].

Desde que el levantamiento de f a $\mathbb{R}^2$ es la función identidad, el segmento de línea uniendo ν y $\nu + 2\lambda$ es un levantamiento de δ en F bajo la función $f \circ p_1 \circ q_1$. Las Γ_2-traslaciones de este levantamiento son otros levantamientos de δ. Una concatenación de tales segmentos de línea es un levantamiento de una curva cerrada en $S^2 \setminus P_1$ si y sólo si la diferencia entre el punto final de la concatenación y el punto inicial de la concatenación es un elemento de $2\Lambda_1$ que no es un múltiplo no trivial de un elemento de $2\Lambda_1$. En otras palabras, esta diferencia es el menor múltiplo de 2λ que se encuentra en $2\Lambda_1$. Este es el orden de la imagen de 2λ en $2\Lambda_2/2\Lambda_1$, el cual coincide con el orden de la imagen de 2λ en Λ_2/Λ_1. Esto prueba el primer enunciado del teorema.

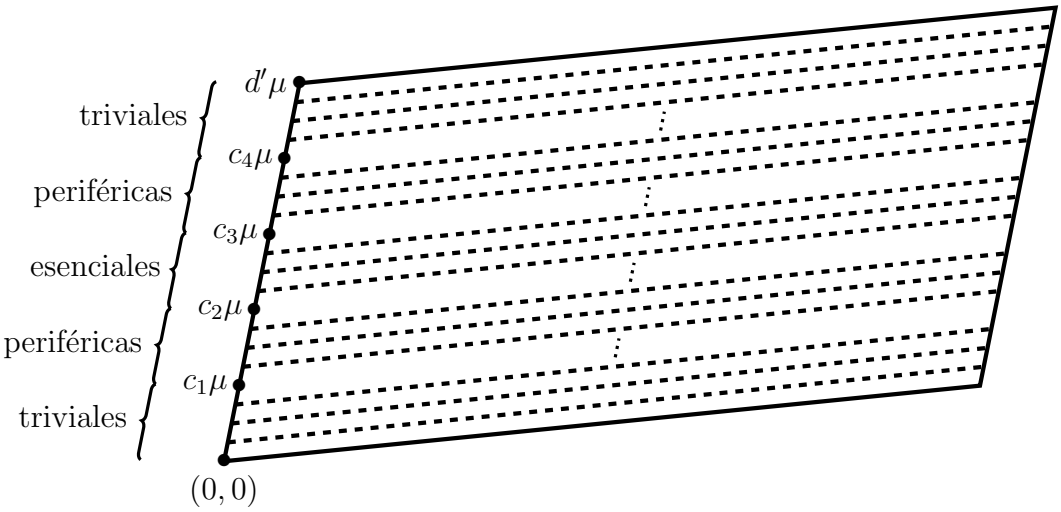


Figura 3.9: Ilustrando Teorema 3.4.1

Figura 3.9 ilustrará los enunciados (2), (3) y (4). Los niveles c_1, c_2, c_3, c_4 determinan una partición del segmento de línea sólido uniendo $(0,0)$ y $d'\mu$. Las componentes de $f^{-1}(\delta)$ que corresponden al primero y al último de estos subsegmentos son triviales. Las componentes que corresponden a los intervalos subadjacentes de estos son periféricas. Las componentes restantes son esenciales.

Ahora probaremos estas afirmaciones. Desde que la restrictión de f a cada componente conexa de $f^{-1}(\delta)$ tiene grado d y $dd' = \deg(f)$, el número de estas componentes es d'. Sea α uno de los d' segmentos de línea en F que es un levantamiento de una componente conexa de $f^{-1}(\delta)$. La acción de Γ_1 sobre la frontera de F identifica las dos mitades de la parte inferior de la frontera de F a traves de una rotación de orden 2. In general la identificación de F is ligeramente más complicada porque los dos esquinas superiors de F no son necesariamente elementos de Λ_1. Los dos lados laterales de F se identifican

mediante una traslación en Γ_1. Sean U y V las componentes conexas del complemento de α en F. Ambos cojuntos, U y V, son mapeados en discos abiertos de S^2 mediante $p_1 \circ q_1$ y la imagen de α separa estos dos discos. Para que la imagen de α sea esencial en $S^2 \setminus P_2$, dos elementos de U deben ser mapeados en elementos distintos de P_2 y dos elementos de V deben ser mapeados en elements distintos de P_2. En consecuencia el número de componentes esenciales en $f^{-1}(\delta)$ es $c_3 - c_2$. Esto prueba el enunciado (2). Los enunciados (3) y (4) se prueban de manera similar. El enunciado (5) es ahora claro. ■

El siguiente lema proporciona un método para calcular los niveles c_1, c_2, c_3, c_4 del Teorema 3.4.1.

Lema 3.4.1. Mantenemos las hipótesis dadas en Teorema 3.4.1. Sean r y s enteros, y sea $\eta = r\lambda_2 + su_2 \in \Lambda_2$. Sea c el nivel de η con respecto a λ y μ, es decir, c es el menor entero no negativo para el cual existe un entero b tal que $\pm\eta \in b\lambda + c\mu + 2\Lambda_1$. Entonces c es el menor entero no negativo congruente a $\pm(pr - qs)$ modulo $2d'$.

Demostración. Comenzaremos encontrando una base conveniente para Λ_1. No todo elemento de Λ_1 es un múltiplo de λ. Luego existen enteros l y m con $m > 0$ tales que $l\lambda + m\mu \in \Lambda_1$. Sea μ' un elemento de Λ_1 tal que $\mu' = l\lambda + m\mu$ donde $m > 0$ y m es el menor posible.

Afirmamos que $d\lambda$ y μ' forman una base para Λ_1. Para probar esto, sea $v \in \Lambda_1$. Será suficiente probar que v es una combinación lineal entera de $d\lambda$ y μ'. Existen enteros x e y tales que $v = x\lambda + y\mu$. Restando de v un múltiplo apropiado de μ' obtenemos un elemento $w \in \Lambda_1$ de la forma $w = x'\lambda + y'\mu$ con $0 \leq y' < m$. La minimalidad de m dada en el primer párrafo implica que $y' = 0$. En consecuencia $w = x'\lambda$. La elección de d implica que $d|x'$. Entonces todo elemento de Λ_1 es una combinación lineal entera de $d\lambda$ y μ'. Por tanto $d\lambda$ y μ' forman una base para Λ_1. Desde que

$$\det \begin{bmatrix} d & l \\ 0 & m \end{bmatrix} = |\Lambda_2/\Lambda_1| = \deg(f) = dd',$$

se sigue que $m = d'$.

Sean x e y los enteros tales que $\eta = x\lambda + y\mu$. Buscamos al menor entero no negativo c para el cual existe un entero b tal que $\pm\eta \in b\lambda + cu + 2\Lambda_1$. Equivalentemente, $b\lambda + c\mu = 2\lambda' \pm (x\lambda + y\mu)$ para algún $\lambda' \in \Lambda_1$. El párrafo anterior muestra que λ' es una combinación lineal entera de $d\lambda$ y μ'. Se sigue que c es el menor entero no negativo congruente a $\pm y$ modulo $2d'$.

Ahora calcularemos y. Sean t and u los enteros tales que $\mu = t\lambda_2 + u\mu_2$. Usando el hecho que $\eta = r\lambda_2 + su_2 = x\lambda + y\mu$ y que (λ_2, μ_2) es una base ordenada de

Λ_2, obtenemos $r = xq+yt$ y $s = xp+yu$. Por multilinealidad de determinantes, vemos que

$$\det \begin{bmatrix} q & r \\ p & s \end{bmatrix} = x \det \begin{bmatrix} q & q \\ p & p \end{bmatrix} + y \det \begin{bmatrix} q & t \\ p & u \end{bmatrix} = \pm y,$$

el último determinante es ± 1 porque $\lambda = q\lambda_2 + p\mu_2$ y $\mu = t\lambda_2 + u\mu_2$ forman una base de Λ_2. Entonces $y = \pm(pr - qs)$. Por tanto c, es el menor entero no negativo congruente a $\pm(pr - qs)$ módulo $2d'$. ■

Lema 3.4.1 implica que los niveles c_1, c_2, c_3, c_4 dependen de una manera simple de los enteros p y q, y que para determinarlos será suficiente calcularlos módulo $2d'$.

Observación 3.4.1. Supongamos que los niveles c_1, c_2, c_3, c_4 surgen de la pendiente p/q. Sea $p'/q' \in \overline{\mathbb{Q}}$ y supongamos que, como en el caso de p/q, el orden de la imagen de $q'\lambda_2 + p'\mu_2 \in \Lambda_2/\Lambda_1$ es d. Supongamos también que existe un entero u que es una unidad módulo $2d'$ tal que $p' \equiv up \mod 2d'$ y $q' \equiv uq \mod 2d'$. Si c_1', c_2', c_3', c_4' son los niveles para p'/q' como en el Teorema 3.4.1, entonces c_1', c_2', c_3', c_4' son congruentes a $\pm uc_1$, $\pm uc_2$, $\pm uc_3$, $\pm uc_4$, no necesariamente en el mismo orden. Recordar que $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$. Al multiplicar c_1, c_2, c_3 y c_4 por $\pm u$ y reducir módulo $2d'$, los nuevos cuatro valores (como enteros) no tienen porque estar en orden ascendente.

Ahora aplicaremos el Teorema 3.4.1 a nuestro ejemplo principal. El Cuadro 3.1 muestra los resultados. La primera columna corresponde a valores q módulo 20. La segunda columna corresponde a valores $2p + q$ módulo 5. La tercera columna da el grado de la restricción de f a cada componente conexa de la imagen inversa de una curva esencial en $S^2 \setminus P_f$ con pendiente p/q. La siguiente columna da los niveles c_1, c_2, c_3, c_4 que aparecen en el Teorema 3.4.1. Las tres últimas columnas corresponden al número de componentes esenciales (E), periféricas (P) y triviales (T) en esta imagen inversa.

En el ejemplo principal $\Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$ y $\Lambda_1 = \langle (2,-1), (0,5) \rangle$. Sean p y q enteros coprimos. Comenzamos con una curva esencial δ en $S^2 \setminus P_f$ cuya pendiente es p/q. Sea d el grado de la restricción de f a cada componente conexa de $f^{-1}(\delta)$. El enunciado (1) del Teorema 3.4.1 implica que d es el menor entero positivo para el cual existen enteros x e y tales que $x(2,-1)+y(0,5) = d(q,p)$. Resolviendo para x e y, encontramos que

$$x = \frac{dq}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{d(2p+q)}{10}.$$

Supongamos que $q \equiv 0 \mod 2$. Entonces x es un entero para cualquier valor de d. Para que y sea un entero, la única condición sobre d es que $q \equiv 0 \mod 5$

q mód 20	$2p+q$ mód 5	d	c_1, c_2, c_3, c_4	E	P	T
$\pm 1, \pm 3 \pm 5, \pm 7, \pm 9$	$\pm 1, \pm 2$	10	$0, 0, 1, 1$	1	0	0
$\pm 1, \pm 9$	0	2	$0, 1, 4, 5$	3	2	0
$\pm 3 \pm 7$	0	2	$0, 2, 3, 5$	1	4	0
$0, \pm 2, \pm 4 \pm 6, \pm 8, \pm 10$	$\pm 1, \pm 2$	5	$0, 0, 2, 2$	2	0	0
± 2	0	1	$0, 2, 8, 10$	6	4	0
± 4	0	1	$0, 0, 6, 6$	6	0	4
± 6	0	1	$0, 4, 6, 10$	2	8	0
± 8	0	1	$0, 0, 2, 2$	2	0	8

Cuadro 3.1: Grados, niveles, número de componentes esenciales (E), periféricas (P) y triviales (T) para el ejemplo principal.

si $2p + q \not\equiv 0 \mod 5$. Ahora supongamos que $q \not\equiv 0 \mod 2$. Considerando $x \in \mathbb{Z}$, requerimos que $d \equiv 0 \mod 2$. Luego, considerando $y \in \mathbb{Z}$, requerimos que $d \equiv 0 \mod 5$ si $2p + q \not\equiv 0 \mod 5$. Además, por el enunciado (1) del Teorema 3.4.1, d es un divisor de 10. En consecuencia d puede asumir los valores 1, 2, 5 y 10. Esto nos lleva a los valores de d dados en el Cuadro 3.1.

A continuación procedemos a calcular los entradas restantes en el Cuadro 3.1. Los elementos $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 5)$ y $(2, 5)$ de Λ_2 son mapeados en los cuatro elementos de P_2 bajo $p_1 \circ q_1$. Para aplicar Lema 3.4.1, calculamos $pr - qs$ para estos cuatro elementos y obtenemos 0, $2p$, $-5q$ y $2p - 5q$. En lo que sigue, encontraremos los residuos reducidos de ± 1 veces estos valores módulo $2d'$. Luego podremos determinar fácilmente las entradas restantes del Cuadro 3.1 usando el Teorema 3.4.1.

Caso 1: $d = 10$ and $d' = 1$.

Primero probaremos que q es impar. Si $q = 2k$ para algún entero k, entonces $x = 10k$ e $y = 2(p + k)$. Luego $10k(2, -1) + 2(p + k)(0, 5) = 10(q, p)$. En consecuencia, el par $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (5k, p + k)$ sería una solución de la ecuación $\tilde{x}(2, -1) + \tilde{y}(0, 5) = 5(q, p)$. Esto contradice la minimalidad de $d = 10$. Por tanto q es impar. De manera similar, se sigue que $2p + q \not\equiv 0 \mod 5$. Reduciendo 0, $2p$, $-5q$ y $2p - 5q$ módulo 2 obtenemos 0, 0, 1, 1. Esto completa el cálculo para $d = 10$.

Caso 2: $d = 5$ y $d' = 2$.

Como $x = 5q/2 \in \mathbb{Z}$, q es par. Desde que $\gcd(p, q) = 1$, p es impar. Luego $0 \equiv 0 \mod 4$ y $2p \equiv 2 \mod 4$. Si $q \equiv 0 \mod 4$, entonces $5q \equiv 0 \mod 4$ y $2p - 5q \equiv 2 \mod 4$. Si $q \equiv 2 \mod 4$, entonces $5q \equiv 2 \mod 4$ y $2p - 5q \equiv 0$ mód 4. Por tanto, independientemente de si $q \equiv 0 \mod 4$ ó $q \equiv 2 \mod 4$, los

cuatro valores se reducen a 0, 0, 2, 2 módulo 4. Por otro lado, si $2p + q \equiv 0$ mód 5 llegaríamos a una contradicción con respecto a la minimalidad de $d = 5$. Entonces $2p + q \not\equiv 0 \mod 5$. Esto completa el cálculo para $d = 5$.

Caso 3: $d = 2$ y $d' = 5$.

Como $y = (2p + q)/5 \in \mathbb{Z}$, $2p + q \equiv 0 \mod 5$. Entonces $q \not\equiv 0 \mod 5$, de lo contrario 5 sería un divisor de $\gcd(p, q)$.

Si $q \equiv 0 \mod 2$, entonces $x = 2k$ e $y = 2\tau$ para algunos enteros k y τ. Luego, el par $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (k, \tau)$ sería una solución de la ecuación $\tilde{x}(2, -1) + \tilde{y}(0, 5) = (q, p)$. Esto contradice la minimalidad de $d = 2$. Luego $q \not\equiv 0 \mod 2$ y por tanto q es una unidad módulo 10.

Supongamos que $q \equiv 1 \mod 5$. Como $2p + q \equiv 0 \mod 5$, se sigue que $p \equiv 2 \mod 5$. Entonces $2p \equiv 4 \mod 10$. Luego $-5q \equiv 5 \mod 10$ y $2p - 5q \equiv -1 \mod 10$. En consecuencia, salvo signo, los cuatro valores se reducen a 0, 1, 4, 5 módulo 10. Siguiendo la observación dada después del Lema 3.4.1, multiplicar q por una unidad módulo 10 equivale a multiplicar estos cuatro valores por la misma unidad. Las unidades módulo 10 estan representados por ± 1 y ± 3. Dado que la multiplicación por -1 no afecta el cálculo de los niveles, bastará considerar la multiplicación por 3. Obtenemos 0, 2, 3, 5 módulo 10. Esto completa el cálculo para $d = 2$.

Caso 4: $d = 1$ y $d' = 10$.

Usando la definición de x e y, $q \equiv 0 \mod 2$ y $2p+q \equiv 0 \mod 10$. En particular $2p + q \equiv 0 \mod 5$. Como $\gcd(p, q) = 1$, tenemos que $p \not\equiv 0 \mod 2$ y $q \not\equiv 0$ mód 5. Por tanto, salvo multiplicacion por una unidad módulo 20, $q \equiv 2$ mód 20 ó $q \equiv 4 \mod 20$.

Supongamos que $q \equiv 2 \mod 20$. La congruencia $2p + q \equiv 0 \mod 10$ implica que $4p \equiv -4 \mod 20$, entonces $p \equiv -1, 4, 9, 14 \mod 20$. Sin embargo $p \not\equiv 0$ mód 2. En consecuencia $p \equiv -1 \mod 20$ ó $p \equiv 9 \mod 20$. Luego, $2p \equiv \pm 2$ mód 20, $-5q \equiv 10 \mod 20$ y $2p - 5q \equiv \pm 8 \mod 20$. Por tanto, salvo signo, los cuatro niveles son 0, 2, 8, 10.

Ahora supongamos que $q \equiv 4 \mod 20$. La congruencia $2p + q \equiv 0 \mod 10$ implica que $4p \equiv -8 \mod 20$, entonces $p \equiv -2, 3, 8, 13 \mod 20$. Sin embargo $p \not\equiv 0 \mod 2$. En consecuencia $p \equiv 3 \mod 20$ ó $p \equiv 13 \mod 20$. Luego, $2p \equiv \pm 6 \mod 20$, $-5q \equiv 0 \mod 20$ y $2p - 5q \equiv \pm 6 \mod 20$. Por tanto, salvo signo, los cuatro niveles son 0, 0, 6, 6. Las unidades módulo 20 son ± 1, ± 3, ± 7, ± 9. Salvo signo, multiplicación por ± 1 y ± 9 estabiliza ambos conjuntos $\{0, 2, 8, 10\}$ y $\{0, 0, 6, 6\}$. Multiplicación por 3 módulo 20 nos dará la colección de niveles $\{0, 4, 6, 10\}$ y $\{0, 0, 2, 2\}$. Esto completa el cálculo para $d = 1$.

Esto completa la verificación del Cuadro 3.1.

Capítulo 4

Presentación de funciones NET

Un hecho que hace que las funciones NET sean tan interesantes es que cada función NET admite lo que llamamos una presentación NET. Esto significa que una función NET es combinatoriamente equivalente a una función obtenida a través de una forma normal muy especial. Comenzaremos este capítulo con la definición de **D**, un diagrama de presentación NET. Deduciremos que cada uno de estos simples diagramas **D** dibujados en una hoja de papel estándar, como el que se muestra en la Figura 4.2, determina una función NET. Luego describiremos un algoritmo que permite hallar una presentación NET de una función NET cuando se tiene información topológica acerca de esta última.

Los resultados presentados en este capítulo pueden ser encontrados en [12]. El autor de esta tesis ha introducido algunos diagramas y ejemplos detallados con la finalidad de exponer el algoritmo dado en [12] de una manera más accesible.

4.1. Diagrama de presentación NET

En esta sección $\Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$ y Λ_1 es un subretículo de Λ_2 tal que $[\Lambda_2 : \Lambda_1] = d > 1$. Los datos de una presentación NET con diagrama asociado **D** consisten de tres ingredientes. Aquí están los primeros dos:

(1) Una base ordenada (λ_1, λ_2) para Λ_1. Esto esta indicado en **D** mediante el dibujo de un paralelogramo F_1 con lados ligando el origen y los puntos $2\lambda_1,\ \lambda_2$. La elección del orden de los elementos de esta base se hace de manera que el determinante de la matriz columna $A = [\lambda_1, \lambda_2]$ sea positivo. La intersección de $\{0, \lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2\}$ con F_1 se indica en **D** mediante grandes puntos sólidos.

(2) Un elemento $b \in \{0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\}$. Esto se indica en **D** encerrando en un círculo el punto correspondiente en la frontera del parallelogramo F_1.

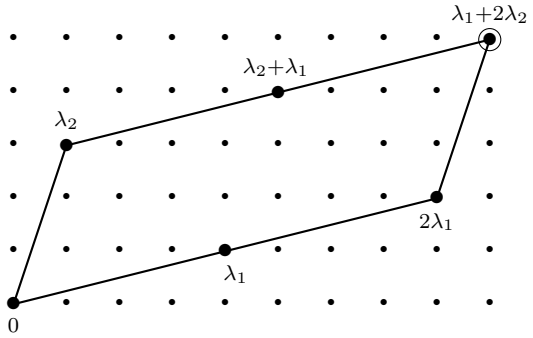


Figura 4.1: Datos (1) y (2) en F_1.

Considere $\mathbb{R}^2_1 = \mathbb{R}^2_2 = \mathbb{R}^2$; los subíndices son solo para clarificar. Los datos en (1) y (2) determinan de manera única un isomorfismo afín $\Phi : \mathbb{R}^2_2 \to \mathbb{R}^2_1$ que preserva orientación, que mapea isomorficamente Λ_2 en Λ_1, y que mapea el origen en b. Tal isomorfismo afín es precisamente $\Phi(x) = Ax + b$. Note que Φ es lineal si y solo si $b = 0$.

Para cada $j \in \{1, 2\}$, sea Γ_j el grupo generado por rotationes de orden 2 centradas en puntos de Λ_j de manera que $S^2_j := \mathbb{R}^2/\Gamma_j$ es una esfera topológica, y sea $\pi_j : \mathbb{R}^2 \to S^2_j$ la aplicación cociente canónica. La esfera S^2_j tiene una estructura afín haciendo de esta una "almohada"con esquinas en los puntos $P_j := \pi_j(\Lambda_j)$. Note que $|P_j| = 4$ y que $P_1 = \pi_1(\Lambda_1 \cap F_1)$.

Desde que $\Lambda_1 < \Lambda_2$, tenemos $\Gamma_1 < \Gamma_2$. Entonces la aplicación identidad $i_d : \mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}^2_2$ induce una aplicación $\overline{i_d} : S^2_1 \to S^2_2$ tal que $\overline{i_d} \circ \pi_1 = \pi_2$. La aplicación $\overline{i_d}$ es un cubrimiento ramificado de grado $d = [\Lambda_2 : \Lambda_1]$. El conjunto de puntos críticos de $\overline{i_d}$ es precisamente $\pi_1(\Lambda_2 \setminus \Lambda_1)$ y el grado local de $\overline{i_d}$ en cada uno de sus puntos críticos es igual a 2. Note que $\overline{i_d}(P_1) \subseteq P_2$ y que $\overline{i_d}(\pi_1(\Lambda_2)) \subseteq P_2$. Por otro lado, como $\Phi(\Lambda_2) = \Lambda_1$, el isomorfismo afín $\Phi : \mathbb{R}^2_2 \to \mathbb{R}^2_1$ induce un homeomorfismo $\phi : S^2_2 \to S^2_1$. La composición $g := \phi \circ \overline{i_d}$ es una función de Thurston Euclidiana con $P_g = P_1$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2_1 & \xrightarrow{i_d} & \mathbb{R}^2_2 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^2_1 \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\
S^2_1 & \xrightarrow{\overline{i_d}} & S^2_2 & \xrightarrow{\phi} & S^2_1 \\
\downarrow{\scriptstyle i_d} & & & & \downarrow{\scriptstyle i_d} \\
S^2_1 & & \xrightarrow{\quad g \quad} & & S^2_1
\end{array}$$

A continuación describiremos el tercer y último ingrediente de una presentación NET. Por conveniencia en la descripción, denotaremos $P_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$; la elección del orden de estos puntos no forma parte de los datos de una presentación NET.

