Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Existencia y unicidad de la solución global positiva de un sistema tipo SIR clásico con incorporación de dinámicas vitales

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Maria del Carmen FLORES FERNANDEZ

ASESOR

Dr. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Flores, M. (2024). *Existencia y unicidad de la solución global positiva de un sistema tipo SIR clásico con incorporación de dinámicas vitales*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Maria del Carmen Flores Fernandez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	76243657
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0004-5637-5140
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9177-1561
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09197486
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445739
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	EDOACBI
Agencia de financiamiento	AUTOFINANCIADO
Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Coordenadas geográficas Latitud: 12.058333 Longitud: -77.083333
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Junio a diciembre de 2024
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:10 horas del sábado 28 de septiembre del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2024): Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci (PRESIDENTE), Dr. Alfonso Perez Salvatierra (MIEMBRO) y el Dr. Willy David Barahona Martinez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: **"EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN GLOBAL POSITIVA DE UN SISTEMA TIPO SIR CLÁSICO CON INCORPORACIÓN DE DINÁMICAS VITALES"**, presentado por la señorita **Bachiller MARIA DEL CARMEN FLORES FERNANDEZ**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación Sobresaliente con mención, con un calificativo promedio de Dieciocho (18).

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller MARIA DEL CARMEN FLORES FERNANDEZ**, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 11:50 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
PRESIDENTE

Dr. Alfonso Perez Salvatierra
MIEMBRO

Dr. Willy David Barahona Martinez
MIEMBRO ASESOR

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Willy David Barahona Martínez en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N.° 000022-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis académico, cuyo título es **"EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN GLOBAL POSITIVA DE UN SISTEMA TIPO SIR CLÁSICO CON INCORPORACIÓN DE DINÁMICAS VITALES"**, presentado por la bachiller Srta. **MARIA DEL CARMEN FLORES FERNANDEZ**, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 20% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y **para su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Lima, 01 de abril de 2025



Dr. Willy David Barahona Martínez

DNI: 10078450

DEDICATORIA

Con mucho cariño dedico esta tesis a quien me impulso cada día a continuar y seguir esforzandome, mi madre, a mis hermanos por su lucha constante y perseverancia por seguir avanzando en este camino de vida y a mis amigos fieles Joaquin, Mosha y Neguita.

AGRADECIMIENTOS

Al concluir este trabajo lleno de retos, me complace aprovechar este pequeño espacio para reconocer la valiosa contribución de aquellas personas que hicieron posible la culminación de este proyecto , y a quienes expreso mi agradecimiento.

Primero, me gustaría agradecer a mi madre, por su constancia, su apoyo incondicional y su ejemplo de perseverancia. Expreso mis agradecimientos a mis hermanos quienes tuvieron el tiempo para aconsejarme y guiarme. A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, gracias por brindarme la oportunidad de estudiar y convertirme en una profesional. Quiero también expresar mi gratitud a todos mis profesores a lo largo de mi carrera, ya que cada uno de ellos ha contribuido, con su esfuerzo, a mi formación. A mi compañero de vida por recordarme que siempre es posible encontrar equilibrio entre el esfuerzo y la alegría. Son muchas las personas que han sido parte de mi desarrollo profesional, y a todas ellos me gustaría agradecerles por su amistad, consejos, apoyo y compañía, especialmente en los momentos más difíciles. Al Dr. Willy David Barahona Martínez, por su paciencia, orientación y dedicación durante el desarrollo de este proyecto, cualidades que fueron fundamentales para superar los desafíos y enriquecer este trabajo con su valiosa experiencia y conocimientos.

Por último, a cada uno de ustedes, expreso mi más sincero agradecimiento por su valiosa contribución a lo largo de este recorrido académico.

RESUMEN

Existencia y unicidad de la solución global positiva de un sistema tipo SIR clásico con incorporación de dinámicas vitales

María del Carmen Flores Fernández

Diciembre - 2024

Asesor : Dr. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciada en Matemática.

El modelo SIR con dinámica vital incluye los procesos de natalidad y mortalidad, además de las transiciones estándar entre susceptibles S, infectados I y recuperados R. Este modelo permite analizar cómo la inclusión de estas dinámicas afecta la propagación de una enfermedad en una población. Las ecuaciones diferenciales que describen este modelo son las siguientes:

$$(I) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dS}{dt} = \alpha N - \beta \dfrac{SI}{N} - \alpha S, \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta \dfrac{SI}{N} - \mu I - \alpha I, \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \mu I - \alpha R \end{array} \right.$$

Donde:

- $S(t)$, $I(t)$, y $R(t)$ representan las poblaciones de susceptibles, infectados y recuperados en el tiempo $t \geq 0$, respectivamente.
- β es la tasa de contacto efectivo, que representa el coeficiente de transmisión de la enfermedad entre un susceptible y un infectado.
- α es la tasa natural de natalidad y mortalidad, asumida igual para todas las clases.

- $\dfrac{1}{\mu}$ representa el tiempo medio que permanece una persona infectada por la enfermedad.
- $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\right\}$ representa el dominio de trabajo (octante positivo de $\mathbb{R}^3$).

Este conjunto de ecuaciones describe un sistema dinámico donde se considera que la población total $N = S + I + R$ cambia únicamente debido a los nacimientos y muertes naturales, manteniendo un equilibrio dinámico en el contexto de una enfermedad infecciosa.

