Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Isomorfismo de Jordan sobre algebras de Banach que preservan la invertibilidad

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Cesar Elmer MOLINA QUISPE

ASESOR

Dr. Alex Armando CRUZ HUALLPARA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Molina, C. (2024). *Isomorfismo de Jordan sobre algebras de Banach que preservan la invertibilidad*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Cesar Elmer Molina Quispe
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40061809
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0009-0096-951XV
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alex Armando Cruz Huallpara
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40949706
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-5453-6885
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445739
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Joaquín Omar Perez Ortiz
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10525884
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis funcional

Grupo de investigación	Matemática Aplicada - Métodos Numéricos (METNUM)
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:20 horas del domingo 29 de septiembre del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024): Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (PRESIDENTE), Mg. Joaquin Omar Perez Ortiz (MIEMBRO) y el Dr. Alex Armando Cruz Huallpara (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: **"ISOMORFISMO DE JORDAN SOBRE ALGEBRAS DE BANACH QUE PRESERVAN LA INVERTIBILIDAD"**, presentado por el señor **Bachiller CESAR ELMER MOLINA QUISPE**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **Sobresaliente**, con un calificativo promedio de **Diecisiete.**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller CESAR ELMER MOLINA QUISPE**, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 11:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
PRESIDENTE

Mg. Joaquin Omar Perez Ortiz
MIEMBRO

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Alex Armando Cruz Huallpara en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001333-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"ISOMORFISMO DE JORDAN SOBRE ÁLGEBRAS DE BANACH QUE PRESERVAN LA INVERTIBILIDAD",** presentado por el bachiller **Cesar Elmer Molina Quispe**, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según larevisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 8% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuarcon los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor

DNI:40949706



DEDICATORIA

A mi compañera, por su amor y apoyo incondicional.

A mis profesores y mentores, por su guía y sabiduría.

Y a todos aquellos que han sido parte de este viaje académico.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que han hecho posible la realización de esta tesis.

A mi asesor el Dr. Alex Armando Cruz Huallpara, por su inigualable guía, paciencia y apoyo constante a lo largo de este proyecto. Su conocimiento y experiencia han sido fundamentales para el desarrollo de esta investigación.

A los miembros del comité evaluador, por sus valiosas sugerencias y comentarios que han enriquecido significativamente este trabajo.

A mis compañeros y amigos, por los momentos compartidos, las discusiones académicas y el apoyo moral durante los momentos desafiantes.

A mi familia, por su amor incondicional, comprensión y estímulo continuo. Sin su apoyo, este logro no habría sido posible.

Y a todas las personas que, de alguna manera, han contribuido a este logro académico.

RESUMEN

Isomorfismo de Jordan sobre álgebras de Banach que preservan la invertibilidad

Molina Quispe, César Elmer

2024

Asesor : Dr. Alex Armando, Cruz Huallpara.
Título obtenido : Licenciado en Matemática.

Este trabajo se enfoca en clasificar pares de transformaciones sobreyectivas entre álgebras de Banach complejas unitales que preservan la invertibilidad de combinaciones lineales en ambas direcciones. Partiendo de resultados históricos como los de Dieudonné y Marcus-Purves sobre preservación de invertibilidad en álgebra de matrices, se extiende el análisis a álgebras de Banach semisimples con socle esencial. Se demuestra que dichas transformaciones deben coincidir y estar relacionadas con un isomorfismo de Jordan modulado por un elemento invertible. Este estudio generaliza casos conocidos y aporta una comprensión más profunda de las propiedades preservadoras en contextos algebraicos más amplios.

Palabras claves: Álgebras de Banach, preservación de invertibilidad, isomorfismo de Jordan, socle esencial, transformaciones sobreyectivas, lápices lineales..

ABSTRACT

Jordan isomorphism on Banach álagebra preserving invertibility
Molina Quispe, César Elmer

2024

Adviser : Dr. Alex Armando, Cruz Huallpara.
Obtained : Graduate in Mathematics.

This work focuses on classifying pairs of surjective transformations between unital complex Banach algebras that preserve the invertibility of linear combinations in both directions. Building on historical results such as those of Dieudonné and Marcus-Purves on invertibility preservation in matrix algebras, the analysis is extended to semisimple Banach algebras with an essential socle. It is demonstrated that such transformations must coincide and be related to a Jordan isomorphism modulated by an invertible element. This study generalizes known cases and provides a deeper understanding of preservative properties in broader algebraic contexts.

Keywords: Banach algebras, invertibility preservation, Jordan isomorphism, essential socle, surjective transformations, linear pencils.

INDICE GENERAL

1 Preliminares **10**
- 1.1 Espacios de Banach . . . 10
  - 1.1.1 Nociones básicas de análisis funcional . . . 10
- 1.2 Álgebras de Banach . . . 13
  - 1.2.1 Nociones de Álgebras . . . 13
  - 1.2.2 Normas sobre álgebras y álgebra de Banach . . . 14
  - 1.2.3 Inversas en álgebras de Banach . . . 19
  - 1.2.4 El espectro en una álgebra compleja normada . . . 24
  - 1.2.5 Ideales y módulos . . . 24
  - 1.2.6 Ideales minimales y $soc(A)$ . . . 29
  - 1.2.7 Lápices lineales . . . 31

2 Isomorfismos de Jordan **32**
- 2.1 Aplicaciones lineales . . . 32
- 2.2 Funcional de Jordan y radical de Jacobson . . . 33
- 2.3 Traza y determinante en un álgebra de Banach . . . 36
- 2.4 Isomorfismo de Jordan . . . 40

3 Aplicaciones e invertibilidad **43**
- 3.1 Álgebra de Banach semi-simple, invertibilidad y radical de Jacobson . . . 43
- 3.2 Aplicaciones que preservan la invertibilidad de lápices lineales . . . 46

4 Conclusiones y/o Sugerencias **54**

5 Bibliografía **54**

Introducción

En el ámbito de las matemáticas, el estudio de las transformaciones que preservan propiedades algebraicas específicas ha sido una línea de investigación fundamental. En particular, las transformaciones que preservan la invertibilidad de elementos en álgebras han capturado la atención de numerosos investigadores debido a sus aplicaciones en diversas áreas como el álgebra lineal, la teoría de operadores y la física matemática.

Las álgebras de Banach, que son espacios vectoriales normados completos con una multiplicación compatible, proporcionan un marco natural para explorar estas transformaciones en un contexto funcionalmente rico y generalizado. Dentro de este marco, las álgebras de Banach unitales complejas juegan un papel crucial debido a su estructura robusta y a la presencia de elementos invertibles que forman un grupo significativo, denotado por $G(A)$ para una álgebra A.

Históricamente, el análisis de mapas que preservan la invertibilidad ha comenzado con el trabajo de Dieudonné (1948), quien exploró transformaciones lineales en álgebras de matrices que mantienen la invertibilidad. Posteriormente, Marcus and Purves (1959) extendieron estos resultados al demostrar que cualquier transformación lineal que preserva la invertibilidad en la álgebra de matrices $M_n(\mathbb{C})$ debe ser de una forma específica, ya sea como una conjugación por elementos invertibles o como una composición con la transposición. Este tipo de resultados no solo elucidaron la estructura de tales transformaciones, sino que también sentaron las bases para investigaciones posteriores en contextos más generales.

Avanzando en la literatura, Sourour (1996) y Brešar, Fošner, and Šemrl (2003) ampliaron estos resultados a álgebras de operadores y álgebras de Banach semisimple con un socle esencial, mostrando que las transformaciones biyectivas que preservan la invertibilidad deben ser isomorfismos de Jordan. Estos avances destacan la profunda conexión entre las propiedades preservadoras y la estructura algebraica subyacente de las álgebras de Banach.

En los últimos años, el interés en los problemas de preservación se ha diversificado, explorando escenarios donde las condiciones de linealidad son relajadas o eliminadas. Este enfoque busca identificar condiciones mínimas bajo las cuales la linealidad o semi-linealidad de las transformaciones puede ser deducida a partir de propiedades preservadoras más generales.

Motivados por estos desarrollos, el presente trabajo tomando como referencia las investigaciones de Schultz (2024) se enfoca en clasificar pares de transformaciones sobre álgebras de Banach semisimples con socles esenciales que preservan la invertibilidad de combinaciones lineales (llamadas lápices lineales) en ambas direcciones. Es-

pecíficamente, consideramos dos aplicaciones sobreyectivas $\varphi, \psi : A \to B$ entre álgebras de Banach complejas unitales A y B, donde A es semisimple y su socle es esencial. La condición central impuesta es que para cualesquiera $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, la combinación lineal $\lambda x + y$ es invertible en A si y solo si $\lambda\varphi(x) + \psi(y)$ es invertible en B.

El objetivo principal de este estudio es demostrar que bajo estas condiciones, las transformaciones φ y ψ deben coincidir y estar relacionadas con un isomorfismo de Jordan, modulados por un elemento invertible en B. Este resultado no solo generaliza los casos previamente conocidos para matrices y operadores acotados, sino que también amplía nuestra comprensión de las transformaciones preservadoras en el contexto más amplio de las álgebras de Banach semisimples.

1 Preliminares

Comencemos introduciendo algunas nociones básicas de espacios de Banach y álgebras de Banach que son indispensable en el desarrollo del presente trabajo.

1.1 Espacios de Banach

Las álgebras de Banach juegan un papel crucial en el análisis funcional y la teoría espectral, proporciona un marco teórico al estudio de operadores lineales y propiedades. Estas estructuras algebraicas, que relaciona el álgebra y la topología de los espacios de Banach, permiten explorar conceptos fundamentales como el espectro de un operador, radical de Jacobson, el socle de un álgebra, entre otras. En esta sección considerando como referencia a Rudin (1991), Bonsall and Duncan (1973) se definirá algunos elementos de espacios de Banach y de álgebras de Banach.

1.1.1 Nociones básicas de análisis funcional

Un espacio vectorial o espacio lineal sobre un campo $\mathbb{F}$ (ya sea $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es un conjunto X junto con dos operaciones: adición de vectores y multiplicación por un escalar. Estas operaciones deben satisfacer las siguientes propiedades:

- Suma de vectores: Para todo $x, y \in X$, existe un vector $x + y \in X$
- Multiplicación por un escalar: Para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, existe $\alpha \cdot x \in X$
- Asociatividad: $x + (y + z) = (x + y) + z$
- Conmutatividad $x + y = y + x$
- Existencia de elemento neutro: Existe $0 \in X$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in X$
- Existencia de inversos aditivos: Para todo $x \in X$, existe $y \in X$ tal que $x + y = 0$
- Distributividad respecto a los escalares: $\alpha(x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- Distributividad respecto a la adición de escalares: $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- Asociatividad de la multiplicación por escalares: $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
- Existencia del elemento neutro multiplicativo: $1 \cdot x = x$

Definición 1.1. *Un espacio vectorial normado es un espacio vectorial X con una aplicación definida por $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface:*

1. $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in X$ y $\|x\| = 0$ *si y solo si* $x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x \in X$

3. $\|x+y\| \geq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$ *(desigualdad triangular)*

a esta aplicación con estas propiedades se le llama norma y al par $(X, \|\cdot\|)$ *se le dice espacio vectorial normado.*

Definición 1.2. *Sea* X *un conjunto no vacío, una aplicación* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *que satisface las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq d(x, y) < \infty$ *para todos* x *e* y,
2. $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todos* x *e* y,
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para todos* x, y *y* z.

Ahora en un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ si consideramos que la distancia entre x e y, es $\|x - y\|$, el espacio vectorial normado se puede considerar como un espacio métrico al inducir una métrica dada por la norma definida en dicho espacio.

Definición 1.3. *Sea el espacio vectorial normado* X *con la métrica inducida por su norma. Entonces, podemos definir los conjuntos*

$$B_1(0) = \{x : \|x\| < 1\} \quad y \quad \overline{B}_1(0) = \{x : \|x\| \leq 1\}$$

los cuales son la ***bola unitaria abierta*** *y la* ***bola unitaria cerrada*** *de* X*, respectivamente.*

Definición 1.4. *Un subconjunto de un espacio métrico es abierto si y solo si es una unión, de bolas abiertas, incluso puede ser vacío.*

Ahora si agrupamos todos los conjuntos abiertos y denotamos la colección por τ. Entonces, obtenemos una topología. Es decir, se cumple:

- El conjunto $\emptyset$ y X están en τ;
- La unión de cualquier subcolección de τ está en τ;
- La intersección de cualquier subcolección finita de τ está en τ.

Observación 1. *Se puede verificar que las operaciones suma y multiplicación por un escalar son aplicaciones continuas bajo esta topología, determinada por la métrica que se deriva de una norma.*

Recordar que una sucesión en un espacio métrico (X, d) es una aplicación $g : \mathbb{N} \to X$. Es decir, es una colección ordenada de elementos de X denotada como $\{x_n\}$, donde cada $x_n = g(n) \in X$.

Definición 1.5. *Un espacio métrico completo es un espacio métrico* (X, d) *tal que toda sucesión de Cauchy en* X *converge a un punto en* X*.Es decir, si para toda sucesión* $\{x_n\}$ *en* X *que satisface que para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_m) < \epsilon$ *para todo* $n, m \geq N$*, entonces existe un* $x \in X$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Los espacios de Banach fueron desarrollados por Stefan Banach, estos espacios son una parte fundamental en el análisis funcional. La importancia radica en su propiedad de completitud. Tiene aplicaciones en la teoría espectral, ecuaciones diferenciale ordinarias y parciales. Presentamos a continuación la definición de espacios de Banach.

Definición 1.6. *Un espacio de Banach es un par $(X, \|\cdot\|)$, siendo X un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$ y $\|\cdot\|$ es una norma en X y donde toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en X, existe un $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*

De aquí podemos mencionar algunos términos que se desprenden gracias a la definición dada según (Ver Bonsall and Duncan 1973, p. 4).

Observación 2. *Una **norma de Banach** o **norma completa** es una norma que induce una métrica completa.*

Observación 3. *Un espacio vectorial normado es un **espacio de Banach** o **B-espacio** o **espacio normado completo** si su norma es una norma de Banach. Es decir, cada sucesión de Cauchy en ese espacio converge a un elemento de dicho espacio.*

Un concepto que nos va a permitir extender algunas propiedades de la geometría euclidiana clásica a los espacios vectoriales generales es el producto escalar que definimos a continuación.

Definición 1.7. *Sea X un espacio vectoria, una aplicación de $X \times X$ a $\mathbb{F}$, es un **producto escalar** (o producto interno) denotado $\langle\cdot,\cdot\rangle$, que satisface los siguientes axiomas:*

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall x, y \in X,$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall x, y, z \in X,$
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X,$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad y \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$

Observación 4. *Denotamos por $\overline{\langle y, x\rangle}$ el conjugado complejo de $\langle y, x\rangle$*

Observación 5. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ se tiene que $\langle y, x\rangle = \langle y, x\rangle$*

Observación 6. *Se tiene que $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y todos $x, y \in X$.*

Definición 1.8. *Un espacio vectorial X junto con el producto escalar definido en 1.7 se llama un **espacio vectorial con producto escalar** y se denota por el par $(X, \langle,\rangle)$*

Definición 1.9. *Sean dos vectores $x, y \in X$ se llaman **ortogonales** si su producto escalar es igual a cero: $\langle x, y\rangle = 0$ y se denotará por $x \perp y$*

Definición 1.10. *Definimos la **longitud** de un vector $x \in X$ como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

A principios del siglo XX, David Hilbert desarrollo la teoría de los espacios de Hilbert, con la necesidad de extender el concepto de espacios euclideanos. Debido a que existe un producto escalar en estos espacios podemos extender varias propiedades y teoremas del álgebra lineal a dimensiones infinitas. Ahora vamos a definir un espacio de Hilbert.

Definición 1.11. *Sea un espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$ y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar de $X \times X$ a $\mathbb{F}$. Definimos la norma en X como:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in X.$$

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, con la métrica inducida por su norma, $d(x, y) = \|x - y\|$ para $x, y \in X$, entonces el par $(X, \langle, \rangle)$ es un ***espacio de Hilbert****.*

Observación 7. *En otros términos, un espacio de Hilbert es un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ cuya norma está dada por un producto escalar.*

1.2 Álgebras de Banach

Las álgebras de Banach, representan una estructura fundamental en el análisis funcional. Estas álgebras son espacios vectoriales normados completos con una operación de multiplicación que es continnua con respecto a la norma. En el estudio de las álgebras de Banach se relacionan conceptos de funciones analíticas, anillos, espacios de Banach y elementos del álgebra conmutativa y no conmutativa.

1.2.1 Nociones de Álgebras

Definición 1.12. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y además una aplicación $(a, b) \mapsto ab$ de $X \times X$ en X que satisface los siguientes axiomas (para todos $a, b, c \in X, \alpha \in \mathbb{F}$):*

A1. $a(bc) = (ab)c$,

A2. $a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc$,

A3. $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$.