(3) Para cada $p_j \in P_1$ escogemos un arco geodésico "verde" β_j con punto inicial en p_j y punto final en $\pi_1(\Lambda_2)$ de manera que los arcos geodésicos β_j son dos a dos disjuntos. El caso degenerado, es decir, arcos geodésicos que se reducen a un punto está permitido. Además, requerimos que cada β_j pueda ser levantado a un segmento de línea en F_1. La elección de los $\beta_j's$ esta representada en $\mathbf{D}$ mediante sus levantamientos en el dominio fundamental cerrado F_1. Estos segmentos de línea son dibujados en color verde. Desde que π_1 es un cubrimiento ramificado de grado 2, hay a lo sumo ocho de estos segmentos verdes en F_1.

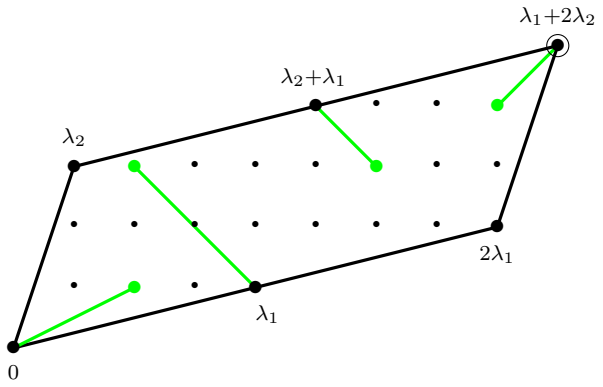


Figura 4.2: Datos (1), (2) y (3) en $\mathbf{D}$.

Recordar que si $\beta \subset S^2$ es un arco con punto incial a y punto final b, entonces decir que un homeomorfismo $h : S^2 \to S^2$ es un **homeomorfismo de empuje a lo largo de** β significa que existe un abierto simplemente conexo $U \subset S^2$ conteniendo β y existe una isotopía $H : [0,1] \times S^2 \to S^2$ tal que H_0 es la aplicación identidad i_{S^2}, $H_1 = h$, $H_t(x) = x$ para todo $x \in S^2 \setminus U$, $H_t(a) \in \beta$ para todo $t \in [0,1]$, y $H_1(a) = b$. Es decir, h es el homeomorfismo terminal de una isotopía sobre S^2 con soporte en una vecindad regular de β que empuja el punto inicial de β al punto final de β a lo largo de la curva β.

Sea P el conjunto de cuatro puntos en S_1^2 que consiste en los puntos terminales de los $\beta_j's$. Empujando a lo largo de cada uno de los cuatro arcos verdes β_1, β_2, β_3, β_4 en (3), obtenemos un homeomorfismo de empuje $h : (S_1^2, P_1) \to (S_1^2, P)$, único salvo homotopía relativa a P_1, que empuja los cuatro puntos de P_1 a lo largo de los arcos orientados $\beta_j's$.

Ahora que tenemos g y h, definimos $f := h \circ g$. Como $P_g = P_1$ y $P \subseteq \pi_1(\Lambda_2)$, se sigue que $h(P_g) = P \subseteq \pi_1(\Lambda_2) = g^{-1}(P_g)$. Por el argumento dado en la prueba del Teorema 3.2.1, f es una función de Thurston con $P_f \subseteq P$. Por el Corolario 3.2.2, si $\deg(g) = 3$ ó $\deg(g) \geq 5$, entonces f es una función NET con $P_f = P$.

Si $|P_f| = 4$ (equivalentemente, si $P_f = P$), entonces llamaremos los datos en (1), (2) y (3) arriba **datos NET** y diremos que (1), (2), (3) dan un **diagrama de presentación NET para** f, ó simplemente que dan **una presentación NET para** f. Esta presentación está codificada en el diagrama **D**.

Cerraremos esta sección enunciando un resultado general. Los detalles de la prueba se encuentran en [12, Secciones 5-8].

Teorema 4.1.1. Toda función NET es combinatoriamente equivalente a una función NET dada por una presentación NET.

En otras palabras, si F es una función NET, entonces existe un diagrama **D** como arriba tal que la función f obtenida por la presentación codificada en **D** es combinatoriamente equivalente a F.

4.2. Algoritmo para hallar presentaciones NET

Es fácil verificar si una función de Thurston es casi Euclidiana y la presentación de una función NET es fácil de entender; pero encontrar una presentación para una función NET puede ser muy complicado. El objetivo de esta sección es proveer un algoritmo que produce una presentación para una función NET. Este algoritmo se basa en conocimiento topológico de la acción de la función NET dada sobre S^2.

Comenzaremos con presentaciones para funciones de Thurston Euclidianas. Sea g una función de Thurston Euclidiana. Supongamos que g tiene una presentación NET con matriz A. El término traslación b es irrelevante para esta discussión, y todos los segmentos de línea en color verde asociados a la presentación son triviales.

Deseamos determinar la matriz A en términos de la acción de g sobre la esfera S^2. Sean λ_1 y λ_2 las columnas de A, como es usual. Sean $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ los vectors de la base canónica de $\mathbb{Z}^2$. Desde que A expresa λ_1 y λ_2 en términos de e_1 y e_2, la matriz A^{-1} expresa e_1 y e_2 en terminos de λ_1 y λ_2.

Nuestro siguiente objetivo es interpretar A^{-1} en términos de curves esenciales en $S^2 \backslash P_g$. Como es usual, tenemos un cubrimiento ramificado $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to S^2$ que mapea biyectivamente el conjunto $\{0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\}$ en el conjunto P_g. Ahora,

computamos pendientes de curvas esenciales en $S^2 \setminus P_g$ usando la base ordenada (λ_1, λ_2) en lugar de la base (e_1, e_2). En consecuencia una curva esencial en $S^2 \setminus P_g$ cuyo arco principal es la imagen bajo π_1 del segmento de línea que une 0 y λ_1 tiene pendiente 0. Similarmente, una curva esencial en $S^2 \setminus P_g$ cuyo arco principal es la imagen bajo π_1 del segmento de línea que une 0 y λ_2 tiene pendiente ∞.

Sea γ una curva esencial en $S^2 \setminus P_g$ con pendiente 0. Las pendientes de las componentes conexas de $g^{-1}(\gamma)$ son todas iguales. Supongamos que esta pendiente es p/q, donde p y q son enteros y coprimos. Esto implica que el vector $q\lambda_1 + p\lambda_2$ tiene la misma dirección que $\pm e_1$. Ver figura 4.3. Desde que $q\lambda_1 + p\lambda_2$ tiene coordenadas enteras, existe un entero positivo d tal que $\pm de_1 = q\lambda_1 + p\lambda_2$. Como en el Teorema 3.4.1, el entero d es el grado con el cual g mapea cada una de las componentes conexas de $g^{-1}(\gamma)$ en γ. Similarmente, si δ es una curva esencial en $S^2 \setminus P_g$ con pendiente ∞, entonces $\pm ee_2 = s\lambda_1 + r\lambda_2$, donde cada componente conexa de $g^{-1}(\delta)$ tiene pendiente r/s y g mapea cada una de estas componentes conexas en δ con grado e. De ser necesario, multiplicamos por -1 una de las columnas de la matriz $\left[\begin{smallmatrix} q/d & s/e \\ p/d & r/e \end{smallmatrix}\right]$ de manera que el determinante de la matriz resultante sea positivo. Ya que el determinante de A es positivo, la matriz resultante es $\pm A^{-1}$. De esta manera podemos computar la matriz A salvo multiplicación por ± 1, que es lo que necesitamos.

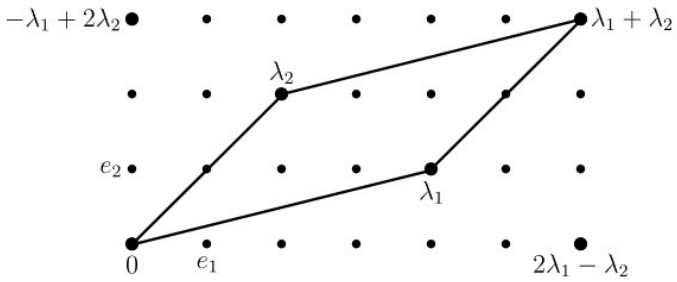


Figura 4.3: Calculando una matriz para una función NET Euclidiana.

Por ejemplo, en la Figura 4.3, tenemos que $p = -1$, $q = 2$ y $d = 6$. Similarmente, $r = 2$, $s = -1$ y $e = 3$. Verificando la positividad del determinante, concluimos que podemos tomar

$$A = \begin{bmatrix} q/d & s/e \\ p/d & r/e \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{bmatrix}^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

lo que concuerda con el hecho que $\lambda_1 = (4, 1)$ y $\lambda_2 = (2, 2)$.

A continuación presentaremos el algoritmo descrito en [12, Sección 9]. Este algoritmo encuentra una presentación para una función NET f arbitraria.

Paso 1. Identifique el conjunto P_2, es decir, el conjunto de puntos poscríticos de f.

Paso 2. Identifique el conjunto P_1, es decir, el subconjunto de $f^{-1}(P_2)$ que posee exactamente cuatro puntos no críticos de f.

Lema 3.1.1 muestra que P_1 existe.

Paso 3. Construya cuatro arcos (verdes) disjuntos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ en S^2 cada uno de estos con punto inicial en P_1 y punto final en P_2.

Estos arcos determinan un homeomorfismo de empuje h (salvo isotopía relativa a P_1) tal que $h(P_1) = P_2$. Sea $g := h^{-1} \circ f$. Entonces, como en el Teorema 3.2.2, g es una función de Thurston Euclidiana y ademas $P_g = P_1$.

Paso 4. Construya una curva de Jordan en S^2 conteniendo P_1 y que intersecta cada β_j a lo sumo en sus puntos terminales. Etiquetamos los puntos de P_1 con etiquetas 0, λ_1, $\lambda_1+\lambda_2$, λ_2 en orden cíclico a lo largo de la curva de Jordan. Esta curva junto con las etiquetas de estos cuatro puntos determinan un cuadrilatero topológico, Q_1, tal que la orientación de los puntos etiquetados es contraria a las agujas del reloj relativa a Q_1.

Ver Figura 4.4, donde β_1, β_2, β_3, β_4 están dibujados como arcos verdes. Las flechas sobre los arcos indican la dirección de empuje, con punto inicial en P_1. Los elementos de P_1 serán las imágenes de los puntos reticulares 0, λ_1, $\lambda_1+\lambda_2$, λ_2 en $\mathbb{R}^2$ bajo el cubrimiento ramificado $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to S^2$. Vemos Q_1 como la imagen del paralelogramo en la Figua 4.3 bajo π_1.

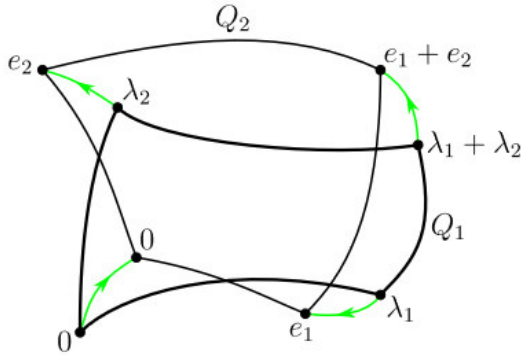


Figura 4.4: Los quadrilateros Q_1 y Q_2 .

Paso 5. (Opcional) Construya $g^{-1}(\partial Q_1)$ salvo isotopía relativa a P_1.

Aunque este paso es opcional, será de mucha utilidad al realizar el Paso 6 y al construir el cubrimiento ramificado π_1 entre los Pasos 8 y 9. Podemos ver $g^{-1}(\partial Q_1)$ como un grafo (CW-complejo de dimensión 1) en S^2 cuyo conjunto de

vértices es $g^{-1}(P_1)$. Los elementos de P_1 son vértices de $g^{-1}(\partial Q_1)$ con valencia 2. Todos los otros vértices tienen valencia 4.

Ahora usamos Q_1 para definir pendientes de curvas esenciales en $S^2 \setminus P_1$. La arista de Q_1 con vértices 0 y λ_1 corresponde a la pendiente 0, y la arista de Q_1 con vértices 0 y λ_2 corresponde a la pendiente ∞. Aquí estamos computando pendientes usando la base ordenada (λ_1, λ_2) de $\mathbb{R}^2$, no la base canónica (e_1, e_2). Sean γ y δ dos curvas esenciales en $S^2 \setminus P_1$ con pendientes 0 e ∞, respectivamente.

Paso 6. Calcule la pendiente p/q en forma irreducible de una componente de $g^{-1}(\gamma)$, y compute el grado d con el cual g mapea esta componente en γ. Calcule la pendiente r/s en forma irreducible de una componente de $g^{-1}(\delta)$, y compute el grado e con el cual g mapea esta componente en δ.

El grafo $g^{-1}(\partial Q_1)$ es útil en esta etapa.

Paso 7. De ser necesario, multiplique por -1 una de las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} q/d & s/e \\ p/d & r/e \end{bmatrix}$$

de manera que la matriz resultante tenga determinante positivo. Compute A, la inversa de esta matriz.

La discusión al inicio de esta sección muestra que la matriz A es una matrix con coeficientes enteros y es una matriz presentación para g.

Paso 8. Sea $x \in P_1$ con etiqueta $\mathbf{0}$, determine la etiqueta b de $g(x)$.

Sean λ_1 y λ_2 las columnas de la matriz A. Tenemos un isomorfimo afín de $\mathbb{R}^2$ dado por $\Phi(x) = Ax + b$. Definimos nuestro cubrimiento ramificado usual $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to S^2$ de manera que $\pi_1(\lambda)$ es un elemento de P_1 con etiqueta λ para $\{0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\}$ y π_1 lleva el primer esqueleto del teselado estandar de $\mathbb{R}^2$ por cuadrados en $g^{-1}(\partial Q_1)$, por lo menos salvo isotopía relativa a $\mathbb{Z}^2$. Los levantamietos de Q_1 en $\mathbb{R}^2$ producen dominios fundamentales para Λ_1 y los levantamientos de $g^{-1}(\partial Q_1)$ producen dominios fundamentales para Λ_2. El paralelogramo F_1 en $\mathbb{R}^2$ con esquinas 0, $2\lambda_1$, λ_2 y $2\lambda_1 + \lambda_2$ es un dominio fundamental para el grupo usual Γ_1.

Paso 9. Construya segmentos de línea α_i en F_1 tales que los arcos $\pi_1(\alpha_i)$ forman un conjunto de cuatro arcos disjuntos, cada uno de ellos con punto inicial en P_1 y punto final en P_2.

Si una homotopía de S^2 relativa a $P_1 \cup P_2$ lleva la unión de los arcos $\pi_1(\alpha_i)$ en la unión de los arcos β_i, entonces habremos terminado ya que tendríamos un isomorfismo afín $\Phi(x) = Ax + b$, un paralelogramo que es un dominio fundamental F_1 para Γ_1 y apropriados segmentos de línea α_i en verde.

Caso contrario, continuamos. Sea $k : S^2 \to S^2$ un homeomorfismo de empuje relativo a las imágenes de los $\alpha_i' s$ en S^2 tal que $k(P_1) = P_2$. Luego $f = h \circ g = \psi \circ (k \circ g)$, donde $\psi = h \circ k^{-1}$ es un homeomorfismo que preserva orientación y estabiliza P_2. Tenemos una presentación de la forma deseada para la función NET $k \circ g$. Deseamos transformar esta presentación en una presentación para f. Esto nos lleva a buscar un isomorfismo afín $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que induce ψ relativo al cubrimiento ramificado $\pi_2 = f \circ \pi_1$. Para esto trabajamos con curvas esenciales en $S^2 \setminus P_2$, calculando sus pendientes usando el cuadrilátero Q_2 isotópico a $h(Q_1)$ relativo a P_2 del mismo modo que usamos Q_1 para calcular pendientes de curvas esenciales en $S^2 \setminus P_1$. Ver Figura 4.4. Ahora, tomamos γ y δ, curvas esenciales en $S^2 \setminus P_2$ con pendientes 0 e ∞ respectivamente.

Paso 10. Calcule las pendientes $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ en forma irreducible de $\psi(\gamma)$ y $\psi(\delta)$.

Paso 11. De ser necesario multiplique por -1 una de las columnas de la matriz $\left[\begin{smallmatrix} q & s \\ p & r \end{smallmatrix}\right]$ de manera que el resultado tiene determinante 1. Sea C la matriz resultante.

Paso 12. Etiquete los vértices de Q_2 con etiquetas 0, e_1, $e_1 + e_2$, e_2 consistentemente con las etiquetas de Q_1. Sea $x \in P_2$ con etiqueta 0, y sea d la etiqueta de $\psi(x)$.

Paso 13. Compute la matriz $A' = CA$, el vector $b \in \{0, C\lambda_1, C\lambda_2, C(\lambda_1 + \lambda_2)\}$ congruente a $CAd + Cb$ módulo $2\langle C\lambda_1, C\lambda_2\rangle$, el dominio fundamental $F_1^{'} = CF_1$ y los segmentos de línea $\alpha_i^{'} = C\alpha_i$. Estas cantidades denotadas con prima nos proveen una presentación para f.

4.3. Ejemplos

Ejemplo 4.3.1. Sea f la funcion NET en Ejemplo 3.3.1. En este ejemplo no requerimos el uso del algoritmo ya que la función f fue practicamente diseñada a través de una presentación. Note que la aplicación h fue construída de modo que actúa como un homeomorfismo de empuje que lleva la imagen del punto $(2, 4)$ en la imagen del punto $(2, 5)$ a lo largo del arco que los une en $\mathbb{R}^2/\Gamma_1$, lleva la imagen de $(2, -1)$ en la imagen del punto $(2, 0)$ a lo largo del arco que los une en $\mathbb{R}^2/\Gamma_1$, y mantiene las imágenes de $(0, 0)$ y $(0, 5)$ fijas. En este caso hay dos arcos verdes triviales en $(0, 0)$ y $(0, 5)$. También tenemos dos arcos verdes no triviales, uno de ellos corresponde al segmento de línea que une $(2, 4)$ y $(2, 5)$, el otro corresponde al segmento de línea que une $(2, -1)$ y $(2, 0)$. Por otro lado, la aplicación identificación $\phi : \mathbb{R}^2/\Gamma_2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma_1$ fue construída de modo tal que es isotópica, relativamente al conjunto

$$P_1 = \pi_1(\{(0, 0), (0, 5), (2, -1), (2, 4)\}),$$

a la aplicación identificación inducida por el isomorfismo afín $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\Phi(x_1, x_2) = (2x_1, -x_1 + 5x_2)$. Figura 3.3.1 muestra un diagrama de presentación NET para f.

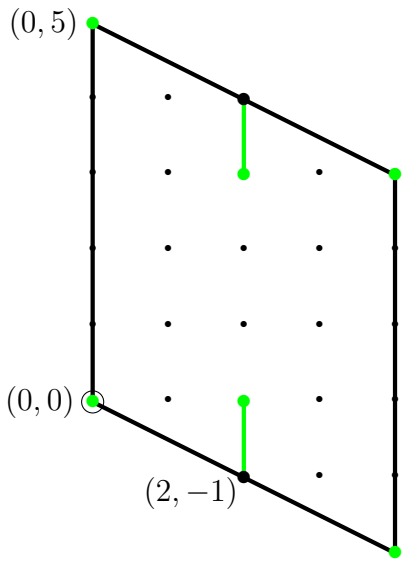


Figura 4.5: Presentación NET para el Ejemplo 3.3.1

Ejemplo 4.3.2. Como un segundo ejemplo consideramos la función NET dada en el Ejemplo 3.1.1, es decir, $f(z) = 3z^2/(2z^3 + 1)$. Por el Ejemplo 3.1.1 sabemos que $f'(z) = 6z(1 - z^3)/(2z^3 + 1)^2$ y que $C_f = P_f = \{0, 1, w, w^2\}$ donde $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$. Cálculos elementales nos conducen al siguiente cuadro de valores.

z	∞	0	1	$-1/2$	w	$-w/2$	w^2	$-w^2/2$
$f(z)$	0	0	1	1	w^2	w^2	w	w

Entonces $P_1 = \{-1/2, -w/2, -w^2/2, \infty\}$.

Por otro lado, es claro que $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}$. Usando f', vemos que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$ y que f es creciente en el intervalo $(0, 1)$. En consecuencia f mapea los intervalos $[-1/2, 0]$, $[0, 1]$ y $[1, \infty]$ biyectivamente en $[0, 1]$. Entonces la preimagen del intervalo $[0, 1]$ es el intervalo $[-1/2, \infty]$. Además, note que

$$f(wz) = \frac{3(wz)^2}{2(wz)^3 + 1} = w^2 \frac{3z^2}{2z^3 + 1} = w^2 f(z).$$

Entonces la preimagen del segmento $[0, w]$ es el rayo que pasa por el origen con punto inicial $-w^2/2$, y la preimagen del segmento $[0, w^2]$ es el rayo que pasa por el origen con punto inicial $-w/2$. Por tanto f es el mapeo de subdivisión de una regla de subdivisión finita. La Figura 4.6 indica la acción de f como mapeo de subdivisión. Una arista con etiqueta n en la parte izquierda de la Figura 4.6 (esfera dominio) es mapeada mediante f en la arista con etiqueta n en la parte derecha de la Figura 4.6 (esfera codominio). [1]

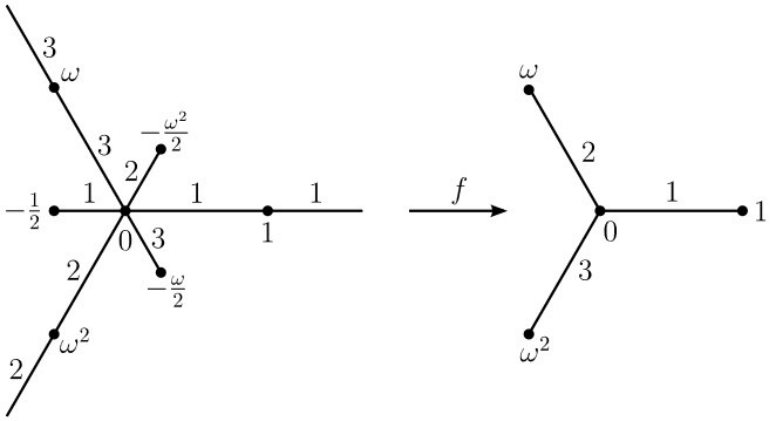


Figura 4.6: Acción de f como mapeo de subdivisión.

Procedemos a usar el algoritmo descrito en la Sección 4.2 para obtener una presentación NET para f.