Esta tesis aborda el estudio de la existencia y unicidad de soluciones globales positivas en un sistema epidemiológico SIR clásico modificado para incluir dinámicas vitales como la natalidad y la mortalidad.

Palabras clave:

Modelo SIR, Dinámica vital, Existencia de solución global, Unicidad de solución.

ABSTRACT

Existence and uniqueness of the positive global solution of a classical SIR-type system with incorporation of vital dynamics

María del Carmen Flores Fernández

December - 2024

Adviser : Dr. Willy David Barahona Martínez.

Obtained : Graduate in Mathematics.

The SIR model with vital dynamics includes the processes of birth and death, in addition to the standard transitions among susceptible S, infected I, and recovered R individuals. This model allows for the analysis of how the inclusion of these dynamics affects the spread of a disease within a population. The differential equations describing this model are as follows:

$$(I) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dS}{dt} = \alpha N - \beta \dfrac{SI}{N} - \alpha S, \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta \dfrac{SI}{N} - \mu I - \alpha I, \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \mu I - \alpha R \end{array} \right.$$

where:

- $S(t)$, $I(t)$, and $R(t)$ represent the populations of susceptible, infected, and recovered individuals at time $t \geq 0$, respectively.
- β is the effective contact rate, which represents the disease transmission coefficient between a susceptible and an infected individual.
- α is the natural rate of birth and death, assumed to be equal for all classes.
- $\dfrac{1}{\mu}$ represents the average duration that an individual remains infected with the disease.

- $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\right\}$ represents the working domain (positive octant of $\mathbb{R}^3$).

This set of equations describes a dynamic system where it is considered that the total population $N = S + I + R$ changes only due to natural births and deaths, maintaining a dynamic equilibrium in the context of an infectious disease.

This thesis addresses the study of the existence and uniqueness of global positive solutions in a classic epidemiological SIR system modified to include vital dynamics such as birth and death.

Keywords:

SIR Model, Vital Dynamics, Existence of Global Solution, Uniqueness of Solution.

ÍNDICE GENERAL

1 Preliminares y Conceptos Básicos **12**

1.1 Conceptos básicos 14

1.1.1 Funciones continuamente diferenciables 14

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias 16

1.2.1 Solución de una EDO 17

1.2.2 Tipos de solución de una EDO 18

1.3 Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias 19

1.3.1 Solución de un SEDO 20

1.3.2 Tipos de solución 21

1.4 Sistema dinámico 24

1.4.1 Espacio fase 24

1.5 Modelo SIR 25

1.5.1 Todo sobre el modelo SIR 25

2 Resultados importantes **27**

2.1 Teoremas importantes 27

2.1.1 Teorema A. Solución máximal: Existencia y unicidad 27

2.1.2 Teorema B. Existencia del intervalo máximal 28

2.1.3 Teorema C. Depencia continua respecto a las condiciones iniciales 29

3 Problema principal **31**

3.1 Existencia y unicidad de la solución global 31

3.1.1 Existencia y unicidad de la solución local 31

3.1.2 Análisis cuando la solución es nula 32
3.1.3 La solución es positiva 32
3.1.4 Existencia de la solución global 32
3.2 Teorema principal 33

4 Conclusiones y/o Sugerencias **35**

Introducción

Los modelos matemáticos en epidemiología han desempeñado un papel fundamental en la comprensión de la propagación de enfermedades infecciosas y en el diseño de estrategias para su control. Entre estos modelos, el sistema SIR clásico, introducido por Kermack y McKendrick en 1927, se ha consolidado como una herramienta clave debido a su simplicidad y capacidad para capturar dinámicas esenciales de infecciones transmitidas entre individuos. El modelo presenta tres compartimentos para la población: susceptibles (S), infectados (I) y recuperados (R), considerando las transiciones entre estos estados como una función del tiempo.

Si bien el modelo SIR clásico ha demostrado ser útil en diversos contextos, su aplicación a situaciones reales a menudo requiere la incorporación de dinámicas más complejas. En particular, las dinámicas vitales, como el nacimiento y la muerte, son factores determinantes en la evolución a largo plazo de las poblaciones y, por ende, en la propagación de enfermedades. La incorporación de estas dinámicas en el modelo SIR no solo permite un análisis más realista, sino que también introduce nuevos retos matemáticos relacionados con la existencia, unicidad y características cualitativas de las soluciones.

Priorizamos el análisis matemático del sistema tipo SIR clásico que incluye dinámicas vitales. En particular, se pretende determinar las condiciones necesarias para asegurar la existencia y unicidad de una solución global positiva para el sistema. Este análisis es fundamental, ya que una solución positiva refleja la viabilidad biológica del modelo, asegurando que las variables representen valores coherentes con la realidad

epidemiológica.

Estudiar la existencia y unicidad de soluciones es una rama central de la matemática aplicada, con implicaciones tanto teóricas como prácticas. En el marco del modelo SIR con dinámicas vitales, este análisis sienta las bases para investigar fenómenos como, la estabilidad y la respuesta del modelo ante intervenciones externas, tales como campañas de vacunación o modificaciones en las tasas de transmisión.

Tenemos la estructura siguiente: En el Capítulo 1 se presenta los preliminares y conceptos básicos que se necesitan para el desarrollo del trabajo, además una revisión del modelo SIR clásico y sus extensiones más relevantes. En el Capítulo 2 se introducen dos teoremas que nos conducirán a determinar la existencia y unicidad de la solución buscada. En el Capítulo 3 se desarrollan los resultados principales, empleando herramientas de análisis funcional y teoría de ecuaciones diferenciales. Terminamos con el Capítulo 4 donde se discuten las implicaciones de los resultados obtenidos y se sugieren posibles ampliaciones del trabajo.

