Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Computación Científica

Estudio numérico de una ecuación integro-diferencial parcial con memoria temporal, mediante el método theta

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica

AUTOR

Víctor Colbert FLORES CHAVA

ASESOR

Dra. Rosa Luz MEDINA AGUILAR

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Flores, V. (2024). *Estudio numérico de una ecuación integro-diferencial parcial con memoria temporal, mediante el método theta*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Computación Científica]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Víctor Colbert Flores Chava
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42587097
URL de ORCID	No aplica.
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Rosa Luz Medina Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10048247
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-0175-3894
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Martha Hilda Timoteo Sánchez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	25702279
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Edinson Raúl Montoro Alegre
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09627181
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Rosa Luz Medina Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10048247
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.4.2. ECUACIONES DIFERENCIALES NUMÉRICAS
Grupo de investigación	NO APLICA

Agencia de financiamiento	SIN FINANCIAMIENTO

Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos Latitud: -12.058192 Longitud: -77.018918
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Abril 2024- setiembre 2024
URL de disciplinas OCDE	Ciencias de la computación https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.02.01 Física nuclear https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.04 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Escuela Profesional de Computación Científica

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN COMPUTACION CIENTÍFICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 13:54 horas del sábado 28 de setiembre del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024): Dra. Martha Hilda Timoteo Sánchez (presidente), Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre (miembro) y la Dra. Rosa Luz Medina Aguilar (miembro asesor), para la sustentación de la Tesis titulada: «ESTUDIO NUMÉRICO DE UNA ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL PARCIAL CON MEMORIA TEMPORAL, MEDIANTE EL MÉTODO THETA» presentado por el Bachiller VÍCTOR COLBERT FLORES CHAVA, para optar el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Luego de la exposición de la Tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ..bueno.., con un calificativo promedio de ..15(quince)..

A continuación, los miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante Bachiller VÍCTOR COLBERT FLORES CHAVA, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Siendo las 14:30 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dra. Martha Hilda Timoteo Sánchez
PRESIDENTE

Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre
MIEMBRO

Dra. Rosa Luz Medina Aguilar
MIEMBRO ASESOR

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Rosa Luz Medina Aguilar en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N.º 001301-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es "*ESTUDIO NUMÉRICO DE UNA ECUACION INTEGRO-DIFERENCIAL PARCIAL CON MEMORIA TEMPORAL, MEDIANTE EL MÉTODO THETA*", presentado por el bachiller VÍCTOR COLBERT FLORES CHAVA para optar el título profesional de licenciado en Computación Científica. CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 6% de similitud, nivel permitido para continuar con los tramites correspondientes y para su publicación en el repositorio institucional.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título correspondiente.

Firma del asesor

DNI: 10048247

Nombres y apellidos del asesor: Rosa Luz Medina Aguilar



DEDICATORIA

A Krishna, a mi esposa Cinthya, a mis padres y a mi hermano
por su constante inspiración.

Resumen

Las ecuaciones integro-diferenciales parciales (EIDP) con memoria temporal son fundamentales en diversos campos de la ciencia y matemáticas, modelando importantes fenómenos en física, economía y biología. Estas ecuaciones surgen en situaciones donde el comportamiento del sistema en un punto dado depende no solo de su estado actual, sino también de cómo ha evolucionado en el pasado. Este trabajo, basado en el artículo de Fakharany y Mahmoud "Análisis numérico de esquemas de diferencias finitas derivados de ecuaciones integro-diferenciales parciales con memoria temporal"[6], presenta un esquema de diferencias finitas θ para aproximar el operador diferencial de la ecuación, junto con el método de Simpson compuesto para su operador integral. La estabilidad del esquema mencionado se analiza usando los Teoremas de Gershgorin; mientras que su consistencia se evalúa mediante la expansión de Taylor. Se demostró que este esquema numérico es consistente incondicionalmente y exhibe una estabilidad condicional para $\theta \in [0,0.5)$, y estabilidad incondicional para $\theta \in [0.5,1]$. Además, se realizó simulaciones numéricas en GNU-OCTAVE para corroborar los resultados.

Palabras Claves: Ecuaciones integro-diferenciales parciales (EIDP), esquema de diferencias finitas θ, método de Simpson compuesto, estabilidad, consistencia, teoremas de Gershgorin.

Abstract

Partial integro-differential equations (PIDE) with temporal memory are fundamental in various fields of science and mathematics, modeling significant phenomena in physics, economics, and biology. These equations arise in situations where the behavior of the system at a given point depends not only on its current state but also on how it has evolved in the past. This work, based on the article by Fakharany and Mahmoud "Numerical analysis of finite difference schemes arising from time-memory partial integro-differential equations"[6], presents a θ finite difference scheme to approximate the differential operator of the equation, along with the composite Simpson's method for its integral operator. The stability of the mentioned scheme is analyzed using Gershgorin's theorems, while its consistency is evaluated through Taylor expansion. It was demonstrated that this numerical scheme is unconditionally consistent and exhibits conditional stability for $\theta \in$ [0,0.5), and unconditional stability for $\theta \in$ [0.5,1]. Additionally, numerical simulations were performed in GNU-OCTAVE to corroborate the results.

Keywords: Partial integro-differential equations (PIDE), θ-finite difference scheme, composite Simpson's method, stability, consistency, Gershgorin's theorems.

Índice general

1 Introducción **ix**

Introducción **1**
1.1 Estructura de la Tesis 1
1.2 Objetivos 1
1.2.1 Objetivo Principal 1
1.2.2 Objetivos específicos 1

2 Marco Teórico **2**
2.1 Ecuaciones Diferenciales Parciales 2
2.2 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Parciales de segundo orden 2
2.3 Ecuaciones integro-diferenciales parciales 3
2.4 Clasificación de las Ecuaciones Integro-diferenciales de segundo orden . . 3
2.5 Método de Diferencias θ-finitas 3
2.6 Regla de Simpson Compuesta 4
2.7 Generalidades sobre la Estabilidad, Consistencia y Convergencia del Método de Diferencias Finitas 4
2.7.1 Consistencia 4
2.7.2 Estabilidad 5
2.7.3 Convergencia 6
2.8 Teoremas Adicionales 6
2.8.1 La función escalón Heaviside 6
2.8.2 Inversibilidad de una Matriz Tridiagonal Simétrica 7
2.8.3 Los autovalores de una matriz tridiagonal 7

3 Metodología **8**
3.1 Planteamiento del Problema 8
3.2 Esquema numérico 8
3.2.1 Malla Numérica 8
3.2.2 Discretización Numérica de la función incognita 9
3.2.3 Discretizando el operador integral 10
3.2.4 Discretización de los valores iniciales y de contorno 11
3.3 Demostración de la Consistencia 11
3.4 Estudio de la Estabilidad del Esquema numérico dado 14
3.4.1 Análisis de Estabilidad 24
3.5 Convergencia del Esquema Numérico 31

4 Simulaciones Numéricas **32**

Conclusiones **37**

Referencia Bibliográfica **38**

Anexo **40**

Índice de figuras

3.1 Malla numérica con subíndices para x y t. 9

4.1 Soluciones numéricas para el primer caso, con $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$ 33
4.2 Los errores absolutos asociados al primer caso, correspondientes a $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$ 33
4.3 Comportamiento de la solución numérica para el primer caso, cuando no se cumple la condición de estabilidad, para $\theta = \frac{1}{6}$ 34
4.4 Soluciones numéricas para el segundo caso, con $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$ 35
4.5 Los errores absolutos relativos para el segundo caso, con $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$ . . 36
4.6 θ vs errores absolutos máximos, cuando se dispone de la solución analítica 37

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) se utilizan para modelar diversos fenomenos en física, química, finanzas, entre otros. Sin embargo, existen fonómenos en los cuales las EDP no son suficientes, ya que requieren considerar su estado en tiempos pasados. Esta necesidad se representada por una convolución en la variable tiempo (operador integral). Así, las ecuaciones integro-diferenciales parciales (EIDP) con memoria temporal son una extensión de las EDP, ya que incorporan este requisito de memoria temporal en forma de un operador integral.

Las EIDP con memoria temporal se han aplicado en una amplia variedad de fenómenos. Yanik y Fairweather [18] señalan que, en particular, en fenómenos de transferencia de calor, dinámicas de reactores nucleares y termoelasticidad, existe frecuentemente "una necesidad de reflejar los efectos de la 'memoria'del sistema ". Por ejemplo, en la viscoelasticidad de materiales, se estudian materiales con propiedades tanto elásticas como viscosas (polimeros, tejidos biológicos, etc.) para determinar su respuesta a diferentes cargas o esfuerzos a lo largo del tiempo. En biología, se aplican para describir el crecimiento logístico de la poblacion humana con migracion [15]. En economía, las EIDP pueden utilizarse para la fijación de precios de derivados bajo un modelo de difusión con saltos [13] . También se aplican en la física nuclear para describir el comportamiento de un reactor nuclear en un medio continuo, en este caso la función incógnita representa la energía total del reactor nuclear, lo cual es fundamental para conocer las condiciones de su operación segura, la evaluación de su rendimiento, la planificación de su mantenimiento y gestión, así como para asegurar el cumplimiento de normativas [2].

Estos fenónemos mencionados, como la viscoelasticidad, la energía de un reactor nuclear, así como también fenómenos de termoelasticidad y otros, se representan mediante la siguiente EIDP con memoria temporal:

$$\partial_\tau \upsilon = \partial_x^2 \upsilon + f(x,\tau) - \int_0^\tau K(x,\tau-s)\upsilon(x,s)ds, \quad x \in \Omega, \tau > 0, \tag{1.1}$$

sujeta a las condiciones inicial y de contorno:

$$\upsilon(x,0) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad \upsilon(x,\tau) = \phi_x(\tau), \quad x \in \Gamma, \tau > 0, \tag{1.2}$$

donde, f(x,τ) representa la función fuente, K(x,τ-s) es el kernel de integración, y $\Omega \bigcup \Gamma$=[0,L].

Existen diversos métodos para solucionar las EIDPs. Fakhar y Dehghan [7] aplican el método espectral de colocación de Legendre en fenómenos de compresión de medios poro-viscoelásticos y en el flujo de calor en un sólido rígido, demostrando la eficiencia y

precisión del método propuesto en dominios acotados y no acotados. Por su parte, Aboodh & Farah [1] usan el método de la transformada de Aboodh para pasar una EIDP en una EDO, y luego resuelven esta última aplicando la inversa de la transformada de Aboodh para encontrar la solución del problema, obteniendo soluciones exactas de tales PIDEs después de pocos pasos de cálculo. Y entre los método numéricos utlizados para resolver las EIDPs, está el método de Crank-Nicholson, empleado por Tao Tang [16] para estudiar fenómenos físicos en los que participan fuerzas viscoelásticas. Aquí se presentará el método numérico de diferencias finitas θ, $(\theta \in [0,1])$.Hyndman [9] equipara los pronósticos de este método con el del suavizado exponencial simple con tendencia, demostrando que ambos enfoques son equivalentes en términos de predicción. El método θ es una técnica versátil en el análisis numérico que facilita la interpolación entre métodos explícitos e implícitos. Al integrarlo con el método numérico de Simpson compuesto, se espera lograr un esquema capaz de abordar con eficiencia las complejidades de las EIDPs con memoria temporal.

1.1 Estructura de la Tesis

El Capítulo 2 cubre los conceptos fundamentales relacionados con las ecuaciones integro-diferenciales parciales, incluyendo la clasificación y los métodos numéricos asociados, como el método de diferencias θ-finitas y la regla de Simpson Compuesta. También, se abordan los aspectos generales del tratamiento de problemas de consistencia, estabilidad y convergencia. En el Capítulo 3 se detalla el planteamiento del problema, se describe el esquema numérico utilizado y se analizan la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema propuesto. El Capítulo 4 presenta los resultados de las simulaciones realizadas en GNU-OCTAVE, y el Capítulo 5 ofrece un resumen de los principales hallazgos y conclusiones del estudio.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Principal

Elaborar y evaluar un esquema numérico para resolver ecuaciones integro-diferenciales parciales con memoria temporal, empleando el método de diferencias finitas theta para aproximar el operador diferencial y el método de Simpson compuesto para el operador integral, con el objetivo de analizar su estabilidad y consistencia a través de teoremas matemáticos y simulaciones.

1.2.2 Objetivos específicos

Desarrollar el esquema numérico utilizando el método de diferencias finitas: Implementar un esquema de diferencias finitas theta que incorpore el parámetro θ para aproximar el operador diferencial en una ecuación integro-diferencial parcial con memoria temporal, garantizando que el esquema sea apropiado para las características del problema.

Aplicar el método de Simpson compuesto para el operador integral: Emplear el método de Simpson compuesto para la aproximación del operador integral, asegurando que se mantenga la precisión en la integración numérica y que sea compatible con el esquema de diferencias finitas implementado.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación que involucra una función desconocida de dos o más variables y algunas de sus derivadas parciales.
Usando la notación:

$$D^{\alpha}u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}};\ \text{con}\,|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

Simbólicamente podemos expresar una EDP de la siguiente manera. Fijamos un entero $k \geqslant 1$, y sea U la notación para un subconjunto abierto en R^n. Ver [5]

Definición 2.1. *Una expresión:*

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x) = 0, x \in U$$

Se llama una ecuación diferencial parcial de k-èsimo orden, donde:

$$F : R^{n^k} x R^{n^{k-1}} x ... x R^n x R x U \to R, \text{ es dado, y:}$$
$$u : U \to R, \text{ es desconocido.}$$

Definición 2.2. *La ecuación diferencial parcial de la definición 2.1 se llama lineal si tiene la forma:*

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_{\alpha}(x) D^a u = f(x)$$

Para las funciones dadas $a_{\alpha}(|\alpha| \leq k)$ y f. Esta EDP lineal es homogénea si f≡0.

2.2 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Parciales de segundo orden

Una ecuación diferencial parcial (EDP) lineal de segundo orden con dos variables independientes y con coeficientes constantes puede clasificarse en uno de tres tipos generales: elíptica, hiperbólica o parabólica. Esta clasificación depende únicamente de los coeficientes de las derivadas de segundo orden, bajo la suposición de que al menos uno de estos coeficientes es diferente de cero.