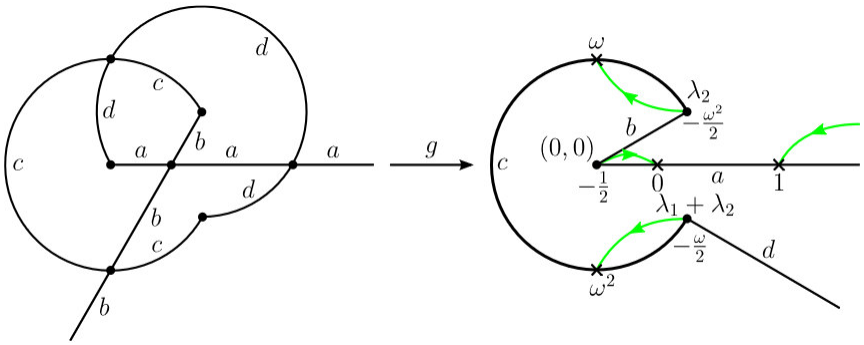


Figura 4.7: ∂Q_1 y su preimagen bajo g.

Paso 1. $P_2 = \{0, 1, w, w^2\}$.

Paso 2. $P_1 = \{-1/2, -w/2, -w^2/2, \infty\}$.

[1] Figuras 4.6, 4.7 han sido tomadas de [12].

Paso 3. Construimos arcos verdes β_1, β_2, β_3, β_4 en S^2 como en la Figura 4.7. Las flechas indican la orientación de empuje, es decir, el homeomorfismo de empuje h satisface: $h(-w^2/2) = w$, $h(-1/2) = 0$, $h(\infty) = 1$, y $h(-w/2) = w^2$. En la porción derecha de la Figura 4.7 los elementos de P_1 están marcados como puntos sólidos, mientras que los elementos de P_2 están marcados por $\times's$.

Paso 4. Construimos el cuadrilátero topológico Q_1 cuya frontera es la unión de los segmentos de línea en color negro y el arco circular en la porción derecha de la Figura 4.7. Etiquetamos los vértices de Q_1 como en la Figura 4.7. La etiqueta λ_1 corresponde al vértice ∞. Además podemos asumir lo siguiente.

(1) La arista con etiqueta a uniendo los vértices con etiquetas $(0,0)$ y λ_1 es mapeada por h en el segmento de recta que une el origen y 1.

(2) La arista con etiqueta d uniendo los vértices con etiquetas λ_1 y $\lambda_1 + \lambda_2$ es mapeada por h en un arco que une los puntos 1 y w^2.

(3) La arista con etiqueta c (arco circular) uniendo los vértices con etiquetas $\lambda_1 + \lambda_2$ y λ_2 es mapeada por h en un arco que une los puntos w^2 y w.

(4) La arista con etiqueta b uniendo los vértices con etiquetas λ_2 y $(0,0)$ es mapeada por h en el segmento de recta que une w y el origen.

Desde que h es un homeomorfismo, $h(Q_1)$ es un cuadrilátero topológico.

Paso 5. Sea $g = h^{-1} \circ f$. Para hallar el grafo $g^{-1}(\partial Q_1)$ utilizamos la información topológica que tenemos de f y las aristas del cuadrilátero topológico $h(Q_1)$. El grafo $g^{-1}(\partial Q_1) = f^{-1}(h(\partial Q_1))$ aparece en la parte izquierda de la Figura 4.7, correcto salvo isotopía relativa a $P_1 \cup P_2$. Sus aristas están etiquetadas con letras. Una arista con etiqueta $\star$ en la parte izquierda de la Figura 4.7 (esfera dominio) es mapeada mediante g en la arista con etiqueta $\star$ en la parte derecha de la Figura 4.7 (esfera codominio).

Paso 6. El intervalo $[-1/2, \infty]$ tiene etiqueta a en la parte derecha de la Figura 4.7. Este intervalo es el arco principal de una curva esencial γ en $S^2 \setminus P_1$ con pendiente cero. La parte izquierda de la Figura 4.7 muestra que $g^{-1}(\gamma)$ consiste de una sola componente conexa con pendiente 0. Entonces $p/q = 0$ y $d = 3$. El segmento de línea en la parte derecha de la Figura 4.7 con etiqueta b es el arco principal de una curva esencial δ en $S^2 \setminus P_1$ con pendiente ∞. La parte izquierda de la 4.7 muestra $g^{-1}(\delta)$ consiste de una sola componente conexa. Ahora, superponga la imagen inversa del segmento de línea con etiqueta b en el lado derecho de la Figura 4.7. Vemos que esta imagen inversa empieza en el vértice con etiqueta λ_2, cruza transversalmente la arista "horizontal"de Q_1 que une los vértices $(0,0)$ y λ_1, luego cruza transversalmente la arista

"horizontal"de Q_1 que une los vértices λ_1 y $\lambda_1 + \lambda_2$ y finalmente se detiene en el vértice con etiqueta λ_1. Por tanto $g^{-1}(\delta)$ tiene pendiente -3. So $r/s = -3$ y $e = 3$.

Paso 7. Para obtener la matriz con determinante positivo, tomamos

$$A = \begin{bmatrix} q/d & s/e \\ p/d & r/e \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 8. El vértice con etiqueta $(0, 0)$ corresponde al punto $-1/2 \in P_1$. Luego $g(-1/2) = h^{-1}(f(-1/2)) = h^{-1}(1) = \infty$ que corresponde a la etiqueta λ_1. Por tanto $b = \lambda_1$.

Paso 9. Obtenemos una presentación NET para f en la Figura 4.8

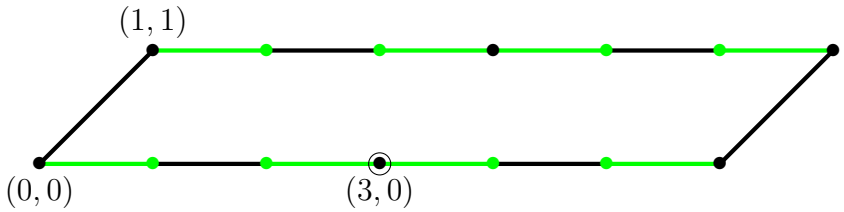


Figura 4.8: Una presentación NET para $f(z) = \frac{3z^2}{2z^3+1}$.

Capítulo 5

La función pendiente

En general, determinar multicurvas estables para funciones de Thurston es bastante complicado. Sin embargo, por los resultados establecidos en la Sección 3.4, si f es una función NET, entonces existe una biyección entre las clases de homotopía de curvas esenciales en $S^2 \setminus P_f$ y el conjunto $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Tomando preimágenes bajo f, la función NET f induce una función $\sigma_f : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}} \cup o$, donde o es la colección de curvas triviales o periféricas en $S^2 \setminus P_f$. En este capítulo definiremos σ_f y discutiremos algunos algoritmos que nos permiten computar σ_f cuando una presentación NET de f es dada.

Los teoremas principales de este capítulo pueden encontrarse en [8, Sección 5]. Por otro lado, el ejemplo detallado en la Sección 5.1, el análisis de cada caso presentado en la Sección 5.2, y los cómputos de la función pendiente para el ejemplo principal son propios del autor de esta tesis.

5.1. La función pendiente y espejos giratorios

Definición 5.1.1. Sea f una función NET obtenida por una presentación NET $\mathbf{D}$. Denotaremos por o la colección de curvas triviales o periféricas en $S^2 \setminus P_2$, y definimos la **función pendiente** $\sigma_f : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}} \cup o$ como sigue. Desde que $\mathbf{D}$ es una presentacion NET, $\Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$. Fijamos la base canónica (e_1, e_2) de Λ_2 mediante la cual definimos pendientes de curvas esenciales en $S^2 \setminus P_2$. Sean p y q dos enteros y coprimos, entonces $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$. Sea δ una curva esencial en $S^2 \setminus P_2$ con pendiente p/q. Por el Teorema 3.4.1 sabemos que cada componente conexa de $f^{-1}(\delta)$ es una curva contenida en $S^2 \setminus P_2$. Si ninguna componente conexa de $f^{-1}(\delta)$ es esencial en $S^2 \setminus P_2$, definimos $\sigma_f(p/q) = o$. Si alguna componente conexa α de $f^{-1}(\delta)$ es esencial en $S^2 \setminus P_2$, definimos $\sigma_f(p/q)$ como la pendiente de α con respecto a la base (e_1, e_2) de Λ_2.

Observación 5.1.1. Por el Teorema 3.4.1, todas las componentes esenciales de $f^{-1}(\delta)$ son homotópicas en $S^2 \setminus P_2$. Por tanto $\sigma_f(p/q)$ está bien definida.

Observación 5.1.2. Por la definición de σ_f, las multicurvas f-estables para la función NET f corresponden precisamente a los puntos fijos de σ_f.

El objetivo principal en esta sección es describir un método para computar σ_f. Para fijar ideas comenzaremos con un ejemplo. Sea **D** el diagrama de presentación NET de la función f del ejemplo principal y sea δ una curva en $S^2 \setminus P_2$ con pendiente $1/2$. El lado derecho de la Figura 5.1 muestra la curva δ (en rojo) mientras que el lado izquierdo muestra la preimagen de δ bajo la aplicación $h \circ \phi$.

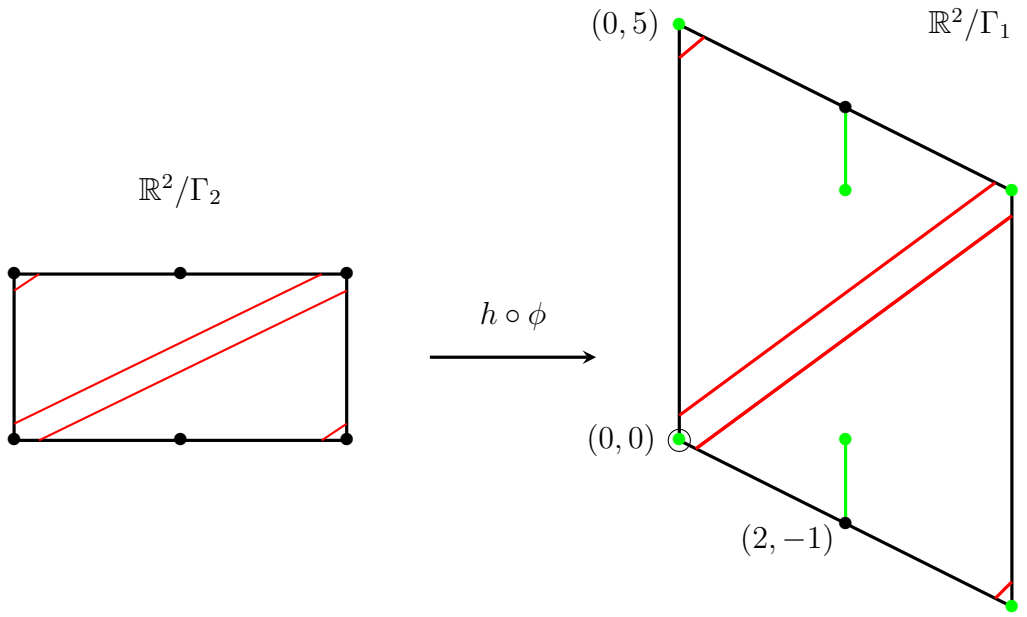


Figura 5.1: Una curva de pendiente $1/2$ y su preimagen bajo $h \circ \phi$.

Sea B la unión de los arcos geodésicos (verdes) no triviales en S^2 asociados a la presentación NET de f y sea $B_1 := \pi_1^{-1}(B)$. Los arcos en B_1 serán llamados **espejos giratorios de** π_1. La terminología será explicada más adelante.

Como en la demostración del Teorema 3.4.1, podemos asumir que δ es la imagen en $S^2 \setminus P_2$, bajo la aplicación $h \circ \phi \circ \pi_2$, de una recta L en $\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_2$ que tiene ecuación parametrica $(x, y) = v + t\lambda$ con $\lambda = (2, 1)$. Escogemos $v \in L$ de manera que v no este contenido en B_1. Entonces el segmento de línea que une v y $v + 2\lambda$ es una levantamiento de δ bajo la aplicación $h \circ \phi \circ \pi_2$. El Cuadro 3.1 nos indica que el orden de $(2, 1) + \Lambda_1$ en Λ_2/Λ_1 es 5 y que $c_3 - c_2 = 2$.

Sea α una componente conexa de $f^{-1}(\delta)$ que es esencial en $S^2 \setminus P_2$. Ya que un levantamiento de f es la identidad, podemos asumir que L es una componente conexa de $\pi_1^{-1}(\alpha)$. Por el Teorema 3.4.1 $\deg(f|_\alpha : \alpha \to \delta) = 5$, entonces el segmento γ_1 que une los puntos v y $w = v + 10\lambda$ es un levantamiento de α bajo π_1. La Figura 5.2 muestra el segmento γ_1 con $v = (0, 1/2)$ y $w = (20, 21/2)$.

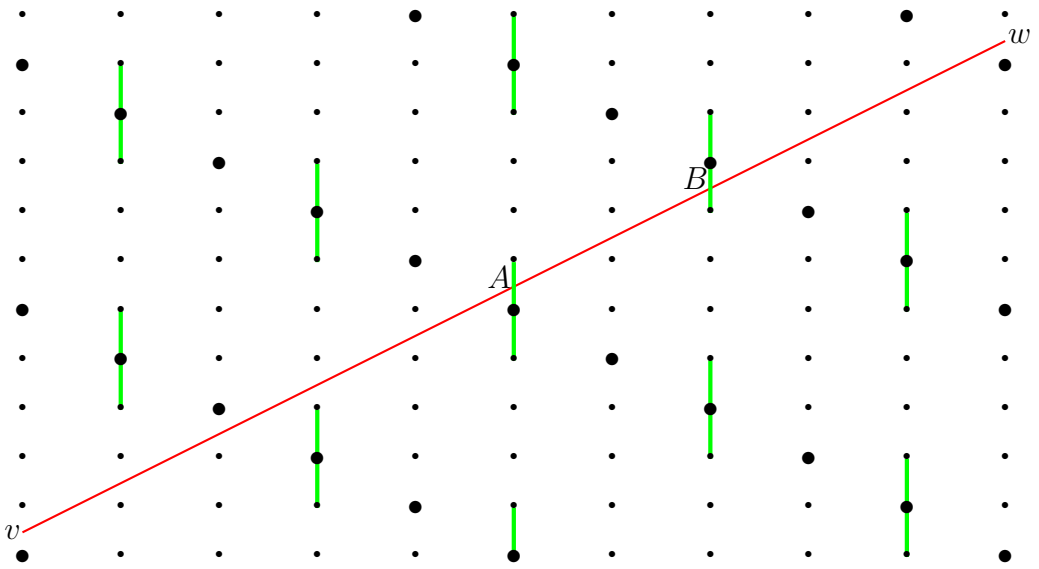


Figura 5.2: Espejos giratorios para π_1 y el segmento γ_1.

Nuestro objetivo es determinar la pendiente de la curva α con respecto a la base ordenada (e_1, e_2) de $\mathbb{Z}^2$. Como γ_1 es un levantamiento de α bajo π_1 y no un levantamiento de α bajo $h \circ \phi \circ \pi_2$, modificaremos el segmento γ_1 para obtener una nueva curva γ_2 que es disjunta de los espejos giratorios de π_1 y cuya imagen bajo π_1 es homotópica a α en $S^2 \setminus P_2$. Luego, para obtener un levantamiento de $\pi_1(\gamma_2)$ bajo $h \circ \phi \circ \pi_2$ será suficiente considerar un levantamiento de $\pi_1(\gamma_2)$ bajo $\phi \circ \pi_2$ ya que $\pi_1(\gamma_2)$ evita el efecto de la inversa de h.

Comenzaremos modificando el segmento γ_1. Imaginemos un fotón viajando a lo largo del segmento γ_1 desde v hasta $A' = A$. En A' el fotón gira 180° alrededor del centro del espejo giratorio y aparece en el punto A'' como es mostrado en la Figura 5.3. Luego viaja paralelo a γ_1 hacia el punto B', donde encuentra otro espejo giratorio. Luego, gira 180° alrededor del centro del segundo espejo giratorio, aparece en B'' y viaja hasta w', donde se detiene. Esta propiedad le da a los espejos giratorios su nombre. La Figura 5.3 muestra que $w' = (12, 9/2)$.

La suma de las longitudes de los segmentos de línea paralelos a γ_1 en la Figura 5.3 es igual a la longitud de γ_1. En consecuencia $v - w'$ es un elemento de $2\Lambda_1$.

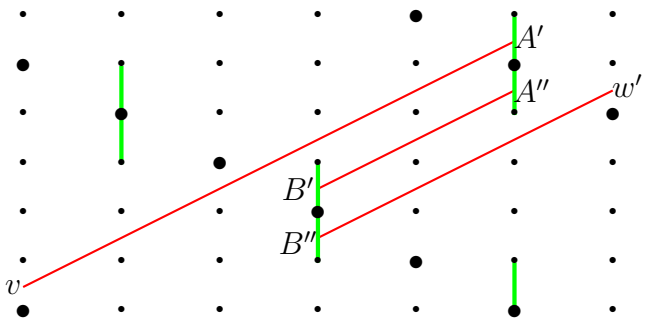


Figura 5.3: El efecto de los espejos giratorios.

Además, es claro que la imagen bajo π_1 de la unión de los segmentos de línea paralelos a γ_1 en la Figura 5.3 es la curva α. La observación crucial es que la imagen bajo π_1 de la curva γ_2 en la Figura 5.4 es homotópica a α en $S^2 \setminus P_2$. Esto se debe a que las imágenes de los centros de los espejos giratorios bajo π_1 no son puntos de P_2. Por tanto la pendiente de α relativa a la base ordenada (e_1, e_2) de $\mathbb{Z}^2$ es la pendiente del segmento de recta que une v y w' con respecto a la base ordenada $\{(2,-1),(0,5)\}$ de Λ_1. En nuestro ejemplo $w' = (12, 9/2)$. Luego $w' - v = (12, 4) = 6(2,-1) + 2(0,5)$. Entonces la pendiente de α relativa a la base ordenada (e_1, e_2) de Λ_2 es $2/6$; i.e., $1/3$.

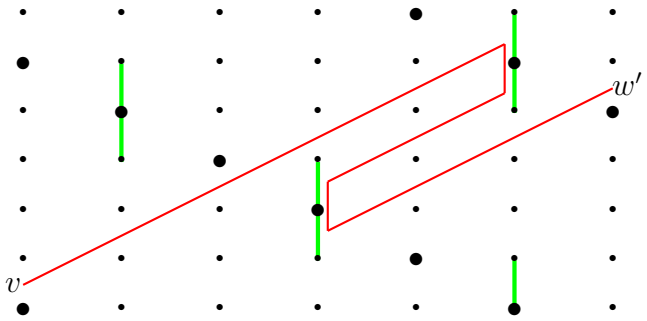


Figura 5.4: La curva γ_2.

Usando las rotationes de 180° alrededor de los centros de los espejos giratorios que intersectan el interior del segmento $[v, w]$, se sigue que

$$w' = (-1)^n w + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\theta_i,$$

donde n es el número de espejos giratorios de B_1 que intersectan el interior del segmento $[v, w]$ y θ_i es el centro del i-ésimo espejo giratorio que intersecta interior del segmento $[v, w]$. A continuación ilustraremos esta fórmula. En

nuestro ejemplo $n = 2$, $\theta_1 = (10, 5)$, $\theta_2 = (14, 8)$ y $w = (20, 21/2)$, entonces $w' = (-1)^2 w + 2(\theta_2 - \theta_1) = (20, 21/2) + 2(-4, -3) = (12, 9/2)$.

El método descrito en el ejemplo anterior se puede usar en el caso general. Sea f una función NET dada por una presentación NET $\mathbf{D}$. Recordar que $\Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$ y que $\pi_i : \mathbb{R}_i^2 \to S_i^2 := \mathbb{R}_i^2/\Gamma_i$ son las proyecciones canónicas. Sea B la unión de los arcos geodésicos (verdes) no triviales en S^2 asociados a la presentación NET de f y sea $B_1 := \pi_1^{-1}(B)$. Note que la restricción de π_1 a cada una de las componentes conexas de B_1 (espejos giratorios) es un cubrimiento ramificado de grado 2. Además tenemos el siguiente diagrama commutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}_1^2 & \xrightarrow{i_d} & \mathbb{R}_2^2 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}_1^2 \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\
S_1^2 & \xrightarrow{\overline{i_d}} & S_2^2 & \xrightarrow{\phi} & S_1^2 \\
\downarrow{\scriptstyle i_d} & & & & \downarrow{\scriptstyle h} \\
S_1^2 & & \xrightarrow{\quad f \quad} & & S_1^2
\end{array}$$

Procedemos a calcular la función pendiente σ_f asociada a esta presentación. Sea $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$. Sea L una línea recta en $\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_2$ con pendiente p/q relativa a la base canónica (e_1, e_2) de $\Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$. Entonces $\delta = p_2(q_2(L))$ es una curva esencial en $S^2 \setminus P_2$ con pendiente p/q. El Teorema 3.4.1 proporciona los medios para determinar si alguna componente de $f^{-1}(\delta)$ es esencial en $S^2 \setminus P_2$, es decir, nos permite saber si $\sigma_f(p/q) = o$. Supongamos que alguna componente α de $f^{-1}(\delta)$ es esencial en $S^2 \setminus P_2$. Ya que un levantamiento de f a $\mathbb{R}^2$ es la identidad (ver diagrama arriba), podemos y vamos a asumir que L es una componente conexa de $\pi_1^{-1}(\alpha)$. Sea $\lambda = (q, p) \in \Lambda_2$. Sea $d = \deg(f|_\alpha : \alpha \to \delta)$. El Teorema 3.4.1 muestra que d es el orden de λ en Λ_2/Λ_1. Escogemos $v \in L$ de manera que v no está contenido en B_1. Entonces el segmento de L uniendo los puntos v y $v + 2\lambda$ es un levantamiento de δ a $\mathbb{R}^2$ bajo $h \circ \phi \circ \pi_2$ y el segmento S de L uniendo los puntos v y $w = v + 2d\lambda$ es un levantamiento de α a $\mathbb{R}^2$ bajo π_1. Recordemos que cada espejo giratorio de π_1 es un arco lineal por partes. Tan igual que en el ejemplo anterior, podemos escoger L de manera que su intersección con cada espejo giratorio de π_1 es transversal. Entonces S intersecta B_1, la unión de los espejo giratorios de π_1, en una cantidad finita de puntos. Sean $\theta_1, \cdots, \theta_n$ los puntos medios de los espejos giratorios que intersectan a S en orden. Note que cada θ_j es un elemento de Λ_1 y que $\pi_1(\theta_j) \notin P_2$. Entonces $\sigma_f(p/q)$ es la pendiente del segmento de línea que una v y el punto

$$w' = (-1)^n w + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \theta_i$$

relativa a la base ordenada (λ_1, λ_2) de Λ_1. En consecuencia hemos probado lo siguiente.