1 Preliminares y Conceptos Básicos

Preliminares

Para abordar el análisis de un sistema tipo SIR clásico con dinámicas vitales, es fundamental contar con una base teórica sólida que abarque diversas áreas de las matemáticas y la epidemiología. A continuación, se describen los principales conceptos y herramientas que constituyen los fundamentos para el desarrollo de esta tesis:

1. Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

En el marco teoríco de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, esta proporciona lo necesario para modelar y analizar sistemas dinámicos continuos. Entre los resultados clave que serán utilizados en este trabajo se incluyen:

a) Existencia y unicidad de soluciones: Garantizan que, bajo ciertas condiciones de regularidad en las funciones que definen el sistema, las soluciones existen y son únicas.

b) Prolongación de soluciones: Permite determinar si una solución definida localmente puede extenderse a un intervalo más amplio.

c) Estabilidad de soluciones: Se centra en el comportamiento de las soluciones frente a perturbaciones iniciales y es esencial para analizar equilibrios del modelo.

2. Análisis Funcional

El análisis funcional provee herramientas avanzadas para tratar ecuaciones diferenciales en espacios de funciones. Conceptos como espacios de Banach y teoremas de punto fijo (por ejemplo, el teorema de Banach o el teorema de Schauder) son utilizados para demostrar la existencia de soluciones globales.

3. Epidemiología Matemática

Este campo combina técnicas matemáticas con principios epidemiológicos para entender la dinámica de enfermedades infecciosas. Los modelos compartimentales como el SIR son herramientas fundamentales. En este contexto, los siguientes conceptos serán relevantes:

a) Número básico de reproducción (R_0): Calcula el número promedio de infecciones secundarias que un individuo infectado puede causar en una población totalmente susceptible.

b) Tasas de transmisión y recuperación: Factores clave que determinan la dinámica del sistema.

c) Impacto de las dinámicas vitales: La inclusión de tasas de natalidad y mortalidad introduce complejidad adicional al modelo y afecta el equilibrio demográfico.

4. Sistemas Dinámicos y Análisis Cualitativo

El estudio de sistemas dinámicos facilita la exploración del comportamiento de las soluciones a lo largo del tiempo. En particular:

a) Análisis de estabilidad de equilibrios: Determina si los puntos de equilibrio del sistema son atractores o repulsores.

b) Comportamiento asintótico: Explora cómo evolucionan las soluciones con el tiempo y su tendencia hacia estados estacionarios.

c) Diagramas de bifurcación: Ayudan a entender cómo los parámetros del modelo influyen en su dinámica.

Estos conceptos previos serán desarrollados y contextualizados en los siguientes capítulos, sirviendo como base para el análisis matemático del modelo tipo SIR con dinámicas vitales.

1.1 Conceptos básicos

Definición 1. ***(Espacio Euclidiano*** $\mathbb{R}^n$***)*** *El conjunto* $\mathbb{R}^n$ *también conocido como el espacio euclideano de dimensión* n*, es el conjunto de todos los vectores de* n *componentes reales. Es decir*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; x_3; ...; x_n) \,|x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, 3, ..., n\}$$

Notación: *Denotamos un elemento de* $\mathbb{R}^n$ *por* $x = (x_1; x_2; x_3; ...; x_n)$ *.*

Dados dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$ *entonces, decimos que*

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i\ ;\ \forall i = 1, 2, 3, ..., n.$$

1.1.1 Funciones continuamente diferenciables

Definición 2. ***(Función continua)*** *Una función* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *se llama continua en* $a \in A$*, si* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$*, y* f *se llama simplemente continua si es continua en cada* $a \in A$ *.*

Teorema 1. *Si* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*, una función* $f : A \to \mathbb{R}^m$ *es continua si y sólo si para cada conjunto abierto* $U \subset \mathbb{R}^m$ *existe algún conjunto abierto* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $f^{-1}(U) = V \cap A$*.*

Demostración:

Ver en la página 12 de [2]. ■

Definición 3. ***(Función diferenciable)*** *Sea* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función y* U *un abierto. Decimos que* f *es diferenciable en* $x \in \mathbb{R}^n$ *si existe una transformación lineal* $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \lambda h\|}{\|h\|} = 0$$

Observación 1. *Sea* h *un punto de* $\mathbb{R}^n$ *y la expresión* $f(x+h) - f(x) - \lambda h$ *pertenece a* $\mathbb{R}^m$*, por lo tanto, es importante usar los signos de la norma para hacer la medición adecuada. La transformación lineal* λ *se representa como* $Df(x)$ *y se conoce como la derivada de* f *en* x*.*

Teorema 2. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in \mathbb{R}^n$, si existe una única transformación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \lambda h\|}{\|h\|} = 0$$

Demostración:

Supongamos que $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisface

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \lambda h\|}{\|h\|} = 0$$

Si $g(h) = f(x+h) - f(x)$, luego

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\lambda(h) - \mu(h)\|}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\lambda(h) + g(h) - g(h) - \mu(h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\lambda(h) - g(h)\|}{\|h\|} + \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|g(h) - \mu(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Sea $a \in \mathbb{R}^n$, entonces $ta \to 0$ cuando $t \to 0$. Entonces, para $t \neq 0$ tenemos

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{|\lambda(ta) - \mu(ta)|}{|ta|} = \frac{|\lambda(a) - \mu(a)|}{|a|}$$