Este espacio vectorial X es un álgebra sobre $\mathbb{F}$

Observación 8. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, X se llama una álgebra real y el campo $\mathbb{F}$ se llama campo escalar de X.*

Observación 9. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, X se llama un álgebra compleja.*

Observación 10. *La aplicación $(a, b) \mapsto ab$ se llama el multiplicación en X, y ab es el producto de a e b.*

Observación 11. *Del axioma $A1$ uno puede concluir que el conjunto X con la aplicación $(a, b) \mapsto ab$ es un semigrupo.*

Observación 12. *El axioma $A3$ es equivalente a*

$$(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y) \quad (x, y \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{F}).$$

Para plantear ejemplos de álgebras, (según Bonsall and Duncan 1973, p. 1). Primero consideremos la definición puntual de adición y multiplicación por un escalar. Entonces, siendo E un conjunto, X un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$, α un elemento de $\mathbb{F}$, f, g aplicaciones de E en X. Definimos $f + g$, αf como las aplicaciones de E en X dadas por

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\alpha f)(t) = \alpha(f(t)) \quad (t \in E).$$

Para un álgebra X definimos el producto puntual como sigue:

$$(fg)(t) = f(t)g(t) \quad (t \in E).$$

Ejemplo 1.1. *El conjunto de todas las aplicaciones de E en $\mathbb{F}$, que lo denotaremos por X y donde E es un conjunto no vacío, además de la adición, multiplicación por un escalar y producto puntual. Podemos observar que X es un álgebra.*

Por otro lado, si consideramos los espacios vectoriales X, Y sobre el mismo campo $\mathbb{F}$, y denotamos por $L(X, Y)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de X en Y con la adición y multiplicación por un escalar puntuales. Podemos conseguir el siguiente álgebra.

Ejemplo 1.2. *$L(X, X)$ es un álgebra con el producto definido por la composición*

$$(ST)x = S(Tx) \quad (x \in X),$$

y X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Esta álgebra también se denota por $L(X)$.

1.2.2 Normas sobre álgebras y álgebra de Banach

Principios del siglo XX, los trabajos de David Hilbert, Stefan Banach, John Von Neuman y otros estuvieron relacionados con las investigaciiones sobre álgebras normadas, en particular las álgebras de Banach y álgebras de C^*-álgebras. Esto debido a que los conceptos y técnicas del análisis funcional se puede ampliar a a contextos del álgebra. En ese sentido, vamos a presentar en esta sección algunas conceptos que relacionan el análisi funcional y la estructura de álgebras estudiadas en la sección anterior.

Tener en cuenta que, en esta sección nos referimos al conjunto $L(X, Y)$ como un espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de X en Y con la adición y multiplicación por un escalar puntuales.

Definición 1.13. *Sean X, Y álgebras sobre el mismo campo escalar $\mathbb{F}$. Un homomorfismo de X en Y es una aplicación $\varphi \in L(X, Y)$ tal que*

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad (a, b \in X).$$

Definición 1.14. *Un monomorfismo de X en Y es un homomorfismo inyectivo de X en Y, y un isomorfismo de X sobre Y es un homomorfismo biyectivo de X en Y.*

Observación 13. *Las álgebras X y Y son isomorfas si existe un isomorfismo de X sobre Y.*

Tener en cuenta que, un sub-semigrupo de X es un subconjunto S tal que

$$a, b \in S \implies ab \in S. \tag{1.1}$$

En ese sentido, definimos una subálgebra de la siguinete forma:

Definición 1.15. *S es una subálgebra de X si es un subespacio vectorial de X y además es un sub-semigrupo de X. Es decir, satisface la relación 1.1*

Observación 14. *Notamos que una subálgebra S de un álgebra X es también un álgebra con el mismo campo escalar y con el producto en S bajo la restricción de la multiplicación definida en X a $S \times S$.*

Ejemplo 1.3. *Consideremos un álgebra X. Sean $a \in X$ y F_a la aplicación de X en X definida por $F_a(t) = at$, para todo $t \in X$. Entonces, podemos comprobar en forma directa que la aplicación F_a es un homomorfismo de X en $L(X)$. Donde $L(X)$ el conjunto de las aplicaciones lineales de X en X. A dicha aplicación se le denomina la representación regular izquierda de X en X.*

Definición 1.16. *Sea X un espacio vectorial y G un álgebra ambos sobre $\mathbb{F}$. Una seminorma (o prenorma o pseudonorma) en X es una aplicación p de X en $\mathbb{R}$ tal que (para todos $x, y \in G$ y $\alpha \in \mathbb{F}$):*

1. $p(x) \geq 0$,
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$,
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Ejemplo 1.4. *Vamos a considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y definimos $p(x, y) = |x|$. Esta es una semi-norma porque satisface la subaditividad (axioma 3) y la homogeneidad absoluta (axioma 2), pero el hecho de que $p(x, y) = 0$ no implica que $(x, y) = (0, 0)$, pues basta elegir $(0, y)$ con $y \neq 0$.*

Definición 1.17. *Si una seminorma p en X es tal que*

4. $p(x) = 0 \implies x = 0$.

entonces es una norma en X.

Aquí hay ejemplos varios, podemos señalar como norma a la norma euclideana.

Definición 1.18. *Si A es una norma (o una seminorma) p en A tal que*

5. $p(xy) \leq p(x)p(y) \quad (x, y \in A)$.

entonces es una norma-álgebra (o seminorma-álgebra), respectivamente.

Ejemplo 1.5. *Sea el conjunto de todas las matrices 2×2 con entradas reales, denotado por $M_2(\mathbb{R})$. Con la norma definida como $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|$, donde $A = (a_{ij})$. Esta norma satisface el axioma (5) pues para todas las matrices $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, encontramos que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.*

Considerando una norma sobre un espacio vectorial X ahora definiremos un tipo de álgebra que nos permitirá definir el álgebra de Banach.

Definición 1.19. *Sea A un álgebra y p una norma-álgebra en A. Una álgebra normada es un par (A, p).*

Definición 1.20. *Sea (A, p) una álgebra normada, tal que, el espacio vectorial normado A con la norma p es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge. Entonces, dicho par (A, p) es ana álgebra normada completa o álgebra de Banach.*

Ejemplo 1.6. *A continuación se menciona algunas álgebras de Banach*

1. ***Números Complejos*** $\mathbb{C}$***:*** *El conjunto de los números complejos* $\mathbb{C}$ *es un espacio vectorial sobre sí mismo (o sobre* $\mathbb{R}$*). La norma en* $\mathbb{C}$ *se define mediante el módulo:*

$$\|z\| = |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

Propiedades:

- ***Espacio de Banach:*** $\mathbb{C}$ *es completo respecto a esta norma.*
- ***Multiplicación Continua:*** *La multiplicación de números complejos es continua respecto a la norma. Para* $z, w \in \mathbb{C}$*:*

$$\|zw\| = |zw| = |z||w| = \|z\|\|w\|$$

- ***Álgebra Unitaria:*** *El elemento identidad es* 1*.*

$\mathbb{C}$ *es un álgebra de Banach unitaria y conmutativa.*

2. ***Funciones Continuas*** $C([a,b])$***:***

$C([a,b])$ *es el espacio de todas las funciones continuas* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$*. Consideramos la norma del supremo:*

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Operaciones:

- ***Multiplicación Puntual:*** *Para* $f, g \in C([a,b])$*:*

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

- ***Continuidad de la Multiplicación:*** *La multiplicación es continua respecto a la norma:*

$$\|f \cdot g\| \leq \|f\|\|g\|$$

Propiedades:

- ***Espacio de Banach:*** $C([a,b])$ *es completo respecto a la norma del supremo.*
- ***Álgebra Unitaria:*** *El elemento identidad es la función constante* 1*, es decir,* $1(x) = 1$ *para todo* $x \in [a,b]$*.*

$C([a,b])$ *es un álgebra de Banach unitaria y conmutativa.*

3. ***Matrices Cuadradas*** $n \times n$***:***

$M_n(\mathbb{C})$ *es el conjunto de todas las matrices complejas de tamaño* $n \times n$*. Consideramos la norma para una matriz* A*, definida por:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

donde $\|x\|$ *es la norma euclidiana en* $\mathbb{C}^n$*.* ***Operaciones:***

- ***Multiplicación Matricial:*** *La multiplicación usual de matrices.*

Propiedades:

- ***Espacio de Banach:*** $M_n(\mathbb{C})$ *es completo porque es de dimensión finita.*
- ***Continuidad de la Multiplicación:*** *Se cumple:*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

- ***Álgebra Unitaria:*** *El elemento identidad es la matriz identidad* I_n.

$M_n(\mathbb{C})$ *es un álgebra de Banach unitaria y no conmutativa (para* $n > 1$*).*

4. ***Espacio de Secuencias*** ℓ^1***:***

   ℓ^1 *es el espacio de todas las secuencias complejas* $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *tales que:*

$$\|a\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Operación de Multiplicación:

- ***Convolución Discreta:*** *Para* $a, b \in \ell^1$*:*

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Propiedades:

- ***Cerradura:*** $a * b \in \ell^1$.
- ***Continuidad de la Multiplicación:*** *Se cumple:*

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$$

- ***Espacio de Banach:*** ℓ^1 *es completo respecto a* $\|\cdot\|_1$.
- ***Álgebra sin Unidad:*** *No existe una secuencia en* ℓ^1 *que actúe como elemento identidad.*

ℓ^1 *con la convolución discreta es un álgebra de Banach no unitaria y conmutativa.*

5. ***Álgebra de Wiener:*** *El álgebra de Wiener* $A(\mathbb{T})$ *consiste en funciones* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *cuyas series de Fourier convergen absolutamente:*

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad con \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

donde $\mathbb{T}$ *es el círculo unitario (*$0 \leq \theta < 2\pi$*). La norma se define por:*

$$\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$$

Con la ***Multiplicación Puntual:*** $(fg)(\theta) = f(\theta)g(\theta)$

Propiedades:

- ***Cerradura:*** *El producto de dos funciones en* $A(\mathbb{T})$ *permanece en* $A(\mathbb{T})$.
- ***Continuidad de la Multiplicación:*** *Se cumple:*

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$$

- ***Espacio de Banach:*** $A(\mathbb{T})$ *es completo respecto a* $\|\cdot\|$.
- ***Álgebra Unitaria:*** *El elemento identidad es la función constante* 1.

$A(\mathbb{T})$ *es un álgebra de Banach unitaria y conmutativa.*

Observación 15. *Tener en cuenta que un álgebra normada es simplemente un álgebra* A *con una norma dada.*

Si a un álgebra normada A se considera la distancia o métrica definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in A). \tag{1.2}$$

Entonces, tenemos un espacio métrico. Además, podemos considerar la topología con la métrica definida en 1.2 de esa forma podemos considerar que en una álgebra normada se genera un espacio topológico.

Definición 1.21. *Sean* X, Y *álgebras normadas. Un isomorfismo topológico de* X *sobre* Y *es un isomorfismo de* X *sobre* Y *que también es un homeomorfismo del espacio topológico* X *sobre el espacio topológico* Y.

Definición 1.22. *Un isomorfismo isométrico de* X *sobre* Y *es un isomorfismo* T *del álgebra* X *sobre el álgebra* Y *que también es una aplicación isométrica del espacio métrico* X *sobre el espacio métrico* Y. *Esta última condición establece que*

$$\|Ta - Tb\| = \|a - b\| \quad (a, b \in X). \tag{1.3}$$

Observación 16. *Como* T, *es lineal entonces podemos comprobar que la relación 1.3 es equivalente a*

$$\|Ta\| = \|a\| \quad (a \in X).$$

Definición 1.23. *Sean espacios vectoriales normados* X, Y. *Entonces un isomorfismo lineal isométrico de* X *sobre* Y *es una aplicación lineal* T *de* X *sobre* Y *tal que*

$$\|Tx\| = \|x\| \quad (x \in X).$$

Ejemplo 1.7. *Sean los espacios vectoriales normados* X, Y *en un mismo campo escalar* $\mathbb{F}$, *y denotamos por* $BL(X, Y)$ *el subespacio vectorial de* $L(X, Y)$, *que consiste en todas las aplicaciones lineales acotadas, es decir, continuas de* X *en* Y. *De aquí,* $BL(X, Y)$ *se considera un espacio vectorial normado con la norma dada por*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Observación 17. *El espacio dual* $BL(X, \mathbb{F})$ *de* X *se denota por* X', *y sus elementos se llaman funcionales lineales continuos.*

Observación 18. *El conjunto de lasa aplicaciones lineales acotadas de* X *en* X *se denotará por* $BL(X)$.

Observación 19. *Cuando Y es completo resulta que $BL(X,Y)$ es completo, y también el espacio dual X' de X también es completo.*

Proposición 1.1. *Sea X una álgebra normada. Entonces existe un isomorfismo isométrico de X en una subálgebra densa de una álgebra de Banach Y. Y es única mediante un isomorfismo isométrico.*

Demostración. Tenemos que existe isomorfismo lineal isométrico T de X en un subespacio lineal denso de un espacio de Banach Y. Consideremos $a, b \in Y$, entonces existen sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ en X tales que $a = \lim_{n\to\infty} T(a_n)$, $b = \lim_{n\to\infty} T(b_n)$. Como T es una isometría, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de Cauchy en X. Tenemos por propiedad de norma que

$$\|a_p b_p - a_q b_q\| \leq \|a_p\|\|a_p - b_q\| + \|a_p - b_q\|\|b_q\|,$$

$\{a_n b_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X, $\{T(a_n b_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y, y $\lim_{n\to\infty} T(a_n b_n) = c \in B$. Además, c es independiente de la elección de las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, y por tanto, podemos considera que $ab = c$ sea la definición de la multiplicación en B. □

Considerando esta Proposición 1.1 podemos definir:

Definición 1.24. *Sean X e Y álgebras. Un completamiento de una álgebra normada X es una álgebra de Banach Y con la condición de que existe un isomorfismo lineal isométrico de X en un subespacio denso de Y.*

Observación 20. *Al considerar el completamiento Y de una álgebra normada X, podemos identificar X con su imagen en Y bajo el isomorfismo isométrico. Así, consideraremos a Y como una álgebra de Banach que tiene a X como una subálgebra densa.*

Ejemplo 1.8. *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces, el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X en X, $BL(X)$, con la composición como producto es una álgebra normada, y es una álgebra de Banach si X es completo. Los elementos de $BL(X)$ se llaman operadores lineales acotados en X, y la norma en $BL(X)$ se llama la norma del operador.*

1.2.3 Inversas en álgebras de Banach

Una de las razones primordiales para estudiar las álgebras de Banach en lugar de álgebras y anillos más generales es la simplicidad en el comportamiento de los inversos dentro de las álgebras de Banach.

Definición 1.25. *Sea A un álgebra y e un elemento en este tal que*

- $e \neq 0$ *y*
- $ex = xe = x \quad (x \in A)$

Entonces e es un elemento unidad o identidad de A

Definición 1.26. *A es un álgebra con unidad si existe un elemento unidad.*

Además, en una álgebra el elemento unidad es único. Basta considerara que, si e_1 y e_2 son elementos unidad, podemos comprobar que estas son iguales, $e_1 = e_1e_2 = e_2$. En ese sentido, para un álgebra A con unidad se denotará a ese único elemento por $\mathbf{1}$.

Definición 1.27. *Sea A un álgebra y $a \in A$. Definimos:*

- *El inverso izquierdo de a siendo un elemento b de A con la condición de que $ba = \mathbf{1}$*
- *El inverso derecho de a siendo un elemento b de A con la condiciónde que $ab = \mathbf{1}$*
- *Un inverso de a es un elemento de A que es a la vez un inverso izquierdo de a y un inverso derecho de a.*

Observación 21. *Un elemento de A para el cual existe un inverso se dice que es invertible o regular; el resto de elementos de A son elementos singulares.*

Observación 22. *Si existe un inverso izquierdo b y un inverso derecho c de $a \in A$ entonces como se muestra a continuación,*

$$b = b\mathbf{1} = bac = \mathbf{1}c = c.$$

esto quiere decir que a es invertible.

Observación 23. *Considerando la Observación 22 concluimos que un elemento invertible tiene un solo inverso y vamos a denotar por a^{-1}.*

Observación 24. *El conjunto de los elementos invertibles de A se representará por* $\mathrm{Inv}(A)$ *y el conjunto de elementos singulares por* $\mathrm{Sing}(A)$.