Teorema 5.1.1. Sea f una función NET dada por una presentación NET **D**. Sea $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$. Sea δ una curva esencial en $S^2 \setminus P_2$ con pendiente p/q relativa a la base canónica (e_1, e_2) de $\Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$. Supongamos que α es una componente conexa de $f^{-1}(\delta)$ y que es esencial en $S^2 \setminus P_2$. Sea d el grado con el cual f mapea α en δ. Sea $\lambda = (q, p) \in \Lambda_2$. Sea $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\pi_1(v) \in \alpha$ y v no está contenido en ningún espejo giratorio de π_1. Es posible escoger δ de manera que el segmento de línea uniendo v y $w = v + 2d\lambda$ es un levantamiento de α a $\mathbb{R}^2$ bajo π_1 y además intersecta los espejos giratorios de π_1 transversalmente en una cantidad finita de puntos. Sea S el segmento de línea uniendo v y w. Sean $\theta_1, \cdots, \theta_n$ los puntos medios de los espejos giratorios que intersectan a S en orden. Entonces $\sigma_f(p/q)$ es la pendiente del segmento de línea que una v y el punto

$$w' = (-1)^n w + 2\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\theta_i$$

relativa a la base ordenada (λ_1, λ_2) de Λ_1.

Observación 5.1.3. Si los espejos giratorios de π_1 son invariantes bajo traslaciones por elementos de Γ_1, como en el ejemplo principal, el elemento w en Teorema 5.1.1 puede ser tomado como $v + d\lambda$ en lugar de $v + 2d\lambda$. Esto es posible ya que podemos reemplazar δ con un arco principal de δ. El levantamiento de un arco principal de δ tendría por longitud la mitad de la longitud del segmento de recta que connecta v y $v + 2d\lambda$.

El Teorema 5.1.1 provee un método algorítmico para calcular la función pendiente. El siguiente teorema proporciona un método relativamente más general donde se reduce el número de cálculos para determinar la función pendiente.

Teorema 5.1.2. Sea f una función NET dada por una presentación NET **D**. Sea $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$. Como en el Teorema 5.1.1, sea $\lambda = (q, p) \in \Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$ y sea μ un elemento de Λ_2 tal que λ y μ forman una base de Λ_2. Además sean c_1, c_2, c_3, c_4 los niveles de $\pi_1^{-1}(P_2)$ relativos a λ y μ. Asumimos que $\sigma_f(p/q) \neq o$, equivalentemente, $c_2 < c_3$ según el Teorema 3.4.1. Sea L una línea en $\mathbb{R}^2$ que tiene una Γ_1-traslación dada en forma paramétrica por $(x, y) = t\lambda + c_2\mu$ ó por $(x, y) = t\lambda + c_3\mu$. Sean v y w elementos distintos de $L \cap \pi_1^{-1}(P_2)$ tales que no elemento de $\pi_1^{-1}(P_1 \cup P_2)$ esta estrictamente entre v y w. Sea S el segmento de línea cerrado que une v y w. Asumimos que el interior de S intersecta los espejos giratorios de π_1 transversalmente en una cantidad finita de puntos. Sean $\theta_1, \ldots, \theta_n$ los puntos medios de los espejos giratorios que intersectan el interior de S en orden. Como $v, w \in \pi_1^{-1}(P_2)$, tanto v como w estan contenidos en espejos giratorios para π_1. Sean θ_0 y θ_{n+1} los puntos medios de estos espejos giratorios. Entonces $\sigma_f(p/q)$ es la pendiente del segmento de línea que une los

puntos $(0,0)$ y

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\theta_{i+1}-\theta_i)$$

relativa a la base ordenada (λ_1,λ_2) de Λ_1 dada en la presentación **D**.

Demostración. Es suficiente probar el teorema para el caso en el cual L está dada en forma paramétrica por $(x,y)=t\lambda+c_2\mu$ ó por $(x,y)=t\lambda+c_3\mu$. Asumimos que L tiene una de estas dos formas. Sea $\epsilon>0$. Si L es dada de forma paramétrica por $(x,y)=t\lambda+c_2\mu$, definimos L_ϵ como la línea con forma paramétrica $(x,y)=t\lambda+(c_2+\epsilon)\mu$. Si L es dada de forma paramétrica por $(x,y)=t\lambda+c_3\mu$, definimos L_ϵ como la línea con forma paramétrica $(x,y)=t\lambda+(c_3-\epsilon)\mu$. El enunciado (5) del Teorema 3.4.1 muestra que si $0<\epsilon<c_3-c_2$, entonces $\pi_1(L_\epsilon)$ es una curva esencial en $S^2\setminus P_2$. Es claro que, f mapea $\pi_1(L_\epsilon)$ en una curva que es esencial en $S^2\setminus P_2$ con pendiente p/q. Por tanto, $\sigma_f(p/q)$ es la pendiente de $\pi_1(L_\epsilon)$ en $S^2\setminus P_2$.

Por hipótesis el segmento abierto (v,w) no contiene puntos de $\pi^{-1}(P_1\cap P_2)$, entonces $\pi_1|_{(v,w)}:(v,w)\to S^2\setminus P_2$ es inyectiva. En particular, el interior de $\pi_1(S)$ evita los valores críticos de $h\circ\phi\circ\pi_2$. Sea S' un levantamiento de $\pi_1(S)$ a $\mathbb{R}^2$ bajo $h\circ\phi\circ\pi_2$. Por continuidad, existe $v_\epsilon\in L_\epsilon$ cerca a v y $w_\epsilon\in L_\epsilon$ cerca a w tales que $\pi_1(v_\epsilon)$ y $\pi_1(w_\epsilon)$ son levantados mediante $h\circ\phi\circ\pi_2$ a puntos que se encuentran cerca de los puntos terminales de S' y estos levantamientos difieren por un elemento no trivial de $\eta\in\Lambda_2=\mathbb{Z}^2$. Encontrar las coordenadas de η determina el valor de $\sigma_f(p/q)$. Si ϵ es suficientemente pequeño, entonces computar η usando S, el cual une v y w, es lo mismo que computar η usando el segmento L_ϵ, que une v_ϵ y w_ϵ.

La explicación dada justo antes del Teorema 5.1.1 esencialmente completa la prueba del Teorema 5.1.2. La única diferencia es que ahora v y w son puntos terminales de los espejos giratorios de $p_1\circ q_1$, por lo que requerimos reemplazar v y w por los centros de los espejos giratorios que los contienen (esto significa que en la esfera estamos aplicando la inversa de h a los puntos $\pi_1(v)$ y $\pi_1(w)$). Entonces $\sigma_f(p/q)$ es la pendiente del segmento de línea uniendo θ_0 y

$$(-1)^n\theta_{n+1}+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\theta_i$$

con respecto a la base ordenada (λ_1,λ_2) de Λ_1 dada en la presentación **D**. Finalmente, note que

$$(-1)^n\theta_{n+1}+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\theta_i-\theta_0=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\theta_{i+1}-\theta_i).$$

Esto prueba el Teorema 5.1.2. ■

Una ventaja del Teorema 5.1.2 sobre el Teorema 5.1.1 es que en el Teorema 5.1.2 ambos elementos v y w están en Λ_2, mientras que en el Teorema 5.1.1 ninguno es elemento de Λ_2. Otra ventaja es que en el Teorema 5.1.2 la longitud del segmento de línea uniendo v y w es más corta que la longitud dada en el Teorema 5.1.1, esto implica menor cantidad de computos para determinar σ_f.

5.2. σ_f para el ejemplo principal

A continuación mostraremos que para nuestro ejemplo principal el Teorema 5.1.2 provee un algoritmo para calcular la función pendiente el cual es fácil de implementar usando un programa en computadora y que incluso puede ser usado manualmente en casos simples.

Sean p y q enteros y coprimos. Deseamos calcular $\sigma_f(p/q)$ para el ejemplo principal usando Teorema 5.1.2. Cuadro 3.1 muestra que $c_2 \neq c_3$, por tanto $\sigma_f(p/q) \neq o$. Comenzaremos escogiendo puntos apropiados v y w en el retículo $\Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$ como en el Teorema 5.1.2. Cuadro 5.1 muestra nuestras elecciones. A continuación justificaremos estas eleccciones.

La base ordenada para Λ_2 es la base canónica $\lambda_2 = (1, 0)$ y $\mu_2 = (0, 1)$. En consecuencia $\lambda = (q, p)$. Mas aún, $\Lambda_1 = \langle(2, -1), (0, 5)\rangle$. El conjunto $\pi_1^{-1}(P_1 \cup P_2)$ es una unión de clases de equivalencia de $2\Lambda_1$ en Λ_2, y los siguientes elementos son distintos representantes de estas clases de equivalencia.

$$(0, 0), (0, 5), (2, -1), (2, 4), (2, 0), (2, -2), (2, 3), (2, 5)$$

Note que los primeros dos representantes estan en $\pi_1^{-1}(P_1 \cap P_2)$, los siguientes dos están en $\pi_1^{-1}(P_1 \setminus P_2)$ y los últimos cuatro están en $\pi_1^{-1}(P_2 \setminus P_1)$.

Primero determinaremos todos los casos en los que es posible escoger $v = (0, 0)$. Es claro que $(0, 0) \in \pi_1^{-1}(P_2)$, pero también requerimos que $(0, 0)$ sea un punto de L como en el Teorema 5.1.2. Desde que L tiene ecuación paramétrica de la forma $(x, y) = t\lambda + c_2\mu$ y (λ, μ) es una base ordenada de Λ_2, $(0, 0) \in L$ si y solo si $c_2 = 0$. El Cuadro 3.1 nos muestra que esto es equivalente a la condición que $q \equiv 0 \mod 4$ si $2p + q \equiv 0 \mod 5$.

Con $v = (0, 0)$ el elemento w es un múltiplo entero de $\lambda = (q, p)$, es decir, $w = x(q, p)$ donde x es un entero. Como (q, p) y $(-q, -p)$ producen la misma línea, podemos asumir que $x \in \mathbb{Z}^+$. Deseamos que w sea un elemento de $\pi_1^{-1}(P_2)$ y que el interior relativo del segmento de línea uniendo $(0, 0)$ y w no contenga elementos de $\pi_1^{-1}(P_1 \cup P_2)$. Sea (r, s) uno de nuestros ocho representantes. Estamos interesados en la congruencia $(r, s) \equiv x(q, p) \mod 2\Lambda_1$. En

consecuencia, estamos interesados en enteros y y z tales que

$$(r,s) = x(q,p) + y(4,-2) + z(0,10).$$

Las siguientes ecuaciones nos proporcionan y y z como números racionales.

$$y = \frac{1}{4}(r - xq) \qquad \text{y} \qquad z = \frac{1}{20}(2s + r - x(2p+q))$$

Por tanto, y y z son enteros si y solo si las siguientes tres congruencia son válidas.

$$r \equiv xq \mod 4, \quad s \equiv xp \mod 2, \quad 2s + r \equiv x(2p+q) \mod 5 \qquad (5.1)$$

Entonces, asumiendo que $q \equiv 0 \mod 4$ si $2p + q \equiv 0 \mod 5$, podemos tomar $v = (0,0)$ y $w = x(q,p)$, donde x es el menor entero positivo que satisface las congruencias en (5.1) para alguna elección de (r,s).

Caso 1: $q \equiv 0 \mod 4$. La primera congruencia en (5.1) implica que $r \equiv 0$ mód 4. Por lo tanto, $(r,s) = (0,0) \in \Lambda_1$ ó $(r,s) = (0,5) \in \Lambda_1$. Entonces $x(q,p) = -2y(2,-1) - 2z(0,5)$ ó $x(q,p) = -2y(2,-1) - (2z-1)(0,5)$. En cualquiera de los dos subcasos, la minimalidad de x implica que x es el orden de la imagen de $\lambda = (q,p)$ en Λ_2/Λ_1. El Teorema 3.1.1 y el Cuadro 3.1 implican que $x = 1$ si $2p + q \equiv 0 \mod 5$ y $x = 5$ si $2p + q \equiv \pm 1, \pm 2 \mod 5$. Esto nos da las primeras dos filas del Cuadro 5.1.

Caso 2: $q \equiv 2 \mod 4$. Como $\gcd(p,q) = 1$, $p \equiv 1 \mod 2$.

- Note que $x = 1$ si y solo si $r \equiv 2 \mod 4$, $s \equiv 1 \mod 2$ y $2s + r \equiv 2p + q$ mód 3. Estas congruencias tienen una solución $(r,s) \in \pi_1^{-1}(P_2)$ si y solo si $(r,s) \in \{(2,3),(2,5)\}$ y $2p + q \equiv \pm 2 \mod 5$. Esto nos da la fila 5 de la Table 5.1.

- Si $x = 2$, las congruencias en (5.1) son $r \equiv 2q \mod 4$, $s \equiv 2p \mod 2$ y $2s + r \equiv 2(2p+q) \mod 5$. Entonces $r \equiv 0 \mod 4$ y $s \equiv 0 \mod 2$. Por tanto $(r,s) = (0,0)$. Luego $2p + q \equiv 0 \mod 5$. Desde que $c_2 = 0$, $2p+q \equiv 0 \mod 5$ implica que $q \equiv 0 \mod 4$. Esto contradice la hipótesis $q \equiv 2 \mod 4$. Por tanto no hay valor aceptable para w con $x = 2$.

- Note que $x = 3$ si y solo si $r \equiv 2 \mod 4$, $s \equiv 1 \mod 2$ y $2s+r \equiv 3(2p+q)$ mód 5. Estas congruencias tienen una solución $(r,s) \in \pi_1^{-1}(P_2)$ si y solo si $(r,s) \in \{(2,3),(2,5)\}$ y $2p + q \equiv \pm 1 \mod 5$. Esto nos da la fila 4 de la Table 5.1.

Caso 3: $q \equiv \pm 1 \mod 4$. Se sigue que $r \equiv xq \equiv \pm x \mod 4$. Si x es impar entonces r tendría que ser impar, pero esto es imposible deacuerdo a nuestra colección de representantes. Entonces x es par. Además como q es impar y $\gcd(p,q) = 1$, $p \equiv 1 \mod 2$.

- Note que $x = 2$ si y solo si $r \equiv 2 \mod 4$, $s \equiv 0 \mod 2$ y $2s+r \equiv 2(2p+q) \mod 5$. Estas congruencias tienen una solución $(r, s) \in \pi_1^{-1}(P_2)$ si y solo si $(r, s) \in \{(2, 0), (2, -2)\}$ y $2p + q \equiv \pm 1 \mod 3$. Esto nos da la fila 7 del Cuadro 5.1.

- Si $x = 4$, las congruencias en (5.1) son $r \equiv 0 \mod 4$, $s \equiv 0 \mod 2$ y $2s + r \equiv 4(2p + q) \mod 5$. Por tanto $(r, s) = (0, 0)$. Luego $2p + q \equiv 0 \mod 5$. Desde que $c_2 = 0$, $2p + q \equiv 0 \mod 5$ implica que $q \equiv 0 \mod 4$. Esto contradice la hipótesis $q \equiv 2 \mod 4$. Por tanto no hay valor aceptable para w con $x = 4$.

- Note que $x = 6$ si y solo si $r \equiv 2 \mod 4$, $s \equiv 0 \mod 2$ y $2s+r \equiv 1(2p+q) \mod 5$. Estas congruencias tienen una solución $(r, s) \in \pi_1^{-1}(P_2)$ si y solo si $(r, s) \in \{(2, 3), (2, 5)\}$ y $2p + q \equiv \pm 2 \mod 5$. Esto nos da la fila 8 de la Table 5.1.

Hemos concluido con todos los posibles casos en los que podemos escoger $v = (0, 0)$. Nos queda analizar los valores de p y q para los cuales $q \not\equiv 0 \mod 4$ y $2p + q \equiv 0 \mod 5$. El Cuadro 3.1 muestra que estos son precisamente los casos en los cuales $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$. Note que $-(2, 5) + 2\Lambda_1 = (2, 3) + 2\Lambda_1$ y que $-(2, 0) + 2\Lambda_1 = (2, -2) + 2\Lambda_1$. Entonces

$$p_1^{-1}(P_2) = \{(0, 0) + 2\Lambda_1, (0, 5) + 2\Lambda_1, \pm(2, 0) + 2\Lambda_1, \pm(2, 5) + 2\Lambda_1\}.$$

Afirmación 5.2.1. Si $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ como en el Cuadro 3.1, entonces $(0, 0) + 2\Lambda_1$ corresponde a c_1, $(0, 5) + 2\Lambda_1$ corresponde a c_4, y $\pm(2, 0) + 2\Lambda_1$ corresponde a c_2 ó a c_3.

Demostración. Sea $\lambda = (q, p)$ donde p y q son enteros coprimos. Supongamos que el orden de $\lambda + \Lambda_1$ en Λ_2/Λ_1 es d. Entonces el orden de $\lambda + 2\Lambda_1$ en $A = \Lambda_2/2\Lambda_1$ es $2d$. Sea $B = \langle \lambda + 2\Lambda_1 \rangle$ y sea μ tal que $\{\lambda, \mu\}$ es un base de Λ_2. Sea $a = \mu + B$. Si $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ como en el Cuadro 3.1, entonces tenemos dos casos genéricos: $d = 2$ con $c_1 = 0$ y $c_4 = 5$; y $d = 1$ con $c_1 = 0$ y $c_4 = 10$.

Si $d = 2$ con c_1 y $c_4 = 5$. En este caso $|B| = 4$ y $|A/B| = 10$. Es claro que $(0, 0) + 2\Lambda_1 \in c_1 a + B$. Desde que todos los niveles son distintos, $(0, 5) + 2\Lambda_1 \notin c_1 a + B$. Además el orden de $(0, 5) + 2\Lambda_1$ en A es 2. Como el único subgrupo de A/B de orden 2 es $\{c_1\mu + B, c_4\mu + B\}$, se sigue que $(0, 5) + 2\Lambda_1 \in c_4\mu + B$. Por tanto $\pm(2, 0) + 2\Lambda_1$ corresponde a c_2 ó a c_3.

Si $d = 1$ con $c_1 = 0$ y $c_4 = 10$. En este caso $|B| = 2$ y $|A/B| = 20$. Es claro que $(0, 0) + 2\Lambda_1 \in c_1 a + B$. Desde que todos los niveles son distintos, $(0, 5) + 2\Lambda_1 \notin c_1 a + B$. Además el orden de $(0, 5) + 2\Lambda_1$ en A es 2. Como el único subgrupo de A/B de orden 2 es $\{c_1\mu + B, c_4\mu + B\}$, se sigue que $(0, 5) + 2\Lambda_1 \in c_4\mu + B$. Por tanto $\pm(2, 0) + 2\Lambda_1$ corresponde a c_2 ó a c_3. ■

En consecuencia, podemos escoger la línea L del Teorema 5.1.2 de manera que L pasa por el punto $(2,0)$. Reemplazando $(0,0)$ por $(2,0)$ en nuestro análisis inicial, tenemos que $(r,s) \equiv x(q,p) + (2,0) \mod 2\Lambda_1$. Esto tiene el efecto de reemplazar r por $r-2$ en las congruencias dadas en (5.1). En tal caso obtenemos lo siguiente.

$$r-2 \equiv xq \mod 4, \quad s \equiv xp \mod 2, \quad 2s+r-2 \equiv x(2p+q) \mod 5 \quad (5.2)$$

Primero supongamos que $q \not\equiv 0 \mod 4$ y $2p+q \equiv 0 \mod 5$. Si $x \equiv 1 \mod 2$, entonces la primera congruencia en (5.2) implica que $r \not\equiv 2 \mod 4$. Luego tendríamos que $r \not\equiv 0 \mod 4$, lo cual implica que $r = 0$. Reemplazando esto en la tercera congruencia de (5.2) obtenemos $s = 0$ o $s = 5$. Entonces $(r,s) \in \{(0,0),(0,5)\}$. Sin embargo, la Afirmación 5.2 nos dice que los niveles para $(0,0) + 2\Lambda_1$ y $(0,5) + 2\Lambda_1$ corresponden a c_1 y c_4 y no a c_2 o c_3. Por tanto $x \equiv 0 \mod 2$.

Ahora procedemos a analizar por casos.

Caso 1: $q \equiv 2 \mod 4$ y $2p+q \equiv 0 \mod 5$. Note que $x = 2$ si y solo si si y solo si $r \equiv 2 \mod 4$, $s \equiv 0 \mod 2$ y $2s+r \equiv 2 \mod 5$. Estas congruencias tienen una solución $(r,s) \in \pi_1^{-1}(P_2)$ si y solo si $(r,s) = (2,0)$. Esto nos da la tercera fila del Cuadro 5.1.

Caso 2: $q \equiv \pm 1 \mod 4$ y $2p+q \equiv 0 \mod 5$.

- Si $x = 2$, entonces $r \equiv 0 \mod 4$, $s \equiv 0 \mod 2$ entonces $(r,s) = (0,0)$. Sin embargo, esto nos daría $2s+r-2 \equiv -2 \not\equiv 0 \equiv x(2p+q) \mod 5$. Por tanto x no puede ser 2.
- Note que $x = 4$ si y solo si $r \equiv 2 \mod 4$, $s \equiv 0 \mod 2$ y $2s+r \equiv 2 \mod 5$. Estas congruencias tienen una solución $(r,s) \in \pi_1^{-1}(P_2)$ si y solo si $(r,s) = (2,0)$. Esto nos da la sexta fila del Cuadro 5.1.

Esto completa la verificación del Cuadro 5.1.

Ahora que tenemos v y w, podemos computar los puntos reticulares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ que aparecen en el Teorema 5.1.2. Un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es el centro de un espejo giratorio de π_1 si y solo si $x \equiv 2 \mod 4$ y existe un entero Q_x tal que $x + 2y = 10Q_x$. Un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está en un espejo giratorio de π_1 si y solo si $x \equiv 2 \mod 4$ y existe un entero Q_x y un número real R_x con $|R_x| \leq 2$ tal que $x + 2y = 10Q_x + R_x$.