Por lo tanto, $\lambda(a) = \mu(a)$. ■

Definición 4. ***(Función continuamente diferenciable)*** *Se dice que f es una función $\boldsymbol{f} : \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ es continuamente diferenciable en $\mathrm{B} \subseteq intA$ si y sólo si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathrm{B}$, y la función $d\boldsymbol{f} : \mathrm{B} \to L\left(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbb{R}^{\mathbf{m}}\right)$ es continua.*

Teorema 3. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces $Df(a)$ existe si todo $D_j f^i(x)$ existe en un conjunto abierto que contiene a a y si cada función $D_j f^i$ es continua en a. (Tal función f se llama continuamente diferenciable en a.)*

Demostración:

Ver en la página 31 de [2]. ■

Definición 5. ***(Existencia de la derivada parcial)*** *La existencia de la derivada parcial en el espacio $\mathbb{R}^n$ implica que, para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la derivada parcial de f con respecto a la variable x_i en un punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ existe si se puede calcular el límite:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(a_1, a_2, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n\right) - f\left(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\right)}{h}$$

Este límite representa la velocidad de cambio de f con respecto a la variable x_i en el punto a, manteniendo constantes las demás variables $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel primordial en el avance de la matemáticas, física, economía y las ingenierías entre otras ciencias. Debido a los estudios e investigaciones relacionados con las EDO y sus aplicaciones en diversas disciplinas, se evidencia su amplio alcance. Por ello, resulta importante presentar de manera resumida la evolución de este marco conceptual y metodológico hasta conformar lo que se entiende en la actualidad.

La EDO es una ecuación que involucra una o más funciones de una variable independiente y sus derivadas. La ecuación describe la relación entre la función y sus derivadas.

Resolver una ecuación significa encontrar las incógnitas que, cuando se sustituyen en la ecuación, hacen que la igualdad sea verdadera.

Definición 6. ***Ecuación diferencial ordinaria (EDO):*** *Una EDO es aquella que unicamente involucra derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.*

La forma general de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es:

$$x'(t) = f(t, x) \tag{1.1}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$, se define en cada punto (t, x) de un abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$. Al estudiar la ecuación (1.1) encontramos dos problemas básicos:

- Encontrar la solución general.
- Determinar la solución de un problema de valor inicial (PVI). Este problema es conocido como Problema de Cauchy.

Una función diferencial $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, es llamada solución del PVI, si satisface lo siguiente:

a) $(t, \phi(t)) \in \Phi$, para todo $t \in I$;

b) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$, para todo $x \in \Phi$;

c) $\phi(t_0) = x_0$.

Una EDO lineal de primer orden, tiene la forma general dada por

$$\dot{x}(t) = p(t)x(t) + q(t) \tag{1.2}$$

con $p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ denota a la derivada de la incógnita x respecto t variable independiente.

1.2.1 Solución de una EDO

Definición 7. ***(Solución de una EDO).*** *Consideremos el siguiente PVI:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p(t)x(t) + q(t) \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Buscamos la solución del PVI (1.3). Para ello nos ayudamos de un factor integrante $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado por

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}.$$

Entonces, tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\right) = q(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

de manera equivalente,

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\right) = q(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

tomando integrales en ambos miembros, obtenemos

$$xe^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - x_0 = \int_{t_0}^{t} q(s)e^{-\int_{t_0}^{s} p(y)dy}ds.$$

Por lo tanto,

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \int_{t_0}^{t} q(s)e^{\int_{s}^{t} p(y)dy}ds.$$

■

Por otro lado, haciendo $q(t) \equiv 0$ en (1.3), la solución del PVI viene dada por:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

en este caso, la EDO lineal de primer orden es homogénea.

Definición 8. ***(Intervalo maximal)*** *En ecuaciones diferenciales ordinarias, el intervalo maximal se refiere al mayor intervalo en el cual existe solución única de una EDO dada, sujeto a condiciones iniciales específicas.*

El intervalo maximal es el más grande dentro del cual esa solución puede ser extendida de manera continua y única sin que ocurran discontinuidades, singularidades o comportamientos no deseados, como que, la solución crezca indefinidamente.

1.2.2 Tipos de solución de una EDO

Mostramos la estructura de un problema de Cauchy.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, donde $f :]a; +\infty[\times\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, con $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Tenemos que: $\phi(t)$ es solución del problema de Cauchy, sí y solo sí $\phi(t)$ es solución de $x'(t) = f(t,x)$.

Definición 9. ***(Solución local).*** *Decimos que ϕ es solución local del problema de Cauchy (1.4) si ϕ satisface las siguientes condiciones:*

- $\phi(t_0) = x_0$.
- *Para t_0 existe el intervalo abierto I, donde $t_0 \in I$, de tal manera que ϕ satisface la ecuación $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$, $\forall t \in I$.*
- *Dado cualquier intervalo abierto J contenido en el dominio de ϕ, que contiene a t_0 y $\overline{\phi}$ es otra solución del PVI de Cauchy definido en J, es decir:*

  $$\overline{\phi}'(t) = f(\overline{\phi}(t)), \forall t \in J, \text{ y } \overline{\phi}(t_0) = x_0,$$

  entonces las soluciones no coinciden en J, en otras palabras $\exists t \in J$ tal que $\phi(t) \neq \phi'(t)$.