La forma general de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden homogénea es:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

donde A,B,C,D,E y F son constantes reales, y dependiendo del valor de $B^2 - 4AC$, esta ecuación diferencial parcial se clasifican en:

$$\begin{gathered} \text{Hiperbólica si } B^2 - 4AC > 0 \\ \text{Parabólica si } B^2 - 4AC = 0 \\ \text{Helíptica si } B^2 - 4AC < 0 \end{gathered}$$

2.3 Ecuaciones integro-diferenciales parciales

Una ecuación integro-diferencial parcial (EIDP) es aquella que combina derivadas parciales e integrales de una función desconocida respecto a sus variables independientes. La forma general es la siguiente:

$$Du(x,t) = Iu(x,t) + f(x,t),$$

donde:

- D representa un operador diferencial.
- I representa un operador integral.
- $f(x,t)$ es una función fuente.

2.4 Clasificación de las Ecuaciones Integro-diferenciales de segundo orden

Una ecuación integro-diferencial parcial (EIDP) lineal de segundo orden con coeficientes constantes y no homogénea, tendría la siguiente forma:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + \int_a^b K(x,t,\xi)u(\xi,t)\,d\xi = f(x,t)$$

Y se siguen los mismos criterios monstrados en la Sección 2.2 para clasificarla como elíptica, hiperbólica o parabólica.

2.5 Método de Diferencias θ-finitas

El método θ es una técnica numérica para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). Combina los métodos explícitos e implícitos, utilizando un parámetro θ que controla la ponderación entre estos dos enfoques. La fórmula general del método θ para la segunda derivada espacial se puede expresar como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} \approx \frac{\theta}{(\Delta x)^2}\left(v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}\right) + \frac{(1-\theta)}{(\Delta x)^2}\left(v_{k+1}^{n} - 2v_k^{n} + v_{k-1}^{n}\right) \tag{2.1}$$

Donde v_k^n es la aproximación de υ en el punto (x_k, τ_n) [6]

2.6 Regla de Simpson Compuesta

Dado un intervalo $[a,b]$ y la función $f(x)$ que vamos a integrar en ese intervalo, podemos dividir el intervalo en n subintervalos de misma longitud, donde n es un número par. La longitud de cada subintervalo será $h = \frac{b-a}{n}$.
El método de Simpson compuesto aproxima la integral definida de $f(x)$ en $[a,b]$ utilizando la fórmula siguiente[4]:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right) \tag{2.2}$$

2.7 Generalidades sobre la Estabilidad, Consistencia y Convergencia del Método de Diferencias Finitas

En el contexto de una ecuación integro-diferencial parcial, surgen diversas cuestiones fundamentales para conseguir una solución precisa. Estas incluyen la discretización de las variables espaciales y temporales (en el caso de ecuaciones en dos variables), la determinación del esquema numérico adecuado para la solución, y el análisis del tipo de error y la convergencia asociados al método.

2.7.1 Consistencia

Definición 2.3. *Es el operador diferencial P aquel que, a cada función υ, $P\upsilon$ le devuelve la función derivada υ':*

$$P\upsilon = \upsilon'$$

Adicionalmente, para definir el operador en diferencias finitas $P_{h,k}\upsilon$, se tomará un número real a y se denotará:

$$\mathbb{N}_a := \{a, a+h, a+2h, ...\}, \text{donde } h \text{ es el tamaño de paso de x}$$

ó

$$\mathbb{N}_a := \{a, a+k, a+2k, ...\}, \text{donde } h \text{ es el tamaño de paso de t}$$

Definición 2.4. *Sea V = $l_n^p = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_p)$ un espacio de Banach, donde n=2,3. Se denota por s($\mathbb{N}_a$;V) el espacio vectorial que consiste en todas las sucesiones de valor vectorial υ: $\mathbb{N}_a \to V$*

$$P_{h,k} : (\mathbb{N}_a; V) \to s(\mathbb{N}_a; V)$$

donde $\upsilon \in \mathbb{C}^n$

Definición 2.5. *El error de truncamiento (E.T), es la diferencia entre el operador diferencial y el operador en diferencia finita:*

$$P\upsilon - P_{h;k}\upsilon$$

Definición 2.6. ***(Consistencia)*** *Dada una EDP, $P\upsilon$=f y un esquema de diferencias finitas $P_{h,k}\upsilon$=f. Diremos que el esquema de diferencias finitas es consistente con la EDP, si para cualquier función suave $\phi(x;t)$ se tiene:*

$$P\phi - P_{h,k}\phi \to 0; cuando h,k \to 0$$

es decir

$$\lim_{h,k\to 0}(P\phi - P_{h,k}\phi) = 0$$

donde la convergencia es una convergencia puntual en cada punto (x;t).

Es decir, un esquema numérico es consistente con la ecuación original cuando al refinar la malla, el operador diferencial y el operador aproximación son equivalentes.

2.7.2 Estabilidad

El concepto de Estabilidad de un esquema numérico nos permite analizar como pequeños errores iniciales se transmiten o progresan en las sucesivos pasos del cálculo de la solucion aproximada. Por lo tanto, la estabilidad es la propiedad que tiene o no un esquema numérico de que los errores de redondedo permanezcan dentro de límites razonables.
Las siguientes definiciones de estabilidad son tomadas de G.D. Smith (Ver [14])

Definición 2.7. ***(Condición de Estabilidad de Lax-Richtmyer)***
Asumamos que la solución numerica de la ecuación diferencial parcial sea de la forma:

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{f}_i$$

Donde A es una matriz nxn, y $\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_{n-1}$ son vectores de valores conocidos. Entonces, se dice que el esquema de diferencias finitas es estable si se cumple que:

$$\|\boldsymbol{A}\| \leq 1$$

Definición 2.8. ***(Teorema de Gershgorin)*** *Dada una matiz A_{nxn}. Entonces el mayor de los autovalores en valor absoluto de la matriz cuadrada A no puede exceder a la mayor suma del valor absoluto de los elementos de cualquier fila o cualquier columna. En otras palabras:*

$$\rho(A) \leq \|\boldsymbol{A}\|_1 \quad o \quad \|\boldsymbol{A}\|_\infty$$

Donde $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_\infty$ son las normas de suma máxima por columna y fila respectivamente. Y $\rho(A)$ es el radio espectral de A, es decir, el mayor de los autovalores en valor absoluto de la matriz A.

Definición 2.9. ***(Teorema del Círculo de Gershgorin)*** *Dada la matriz $A = [a_{ij}] \in R^{nxn}$. Sea P_s la suma del valor absoluto de los elementos en la fila s excluyendo el elemento diagonal a_{ss}. Entonces cada autovalor (λ) de A cae dentro o en el contorno de al menos uno de los círculos:*

$$|\lambda - a_{ss}| \leq P_s$$

Definición 2.10. ***(Teorema del Círculo de Gershgorin y la norma de la matriz A)*** *Se debe notar que, cuando los autovalores λ_i de la matriz A son estimados por el teorema del círculo de Gershgorin, la condición $|\lambda_i| \leq 1$ es equivalente a $\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq 1 \quad o \quad \|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq 1$.*

Observación 2.7.1. *La definición (2.10) debe ser suficiente para determinar las condiciones de estabilidad. Sin embargo, si se cumplen que $\|\boldsymbol{A}\|_1 \leqslant 1$ y $\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq 1$ simultáneamente, entonces tendríamos que la norma 2 de la matriz cumple:*

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 \leq 1$$

Debido a que se cumple $\|\boldsymbol{A}\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{A}\|_1 \|\boldsymbol{A}\|_\infty$. Siendo $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(A)$ para matrices reales y simétricas.

2.7.3 Convergencia

Definición 2.11. ***(Teorema de Equivalencia de Lax)***
Para un esquema de diferencias finitas lineales que resulta de la discretización de un problema de valor inicial lineal bien planteado, cuando la aproximación numérica satisface la condición de consistencia y la estabilidad, estas son las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia.

Consistencia + Estabilidad = Convergencia

Este teorema permite descomponer el problema de la convergencia en otros dos mas asequibles: la consistencia y la estabilidad. La mayor parte de los esquemas utilizados para la resolucion de ecuaciones derivadas parciales se basan en este teorema para garantizar su convergencia.

2.8 Teoremas Adicionales

2.8.1 La función escalón Heaviside

Definición 2.12. *La función de Heaviside $H(x)$ (Ver [12]), se define como :*

$$H(x-a) = \begin{cases} 0, & si\ x < a, \\ 1, & si\ x \geq a. \end{cases}$$

Teorema 2.8.1. *Se cumple que:*

$$H(a-x) = 1 - H(x-a)$$

Demostración. Si $x \leq a$, se cumple $H(x-a) = 0$ y $H(a-x) = 1$, entonces:

$$1 - H(x-a) = 1 - 0 = 1 = H(a-x)$$

Si $x \geqslant a$, se cumple $H(x-a) = 1$ y $H(a-x) = 0$, entonces:

$$1 - H(x-a) = 1 - 1 = 0 = H(a-x)$$

□

2.8.2 Inversibilidad de una Matriz Tridiagonal Simétrica

Teorema 2.8.2. *Una matriz tridiagonal simétrica* $\mathbb{M} \in R^{NxN}$ *es inversible si sus entradas estàn dadas por:*

$$m_{ij} = 1 + 2\alpha;\ m_{ij} = -\alpha, \|j-i\| = 1; m_{ij} = 0, \|j-i\| > 1,\ \alpha \in R,$$

La prueba puede encontrarse en [6].

2.8.3 Los autovalores de una matriz tridiagonal

El siguiente resultado es dado por G.D.Smith ([14])

Teorema 2.8.3. *Los autovalores de una matriz tridiagonal NxN :*

$$\begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & b & \\ & & \cdots & & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{pmatrix}$$

Son:

$$\lambda_s = a + 2(\sqrt{bc})cos(\frac{s\pi}{N+1}) :\ s = 1,2,,N$$

Capítulo 3

Metodología

Este capítulo presenta el planteamiento del problema y describe en detalle el esquema numérico adoptado para su solución. Se lleva a cabo un análisis minucioso de la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema propuesto, asegurando que cumple con los criterios necesarios para lograr los resultados precisos y confiables. Además, se discuten los pasos metodológicos empleados para implementar el esquema y cómo se validaron las soluciones obtenidas.

3.1 Planteamiento del Problema

La ecuación integro-diferencial parcial ha analizar es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\tau) - \int_0^\tau K(x,\tau - s)u(x,s)ds, \quad x \in \Omega, \tau > 0, \tag{3.1}$$

sujeta a la condición inicial:

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \Omega \tag{3.2}$$

y de frontera:

$$u(x,\tau) = \phi_x(\tau), \quad x \in \Gamma, \tau > 0, \tag{3.3}$$

donde, f(x,τ) representa la función fuente, K(x,τ-s) es el kernel de integración, y $\Omega \bigcup \Gamma$=[0,L].

3.2 Esquema numérico

3.2.1 Malla Numérica

Empezamos con la contrucción de la malla numérica del dominio computacional $(x,t) \in [0,L]x[0,T]$, donde T es que tiempo total que ha pasado. La variable temporal es discretizada se la siguiente manera:

$$\mathrm{t_n} = \mathrm{n}\Delta\mathrm{t}; \quad \Delta\mathrm{t} = \mathrm{T}/\mathrm{N_t}$$

Y la variable espacial:

$$\mathrm{x_k} = \mathrm{k}\Delta\mathrm{x}; \quad \Delta\mathrm{x} = \mathrm{L}/\mathrm{N_x}$$

Donde N_t y N_x son las cantidades de subintervalos totales.

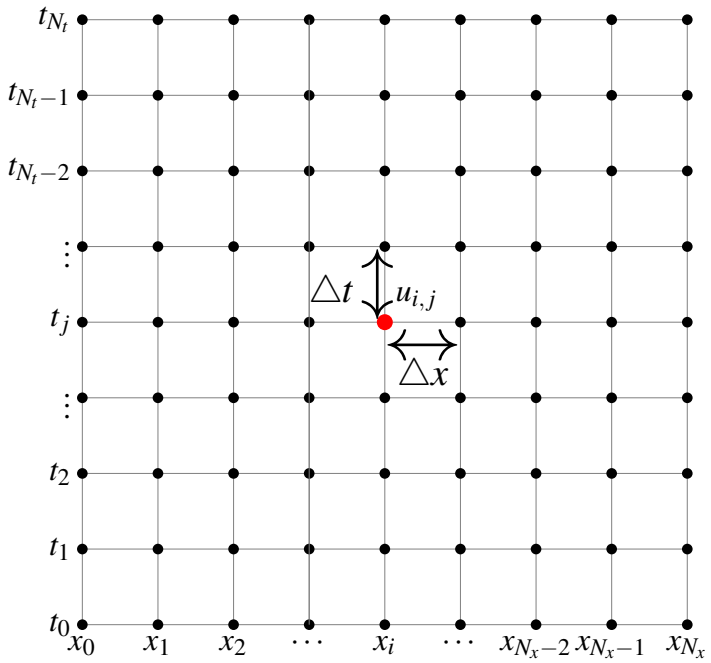


Figura 3.1: Malla numérica con subíndices para x y t.