Supongamos que $v = (0,0)$. Sea $w = (w_1, w_2)$. Usando el Cuadro 5.1, el segmento de línea uniendo v y w está contenido en la línea dada por $y = \frac{p}{q}x$. Para

$q \mod 4$	$2p+q \mod 5$	v	w
0	0	$(0,0)$	(q,p)
0	$\pm1, \pm2$	$(0,0)$	$(5q,5p)$
2	0	$(2,0)$	$(2+2q,2p)$
2	±1	$(0,0)$	$(3q,3p)$
2	±2	$(0,0)$	(q,p)
±1	0	$(2,0)$	$(2+4q,4p)$
±1	±1	$(0,0)$	$(2q,2p)$
±1	±2	$(0,0)$	$(6q,6p)$

Cuadro 5.1: Escogiendo v y w para el ejemplo principal.

cada $x \in \mathbb{Z}$, definamos Q_x y R_x de manera que

$$\Big(1+\frac{2p}{q}\Big)x = 10Q_x + R_x \tag{5.3}$$

donde $Q_x \in \mathbb{Z}$, $R_x \in \mathbb{Q}$ y $-5 < R_x \leq 5$. Sean $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < w_1$ aquellos enteros congruentes a 2 módulo 4 tales que $|R_{x_i}| < 2$. Sea $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = w_1$. Si θ_i es el centro del i-ésimo espejo giratorio como en el Teorema 5.1.2, entonces

$$\theta_i = \Big(x_i, \frac{10Q_{x_i} - x_i}{2}\Big) = \frac{1}{2}x_i(2,-1) + Q_{x_i}(0,5)$$

para $i \in \{0, \ldots, n+1\}$. Definimos

$$N = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(Q_{x_i+1} - Q_{x_i}) \qquad \text{y} \qquad D = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x_{i+1} - x_i) \tag{5.4}$$

Juntando todo lo que tenemos, Teorema 5.1.2 implica que

$$\sigma_f\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{N}{D}.$$

La situación es similar si $v = (2,0)$. Otra vez, sea $w = (w_1, w_2)$. Usando el Cuadro 5.1, el segmento de línea uniendo v y w está contenido en la linea dada por $y = \frac{p}{q}x - \frac{2p}{q}$. Para cada $x \in \mathbb{Z}$, definamos Q_x y R_x de manera que

$$\Big(1+\frac{2p}{q}\Big)x - \frac{4p}{q} = 10Q_x + R_x \tag{5.5}$$

donde $Q_x \in \mathbb{Z}$, $R_x \in \mathbb{Q}$ y $-5 < R_x \leq 5$. Sean $2 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < w_1$ aquellos enteros congruentes a 2 módulo 4 tales que $|R_{x_i}| < 2$. Sea $x_0 = 2$ y

$x_{n+1} = w_1$. Definimos

$$N = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (Q_{x_i+1} - Q_{x_i}) \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_{i+1} - x_i). \tag{5.6}$$

Entonces

$$\sigma_f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{N}{D}.$$

A continuación ilustraremos estas fórmulas computando σ_f en ciertos valores racionales que serán útiles en la última sección del siguiente capítulo. La figura asociada a cada computo muestra todas las posibles intersecciones de espejos giratorios no triviales de $p_1 \circ q_1$ con el correspondiente segmento de recta $[v, w]$.

Computo de $\sigma_f(-1/2)$: Desde que $p = -1$ y $q = 2$, $2p + q \equiv 0 \mod 5$ y $q \equiv 2 \mod 4$. Por el Cuadro 5.1, $v = (2, 0)$ y $w = (2 + 2q, 2p) = (6, -2)$. De la Figura 5.5 se sigue que $x_0 = 2 < x_1 = w_1 = 6$. La ecuación 5.5 implica que $Q_{x_0} = Q_{x_1} = 0$. Usando las fórmulas en 5.6 obtenemos $N = 0$ y $D = 2$. Por tanto, $\sigma_f(-1/2) = 0$.

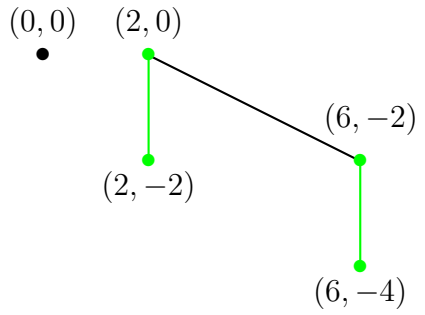


Figura 5.5: Calculando $\sigma_f(-1/2)$.

Computo de $\sigma_f(-1/4)$: Desde que $p = -1$ y $q = 4$, $2p + q \equiv 2 \mod 5$ y $q \equiv 0 \mod 4$. Del Cuadro 5.1, $v = (0, 0)$ y $w = 5(q, p) = (20, -5)$. De la Figura 5.6 se sigue que $x_0 = 0 < x_1 = 2 < x_2 = 18 < x_3 = w_1 = 20$. La ecuación 5.3 implica que $Q_{x_0} = Q_{x_1} = 0$, $Q_{x_2} = Q_{x_3} = 1$. Usando las fórmulas en 5.4 obtenemos $N = 1$ y $D = -6$. Por tanto, $\sigma_f(-1/4) = -1/6$.

Computo de $\sigma_f(1/8)$: Desde que $p = 1$ y $q = 8$, $2p + q \equiv 0 \mod 5$ y $q \equiv 0 \mod 4$. Del Cuadro 5.1, $v = (0, 0)$ y $w = (q, p) = (8, 1)$. De la Figura 5.7 se sigue que $x_0 = 0 < x_1 = w_1 = 8$. La ecuación 5.3 implica que $Q_{x_0} = 0$, $Q_{x_1} = 1$. Usando las fórmulas en 5.4 obtenemos $N = 1$ y $D = 4$. Por tanto, $\sigma_f(1/8) = 1/4$.

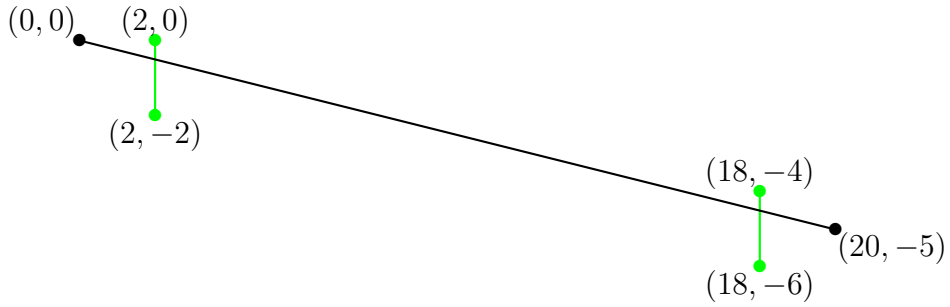


Figura 5.6: Calculando $\sigma_f(-1/4)$.

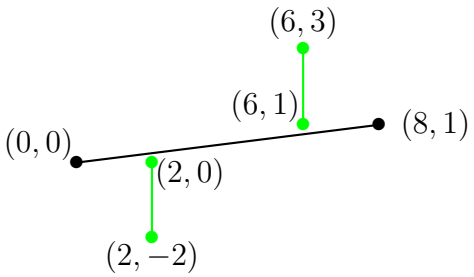


Figura 5.7: Calculando $\sigma_f(1/8)$.

Computo de $\sigma_f(1/4)$: Desde que $p = 1$ y $q = 4$, $2p + q \equiv 1 \mod 5$ y $q \equiv 0 \mod 4$. Del Cuadro 5.1, $v = (0, 0)$ y $w = 5(q, p) = (20, 5)$. De la Figura 5.8 se sigue que $x_0 = 0 < x_1 = 6 < x_2 = 14 < x_3 = w_1 = 20$. La ecuación 5.3 implica que $Q_{x_i} = i$ para $0 \leq i \leq 3$. Usando las fórmulas en 5.4 obtenemos $N = 1$ y $D = 2$. Por tanto, $\sigma_f(1/4) = 1/2$.

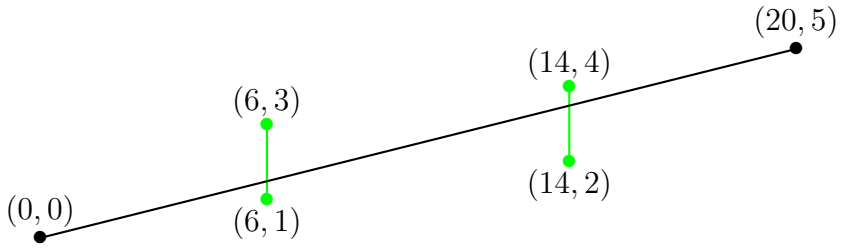


Figura 5.8: Calculando $\sigma_f(1/4)$.

Computo de $\sigma_f(1/2)$: Desde que $p = 1$ y $q = 2$, $2p + q \equiv 0 \mod 5$ y $q \equiv 2 \mod 4$. Del Cuadro 5.1, $v = (0, 0)$ y $w = 3(q, p) = (6, 3)$. De la Figura 5.9 se sigue que $x_0 = 2 < x_1 = w_1 = 6$. La ecuación 5.3 implica que $Q_{x_0} = 0$,

$Q_{x_1} = 1$. Usando las fórmulas en 5.4 obtenemos $N = 1$ y $D = 3$. Por tanto, $\sigma_f(1/2) = 1/3$.

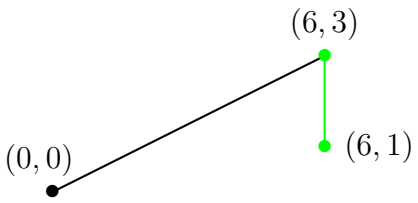


Figura 5.9: Calculando $\sigma_f(1/2)$.

Computo de $\sigma_f(1/3)$: Desde que $p = 1$ y $q = 3$, $2p + q \equiv 0 \mod 5$ y $q \equiv 3 \mod 4$. Del Cuadro 5.1, $v = (2, 0)$ y $w = (2 + 4q, 4p) = (14, 4)$. De la Figura 5.10 se sigue que $x_0 = 2 < x_1 = 6 < x_2 = w_1 = 14$. La ecuación 5.5 implica que $Q_{x_i} = i$ para $0 \leq i \leq 2$. Usando las fórmulas dadas en 5.6 obtenemos $N = 0$ y $D = 6$. Por tanto, $\sigma_f(1/3) = 0$.

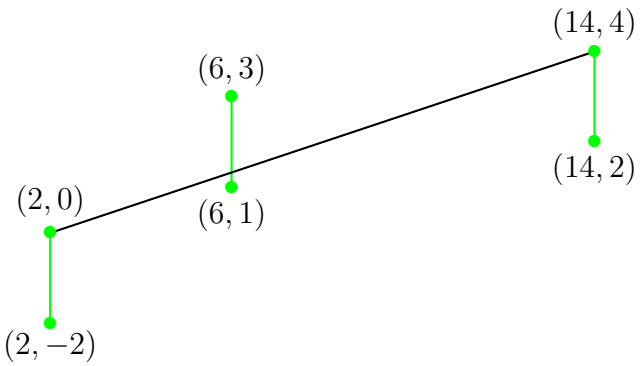


Figura 5.10: Calculando $\sigma_f(1/3)$.

Computo de $\sigma_f(7/16)$: Desde que $p = 7$ y $q = 16$, $2p+q \equiv 0 \mod 5$ y $q \equiv 0 \mod 4$. Del Cuadro 5.1, $v = (0, 0)$ y $w = (q, p) = (16, 7)$. De la Figura 5.11 se sigue que $x_0 = 2 < x_1 = 6 < x_2 = 10 < x_3 = w_1 = 16$. La ecuación 5.3 implica que $Q_{x_i} = i$ para $0 \leq i \leq 3$. Usando las fórmulas dadas en 5.4 obtenemos $N = 1$ y $D = 4$. Por tanto, $\sigma_f(7/16) = 1/4$.

Computo de $\sigma_f(3/4)$: Desde que $p = 3$ y $q = 4$, $2p + q \equiv 0 \mod 5$ y $q \equiv 0 \mod 4$. Del Cuadro 5.1, $v = (0, 0)$ y $w = (q, p) = (4, 3)$. De la Figura 5.12 se sigue que $x_0 = 0 < x_1 = w_1 = 4$. La ecuación 5.3 implica que $Q_{x_0} = 0$, $Q_{x_1} = 1$. Usando las fórmulas en 5.4 obtenemos $N = 1$ y $D = 2$. Por tanto, $\sigma_f(3/4) = 1/2$.

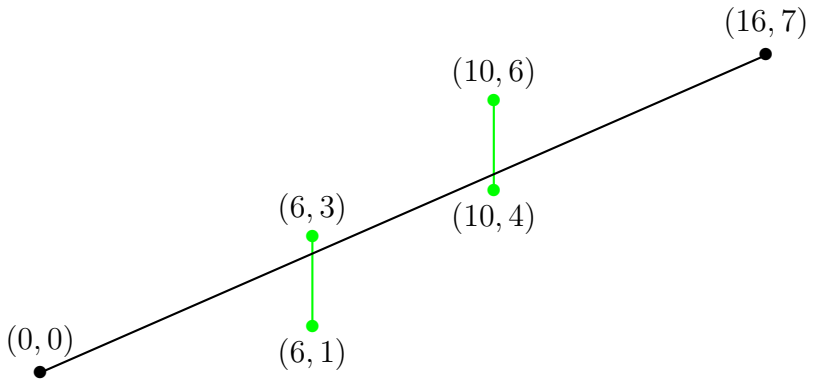


Figura 5.11: Calculando $\sigma_f(7/16)$.

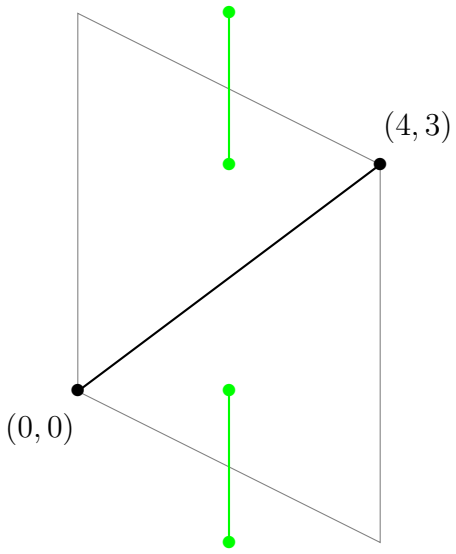


Figura 5.12: Calculando $\sigma_f(3/4)$.

Capítulo 6

El Teorema del Semiespacio

En este capítulo probaremos el teorema principal de esta tesis. Comenzaremos identificando el espacio de Teichmüller de (S^2, P), donde $|P| = 4$, con el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Luego, estudiaremos propiedades de horodiscos en $\mathbb{H}$ y propiedades de módulus de familias de curvas en toros complejos que serán usadas para describir algunas propiedades de la función pullback de Thurston en el caso de funciones NET.

El teorema principal, Teorema 6.3.1, muestra como información sobre la preimagen de una curva esencial bajo una función NET se traduce en un intervalo que no contiene recíprocos negativos de pendientes de obstrucciones de Thurston. Al final de este capítulo utilizamos el Teorema 6.3.1 y los procedimientos algorítmicos discutidos en los capítulos anteriors para mostrar que la función NET en el ejemplo principal no posee obstrucciones de Thurston.

Los resultados en este capítulo se encuentran en [8, Sección 6], [16]. Nuestro aporte principal es la prueba de la Proposición 6.3.1. El autor de esta tesis ha provisto una prueba detallada de esta proposición en base a la subaditividad de módulos de familias de curvas sugerida en [8].

6.1. El espacio Teich(S^2, P) si $|P| = 4$

Sea $\mathbb{H}$ el semiplano superior contenido en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Si $|P| = 4$, podemos identificar $\mathbb{H}$ con el espacio Teich(S^2, P). Describiremos brevemente esta identificación. Sea $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, sea $p : T \to S^2$ un cubrimiento ramificado de grado 2 cuyo conjunto de valores críticos es P y sea Γ el grupo de isometrías $\Gamma := \{x \mapsto 2\lambda \pm x : \lambda \in \mathbb{Z}^2\}$. Si $\mu = [\phi] \in \mathrm{Teich}(S^2, P)$, como en la definición de la función pullback de Thurston, $p \circ \phi$ induce una estructura

compleja sobre T. Denotamos por $p^*(\mu)$ a esta estructura compleja sobre T. Sean γ_1 y γ_2 las curvas en T que son las imágenes de los segmentos de recta $\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}$ y $\{(0,t) : 0 \leq t \leq 1\}$ respectivamente. El espacio de las 1-formas φ holomorfas con respecto a $p^*(\mu)$ es de dimensión uno, por tanto el número complejo

$$\rho(\mu) := \frac{\int_{\gamma_2} \varphi}{\int_{\gamma_1} \varphi}$$

no depende de la elección de $\varphi \neq 0$. Mas aún, desde que $(T, p^*(\mu))$ es un toro con estructura compleja, $\rho(\mu) \in \mathbb{H}$. Por otro lado, para cada $\tau \in \mathbb{H}$, sea $\psi_\tau : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ el isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal dado por $\psi_\tau(x,y) := 2x + 2\tau y$. Si μ_0 es la estructura compleja estándar sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $\mu_\tau = \psi_\tau^*(\mu_0)$, entonces la estructura compleja $\overline{\mu}_\tau$ sobre $\mathbb{R}^2/\Gamma$ inducida por la aplicación canónica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ satisface $\rho(\overline{\mu}_\tau) = \tau$. Aquí identificamos $\mathbb{R}^2/\Gamma$ con S^2 y $\pi(\mathbb{Z}^2)$ con P. Por tanto la aplicación $\rho : \text{Teich}(S^2, P) \to \mathbb{H}$ es una biyección. De esta manera, identificamos $\text{Teich}(S^2, P)$ con $\mathbb{H}$.

6.2. Horodiscos en $\mathbb{H}$

En esta sección vamos a relacionar horodiscos en $\mathbb{H}$ y módulos de familias de curvas. Comenzaremos determinando ecuaciones convenientes para los horociclos en $\mathbb{H}$.

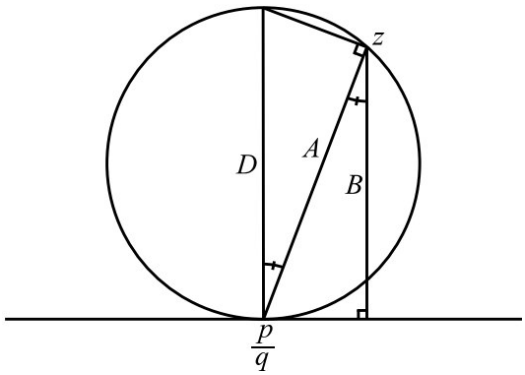


Figura 6.1: Encontrando una ecuación para un horociclo.

Los horociclos pasando por el punto $\infty \in \mathbb{H}$ son simplemente lineas horizontales, las cuales están dadas por ecuaciones de la forma $\text{Im}(z) = m$. Ahora, sean p y q dos números enteros y coprimos con $q \neq 0$. Consideraremos horociclos en $\mathbb{H}$ tangentes a $\partial\mathbb{H}$ en el punto p/q. Figura 6.1 muestra un horociclo en $\mathbb{H}$

tangente a $\partial\mathbb{H}$ en el punto p/q con diámetro Euclidiano D. Dos triángulos rectos y semejantes también aparecen en la Figura 6.1, de los cuales concluimos lo siguiente.

$$\frac{B}{A} = \frac{A}{D} \iff \frac{B}{A^2} = \frac{1}{D} \iff \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z - p/q|^2} = \frac{1}{D} \iff \frac{\mathrm{Im}(z)}{|qz - p|^2} = m$$

Aquí $m = 1/(q^2 D)$ y $D = 1/(q^2 m)$. Por tanto, si p y q son dos números enteros y coprimos, entonces los horodiscos en $\mathbb{H}$ tangentes al punto $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$ son los subconjuntos de la forma

$$\left\{ z \in \mathbb{H} : \frac{\mathrm{Im}(z)}{|qz - p|^2} > m \right\}$$

donde m es cualquier número real positivo.

Definición 6.2.1. El grupo especial lineal sobre $\mathbb{Z}$ de grado 2 (con respecto al producto de matrices) es denotado y definido por

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ and } ad - bc = 1 \right\}.$$

Vamos a considerar $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ como un subgrupo del grupo de isometrías de $\mathbb{H}$ que preservan orientación, esto es,

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) := \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \right\}.$$

Si $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ es un elemento de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ con determinante -1, entonces $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ es una isometría de $\mathbb{H}$ que revierte orientación. Esto nos permite ver $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$ como un subgrupo del grupo de isometrías de $\mathbb{H}$. A continuación consideramos la acción de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$ sobre los horodiscos de $\mathbb{H}$.

Lema 6.2.1. Sea $\varphi \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$ y sea $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si $\varphi(p/q) = p'/q' \in \overline{\mathbb{Q}}$, entonces

$$\frac{\mathrm{Im}(\varphi(z))}{|q'\varphi(z) - p'|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|qz - p|^2}.$$

Demostración. Desde que $z \mapsto -\bar{z}$, $z \mapsto z+1$ and $z \mapsto -1/z$ generan el grupo $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$, será suficiente probar el lema para estas tres transformaciones. Primero supongamos que $\varphi(z) = -\bar{z}$. Entonces $p'/q' = -p/q$, y por tanto podemos asumir que $p' = p$ y $q' = -q$. En este caso vemos fácilmente que el lema es válido. A continuación supongamos que $\varphi(z) = z + 1$. Entonces $p'/q' = p/q + 1$, y por tanto podemos asumir que $p' = p + q$ y $q' = q$. Desde que $\mathrm{Im}(z+1) = \mathrm{Im}(z)$, el lema es válido en este caso. Finalmente, si $\varphi(z) = -1/z$, entonces $p'/q' = -q/p$, y por tanto podemos asumir que $p' = -q$ y $q' = p$. Desde que $\mathrm{Im}(-1/z) = \mathrm{Im}(z)/|z|^2$, el lema es también válido en este caso. ■

Corolario 6.2.1. Sea $\varphi \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$ y sea $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si $\varphi(p/q) = p'/q' \in \overline{\mathbb{Q}}$, entonces φ mapea el horodisco $\left\{z \in \mathbb{H} : \frac{\mathrm{Im}(z)}{|qz-p|^2} > m\right\}$ bijectivamente sobre el horodisco $\left\{z \in \mathbb{H} : \frac{\mathrm{Im}(z)}{|q'z-p'|^2} > m\right\}$ para cada $m \in \mathbb{R}^+$.

Ahora nos enfocaremos en el concepto de módulo de una familia de curvas. Sea $\tau \in \mathbb{H}$, sea $\Lambda_\tau = \langle 1, \tau\rangle$, y sea $T_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$. Aquí, T_τ es visto como un toro con estructura compleja y las pendientes de las curvas simples y cerradas en T_τ son calculadas usando la base ordenada $(1,\tau)$ de Λ_τ. Denotamos por $\Gamma_{p/q,\tau}$ al conjunto de curvas simples y cerradas in T_τ cuya pendiente es p/q, aunque en este párrafo usaremos la abreviatura $\Gamma_{p/q}$ por $\Gamma_{p/q,\tau}$. Denotamos por dz la 1-forma sobre T_τ inducida por la 1-forma estándar sobre $\mathbb{C}$. Para cada función Borel-medible no negativa ρ cuyo dominio es T_τ, definimos

$$L_\rho(\Gamma_{p/q}) := \inf_{\gamma\in\Gamma_{p/q}} \int_\gamma \rho\,|dz| \quad \text{y} \quad A_\rho := \iint_{T_\tau} \rho^2\,|dz|^2.$$

Definición 6.2.2. La longitud extrema de la familia de curvas $\Gamma_{p/q}$ en T_τ es definida por

$$\sup_\rho \frac{L_\rho^2(\Gamma_{p/q})}{A_\rho}.$$

Definición 6.2.3. El módulo de la familia de curvas $\Gamma_{p/q}$ en T_τ es el recíproco de la longitud extrema de la familia de curvas $\Gamma_{\frac{p}{q}}$, es decir,

$$\mathrm{mod}_\tau(p/q) := \inf_\rho \frac{A_\rho}{L_\rho^2(\Gamma_{p/q})}.$$

Observación 6.2.1. El módulo de una familia de curvas es invariante bajo aplicaciones conformes (ver Apéndice C). En nuestro contexto, si $\phi : T_\tau \to T_{\tau'}$ es un isomorfismo conforme que envía las curvas de la familia $\Gamma_{p/q,\tau}$ en las curvas de la familia $\Gamma_{p'/q',\tau'}$, entonces $\mathrm{mod}_\tau(p/q) = \mathrm{mod}_{\tau'}(p'/q')$.