Definición 1.28. *Sea A un álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$. A se llama un álgebra de división si satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *A es cerrado bajo las operaciones de adición y multiplicación definidas en A.*
2. *Para todo $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, se tiene que $\lambda x \in A$.*
3. *Existe un elemento $\mathbf{1} \in A$ tal que para todo $x \in A$, se tiene $\mathbf{1}x = x\mathbf{1} = x$.*
4. *Para cada $x \in A$ con $x \neq 0$, existe un elemento $x^{-1} \in A$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$.*

Definición 1.29. *Sea A un álgebra y $H \subset A$, el conmutante de H es el subconjunto H^c de A dado por*

$$H^c = \{a \in A : ax = xa \quad (x \in H)\}.$$

Observación 25. *$(H^c)^c$ se denota por H^{cc}, y se llama el segundo conmutante de H.*

Además, vemos que H^c es una subálgebra. En particular, para un $a \in A$, $\{a\}^{cc}$ es una subálgebra conmutativa que contiene a a.

Proposición 1.2. *Sea A un álgebra y $x \in \mathrm{Inv}(A)$. Entonces x^{-1} es un elemento del segundo conmutante de $\{x\}$, $\{x\}^{cc}$.*

Demostración. Consideremos que z es un elemento del conmutante de x, $\{x\}^c$. Entonces, por la definición de la conmutante de x se tiene $xz = zx$. Como $x \in \text{Inv}(A)$ se tiene las siguientes relaciones

$$zx^{-1} = x^{-1}(xz)x^{-1} = x^{-1}(zx)x^{-1} = x^{-1}z \quad (z \in \{x\}^c).$$

□

Podemos verificar que en el conjunto $\text{Inv}(A)$ respecto a la multiplicación en A, se cumple que

$$a, b \in \text{Inv}(A) \implies ab, a^{-1} \in \text{Inv}(A).$$

Por tanto, $\text{Inv}(A)$ es un grupo invertible de elementos de A.

Proposición 1.3. *Sea A una álgebra normada con unidad. Entonces, con la topología inducida por la topología de la norma de A, la aplicación $a \mapsto a^{-1}$ es un homeomorfismo de $\text{Inv}(A)$ sobre sí mismo, y $\text{Inv}(A)$ es un grupo topológico.*

Demostración. Vamos a demostrar la continuidad de la función inversa:

Consideremos $a \in \text{Inv}(A)$. Ahora sea $b \in \text{Inv}(A)$ tal que $\|b - a\| \leq \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$. Queremos mostrar que $\|b^{-1} - a^{-1}\|$ sea pequeña cuando $\|b - a\|$ sea pequeña. Notemos que:

$$b^{-1} - a^{-1} = a^{-1}(a - b)b^{-1}.$$

Luego,

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| = \|a^{-1}(a - b)b^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|\|a - b\|\|b^{-1}\|.$$

Dado que $\|b - a\| \leq \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$, se tiene:

$$\|b^{-1}\| - \|a^{-1}\| \leq \|b^{-1} - a^{-1}\| \leq \frac{1}{2}\|b^{-1}\|,$$

$$\|b^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|,$$

lo cual implica:

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^2\|a - b\|.$$

Esto muestra que $a \mapsto a^{-1}$ es continua.

Ahora mostraremos que $a \mapsto a^{-1}$ es una aplicación abierta: Sea U un conjunto abierto en $\text{Inv}(A)$. Queremos mostrar que U^{-1} (el conjunto de inversos de los elementos de U) también es abierto en $\text{Inv}(A)$.

Dado $a \in U$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset U$ (donde $B(a, \delta)$ es la bola abierta de radio δ centrada en a).

Queremos encontrar $\epsilon > 0$ tal que si $\|x^{-1} - a^{-1}\| < \epsilon$, entonces $x \in U$. Utilizando el razonamiento anterior, dado que a y b son invertibles y $\|b - a\| \leq \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$, entonces b^{-1} está cerca de a^{-1}.

Sea $\epsilon = \dfrac{\delta}{2\|a^{-1}\|^2}$. Si $\|x^{-1} - a^{-1}\| < \epsilon$, entonces

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| < \frac{\delta}{2\|a^{-1}\|^2}.$$

Esto implica

$$\|a - x\| \leq 2\|a^{-1}\|^2\|x^{-1} - a^{-1}\| < \delta,$$

así $x \in B(a,\delta) \subset U$. Por lo tanto, U^{-1} es abierto, y la aplicación $a \mapsto a^{-1}$ es abierta.

Inv(A) *es un grupo topológico:*

Para mostrar que Inv(A) es un grupo topológico, debemos probar que la multiplicación y la inversión son continuas.

Veamos la continuidad de la multiplicación en Inv(A):

Sea $a, b \in \text{Inv}(A)$. Consideremos la norma de A entonces:

$$\|ab - xy\| = \|(a-x)(b-y) + x(b-y) + (a-x)y\|.$$

Utilizando la desigualdad triangular y propiedades de la norma, tenemos:

$$\|ab - xy\| \leq \|a-x\|\|b-y\| + \|x\|\|b-y\| + \|a-x\|\|y\|.$$

Esto muestra que la multiplicación es continua.

La continuidad de la inversión ya se demostró anteriormente.

Por lo tanto, Inv(A) con la topología inducida por la norma es un grupo topológico. □

Definición 1.30. *Sea A una álgebra normada y $x \in A$. El radio espectral de x, se define por*

$$r(x) = \inf\left\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}} : \textit{para } n \in \mathbb{N}, \ldots\right\}$$

Proposición 1.4. *Sea A una álgebra normada y $x \in A$. Entonces*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demostración. Sea $\rho = r(x)$ y $\epsilon > 0$, y elijamos k tal que

$$\|x^k\|^{\frac{1}{k}} < \rho + \epsilon.$$

Por el algoritmo de la división cualquier entero positivo n puede representarse de forma única como: $n = p_n k + q_n$ con p_n, q_n enteros no negativos y $q_n \leq k-1$. Dado que $\frac{1}{n}q_n$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$, obtenemos el siguinete límite

$$\frac{1}{n}p(n)k \to 1$$

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^k\|^{\frac{1}{n}p(n)}\|x\|^{\frac{1}{n}q(n)}$$

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^k\|^{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n}kp(n)}\|x\|^{\frac{1}{n}q(n)}$$

De aquí cuando $n \to \infty$

$$\|x^k\|^{\frac{1}{k}} < \rho + \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} < \rho + \epsilon \quad \text{para} \quad n \quad \text{suficientemente grande.}$$

Además, $\rho \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ para todo n. □

Teorema 1.1. *Sea A una álgebra de Banach con unidad, $x \in A$, y además $r(x) < 1$. Entonces $1 - x$ es invertible, y*

$$(1-x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k.$$

Demostración. Dado un μ tal que $r(x) < \mu < 1$. Entonces, para n suficientemente grande por la Proposición 1.4, tenemos $\|x^n\| < \mu^n$, luego la serie

$$\|1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|$$

converge. Puesto que A es un espacio de Banach, se obtiene que la serie

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

converge. Digamos que la suma es $s \in A$.

Sea

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$$

Entonces $s_n \to s$ y $\|a^n\| \to 0$ a medida que $n \to \infty$, y por otro lado

$$(1-x)s_n = s_n(1-x) = 1 - x^n.$$

Luego, considerando la continuidad de la multiplicación, tenemos

$$(1-x)s = s(1-x) = 1$$

□

Corolario 1.1. *Sea una álgebra de Banach A con su elemento unidad. Entonces todo elemento x de A con $\|1 - x\| < 1$ es invertible.*

Demostración. Por definición del radio espectral tenemos que $r(1-x) \leq \|1-x\| < 1$, y por lo tanto por el Teorema 1.1 se concluye que $x = 1 - (1-x)$ es invertible. □

Teorema 1.2. *Sea un álgebra de Banach A con su elemento unidad. Entonces* $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto de A.*

Demostración. Sea $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Dado $x \in A$ con $\|x\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, tenemos

$$a - x = a(1 - a^{-1}x),$$

y

$$\|a^{-1}x\| \leq \|a^{-1}\|\|x\| < 1.$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.1, $1 - a^{-1}x \in \mathrm{Inv}(A)$, y como $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo, $a(1 - a^{-1}x) = a - x \in \mathrm{Inv}(A)$. Así, $\mathrm{Inv}(A)$ contiene la bola abierta con centro en a y radio $\|a^{-1}\|^{-1}$. □

Definición 1.31. *Se dice que $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada unitaria si A tiene un elemento unidad y $\|1\| = 1$.*

1.2.4 El espectro en una álgebra compleja normada

En esta sección consideramos que el conjunto de los elementos invertibles de A se representará por $\mathrm{Inv}(A)$ y el conjunto de elementos singulares por $\mathrm{Sing}(A)$. Además, A es un álgebra.

Definición 1.32. *Definimos el espectro de $x \in A$, con A una álgebra sobre $\mathbb{C}$, como el conjunto $\mathrm{Sp}(x)$ de números complejos que depende de la naturaleza de A. Tenemos:*

1. *En caso de que A tiene un elemento unidad, el espectro de x se define como: $\mathrm{Sp}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - x \in \mathrm{Sing}(A)\}$;*
2. *En caso de que A no tiene un elemento unidad,*

$$\mathrm{Sp}(x) = \{0\} \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{\lambda}x \in \mathrm{Sing}(A)\right\}.$$

Teorema 1.3. *Sea A un un álgebra normada compleja y x un elemento de esta álgebra. Entonces, existe un número complejo λ en $\mathrm{Sp}(x)$ tal que $|\lambda| \geq r(x)$.*

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, pp. 22–23) □

Teorema 1.4. *Sea A un álgebra de Banach compleja y x un elemnto en esta álgebra. Entonces $\mathrm{Sp}(x)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$ y*

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(x)\} = r(x) \tag{1.4}$$

Demostración. Supongamos que A tiene un elemento unidad. Sea

$$|\lambda| > r(x)$$

Entonces $r(\lambda^{-1}x) < 1$, y por lo tanto, por el Teorema 1.1, $1 - \lambda^{-1}x$ es invertible, es decir, $\lambda \notin \mathrm{Sp}(x)$.

Esto prueba que $\mathrm{Sp}(x)$ es un subconjunto del disco $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \mathrm{r}(x)\}$, y junto con el Teorema 1.3, esto prueba la relación 1.4.

Probaremos que $\mathrm{Sp}(x)$ es cerrado. Al considera la aplicación continua $w \mapsto w - x$, observamos que, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(x)$ es la imagen inversa respecto del conjunto abierto $\mathrm{Inv}(A)$, ver el Teorema 1.2. Entonces, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(x)$ es abierto. Por tanto, $\mathrm{Sp}(x)$ es cerrado. □

1.2.5 Ideales y módulos

Para desarrollar algunas propiedades elementales de ideales, consideremos un álgebra A que puede tener o no elemento unidad.

Definición 1.33. *Dado $\alpha \in A$ y los subconjuntos I, J de A, definimos*

- $IJ = \{xy : x \in I, y \in J\}$
- $I(1-\alpha) = \{x - x\alpha : x \in I\}$
- $(1-\alpha)I = \{x - \alpha x : x \in I\}$

Definición 1.34. *Un ideal izquierdo de A es un subespacio vectorial J de A tal que $AJ \subseteq J$.*

Definición 1.35. *Un elemento z de A es una unidad modular derecha para un subespacio vectorial V de A si $A(1-z) \subseteq V$.*

Definición 1.36. *Un ideal izquierdo modular es un ideal izquierdo para el cual existe una unidad modular derecha.*

Definición 1.37. *Un ideal izquierdo J de A es propio si $J \neq A$*

Definición 1.38. *Un ideal es maximal si es propio y no está contenido en ningún otro ideal izquierdo propio.*

Definición 1.39. *Un ideal maximal modular si es propio y modular y no está contenido en ningún otro ideal izquierdo modular propio.*

Definición 1.40. *Un ideal derecho de A es un subespacio vectorial J de A tal que $JA \subseteq J$.*

Definición 1.41. *Un elemento z de A es una unidad modular izquierdo para un subespacio vectorial V de A si $(1-z)A \subseteq V$.*

Definición 1.42. *Un ideal derecho modular es un ideal derecho para el cual existe una unidad modular izquierdo.*

Definición 1.43. *Un ideal bilateral, o bi-ideal, es un subespacio vectorial que es tanto un ideal izquierdo como un ideal derecho.*

Definición 1.44. *Un ideal izquierdo de A es un subálgebra de A, y si A tiene un elemento unidad $\mathbf{1}$, entonces $\mathbf{1}$ es una unidad modular derecha para cada subespacio vectorial de A.*

Mencionaremos algunas propiedades relevantes

Proposición 1.5. *Sea A una álgebra, tenemos:*

1. *Sea V un subespacio vectorial y z una unidad modular derecha para V, entonces z es una unidad modular derecha para cualquier subespacio E que contenga a V.*
2. *Sea I un ideal izquierdo propio y z una unidad modular derecha para I, entonces $z \notin I$.*
3. *Si I es un ideal izquierdo modular propio de A, entonces I está contenido en un ideal izquierdo maximal.*
4. *Los ideales izquierdos maximales modulares son ideales izquierdos maximales.*
5. *Si A tiene un elemento unidad, todo ideal izquierdo propio está contenido en un ideal izquierdo maximal.*

Demostración. 1. Supongamos que z es una unidad modular derecha para el subespacio lineal V. Es decir,

$$A(1-z) \subseteq V$$

Ahora, queremos demostrar que z es una unidad modular derecha para cualquier subespacio E que contenga a V. Es decir, queremos demostrar que:

$$A(1-z) \subseteq E$$

Dado que $V \subseteq E$, cualquier elemento de V también es un elemento de E. Por lo tanto, tenemos que:

$$A(1-z) \subseteq V \subseteq E.$$

Esto demuestra que z es una unidad modular derecha para F.

2. Supongamos que z es una unidad modular derecha para un ideal izquierdo propio I. Entonces

$$A(1-z) \subseteq I.$$

Por demostrar que $z \notin I$. Supongamos lo contrario, que $z \in I$. Afirmamos que $I = A$. En efecto, sea $a \in A$ observamos que

$$a = (a - az) + az.$$

Dado que z es una unidad modular dereccha para J, entonces $a(1-z) = a - az \in I$. Por otro lado, como I es un ideal izquierdo tenemos que $az \in I$. Luego $a \in I$, lo que implica que $I = A$, esto contradice el hecho de que I es un ideal propio. Por lo tanto, $z \notin I$.

3. Sea I un ideal izquierdo modular propio con unidad modular derecha z. Consideremos el conjunto Γ de todos los ideales izquierdos propios K de A que contienen a I. Ordenamos Γ por inclusión. Por la definición de I como ideal izquierdo modular, tenemos que z es una unidad modular derecha para I. Por la Proposición 1.5 ítem 1, z es una unidad modular derecha para cualquier ideal $K \in \Gamma$. Esto implica que $z \notin K$ para cada $K \in \Gamma$, como se demuestra en la Proposición 1.5 ítem 2. Consideremos una cadena $\{K_j\}_{j\in J}$ en Γ. La unión $\bigcup_{j\in J} K_i$ es un ideal izquierdo de A:

   - Cada K_j es un ideal izquierdo.
   - La unión de una cadena de ideales izquierdos es un ideal izquierdo.
   - La unión $\bigcup_{j\in J} K_j$ es propia porque si $\bigcup_{j\in J} K_j = A$, entonces algún K_j sería igual a A, lo cual es una contradicción ya que K_j es propio.

   La unión $\bigcup_{j\in J} K_j$ es una cota superior de la cadena $\{K_j\}_{j\in J}$ en Γ. Dado que cada cadena en Γ tiene una cota superior en Γ, por el Lema de Zorn, Γ tiene un elemento maximal. Sea M este elemento maximal. Demostraremos que M es un ideal izquierdo maximal de A. Supongamos que existe un ideal izquierdo N de A tal que $M \subset N$. Como M es maximal en Γ, N no puede ser un ideal propio de A. Por lo tanto, $N = A$. Pero esto contradice que $M \neq A$, ya que M es propio. Por lo tanto, M es un ideal izquierdo maximal de A y $I \subseteq M$.

4. Supongamos, por el contrario, que J es un ideal izquierdo modular máximo pero no un ideal izquierdo máximo. Esto implica que existe un ideal izquierdo K de A tal que $J \subset K$ y $K \neq A$. Dado que J es modular, existe una unidad modular derecha u tal que $A(1-u) \subseteq J$. Consideremos el ideal izquierdo K que contiene a J. Como J es modular y $J \subset K$, la propiedad de modularidad se hereda, es decir, K también es modular con la misma unidad modular derecha u. Esto se debe a que $A(1-u) \subseteq J \subseteq K$. Pero esto contradice la definición de J como modular máximo, ya que si K es un ideal propio modular que contiene a J, entonces J no sería modular máximo. Por lo tanto, nuestra suposición de que J no es un ideal izquierdo máximo debe ser incorrecta. Así, J no puede estar contenido en ningún otro ideal propio, lo que implica que J es un ideal izquierdo máximo.