3.2.2 Discretización Numérica de la función incognita

Sea v_k^n la aproximación de u en el punto (x_k, t_n). Entonces aproximamos:
La primera derivada parcial hacia adelante de u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t}$$

La segunda derivada espacial, usando el método θ de la Ecuación 2.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\theta}{(\Delta x)^2}\left(v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}\right) + \frac{(1-\theta)}{(\Delta x)^2}\left(v_{k+1}^{n} - 2v_k^{n} + v_{k-1}^{n}\right)$$

Reemplazando en la ecuación inicial 3.1 tenemos :

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} = \frac{\theta}{(\Delta x)^2}\left(v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}\right) + \frac{(1-\theta)}{(\Delta x)^2}\left(v_{k+1}^{n} - 2v_k^{n} + v_{k-1}^{n}\right) + F_k^n - \int_0^{t_n} K_k(t_n - s)v_k(s)ds$$

Multiplicando por Δt a ambos lados de la igualdad:

$$v_k^{n+1} - v_k^n = \theta r\left(v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}\right) + \tilde{\theta} r\left(v_{k+1}^{n} - 2v_k^{n} + v_{k-1}^{n}\right) + \Delta t F_k^n - \Delta t \int_0^{t_n} K_k(t_n - s)v_k(s)ds$$

donde $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ y $\tilde{\theta} = 1 - \theta$

Despejando las incognitas del instante mayor:

$$v_k^{n+1} + 2\theta r v_k^{n+1} - \theta r\left(v_{k+1}^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}\right) = v_k^n - 2\tilde{\theta} r v_k^n + \tilde{\theta} r\left(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n\right) + \Delta t F_k^n - \Delta t \int_0^{t_n} K_k(t_n - s) v_k(s) ds$$

$$(1 + 2\theta r) v_k^{n+1} - \theta r\left(v_{k+1}^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}\right) = (1 - 2\tilde{\theta} r) v_k^n + \tilde{\theta} r\left(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n\right) + \Delta t F_k^n - \Delta t \int_0^{t_n} K_k(t_n - s) v_k(s) ds \tag{3.4}$$

Sean los operadores de diferencia:

$$\begin{aligned} A[v_k^{n+1}] &= (1 + 2\theta r) v_k^{n+1} - \theta r\left(v_{k+1}^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}\right), \\ B[v_k^n] &= (1 - 2\tilde{\theta} r) v_k^n + \tilde{\theta} r\left(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Entonces escribimos (3.4) como:

$$A[v_k^{n+1}] = B[v_k^n] + \Delta t F_k^n - \Delta t \int_0^{t_n} K_k(t_n - s) v_k(s) ds \tag{3.6}$$

k=1,2,...,$N_x - 1$, y n=0,1,2,...,$N_t - 1$

Se toman k desde 0, y n desde 1, por los subindices, y superindices en la ecuación (3.4) Para obtener el nivel 0 en el tiempo, el momento inicial, ponemos $n = 0$. La integral se vuelve nula debido a que los limites de integracion son iguales.

$$A[v_k^1] = B[v_k^0] + \Delta t F_k^0 \tag{3.7}$$

Cambiamos los limites integracion de la parte integral de la ecuacion (3.6) por el método de substitución de Fakharany (Ver [6]). Tenemos:

$$A[v_k^{n+1}] = B[v_k^n] + \Delta t F_k^n - \Delta t \int_0^1 K_k(t_n - s) v_k(s) \left(1 - H(s - t_n)\right) ds \tag{3.8}$$

3.2.3 Discretizando el operador integral

El operador integral será llamado $\mathscr{I}_k^{t_n}$:

$$\mathscr{I}_k^{t_n} = \int_0^1 K_k(t_n - s) v_k(s) \left(1 - H(s - t_n)\right) ds$$

que aproximaremos usando la regla de Simpson ecuación (2.2):

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_k^{t_n} \approx I_k^n = \frac{\Delta s}{3} &(K_k(t_n - s_0) v_k^0 (1 - H(s_0 - t_n)) + \\ &4 \sum_{i=1}^{N_t/2} K_k(t_n - s_{2i-1}) v_k^{2i-1} \left(1 - H(s_{2i-1} - t_n)\right) + \\ &2 \sum_{i=1}^{N_t/2-1} K_k(t_n - s_{2i}) v_k^{2i} \left(1 - H(s_{2i} - t_n)\right) + K_k(t_n - s_n) v_k^n (1 - H(s_n - t_n))) \end{aligned}$$

Aqui discretizamos el intervalo de integración como hemos discretizado el tiempo:

$$\Delta s = \Delta t$$

$$\text{Además } s_i = t_i \ ; \ i = 0, 1, ..., N_t$$

Para garantizar que v_k^i coincida con las v_k^n del análisis original.
Consideremos también, por definicion, que tendríamos:

$$H(s_0 - t_n) = H(t_n - t_0) = 0; \text{ y } H(s_n - t_n) = H(t_n - t_n) = 1;$$

Por lo que tendríamos finalmente:

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_k^{t_n} \approx I_k^n = \frac{\Delta t}{3}(K_k(t_n - s_0)v_k^0 + 4\sum_{i=1}^{N_t/2} K_k(t_n - t_{2i-1})v_k^{2i-1}(1 - H(t_{2i-1} - t_n)) + \\ 2\sum_{i=1}^{N_t/2-1} K_k(t_n - t_{2i})v_k^{2i}(1 - H(t_{2i} - t_n))) \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2.4 Discretización de los valores iniciales y de contorno

Se procede a aproximar los valores iniciales y de contorno de la ecuación integro-diferencial parcial mediante un esquema numérico para convertir estos valores continuos en una forma discreta, adecuada para su implementación en método de diferencias finitas.

$$v_k^0 = g_k, \ \ v_0^n = \phi_0^n, \ v_{N_x}^n = \phi_{N_x}^n \tag{3.10}$$

Por lo tanto, tenemos el esquema de diferencias finitas desarrollado:

$$\begin{aligned} A[v_k^1] &= B[v_k^0] + \Delta t F_k^n \\ A[v_k^{n+1}] &= B[v_k^n] + \Delta t F_k^n - \Delta t I_k^n \\ v_k^0 &= g_k, \ \ v_0^n = \phi_0^n, \ v_{N_x}^n = \phi_{N_x}^n \end{aligned} \tag{3.11}$$

Con $n = 1, 2, ..., N_t - 1$, los operadores Ay B dadas por la ecuacion 3.5 e I_n^k, por la ecuacion 3.9

3.3 Demostración de la Consistencia

Para garantizar la consistencia de la solución numérica obtenida tenemos que hallar el valor absoluto de la diferencia entre la solución teórica exacta y su correspondiente solución numérica. Este valor debe tender a cero conforme los tamaños de paso tiendan a cero.

Consideremos $u_k^n(x_k, t_n)$ la solución exácta teórica de la ecuación en el punto (x_k, t_n), entonces el error de truncación local $T_k^n(u)$ será dada por:

$$T_k^n(u) = P_{ij}(u) - L(u_{ij}) =$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} - \frac{\theta}{(\Delta x)^2}(u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}) - \frac{(1-\theta)}{(\Delta x)^2}(u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) + I_k^n(u) \tag{3.12}$$

$$-(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\int_0^t K(x,t-s)u(x,s)ds)\Big|_k^n$$
$$=\mathscr{L}_k^n(u)+\mathscr{K}_k^n(u)$$

Donde $\mathscr{L}_k^n(u)$ es el error de truncamiento local del operador diferencial, y $\mathscr{K}_k^n(u)$ es el error de truncamiento local para el operador integral:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k^n(u)=\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\Delta t}-\frac{\theta}{(\Delta x)^2}(u_{k+1}^{n+1}-2u_k^{n+1}+u_{k-1}^{n+1})-\\ \frac{(1-\theta)}{(\Delta x)^2}(u_{k+1}^n-2u_k^n+u_{k-1}^n)-\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_k^n+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_k^n\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\mathscr{K}_k^n(u)=I_k^n(u)-\int_0^t K(x,t-s)u(x,s)ds)\Big|_k^n \tag{3.14}$$

Resolviendo $\mathscr{L}_k^n(u)$ primeramente. Recurrimos a las aproximaciones de Taylor para cada término:

$$u_k^{n+1}=u_k^n+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Big|_k^n \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}u_{k+1}^{n+1}=u_k^n+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_k^n+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_k^n+\Delta x\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\Big|_k^n\\ +\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_k^n+\frac{\Delta x^2\Delta t}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\Big|_k^n+\frac{\Delta x\Delta t^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\Big|_k^n\\ +\frac{(\Delta x)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Big|_k^n+\frac{\Delta x^3\Delta t}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial t^1}\Big|_k^n+\frac{\Delta x^2\Delta t^2}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\Big|_k^n+\frac{\Delta x\Delta t^3}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial t^3}\Big|_k^n\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}u_{k-1}^{n+1}=u_k^n-\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_k^n+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_k^n-\Delta x\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\Big|_k^n\\ -\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_k^n+\frac{\Delta x^2\Delta t}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\Big|_k^n-\frac{\Delta x\Delta t^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\Big|_k^n\\ +\frac{(\Delta x)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Big|_k^n-\frac{\Delta x^3\Delta t}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial t^1}\Big|_k^n+\frac{\Delta x^2\Delta t^2}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\Big|_k^n-\frac{\Delta x\Delta t^3}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial t^3}\Big|_k^n\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$u_{k+1}^n=u_k^n+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_k^n+\ldots \tag{3.18}$$

$$u_{k-1}^n=u_k^n-\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_k^n-\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_k^n+\ldots \tag{3.19}$$

Al reemplazar de (3.15) a (3.19) en los sumandos de la ecuación 3.13 obtenemos:

$$\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^3}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Big|_k^n\ldots \tag{3.20}$$

$$\frac{\theta}{(\Delta x)^2}(u_{k+1}^{n+1}-2u_k^{n+1}+u_{k-1}^{n+1})=\theta(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_k^n+\Delta t\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\Big|_k^n) \tag{3.21}$$

$$\frac{(1-\theta)}{(\Delta x)^2}(u_{k+1}^{n}-2u_k^{n}+u_{k-1}^{n})=(1-\theta)(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_k^n+\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}) \tag{3.22}$$

Reemplazamos de (3.20) al (3.22) en la ecuación (3.13), obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k^n(u)=\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^3}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Big|_k^n-\theta\Delta t\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\Big|_k^n\\ -\theta\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\Big|_k^n-\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_k^n\end{aligned}$$

Agrupando:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k^n(u)=\Delta t(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\theta\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t^1})\Big|_k^n-\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_k^n\\ +(\Delta t)^2(\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\frac{\theta}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2})\Big|_k^n+\frac{(\Delta t)^3}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Big|_k^n\end{aligned} \tag{3.23}$$

Ahora se halla el error de truncamiento del operador integral, $\mathscr{K}_k^n(u)$, ecuación (3.24):

Al usar la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ compuesta, de la integral $\int_0^\tau K(x,\tau-s)\upsilon(x,s)ds$, tendremos que el error de truncamiento viene dado por:

$$\mathscr{K}_k^n(u)=-\frac{1}{180}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4\frac{\partial^4}{\partial^4 x}(K(x,t-\zeta)u(x,\zeta))\Big|_k^n \tag{3.24}$$
$$\text{para algún } \zeta\in[0,t]$$

Finalmente, tomando el módulo de las ecuaciones (3.23) y (3.24) el error de Truncamiento total es:

$$|T_k^n|=\left|\frac{1}{2}-\theta\right|O(\Delta t)+O((\Delta x)^2)+\left|\frac{1}{6}-\frac{\theta}{2}\right|O((\Delta t)^2)+O((\Delta t)^3)+O((\Delta t)^4) \tag{3.25}$$

Donde $O((\Delta t)^4)$ corresponde al operador integral.

Para $\theta=\frac{1}{2}$ el error de truncamiento tendria el orden $O((\Delta x)^2)$+$O((\Delta t)^2)+O((\Delta t)^3)+O((\Delta t)^4)$. Para $\theta=\frac{1}{3}$, tendría el orden $O(\Delta t)+O((\Delta x)^2)$+$O((\Delta t)^3)+O((\Delta t)^4)$. Y para $\theta\in[0,1]\backslash\{\frac{1}{3},\frac{1}{2}\}$ tendría el orden $O(\Delta t)+O((\Delta x)^2)+O((\Delta t)^2)+O((\Delta t)^3)+O((\Delta t)^4)$. Entonces tendríamos que el esquema numérico usado para resolver la ecuación integro-diferencial parcial es consistente incondicionalmente, debido a que en todos estos casos mencionados el error de truncamiento tiende a cero cuando $\Delta x\to 0$ y $\Delta t\to 0$.

Esto implica que, independientemente de la elección del valor de θ, el método garantiza una aproximación adecuada a la solución exacta a medida que los pasos de malla se reducen. Este comportamiento es fundamental para asegurar la validez y aplicabilidad del esquema en una amplia variedad de escenarios donde la precisión y estabilidad son cruciales.

3.4 Estudio de la Estabilidad del Esquema numérico dado

Para usar el Teorema de Gershgorin vamos poner en forma matricial la ecuación (3.11):

$$\begin{gathered} A[v_k^1] = B[v_k^0] + \Delta t F_k^n \\ A[v_k^{n+1}] = B[v_k^n] + \Delta t F_k^n - \Delta t I_k^n \\ v_k^0 = g_k, \;\; v_0^n = \phi_0^n, \; v_{N_x}^n = \phi_{N_x}^n \\ n = 1,2,...,N_t - 1 \end{gathered}$$

Para lo cual usaremos las definiciones de los operadores A y B dadas en la ecuación (3.5). Así tendremos:

$$(1+2\theta)v_k^{n+1} - \theta r(v_{k+1}^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}) = (1-2\tilde{\theta})v_k^n + \tilde{\theta} r(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n) + \Delta t F_k^n - \Delta t I_k^n$$

Ordenando, tendriamos:

$$-\theta r v_{k-1}^{n+1} + (1+2\theta r)v_k^{n+1} - \theta r v_{k+1}^{n+1} = \tilde{\theta} r v_{k-1}^n + (1-2\tilde{\theta} r)v_k^n + \tilde{\theta} r v_{k+1}^n + \Delta t F_k^n - \Delta t I_k^n \tag{3.26}$$

• Para k=1 tenemos:

$$-\theta r v_0^{n+1} + (1+2\theta r)v_1^{n+1} - \theta r v_2^{n+1} = \tilde{\theta} r v_0^n + (1-2\tilde{\theta} r)v_1^n + \tilde{\theta} r v_2^n + \Delta t F_1^n - \Delta t I_1^n$$

De las condiciones de Frontera tenemos que $v_0^n = \phi_0^n$, y $v_0^{n+1} = \phi_0^{n+1}$. Por lo que se tendría:

$$(1+2\theta r)v_1^{n+1} - \theta r v_2^{n+1} = (1-2\tilde{\theta} r)v_1^n + \tilde{\theta} r v_2^n + \Delta t F_1^n + \tilde{\theta} r \phi_0^n + \theta r \phi_0^{n+1} - \Delta t I_k^n \tag{3.27}$$