Observación 2. *El intervalo J puede hacerse tan pequeño como queramos y, las soluciones ϕ y $\overline{\phi}$ seguirán siendo distintas en J.*

Definición 10. ***(Solución global).*** *Las soluciones de las ecuaciones lineales están globalmente definidas, vale decir, se extienden al intervalo.*

1.3 Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

Definición 11. ***(Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO)).*** *Un arreglo que tiene la forma:*

$$\left|\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + g_1(t), \\ x_2'(t) = a_{n1}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + g_2(t), \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + g_n(t), \end{array}\right. \tag{1.5}$$

es llamado sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por otro lado, tenemos:

1) SEDO homogéneas

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{1.6}$$

2) SEDO no homogéneas

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \tag{1.7}$$

donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}.$$

Observación 3. *Un PVI se expresa de la siguiente manera:*

$$\left|\begin{array}{l} x'(t) = A(t)x(t) + g(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. \tag{1.8}$$

Ejemplo 1. ***(SEDO Homogéneo)***

$$x_1' = 2x_1$$
$$x_2' = 3x_2$$

Solución:

La SEDO se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Si tomamos

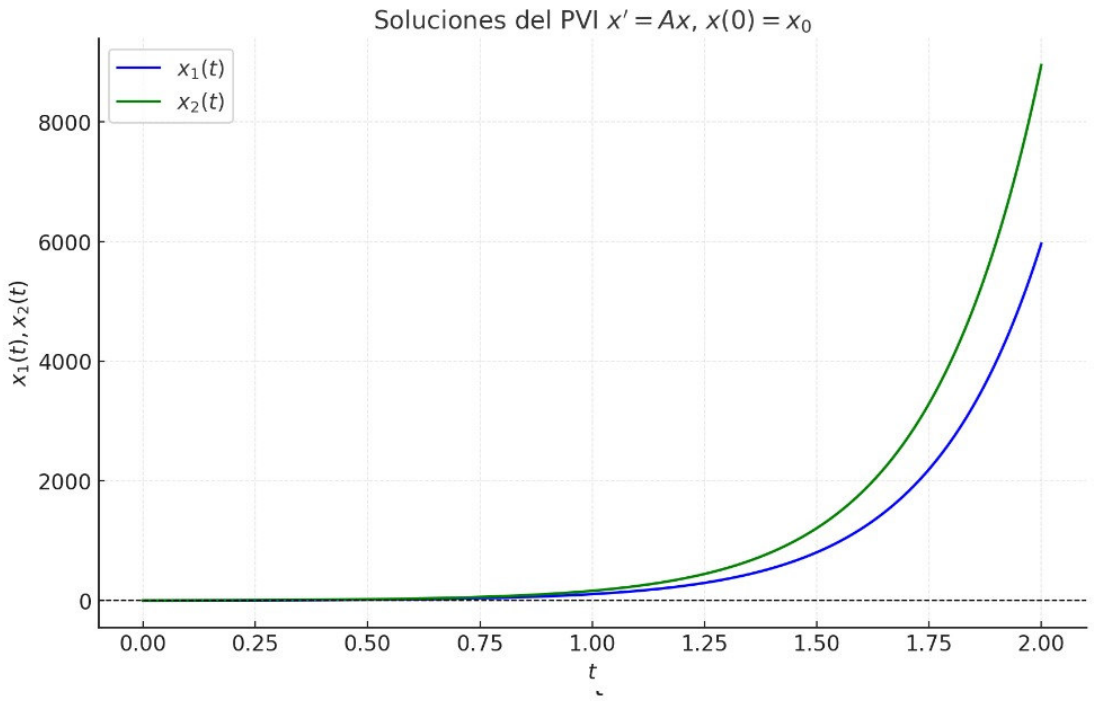
$$x^1 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix},$$

Se observa que

$$(x^1)' = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax^1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que $(x^1)' = Ax^1$, de la misma forma $(x^2)' = Ax^2$, siendo x_1, x_2 soluciones del SEDO $x' = Ax$ y también son linealmente independiente.

El gráfico ilustra las soluciones del SEDO dado en el ejemplo 1.



Generado por el software Python con Matplotlib.

1.3.1 Solución de un SEDO

Definición 12. ***(Solución general y particular de un SEDO).*** *Una solución de un SEDO se denomina solución general si incluye todas las soluciones del SEDO. Mientras que una solución particular es aquella que es deducida de la solución general.*

1.3.2 Tipos de solución

Teorema 4. ***(Teorema de existencia y unicidad).*** *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua en U y de clase C^1 con respecto a las variables espaciales de U, entonces para cualquier $(t_0, x_0) \in U$ el PVI (1.4) admite una única solución la cual está definida en una vecindad de t_0.*

Demostración:

Ver en la página 13 de [14]. ■

Observación 4. *Una solución $\varphi(t_0, x_0)$ definida en una vecindad de t_0 es denominada como solución local.*

Definición 13. ***(Solución local).*** *Una solución local de un SEDO es una función que satisface el sistema en un intervalo reducido alrededor de un punto inicial, pero no necesariamente en todo el dominio posible de la variable independiente. Esta definición está garantizada por el teorema 4.*

Observación 5. ***(Solución particular).***

1) Para la ecuación (1.6):

   Siendo x_k con valores en $\mathbb{R}^n$ una solución en I de un SEDO (1.5), si se cumple:

   i) $x_k(t)$ existe en I,

   ii) x_k es tal que $(x_k)' = Ax_k$.