5. Sea Γ el conjunto de todos los ideales izquierdos propios de A. Ordenamos Γ por inclusión. Consideremos una cadena $\{I_j\}_{j\in J}$ en Γ. La unión $\bigcup_{j\in J} I_j$ es un ideal izquierdo de A:

   - Cada I_j es un ideal izquierdo.
   - La unión de una cadena de ideales izquierdos es un ideal izquierdo.
   - La unión $\bigcup_{j\in J} I_j$ es propia porque si $\bigcup_{j\in J} I_j = A$, entonces algún I_j sería igual a A, lo cual es una contradicción ya que I_j es propio.

   La unión $\bigcup_{j\in J} I_j$ es una cota superior de la cadena $\{I_j\}_{j\in J}$ en Γ. Dado que cada cadena en Γ tiene una cota superior en Γ, por el Lema de Zorn, Γ tiene un elemento maximal. Sea M este elemento maximal. Demostraremos que M es un ideal izquierdo maximal de A. Supongamos que existe un ideal izquierdo N de A tal que $M \subset N$. Como M es maximal en Γ, N no puede ser un ideal propio de A. Por lo tanto, $N = A$. Pero esto contradice que $M \neq A$, ya que M es propio. Por lo tanto, M es un ideal izquierdo maximal de A y todo ideal izquierdo propio está contenido en un ideal izquierdo maximal.

□

Teorema 1.5. *Sea I un ideal izquierdo modular propio de A, con A una álgebra de Banach, y sea z una unidad modular derecha para I. Entonces*

1. $\|z - x\| \geq 1$ $(x \in I)$;
2. *La cerradura de I es un ideal izquierdo modular propio de A.*

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, p. 46) □

Corolario 1.2. *Cada ideal izquierdo modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.*

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, p. 46) □

Corolario 1.3. *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Entonces cada ideal izquierdo propio de A está contenido en un ideal izquierdo maximal de A, y cada ideal izquierdo maximal de A es cerrado.*

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, p. 47) □

Observación 26. *Un bi-ideal I es modular, si es modular tanto como ideal izquierdo y como ideal derecho. En efecto, sea p una unidad modular derecha y q una unidad modular izquierda. Entonces $q-qp, p-qp \in I$ y así $p-q \in I$. Por lo tanto, $x-px = x-qx+(p-q)x \in I$ para todo $x \in A$ y así p también es una unidad modular izquierda.*

Consideramos la definición de A-módulos como concepto auxiliar conveniente para el álgebra de Banach que son fundamentales en las teoría de representaciones de álgebras de Banach no conmutativas.

Definición 1.45. *Sea A un álgebra y M un espacio vectorial, ambos sobre el campo $\mathbb{F}$. Se dice que M es un A-módulo izquierdo si una aplicación $(x,m) \to xm$ de $A \times M$ en M, llamada multiplicación del módulo, está especificada y satisface los siguientes axiomas:*

1. *para cada $x \in A$ fijo, la aplicación $m \to xm$ es lineal en M;*
2. *para cada $m \in M$ fijo, la aplicación $x \to xm$ es lineal en A;*
3. *$x_1(x_2m) = (x_1x_2)m \quad (x_1, x_2 \in A, m \in M)$.*

Definición 1.46. *Sea A un álgebra y M un espacio lineal, ambos sobre el campo $\mathbb{F}$. Se dice que M es un A-módulo derecho si una aplicación $(x,m) \to mx$ de $A \times M$ en M, llamada multiplicación del módulo, está especificada y satisface los siguientes axiomas:*

1. *para cada $x \in A$ fijo, la aplicación $m \to mx$ es lineal en M;*
2. *para cada $m \in M$ fijo, la aplicación $x \to mx$ es lineal en A;*
3. *$mx_1(x_2) = m(x_1x_2) \quad (x_1, x_2 \in A, m \in M)$.*

Definición 1.47. *M es un A-bimódulo si y solo si es tanto un A-módulo izquierdo como un A-módulo derecho y las multiplicaciones del módulo están relacionadas por el axioma:*

$$x(my) = (xm)y \quad (x, y \in A, m \in M).$$

Definición 1.48. *Un A-módulo izquierdo M está vinculado a la unidad si y solo si A tiene un elemento unidad e y $em = m$ (para cada$m \in M$).*

Definición 1.49. *Un A-módulo derecho M está vinculado a la unidad si y solo si A tiene un elemento unidad e y $me = m$ (para cada$m \in M$).*

Definición 1.50. *Un A-bimódulo está vinculado a la unidad si y solo si tiene un elemento unidad e y $em = me = m$ ($m \in M$).*

Definición 1.51. *Sean A un álgebra normada, y M un espacio vectorial normado, ambos sobre el campo $\mathbb{F}$. Se dice que M es un A-módulo izquierdo normado si M es un A-módulo izquierdo y existe un $K \geq 0$ tal que*

$$\|am\| \leq K\|a\|\|m\|$$

Para cada $a \in A$ y $m \in M$.

Definición 1.52. *Sean A un álgebra normada, y M un espacio vectorial normado, ambos sobre el campo $\mathbb{F}$. Se dice que M es un A-módulo derecho normado si M es un A-módulo derecho y existe un $K \geq 0$ tal que*

$$\|ma\| \leq K\|a\|\|m\|$$

Para cada $a \in A$ y $m \in M$.

Definición 1.53. *Un A-bimódulo normado es un A-bimódulo que es tanto un A-módulo izquierdo normado como un A-módulo derecho normado.*

Definición 1.54. *Un A-módulo izquierdo normado es un A-módulo izquierdo de Banach si es completo como espacio vectorial normado.*

Definición 1.55. *Un A-módulo derecho normado es un A-módulo derecho de Banach si es completo como espacio vectorial normado.*

Definición 1.56. *Un A-bimódulo normado es un A-bimódulo derecho de Banach si es completo como espacio vectorial normado.*

Ejemplo 1.9. *Consideramos un A-módulo izquierdo normado V con espacio dual V'. Entonces V', con la multiplicación del módulo dada por*

$$(fa)(x) = f(ax) \quad (a \in A, f \in V', x \in V)$$

es un A-módulo derecho de Banach llamado el A-módulo derecho dual de Banach V'.

Ejemplo 1.10. *Sea E un A-módulo izquierdo normado y M un A-submódulo cerrado de E, consideremos $F = E/M$ y además sea π la aplicación canónica de E en F. Entonces F es un A-módulo izquierdo normado con la multiplicación del módulo dada por*

$$ay = \pi(ax) \quad (x \in E, y \in F, a \in A).$$

Se tiene que, π es un homomorfismo de módulos, esto es:

$$a\pi(x) = \pi(ax) \quad (a \in A, x \in E).$$

F' es un A-módulo derecho de Banach y π^* es un monomorfismo de módulos de F' en E'. Es decir:

$$\pi^*(\phi a) = (\pi^*\phi)a$$

Para cada $\phi \in F', a \in A$.

1.2.6 Ideales minimales y $soc(A)$

Sea A un álgebra definiremos algunos conceptos relacionado a ideales izquierdos, pero también serán validos para ideales derechos, con los cambios respectivos.

Definición 1.57. *Un idempotente es un elemento $x \in A$ tal que $x^2 = x$*

Definición 1.58. *Sea $J \neq \{0\}$ un ideal izquierdo, es un ideal izquierdo mínimo de A si y solo si tiene como únicos ideales izquierdos a $\{0\}$ y J.*

Definición 1.59. *Sea $e \in A$ un idempotente no nulo, es un idempotente mínimal, si, y solo si eAe es un álgebra de división.*

Ejemplo 1.11. *Sea $M_n(\mathbb{R})$ el álgebra de todas las matrices $n \times n$ cuyos elementos son números reales $\mathbb{R}$.*

- *Los ideales izquierdos mínimos en $M_n(\mathbb{R})$ son generados por las matrices elementales E_{ij} (matrices con un 1 en la posición (i, j) y ceros en todas las demás posiciones).*
- *Para un vector columna e_i que es el i-ésimo vector de la base estándar de $\mathbb{R}^n$, el ideal izquierdo mínimo generado por e_i es $M_n(\mathbb{R})e_i$, que consiste en todas las matrices cuya i-ésima columna puede ser cualquier vector, mientras que las otras columnas son cero.*

Ejemplo 1.12. *Sea $\mathbb{R}[x]$ el álgebra de polinomios con coeficientes reales.*

- *En este caso, los únicos ideales izquierdos son ideales principales generados por un polinomio $p(x)$. Un ideal izquierdo mínimo sería el ideal generado por un polinomio irreducible.*
- *Por ejemplo, en $\mathbb{R}[x]$, el ideal generado por un polinomio lineal $(ax+b)$ es mínimo porque los únicos ideales que contiene son $\{0\}$ y el propio ideal $(ax + b)$.*

Definición 1.60. *Un álgebra A es semi-primo si $\{0\}$ es el único bi-ideal J de A con $J^2 = \{0\}$.*

Definición 1.61. *Sea J un subconjunto de A, el aniquilador izquierdo de J es el conjunto $\phi_I(J)$ y el aniquilador derecho de J es el conjunto $\phi_D(J)$, definidos, respectivamente, por*

$$\phi_I(J) = \{x \in A : xJ = \{0\}\}, \quad \phi_I(J) = \{x \in A : Jx = \{0\}\}.$$

Proposición 1.6. *Sea A semi-primo. Entonces*

a) I es un ideal izquierdo mínimo de A si y solo si $I = Ae$ donde e es un idempotente mínimo en A;

b) D es un ideal derecho mínimo de A si y solo si $D = eA$ donde e es un idempotente mínimo en A.

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, p. 155) □

Definición 1.62. *Sea A un álgebra que tiene ideales izquierdos mínimos, entonces el ideal izquierdo más pequeño que los contiene a todos se llama el socle izquierdo de A.*

Definición 1.63. *Sea A un álgebra que tiene ideales derechos mínimos, entonces el ideal derecho más pequeño que los contiene a todos se llama el socle derecho de A.*

Definición 1.64. *Sea A un álgebra que contiene tanto ideales izquierdos mínimos como ideales derechos mínimos, además el socle izquierdo es igual a el socle derecho, entonces exite el socle de A y se denota por $soc(A)$.*

Lema 1.1. *Sea A un álgebra que tiene ideales izquierdos mínimos, entonces el socle izquierdo es un bi-ideal.*

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973) □

Proposición 1.7. *Sea A semi-primo y que tiene ideales izquierdos mínimos. Entonces el socle de A existe.*

Demostración. Como A es un semi-primo, entonces tiene ideales derechos mínimos. Por otro lado, el socle izquierdo de A es un bi-ideal (ver el Lema 1.1) que contiene todos los idempotentes mínimos. También, el socle izquierdo contiene el socle derecho. □

1.2.7 Lápices lineales

Definición 1.65. *Sea A una álgebra de Banach unital sobre el campo complejo $\mathbb{C}$. Un **lápiz lineal** en A está definido como una expresión de la forma:*

$$\lambda x + y \tag{1.5}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es un escalar, además $x, y \in A$ son elementos de la álgebra.

La notación 1.5 es especialmente útil para estudiar la dependencia lineal de elementos y las condiciones de invertibilidad en la álgebra.

Definición 1.66. *Un lápiz lineal $\lambda x + y$ es **invertible** en A si existe un elemento $z \in A$ tal que:*

$$(\lambda x + y)z = z(\lambda x + y) = 1_A,$$

donde 1_A es el elemento identidad de A.

El análisis espectral de lápices lineales es fundamental para entender su comportamiento invertible. El **espectro** de un elemento $x \in A$, denotado por $\mathrm{Sp}(x)$, se define como el conjunto de escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda 1_A - x$ no es invertible en A. Para un lápiz lineal $\lambda x + y$, el estudio de su espectro implica analizar cómo varía el espectro de $\lambda x + y$ en función de λ.

Observación 27. *Sea A una álgebra de Banach semisimple con socle esencial. Entonces, para cualquier $x, y \in A$, el espectro de $\lambda x + y$ depende analíticamente de λ, y las variaciones espectrales están controladas por la estructura socle de A.*

En el contexto de transformaciones preservadoras de invertibilidad, los lápices lineales proporcionan una herramienta para caracterizar las condiciones bajo las cuales una aplicaión $\varphi : A \to B$ preserva la invertibilidad de combinaciones lineales de elementos. Específicamente, se considera la preservación bidireccional de la invertibilidad de lápices lineales, es decir, que:

$$\lambda x + y \in \mathrm{Inv}(A) \iff \lambda\varphi(x) + \varphi(y) \in \mathrm{Inv}(B),$$

para todo $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $\mathrm{Inv}(A)$ denota el grupo de elementos invertibles en A.

2 Isomorfismos de Jordan

2.1 Aplicaciones lineales

En esta sección, mencionaremos conceptos y propiedades de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales X y Y sobre un mismo campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Cuando el espacio de llegada es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entonces a estas aplicaciones se les conoce como funcionales lineales.

Definición 2.1. *Sean X e Y conjuntos y $f : X \to Y$ una aplicación de X en Y. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces definimos la imagen $f(A)$ de A como*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

Mientras que la imagen inversa o preimagen $f^{-1}(B)$ de B como:

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}.$$

Definición 2.2. *Una aplicación $\Phi : X \to Y$ es lineal si*

$$\Phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$$

para todos x y y en X y todos los escalares α y β.

Mostraremos algunas propiedades de las aplicaciones lineales $\Phi : X \to Y$; se asume que $A \subset X$ y $B \subset Y$:

a) $\Phi(0) = 0$.

b) Si A es un subespacio, lo mismo es cierto para $\Phi(A)$.

c) Si B es un subespacio, lo mismo es cierto para $\Phi^{-1}(B)$.

d) En particular, el conjunto $\Phi^{-1}(\{0\}) = \{a \in X : \Phi(a) = 0\} = \mathcal{N}(\Phi)$ es un subespacio de X, llamado el espacio nulo de Φ.

Una propiedad importante en las aplicaciones lineales es la continuidad, que a continuación mostramos en el teorema.

Teorema 2.1. *Sean V e U espacios vectoriales topológicos.*

i) Si $\Phi : V \to U$ es lineal y continua en 0, entonces Φ es continua.

ii) Φ es uniformemente continua, es decir: a cada vecindad B_2 de 0 en U le corresponde una vecindad B_1 de 0 en V tal que

$$y - x \in B_1 \implies \Phi(y) - \Phi(x) \in B_2.$$

Demostración. (Ver Rudin 1991, p. 15) □

Teorema 2.2. *Sea Φ un funcional lineal sobre un espacio vectorial topológico X. Suponga que $\Phi(a) \neq 0$ para algún $a \in X$. Entonces son equivalentes:*

a) Φ es continua.

b) El núcleo $\mathcal{N}(\Phi)$ es cerrado.

c) $\mathcal{N}(\Phi)$ no es denso en X.

d) Φ está acotado en alguna vecindad V de 0.

Demostración. (Ver Rudin 1991, p. 15) □

2.2 Funcional de Jordan y radical de Jacobson

Sea A un álgebra de Banach compleja

Definición 2.3. *Sea Λ una funcional lineal no nula en A es multiplicativa sobre A si y solo si*

$$\Lambda(xy) = \Lambda(x)\Lambda(y) \quad (x, y \in A),$$

Observación 28. *En otras palabra la Definición 2.3 indica que Λ es un homomorfismo no nulo de A en $\mathbb{C}$.*

Observación 29. *A este tipo de fucnionales de la Definición 2.3 se les llama funcionales lineales multiplicativas.*

Ejemplo 2.1. *Sea A el espacio de funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$. Para un punto fijo $c \in [a, b]$, el funcional de evaluación φ_c definido por $\varphi_c(f) = f(c)$ para cada $f \in A$ es un funcional lineal multiplicativo. Aquí, $\varphi_c(fg) = (fg)(c) = f(c)g(c) = \varphi_c(f)\varphi_c(g)$.*

Proposición 2.1. *Sea Λ un funcional lineal multiplicativa sobre A. Entonces Λ es continuo y $\|\Lambda\| \leq 1$. Si A tiene un elemento unidad, $\Lambda(1) = 1$.*

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, pp. 77–78) □

Observación 30. *Por la Proposición 2.1 podemos concluir que para una álgebra de Banach compleja unitaria, se tiene que todo funcional lineal multiplicativo Λ cumple $\Lambda(1) = 1 = \|\Lambda\|$.*

Proposición 2.2. *Los bi-ideales modulares máximos de A de codimensión 1 son los núcleos de los funcionales lineales multiplicativos en A.*

Demostración. □

Teorema 2.3. *Sea A una álgebra conmutativa y Λ una funcional lineal multiplicativa arbitraria. Entonces $\mathcal{N}(\Lambda)$ el ideal modular máximo de A.*

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, p. 79) □

Observación 31. *Sea A un álgebra con un elemento unidad y sea Λ un funcional lineal multiplicativa en A. Entonces $a - \Lambda(a)\mathbf{1} \in \mathcal{N}(\Lambda) \subseteq Sing(A)$ y por lo tanto*

$$\Lambda(a) \in Sp(a) \quad (a \in A)$$

Definición 2.4. *Un funcional de Jordan en A es un funcional lineal no nulo Λ en A tal que $\Lambda(a^2) = \Lambda(a)^2$ ($a \in A$).*

Proposición 2.3. *Sea Λ una funcional de Jordan en A entonces es multiplicativa.*

Demostración. Por la definición de la funcional de Jordan, tenemos:

$$\Lambda((x+y)^2) = (\Lambda(x+y))^2$$

entonces, simplificando a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\Lambda(xy + yx) = 2\Lambda(x)\Lambda(y) \quad (x, y \in A) \tag{2.1}$$

en el caso de que A es conmutativa el resultado es inmediato.