• Para k=2 tenemos:

$$-\theta r v_1^{n+1} + (1+2\theta r)v_2^{n+1} - \theta r v_3^{n+1} = \tilde{\theta} r v_1^n + (1-2\tilde{\theta} r)v_2^n + \tilde{\theta} r v_3^n + \Delta t F_2^n - \Delta t I_2^n \tag{3.28}$$

• Para k=3 tenemos:

$$-\theta r v_2^{n+1} + (1+2\theta r)v_3^{n+1} - \theta r v_4^{n+1} = \tilde{\theta} r v_2^n + (1-2\tilde{\theta} r)v_3^n + \tilde{\theta} r v_4^n + \Delta t F_3^n - \Delta t I_3^n \tag{3.29}$$

Continuando

• Para k=$N_x - 2$ tenemos:

$$\begin{aligned} -\theta r v_{N_x-3}^{n+1} + (1+2\theta r)v_{N_x-2}^{n+1} - \theta r v_{N_x-1}^{n+1} = \tilde{\theta} r v_{N_x-3}^n + (1-2\tilde{\theta} r)v_{N_x-2}^n + \\ \tilde{\theta} r v_{N_x-1}^n + \Delta t F_{N_x-2}^n - \Delta t I_{N_x-2}^n \end{aligned} \tag{3.30}$$

• Para k=$N_x - 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} -\theta r v_{N_x-2}^{n+1} + (1+2\theta r)v_{N_x-1}^{n+1} - \theta r v_{N_x}^{n+1} = \tilde{\theta} r v_{N_x-2}^n + (1-2\tilde{\theta} r)v_{N_x-1}^n + \tilde{\theta} r v_{N_x}^n + \\ \Delta t F_{N_x-1}^n - \Delta t I_{N_x-1}^n \end{aligned}$$

De las condiciones de Frontera tenemos que $v_{N_x}^n = \phi_{N_x}^n$, y $v_{N_x}^{n+1} = \phi_{N_x}^{n+1}$. Por lo que se tendría:

$$\begin{aligned} (1+2\theta r)v_{N_x-1}^{n+1} - \theta r v_{N_x-2}^{n+1} = (1-2\tilde{\theta} r)v_{N_x-1}^n + \tilde{\theta} r v_{N_x-2}^n + \Delta t F_{N_x-1}^n + \tilde{\theta} r \phi_{N_x}^n \\ + \theta r \phi_{N_x}^{n+1} - \Delta t I_{N_x-1}^n \end{aligned}$$

Ordenando apropiadamente:

$$\begin{aligned} -\theta r v_{N_x-2}^{n+1} + (1+2\theta r)v_{N_x-1}^{n+1} = \tilde{\theta} r v_{N_x-2}^n + (1-2\tilde{\theta} r)v_{N_x-1}^n + \\ \Delta t F_{N_x-1}^n + \tilde{\theta} r \phi_{N_x}^n + \theta r \phi_{N_x}^{n+1} - \Delta t I_{N_x-1}^n \end{aligned} \tag{3.31}$$

Observando estas ecuaciones, de (3.27) a (3.31), podemos reunirlas en una expresión matricial:

$$Av^n = Bv^{n-1} + F^n - I^n \tag{3.32}$$

Donde A, B $\in \mathbb{R}^{(Nx-1)x(N_x-1)}$ son matrices tridiagonales, dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\theta & -\theta r & & & \\ -\theta r & 1+2\theta & -\theta r & & \\ & -\theta r & 1+2\theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\theta r \\ & & & -\theta r & 1+2\theta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-2\tilde{\theta} r & \tilde{\theta} r & & & \\ \tilde{\theta} r & 1-2\tilde{\theta} r & \tilde{\theta} r & & \\ & \tilde{\theta} r & 1-2\tilde{\theta} r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tilde{\theta} r \\ & & & \tilde{\theta} r & 1-2\tilde{\theta} r \end{pmatrix}$$

Además:

$$\begin{aligned} v^n &= [v_1^n, v_2^n, ..., v_{N_x-1}^n]^T, \\ F^n &= [\Delta t F_1^n + \tilde{\theta} r \phi_0^n + \theta r \phi_0^{n+1}, \Delta t F_2^n, \cdots, \Delta t F_{N_x-2}^n, \Delta t F_{N_x-1}^n + \tilde{\theta} r \phi_{N_x}^n + \theta r \phi_{N_x}^{n+1}]^T \\ v^0 &= [v_1^0, v_2^0, ..., v_{N_x-1}^0]^T, \\ F^0 &= [\Delta t F_1^0 + \tilde{\theta} r \phi_0^n + \theta r \phi_0^{n+1}, \Delta t F_2^0, \cdots, \Delta t F_{N_x-2}^0, \Delta t F_{N_x-1}^0 + \tilde{\theta} r \phi_{N_x}^n + \theta r \phi_{N_x}^{n+1}]^T \\ I^n &= [\Delta t I_1^n, \Delta t I_2^n, ..., \Delta t I_{N_x-1}^n]^T \end{aligned}$$

Ahora para la parte integral (I^n) tenemos de le ecuación (3.9, la cual multiplicaremos por Δt:

$$\begin{aligned} \Delta t I_k^n = \frac{(\Delta t)^2}{3} K(x_k, t_n - t_0) V_k^0 + \frac{4}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{n/2} K(x_k, t_n - t_{2j-1}) v_k^{2j-1} (1 - H(t_{2j-1} - t_n)) \\ + \frac{2}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{n/2-1} K(x_k, t_n - t_{2j}) v_k^{2j} (1 - H(t_{2j} - t_n)) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Sea S_k^n el primer sumando de la ecuación (3.33):

$$S_k^n = \frac{(\Delta t)^2}{3} K(x_k, t_n - t_0) v_k^0$$

Así tenemos:

- Para k=1 :

$$S_1^n = \frac{(\Delta t)^2}{3} K(x_1, t_n - t_0) v_1^0 \tag{3.34}$$

- Para k=2 :

$$S_2^n = \frac{(\Delta t)^2}{3} K(x_2, t_n - t_0) v_2^0 \tag{3.35}$$

- Para k=3 :

$$S_3^n = \frac{(\Delta t)^2}{3} K(x_3, t_n - t_0) v_3^0 \tag{3.36}$$

Y así sucesivamente:

- Para k=$N_x - 2$:

$$S_{N_x-2}^n = \frac{(\Delta t)^2}{3} K(x_{N_x-2}, t_n - t_0) v_{N_x-2}^0 \tag{3.37}$$

- Para k=$N_x - 1$:

$$S_{N_x-1}^n = \frac{(\Delta t)^2}{3} K(x_{N_x-1}, t_n - t_0) v_{N_x-1}^0 \tag{3.38}$$

Poniéndo las ecuaciones (3.34) al (3.38) en forma matricial:

$$S^n = \begin{pmatrix} S_1^n \\ S_2^n \\ \vdots \\ S_{N_x-1}^n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{(\Delta t)^2}{3} \begin{pmatrix} K(x_1, t_n - t_0) & & & \\ & K(x_2, t_n - t_0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & K(x_{N_x-1}, t_n - t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ \vdots \\ v_{N_x-1}^0 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} S^n &= \frac{(\Delta t)^2}{3} diag(\lambda_{11}^{(n,0)}, \lambda_{22}^{(n,0)}, ..., \lambda_{N_x-1 N_x-1}^{(n,0)})^T \mathbf{v^n} \\ \mathbf{v^n} &= [v_1^n, v_2^n, ..., v_{n_x-1}^n] \\ \lambda_{kk}^{(n,0)} &= K(x_k, t_n - t_0) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Llamemos M_k^n al segundo término de la ecuación (3.33):

$$M_k^n = \frac{4}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{n/2} K(x_k, t_n - t_{2j-1}) v_k^{2j-1} (1 - H(t_{2j-1} - t_n))$$

Tenemos, por definición que, $H(t_{2j-1} - tn) = 0$ para un n fijo, y para j=1,2,...,$\frac{n}{2}$. Así tenemos:

$$M_k^n = \frac{4}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{n/2} K(x_k, t_n - t_{2j-1}) v_k^{2j-1}$$

Desarrollando:

- Para k=1 :

$$M_1^n = \frac{4}{3}(\Delta t)^2 \left(K(x_1, t_n - t_1) v_1^1 + K(x_1, t_n - t_3) v_1^3 + \cdots + K(x_1, t_n - t_{n-1}) v_1^{n-1} \right) \tag{3.41}$$

- Para k=2 :

$$M_2^n = \frac{4}{3}(\Delta t)^2 \left(K(x_2, t_n - t_1) v_2^1 + K(x_2, t_n - t_3) v_2^3 + \cdots + K(x_2, t_n - t_{n-1}) v_2^{n-1} \right) \tag{3.42}$$

- Para k=3 :

$$M_3^n = \frac{4}{3}(\Delta t)^2 \left(K(x_3, t_n - t_1) v_3^1 + K(x_3, t_n - t_3) v_3^3 + \cdots + K(x_3, t_n - t_{n-1}) v_3^{n-1} \right) \tag{3.43}$$

Así sucesivamente

- Para k=$N_x - 2$:

$$\begin{aligned} M_{N_x-1}^n = \frac{4}{3}(\Delta t)^2 (& K(x_{N_x-1}, t_n - t_1) v_{N_x-1}^1 + K(x_{N_x-1}, t_n - t_3) v_{N_x-1}^3 + \ldots \\ & + K(x_{N_x-1}, t_n - t_{n-1}) v_{N_x-2}^{n-1}) \end{aligned} \tag{3.44}$$

- Para k=$N_x - 1$:

$$\begin{aligned} M_{N_x-1}^n = \frac{4}{3}(\Delta t)^2 (& K(x_{N_x-1}, t_n - t_1) v_{N_x-1}^1 + K(x_{N_x-1}, t_n - t_3) v_{N_x-1}^3 + \ldots \\ & + K(x_{N_x-1}, t_n - t_{n-1}) v_{N_x-1}^{n-1}) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Agrupando los términos de las ecuaciones (3.41) al (3.45), por columnas, tenemos :

$$M^n = \begin{pmatrix} M_1^n \\ M_2^n \\ M_3^n \\ \vdots \\ M_{N_x-1}^n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{4}{3}(\Delta t)^2 \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(n,1)} & & & & \\ & \lambda_{11}^{(n,1)} & & & \\ & & \lambda_{11}^{(n,1)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{11}^{(n,1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ \vdots \\ v_{N_x-1}^1 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{4}{3}(\Delta t)^2 \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(n,3)} & & & & \\ & \lambda_{11}^{(n,3)} & & & \\ & & \lambda_{11}^{(n,3)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{11}^{(n,3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \\ \vdots \\ v_{N_x-1}^3 \end{pmatrix} + \tag{3.46}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{4}{3}(\Delta t)^2 \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(n,n-1)} & & & & \\ & \lambda_{11}^{(n,n-1)} & & & \\ & & \lambda_{11}^{(n,n-1)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{11}^{(n,n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{n-1} \\ v_2^{n-1} \\ v_3^{n-1} \\ \vdots \\ v_{N_x-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Con:

$$\lambda_{kk}^{(n,j)} = K(x_k, t_n - t_j);\ j\ es\ impar$$

$$M^n = \frac{4}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=1,3,5}^{n-1} diag(\lambda_{11}^{(n,j)}, \lambda_{22}^{(n,j)}, ..., \lambda_{N_x-1N_x-1}^{(n,j)})^T \mathbf{v^j} \tag{3.47}$$

$$\mathbf{v^j} = [v_1^j, v_2^j, ..., v_{n_x-1}^j]^T\ ;\ j\ es\ impar$$

Analogamente, llamemos N_k^n el tercer término de la ecuación (3.33). Entonces:

$$N_k^n = \frac{2}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{n/2-1} K(x_k, t_n - t_{2j}) v_k^{2j} (1 - H(t_{2j} - t_n))$$

Tenemos $H(t_{2j} - tn) = 0$ para todo j=1,2,...,$\frac{n}{2} - 1$. Así tenemos:

$$N_k^n = \frac{2}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{n/2-1} K(x_k, t_n - t_{2j}) v_k^{2j} \tag{3.48}$$

Desarrollando:

- Para k=1 :

$$N_1^n = \frac{2}{3}(\Delta t)^2 \left(K(x_1, t_n - t_2) v_1^2 + K(x_1, t_n - t_2) v_1^4 + \cdots + K(x_1, t_n - t_{n-2}) v_1^{n-2} \right) \tag{3.49}$$

- Para k=2 :

$$N_2^n = \frac{2}{3}(\Delta t)^2 \left(K(x_2, t_n - t_2) v_2^2 + K(x_2, t_n - t_4) v_2^4 + \cdots + K(x_2, t_n - t_{n-2}) v_2^{n-2} \right) \tag{3.50}$$

- Para k=3 :

$$N_3^n = \frac{2}{3}(\Delta t)^2 \left(K(x_3, t_n - t_2) v_3^2 + K(x_3, t_n - t_4) v_3^4 + \cdots + K(x_3, t_n - t_{n-2}) v_3^{n-2} \right) \tag{3.51}$$

Así sucesivamente

- Para k=$N_x - 2$:

$$\begin{aligned} N_{N_x-1}^n = \frac{2}{3}(\Delta t)^2 (K(x_{N_x-1}, t_n - t_2) v_{N_x-1}^2 + K(x_{N_x-1}, t_n - t_4) v_{N_x-1}^4 + \dots \\ + K(x_{N_x-1}, t_n - t_{n-2}) v_{N_x-2}^{n-2}) \end{aligned} \tag{3.52}$$

- Para k=$N_x - 1$:

$$\begin{aligned} N_{N_x-1}^n = \frac{2}{3}(\Delta t)^2 (K(x_{N_x-1}, t_n - t_2) v_{N_x-1}^2 + K(x_{N_x-1}, t_n - t_4) v_{N_x-1}^4 + \dots \\ + K(x_{N_x-1}, t_n - t_{n-2}) v_{N_x-1}^{n-2}) \end{aligned} \tag{3.53}$$