Lema 6.2.2. Para todo $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$ y $\tau \in \mathbb{H}$ tenemos que

$$\mathrm{mod}_\tau(p/q) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|p\tau+q|^2}.$$

Demostración. Primero probaremos el lema para $p/q = 0$. Sea $\tau \in \mathbb{H}$ y sea $h = \mathrm{Im}(\tau)$. El paralelogramo P con vertices 0, 1, τ y $1+\tau$ es un dominio fundamental para la acción del grupo Λ_τ sobre $\mathbb{C}$. Todo curva de la familia $\Gamma_{0,\tau}$ es homotópica a la imagen en T_τ de un segmento de línea horizontal uniendo los lados izquierdo y derecho de este dominio fundamental. Sea $\rho : T_\tau \to [0,\infty]$ la función de Borel dada por $\rho(w) = 1$ para todo $w \in T_\tau$. Entonces A_ρ es el área

Euclidiana del paralelogramo P, y por tanto $A_\rho = \mathrm{Im}(\tau) = h$. A continuación computaremos $L_\rho(\Gamma_{0,\tau})$. Sea $\gamma \in \Gamma_{0,\tau}$. Cada levantamiento de γ a $\mathbb{C}$ tiene la propiedad que sus puntos terminales tienen la misma parte imaginaria y que la distancia Eculidiana entre estos puntos es 1. Desde que $\int_\gamma \rho\,|dz|$ es la longitud Euclidiana de cada uno de estos levantamientos, se sigue que $L_\rho(\Gamma_{0,\tau}) = 1$. En consecuencia $\mathrm{mod}_\tau(0) \leq A_\rho / L_\rho^2(\Gamma_{0,\tau}) = h$.

Ahora sea ρ cualquier función Borel-medible no negativa cuyo dominio es T_τ. Sea $\tilde{\rho}$ un levantamiento de ρ a $\mathbb{C}$ y sea $\ell = L_\rho(\Gamma_{0,\tau})$. Usaremos el hecho que el rectángulo R cuyos vértices son 0, 1, $h\mathbf{i}$ y $1 + h\mathbf{i}$ es un dominio fundamental para la acción del grupo Λ_τ sobre $\mathbb{C}$. Segmentos de línea horizontal en R darán lugar a elementos de $L_\rho(\Gamma_{0,\tau})$, es decir, para cada $y \in [0,h]$ la curva $\gamma_y : [0,1] \to T_\tau$ parametrizada por $\gamma_y(x) = x + y\mathbf{i} \bmod \Lambda_\tau$ es un elemento de $\Gamma_{0,\tau}$. En consecuencia $\ell \leq \int_0^1 \tilde{\rho}(x,y)\,dx$ para cada $y \in [0,h]$, y por tanto

$$h\ell \leq \int_0^h \int_0^1 \tilde{\rho}\,dxdy \leq \left(\iint\limits_R dxdy \iint\limits_R \tilde{\rho}^2\,dxdy \right)^{1/2} = (hA_\rho)^{1/2}.$$

Entonces

$$\frac{A_\rho}{L_\rho^2(\Gamma_{p/q})} = \frac{A_\rho}{\ell^2} \geq h.$$

Desde que $\mathrm{mod}_\tau(0)$ es el ínfimo de tales términos, $\mathrm{mod}_\tau(0) \geq h$. Esta desigualdad y la conclusión del párrafo anterior implican que $\mathrm{mod}_\tau(0) = h = \mathrm{Im}(\tau)$. Esto prueba el lema para el caso $p/q = 0$.

Ahora supongamos que $p/q \neq 0$. Desde que $\gcd(p,q) = 1$, existen enteros r y s tales que $rq - sp = 1$. En consecuencia $(p\tau + q, r\tau + s)$ es una base ordenada de Λ_τ. Definiendo $\tau' = (r\tau + s)/(p\tau + q) \in \mathbb{H}$, vemos que la función conforme $\widetilde{\phi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $\widetilde{\phi}(z) = z/(p\tau + q)$ envía el retículo Λ_τ en $\Lambda_{\tau'}$ y envía la base ordenada $(p\tau + q, r\tau + s)$ en la base ordenada $(1, \tau')$. En consecuencia $\widetilde{\phi}$ induce un isomorfismo conforme $\phi : T_\tau \to T_{\tau'}$. Es más, $\phi(\Gamma_{p/q,\tau}) = \Gamma_{0,\tau'}$. Por la observación 6.2.1, tenemos que $\mathrm{mod}_\tau(p/q) = \mathrm{mod}_{\tau'}(0)$. Esto, la conclusión del caso $p/q = 0$ y la definición de τ' arriba implican que $\mathrm{mod}_\tau(p/q) = \mathrm{Im}(\tau') = \mathrm{Im}(\tau)/|p\tau + q|^2$. ■

Definición 6.2.4. Para cada $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$ y cada $m \in \mathbb{R}^+$, definimos

$$B_m(p/q) := \{\tau \in \mathbb{H} : \mathrm{mod}_\tau(p/q) > m\}.$$

Corolario 6.2.2. Si $p/q \in \overline{\mathbb{Q}}$ y si $m \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$B_m(p/q) = \left\{ \tau \in \mathbb{H} : \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|p\tau + q|^2} > m \right\}$$

es un horodisco en $\mathbb{H}$ tangente a $\partial\mathbb{H}$ en el punto $-q/p$.

Sea S_τ el espacio cociente de T_τ determinado por la función $z \mapsto -z$. Sea $p_\tau : T_\tau \to S_\tau$ el correspondiente mapeo de cubrimiento ramificado de grado 2 y sea P_τ el conjunto de valores críticos de p_τ contenidos en S_τ. Es claro que $|P_\tau| = 4$. Desde que $z \mapsto -z$ es una involución, el espacio cociente S_τ es una esfera topológica 2-dimensional. Sea $p/q \in \mathbb{Q}$. Por definición, el conjunto de curvas esenciales en $S_\tau \setminus P_\tau$ con pendidente p/q es levantado bajo p_τ a $\Gamma_{p/q,\tau}$. Definimos el módulo de esta familia de curvas de la misma forma que definimos $\mathrm{mod}_\tau(p/q)$. Como la longitud de curvas no se altera al hacer el pullback de S_τ a T_τ (bajo p_τ) pero áreas de regiones se duplican, este nuevo módulo es $\frac{1}{2}\mathrm{mod}_\tau(p/q)$. De manera más precisa

$$\mathrm{mod}_\tau(S_\tau, \mathscr{C}_{p/q,\tau}) = \frac{1}{2}\mathrm{mod}_\tau(p/q).$$

donde $\delta \in \mathscr{C}_{p/q,\tau}$ si y solo si las dos componentes conexas de $p_\tau^{-1}(\delta) \subseteq T_\tau$ son elementos de $\Gamma_{p/q,\tau}$.

6.3. El Teorema del Semiespacio

Comenzaremos esta sección redefiniendo los conceptos de multicurva estable y obstrución de Thurston en el contexto de funciones NET.

Definición 6.3.1. Sea f una función NET.

- Definimos la función $\delta_f : \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ del siguiente modo: $\delta_f(p/q) = c/d$, donde d el grado con el cual f mapea cada componente de $f^{-1}(\gamma)$ en γ, y c el número de componentes esenciales en $f^{-1}(\gamma)$. El Teorema 3.4.1 nos proporciona un método para calcular c.
- Sea γ una curva esencial en $S^2 \setminus P_f$ con pendiente p/q. La multicurva $\Gamma = \{\gamma\}$ es f-estable si y solo si $\sigma_f(p/q) = p/q$ or $\sigma_f(p/q) = o$.

Si $\Gamma = \{\gamma\}$ es f-estable, entonces la matriz de Thurston A^Γ es de orden 1×1 con entrada $\delta_f(p/q)$. Por tanto $\Gamma = \{\gamma\}$ es una obtsrucción de Thurston si y solo si p/q es un punto fijo de σ_f y $\delta_f(p/q) \geq 1$.

Proposición 6.3.1. Sea f una función NET. Sea $\tau \in \mathbb{H}$, sea $\tau' = \Sigma_f(\tau)$, sea $p'/q' = \sigma_f(p/q)$ y sea $\delta = \delta_f(p/q)$. Entonces $\mathrm{mod}_{\tau'}(p'/q') \geq \delta\mathrm{mod}_\tau(p/q)$ y en consecuencia $\Sigma_f(B_m(p/q)) \subseteq B_{\delta m}(p'/q')$ para todo $m \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Sea ϕ un representante de $\tau \in \mathrm{Teich}(S^2, P_f)$. Siguiendo la discusión previa a Definición 2.3.1, existe un isomorfismo analítico $\psi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ (que es un representante de τ') y una aplicación holomorfa $f_\tau : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ de

manera que $\phi \circ f = f_\tau \circ \psi$ y $f_\tau(\psi(P_f)) \subseteq \phi(P_f)$. Fijemos una curva γ en $S^2 \setminus P_f$ con pendiente p/q. Fijemos un anillo A_γ de manera que γ separa las dos componentes de la frontera de A_γ y además γ es homotópica a cada una de estas componentes en $S^2 \setminus P_f$. Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_c$ las preimágenes esenciales de $f^{-1}(\gamma)$ y sea $d = \deg(f : \gamma_i \to \gamma)$ para cada $i = 1, \ldots, c$. Desde que f es una función NET la pendiente de cada una de estas preimágenes es p'/q'. Sea B_i la componente conexa de $f^{-1}(A_\gamma)$ que contiene a γ_i. Note que cada una de estas preimágenes es un anillo. Es más, debido a que todos los curvas principales de estos anillos tienen la misma pendiente, esta es una colección disjunta de anillos encajados. Definamos $\mathbf{A} := \phi(A_\gamma)$ y $\mathbf{B}_i := \psi(B_i)$ para cada $i = 1, \ldots, c$. Es claro que $\mathbf{A}$ es un anillo y que $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_c$ es una colección disjunta de anillos encajados en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \phi(P_f)$.

Por definición, $f_\tau = \phi \circ f \circ \psi^{-1}$ es holomorfa. Como A_γ no contiene puntos de P_f, A_γ no contiene valores críticos de f. En consecuencia, la aplicación $f_\tau : \mathbf{B}_i \to \mathbf{A}$ es un cubrimiento holomorfo no ramificado de grado d. Por el Teorema C.2.1 $\mathrm{mod}(\mathbf{B}_i) = (1/d)\mathrm{mod}(\mathbf{A})$ para cada $i = 1, \ldots, c$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{c} \mathrm{mod}(\mathbf{B}_i) = \frac{c}{d}\mathrm{mod}(\mathbf{A}) = \delta \mathrm{mod}(\mathbf{A}).$$

Sea $\mathbf{B}$ un anillo cuya curva principal tiene pendiente p'/q' y tal que $\mathbf{B} \supseteq \bigcup_{i=1}^{c} \mathbf{B}_i$. Por el Teorema C.2.2, tenemos

$$\mathrm{mod}(\mathbf{B}) \geq \sum_{i=1}^{c} \mathrm{mod}(\mathbf{B}_i) = \delta \mathrm{mod}(\mathbf{A}).$$

Las curvas simples y cerradas que separan las dos componentes conexas de la frontera de $\psi^{-1}(\mathbf{B})$ son curvas con pendiente p'/q'. Por comparación de módulos (Corolario C.2.1) y usando el hecho que el módulo es invariante bajo isomorfismos conformes (Corolario C.2.2), tenemos

$$(1/2)\mathrm{mod}_{\tau'}(p'/q') \geq (1/2)\mathrm{mod}_{\tau'}(\psi^{-1}(\mathbf{B})) = \mathrm{mod}(\mathbf{B}).$$

Por otro lado $\phi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo conforme con respecto a la estructura compleja inducida por ϕ en S^2, entonces $(1/2)\mathrm{mod}_\tau(A_\gamma) = \mathrm{mod}(\mathbf{A})$. En consecuencia, $\mathrm{mod}_{\tau'}(p'/q') \geq \delta \mathrm{mod}_\tau(A_\gamma)$. Como γ es una curva arbitraria con pendiente p/q, se sigue que $\mathrm{mod}_{\tau'}(p'/q') \geq \delta \mathrm{mod}_\tau(p/q)$. ■

Observación 6.3.1. Para una esfera marcada (S^2, P) con $|P| = 4$, la métrica estándar del espacio de Teichmüller $\mathbb{H}$ y la métrica hiperbólica coinciden. Sin embargo, existe otra métrica natural sobre el espacio de Teichmüller, llamada la métrica de Weil-Petersson (WP). La métrica WP sobre $\mathbb{H}$ es incompleta. Para una esfera con cuatro puntos marcados, la frontera inducida por la métrica

WP, como espacio topológico, es discreto y como conjunto es $\overline{\mathbb{Q}}$. Una vecindad del punto frontera $-q/p \in \overline{\mathbb{Q}}$ es la unión de $-q/p$ con un horodisco contenido en $\mathbb{H}$ tangente al punto $-q/p$. En [22], Selinger demostró que $\Sigma_f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ se extiende continuamente sobre el conjunto $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{Q}}$ y que además se cumple que $\sigma_f(p/q) = p'/q'$ si y solo si $\Sigma_f(-q/p) = -q'/p'$. Para mayores detalles, ver [22].

Denotaremos por $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\cdot,\cdot)$ la distancia hiperbólica en $\mathbb{H}$. Si E es un semiespacio hiperbólico en $\mathbb{H}$ denotaremos por $\partial_\infty E$ al conjunto de puntos en la frontera de $\mathbb{H}$ que son límites de sucesiones en E.

Lema 6.3.1. Si $a/b \in \mathbb{Q}$ y $m > 0$, entonces la distancia hiperbólica entre los horociclos $\partial B_m(a/b)$ y $\partial B_{tm}(a/b)$ es igual a $|\ln(t)|$. En consecuencia, la distancia hiperbólica entre los horociclos $\partial B_m(a/b)$ y $\partial B_{tm}(a/b)$ es independiente del valor de m.

Demostración. Por una isometría de $\mathbb{H}$ en $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$ podemos reducir el análisis al caso $a/b = 0/1$. En este caso requerimos calcular la distancia hyperbólica entre los horociclos $\{z \in \mathbb{H} : \mathrm{Im}(z) = m\}$ y $\{z \in \mathbb{H} : \mathrm{Im}(z) = tm\}$, lo que se reduce al cálculo de la distancia hiperbólica entre los puntos $m\mathbf{i}$ y $tm\mathbf{i}$. Desde que

$$\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(m\mathbf{i}, tm\mathbf{i}) = \left| \int_{[m\mathbf{i}, mt\mathbf{i}]} \frac{|dz|}{\mathrm{Im}(z)} \right| = \left| \int_1^t \frac{|m\mathbf{i}|ds}{ms} \right| = |\ln(t)|,$$

la conclusión se sigue. ■

Bajo las notaciones y definiciones anteriores, pasaremos a enunciar y probar el teorema principal de esta tesis.

Teorema 6.3.1. [Teorema del Semiespacio] Sea f una función NET, sea $p'/q' = \sigma_f(p/q)$ y sea $\delta = \delta_f(p/q)$.

(1) Si $p/q \neq p'/q'$, entonces para todo m suficientemente grande, los horodiscos cerrados $B = \overline{B_m(p/q)}$ y $B' = \overline{B_{\delta m}(p'/q')}$ son disjuntos. Cuando B y B' son disjuntos, el conjunto $E = \{\tau \in \mathbb{H} : \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\tau, B) < \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\tau, B')\}$ es un semiespacio hiperbólico abierto que es independiente de m.

(2) Si r/s es un punto fijo de σ_f y $-s/r \in \partial_\infty E$, entonces $\delta_f(r/s) < 1$, es decir, no existen obstrucciones de Thurston con pendiente r/s.

(3) Si τ_0 es un punto fijo de Σ_f, then $\tau_0 \notin E$.

Demostración. Comenzaremos con la prueba del enunciado (1). Desde que los diámetros Euclidianos de B y B' son inversamente proporcionales a m,

es claro que para m suficientemente largo B and B' son disjuntos. Sea l la geodésica hiperbólica uniendo los puntos $-q/p$ y $-q'/p'$, sea $l_m \subseteq l$ la cerradura del segmento geodésico que reposa fuera de la unión $B \cup B'$ y sea $l_m^{\perp}$ el bisector perpendicular a l_m (ver Figura 6.2). Por el Lema 6.3.1 el bisector $l_m^{\perp}$ es independiente de m, y por tanto E es un semiespacio hiperbólico abierto independiente de m. Esto prueba el enunciado (1).

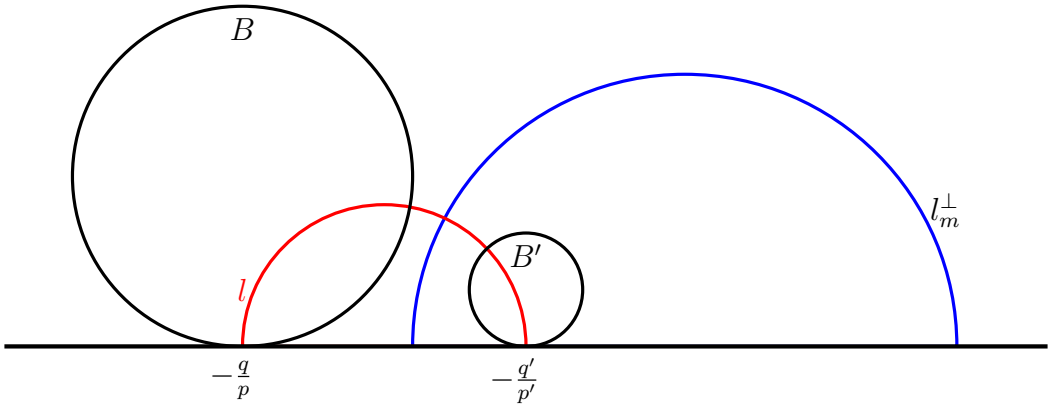


Figura 6.2: Probando enunciado (1) del Teorema 6.3.1

Para probar el enunciado (2) procedemos por contradicción. Supongamos que $\sigma_f(r/s) = r/s$, que $-s/r \in \partial_\infty E$ y que $\delta_f(r/s) \geq 1$. Escogemos m de manera que B y B' se intersectan exactamente en un punto. Por una isometría de $\mathbb{H}$ en $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$ podemos reducir el análisis al caso $p/q = 0$. Figura 6.3 muestra B y B' con $p/q = 0$, la figura también muestra el correspondiente bisector perpendicular $l_m^{\perp}$. Sean x e y, con $x < y$, los puntos de intersección de $l_m^{\perp}$ y $\partial\mathbb{H}$. Note que el semiespacio E es la región en $\mathbb{H}$ fuera del disco Euclideano con centro $-q'/p'$ y radio $(y-x)/2$. Ahora escogemos $m^* > 0$ de manera que B y $\overline{B_{m^*}(r/s)}$ se intersectan en un solo punto η. La hipótesis $-s/r \in \partial_\infty E$ implica que $y < -s/r$. Entonces $\overline{B_{m^*}(r/s)} \cap B' = \emptyset$. Proposición 6.3.1 y el hecho que $\delta_f(r/s) \geq 1$ implican que $\Sigma_f(B) \subseteq B'$ y $\Sigma_f(\overline{B_{m^*}(r/s)}) \subseteq \overline{B_{m^*}(r/s)}$. Entonces $\Sigma_f(\eta) \in \overline{B_{m^*}(r/s)} \cap B'$, lo cual es imposible. Esto prueba el enunciado (2).

Para probar el enunciado (3), supongamos que $\Sigma_f(\tau_0) = \tau_0$. Sea $\tau_1 \in B$ tal que $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\tau_0, B) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\tau_0, \tau_1)$. Proposición 6.3.1 implica que $\Sigma_f(B) \subseteq B'$. Desde que la aplicación Σ_f es holomorfa sobre $\mathbb{H}$ (ver [11]), Lema D.2.1 implica que la distance hipérbolica entre $\Sigma_f(\tau_0)$ y $\Sigma_f(\tau_1)$ no puede exceder a la distance hipérbolica entre τ_0 y τ_1. En consecuencia

$$\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\tau_0, B) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\tau_0, \tau_1) \geq \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\tau_0, \Sigma_f(\tau_1)) \geq \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\tau_0, B').$$

Por tanto $\tau_0 \notin E$. ■

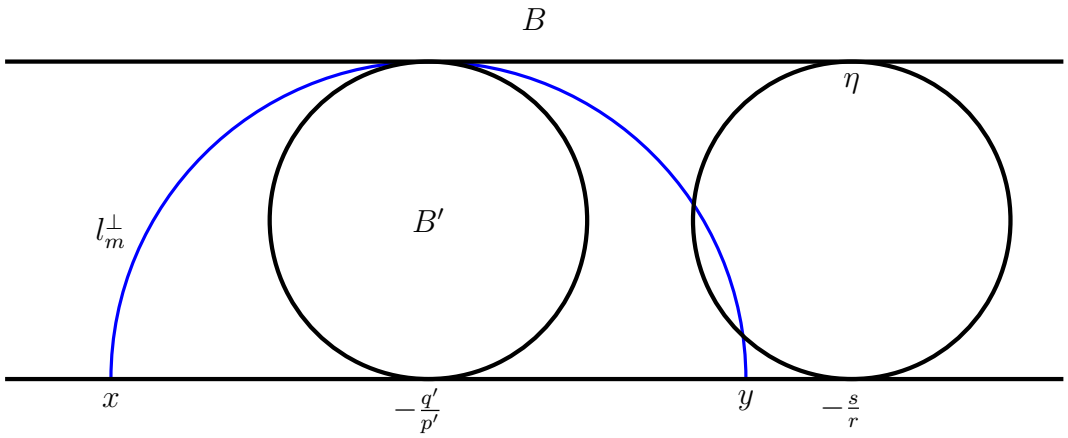


Figura 6.3: Probando enunciado (2) del Teorema 6.3.1

La Figura 6.4 muestra la situación genérica en el Teorema 6.3.1. Los horociclos que definen las fronteras de B y B' son mostrados, tangentes a la recta real en $-q/p$ y $-q'/p'$ respectivamente. La geodésica $l_m^{\perp}$ en la prueba del Teorema 6.3.1 es mostrada, con centro Euclidiano C y radio Euclidiano R. En este caso, el semiespacio E es la región en $\mathbb{H}$ fuera del disco Euclidiano con centro C y radio R.