En el otro caso, partimos por lo contrario, digamos que Λ no es multiplicativo entonces existen $x, y \in A$ tales que $\Lambda(x) = 0$, $\Lambda(xy) = 1$. Entonces, por la linealidad y la relación 2.1 tenemos $\Lambda(yx) = -1$. Sea $z = yxy$. Entonces

$$0 = 2\Lambda(x)\Lambda(z) = \Lambda(xz + zx) = \Lambda(xz) + \Lambda(zx)$$
$$0 = \Lambda((xy)^2) + \Lambda((yx)^2) = 1 + 1$$

Esto resulta una contradicción. Por tanto, Λ es multiplicativa □

Teorema 2.4. *Sea A un álgebra con unidad y sea Λ un funcional lineal en A. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $\Lambda(1) = 1$, $\mathcal{N}(\Lambda) \subseteq \mathrm{Sing}(A)$;

b) $\Lambda(x) \in \mathrm{Sp}(x)$ *($x \in A$);*

c) Λ *es multiplicativo.*

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, p. 80) □

Sea A una álgebra de Banach compleja conmutativa y A' el espacio dual de A cuyos elementos son funcionales lineales continuas de A en $\mathbb{F}$.

Observación 32. *Notaciones*

i) El conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos en A se denotará por Φ_A

ii) El funcional idénticamente cero en A por Λ_∞

Observación 33. *Los conjuntos Φ_A y Φ_A^∞ son subconjuntos del espacio dual A'.*

Definición 2.5. *El subconjunto* $\mathrm{rad}(A)$ *de A dado por*

$$rad(A) = \bigcap \{\ker(\Lambda) : \Lambda \in \Phi_A\}.$$

Se le conoce como radical de A.

Definición 2.6. *A es semi-simple si* $\operatorname{rad}(A) = \{0\}$.

Observación 34. *Un álgebra semi-simple es semi-primo.*

Para una álgebra normada A se tiene la Defínción 1.30 del radio espectral para un $x \in A$ y está dado por

$$r(x) = \inf\left\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}} : \text{para } n \in \mathbb{N}, \ldots\right\}$$

Los siguientes teoremas relacionan los conceptos de radio espectral y radical de un álgebra normada A.

Teorema 2.5. *El radical de A es el conjunto* $\{a \in A : r(a) = 0\}$

Demostración. (Ver Teorema 5 y Corolario 7 Bonsall and Duncan 1973, p. 83) □

Teorema 2.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) A es semi-simple;

b) Φ_A separa los puntos de A;

c) el radio espectral es una norma en A.

Demostración. (Ver Teorema 5 y Corolario 7 Bonsall and Duncan 1973, p. 83) □

Consideremos que A es un álgebra sobre $\mathbb{F}$ y veremos una forma más general de definir la radical de Jacobson.

Definición 2.7. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Una representación de A en X es un homomorfismo de A en $L(X)$.*

Definición 2.8. *Sea π una representación de A en X, entonces el A-módulo izquierdo correspondiente es el espacio lineal X con la multiplicación del módulo dada por*

$$ax = \pi(a)x \quad (a \in A, x \in X) \tag{2.2}$$

Definición 2.9. *Sea un A-módulo izquierdo X, la representación correspondiente de A en X es el homomorfismo π de A en $L(X)$ definido por la igualdad 2.2*

Observación 35. *El núcleo de una representación π se da en términos del A-módulo izquierdo correspondiente X por*

$$\mathcal{N}(\pi) = \{a \in A : aX = \{0\}\}.$$

Definición 2.10. *El radical (de Jacobson) de A es la intersección de los núcleos de todas las representaciones irreducibles de A. Se denota por* $\operatorname{rad}(A)$.

Definición 2.11. *Si no existen representaciones irreductibles de A entonces* $\operatorname{rad}(A) = A$.

Definición 2.12. *Se dice que A es semi-simple si* $\operatorname{rad}(A) = \{0\}$

Definición 2.13. *Es un álgebra radical si* $\operatorname{rad}(A) = A$

Proposición 2.4. *Sea A un álgebra de Banach sobre $\mathbb{F}$. Entonces tenemos los siguientes resultados*

(i) Si $q \in rad(A)$, entonces $r(q) = r(aq) = r(qa) = 0$ $(a \in A)$.

(ii) Si $r(aq) = 0$ $(a \in A)$, o si $r(qa) = 0$ $(a \in A)$, entonces $q \in rad(A)$.

Demostración. (Ver Bonsall and Duncan 1973, p. 126) □

2.3 Traza y determinante en un álgebra de Banach

Sea A un álgebra de Banach compleja con elemento identidad 1 y grupo invertible Inv(A). Además, consideremos que A es semisimple. Para $x \in A$, denotamos por

1. El espectro de $x \in A$ por $\mathrm{Sp}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \mathrm{Inv(A)}\}$
2. El radio espetral de $x \in A$ por $\mathrm{r}(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(x)\}$ y
3. El espectro no nulo de $x \in A$ por $\mathrm{Sp}'(x) = \mathrm{Sp}(x) - \{0\}$
4. Denotemos por $\#$ el número de elementos de un conjunto.

Teorema 2.7. *Sea $m \in \mathbb{Z}$ no negativo y $x \in A$ y que es un entero. Tenemos las siguientes equivalencias:*

i) Para todo $x \in A$ se tiene $\#(\mathrm{Sp}(xa) - \{0\}) \leq m$

ii) Para todo $z \in A$, invertible $\#(\{t \in \mathbb{C} : 0 \in \mathrm{Sp}(z + ta)\}) \leq m$

iii) Paro todo $z \in A$ y todo subconjunto F de $\mathbb{C}$ con $m + 1$ elementos no nulos, se tiene $\bigcap_{t \in F} \mathrm{Sp}(z + tx) \subseteq \mathrm{Sp}(z)$

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, pp. 116–117) □

Teorema 2.8. *Supongamos que A es semi-simple. Sean $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, y K cualquier subconjunto de $\mathbb{C}$ con al menos $n + 1$ elementos no nulos. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) $\mathrm{rank}(x) = n$.

b) $\sup_{z \in \mathrm{Inv}(A)} \#\{s \in K : z + tx \notin \mathrm{Inv}(A)\} = n$.

Demostración. (Ver Askes, Brits, and Schultz 2022, pp. 6–7) □

En Aupetit and Mouton (1996) se menciona que, el *socle* de A, denotado por $\mathrm{Soc}(A)$, es la suma de todos los ideales izquierdos mínimos, o ideales derechos mínimos, de A, siempre que existan, en otros casos es cero. El *socle* de A es un ideal bilateral de A y que todos sus elementos son algebraicos, por lo tanto tienen espectro finito. Además, la función espectral es continua en cada elemento del *socle*. Además, este *socle* es generado por las *proyecciones minimales* de A, es decir, los elementos $p = p^2$ tales que $aAp = \mathbb{C}p$, si existen. Si A es de dimensión finita, coincide con su *socle*. Si A es de dimensión infinita, entonces el *socle* es un ideal bilateral propio, en consecuencia $0 \in \mathrm{Sp}(a)$ para todo $a \in \mathrm{Soc}(A)$.

Por otro lado, para cada entero no negativo m, sea

$$\mathcal{F}_m = \{a \in A : \#(\mathrm{Sp}(xa) \setminus \{0\}) \leq m \text{ para todo } x \in A\},$$

Este conjunto está bien determinado como se señala en Aupetit and Mouton (1996) ya que para cada elemento de $\mathrm{Soc}(A)$ se tiene estas propiedades equivalentes del teorema 2.7 para algún entero m. Por otro lado, si $a \in \mathrm{Soc}(A)$, entonces los conjuntos $A_k = \{x \in A : \#(\mathrm{Sp}(xa) \setminus \{0\}) \leq k\}$ son cerrados por la continuidad del espectro

en el *socle*. El teorema de Baire, garantiza la existencia de un entero mínimo m y un conjunto abierto V en A tal que $\#(\mathrm{Sp}(xa) - \{0\}) \leq m$ para $x \in V$. Aplicando el teorema 3.3 observamos que a tiene la propiedad (i) del Teorema 2.7. De aquí se tiene que, si $a \in A$ y $\mathrm{Sp}(xa)$ es finito para todo $x \in A$, entonces existe un entero m tal que $\#(\mathrm{Sp}(xa) \setminus \{0\}) \leq m$ para todo $x \in A$. De esta forma está determinado $\mathcal{F}_m$.

Definición 2.14. *Definimos el rango de un elemento x de A como:*

$$\mathrm{rank}(x) = \sup_{z \in A} \#(\mathrm{Sp}(zx) \setminus \{0\}) \leq \infty.$$

Observación 36. *Se tiene* $\mathrm{rank}(x) = \sup_{z \in A} \#(\mathrm{Sp}(xz) \setminus \{0\})$.

Observación 37. *Si no existe un menor entero m tal que $x \in \mathcal{F}_m$, entonces, el rango es infinito.*

Proposición 2.5. *Las siguientes son propiedades del rango:*

a) $\#(\mathrm{Sp}(a) \setminus \{0\}) \leq \mathrm{rank}(a)$ *para* $a \in A$,

b) $\mathrm{rank}(xa) \leq \mathrm{rank}(a)$ *y* $\mathrm{rank}(ax) \leq \mathrm{rank}(a)$ *para* $a, x \in A$*; además,* $\mathrm{rank}(ua) = \mathrm{rank}(au) = \mathrm{rank}(a)$ *si u es invertible,*

c) Sea p una proyección de A, entonces p tiene rango uno si y solo si p es mínimal,

d) El rango es semicontinuo inferiormente en $\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_m$,

e) sea Φ un automorfismo de A, entonces $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(\Phi(x))$ *para todo $x \in A$.*

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, pp. 117–118) □

Si $a \in A$ tiene rango finito, el conjunto

$$E(a) = \{x \in A : \#(\mathrm{Sp}(xa) \setminus \{0\}) = \mathrm{rank}(a)\}$$

no es vacío por la definición de rango.

Si $x \in E(a)$, es claro por la Proposición 2.5, propiedades (a) y (b), que $\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(ax) = \#(\mathrm{Sp}(xa) \setminus \{0\})$. Esto motiva a definir *elementos de rango finito máximo*, es decir, elementos $a \in A$ tales que $\mathrm{rank}(a) = \#(\mathrm{Sp}(a) \setminus \{0\})$.

Definición 2.15. *Si A es semi-simple, decimos que $a \in Soc(A)$ es un elemento de rango finito máximo si y solo si $\mathbf{1} \in E(a)$.*

Teorema 2.9. *Sea $a \in A$ con rango finito, entonces $E(a)$ es un subconjunto abierto denso de A.*

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, pp. 118–119) □

Vamos a considerar en adelante a Γ como un contorno regular orientado que no interseca a $\mathrm{Sp}(a)$ y Δ_0, Δ_1 su interior y su exterior, respectivamente.

Teorema 2.10. *Sea $a \in A$ de rango finito. Por semicontinuidad superior del espectro, existe una bola U en A, centrada en $\mathbf{1}$, tal que $\mathrm{Sp}(xa) \cap \Gamma = \emptyset$ para $x \in U$. Entonces, para cada $x, y \in U \cap E(a)$ se tienen:*

$$\#(\mathrm{Sp}(xa) \cap \Delta_0) = \#(\mathrm{Sp}(ya) \cap \Delta_0)$$

$$\#(\mathrm{Sp}(xa) \cap \Delta_1) = \#(\mathrm{Sp}(ya) \cap \Delta_1)$$

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, pp. 119–118) □

Definición 2.16. *Definimos la multiplicidad de a asociada con Γ como:*

$$m(\Gamma, a) = \#(\mathrm{Sp}(xa) \cap \Delta_0)$$

Observación 38. *La multiplicidad de a es independiente de Γ si los puntos espectrales correspondientes de a en Δ_0 y Δ_1 no cambian.*

Definición 2.17. *Si a está aislado en $\mathrm{Sp}(a)$ definimos $m(a, a)$, la multiplicidad de a en a, por $m(\Gamma, a)$ donde Γ es un pequeño círculo centrado en a y aislando a del resto del espectro.*

Observación 39. *Podemos observar que $m(a, a) \geq 1$.*

Observación 40.

$$m(\Gamma, a) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Sp}(a) \cap \Delta_0} m(\alpha, a).$$

Observación 41. *Si a es un elemento de rango finito máximo, entonces tenemos que $m(\alpha, a) = 1$ para cada $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathrm{Sp}(a)$.*

Si tomamos para Γ un contorno que rodea todo el espectro de a, obtenemos

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{Sp}\, a} m(\alpha, a) = \begin{cases} 1 + \mathrm{rank}(a) & \text{si } 0 \in \mathrm{Sp}\, a, \\ \mathrm{rank}(a) & \text{si } 0 \notin \mathrm{Sp}\, a. \end{cases} \tag{2.3}$$

Definición 2.18. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ y Γ una pequeña curva que aísla α del resto del espectro de a. La proyección de Riesz se define como*

$$p(\alpha, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - a)^{-1}\, d\lambda. \tag{2.4}$$

Observación 42. *La multiplicidad de un elemento de rango finito a en $\alpha \neq 0$ es igual al rango de la proyección de Riesz asociada con a y α.*

Observación 43. *$p(\alpha, a)$ es cero si $\alpha \notin \mathrm{Sp}\, a$ y los $p(\alpha, a)$ correspondientes a diferentes α tienen producto cero y su suma es uno.*

Observación 44. *Si $(\lambda - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} a(\lambda - a)^{-1}$ entonces*

$$p(\alpha, a) = \frac{a}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} (\lambda - a)^{-1}\, d\lambda. \tag{2.5}$$

Teorema 2.11. *Sea $a \in A$ de rango finito, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ elementos distintos no nulos de su espectro y p la proyección de Riesz asociada con x y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, es decir, $p(\lambda_1, x) + \ldots + p(\lambda_n, x)$, entonces*

$$\operatorname{rank}(p) = m(\lambda_1, x) + \ldots + m(\lambda_n, x).$$

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, pp. 121–122) □

Corolario 2.1. *Sea $p \neq 0, 1$ una proyección de rango finito. Entonces $m(0, p) = 1$ y* $\operatorname{rank}(p) = m(1, p)$.

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, p. 122) □

Teorema 2.12 (Teorema de diagonalización)**.** *Sea $a \in A$ un elemento no nulo de rango finito máximo. Denotemos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus valores espectrales distintos no nulos. Entonces existen n proyecciones mínimas ortogonales $p_1, \ldots, p_n$ tales que $a = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n$.*

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, p. 122) □

Corolario 2.2. *El sócle coincide con el conjunto de elementos de rango finito.*

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, pp. 122–123) □

Según Aupetit and Mouton (1996), este corolario muestra que, si A es semisimple, entonces $\operatorname{soc}(A)$ es igual al conjunto de todos los elementos de rango finito de A; además, $\operatorname{soc}(A) = \operatorname{span}(\mathcal{F}_1(A))$. Es decir, todo elemento del socle es igual a una suma de elementos de rango uno. Donde,

$$\mathcal{F}_1 = \{a \in A : \#(\operatorname{Sp}(xa) \setminus \{0\}) \leq 1 \text{ para todo } x \in A\},$$

Corolario 2.3. *Si $a \in \operatorname{Soc} A$, entonces existe $x \in \operatorname{Soc} A$ tal que $a = axa$.*

Demostración. (Ver Aupetit and Mouton 1996, p. 123) □

Si $a \in \operatorname{Soc} A$, definimos la *traza* de a por

$$\operatorname{Tr}(a) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} \lambda m(\lambda, a), \tag{2.6}$$

y el *determinante* de $1 + a$ por

$$\operatorname{Det}(1 + a) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} (1 + \lambda)^{m(\lambda, a)}. \tag{2.7}$$

Donde $m(\lambda, a)$ es la multiplicidad de a en λ. Además, si $a \in \mathcal{F}_1(A)$, entonces

$$\operatorname{tr}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Sp}(a) = \{0\}, \\ \lambda & \text{si } \operatorname{Sp}(a) \setminus \{0\} = \{\lambda\}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Podemos observar que si $\operatorname{Det}(1 + a) \neq 0$ equivale a que $1 + a$ sea invertible.
También, la traza tiene las siguientes propiedades:

i) Tr es una funcional lineal en $\operatorname{Soc} A$, $\operatorname{Tr}(x+y) = \operatorname{Tr}(x)+\operatorname{Tr}(y)$.

ii) $\operatorname{Tr}(ab) = \operatorname{Tr}(ba)$ para cada $a \in \operatorname{Soc} A$ y $b \in A$.

iii) Para cualquier $a \in A$, si $\operatorname{Tr}(ax) = 0$ para cada $x \in \operatorname{Soc} A$, entonces $a \operatorname{Soc} A = \{0\}$. Además, si $a \in \operatorname{Soc} A$, entonces $a = 0$.

iv) Si f es una función analítica de un dominio D de $\mathbb{C}$ en $\operatorname{Soc} A$, entonces $\lambda \mapsto \operatorname{Tr}(f(\lambda))$ es holomorfa en D.