2) Para la ecuación (1.7):

Teorema 5. *Considérese el PVI (1.8) donde $g(t) \in C(I)$ (eventualmente $I \subseteq \mathbb{R}$), entonces, la solución del PVI en I es*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}g(s)\,ds.$$

Demostración:

Ver en la página 103 de [1].

Definición 14. ***(Solución general).*** *Definimos la solución general:*

1) Para la ecuación (1.6) tenemos los siguientes casos:

a) Caso 1: Autovalores reales y distintos ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$)

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n, \quad c_k \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

donde v_k *son autovectores asociados a los autovalores* λ_k *tal que* $k = 1, 2, \cdots, n$.

b) Caso 2: Autovalores complejos (conjugados)

$$\begin{aligned} x(t) = c_1 e^{\alpha t}(u \cos \beta t - w \operatorname{sen} \beta t) + c_2 e^{\alpha t}(u \operatorname{sen} \beta t + w \cos \beta t) \\ + \cdots + c_n e^{\alpha t}(u \cos \beta t - w \operatorname{sen} \beta t), \quad c_k \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde $u + iw$ *es el autovector asociado al autovalor complejo* $\lambda = \alpha + i\beta$ *tal que* $k = 1, 2, \cdots, n$.

c) Caso 3: Autovalores reales iguales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$)

$$\begin{aligned} x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t}\big(I + t(A - \lambda I)\big) v_2 \\ + \cdots + c_n e^{\lambda t}\big(I + t(A - \lambda I)\big) v_n, \quad c_k \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.11}$$

tal que $k = 1, 2, \cdots, n$.

2) Si $\psi(t)$ *es la solución particular que satisface* (1.7) *y* $\phi(t)$ *la solución general de* (1.6)*, entonces la solución general para la ecuación* (1.7) *es:*

$$x(t) = \phi(t) + \psi(t).$$

Ejemplo 2. ***(Solución general con autovalores reales y distintos)***
Sea el siguiente el PVI $x' = Ax$, $x(0) = x_0$ *donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Hallamos los autovalores o valores propios del la matriz, siendo I la matriz identidad

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$ y un vector propio asociado al autovalor $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$ respectivamente son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

La solución general se escribe de la siguiente forma

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Usamos la condición inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$x(0) = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -c_1 + 3c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

siendo $c_1 = -1, c_2 = 1$ y una solución del PVI es

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{4t} \\ e^{-t} + 3e^{4t} \end{bmatrix}.$$

El gráfico ilustra las soluciones del PVI del ejemplo 2.

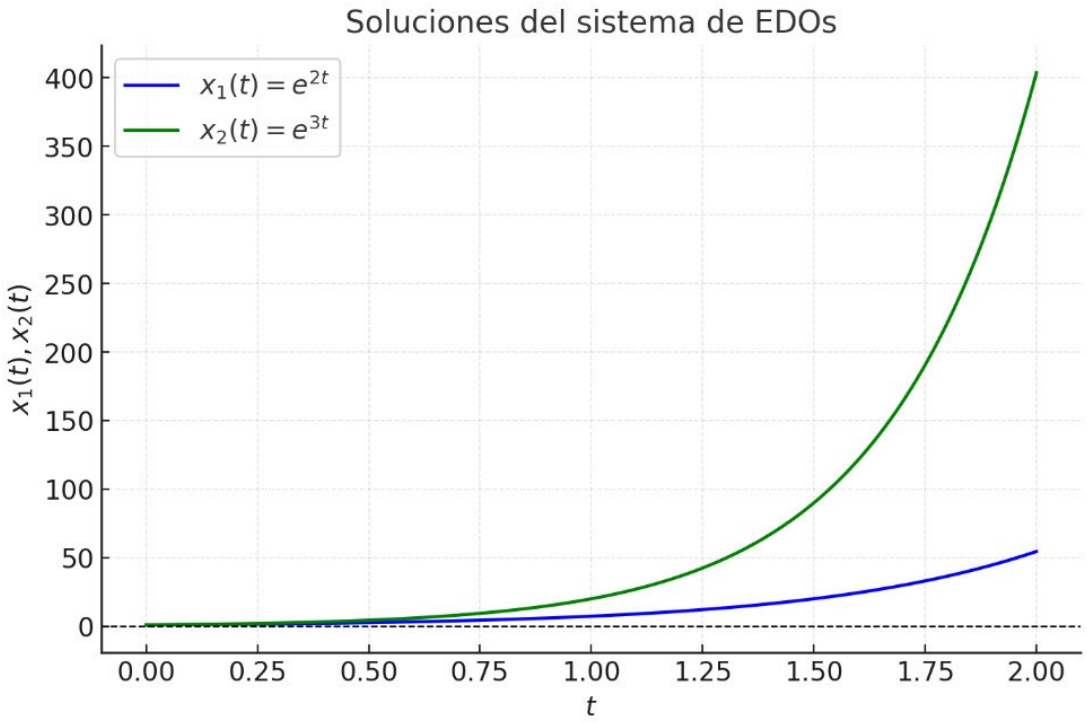


Gráfico elaborado utilizando Python y la biblioteca Matplotlib.

1.4 Sistema dinámico

Definición 15. ***(Sistemas dinámico).*** *Un sistema dinámico describe cómo, un conjunto de variables evoluciona en el tiempo en función de ciertas reglas matemáticas. Estos sistemas modelan el comportamiento de fenómenos cambiantes, como el movimiento de partículas, la dinámica de poblaciones o procesos eléctricos.*

En general, un sistema dinámico se define mediante un conjunto de EDOs que relacionan las derivadas de las variables con sus estados actuales, por ejemplo $x(t) = f(x(t), t)$.