Agrupando los términos de las ecuaciones (3.49) al (3.53), por columnas, tenemos :

$$N^n = \begin{pmatrix} N_1^n \\ N_2^n \\ N_3^n \\ \vdots \\ N_{N_x-1}^n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{2}{3}(\Delta t)^2 \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(n,2)} & & & & \\ & \lambda_{11}^{(n,2)} & & & \\ & & \lambda_{11}^{(n,2)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{11}^{(n,2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \\ \vdots \\ v_{N_x-1}^2 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{2}{3}(\Delta t)^2 \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(n,4)} & & & & \\ & \lambda_{11}^{(n,4)} & & & \\ & & \lambda_{11}^{(n,4)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{11}^{(n,4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^4 \\ v_2^4 \\ v_3^4 \\ \vdots \\ v_{N_x-1}^4 \end{pmatrix} + \tag{3.54}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{2}{3}(\Delta t)^2 \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(n,n-2)} & & & & \\ & \lambda_{11}^{(n,n-2)} & & & \\ & & \lambda_{11}^{(n,n-2)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{11}^{(n,n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{n-2} \\ v_2^{n-2} \\ v_3^{n-2} \\ \vdots \\ v_{N_x-1}^{n-2} \end{pmatrix}$$

Con:

$$\lambda_{kk}^{(n,j)} = K(x_k, t_n - t_j);\ j\ es\ par$$

$$N^n = \frac{2}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} diag(\lambda_{11}^{(n,j)}, \lambda_{22}^{(n,j)}, ..., \lambda_{N_x-1N_x-1}^{(n,j)})^T \mathbf{v^j} \tag{3.55}$$

$$\mathbf{v^j} = [v_1^j, v_2^j, ..., v_{n_x-1}^j]^T\ ;\ j\ es\ par$$

Así, usando las ecuaciones (3.40), (3.47) y (3.55)en la ecuación (3.33), tenemos:

$$I^n = S^n + M^n + N^n$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I^n =& \frac{(\Delta t)^2}{3} diag(\lambda_{11}^{(n,0)}, \lambda_{22}^{(n,0)}, ..., \lambda_{N_x-1N_x-1}^{(n,0)})^T \mathbf{v^n} + \\ & \frac{4}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=1,3,5}^{n-1} diag(\lambda_{11}^{(n,j)}, \lambda_{22}^{(n,j)}, ..., \lambda_{N_x-1N_x-1}^{(n,j)})^T \mathbf{v^j} + \\ & \frac{2}{3}(\Delta t)^2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} diag(\lambda_{11}^{(n,j)}, \lambda_{22}^{(n,j)}, ..., \lambda_{N_x-1N_x-1}^{(n,j)})^T \mathbf{v^j} \end{aligned}$$

$$\lambda_{kk}^{(n,j)} = K(x_k, t_n - t_j);$$

Escribiéndola de forma mas condensada:

$$I^n = \Lambda^{(n,0)}\mathbf{v^n} + \sum_{j=1,3,5}^{n-1} \Lambda^{(n,j)}\mathbf{v^j} + \sum_{j=2,4,6}^{n-2} \Lambda^{(n,j)}\mathbf{v^j} = \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda^{(n,j)}\mathbf{v^j}$$

O bien

$$\begin{aligned} I^n &= \sum_{j=0}^{n} \Lambda^{(n,j)}\mathbf{v^j},\ n = 1, 2, ..., N_t - 1 \\ \Lambda^{(n,0)} &= \frac{(\Delta t)^2}{3} diag(\lambda_{1,1}^{(n,0)}, \lambda_{2,2}^{(n,0)}, ..., \lambda_{N_x-1,N_x-1}^{(n,0)}), \\ \Lambda^{(n,j)} &= \frac{4}{3}(\Delta t)^2 diag(\lambda_{1,1}^{(n,j)}, \lambda_{2,2}^{(n,j)}, ..., \lambda_{N_x-1,N_x-1}^{(n,)}),\ j\ es\ impar, \\ \Lambda^{(n,j)} &= \frac{2}{3}(\Delta t)^2 diag(\lambda_{1,1}^{(n,j)}, \lambda_{2,2}^{(n,j)}, ..., \lambda_{N_x-1,N_x-1}^{(n,)}),\ j\ es\ par, \\ \lambda_{kk}^{(n,j)} &= K(x_k, t_n - t_j). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Reemplazando las ecuaciones (3.32) y (3.56) en el esquema numérico inicial (3.11), obtenemos el siguiente esquema numérico en forma matricial:

$$\begin{aligned} A\mathbf{v^1} &= B\mathbf{v^0} + F^0 \\ A\mathbf{v^{n+1}} &= B\mathbf{v^n} + F^n - \sum_{j=0}^{n} \Lambda^{(n,j)}\mathbf{v^j}, n = 1,2,...N_t - 1, \end{aligned} \tag{3.57}$$

Donde A, B $\in \mathbb{R}^{(Nx-1)x(N_x-1)}$ son matrices tridiagonales, dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\theta & -\theta r & & & \\ -\theta r & 1+2\theta & -\theta r & & \\ & -\theta r & 1+2\theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\theta r \\ & & & -\theta r & 1+2\theta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-2\tilde{\theta}r & \tilde{\theta}r & & & \\ \tilde{\theta}r & 1-2\tilde{\theta}r & \tilde{\theta}r & & \\ & \tilde{\theta}r & 1-2\tilde{\theta}r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tilde{\theta}r \\ & & & \tilde{\theta}r & 1-2\tilde{\theta}r \end{pmatrix}$$

Además:

$$\begin{aligned} \mathbf{v^n} &= [v_1^n, v_2^n, ..., v_{N_x-1}^n]^T, \\ F^n &= [\Delta F_1^n + \tilde{\theta} r \phi_0^n + \theta r \phi_0^{n+1}, \Delta F_2^n, \cdots, \Delta F_{N_x-2}^n, \Delta F_{N_x-1}^n + \tilde{\theta} r \phi_{N_x}^n + \theta r \phi_{N_x}^{n+1}]^T \\ \Lambda^{(n,0)} &= \frac{(\Delta t)^2}{3} diag(\lambda_{1,1}^{(n,0)}, \lambda_{2,2}^{(n,0)}, ..., \lambda_{N_x-1,N_x-1}^{(n,0)}), \\ \Lambda^{(n,j)} &= \frac{4}{3}(\Delta t)^2 diag(\lambda_{1,1}^{(n,j)}, \lambda_{2,2}^{(n,j)}, ..., \lambda_{N_x-1,N_x-1}^{(n,)}),\ j\ es\ impar, \\ \Lambda^{(n,j)} &= \frac{2}{3}(\Delta t)^2 diag(\lambda_{1,1}^{(n,j)}, \lambda_{2,2}^{(n,j)}, ..., \lambda_{N_x-1,N_x-1}^{(n,)}),\ j\ es\ par, \\ \lambda_{kk}^{(n,j)} &= K(x_k, t_n - t_j). \end{aligned}$$

Vamos a hacer uso de las matrices A y B definidas en la ecuación (3.57) . Primero escribiremos B de la siguiente manera:

$$B = A - rC, \quad \text{donde C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

Demostración.

$$B = \begin{pmatrix} 1-2\tilde{\theta}r & \tilde{\theta}r & & & \\ \tilde{\theta}r & 1-2\tilde{\theta}r & \tilde{\theta}r & & \\ & \tilde{\theta}r & 1-2\tilde{\theta}r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tilde{\theta}r \\ & & & \tilde{\theta}r & 1-2\tilde{\theta}r \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-2(1-\theta)r & (1-\theta)r & & & \\ (1-\theta)r & 1-2(1-\theta)r & (1-\theta)r & & \\ & (1-\theta)r & 1-2(1-\theta)r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & (1-\theta)r \\ & & & (1-\theta)r & 1-2(1-\theta)r \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+2\theta r-2r & -\theta r+r & & & \\ -\theta r+r & 1+2\theta r-2r & -\theta r+r & & \\ & -\theta r+r & 1+2\theta r-2r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\theta r+r \\ & & & -\theta r+r & 1+2\theta r-2r \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+2\theta r & -\theta r & & & \\ -\theta r & 1+2\theta r & -\theta r & & \\ & -\theta r & 1+2\theta r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\theta r \\ & & & -\theta r & 1+2\theta r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2r & r & & & \\ r & -2r & r & & \\ & r & -2r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & r \\ & & & r & -2r \end{pmatrix} =$$

$$A - r \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

□

3.4.1 Análisis de Estabilidad

Usando la ecuación (3.58) en el esquema numérico (3.57), tenemos:

$$\mathbf{v^1} = (I - rA^{-1}C)\mathbf{v^0} + A^{-1}F^0,$$
$$\mathbf{v^{n+1}} = (I - rA^{-1}C - A^{-1}\Lambda^{(n,j)})\mathbf{v^n} + A^{-1}F^n - A^{-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\Lambda^{(n,j)}v^j\right) \tag{3.59}$$

n=1,2,...,$N_t - 1$, I es la matriz identidad $\in \mathbb{R}^{(N_x-1)x(N_x-1)}$

Para el analisis de la Estabilidad, de acuerdo al Teorema de Gershgorin buscaremos las condiciones suficientes para que los autovales de $I - rA^{-1}C$ y de $I - rA^{-1}C - A^{-1}\Lambda^{(n,j)}$ sean menores o iguales a 1.

Para el primer nivel de tiempo t=1

El primer nivel de tiempo, por el teorema Gershgorin tenemos que hallar la norma segunda de la matriz $I - rA^{-1}C$ y debe cumplirse que sea menor o igual a 1. Por lo tanto:

$$\|I - rA^{-1}C\|_2 = max\left|\lambda(I - rA^{-1}C)\right| \leq$$
$$\left|1 - r\frac{\max\lambda(C)}{\max\lambda(A)}\right| \leq 1 \Rightarrow \left|1 - r\left(\frac{2 + 2cos\frac{\pi}{N_x}}{1 + 2\theta r + 2\theta r cos\frac{\pi}{N_x}}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow$$
$$\left|1 - r\left(\frac{2(1 + cos\frac{\pi}{N_x})}{1 + 2\theta r(1 + cos\frac{\pi}{N_x})}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow$$
$$-1 \leq 1 - r\left(\frac{2(1 + cos\frac{\pi}{N_x})}{1 + 2\theta r(1 + cos\frac{\pi}{N_x})}\right) \leq 1 \tag{3.60}$$

- Para $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$:

  - Para la parte derecha de la desigualdad (3.60) tenemos:

$$1 - r\left(\frac{2(1 + cos\frac{\pi}{N_x})}{1 + 2\theta r(1 + cos\frac{\pi}{N_x})}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

Sea $a = 1 + cos\frac{\pi}{N_x}$, entonces:

$$1 - r\left(\frac{2(a)}{1 + 2\theta r(a)}\right) \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{2ra}{1 + 2\theta ra} \leq 1 \Rightarrow$$
$$\frac{1 + 2\theta ra - 2ra}{1 + 2\theta ra} \leq 1 \Rightarrow$$
$$\frac{1 + 2(\theta - 1)ra}{1 + 2\theta ra} \leq 1 \Rightarrow$$

Como $\theta ra > 0$ entonces $1 + 2\theta ra > 0$ y podemos multiplicar por esta ambos lados de la desigualdad:

$$1 + 2(\theta - 1)ra \leq 1 + 2\theta ra \Rightarrow$$

$$\theta - 1 \leq \theta$$

Lo cual es cierto para todo $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$

– Para la parte izquierda de la desigualdad (3.60) tenemos:

$$-1 \leq 1 - r\left(\frac{2(1 + cos\frac{\pi}{N_x})}{1 + 2\theta r(1 + cos\frac{\pi}{N_x})}\right) \Rightarrow$$

Sea $a = 1 + cos\frac{\pi}{N_x}$, entonces:

$$-1 \leq 1 - r\left(\frac{2(a)}{1 + 2\theta r(a)}\right) \Rightarrow$$

$$-1 \leq 1 - \frac{2ra}{1 + 2\theta ra} \Rightarrow$$

$$-1 \leq \frac{1 + 2\theta ra - 2ra}{1 + 2\theta ra} \Rightarrow$$

$$-1 \leq \frac{1 + 2(\theta - 1)ra}{1 + 2\theta ra} \Rightarrow$$

Como $\theta ra > 0$ entonces $1 + 2\theta ra > 0$ y podemos multiplicar por esta ambos lados de la desigualdad:

$$-1 - 2\theta ra \leq 1 + 2(\theta - 1)ra \Rightarrow$$

$$-1 - 2\theta ra \leq 1 + 2\theta ra - 2ra \Rightarrow$$

$$0 \leq 2 + 4\theta ra - 2ra \Rightarrow$$

$$0 \leq 1 + 2\theta ra - ra \Rightarrow$$

$$0 \leq 1 + 2ra(\theta - \frac{1}{2})$$

Lo que siempre es cierto ya que en este caso $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ Por lo tanto, se concluye que para el primer paso de t, la condición de estabilidad se sontiene incondicionalmente. Ahora veamos para $\theta \in [0, \frac{1}{2})$

- Para $\theta \in [0, \frac{1}{2})$:

  - Para la parte derecha de la desidualdad 3.60:

$$1 - r\left(\frac{2(1+cos\frac{\pi}{N_x})}{1+2\theta r(1+cos\frac{\pi}{N_x})}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

    Sea $a = 1 + cos\frac{\pi}{N_x}$, entonces:

$$1 - r\left(\frac{2(a)}{1+2\theta r(a)}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{2ra}{1+2\theta ra} \leq 1 \Rightarrow$$
$$\frac{1+2\theta ra-2ra}{1+2\theta ra} \leq 1 \Rightarrow$$
$$\frac{1+2(\theta-1)ra}{1+2\theta ra} \leq 1 \Rightarrow$$

    Como $\theta ra > 0$ entonces $1 + 2\theta ra > 0$ y podemos multiplicar por esta ambos lados de la desigualdad:

$$1 + 2(\theta-1)ra \leq 1 + 2\theta ra \Rightarrow$$

$$\theta - 1 \leq \theta$$

    Lo que siempre es cierto.