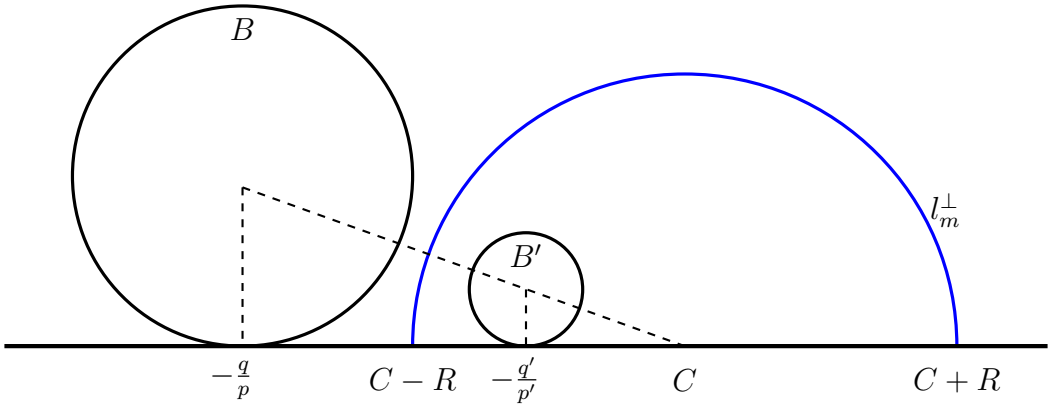


Figura 6.4: Situación genérica en Teorema 6.3.1

Para aplicar el Teorema 6.3.1, será útil tener fórmulas explícitas para C y R. Pasaremos a encontrar tales fórmulas. Los segmentos de línea punteados en la Figura 6.4 corresponden a dos triángulos rectángulos similares. El doble de la altura del triángulo rectángulo más grande es el diámetro Euclidiano de B, el cual, siguiendo el argumento dado después de la Figura 6.1, es $D = 1/(mp^2)$.

Por tanto, la altura del triángulo rectángulo más grande es $1/(2mp^2)$ y su ancho es $C+\frac{q}{p}$. Analogamente, la altura del triángulo rectángulo más pequeño es $1/(2\delta mp'^2)$ y su ancho es $C+\frac{q'}{p'}$. Por similaridad de triángulos tenemos

$$\frac{C+\frac{q}{p}}{\frac{1}{2mp^2}}=\frac{C+\frac{q'}{p'}}{\frac{1}{2\delta mp'^2}}\Longleftrightarrow p^2C+pq=\delta p'^2C+\delta p'q'\Longleftrightarrow C=\frac{-pq+\delta p'q'}{p^2-\delta p'^2}.$$

Desde que $-\frac{q}{p}$ es el inverso de $-\frac{q'}{p'}$ mediante la inversión con respecto al círculo Euclidiano que contiene al bisector perpendicular $l_m^{\perp}$, tenemos

$$R^2=\Big(C+\frac{q}{p}\Big)\Big(C+\frac{q'}{p'}\Big).$$

Además, note que

$$\frac{C+\frac{q}{p}}{\frac{1}{2mp^2}}=\frac{C+\frac{q'}{p'}}{\frac{1}{2\delta mp'^2}}\Longleftrightarrow C+\frac{q'}{p'}=\frac{p^2}{\delta p'^2}\Big(C+\frac{q}{p}\Big).$$

Entonces $R^2=\frac{p^2}{\delta p'^2}\Big(C+\frac{q}{p}\Big)^2$. Procedemos a calcular $C+\frac{q}{p}$:

$$\begin{aligned}C+\frac{q}{p} &= \frac{-pq+\delta p'q'}{p^2-\delta p'^2}+\frac{q}{p}\\ &= \frac{-p^2q+\delta pp'q'+p^2q-\delta p'^2q}{p(p^2-\delta p'^2)}\\ &= \frac{\delta p'(pq'-pq')}{p(p^2-\delta p'^2)}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$R=\Big|\frac{(pq'-p'q)\sqrt{\delta}}{p^2-\delta p'^2}\Big|.$$

Estas fórmulas para C y R son válidas si p/q y p'/q' son diferentes de 0 y los radius Euclideanos de B y B' son distintos. Si $p/q=0$ ó $p'/q'=0$, uno puede verificar la validez de estas fórmulas mediante cálculos directos como los presentados en el caso genérico ó por un argumento de continuidad. Note que si $\delta>\frac{p^2}{p'^2}$, entonces el radio Euclidiano de B es mayor que el radio Euclidiano de B' como en la Figura 6.4 y E es la región en $\mathbb{H}$ fuera del disco Euclidiano con centro C y radio R. Si $\delta<\frac{p^2}{p'^2}$, entonces E es la región en $\mathbb{H}$ contenida en este disco.

Finalmente, consideramos el caso en el cual $\delta = \frac{p^2}{p'^2}$. En este caso B y B' tienen el mismo radio Euclidiano y $l_m^{\perp}$ es un rayo vertical perpendicular al eje real en el punto $-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p} + \frac{q'}{p'}\right)$. Si $\delta = \frac{p^2}{p'^2}$, entonces

$$E = \left\{\tau \in \mathbb{H} : \mathrm{Re}(\tau) < -\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p} + \frac{q'}{p'}\right)\right\}, \quad \text{si} \quad \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$$

y

$$E = \left\{\tau \in \mathbb{H} : \mathrm{Re}(\tau) > -\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p} + \frac{q'}{p'}\right)\right\}, \quad \text{si} \quad \frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$$

con la convención que todo número racional es menor que ∞.

6.4. Racionalidad del ejemplo principal

En esta sección aplicaremos los resultados obtenidos en las secciones anteriores a la función de Thurston f dada en el ejemplo principal. Deduciremos que tal función f es realizable por una función racional.

El Cuadro 6.1 contiene valores de $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, δ, C, y R y la última columna nos indica si el correspondiente semiespacio E es acotado o no con respecto a métrica Euclidiana. Los valores de p' y q' fueron computados al final del Capítulo 5. Los valores de δ provienen de $c_3 - c_2$ y d en el Cuadro 3.1.

$\frac{p}{q}$	$\frac{p'}{q'}$	δ	C	R	E acotado?
$-\frac{1}{2}$	0	6	2	$\sqrt{6}$	si
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{10\sqrt{10}}{3}$	si
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	2	0	$4\sqrt{2}$	no
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{16}{3}$	$\frac{2\sqrt{10}}{3}$	si
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	-3	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	si
$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{4}$	6	$-\frac{88}{43}$	$\frac{12\sqrt{6}}{43}$	si
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	si
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	6	0	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	si

Cuadro 6.1: Datos de algunos semiespacios para el ejemplo principal.

La Figura 6.5 muestra los correspondientes semiespacios E contenidos en $\mathbb{H}$.[1]

[1]Figura 6.5 ha sido tomada de [8].

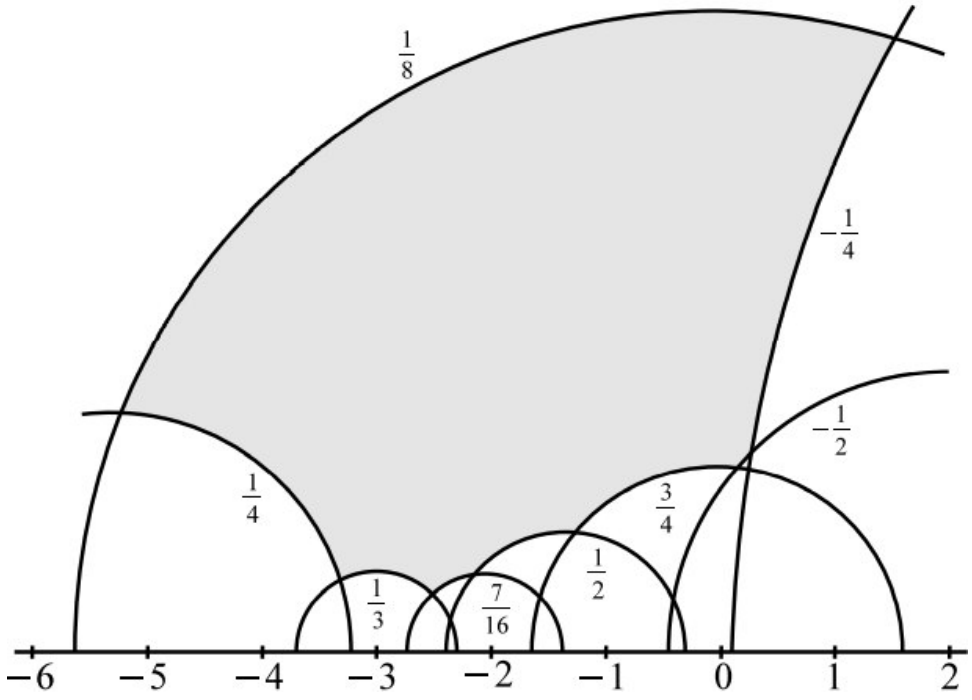


Figura 6.5: Algunos semiespacios para el ejemplo principal.

La intersección de sus complementos es la región sombreada. El enunciado (2) del Teorema 6.3.1 y el hecho que esta intersección es un conjunto acotado de $\mathbb{H}$ implica que f no tiene obstrucciones de Thurston. En consecuencia, la función pullback de Thurston Σ_f tiene un punto fijo en $\mathbb{H}$ y la función f es equivalente a una función racional. El enunciado (3) en el Teorema 6.3.1 implica que el punto fijo de Σ_f está en la región sombreada que se muestra en la Figura 6.5.

Apéndice A

Topología Algebraica

Este apéndice contiene las definiciones y los resultados clásicos en Topología Algebraica que se utilizaron a menudo en esta tesis. Los resultados presentados en este apéndice pueden ser encontrados en [6], [13], [14], [17], [18]. Sugerimos al lector consultar estas referencias para una exposición más profunda.

A.1. Homotopía y grupo fundamental

Definición A.1.1. Si X e Y son espacios topológicos y $F_0, F_1 : X \to Y$ son aplicaciones continuas, una **homotopía** de F_0 a F_1 es una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ (donde I es el intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$) tal que $H(x,0) = F_0(x)$ y $H(x,1) = F_1(x)$ para todo $x \in X$. Si existe una homotopía de F_0 a F_1, decimos que F_0 y F_1 son **homotópicas** y escribimos $F_0 \simeq F_1$. Si la homotopía satisface $H(a,t) = F_0(a) = F_1(a)$ para todo $t \in I$ y todo a en algún subconjunto $A \subseteq X$, decimos que F_0 y F_1 son **homotópicas relativamente a** A.

Ejemplo A.1.1. Una **curva de Jordan en** S^2 es la imagen del círculo unitario $S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : ||\mathbf{x}|| = 1\}$ bajo una aplicación continua e inyectiva $\gamma : S^1 \to S^2$. Escribimos simplemente γ para denotar una curva de Jordan en S^2. Sea P un subconjunto finito de S^2. Decimos que dos curvas de Jordan γ_0 y γ_1 contenidas en $S^2 \setminus P$ son homotópicas en $S^2 \setminus P$ si γ_0 y γ_1 son homotópicas como aplicaciones de S^1 en $S^2 \setminus P$. Geometricamente esto significa que la imagen de γ_0 se deforma continuamente en la imagen de γ_1 sin pasar por los puntos de P.

Definición A.1.2. Si X e Y son espacios topológicos y $F_0, F_1 : X \to Y$ son homeomorfismos, una **isotopía** de F_0 a F_1 es una homotopía H de F_0 a F_1 tal que para cada $t \in [0,1]$, la aplicación $H_t : X \to Y$ definida por

$H_t(x) := H(t,x)$ es un homeomorfismo. Si existe una isotopía de F_0 a F_1, decimos que las aplicaciones F_0 y F_1 son **isotópicas**. Si la isotopía satisface $H(a,t) = F_0(a) = F_1(a)$ para todo $t \in I$ y todo a en algún subconjunto $A \subseteq X$, decimos que F_0 y F_1 son **isotópicas relativamente a** A.

La utilidad más importante de las homotopías es en caminos. Sea X es un espacio topológico. Recordar que un **camino en** X es una aplicación continua de $I = [0,1]$ en X. Dos caminos $f_0, f_1 : I \to X$ se dice que son **homotópicos por caminos**, denotado simbolicamente por $f_0 \sim f_1$, si f_0 y f_1 son homotópicos relativamente a $\{0,1\}$. Explicitamente, esto significa que existe una aplicación continua $H : I \times I \to X$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} H(s,0) &= f_0(s), & s \in I;\\ H(s,1) &= f_1(s), & s \in I;\\ H(0,t) &= f_0(0) = f_1(0), & t \in I;\\ H(1,t) &= f_0(1) = f_1(1), & t \in I. \end{aligned}$$

Para cualquier par de puntos $p, q \in X$, homotopía por caminos es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los caminos de p a q. La clase de equivalencia de un camino f es denotada por $[f]$.

Dados dos caminos f y g en X tales que $f(1) = g(0)$, su **producto** es el camino $f \cdot g$ definido por

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2};\\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Si $f \sim f'$ y $g \sim g'$, no es difícil ver que $f \cdot g \sim f' \cdot g'$. Por tanto tiene sentido definir el producto de dos clases $[f]$ y $[g]$ por $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Aunque la multiplicación de caminos no es asociativa, esta es asociativa salvo homotopía por caminos: $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$.

Si q es un punto de X, un **lazo** en X con base en q es un camino en X con punto inicial en q y punto final en q, i.e., una aplicación continua $f : I \to X$ tal que $f(0) = f(1) = q$. El conjunto de clases de homotopía de lazos con base en q es denotado por $\pi_1(X,q)$. Equipado con el producto descrito arriba, el conjunto $\pi_1(X,q)$ es un grupo, llamado el **grupo fundamental de** X **con punto base** q. El elemento identidad de este grupo es la clase $[c_q]$ donde c_q es el lazo dado por $c_q(s) = q$ para todo $s \in I$, y el inverso de la clase $[f]$ es la clase $\left[\bar{f}\right]$ donde $\bar{f}$ es el lazo dado por $\bar{f}(s) = f(1-s)$ para todo $s \in I$.

Teorema A.1.1. Si X es un espacio conexo por caminos y $p, q \in X$, entonces los grupos $\pi(X,q)$ y $\pi(X,p)$ son isomorfos.

Debido a este teorema, cuando X es conexo por caminos podemos usar la notacion imprecisa $\pi_1(X)$ para referirnos al grupo fundamental de X con respecto a un punto base no especificado, si el punto base es irrelevante. Por ejemplo podemos decir "$\pi_1(X)$ es trivial" si $\pi_1(X) = \{[c_q]\}$ para cada q en X.

Definición A.1.3. Si X es conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es trivial, decimos que X es **simplemente conexo**. Esto significa que, todo lazo en X se deforma continuamente en un lazo constante mientras su punto base se mantiene fijo.

Una característica de la relación de homotopía de caminos es que esta se preserva mediante aplicaciones continuas. Esto es, si f_0 y f_1 son caminos en X con $f_0 \sim f_1$ y $F : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $F \circ f_0 \sim F \circ f_1$. En consecuencia, si $F : X \to Y$ es una aplicación continua, para cada $q \in X$, la asignación $F_* : \pi_1(X, q) \to \pi_1(Y, F(q))$ dada por $F_*[f] = [F \circ f]$ está bien definida.

Teorema A.1.2. Si $F : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces la aplicación $F_* : \pi_1(X, q) \to \pi_1(Y, F(q))$ es un homomorfismo de grupos. Este homomorfismo es conocido como el **homomorfismo inducido por** F.

A.2. Cubrimientos y levantamientos

Definición A.2.1. Sea X un espacio topológico. Un **cubrimiento** de X es un par $(\widetilde{X}, p)$ donde $\widetilde{X}$ es un espacio topológico y $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación continua tales que

(1) $\widetilde{X}$ es conexo por caminos y localmente conexo por caminos.

(2) Para cada $x \in X$ existe un abierto U conteniendo al punto x tal que la preimagen $p^{-1}(U)$ puede ser representada como

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

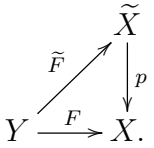
donde los $V_j's$ son abiertos, conexos y disjuntos en $\widetilde{X}$ y la restricción $p|_{V_j} : V_j \to U$ es un homeomorfismo para todo $j \in J$. En particular p es un homeomorfismo local.

Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un cubrimiento, entonces la cardinalidad del conjunto $p^{-1}(x)$ es localmente constante sobre X. En consecuencia, si X es conexo, esta cardinalidad es constante cuando x varía en todo X. Esta cardinalidad es llamada el **número de hojas del cubrimiento**.

Teorema A.2.1. Sea X un espacio conexo por caminos. Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un cubrimiento con $p(\widetilde{x}_0) = x_0$, entonces el número de hojas del cubrimiento es igual al índice del subgrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$.

Corolario A.2.1. Si X es un espacio simplemente conexo, entonces cualquier cubrimiento $p : \widetilde{X} \to X$ es un homeomorfismo.

Definición A.2.2. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubrimiento de X y sea $F : Y \to X$ una aplicación continua. Un **levantamiento** de F es una aplicación continua $\widetilde{F} : Y \to X$ tal que $p \circ \widetilde{F} = F$:



Teorema A.2.2. (criterio de levantamiento) Supongamos que $p : \widetilde{X} \to X$ es un cubrimiento, Y es un espacio topólogico conexo por caminos y localmente conexo por caminos, y $F : Y \to X$ es una aplicación continua. Sean $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ e $y_0 \in Y$ tales que $p(\widetilde{x}_0) = F(y_0)$. Entonces existe un levantamiento $\widetilde{F} : Y \to \widetilde{X}$ de F, verificando que $\widetilde{F}(y_0) = \widetilde{x}_0$, si y solo si $F_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.

Definición A.2.3. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubrimiento. Una **transformación deck** es un homeomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \varphi = p$. El conjunto de todas las transformaciones deck de $\widetilde{X}$ con respecto a p, denotado por $G_p(\widetilde{X})$, es un grupo bajo la operación composición de funciones. Un cubrimiento $(\widetilde{X}, p)$ es llamado **regular** si para cada par de puntos $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in \widetilde{X}$ con $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x}')$ existe una transformación deck φ tal que $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$.

Algunas veces cubrimientos regulares son llamados cubrimientos normales. El término "normal" es motivado por el siguiente resultado.

Teorema A.2.3. Supongamos que X es un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubrimiento con $p(\widetilde{x}_0) = x_0$, y sea H el subrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$. Entonces, el cubrimiento $(\widetilde{X}, p)$ es regular si y solo si H es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$.

Corolario A.2.2. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubrimiento donde X es un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Si el número de hojas del cubrimiento es 2 entonces el cubrimiento es regular.

Definición A.2.4. Un **cubrimiento universal** de un espacio topológico X es un cubrimiento $(\widetilde{X}, p)$ donde $\widetilde{X}$ es simplemente conexo.

A.3. Superficies orientadas

Definición A.3.1. Un espacio topológico y conexo M es llamado **superficie** si se verifican las siguientes condiciones:

(1) M es un espacio de Hausdorff cuya topología posee una base numerable.

(2) Para cada punto $p \in M$ existe un conjunto abierto $U \subseteq M$ conteniendo al punto p, existe un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^2$, y existe un homeomorfismo $\phi : U \to V$.

Una forma intuitiva de introducir el concepto de orientación de superficies es mediante el concepto de clases de equivalencia de banderas. Las siguientes definiciones y resultados pueden ser encontrados en [6].

Definición A.3.2. Sea M una superficie.

- Decimos que $X \subset M$ es **región de Jordan cerrada** en M si existe una aplicación continua e inyectiva $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to M$ tal que $X = \varphi(\overline{\mathbb{D}})$.
- Una **bandera** en M es un triplete (c_0, c_1, c_2), donde c_2 es una región de Jordan cerrada en M, c_1 es un arco cerrado contenido en la frontera de c_2, y c_0 es un punto de la frontera de c_1. Orientamos el arco c_1 de manera que el punto c_0 sea el punto inicial en c_1.

Decimos que dos banderas (c_0, c_1, c_2) y (c_0', c_1', c_2') en M son equivalentes si existe un homeomorfismo $f : M \to M$ isotópico a la aplicación identidad i_M y que satisface $f(c_i) = c_i'$ para $i = 0, 1, 2$. Sobre cada superficie M hay a lo sumo dos clases de equivalencia de banderas. Esto es una consecuencia directa del siguiente resultado cuya prueba se puede encontrar en [23, Lema 5.4, p. 132].

Lema A.3.1. Si $X, Y \subset M$ son regiones de Jordan cerradas, entonces existe un homeomorfismo $f : M \to M$ que es isotópico a la aplicación identidad i_M y satisface $f(X) = Y$.

Definición A.3.3. Sea M una superficie. Decimos que M es **orientable** si existen exactamente dos clases de equivalencia de banderas en M. Una **orientación** en M es una elección de una de las clases de equivalencia como una familia de banderas distinguidas. Decimos que las banderas en esta clase son **positivamente orientadas** y las banderas en la otra clase son **negativamente orientadas**.

Ejemplo A.3.1. La orientación estándar en $\mathbb{R}^2$ es aquella determinada por la clase de equivalencia de la bandera (c_0, c_1, c_2), donde $c_0 = 0$, $c_1 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y

$$c_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Si M es una superficie orientada y Ω es un subconjunto abierto y conexo de M, entonces Ω es orientable (ver [6, Apéndice A.4]). Como Ω es abierto, podemos representar la orientación en M por una bandera contenida en Ω. Esta bandera es el representante de una única orientación en Ω, llamada la **orientación inducida** en Ω.

Si $h : M \to N$ es un homeomorfiso entre dos superficies orientadas M y N, entonces h envía todas las banderas positivamente orientadas en M a banderas positivamente orientadas en N, ó envía todas las banderas positivamente orientadas en M a banderas negativamente orientadas en N. En el primer caso decimos que h **preserva orientación**, mientras que en el segundo caso decimos que h **revierte orientación**.

A.4. CW-complejo y característica de Euler

En esta sección X es un espacio topólogico de Hausdorff.

Definición A.4.1. Sea n un entero no negativo.

- Una **célula abierta de dimensión** n en X es un conjunto c contenido en X que es homeomorfo a la bola unitaria abierta $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{R}^n$.
- Una **célula cerrada de dimensión** n en X es un conjunto c contenido en X que es homeomorfo a la bola unitaria cerrada $\overline{\mathbb{B}^n}$ en $\mathbb{R}^n$.
- Una **célula de dimensión cero** en X es un subconjunto de X que consiste de un solo punto. En este caso, para todo $p \in X$, el conjunto $\{p\}$ es una célula abierta y cerrada a la vez.

Definición A.4.2. Sea $\mathcal{D}$ una colección de células abiertas en X. Decimos que el par $(\mathcal{D}, X)$ es una **descomposición celular** de X si $\mathcal{D}$ es una partición de X, es decir, X es la unión de todas las células de $\mathcal{D}$ y dos células distintas de $\mathcal{D}$ son disjuntas.

Definición A.4.3. Si $(\mathcal{D}, X)$ es una descomposición celular de X, la unión X^n de todas las células de $\mathcal{D}$ de dimensión menor o igual que n es llamada el n**-esqueleto** de la descomposición. Cuando $n = 1$ se usa comunmente el término "primer esqueleto".

Definición A.4.4. Sean $(\mathcal{D}, X)$ y $(\mathcal{D}', X)$ dos descomposiciones celulares de X, y sea $f : X \to X$ una aplicación continua, decimos que f es una **aplicación celular** para el par $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ si para toda célula $\sigma \in \mathcal{D}$ se tiene que $f(\sigma) \in D'$ y la restricción $f|_\sigma$ es un homeomorfismo entre σ y $f(\sigma)$.

Definición A.4.5. Decimos que una descomposición $(\mathcal{D}, X)$ es un CW-complejo si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Para cada $c \in \mathcal{D}$ existe una aplicación continua $\Phi : \overline{\mathbb{B}^n} \to X$ tal que $\Phi(\partial\mathbb{B}^n) \subseteq X^{n-1}$ y la restricción $\Phi|_{\mathbb{B}^n}$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{B}^n$ y c.