De las propiedades mencionadas, si $a \in \operatorname{soc}(A)$ es un elemento de rango finito máximo, entonces

$$\operatorname{tr}(a) = \sum_{\lambda \in \sigma'(a)} \lambda. \tag{2.9}$$

En general sabemos que la traza no es continua, pero, se deduce de (Ver Teorema 3.3, Aupetit and Mouton 1996, p. 131) que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo, la traza es continua en el conjunto de elementos con rango a lo sumo n.

Teorema 2.13. *Si $a \in A$ y para todo $x \in \operatorname{Soc} A$ $\operatorname{Tr}(ax) = 0$ entonces $a \operatorname{Soc} A = 0$. Si además $a \in \operatorname{Soc} A$, entonces $a = 0$.*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{Soc} A$ y $z \in A$. Entonces $\operatorname{Tr}((axz)^k) = 0$ para $k \geq 1$, así que por el (Teorema 3.5, Aupetit and Mouton 1996, p. 134) tenemos $\operatorname{r}((axz)^k) = 0$ para todo $z \in A$. Por lo tanto, $ax \in \operatorname{rad} A = \{0\}$, es decir, $a \operatorname{Soc} A = \{0\}$.

Ahora si consideramos que $a \in \operatorname{Soc} A$ entonces $(az) \operatorname{Soc} A = 0$, por lo tanto $(az)^2 = 0$. Luego tenemos $a \in \operatorname{rad} A = \{0\}$. Así que $a = 0$. □

2.4 Isomorfismo de Jordan

En esta sección vamos a considerar que A y B son álgebras con elementos identidad. En adelante, cuando nos referimos por un álgebra de Banach estamos frente a un álgebra de Banach compleja con un elemento identidad o unitario. Además, $\varphi : A \to B$ será una aplicación lineal. Además, se llama un homomorfismo de Jordan si $\varphi(ab + ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a)$ para todos a y $b \in A$, o equivalentemente, $\varphi(a^2) = (\varphi(a))^2$ para todo $a \in A$. Un homomorfismo de Jordan biyectivo se llama un isomorfismo de Jordan.

Definición 2.19. *La aplicación linea φ es unitario si aplica el elemento identidad de A en el elemento identidad de B, y decimos que φ preserva la invertibilidad si $\varphi(x)$ es invertible en B siempre que x sea invertible en A.*

Observación 45. *El socle del álgebra A será denotado por $soc(A)$.*

Definición 2.20. *Un ideal I de A se dice que es esencial si tiene una intersección no nula con cada ideal no nulo de A*

Observación 46. *En álgebras semi-simples un ideal I es esencial si para $a \in \mathcal{A}$, $a \cdot I = 0$, implica que $a = 0$.*

Observación 47. *Todo ideal izquierdo mínimo de A es de la forma Ae donde e es un idempotente mínimo, es decir, $e^2 = e \neq 0$ y $eAe = \mathbb{C}e$.*

Observación 48. *Un ideal derecho mínimo de A es de la forma eA.*

Definición 2.21. *La suma de todos los ideales izquierdos mínimos de A se denomina el* socle *de A y coincide con la suma de todos los ideales derechos mínimos de A.*

Definición 2.22. *Si A no tiene ideales unilaterales mínimos, entonces definimos $soc(A) = 0$*

Definición 2.23. *Un elemento no nulo $u \in A$ tiene rango uno si u pertenece a algún ideal izquierdo mínimo de A*

Observación 49. *Un elemento no nulo $u \in A$ tiene rango uno si, $u = ue$ para algún idempotente mínimo e en A)*

Observación 50. *Denotamos por $\mathcal{F}_1(A)$ al conjunto de todos los elementos de rango uno en A*

Observación 51. *$u \in \mathcal{F}_1(A)$ si y solo si $u \neq 0$ y u se encuentra en algún ideal derecho mínimo de A*

Observación 52. *Sea $u \neq 0$ y que u esté en algún ideal derecho mínimo de A, si y solo si $uAu = \mathbb{C}u \neq 0$*

Observación 53. *$u \in \mathcal{F}_1(A)$ si y solo si $u \neq 0$ y $|\operatorname{Sp}(uz) \setminus \{0\}| \leq 1$ para todo $z \in A$, o, equivalentemente, $|\operatorname{Sp}(zu) \setminus \{0\}| \leq 1$ para todo $z \in A$*

Lema 2.1. *Sea $\varphi : A \to B$ una aplicación lineal, entonces $\varphi(\mathcal{F}_1(A)) \subseteq \mathcal{F}_1(B)$*

Demostración. (Ver Brešar, Fošner, and Šemrl 2003, pp. 3834–3835) □

Dado $u \in \mathcal{F}_1(A)$, existe $\tau(u) \in \mathbb{C}$ tal que $u^2 = \tau(u)u$. Claramente $\tau(u) \in \operatorname{Sp}(u)$, y además, $\tau(u) = 0$ o $\tau(u)$ es el único punto no nulo en $\operatorname{Sp}(u)$. Dado que $\tau(u)$ es único, podemos considerarlo como una función de $\mathcal{F}_1(A)$ a $\mathbb{C}$, y lo extendemos definiendo $\tau(0) = 0$. Usando $uAu = \mathbb{C}u$, $u \in \mathcal{F}_1(A)$, y considerando $(xu)^2$ y $(ux)^2$, se deduce fácilmente que $\tau(xu)u = xu = \tau(x)u$ para cualquier $x \in A$. Además, afirmamos que $\tau(x_1u + x_2u) = \tau(x_1u) + \tau(x_2u)$ para todo $x_1, x_2 \in A$ y $u \in \mathcal{F}_1(A)$. En efecto, basta considerar $(x_1u + x_2u)^2 = x_1ux_1u + x_1ux_2u + x_2ux_1u + x_2ux_2u$ y aplicando $xu = \tau(x)u$ obtenemos

$$(\tau(x_1u + x_2u) - \tau(x_1u) - \tau(x_2u))(x_1u + x_2u) = 0,$$

y de aquí tenemos la afirmación.

Además, se comprueba que $\tau(\lambda u) = \lambda\tau(u)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $u \in \mathcal{F}_1(A)$.

Por lo tanto, la restricción de τ a cualquier ideal izquierdo mínimo Au es un funcional lineal. Además, de $u^2 = \tau(u)u$, $u \in \mathcal{F}_1(A)$, concluimos que $|\tau(u)| \leq \|u\|$, por lo que τ está acotada en Au.

Lema 2.2. *Sea τ una funcional lineal de $\mathcal{F}_1(A)$ a $\mathbb{C}$ entonces $\tau(xu) = \tau(\phi(x)\phi(u))$ y $\tau(x^2u) = \tau(\phi(x)^2\phi(u))$ para todo $x \in A$ y $u \in \mathcal{F}_1(A)$*

Demostración. (Ver Brešar, Fošner, and Šemrl 2003, pp. 3835–3836) □

Teorema 2.14. *Sean A y B álgebras de Banach semi-simples y sea $\varphi : A \to B$ un operador lineal unitario biyectivo que preserva la invertibilidad. Entonces*

$$\varphi^{-1}(\varphi(a^2) - \varphi(a)^2) \cdot soc(A) = 0 \text{ para todo } a \in A.$$

Demostración. Sea $x \in A$ y sea $u \in \mathcal{F}_1(A)$. De la primera identidad en el Lema 2.2 vemos que $\tau(x^2u) = \tau(\phi(x^2)\phi(u))$ y de la segunda vemos que $\tau(x^2u) = \tau(\phi(x)^2\phi(u))$. Comparando, obtenemos $\tau((\phi(x^2) - \phi(x)^2)\phi(u)) = 0$. Sea $x_0 = \phi^{-1}(\phi(x^2) - \phi(x)^2)$, y observemos que $\tau(x_0u) = \tau(\phi(x_0)\phi(u)) = 0$ para todo $u \in \mathcal{F}_1(A)$. Pero esto implica que $x_0u = 0$ para todo $u \in \mathcal{F}_1(A)$. De hecho, si x_0u_0 no fuera cero para algún $u_0 \in \mathcal{F}_1(A)$, entonces, por la semi-simplicidad de A, habría un $x \in A$ tal que $\mathrm{Sp}(x_0u_0 \cdot x) \neq \{0\}$, lo que significa que $\tau(x_0 \cdot u_0x) \neq 0$, una contradicción. En consecuencia, $x_0 \cdot \mathrm{soc}(A) = 0$. □

Corolario 2.4. *Si $soc(A)$ es un ideal esencial de A, entonces φ es un isomorfismo de Jordan.*

Demostración. El resultado es inmediato por el Teorema 2.14 y la Observación 46. □

Según Sourour (1996) mostramos un teorema que trae un resultado importante para caracterizar aplicaciones lineales, biyectivas que preservan la invertibilidad entre las álgebras $L(X)$ y $L(Y)$. Donde $L(X)$ denota los operadores lineales continuos sobre espacios de Banach.

Teorema 2.15. *Sean X e Y espacios de Banach sobre el campo complejo y sea φ una aplicación lineal unital biyectiva de $\mathcal{L}(X)$ sobre $\mathcal{L}(Y)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) φ preserva la invertibilidad.

(b) φ es un isomorfismo de Jordan.

(c) φ es un isomorfismo o un anti-isomorfismo.

(d) O bien

- *(i) Y es isomórfico a X y $\varphi(T) = A^{-1}TA$ para todo $T \in \mathcal{L}(X)$, donde A es un isomorfismo de Y a X; o*
- *(ii) Y es isomórfico a X' y $\varphi(T) = B^{-1}T^*B$ para todo $T \in \mathcal{L}(X)$, donde B es un isomorfismo de Y a X'.*

Demostración. (Ver Sourour 1996) □

Corolario 2.5. *Una aplicación lineal biyectiva $\varphi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(Y)$ preserva la invertibilidad si y solo si $\varphi(T) = ATB$ para todo $T \in \mathcal{L}(X)$ o $\varphi(T) = CT^*D$ para todo $T \in \mathcal{L}(X)$, donde $A : X \to Y$, $B : Y \to X$, $C : X' \to Y$ y $D : Y \to X'$ son operadores invertibles acotados.*

Demostración. (Ver Sourour 1996) □

3 Aplicaciones e invertibilidad

En esta sección vamos a demostrar que bajo ciertas condiciones, las aplicaciones sobreyectivas $\varphi, \psi : A \to B$ entre álgebras de Banach complejas unitales A y B, donde A es semisimple y su socle es esencial deben coincidir y estar relacionadas con un isomorfismo de Jordan, modulados por un elemento invertible en B. A continuación algunos proposiciones, teoremas, corolarios y lemas previos para luego desarrollar la demostración del Teorema 3.9.

3.1 Álgebra de Banach semi-simple, invertibilidad y radical de Jacobson

En esta sección consideramos que A es un álgebra de Banach semi-simple e Inv(A) el grupo de los elementos invertibles de A. Consideremos algunos elementos preliminares

Teorema 3.1. *Sea A un anillo con unidad 1. Entonces, los siguientes conjuntos son idénticos:*

i) la intersección de todos los ideales izquierdos máximos de A,

ii) la intersección de todos los ideales derechos máximos de A,

iii) el conjunto de x tal que $1 - zx$ es invertible en A, para todo $z \in A$,

iv) el conjunto de x tal que $1 - xz$ es invertible en A, para todo $z \in A$.

Demostración. (Ver Aupetit 1991, p. 34) □

Teorema 3.2. *Sea f una función analítica de un dominio D de $\mathbb{C}$ en un álgebra de Banach A. Supongamos que $Spf(\lambda) = \{0, \alpha(\lambda)\}$ para todo $\lambda \in D$, donde α es una función de D en $\mathbb{C}$. Entonces, α es holomorfa en D.*

Demostración. (Ver Aupetit 1991, p. 58) □

Corolario 3.1. *Sea f una función analítica de un dominio D de $\mathbb{C}$ en un álgebra de Banach A. Supongamos que $Spf(\lambda) = \{\alpha(\lambda)\}$ para todo $\lambda \in D$, donde α es una función de D en $\mathbb{C}$. Entonces, α es holomorfa en D.*

Demostración. (Ver Aupetit 1991, p. 58) □

Teorema 3.3. *Sea f una función analítica de un dominio D de $\mathbb{C}$ en un álgebra de Banach A. Entonces, o bien el conjunto de $\lambda \in D$ tal que $Spf(\lambda)$ es finito es un conjunto de Borel con capacidad cero, o existen un entero $n \geq 1$ y un subconjunto cerrado y discreto E de D tal que $\#Spf(\lambda) = n$ para $\lambda \in D \setminus E$ y $\#Spf(\lambda) < n$ para $\lambda \in E$. En ese caso, los n puntos de $Spf(\lambda)$ son funciones holomorfas locales en $D \setminus E$.*

Demostración. (Ver Aupetit 1991, p. 63) □

Teorema 3.4. *Sea f una función analítica de un dominio D de $\mathbb{C}$ en un álgebra de Banach A. Entonces, $\lambda \mapsto \rho(f(\lambda))$ y $\lambda \mapsto \log \rho(f(\lambda))$ son subarmónicas en D.*

Demostración. (Ver Aupetit 1991, pp. 52–53) □

Teorema 3.5. *Sea f una función analítica de $\mathbb{C}$ en un álgebra de Banach A. Supongamos que existe un conjunto acotado C tal que $\mathrm{Sp}(f(\lambda)) \subseteq C$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\mathrm{Sp}(f(\lambda))$ es constante en $\mathbb{C}$.*

Demostración. (Ver Aupetit 1991, p. 56) □

Teorema 3.6. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) a está en el radical de Jacobson de A,

ii) $\mathrm{Sp}(a+x) = \mathrm{Sp}(x)$ para todo $x \in A$,

iii) $\rho(a+x) = 0$ para todos los elementos cuasinilpotentes x en A,

iv) $\rho(a+x) = 0$ para todos los elementos cuasinilpotentes x en un vecindario de 0 en A,

v) existe $C > 0$ tal que $\rho(x) \leq C\|x-a\|$ para todo x en un vecindario de a en A.

Demostración. (Ver Aupetit 1991, p. 95) □

Proposición 3.1. *Para cualquier $x \in A$, se sigue que*

$$x \in rad(A) \iff x + y \in Inv(A) \text{ para todo } y \in Inv(A).$$

Demostración. La implicación directa se sigue del teorema 3.1, que también implica que

$$x \in \mathrm{rad}(A) \iff \mathrm{Sp}(yx) = \{0\} \text{ para todo } y \in A.$$

Inversamente, si $y + x \in Inv(A)$ para todo $y \in Inv(A)$, entonces $\mathrm{Sp}(yx) = \{0\}$ para todo $y \in Inv(A)$. Sea $w \in A$. Entonces $\mathrm{Sp}((\lambda 1 + w)x) = \{0\}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \rho(w)$. Si ahora tomamos $f : \mathbb{C} \to A$ como la función analítica definida por $f(\lambda) = (\lambda 1 + w)x$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces por el teorema 3.3 y corolario 3.1 inferimos que $\mathrm{Sp}(f(\lambda)) = \{0\}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Tomando $\lambda = 0$ nos permite concluir que $\mathrm{Sp}(wx) = \{0\}$ para todo $w \in A$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{rad}(A)$. □

Teorema 3.7. *Sea A un álgebra de Banach semi-simple y $a, b \in A$. Entonces $a = b$ si y solo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

(i) $Sp(ax) = Sp(bx)$ para todo $x \in A$.

(ii) $Sp(a+x) = Sp(b+x)$ para todo $x \in A$.

Demostración. (Ver Braatvedt and Brits 2013, pp. 157–158) □

Proposición 3.2. *Supongamos que A es semi-simple. Para cualesquiera $a, b \in A$, si*

$$x + a \in \mathit{Inv}(A) \iff x + b \in \mathit{Inv}(A) \text{ para todo } x \in A,$$

entonces $a = b$.