  - Para la parte negativa de la desidualdad (3.60):

$$-1 \leq 1 - r\left(\frac{2(1+cos\frac{\pi}{N_x})}{1+2\theta r(1+cos\frac{\pi}{N_x})}\right) \Rightarrow$$

    Sea $a = 1 + cos\frac{\pi}{N_x}$, entonces:

$$-1 \leq 1 - r\left(\frac{2(a)}{1+2\theta r(a)}\right) \Rightarrow$$

$$-1 \leq 1 - \frac{2ra}{1+2\theta ra} \Rightarrow$$
$$-1 \leq \frac{1+2\theta ra-2ra}{1+2\theta ra} \Rightarrow$$
$$-1 \leq \frac{1+2(\theta-1)ra}{1+2\theta ra} \Rightarrow$$

    Como $\theta ra > 0$ entonces $1 + 2\theta ra > 0$ y podemos multiplicar por esta ambos lados de la desigualdad:

$$-1 - 2\theta ra \leq 1 + 2(\theta-1)ra \Rightarrow$$

$$-1 - 2\theta ra \leq 1 + 2\theta ra - 2ra \Rightarrow$$
$$0 \leq 2 + 4\theta ra - 2ra \Rightarrow$$

$$0 \leq 1 + 2\theta ra - ra \Rightarrow$$

$$ra - 2\theta ra \leq 1 \Rightarrow$$

$$r(1-2\theta)a \leq 1 \Rightarrow$$

Como en este $0 \leq \theta < \frac{1}{2},$ entonces $0 < 1-2\theta \leq 1$, como a también es positivo, entonces podemos dividir $(1-2\theta)a$, a ambos miembros de la desigualdad:

$$r \leq \frac{1}{(1-2\theta)a} \Rightarrow$$

$$r \leq \frac{1}{(1-2\theta)(1+cos\frac{\pi}{N_x})} \Rightarrow$$

Aplicando el límite cuando $N_x \to \infty$ tenemos que:

$$r \leq \frac{1}{(1-2\theta)}$$

O bien

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{(1-2\theta)}$$

De esta parte, usando el Teorema (2.8) se conluye que, para este nivel de tiempo, t=1, el esquema numérico es estable incondicionalmente para $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ y condicionalmente estable para $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ teniendo que cumplirse en este caso:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{(1-2\theta)},\ \theta \in [0, \frac{1}{2})$$

Para los siguientes niveles de tiempo t=n, n >1

En los consecutivos niveles de tiempo, por el teorema Gershgorin, primero tenemos que hallar la norma 2 ($\|.\|_2$) de la matriz $(I - rA^{-1}C - A^{-1}\Lambda^{(n,n)})$ y debe cumplirse que sea menor o igual a 1.(Ver Observación(2.7.1)) Por lo tanto:

$$\|I - rA^{-1}C - A^{-1}\Lambda^{(n,n)}\|_2 = max\lambda(I - rA^{-1}C - A^{-1}\Lambda^{(n,n)}) \leq$$
$$\leq \left|1 - r\frac{\text{máx}\,\lambda(C)}{\text{máx}\,\lambda(A)} - \frac{\text{máx}\,\lambda(\Lambda^{(n,n)})}{max\lambda(A)}\right| \leq 1 \Rightarrow \tag{3.61}$$

(La función continua K(x,t), acota cada $\lambda_{kk}^{(n,n)}$, si denotamos $K = \text{máx}|K(x,t)|$ entonces cualquier autovalor todo de cada una de estas matrices $\Lambda^{(n,n)}$ estaría en el intervalo abierto $(-2K(\Delta t)^2, 2K(\Delta t)^2)$). Así continuando con la ecuación (3.61) tendríamos:

$$\left|1 - r\frac{max\lambda(C)}{max\lambda\ (A)} - \frac{max\lambda\ (\Lambda^{(n,n)})}{max\lambda(A)}\right| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\left|1 - r\left(\frac{2 + 2cos\frac{\pi}{N_x}}{1 + 2\theta r + 2\theta r cos\frac{\pi}{N_x}}\right) - \frac{2K(\Delta t)^2}{1 + 2\theta r + 2\theta r cos\frac{\pi}{N_x}}\right| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\left|1-r\left(\frac{2(1+cos\frac{\pi}{N_x})}{1+2\theta r(1+cos\frac{\pi}{N_x})}\right)-\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta r(1+cos\frac{\pi}{N_x})}\right|\leq 1 \tag{3.62}$$

Para hallar la condición suficiente, tomeremos varios casos con respecto a las cotas de la función K.

- Cuando $K < O(10)$ la expresión de la desigualdad (3.62):

$$\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta r+2\theta r cos\frac{\pi}{N_x}} =$$

$$\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta r(1+cos\frac{\pi}{N_x})} \xrightarrow[N_x\to\infty]{} \frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta r}$$

  Debido a que estamos asumiendo $K < O(10)$ la última expresión será despreciable en la desigualdad (3.62). Por lo tanto esta quedaría como:

$$\left|1-r\left(\frac{2(1+cos\frac{\pi}{N_x})}{1+2\theta r(1+cos\frac{\pi}{N_x})}\right)\right|\leq 1$$

  Así, el analisis sería al mismo realizado para la parte cuando t=1. A saber:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{(1-2\theta)},\ K < O(10) \tag{3.63}$$

- Cuando $K > O(10)$
  Haciendo a=$1+cos\frac{\pi}{N_x}$ la desigualdad (3.62) se convierte en:

$$\left|1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)-\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\right|\leq 1 \tag{3.64}$$

  Usando las propiedades de desigualdades con valores absolutos:

$$\left|1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)\right|-\left|\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\right|\leq\left|1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)-\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\right|\leq 1\Rightarrow$$

$$\left|1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)\right|-\left|\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\right|\leq 1\Rightarrow$$

$$\left|1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)\right|\leq 1+\left|\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\right|\Rightarrow$$

$$\left|1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)\right|\leq 1+\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}$$

$$-1-\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\leq 1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)\leq 1+\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra} \tag{3.65}$$

Resolviendo la desigualdad (3.65):

- Primero el lado derecho de la desigualdad :

  $$1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)\leq 1+\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}$$

  Entonces tenemos:

  $$0\leq +\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}+\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)$$

  Que siempre se cumple para todo valor de r y θ, ya que todos los términos son positivos

- Resolviendo el lado izquierdo de la desigualdad

  $$-1-\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\leq 1-\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)\Rightarrow$$

  $$\left(\frac{2ra}{1+2\theta ra}\right)-2-\frac{2K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\leq 0\Rightarrow$$

  $$\left(\frac{ra}{1+2\theta ra}\right)-1-\frac{K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\leq 0\Rightarrow$$

  $$\left(\frac{ra-1-2\theta ra}{1+2\theta ra}\right)-\frac{K(\Delta t)^2}{1+2\theta ra}\leq 0\Rightarrow$$

  $$ra(1-2\theta)-1-K(\Delta t)^2\leq 0 \tag{3.66}$$

  Ya que $1+2\theta ra\geqslant 0,\ \forall\theta$
  Si $\theta\in[\frac{1}{2},1]$ entonces se cumple que $1-2\theta\leq 0$. Por lo tanto la desigualdad (3.66) se cumple siempre.Y Si $\theta\in[0,\frac{1}{2})$ entonces se cumple que $1-2\theta>0$ .Por lo tanto , analizando la desigualdad (3.66) tenemos:

  $$r\leq\frac{1+K(\Delta t)^2}{a(1-2\theta)}\Rightarrow$$

  $$r\leq\frac{1+K(\Delta t)^2}{(1+cos\frac{\pi}{n_x})(1-2\theta)}$$

  Tomando limite cuando $N_x\to\infty$

  $$\Rightarrow r\leq\frac{1+K(\Delta t)^2}{2(1-2\theta)}\Rightarrow$$

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1+K(\Delta t)^2}{2(1-2\theta)} \Rightarrow$$

$$0 \leq \frac{K(\Delta t)^2}{2(1-2\theta)} - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2(1-2\theta)} \tag{3.67}$$

Analizando la desigualdad (3.67). Hallamos su discriminante:

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{(\Delta x)^4} - \frac{K}{(1-2\theta)^2}$$

* Para $\hat{\Delta} < 0$, tenemos:

$$1 < \frac{K(\Delta x)^4}{(1-2\theta)^2}$$

Y por ende, tenemos dos soluciones complejas. Pero podemos considerar a $K > O(10^3)$. Entonces despejando Δt en la desigualdad (3.67) tenemos:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2 + K(\Delta x)^2(\Delta t)^2}{2(1-2\theta)} \Rightarrow$$

$$\Delta t \leqslant \frac{(\Delta x)^2}{2(1-2\theta)}$$

Ya que el término $K(\Delta x)^2(\Delta t)^2$ puede despreciarse.
En resumen, tenemos, en estas condiciones particulares, las condiciones para que se cumpla la desigualdad (3.65), lo cual garantiza la estabilidad del esquema numérico en estas condiciones:

$$\Delta t \leqslant \frac{(\Delta x)^2}{2(1-2\theta)},\ 1 < \frac{K(\Delta x)^4}{(1-2\theta)^2},\ K > O(10^3) \tag{3.68}$$

* Para $\hat{\Delta} = 0$ la desigualdad (3.67) se vuelve:

$$\left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} - 1\right)^2 + \frac{2\theta}{1-2\theta} \geqslant 0$$

Que siempre se cumple ya que $1-2\theta > 0$

* Para $\hat{\Delta} > 0$:

$$(\Delta x)^2 < \frac{(1-2\theta)}{\sqrt{K}}$$

Lo cual significa que tenemos dos raices δ_1 y δ_2 en la desigualdad (3.67), y Δt debe pertenecer a $(0, \delta_1)$ o $(\delta_2, +\infty)$ para que se cumpla esta. Esto significa que Δt no es necesariamente pequeña. De (3.67) , tenemos:

$$0 \leq \frac{K(\Delta t)^2}{2(1-2\theta)} - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2(1-2\theta)} \Rightarrow$$

Multiplicando por $2(1-2\theta) > 0$:

$$\Rightarrow 0 \leq K(\Delta t)^2 - \frac{2(1-2\theta)\Delta t}{(\Delta x)^2} + 1$$

Si consideramos $O(10) < K < O(10^2)$, entonces el primer término de la inecuación $K(\Delta t)^2$ puede despreciarse, así tenemos:

$$0 \leq -\frac{2(1-2\theta)\Delta t}{(\Delta x)^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2(1-2\theta)\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2(1-2\theta)} \Rightarrow$$

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2\sqrt{K}} \leq \frac{1}{\sqrt{K}}$$

Ya que $(\Delta x)^2 < \frac{(1-2\theta)}{\sqrt{K}}$

En resumen, tenemos, en estas condiciones particulares, las condiciones para que se cumpla la desigualdad (3.65), lo cual garantiza la estabilidad del esquema numérico en estas condiciones:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{K}},\ (\Delta x)^2 < \frac{(1-2\theta)}{\sqrt{K}},\ O(10) < K < O(10^2) \tag{3.69}$$

Solo quedaría analizar la perturbación de $\left\{A^{-1}\Lambda^{(n,j)}\right\}_{j=0}^{n-1}$. Ya que los elementos de $\Lambda^{(n,j)}$ estàn acotados solo seria sufiente que la norma segunda de A^{-1} sea menor que 1, es decir, $||A^{-1}||_2 < 1$, por lo que, usando Teorema (2.8.3):

$$||A^{-1}||_2 = \frac{1}{1+2\theta r(1+cos\frac{(N_x-1)\pi}{N_x})} < 1$$

Cuando $N_x \to +\infty$:

$$\frac{1}{1+2\theta r(1+1)} < 1 \Rightarrow$$

$$1 < 1+4\theta r$$

lo cual es válido para toda condición. Así, por lo tanto se ha demostrado que el esquema numérico es estable incondicionalmente para $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ y condicionalmente estable para $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ con las condiciones de las ecuaciones (3.63), (3.68) y (3.69):

$$\begin{aligned}
&\Delta t \leqslant \frac{(\Delta x)^2}{2(1-2\theta)},\ 1 < \frac{K(\Delta x)^4}{(1-2\theta)^2},\ K > O(10^3) \\
&\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{K}},\ (\Delta x)^2 \leqslant \frac{(1-2\theta)}{\sqrt{K}},\ O(10) < K < O(10^2 \\
&\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{(1-2\theta)},\ K < O(10)
\end{aligned} \tag{3.70}$$

3.5 Convergencia del Esquema Numérico

Por el Teorema de Lax, en vista de haberse demostrado la Consistencia y la Estabilidad de este esquema numérico, se conluye que este esquema numérico que usa el método theta y la regla de Simpson 1/3 es convergente.

Capítulo 4

Simulaciones Numéricas

En este capítulo presentaremos las simulaciones numéricas de la ecuación integro-diferencial parcial usando el método-θ, implementado en lenguaje de programación GNU-OCTAVE. Veremos dos casos, el primero cuando disponemos de la solución analítica de la ecuación, y en el segundo cado cuando no se dispone de la solución analítica.

Primer Caso: Con la solución analítica resuelta

Sea la EIDP [10]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,\tau) - \int_0^\tau K(x,\tau - s)u(x,s)ds, \quad x \in \Omega, \tau > 0, \tag{4.1}$$

Con el Kernel definido por:

$$K(x,t) = e^{xt},$$

Y las siguientes condiciones de contorno : $u(0,t) = sen(t),\ u(1,t) = 0$; junto con la condición inicial $u(x,0) = 0$.
La función fuente está dada por:

$$F(x,t) = (1-x^2)cos(t) + 2sen(t) - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)(cos(t) + xsen(t) - e^{xt}),$$

La solución analítica del problema es:

$$u(x,t) = (1-x^2)sen(t),\ x \in [0,1], t \in [0,1]$$

Luego, para el esquema numérico usaremos $(N_x, N_t) = (16, 512)$. En este caso, para el dominio del problema con $(L,T) = (1,1)$, tenemos que $K = max|K(x,y)| = 1$, por lo tanto, para garantizar la estabilidad se debe cumplir la condición:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2(1-2\theta)} \tag{4.2}$$

La figura 4.1 muestra la solución numérica para $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$.
La figura 4.2 muestra los errores absolutos respectivos para estos valores de θ.El cuadro (4.1) muestra los errores máximos con respecto a la solución analítica.