Definición 16. ***(Sistemas dinámico autónomo).*** *Una EDO se considera autónoma cuando no tiene dependencia de la variable independiente (como el tiempo). En otras palabras, su forma matemática se expresa únicamente en función de la variable dependiente y su derivada, esto se representa generalmente como:*

$$\frac{dx}{dt} = g(x)$$

siendo

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}.$$

Aquí, el cambio de x respecto al tiempo t depende exclusivamente del valor actual de x, y no del instante de tiempo específico en que se evalúa.

1.4.1 Espacio fase

Definición 17. ***(Plano fase).*** *El plano fase es una representación gráfica de todas las posibles trayectorias o soluciones de un SEDO autónomo de dos dimensiones.*

Definición 18. ***(Diagrama fase).*** *Un diagrama fase es una representación gráfica, similar al plano fase, que muestra las soluciones de un sistema dinámico, destacando como cambian las variables del sistema con el tiempo.*

Definición 19. ***(Isoclinas).*** *Las isoclinas son curvas en el espacio fase donde la pendiente de las trayectorias (derivadas de la solución) es constante. Matemáticamente, son lugares geométricos definidos por la condición*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = constante.$$

1.5 Modelo SIR

1.5.1 Todo sobre el modelo SIR

Definición 20. ***(Modelo SIR).*** *El modelo SIR es un SEDO empleado en la epidemiología para analizar el crecimiento y propagación de las enfermedades infecciosas en una población, describiendo como los individuos se trasladan entre diferentes grupos.*

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta \dfrac{SI}{N}, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta \dfrac{SI}{N} - \mu I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \mu I. \end{cases} \tag{1.12}$$

Modelo clásico SIR

El siguiente esquema gráfico representa la dinámica de transiciones entre grupos del modelo clásico SIR.



Este modelo divide a la población en tres grupos:

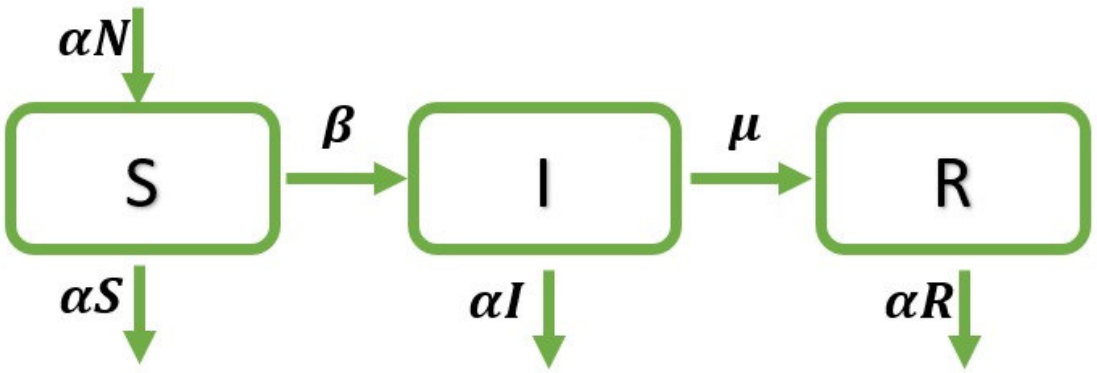
- Población susceptible ($S(t)$) grupo de personas que aún no han contraído la enfermedad pero pueden hacerlo.
- Población Infectada ($I(t)$) grupo de personas que están infectadas y pueden transmitir la enfermedad.
- Población Recuperada ($R(t)$) Individuos que estuvieron enfermos y no pueden contagiar, es decir adquirieron la inmunidad completa o bien fallecieron, este grupo no podrá infectarse nuevamente.

El modelo clásico analiza epidemias que ocurren en periodos de tiempo relativamente breves, sin embargo, cuando el periodo de tiempo considerado es más extenso, como en el caso del COVID-19, resulta fundamental incorporar lo que se denomina dinámica vital en los modelos epidemiológicos. Esto implica realizar ajustes al sistema de ecuaciones diferenciales (1.6), permitiendo así que el modelo refleje exactamente el comportamiento real de la población durante el brote. El modelo consta de 3 ecuaciones

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dS}{dt} = \alpha N - \beta\dfrac{SI}{N} - \alpha S, \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta\dfrac{SI}{N} - \mu I - \alpha I, \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \mu I - \alpha R. \end{array}\right. \tag{1.13}$$

Modelo SIR con dinámica vital

El siguiente esquema gráfico representa la dinámica de transiciones entre grupos del modelo SIR con dinámica vital.



Debemos tener en cuenta lo siguiente:

i) αN representa a todos los recien nacidos y estan dentro de la población susceptible.

ii) $\alpha S, \alpha I, \alpha R$ estan representando a todos los fallecidos debido a las causas naturales de sus respectivas poblaciones S, I y R.

2 Resultados importantes

En esta sección mencionaremos los resultados y teoremas principales que nos permitiran llegar a nuestro objetivo principal, cada teorema será enunciado y demostrado adecuadamente.

2.1 Teoremas importantes

2.1.1 Teorema A. Solución máximal: Existencia y unicidad

Teorema 6. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y conexo; si $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ es una función continua en t y localmente Lipschitz en x, entonces, existe solución maximal única del PVI (1.4), para cada $(t_0; x_0) \in U$, donde el intervalo máximal $I_{máx} = I_{máx}(t_0; x_0)$ para la solución, es abierto.*

Demostración:

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto y conexo.