Demostración. Al reemplazar x por $-\lambda 1 + x$, la hipótesis implica que

$$\mathrm{Sp}(x + a) = \mathrm{Sp}(x + b) \text{ para todo } x \in A.$$

Así, dado que A es semi-simple, podemos aplicar el teorema 3.7 para inferir que $a = b$. □

Vamos a restringir x al grupo de invertibles, Inv(A), para ello formulamos el siguiente teorema

Teorema 3.8. *Sea A semi-simple con $a, b \in A$. Supongamos que para todo $x \in \mathrm{Inv(A)}$ tenemos que $x + a \in \mathrm{Inv(A)} \iff x + b \in \mathrm{Inv(A)}$. Entonces $a = b$*

Demostración. Sea $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \mathrm{r}(x)$. Entonces $-\lambda 1 + x \in \mathrm{Inv(A)}$. Por lo tanto, la hipótesis implica que

$$\lambda 1 - (x + a) \in \mathrm{Inv(A)} \iff \lambda 1 - (x + b) \in \mathrm{Inv(A)}.$$

En consecuencia, para cualquier $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$|\lambda| > \mathrm{r}(x) \implies [\lambda \in \mathrm{Sp}(x + a) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(x + b)]\,. \tag{3.1}$$

Tomemos cualquier cuasinilpotente $q \in A$, $q \in A$ con $\mathrm{r}(q) = 0$. Afirmamos que

$$\max\{\mathrm{r}(n(b - a) + q), \mathrm{r}(nb - (n - 1)a + q)\} \leq \|b\| + \|q\| \tag{3.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Procedemos por inducción en n. Ciertamente,

$$\mathrm{r}(b + q) \leq \|b + q\| \leq \|b\| + \|q\|.$$

Además, por 3.1 con $x = -b - q$ tenemos que

$$\mathrm{r}(b - a + q) = \mathrm{r}(a - b - q) \leq \mathrm{r}(-b - q) = \mathrm{r}(b + q),$$

lo que establece el caso base. Supongamos ahora que 3.2 se cumple para $n = k$. Tomando $x = k(b - a) + q$ en 3.1 obtenemos

$$\mathrm{r}((k + 1)b - ka + q) \leq \|b\| + \|q\|.$$

Además, tomando $x = -((k + 1)b - ka + q)$ en 3.1 ahora obtenemos que

$$\mathrm{r}((k + 1)(b - a) + q) = \mathrm{r}((k + 1)(a - b) - q) \leq \|b\| + \|q\|.$$

Por inducción, esto prueba nuestra afirmación de que 3.2 se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, la hipótesis nos permite reemplazar a y b en 3.1 por λa y λb.

Además, recordemos que $q \in A$ era un elemento cuasinilpotente arbitrario, y notemos que nq es cuasinilpotente para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, concluimos que

$$\mathrm{r}(n\lambda(b-a)+nq) \leq \|\lambda b\| + \|nq\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Si dividimos 3.3 por n y luego dejamos que $n \to \infty$, obtenemos que

$$\mathrm{r}(\lambda(b-a)+q) \leq \|q\| \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C} \tag{3.4}$$

Por el teorema 3.4, se sigue que el mapeo $\lambda \mapsto \mathrm{r}(\lambda(b-a)+q)$ es subarmónico en $\mathbb{C}$. Dado que este mapeo está acotado por 3.4, es constante según el teorema 3.5. Tomando $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, obtenemos que

$$\mathrm{r}((b-a)+q) = \mathrm{r}(q) = 0.$$

Dado que lo anterior se cumple para cualquier elemento cuasinilpotente $q \in A$, ahora podemos usar la caracterización del teorema 3.6 para concluir que $b - a \in \mathrm{rad}(A) = \{0\}$. □

Proposición 3.3. *Sea A semisimple y supongamos que $\mathrm{soc}(A)$ es un ideal esencial. Si $a, b \in Inv(A)$ y*

$$x + a \in \mathrm{Inv}(A) \iff x + b \in \mathrm{Inv}(A) \text{ para todo } x \in \mathcal{F}_1(A),$$

entonces $a = b$.

Demostración. Para cualquier $x \in \mathcal{F}_1(A)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, la suposición nos da

$$1 - \alpha a^{-1}x \in \mathrm{Inv(A)} \iff 1 - \alpha b^{-1}x \in \mathrm{Inv(A)}\,.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Sp}(a^{-1}x) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(b^{-1}x) \setminus \{0\}$ para todo $x \in \mathcal{F}_1(A)$. Dado que $x \in \mathcal{F}_1(A)$, se deduce de la ecuación 2.8 que

$$\mathrm{tr}(a^{-1}x) = \mathrm{tr}(b^{-1}x) \text{ para cada } x \in \mathcal{F}_1(A).$$

Por la linealidad de la traza y el hecho de que $\mathrm{soc}(A) = \mathrm{span}(\mathcal{F}_1(A))$, concluimos que

$$\mathrm{tr}((a^{-1} - b^{-1})y) = 0 \text{ para todo } y \in \mathrm{soc}(A).$$

Por lo tanto, por el teorema 2.13, tenemos $(a^{-1} - b^{-1})\,\mathrm{soc}(A) = \{0\}$. Dado que $\mathrm{soc}(A)$ es esencial, obtenemos entonces que $a = b$ como se deseaba. □

3.2 Aplicaciones que preservan la invertibilidad de lápices lineales

En esta sección estudiaremos aplicaciones sobreyectivas $\varphi, \psi : A \to B$ que matienen la invertibilidad de lápices lineales en ambos lados, esto es:

$$\lambda x + y \in \mathrm{Inv}(A) \iff \lambda\varphi(x) + \psi(y) \in \mathrm{Inv}(B) \text{ para todos } x, y \in A \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

Lema 3.1. *Sean $\varphi, \psi : A \to B$ dos mapeos, donde A es semisimple. Si φ y ψ satisfacen la condición 3.5, entonces φ y ψ son inyectivas.*

Demostración. Consideremos $a, b \in A$ con la condición de que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Entonces

$$\varphi(a) + \psi(x) \in \mathrm{Inv}(B) \iff \varphi(b) + \psi(x) \in \mathrm{Inv}(B) \text{ para todo } x \in A.$$

Luego, por la propiedad expresada en 3.5, deducimos que

$$a + x \in \mathrm{Inv}(A) \iff b + x \in \mathrm{Inv}(A) \text{ para todo } x \in A.$$

Dado que A es semisimple, la Proposición 3.2 implica que $a = b$. De manera similar, se demuestra que $\psi(a) = \psi(b) \implies a = b$.

□

Lema 3.2. *Sean $\varphi, \psi : A \to B$ dos mapeos sobreyectivos, donde A es semisimple. Si φ y ψ satisfacen la propiedad 3.5, entonces:*

a) $\psi(\mathrm{Inv}(A)) = \mathrm{Inv}(B)$.

b) B *es semisimple.*

c) $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

d) $\varphi(\mathrm{Inv}(A)) = \mathrm{Inv}(B)$.

Demostración. a) Esto se deduce inmediatamente de la propiedad 3.5 con $\lambda = 0$ y la sobreyectividad de ψ.

b) Sea $q \in \mathrm{rad}(B)$. Dado que φ es sobreyectiva, se sigue que $q = \varphi(x)$ para algún $x \in A$. De la Proposición 3.1 y la parte a) anterior, se deduce que

$$\varphi(x) + \psi(y) \in \mathrm{Inv}(B) \text{ para cada } y \in \mathrm{Inv}(A).$$

Consecuentemente, la propiedad 3.5, tenemos

$$x + y \in \mathrm{Inv}(A) \text{ para cada } y \in \mathrm{Inv}(A).$$

Por lo tanto, si aplicamos la Proposición 3.1 una vez más, ahora podemos concluir que $x \in \mathrm{rad}(A) = \{0\}$. Esto muestra que $\mathrm{rad}(B) = \{\varphi(0)\}$, y por lo tanto, B es semi-simple.

c) De $0 \in \mathrm{rad}(B) = \{\varphi(0)\}$, se deduce fácilmente que $\varphi(0) = 0$. Para ver que $\psi(0) = 0$, notemos primero que $\mathrm{Inv}(B) \subseteq \varphi(\mathrm{Inv}(A))$. De hecho, si $y \in \mathrm{Inv}(B)$, entonces por la sobreyectividad de φ se sigue que $y = \varphi(a)$ para algún $a \in A$. Si asumimos que $a \notin \mathrm{Inv}(A)$, entonces por la propiedad 3.5 tendríamos para todo $\lambda \neq 0$ que

$$\lambda a + 0 \notin \mathrm{Inv}(A) \implies \lambda\varphi(a) + \psi(0) \notin \mathrm{Inv}(B) \implies \lambda 1 + \varphi(a)^{-1}\psi(0) \notin \mathrm{Inv}(B).$$

Sin embargo, entonces $\mathrm{Sp}(\varphi(a)^{-1}\psi(0))$ sería ilimitado, lo cual es imposible. A partir de esta contradicción concluimos que $a \in \mathrm{Inv}(A)$, y por lo tanto, $\mathrm{Inv}(B) \subseteq$

$\varphi(\mathrm{Inv}(A))$. Con esta observación, ahora podemos proceder a demostrar que $\psi(0) \in \mathrm{rad}(B)$. Para cualquier $y = \varphi(a) \in \mathrm{Inv}(B)$, tenemos que $a \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la propiedad 3.5

$$a + 0 \in \mathrm{Inv}(A) \implies \varphi(a) + \psi(0) \in \mathrm{Inv}(B).$$

Por lo tanto, $y + \psi(0) \in \mathrm{Inv}(B)$ para todo $y \in \mathrm{Inv}(B)$. Por la Proposición 3.1, tenemos que $\psi(0) \in \mathrm{rad}(B) = \{0\}$, como se deseaba.

d) Esto se deduce fácilmente de $\psi(0) = 0$, la propiedad 3.5, y la sobreyectividad de φ.

□

Lema 3.3. *Sean $\varphi, \psi : A \to B$ dos aplicaciones sobreyectivos, donde A es semisimple. Si φ y ψ cumpliendo la propiedad 3.5, entonces φ y ψ son homogéneos.*

Demostración. De la propiedad 3.5 se deduce fácilmente que

$$\varphi(\lambda x) + \psi(y) \in \mathrm{Inv}(B) \iff \lambda x + y \in \mathrm{Inv}(A) \iff \lambda\varphi(x) + \psi(y) \in \mathrm{Inv}(B)$$

para todos $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, dado que ψ es sobreyectiva y B es semi-simple por el Lema 3.2, concluimos por la Proposición 3.2 que $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ para todos $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Del Lema 3.2 recordamos que $\psi(0) = 0$. Así, si combinamos esto con la la propiedad 3.5 y usamos el hecho de que $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo multiplicativo, podemos concluir que

$$x + \lambda y \in \mathrm{Inv}(A) \iff \varphi(x) + \lambda\psi(y) \in \mathrm{Inv}(B) \text{ para todos } x, y \in A \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.6)$$

Por lo tanto, dado que φ es sobreyectiva y B es semi-simple por el Lema 3.2, el mismo argumento que antes también implica que $\psi(\lambda y) = \lambda\psi(y)$ para todos $y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

□

Lema 3.4. *Sean $\varphi, \psi : A \to B$ dos aplicaciones sobreyectivas, donde A es semi-simple. Si φ y ψ satisfacen la propiedad 3.5, entonces* $\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(\varphi(a)) = \mathrm{rank}(\psi(a))$ *para todo $a \in A$.*

Demostración. Considerando el Teorema 2.8 y el Lema 3.2 tenemos la consecuencia.

□

Lema 3.5. *Sean $\varphi, \psi : A \to B$ dos aplicaciones sobreyectivas, donde A es semisimple. Si φ y ψ cumplen la propiedad 3.5, entonces las restricciones $\varphi : \mathrm{soc}(A) \to \mathrm{soc}(B)$ y $\psi : \mathrm{soc}(A) \to \mathrm{soc}(B)$ son aplicaciones lineales biyectivos bien definidos.*

Demostración. Del Lema 3.3 se deduce que B es semisimple. Además, el Lema 3.5 dice que φ y ψ preservan el rango. Así, dado que φ y ψ son biyectivas según el Lema 3.1 y las hipótesis, podemos concluir que las restricciones son aplicaciones biyectivos bien definidos. Según el Lema 3.3, también tenemos la homogeneidad de φ y ψ. Por

lo tanto, queda por demostrar que φ y ψ son aditivas en $\mathrm{soc}(A)$. Dado que $\mathrm{soc}(A) = \mathrm{span}(\mathcal{F}_1(A))$, es suficiente mostrar que

$$\psi(x_1 + \cdots + x_n) = \psi(x_1) + \cdots + \psi(x_n) \text{ para cualquier } x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{F}_1(A),$$

y de manera similar para φ. Para este fin, fijemos cualquier $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{F}_1(A)$ y sea $x = x_1 + \cdots + x_n$. Ahora sea $u \in E(\psi(x)) \cap \mathrm{Inv}(B)$ arbitrario. Del Lema 3.2 tenemos que $\varphi(\mathrm{Inv}(A)) = \mathrm{Inv}(B)$, y así, $u = \varphi(y)^{-1}$ para algún $y \in \mathrm{Inv}(A)$. Usando la propiedad 3.5 ahora observamos que

$$\begin{aligned} \lambda 1 + y^{-1}w \in \mathrm{Inv}(A) &\iff \lambda y + w \in \mathrm{Inv}(A) \\ &\iff \lambda\varphi(y) + \psi(w) \in \mathrm{Inv}(B) \\ &\iff \lambda 1 + \varphi(y)^{-1}\psi(w) \in \mathrm{Inv}(B) \end{aligned}$$

para cualquier $w \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. En consecuencia,

$$\mathrm{Sp}(y^{-1}w) = \mathrm{Sp}(\varphi(y)^{-1}\psi(w)) \text{ para todo } w \in A.$$

Dado que $\mathrm{Sp}(y^{-1}x) = \mathrm{Sp}(\varphi(y)^{-1}\psi(x))$, se deduce de la definición de $E(\psi(x))$ y del Lema 3.4 que

$$\#(\mathrm{Sp}'(y^{-1}x)) = \#(\mathrm{Sp}'(\varphi(y)^{-1}\psi(x))) = \mathrm{rank}(\psi(x)) = \mathrm{rank}(x).$$

Dado que $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y^{-1}x)$ y $\mathrm{rank}(\psi(x)) = \mathrm{rank}(\varphi(y)^{-1}\psi(x))$, ahora podemos usar la relación 2.9 para concluir que

$$\mathrm{tr}(\varphi(y)^{-1}\psi(x)) = \mathrm{tr}(y^{-1}x). \tag{3.7}$$

Además, dado que $\mathrm{Sp}(y^{-1}x_j) = \mathrm{Sp}(\varphi(y)^{-1}\psi(x_j))$ y

$$\mathrm{rank}(y^{-1}x_j) = \mathrm{rank}(\varphi(y)^{-1}\psi(x_j)) = 1$$

para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, se deduce de 2.8 que

$$\mathrm{tr}(y^{-1}x_j) = \mathrm{tr}(\varphi(y)^{-1}\psi(x_j)) \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Así, usando la linealidad de la traza, tenemos

$$\mathrm{tr}(y^{-1}x) = \mathrm{tr}(y^{-1}x_1) + \cdots + \mathrm{tr}(y^{-1}x_n) = \mathrm{tr}(\varphi(y)^{-1}\psi(x_1)) + \cdots + \mathrm{tr}(\varphi(y)^{-1}\psi(x_n)). \tag{3.8}$$

Combinando 3.7 con 3.8 ahora nos permite concluir que

$$\mathrm{tr}(u\psi(x)) = \mathrm{tr}(u\psi(x_1)) + \cdots + \mathrm{tr}(u\psi(x_n)) \tag{3.9}$$

para todo $u \in E(\psi(x)) \cap \mathrm{Inv}(B)$. Dado que el conjunto $E(\psi(x))$ es denso en B, y la traza es continua en el conjunto de todos los elementos con rango como máximo $\max\{\mathrm{rank}(\psi(x)), 1\}$, inferimos que 3.9 se cumple para todo $u \in \mathrm{Inv}(B)$. Ahora sea $v \in B$ dado, y sea

$$b = \psi(x) - (\psi(x_1) + \cdots + \psi(x_n)).$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo con $1/|\lambda| > \rho(v)$, ahora se deduce de 3.9 (que se cumple para todo $u \in \mathrm{Inv}(B)$) que $\mathrm{tr}(1-\lambda v)^{-1}b) = 0$. Así, por la propiedad de continuidad y linealidad de la traza, tenemos

$$0 = \mathrm{tr}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j v^j b\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \,\mathrm{tr}(v^j b).$$