(2) Dada $c \in \mathcal{D}$, la cerradura topológica de c en X, denotada por $\overline{c}$, está contenida en una unión finita de células de $\mathcal{D}$.

(3) Un conjunto $F \subset X$ es cerrado si y solo si $F \cap \overline{c}$ es cerrado en $\overline{c}$ para todo $c \in \mathcal{D}$.

Definición A.4.6. Sea $(\mathcal{D}, X)$ un CW-complejo.

- Si $\mathcal{D}$ solo posee una cantidad finita de células, decimos que $(\mathcal{D}, X)$ es un CW-complejo **finito**.
- Si existe un entero n tal que la dimensión de cualquier célula de $\mathcal{D}$ es menor o igual que n y al menos una célula tiene dimensión n, decimos que $(\mathcal{D}, X)$ es un CW-complejo de **dimensión** n.

El siguiente teorema es un resultado no elemental en Topología Algebraica cuya demostración requiere teoría de homología (ver [17, Capítulo 13]).

Teorema A.4.1. Supongamos que $(\mathcal{D}, X)$ y $(\mathcal{D}', X)$ son ambos CW-complejos finitos de dimensión n. Sea n_k el número de células de dimensión k en $\mathcal{D}$ y sea m_k el número de células de dimensión k en $\mathcal{D}'$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k n_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k m_k.$$

Este resultado nos conduce a la siguiente definición.

Definición A.4.7. Sea $(\mathcal{D}, X)$ un CW-complejo finito de dimensión n y sea n_k el número de células de dimensión k en $\mathcal{D}$. El número entero denotado y definido por

$$\chi(X) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k n_k,$$

es llamado **la característica de Euler de** X**.**

Ejemplo A.4.1. Usando la estructura CW-complejo de S^2 dada en Lema 3.1.2, tenemos $n_0 = 4$, $n_1 = 4$ y $n_2 = 2$. Entonces $\chi(S^2) = 4 - 4 + 2 = 2$.

Ejemplo A.4.2. Usando la estructura CW-complejo de T dada en Lema 3.1.2, tenemos $n_0 = 4$, $n_1 = 8$ y $n_2 = 4$. Entonces $\chi(T) = 4 - 8 + 4 = 0$.

Apéndice B

Análisis Complejo

En este apéndice vamos a recordar las definiciones y los resultados clásicos concernientes a superficies de Riemann que se utilizaron en esta tesis, en particular el Teorema de Uniformización de Riemann y la clasificación de anillos. Las definiciones, ejemplos y resultados presentados en este apéndice pueden ser encontrados en [13], [15].

B.1. Superficies de Riemann

Sea X una superficie. Una **carta compleja en** X es un homeomorfismo $\phi : U \to V$ definido en un subconjunto abierto $U \subset X$ tomando valores en un subconjunto abierto $V \subset \mathbb{C}$. Dos cartas $\phi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$ se dice que son holomorficamente compatibles si la aplicación

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es un biholomorfismo entre abiertos de $\mathbb{C}$.

Un **atlas complejo** en X es una colección $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to V_i, i \in I\}$ de cartas complejas en X cuyos dominios cubren X, i.e., $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Todo atlas en X determina un único atlas maximal. Esto es, si $\mathcal{A}$ es un atlas sobre X, entonces existe un atlas $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ y si $\mathcal{V}$ es otro atlas con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ entonces $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Este único atlas maximal consiste de todas las posibles cartas complejas compatibles con las cartas complejas de $\mathcal{A}$. Una **estructura compleja** en X es un atlas maximal en X.

Definición B.1.1. Una **superficie de Riemann** es una superficie conexa provista de una estructura compleja.

Ejemplo B.1.1. (La esfera de Riemann). Sea $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde ∞ es un símbolo que no está contenido en $\mathbb{C}$. Definimos la topología en $\overline{\mathbb{C}}$ como sigue: los conjuntos abiertos en $\overline{\mathbb{C}}$ son los conjuntos abiertos usuales de $\mathbb{C}$ y los conjuntos de la forma $V \cup \{\infty\}$ donde $V \subset \mathbb{C}$ es el complemento de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Con esta topología $\overline{\mathbb{C}}$ es una superficie homeomorfa a la esfera S^2. Sean $U_1 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$ y $U_2 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Definamos las aplicaciones $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, como sigue: ϕ_1 es la aplicación identidad y

$$\phi_2(z) := \begin{cases} 1/z & \text{si } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Procedemos a verificar que estas cartas complejas son compatibles. En efecto, para $z \in \phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ tenemos $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2(\phi_1^{-1}(z)) = \phi_2(z) = 1/z$. Por tanto $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es un biholomorfismo de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$. En consecuencia, el atlas $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{C}, i \in \{1, 2\}\}$ determina una estructura compleja en $\overline{\mathbb{C}}$. La conexidad de $\overline{\mathbb{C}}$ es clara por tanto $\overline{\mathbb{C}}$, equipada con esta estructura, es una superficie de Riemann y es llamada **esfera de Riemann**.

Definición B.1.2. Un **retículo planar** Λ es un subgrupo de $\mathbb{R}^2$ isomorfo al grupo $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ejemplo B.1.2. (Toro complejo) Sean w_1 y w_2 dos números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Bajo la identificación natural de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, w_1 y w_2 generan un retículo planar Λ dado por

$$\Lambda = \langle w_1, w_2 \rangle := \{nw_1 + mw_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Consideramos la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{C}$ dada por

$$z_1 \sim z_2 \text{ si y solo si } z_1 - z_2 \in \Lambda$$

y denotamos el conjunto de todas las clases de equivalencia por $\mathbb{C}/\Lambda$. Sea $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ la proyección canónica; i.e., la aplicación que envía a cada punto de $\mathbb{C}$ a su clase de equivalencia en $\mathbb{C}/\Lambda$. A continuación dotaremos a $\mathbb{C}/\Lambda$ de la topología cociente inducida por la aplicación suryectiva π; i.e., diremos que $U \subseteq \mathbb{C}/\Lambda$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}$ es abierto. Con esta topología, $\mathbb{C}/\Lambda$ es una superficie y la aplicación π es continua. Desde que $\mathbb{C}$ es conexo y π es continua, $\mathbb{C}/\Lambda$ también es conexo. La aplicación π es abierta; i.e., la imagen de todo conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}/\Lambda$. Esto se sigue del hecho que

$$\widehat{V} = \pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in \Lambda} (w + V)$$

y que $w + V$ es un abierto de $\mathbb{C}$ para todo $w \in \Lambda$. La estructura compleja en $\mathbb{C}/\Lambda$ se define de la siguiente manera. Sea $V \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $v_1 \nsim v_2$

para todo $v_1, v_2 \in V$ con $v_1 \neq v_2$. Como π es una aplicación abierta, $U := \pi(V)$ es abierto en $\mathbb{C}/\Lambda$ y desde que dos puntos distintos de V no son equivalentes, $\pi|_V : V \to U$ es un homeomorfismo. Entonces $\phi : U \to V$, la inversa de $\pi|_V$, define una carta compleja en $\mathbb{C}/\Lambda$.

Sea $\mathcal{A}$ la colección de todas las cartas obtenidas del modo descrito en el párrafo anterior. Vamos a verificar que todas las cartas en $\mathcal{A}$ son holomorficamente compatibles estableciendo así que $\mathcal{A}$ es un atlas y determina una estructura compleja en $\mathbb{C}/\Lambda$. Sean $\phi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, dos cartas tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y sea $\psi := \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$. Para todo $z \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$ tenemos $\pi(\psi(z)) = \phi_1^{-1}(z) = \pi(z)$ y por tanto $\psi(z) - z \in \Lambda$. Desde que Λ es discreto y ψ es continua, $\psi(z) - z$ es constante en cada componente conexa de $\phi_1(U_1 \cap U_2)$. Entonces ψ es holomorfa. Similarmente ψ^{-1} es también holomorfa. Por tanto $\mathbb{C}/\Lambda$ con la esctructura compleja determinada por el atlas $\mathcal{A}$ es una superficie de Riemann. Esta superficie de Riemann es llamada **toro complejo**.

Definición B.1.3. Sean X e Y dos superficies de Riemann.

- Una función continua $f : X \to Y$ es **holomorfa**, si para cada par de cartas $\psi_1 : U_1 \to V_1$ en X y $\psi_2 : U_2 \to V_2$ en Y con $f(U_1) \subseteq U_2$, la aplicació $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} : V_1 \to V_2$ es holomorfa en el sentido usual.
- Una función $f : X \to Y$ es un **isomorfismo conforme** si es biyectiva y tanto f como f^{-1} son holomorfas. Decimos que X e Y son **conformemente equivalentes** si existe un isomorfismo conforme $f : X \to Y$.

El siguiente resultado clasifica (salvo isomorfismo conforme) todas las superficies de Riemann simplemente conexas (ver [15, Capítulo 1]).

Teorema B.1.1. (Teorema de uniformización de Riemann) Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a exactamente una de las siguientes tres superficies: la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, el plano complejo $\mathbb{C}$, o el disco unitario abierto $\mathbb{D}$.

Definición B.1.4. Una superficie de Riemann es llamada **anillo** si su grupo fundamental es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

El siguiente resultado clasifica (salvo isomorfismo conforme) a todos los anillos. Su demostración puede ser encontrada en [15, p. 63-64].

Teorema B.1.2. (Clasificación de anillos) Todo anillo es conformemente equivalente a exactamente una de las siguientes superficies de Riemann: el plano agujereado $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el anillo circular $A_m := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < e^{2\pi m}\}$ para un único $m \in \mathbb{R}^+$, o el disco agujereado $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Apéndice C

Subaditividad de módulos de anillos

Este apéndice recoge las definiciones y los resultados clásicos relacionados a módulos de familias de curvas que se utilizaron en el Capítulo 6 de esta tesis. Los resultados presentados en este apéndice se encuentran en [1], [15].

C.1. Longitud extrema de una familia de curvas

Una función ρ, definida en todo $\mathbb{R}^2$, es llamada **admisible** si:

(1) $\rho \geq 0$ y es Borel medible.

(2) $A(\rho) = \iint \rho^2 dxdy \neq 0, \infty$ (la integral es tomada sobre todo el plano).

Sea γ una curva en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco y sea ρ una función admisible. Si ρ es medible sobre γ, definimos $L_\gamma(\rho) := \int_\gamma \rho|dz|$, caso contrario, definimos $L_\gamma(\rho) := \infty$.

Definición C.1.1. Sea Γ una familia de curvas en el plano, definimos

$$L(\rho) := \inf_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma(\rho) \qquad y \qquad \lambda(\Gamma) := \sup_\rho \frac{L^2(\rho)}{A(\rho)},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las possibles funciones admisibles. La cantidad $\lambda(\Gamma)$ es llamada **longitud extrema de** Γ.

Definición C.1.2. Diremos que $\Gamma_1 < \Gamma_2$ si toda curva $\gamma_2 \in \Gamma_2$ contiene alguna curva $\gamma_1 \in \Gamma_1$.

Observación C.1.1. Si $\Gamma_1 < \Gamma_2$, entonces hay más curvas en Γ_2 que en Γ_1 y las curvas en Γ_2 son más largas. Además, si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ entonces $\Gamma_2 < \Gamma_1$.

Teorema C.1.1. Si $\Gamma_1 < \Gamma_2$, entonces $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$.

Demostración. En efecto, si $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$, entonces $L_{\gamma_1}(\rho) \leq L_{\gamma_2}(\rho)$. Luego

$$\text{ínf}\{L_{\gamma_1}(\rho) : \gamma_1 \in \Gamma_1\} \leq \text{ínf}\{L_{\gamma_2}(\rho) : \gamma_2 \in \Gamma_2\}.$$

Se sigue que $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$. ■

El siguiente resultado fue usado en la prueba del Lema 6.2.2. Para los detalles de su demostración sugerimos al lector interesado ver [1, p. 10-12].

Teorema C.1.2. ($\lambda(\Gamma)$ es un invariante conforme) Supongamos que toda curva $\gamma \in \Gamma$ está contenida en una región planar Ω y sea $\phi : \Omega \to \Omega'$ un isomorfismo conforme. Sea Γ' el conjunto de las imágenes de los elementos de Γ bajo ϕ. Entonces $\Lambda(\Gamma) = \Lambda(\Gamma')$.

C.2. Módulo de una familia de curvas

Definición C.2.1. Sea Γ una familia de curvas. Definimos y denotamos el **módulo de** Γ por

$$\text{mod}(\Gamma) = 1/\lambda(\Gamma).$$

Los siguientes corolarios son consecuencias inmediatas del Teorema C.1.1 y del Teorema C.1.2 respectivamente.

Corolario C.2.1. Si $\Gamma_1 < \Gamma_2$ entonces $\text{mod}(\Gamma_2) \geq \text{mod}(\Gamma_1)$.

Corolario C.2.2. $\text{mod}(\Gamma)$ es invariante bajo isomorfismos conformes.

Ejemplo C.2.1. Sea A el anillo circular $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ y sea Γ el conjunto de curvas simples y cerradas contenidas en A que separan los círculos $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1\}$ y $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_2\}$. Para cualquier función admisible ρ

$$L(\rho) \leq \int_0^{2\pi} \rho(re^{\mathbf{i}\theta}) r \, d\theta,$$

entonces

$$\frac{L(\rho)}{r} \leq \int_0^{2\pi} \rho(re^{\mathbf{i}\theta}) \, d\theta.$$

Integrando con respecto a r y usando el teorema de Fubini, tenemos

$$L(\rho)\ln(r_2/r_1) \leq \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \rho(re^{\mathbf{i}\theta})\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \rho(re^{\mathbf{i}\theta})\,dr\,d\theta.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(\mathbb{R}^2, dr\,d\theta)$

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \rho(re^{\mathbf{i}\theta})\,dr\,d\theta\Big)^2 &\leq \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\,dr\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \rho^2(re^{\mathbf{i}\theta}) r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\,dr\,d\theta \cdot \iint_A \rho^2\,dy\,dx \\ &= \big(2\pi\ln(r_2/r_1)\big)A(\rho).\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\frac{L^2(\rho)}{A(\rho)} \leq \frac{2\pi}{\ln(r_2/r_1)}.$$

La aplicación $\rho(re^{\mathbf{i}\theta}) = 1/(2\pi r)$ produce la igualdad. Entonces $\lambda(\Gamma) = \dfrac{2\pi}{\ln(r_2/r_1)}$. Por tanto $\mathrm{mod}(\Gamma) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\Big(\dfrac{r_2}{r_1}\Big)$.

Definición C.2.2. El **módulo** del anillo circular $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ es denotado por $\mathrm{mod}(A)$ y es definido por

$$\mathrm{mod}(A) := \frac{1}{2\pi}\ln\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big).$$

Definición C.2.3. Sea $\mathbf{A}$ una superficie de Riemann conformemente equivalente al anillo circular $A_m = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < e^{2\pi m}\}$. Denotamos el módulo del anillo $\mathbf{A}$ por $\mathrm{mod}(\mathbf{A})$ y lo definimos como sigue $\mathrm{mod}(\mathbf{A}) := \mathrm{mod}(A_m) = m$.

Por el Teorema B.1.2, $\mathrm{mod}(\mathbf{A})$ está bien definido.

Teorema C.2.1. Si $f : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ es un cubrimiento de grado d entre dos anillos, entonces $\mathrm{mod}(\mathbf{B}) = \mathrm{mod}(\mathbf{A})/d$.

Demostración. Es suficiente reducir al caso $\mathbf{B} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\}$, $\mathbf{A} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < s\}$ y $f(z) = z^d$. Entonces $r = s^{1/d}$. ■

El siguiente resultado también fue usado en la demostración del Lema 6.2.2. Su demostración puede ser encontrada en [15, p. 64-66].

Teorema C.2.2. (subaditividad de módulos de anillos) Sea $\mathbf{B}$ un anillo y sea $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots \subset \mathbf{B}$ una colección finita ó infinita de subanillos dos a dos disjuntos y todos ellos encajados en $\mathbf{B}$. Entonces

$$\mathrm{mod}(\mathbf{B}) \geq \sum_j \mathrm{mod}(\mathbf{A}_j).$$

Apéndice D

Modelo hiperbólico del semiplano superior

Este último apéndice recoge todas las definiciones y los resultados clásicos del modelo hiperbólico planar que se utilizaron en el Capítulo 6 de esta tesis. Los resultados presentados en este apéndice pueden ser encontrados en [2], [15].

D.1. Métrica y distancia hiperbólica en $\mathbb{H}$

La métrica hiperbólica sobre el plano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ está definida por

$$\frac{|dz|^2}{(\mathrm{Im}(z))^2} := \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}$$

donde $|dz|^2$ representa la métrica Euclidiana $(dx)^2 + (dy)^2$. Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$ es una curva de clase C^1 por tramos, entonces la **longitud de la curva** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con respecto a la métrica infinitesimal definida arriba es

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) := \int_0^1 \frac{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}{y(t)}\, dt.$$

Desde que $[0,1]$ es compacto y $y(t)$ es continua, existe $m > 0$ tal que $m \leq y(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Esto implica que $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma)$ es un número real no negativo.

Definición D.1.1. Para cada par de puntos $a, b \in \mathbb{H}$, sea $C_{a,b}$ el conjunto de todas las curvas de clase C^1 por tramos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$ tales que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. La **distancia hiperbólica** entre a y b es denotada por $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(a,b)$ y es definida como

$$\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(a,b) := \text{ínf}\{\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) : \gamma \in C_{a,b}\}.$$

La aplicación $(a, b) \mapsto \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(a, b)$ define una función distancia sobre $\mathbb{H}$. Por tanto, $(\mathbb{H}, \mathrm{d}_{\mathbb{H}})$ es un espacio métrico. Las curvas que realizan el ínfimo del conjunto $\{\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) : \gamma \in C_{a,b}\}$ son los **segmentos geodésicos** entre los puntos a y b. El siguiente resultado establece cuales son estas curvas (ver [15, p. 27-28]).

Teorema D.1.1. (Geodésicas en $\mathbb{H}$) Dados cualquier par de puntos $a, b \in \mathbb{H}$, existe un único semicírculo perpendicular al eje real pasando por a y b. (Si $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(b)$, el semicírculo se degenera en una línea vertical que pasa por a y b). El arco de este semicírculo que liga al punto a y al punt b es el único **segmento geodésico** ligando estos puntos.

Definición D.1.2. Cualquier semicírculo perpendicular al eje real y cualquier recta vertical dividen al espacio $\mathbb{H}$ en dos componentes conexas. Cada una de estas componentes recibe el nombre de **semiespacio**.

D.2. Isometrías en $(\mathbb{H}, \mathrm{d}_{\mathbb{H}})$.

En general, si (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ es un homeomorfismo tal que $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ para todo par de puntos $x, y \in X$, decimos que f es una **isometría** de (X, d). Es claro que la colección de todas las isometrías de (X, d) forman un grupo bajo la composición. Este grupo es llamado el grupo de isometrías de (X, d) y es denotado por $\mathrm{Isom}(X, \mathrm{d})$. El siguiente teorema describe todas las isometrías en el modelo $(\mathbb{H}, \mathrm{d}_{\mathbb{H}})$.

Teorema D.2.1. $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ si y solo si f tiene la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1,$$

ó tiene la forma

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbf{i}\mathbb{R} \text{ con } ad - bc = 1.$$

Definición D.2.1.

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) := \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}.$$

Teorema D.2.2. El grupo de las isometrías de $(\mathbb{H}, \mathrm{d}_{\mathbb{H}})$ que preservan orientación es precisamente $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Este grupo actúa de manera transitiva sobre el conjunto de las geodésicas; i.e., para cualquier par de geodésicas arbitrarias en $\mathbb{H}$ siempre existe una transformación en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ enviando una de ellas en la otra.

El siguiente resultado nos dice que toda aplicación holomorfa $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una contracción débil con respecto a la distancia hiperbólica $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}$. Para los detalles de la demostración, sugerimos al lector interesado ver [1, p. 141].

Lema D.2.1. (Schwarz-Pick) Sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ una aplicación holomorfa.

(1) Si f es un homeomorfismo, entonces $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

(2) Si f no es un homeomorfismo, entonces $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(f(z_1), f(z_2)) < \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$ para todo par de puntos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$.

Bibliografía

[1] L. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, University Lecture Series. Volume 38, Second Edition, AMS, 2006.

[2] J. Anderson, *Hyperbolic Geometry* , 2nd Edition, Springer-Verlag, 2000.

[3] P. Blanchard, *Complex Analytic Dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc, **11** (1984), no. 1, 85-141.

[4] B. Bielefeld, Y. Fisher,& J. Hubbard, *The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems*, Journal of the AMS **5**; no. 4 (1992), 721-762.

[5] X. Buff, G. Cui, L. Tan, *Teichmüller spaces and holomorphic dynamics*, Handbook of Teichmüller theory, Vol. III, EMS, 2011.

[6] M. Bonk, D. Meyer, *Expanding Thurston Maths*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 225, AMS, 2017

[7] J. Cannon, W. Floyd, R. Kenyon, and W. Parry, *Constructing rational maps from finite subdivision rules*, Conformal Geometry and Dynamics, **7** (2003), 76–102.

[8] J. Cannon, W. Floyd, W. Parry, and K. Pilgrim, *Nearly Euclidean Thurston maps*, Conformal Geometry and Dynamics, **7** (2012), 209–255.

[9] A. Douady and J. Hubbard, *Itéation des polynomes quadratiuqes complexes*, C. R. de Acad. Sci. Paris, Sér I Math, **294** (1982), 123–126.

[10] A. Douady and J. Hubbard, *Etude dynamique des polynomes complexes, I, II*, Publications Mathematiques dÓrsay 84-2, **85-4**, Université de Paris-Sud, Départment de Mathématiques, Orsay, 1984, 1985.

[11] A. Douady and J. Hubbard, *A proof of Thurston's topological characterization of rational functions*, Acta Math. **171** (1993), 263–297.

[12] W. Floyd, K. Pilgrim and W. Parry, *Presentation of nearly Euclidean Thurston maps*, Fundamenta Mathematica, **244** (2019), 49–72.

[13] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1981.

[14] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

[15] J. Hubbard, *Techmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics, Volume 1: Teichmüller Theory*, Matrix Editions, Ithica, NY, 2006.

[16] J. Hubbard, *Techmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics, Volume 2: Surface homeomorphisms and rational functions*, Matrix Editions, Ithica, NY, 2016.

[17] J. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 2011.

[18] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, 2000.

[19] J. Milnor, *Pasting together Julia sets: a worked out example of mating*, Experimental Math. **13** (2004), 55-92.

[20] J. Milnor, *On Lattès Maps*, in Dynamics on the Riemann sphere, Eur. Math. Soc., Zürich, (2006), 9–43.

[21] A. Poirier, *Critical portraits for post-critically finite polynomials*. Fund. Math. **203** (2009), no. 2, 107-163.

[22] N. Selinger, *Thurston's pullback map on the augmented Teichmüller space and applications*. Inventiones, mathematicae (2011), 1–32.

[23] J. Vick, *Homology Theory: An introduction to algebraic topology*. Academic Press, New York, 1973.