Figura 4.1: Soluciones numéricas para el primer caso, con $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$

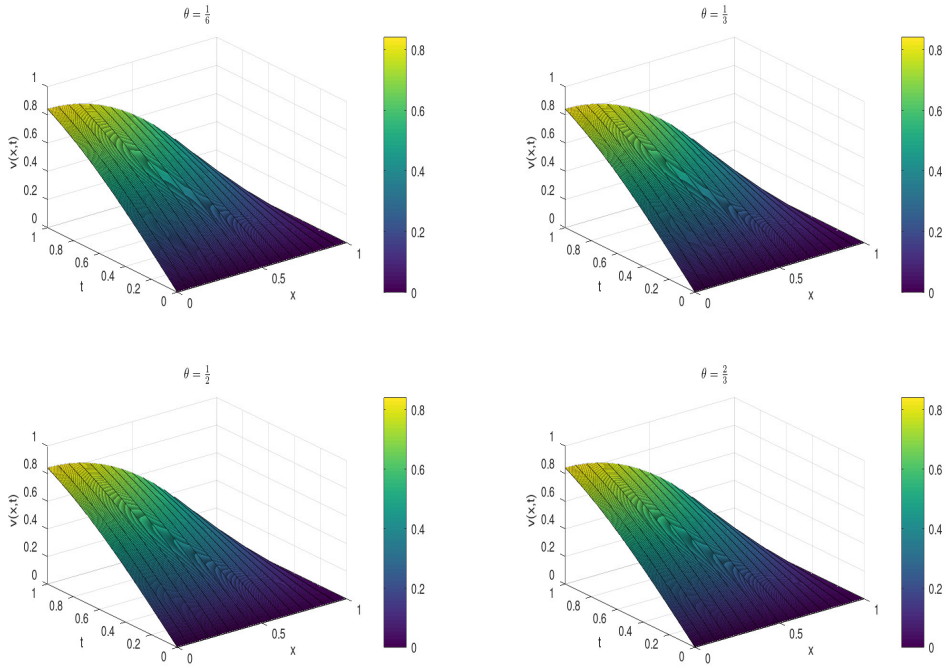
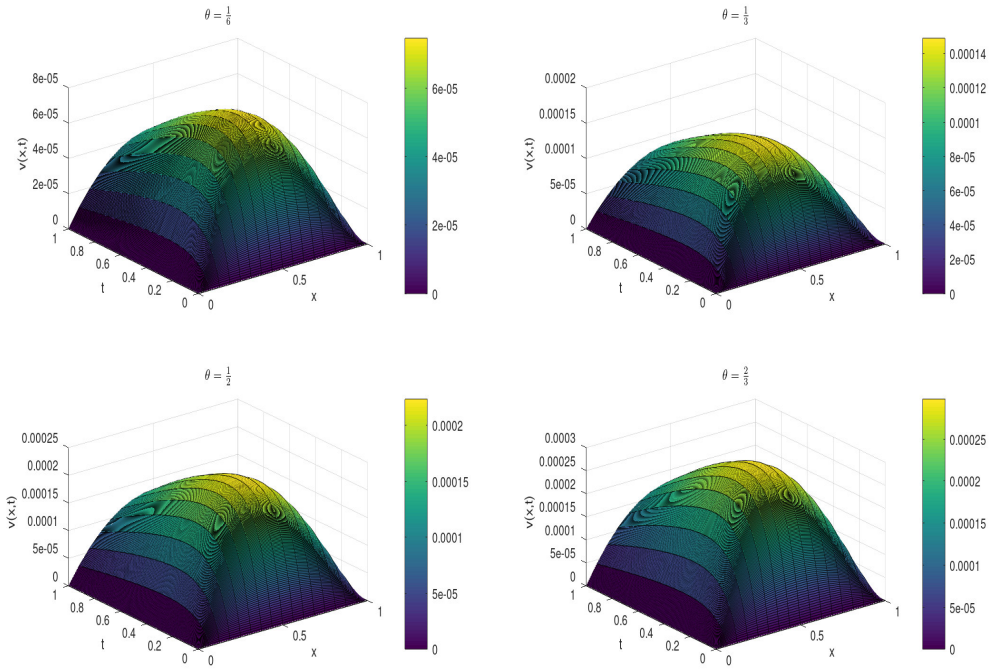


Figura 4.2: Los errores absolutos asociados al primer caso, correspondientes a $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$



Cuadro 4.1: Errores absolutos máximos para el primer caso, con distintos valores de θ

θ	Errores absolutos máximos
$\frac{1}{6}$	7.4515e-05
$\frac{1}{3}$	0.00014893
$\frac{1}{2}$	0.00022331
$\frac{2}{3}$	0.00029764

La figura (4.3) muestra el caso de $\theta = \frac{1}{6}$, con $N_t = 256$, cuando escogemos $N_x = 16$, ya que no se cumpliría la condición de estabilidad (4.2) cuando $K < O(10)$. En efecto, esta condición requiere que :

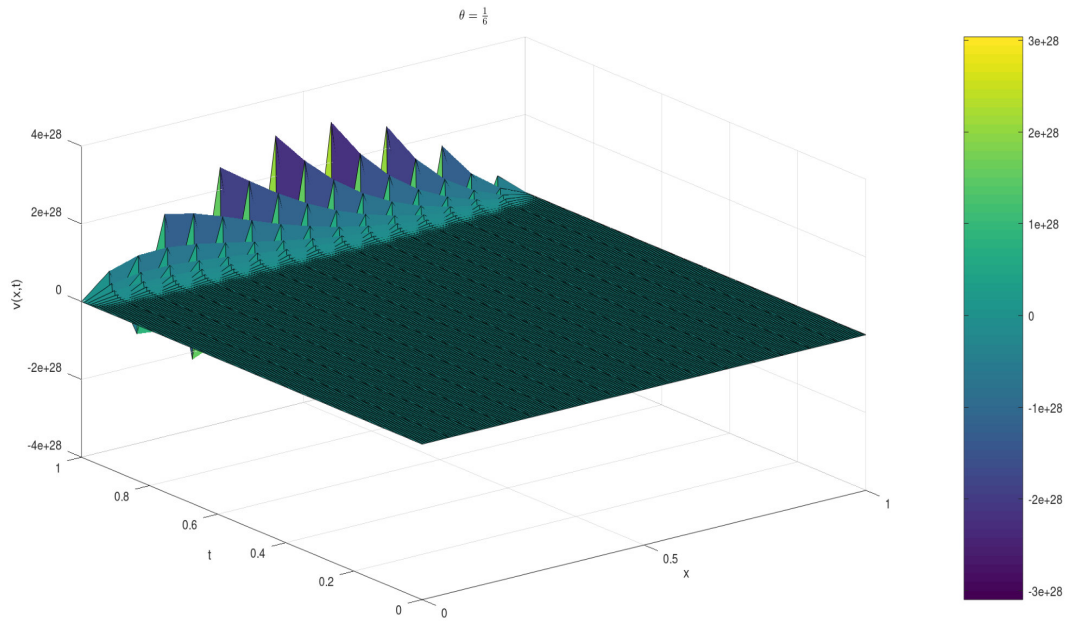
$$\frac{1}{N_t} \leqslant \frac{1}{N_x^2 2(1-2\theta)}$$

o bien,:

$$N_x \leqslant \sqrt{\frac{N_t}{2(1-2\theta)}}$$

Y para $\theta = \frac{1}{6}$ y $N_t = 256$ debe cumplirse que $N_x \leqslant 13{,}8$ para garantizar la estabilidad de la solución numérica. Así, dado que $N_x = 16$ es mayor que el valor límite de 13,8, se espera que el esquema sea inestable, lo cual puede manifestarse en la figura (4.3) a través de oscilaciones numéricas o divergencia en la solución. Este comportamiento inestable es una consecuencia directa de violar la condición de estabilidad, lo que subraya la importancia de ajustar adecuadamente los parámetros espaciales y temporales en función de la relación impuesta por K y el valor de θ seleccionado.

Figura 4.3: Comportamiento de la solución numérica para el primer caso, cuando no se cumple la condición de estabilidad, para $\theta = \frac{1}{6}$



Segundo Caso: Con la solución analítica desconocida

Sea la EIDP [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,\tau) - \int_0^\tau K(x,\tau-s)u(x,s)ds, \quad x \in \Omega, \tau > 0, \tag{4.3}$$

Con el Kernel definido por:

$$K(x,t) = e^{x^2 t^2},$$

Y las siguientes condiciones de contorno $u(0,t) = \frac{t}{1+t^2}$, $u(L,t) = sin(\pi t)$; junto con la condición inicial $u(x,0) = x(L-x)$.
La función fuente está dada por:

$$F(x,t) = 0,$$

La solución analítica es desconocida.
Para el esquema numérico usaremos $(N_x, N_t) = (20, 128)$. Para el dominio del problema con $(L,T) = (\sqrt{6}, 1)$, tenemos que $K = max\,|K(x,y)| = e^6 \approx 403{,}4$, por lo tanto, para garantizar la estabilidad se debe cumplir la condición:

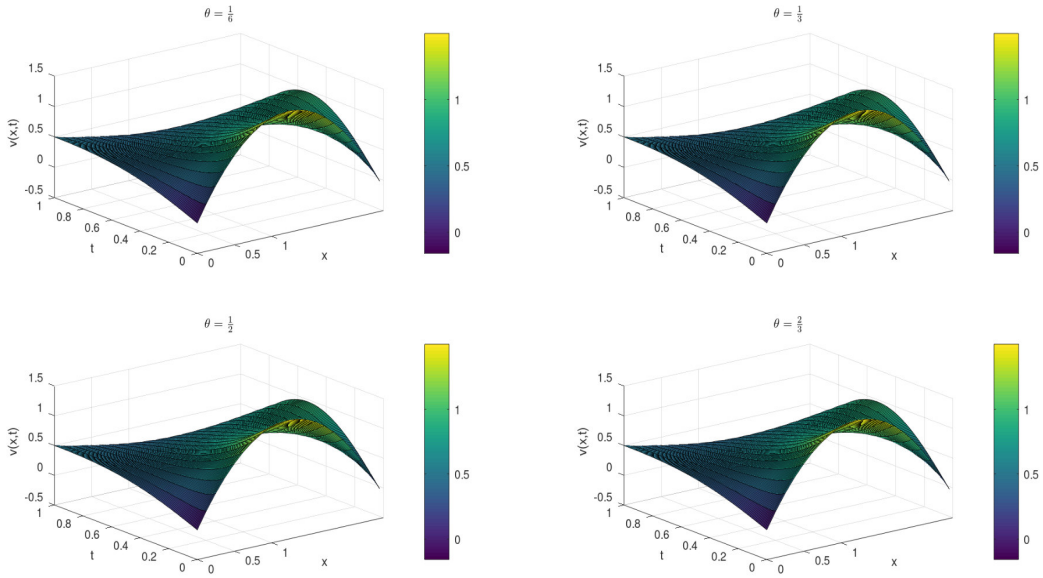
$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{K}},\ (\Delta x)^2 \leqslant \frac{(1-2\theta)}{\sqrt{K}},\ O(10) < K < O(10^2) \tag{4.4}$$

o bien

$$\sqrt{K} \leq N_t,\ \sqrt{\frac{6\sqrt{K}}{(1-2\theta)}} \leqslant N_x \tag{4.5}$$

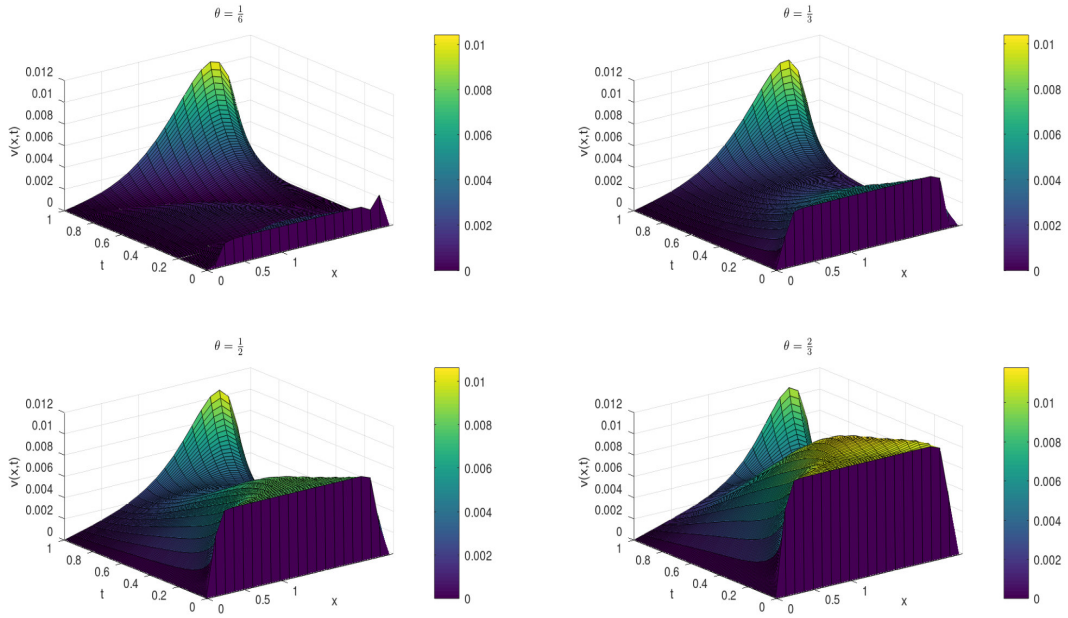
Para la condición de estabilidad debe cumplirse $N_t \geqslant 20{,}08$ y $N_x \geqslant \frac{10{,}97}{\sqrt{1-2\theta}}$. Se verifica que, para $\theta = \frac{1}{6}$ y $\theta = \frac{1}{3}$, debe cumplirse $N_x \geqslant 13{,}47$ y $N_x \geqslant 19{,}0$ respectivamente. Para $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ la solución numérica siempre es estable. Por lo tanto, para los valores de $N_x = 20$ y $N_t = 128$, se verifica la estabilidad para $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$ como se muestra en la figura (4.4)

Figura 4.4: Soluciones numéricas para el segundo caso, con $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$



Para el calculo de errores absolutos se procedera a tomar una solución numérica de referencia, con un enmallado más fino ($N_x = 80$ y $N_t = 2048$) y con un $\theta = \frac{1}{2}$. Así tomaremos las diferencias absolutos en sus puntos correspondientes. La Figura (4.5) representa este enfoque.