En consecuencia, $\mathrm{tr}(v^j b) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. En particular, $\mathrm{tr}(bv) = \mathrm{tr}(vb) = 0$ para todo $v \in \mathrm{soc}(A)$. Así, dado que $b \in \mathrm{soc}(A)$, concluimos que $b = 0$ por el Teorema 2.13. Por lo tanto,

$$\psi(x_1 + \cdots + x_n) = \psi(x_1) + \cdots + \psi(x_n),$$

y la aditividad de ψ en $\mathrm{soc}(A)$ se deduce. De manera similar, se establece la aditividad de φ en $\mathrm{soc}(A)$. □ □

Teorema 3.9. *Sean $\varphi, \psi : A \to B$ dos aplicaciones sobreyectivas, donde A es semisimple y $\mathrm{soc}(A)$ es esencial. Si φ y ψ cumple,*

$$\lambda x + y \in \mathrm{Inv}(A) \iff \lambda\varphi(x) + \psi(y) \in \mathrm{Inv}(B) \text{ para todos } x, y \in A \text{ y } \lambda \in \mathbb{C},$$

entonces existen algún $u \in \mathrm{Inv}(B)$ y un isomorfismo de Jordan $J : A \to B$ tal que

$$\varphi(x) = \psi(x) = uJ(x) \text{ para todo } x \in A.$$

Demostración. Del Lema 3.1 se deduce que $\varphi, \psi : A \to B$ son aplicaciones biyectivos. Además, B es semisimple por el Lema 3.2 Nótese ahora que $\varphi^{-1}, \psi^{-1} : B \to A$ son mapeos sobreyectivos que satisfacen

$$\lambda a + b \in \mathrm{Inv}(B) \iff \lambda\varphi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b) \in \mathrm{Inv}(A) \text{ para todos } a, b \in B \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.10)$$

pero con la ventaja añadida de que el dominio es semisimple y el codominio es semisimple con un socle esencial. Del Lema 3.5 se deduce que las restricciones $\varphi^{-1} : \mathrm{soc}(B) \to \mathrm{soc}(A)$ y $\psi^{-1} : \mathrm{soc}(B) \to \mathrm{soc}(A)$ son aplicaciones lineales bien definidos. Dado que ya sabemos que φ^{-1} y ψ^{-1} son homogéneos por el Lema 3.3, ahora procedemos a extender sistemáticamente la aditividad de φ^{-1} en $\mathrm{soc}(B)$ a todo B. En el proceso también mostramos que $\varphi^{-1} = \psi^{-1}$. Los detalles son los siguientes. Sean $u \in \mathrm{Inv}(B)$ y $a \in \mathcal{F}_1(B)$ dados. Nótese que $\varphi^{-1}(u)$ y $\varphi^{-1}(u+a) - \psi^{-1}(a)$ son ambos invertibles en A por el Lema 3.2 y 3.10 Además, para cualquier $b \in \mathcal{F}_1(B)$, utilizando **??**equa-aplibiyecinv) y la linealidad de ψ^{-1} en $\mathrm{soc}(B)$ tenemos

$$\varphi^{-1}(u) + \psi^{-1}(b) \in \mathrm{Inv}(A) \iff u + b \in \mathrm{Inv}(B) \iff (u+a) - a + b \in \mathrm{Inv}(B)$$

$$\iff \varphi^{-1}(u+a) + \psi^{-1}(-a+b) \in \mathrm{Inv}(A) \iff \varphi^{-1}(u+a) - \psi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b) \in \mathrm{Inv}(A).$$

Así, dado que $\psi^{-1}(\mathcal{F}_1(B)) = \mathcal{F}_1(A)$ y $\mathrm{soc}(A)$ es esencial, se deduce de la Proposición 3.3 que

$$\varphi^{-1}(u+a) = \varphi^{-1}(u) + \psi^{-1}(a) \text{ para cada } u \in \mathrm{Inv}(B) \text{ y } a \in \mathcal{F}_1(B).$$

Ahora sean $u, v \in \mathrm{Inv}(B)$ dados. Como antes, tenemos que $\varphi^{-1}(u)$ y $\psi^{-1}(u+v)-\varphi^{-1}(v)$ son ambos invertibles en A. Además, para cualquier $b \in \mathcal{F}_1(B)$, ahora podemos usar 3.10 y la homogeneidad de φ^{-1} para encontrar que

$$\begin{aligned}
&\psi^{-1}(u+v) - \varphi^{-1}(v) + \psi^{-1}(b) \in \mathrm{Inv}(A) \\
\iff\ &\psi^{-1}(u+v) + \varphi^{-1}(-v+b) \in \mathrm{Inv}(A) \\
\iff\ &(u+v) + (-v+b) \in \mathrm{Inv}(B) \\
\iff\ &u + b \in \mathrm{Inv}(B) \\
\iff\ &\varphi^{-1}(u) + \psi^{-1}(b) \in \mathrm{Inv}(A).
\end{aligned}$$

Consecuentemente, la Proposición 3.3 implica que

$$\psi^{-1}(u+v) = \varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v) \text{ para todos } u, v \in \mathrm{Inv}(B). \tag{3.11}$$

Si intercambiamos los roles de φ^{-1} y ψ^{-1} en ambas partes del argumento anterior, entonces también obtenemos

$$\varphi^{-1}(u+v) = \psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v) \text{ para todos } u, v \in \mathrm{Inv}(B) \tag{3.12}$$

Tomando $u = v$ en 3.11 y usando la homogeneidad de φ^{-1}, inferimos que

$$\varphi^{-1}(u) = \psi^{-1}(u) \text{ para todos } u \in \mathrm{Inv}(B) \tag{3.13}$$

Sea ahora $x \in B$ arbitrario, y fijemos cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \mathrm{r}(x)$. Entonces $-\lambda 1, \lambda 1 + x \in \mathrm{Inv}(B)$. Así, por 3.11, 3.12, y 3.13, tenemos

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(x) &= \psi^{-1}(-\lambda 1 + \lambda 1 + x) \\
&= \varphi^{-1}(-\lambda 1) + \varphi^{-1}(\lambda 1 + x) \\
&= \psi^{-1}(-\lambda 1) + \psi^{-1}(\lambda 1 + x) \\
&= \varphi^{-1}(-\lambda 1 + \lambda 1 + x) \\
&= \varphi^{-1}(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi^{-1} = \psi^{-1}$. Ahora estamos en posición de mostrar que φ^{-1} es aditiva y, por lo tanto, lineal. Sea $v \in \mathrm{Inv}(B)$ y $x \in B$ arbitrario. Teniendo en cuenta que $\varphi^{-1} = \psi^{-1}$ es una aplicación homogénea que satisface 3.11, para cualquier $u \in \mathrm{Inv}(B)$, tenemos a partir de 3.10 que

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(x+v) - \varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(u) \in \mathrm{Inv}(A) \\
\iff\ &\varphi^{-1}(x+v) + \varphi^{-1}(-v+u) \in \mathrm{Inv}(A) \\
\iff\ &x + v - v + u \in \mathrm{Inv}(B) \\
\iff\ &x + u \in \mathrm{Inv}(B) \\
\iff\ &\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(u) \in \mathrm{Inv}(A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\varphi^{-1}(\mathrm{Inv}(B)) = \mathrm{Inv}(A)$ por el Lema 3.2, se deduce del Teorema 3.8 que

$$\varphi^{-1}(x+v) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(v) \text{ para todos } v \in \mathrm{Inv}(B) \text{ y } x \in B.$$

A la luz de la identidad precedente y la homogeneidad de φ^{-1}, para obtener la aditividad de φ^{-1}, ahora podemos simplemente repetir el argumento anterior con $v \in \mathrm{Inv}(B)$ reemplazado por $v \in B$. Esto establece entonces la linealidad de $\varphi^{-1} = \psi^{-1}$. En consecuencia, tenemos que $\varphi = \psi$ es lineal.

Si ahora definimos $J : A \to B$ por $J(x) = \varphi(1)^{-1}\varphi(x)$ para cada $x \in A$, entonces J es una biyección lineal unital que preserva la invertibilidad. Así, dado que A y B son semisimples y $\mathrm{soc}(A)$ es esencial, se deduce del Teorema 2.14 que J es un isomorfismo de Jordan. Por lo tanto, con $u = \varphi(1)$, tenemos $\varphi(x) = \psi(x) = uJ(x)$ para todo $x \in A$. □

Por el Teorema 2.15, y Corolario 2.5 obtenemos, como consecuencia del Teorema 3.9, la siguiente clasificación para pares de aplicaciones sobreyectivas que preservan juntas la invertibilidad de los lápices de operadores lineales en ambas direcciones. Aquí usamos X' para denotar el espacio dual de X, y S^* para denotar el adjunto de un operador S.

Corolario 3.2. *Sean $\varphi, \psi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(Y)$ dos aplicaciones sobreyectivas que satisfacen*

$$\lambda S + T \in \mathcal{G}(\mathcal{L}(X)) \iff \lambda\varphi(S) + \psi(T) \in \mathcal{G}(\mathcal{L}(Y)) \quad \textit{para todo } S, T \in \mathcal{L}(X) \textit{ y } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Entonces, o bien

$$\varphi(S) = \psi(S) = TSU \quad \textit{para todo } S \in \mathcal{L}(X)$$

o

$$\varphi(S) = \psi(S) = VS^*W \quad \textit{para todo } S \in \mathcal{L}(X),$$

donde $T : X \to Y$, $U : Y \to X$, $V : X' \to Y$ y $W : Y \to X'$ son operadores invertibles acotados.

Demostración. Consideremos el álgebra $A = L(X)$ y $B = L(Y)$. Sabemos que:

- $L(X)$ y $L(Y)$ son álgebras de Banach semi-simples, ya que son álgebras de operadores lineales continuos en espacios de Banach.
- El radical de Jacobson de $L(X)$ es cero, lo que implica que $L(X)$ es semi-simple.
- El *socle* de $L(X)$, denotado $\mathrm{soc}(L(X))$, es esencial en $L(X)$ porque contiene todos los operadores de rango finito, y estos forman un ideal esencial en $L(X)$.

La condición dada es:

$$\lambda S+T \in \mathrm{Inv}(L(X)) \iff \lambda\varphi(S)+\psi(T) \in \mathrm{Inv}(L(Y)) \quad \text{para todo } S, T \in L(X),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

donde $\mathrm{Inv}(L(X))$ y $\mathrm{Inv}(L(Y))$ denotan los grupos de elementos invertibles en $L(X)$ y $L(Y)$, respectivamente.

Esto implica que las aplicaciones φ y ψ preservan la estructura de invertibilidad en una combinación lineal de operadores. Por lo tanto, satisfacen las condiciones del **Teorema 3.9**.

Según el **Teorema 3.9**, existe un elemento invertible $u \in \mathrm{Inv}(B)$ y un isomorfismo de Jordan $J : A \to B$ tales que:

$$\varphi(S) = \psi(S) = uJ(S) \quad \text{para todo } S \in L(X).$$

El **Teorema 2.15** y y **Corolario 2.5** nos proporciona una caracterización precisa de los isomorfismos de Jordan entre álgebras de operadores. Específicamente, establece que todo isomorfismo de Jordan unital biyectivo $J : L(X) \to L(Y)$ es de una de las siguientes formas:

- Existe un operador invertible $A : Y \to X$ tal que:

$$J(S) = A^{-1}SA \quad \text{para todo } S \in L(X).$$

- Existe un operador invertible $B : Y \to X'$ (donde X' es el espacio dual de X) tal que:

$$J(S) = B^{-1}S^*B \quad \text{para todo } S \in L(X),$$

  donde S^* denota el adjunto de S.

Caso 1: Si $J(S) = A^{-1}SA$ para algún operador invertible $A : Y \to X$, entonces:

$$\varphi(S) = \psi(S) = uJ(S) = uA^{-1}SA \quad \text{para todo } S \in L(X).$$

Definamos $T = uA^{-1}$ y $U = A$. Dado que u y A son invertibles, T y U también lo son. Por lo tanto:

$$\varphi(S) = \psi(S) = TSU \quad \text{para todo } S \in L(X).$$

Caso 2: Si $J(S) = B^{-1}S^*B$ para algún operador invertible $B : Y \to X'$, entonces:

$$\varphi(S) = \psi(S) = uJ(S) = uB^{-1}S^*B \quad \text{para todo } S \in L(X).$$

Definamos $V = uB^{-1}$ y $W = B$. Nuevamente, V y W son operadores invertibles. Entonces:

$$\varphi(S) = \psi(S) = VS^*W \quad \text{para todo } S \in L(X).$$

En ambos casos, hemos demostrado que φ y ψ adoptan una de las formas especificadas:

- $\varphi(S) = \psi(S) = TSU$ con $T : X \to Y$ y $U : Y \to X$ invertibles, o
- $\varphi(S) = \psi(S) = VS^*W$ con $V : X' \to Y$ y $W : Y \to X'$ invertibles.

Esto completa la demostración del Corolario.

□

4 Conclusiones y/o Sugerencias

En este trabajo, hemos abordado la clasificación de pares de transformaciones sobreyectivas entre álgebras de Banach complejas unitales que preservan la invertibilidad de lápices lineales en ambas direcciones. Bajo el supuesto de que la álgebra de origen es semisimple y posee un socle esencial, hemos establecido que dichas transformaciones deben coincidir y estar estrechamente relacionadas con un isomorfismo de Jordan, modulado por un elemento invertible en la álgebra de destino.

Nuestros resultados extienden significativamente los teoremas clásicos de preservación de invertibilidad conocidos para matrices y operadores acotados, situándolos en un contexto más general y abstracto de las álgebra de Banach semisimples. Esta generalización no solo reafirma la robustez de los conceptos de preservación en estructuras algebraicas complejas, sino que también abre nuevas vías para investigar propiedades preservadoras en otras clases de álgebra y en contextos más amplios, como las álgebra de C^* y las álgebra de von Neumann.

Además, el enfoque metodológico adoptado, que combina técnicas contemporáneas de teoría espectral en álgebra de Banach con argumentos estructurales sobre socles y radicales, demuestra la eficacia de una aproximación integradora para resolver problemas de preservación en álgebra funcional. Este enfoque puede ser adaptado y ampliado para explorar otras propiedades preservadoras, como la preservación de espectros, normas o estados positivos, ofreciendo así un marco versátil para futuros estudios.

Finalmente, aunque hemos logrado una clasificación completa bajo las condiciones establecidas, quedan preguntas abiertas que invitan a investigaciones posteriores. Por ejemplo, sería interesante explorar si resultados similares pueden ser obtenidos bajo supuestos más débiles, como la eliminación de la sobreyectividad o la consideración de álgebra de Banach sin socle esencial. Además, la extensión de estos resultados a contextos no-aurenales o a álgebra de Banach no-completas podría proporcionar una comprensión aún más profunda de las transformaciones preservadoras en estructuras algebraicas variadas.

En resumen, este trabajo no solo contribuye al cuerpo existente de conocimientos sobre transformaciones preservadoras en álgebra de Banach, sino que también sienta las bases para futuras investigaciones que buscan desentrañar las complejidades de las interacciones entre estructura algebraica y propiedades preservadoras en contextos funcionales avanzados.

Bibliografía

Askes, M., R. Brits, and F. Schultz (2022). "Spectrally additive group homomorphisms on Banach algebras". In: *Journal of Mathematics Analysis and Applications* 508.2, p. 125910. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125910.

Aupetit, B. (1991). *A primer on spectral theory*. Springer Science and Business Media.

Aupetit, B. and H. du T. Mouton (1996). "Trace and determinant in Banach algebras". In: *Studia Mathematica* 121.2, pp. 115–136. DOI: 10.4064/sm-121-2-115-136.

Bonsall, Frank. F. and J. Duncan (1973). *Complete normed algebras*. Springer Science and Business Media.

Braatvedt, G. and R. Brits (2013). "Uniqueness and spectral variation in Banach algebras". In: *Quaestiones Mathematicae* 36.2, pp. 155–165. DOI: 10.2989/16073606.2013.779947.

Brešar, M., A. Fošner, and P. Šemrl (2003). "A note on invertibility preservers on Banach algebras". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 131.12, pp. 3833–383. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-07192-2.

Dieudonné, J. (1948). "Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables". In: *Archiv der Mathematik* 1.4, pp. 282–287. DOI: 10.1007/BF02038756.

Marcus, M. and R. Purves (1959). "Linear Transformations on Algebras of Matrices: The Invariance of the Elementary Symmetric Functions." In: *Canadian Journal of Mathematics* 11, pp. 383–396. DOI: 10.4153/CJM-1959-039-4.

Rudin, Walter (1991). *Functional analysis*. McGraw-Hill, Inc.

Schultz, F. (2024). "Banach algebra mappings preserving the invertibility of linear pencils". In: *Linear Algebra and its Applications* 691.1, pp. 109–122. DOI: 10.1016/j.laa.2024.03.017.

Sourour, A. (1996). "Invertibility preserving linear maps on $L(X)$". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 384.1, pp. 13–30. DOI: 10.1090/S0002-9947-96-01428-6.