Figura 4.5: Los errores absolutos relativos para el segundo caso, con $\theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} y \frac{2}{3}$



Con este enfoque se tienen errores del orden del 10^{-3}, lo que garantiza que la solución numérica es suficientemente precisa para aplicaciones prácticas y que el esquema numérico es capaz de capturar las características esenciales del problema sin introducir errores significativos.

Conclusiones

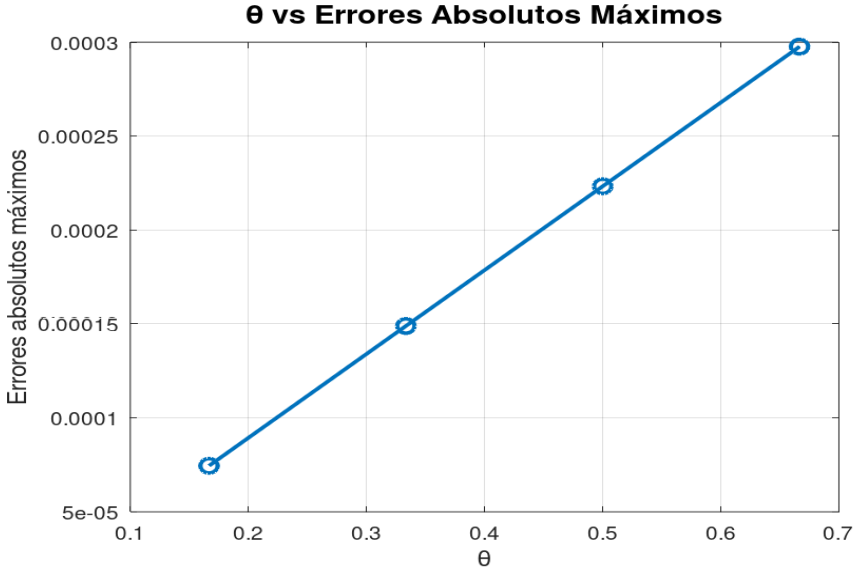
Se ha analizado las ecuaciones integro-diferenciales parciales con memoria temporal usando el método theta. Este esquema numérico útil y sencillo ha permitido obtener de forma muy precisa las soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales parciales complicadas que involucran integrales.

Se he demostrado su convergencia para todo $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ y se ha determinado las condiciones y reglas que debe cumplir el enmallado para la convergencia en $\theta \in [0, \frac{1}{2})$

Se han implementado los programas en GNU-OCTAVE para resolver numéricamente las EIDPs, eficaces tanto si se dispone la solución analítica o no.

En el caso en que se disponía de la solución analítica, se obtuvieron errores del orden 10^{-5}. En el segundo caso, en que no se disponía de la solución analítica, se obtuvieron errores del orden de 10^{-3}.Lo que indica que, aunque la precisión es menor, el método sigue siendo robusto y ofrece resultados confiables incluso en ausencia de una solución exacta para compararla con la solución numérica

Figura 4.6: θ vs errores absolutos máximos, cuando se dispone de la solución analítica



Como trabajo futuro se busca, por un lado, resolver diversos tipos de ecuaciones diferenciales parciales con el método theta; y además, resolver EIDPs de dimensiones superiores, lo que permitirá modelar fenómenos más complejos y realistas.

Referencia Bibliográfica

[1] K.S. ABOODH, R.A. FARAH, *Solution of Partial Integro-Differential Equations by using Aboodh and Double Aboodh Transform Methods* . Research India Publications, (2017).

[2] A.V. BASKAKOV AND N.P. VOLKOV, *Refinement of the Reactor Dynamics Mathematical Model*. doi::10.1088/1742-6596/1205/1/012006, (2006)

[3] STEPHEN BARNETT, *Matrices: Methods and Applications*. Clarendon Press-Oxford, (1990).

[4] STEVEN C. CHAPRA AND RAYMOND P. CANALE, *Numerical Methods for Engineers*. Editorial WCB/McGraw-Hill, (1988).

[5] LAWRANCE C. EVANS, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, (1998).

[6] M. FAKHARANY, MAHMOUD M. AND M. A. ABU IBRAHIM, *Numerical analysis of finite difference schemes arising from time-memory partial integro-differential equations*. doi:10.3389/fams.2022.1055071, (2022).

[7] FAKHAR-IZADI F., DEHGHAN M., *The Spectral Methods for Parabolic Volterra Integro-Differential Equations*. doi:10.1016/j.cam.2011.02.030, (2011).

[8] L. FOX, *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*. Pergamon Press, (1962).

[9] ROB J. HYNDMAN , BAKI BILLAH, *Unmasking the Theta Method*. doi:10.1016/s0169-2070(01)00143-1, (2003)

[10] IMRAN AZIZ AND IMRAN KHAN, *Numerical Solution of Partial Integrodifferential Equations of Diffusion Type*. doi:10.1155/2017/2853679, (2017)

[11] V. LAKSHMIKANTHAM AND RAMA MOHANA RAO, *Theory of Integro-Differential Equations*. Gordon and Breach Science Publishers, (1995).

[12] PETER V. O'NEIL, *Advanced Engineering Mathematics*. Cengage Learning, (2000).

[13] E.W. SACHS AND A.K. STRAUSS, *Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance*. doi:10.1016/j.apnum.2007.11.002, (2007)

[14] G. D. SMITH, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Clarendon Press-Oxford, (1985).

[15] MINORU TABATA, NOBUOKI ESHIMA AND ICHIRO TAKAGI, *The nonlinear integro-partial differential equation describing the logistic growth of human population with migration*. doi:10.1016/S0096-3003(97)10172-2, (1999)

[16] TAO TANG, *A Finite Difference Scheme for Partial Integro-Differential Equations with a Weakly Singular Kernel*. doi:10.1016/0168-9274(93)90012-g, (1993)

[17] J. W. THOMAS, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Springer Press, (1995).

[18] E.G. YANIK AND G. FAIRWEATHER, *Finite Element Methods for Parabolic and Hyperbolic Partial Integro-Differential Equations*. Pergamon Press, (1988).

Anexo

Función para resolver las EIDPs:

```
%Función de orden superior r
function v4 = pidesolve(Nx,Nt,L,T, theta, K,f,g,h1,h2)
dx = L / Nx;
dt = T/ Nt;
r = dt /(dx^2);
spanx_par = linspace(0, L, Nx + 1);
spanx = spanx_par(2:end-1);
spant_par = linspace(0, T, Nt + 1);
spant = spant_par(2:end);
theta2 = 1-theta;
% Inicializar matrices A y B
A = zeros(Nx-1,Nx-1);
B = zeros(Nx-1,Nx-1);
for i = 1:(Nx-1)
% Elementos de la diagonal principal
A(i,i) = 1+2*theta*r;
B(i,i) = 1-2*theta2*r;
if i < (Nx-1)
% Elementos de la superdiagonal y subdiagonal
A(i,i+1) = -theta*r;
A(i+1,i) = -theta*r;
B(i,i+1) = theta2*r;
B(i+1,i) = theta2*r;
end
end
% Definiendo F en t=0
f_values = f(spanx,0);
Fo = dt*f_values';
Fo(1)=Fo(1)+ theta2*r*h1(0)+ theta*r*h1(dt);
Fo(end)=Fo(end)+ theta2*r*h2(0)+ theta*r*h2(dt);
% Definiendo v en t=0
v_values = g(spanx);
vo = v_values';
% Inicializando v y F para t distinto de 0
v = zeros(Nx - 1, Nt);
F = zeros(Nx - 1, Nt);
% Valores de F a partir de t=1
for i = 1:Nt-1
f_temp=f(spanx,i*dt);
```

```
F(:,i)=dt*f_temp';
F(1,i)=F(1,i) + theta2*r*h1((i)*dt)+ theta*r*h1((i+1)*dt);
F(Nx-1,i)=F(Nx-1,i)+theta2*r*h2((i)*dt)+theta*r*h2((i+1)*dt);
end
%Ecuación inicial
v(:,1)= A\(B*vo + Fo);
% Resolver las ecuaciones para v^(n+1)
for n=1:Nt-1
rhn = B*v(:,n)+F(:,n);
for j = 0:n
if j == 0
rhn = rhn - (1/3)*((dt)^2)*diag(K(spanx,(n-j)*dt))*vo;
elseif mod(j,2)==1
rhn = rhn - (4/3)*((dt)^2)*diag(K(spanx,(n-j)*dt))*v(:,j);
else
rhn = rhn - (2/3)*((dt)^2)*diag(K(spanx,(n-j)*dt))*v(:,j);
end
end
v(:,n+1) = A\rhn;
end
% Agregar la columna para t=0
v2 = [vo,v];
% Agregar fila x=0
filatemp=h1(spant_par);
fila = filatemp;
v3 = [fila; v2];
% Agregar la fila x=L
filatemp2=h2(spant_par);
filab = filatemp2;
v4 = [v3;filab];
end
```

Graficador de errores absolutos conociendo la solución analítica

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Definiendo las funciones para el ejemplo:%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Definiendo el Kernel K(x, t)
K = @(x, t) exp(x.*t);
% Definiendo la Fuerza F(x, t)
f = @(x, t) ((1-x.^2).*cos(t))+2*sin(t)+...
((x.^2-1)./(1+x.^2)).*(cos(t)+x.*sin(t)-exp(x.*t));
% Definiendo condiciones iniciales g(x)
g = @(x) zeros(size(x));
% Definiendo condiciones de contorno en x=0
h1 = @(t) sin(t);
% Definiendo condiciones de contorno en x=L
h2 = @(t) zeros(size(t));
%%%%%%%Definiendo los escalares a usar%%%%%%
Nx =16;%Numero de subintervalos en el espacio
Nt = 512;%Numero de subintervalos en el tiempo
```

```
L = 1;%punto final en el espacio
T = 1;%punto final en el tiempo
%malla
[X,Y]=meshgrid(linspace(0, L, Nx + 1), linspace(0, T, Nt + 1));
u = @(x, t) sin(t).*(1-x.^2);
%Creación de la matriz solución analitica
Z=u(X,Y);
%Valores de theta para el modelo
theta_values = [1/6,1/3,1/2,2/3];
figure;% Crear figura para subplots
for k = 1:length(theta_values)
theta = theta_values(k);
%La solución numerica para cada caso
w=pidesolve(Nx,Nt,L,T,theta,K,f,g,h1,h2);
%Matriz de errores abslutos
error_abs = abs(Z-w');
% Encontrar el máximo error absoluto
max_error = max(error_abs(:));
% Mostrar el máximo error absoluto
disp(['Máximo error absoluto en la malla: ', num2str(max_error)]);
% Subplot para el valor actual de theta
subplot(2, 2, k);
% Grafica de error abs
surf(X, Y, error_abs);
% Liberar el gráfico
colorbar;
%Color el valor de theta en fraciones
if k==1
title(['$\theta = \frac{1}{6}$'], 'Interpreter', 'latex');;
elseif k==2
title(['$\theta = \frac{1}{3}$'], 'Interpreter', 'latex');
elseif k==3
title(['$\theta = \frac{1}{2}$'], 'Interpreter', 'latex');
else
title(['$\theta = \frac{2}{3}$'], 'Interpreter', 'latex');
endif
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('v(x,t)');
% Ajustar los ticks en el eje y
xticks(0:0.5:1);
yticks(0:0.2:1);
end
```

Codigo para errores absolutos relativos a solucion numérica con malla más fina

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Definiendo las funciones para el ejemplo:%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Definiendo el Kernel K(x, t)
K = @(x, t) exp((x.^2).*(t.^2));
```

```
% Definiendo la Fuerza F(x, t)
f = @(x, t) 0;
% Definiendo condiciones iniciales g(x)
g = @(x) x.*(L-x);
% Definiendo condiciones de contorno en x=0
h1 = @(t) t./(1+t.^2);
% Definiendo condiciones de contorno en x=L
h2 = @(t) sin(pi*t);
%%%%%%%Definiendo los escalares a usar%%%%%%
a=4;
b=16;
Nx =20;%Numero de subintervalos en el espacio
Nxb=a*Nx;
Nt = 128;%Numero de subintervalos en el tiempo
Ntb=b*Nt;
L = sqrt(6);%punto final en el espacio
T = 1;%punto final en el tiempo
%malla
[X,Y]=meshgrid(linspace(0, L, Nx + 1), linspace(0, T, Nt + 1));
%solucion de referencia
%La solucion numerica para enmallado fino;
w2=pidesolve(Nxb,Ntb,L,T,1/2,K,f,g,h1,h2);
%Valores de theta para el modelo
theta_values = [1/6,1/3,1/2,2/3];
figure;% Crear figura para subplots
for k = 1:length(theta_values)
theta = theta_values(k);
%La solución numerica para cada caso
w=pidesolve(Nx,Nt,L,T,theta,K,f,g,h1,h2);
%%creando matriz con puntos en w2 que den la diferencia
w3 = zeros(Nx + 1, Nt + 1);
for i = 1:Nx + 1
for j = 1:Nt + 1
w3(i, j) = w2(a * (i - 1) + 1, b * (j - 1) + 1) - w(i, j);
end
end
%Matriz de errores abslutos
error_abs = abs(w3');
% Encontrar el máximo error absoluto
max_error = max(error_abs(:));
% Mostrar el máximo error absoluto
disp(['Máximo error absoluto en la malla: ', num2str(max_error)]);
% Subplot para el valor actual de theta
subplot(2, 2, k);
% Grafica de error abs
surf(X, Y, error_abs);
% Liberar el gráfico
colorbar;
%Color el valor de theta en fraciones
```

```
if k==1
title(['$\theta = \frac{1}{6}$'], 'Interpreter', 'latex');
elseif k==2
title(['$\theta = \frac{1}{3}$'], 'Interpreter', 'latex');
elseif k==3
title(['$\theta = \frac{1}{2}$'], 'Interpreter', 'latex');
else
title(['$\theta = \frac{2}{3}$'], 'Interpreter', 'latex');
endif
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('v(x,t)');
% Ajustar los ticks en el eje y
xticks(0:0.5:1);
yticks(0:0.2:1);
end
```