Supongamos que $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ es continua en t y localmente Lipschitz respecto a x.

Como f es localmente Lipschitz en x entonces existe una constante de Lipschitz L en cada subconjunto compacto de U, tal que

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||, \forall x, y \in U.$$

(i) Probaremos la existencia y unicidad local de la solución

Tomando como inicio al punto $(t_0, x_0) \in U$, por el teorema de Picard-Lindelöf, existe un intervalo de tiempo J alrededor de t_0 en el cual existe una única solución local $\varphi(t)$ del PVI (1.4), es decir, una función diferenciable que satisface:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t)), \varphi(t_0) = x_0.$$

La solución local φ es única en este intervalo J debido a la condición de Lipschitz sobre x.

(*ii*) Probaremos la extensión de la solución local a una solución máxima

En efecto:

Como φ es una solución local, podemos extender su dominio de definición al intervalo más grande posible en el cual la solución se mantiene en U. Este intervalo es llamado intervalo de existencia máxima y se denota por $I_{\text{máx}}(t_0, x_0)$.

Este intervalo de existencia máxima puede ser finito o infinito. Sin embargo, si se encuentra en el borde de U o si φ se vuelve no acotada a medida que se aproxima al borde de $I_{\text{máx}}$, entonces la solución no puede extenderse más allá de $I_{\text{máx}}$.

(*iii*) Probaremos que $I_{\text{máx}}$ es abierto

En efecto:

Como f es localmente Lipschitz en x y continua en t, lo cual implica que en cada punto del intervalo existe un entorno en el cual podemos extender la solución.

Supongamos que, $I_{\text{máx}}(t_0, x_0)$ no es abierto, entonces habría un punto en el límite del intervalo donde podríamos extender la solución un poco más allá, lo que contradice la maximalidad de $I_{\text{máx}}$.

Por (i), (ii) y (iii), existe una única solución máxima para el PVI (1.4) en el intervalo $I_{\text{máx}}(t_0, x_0)$ y este intervalo es abierto. ■

2.1.2 Teorema B. Existencia del intervalo máximal

Teorema 7. *Sea* $]m_1, m_2[$ *el intervalo máximal de existencia del PVI (1.4). Si tenemos que:* $|m_2| < +\infty$, *entonces* $\lim_{t \to m_2^-} |\varphi(t)| = +\infty$. *Analogamente sucede con* m_1.

Demostración:

Sea $\phi(t)$ una solución del PVI (1.4) en el intervalo máximo de existencia $]m_1, m_2[$.

Supongamos que, $|\varphi(t)|$ está acotada cuando $t \to m_2^-$, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $|\varphi(t)| \leq M$ para $t \in [t_0, m_2[$ con $t_0 \in]m_1, m_2[$.

Como $\varphi(t)$ está acotada en el intervalo $]m_1, m_2[$ y que $f(t,x)$ es continua en t y localmente Lipschitz en x, entonces podemos extender la solución más allá de ese extremo.

Sin embargo, esto contradice la definición de $]m_1, m_2[$ como intervalo máximo para la existencia de la solución.

Esto implica que $|\varphi(t)|$ debe diverger al infinito cuando $t \to m_2^-$. Es decir,

$$\lim_{t \to m_2^-} |\varphi(t)| = +\infty.$$

De manera similar, podemos aplicar el mismo razonamiento para el extremo m_1, obteniendo que:

$$\lim_{t \to m_1^+} |\varphi(t)| = +\infty.$$

■

2.1.3 Teorema C. Depencia continua respecto a las condiciones iniciales

Teorema 8. *Dado el subconjunto abierto y conexo, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ una función continua en t y localmente Lipschitz en x. Definimos Ψ como*

$$\Psi = \left\{(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2} : (t_0, x_0) \in U, t \in I_{máx}(t_0, x_0)\right\} \tag{2.1}$$

y la aplicación φ como

$$\begin{aligned} &\varphi : \Psi \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n, \\ &\quad (t, t_0, x_0) \in \Psi \mapsto \varphi(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.2}$$

Entonces, la solución global $\varphi(\cdot;\cdot,\cdot)$ del PVI (1.4), expresada en función de la condición inicial, es continua respecto a las condiciones iniciales en Ψ.

Demostración:

Como f es continua en t y localmente Lipschitz en x, por el teorema de Picard-Lindelöf, tenemos:

1. La existencia y unicidad local de una solución $\varphi(t; t_0, x_0)$ del PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en un intervalo $I_{\text{máx}}(t_0, x_0)$.

2. La solución $\varphi(t; t_0, x_0)$ depende de manera continua de las condiciones iniciales.

Sean (t_1, x_1) y (t_2, x_2) condiciones iniciales cercanas, tal que $\varphi_1(t) = \varphi(t; t_1, x_1)$ y $\varphi_2(t) = \varphi(t; t_2, x_2)$ son soluciones que satisfacen:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t)), \quad \varphi_1(t_1) = x_1, \\ \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t)), \quad \varphi_2(t_2) = x_2. \end{cases}$$

Definimos: $e(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, entonces

$$e'(t) = f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t)).$$

Por la condición de Lipschitz en x, existe una constante $L > 0$ tal que:

$$\|e'(t)\| = \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq L\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| = L\|e(t)\|$$

Integrando la desigualdad anterior desde $t_0 = \min(t_1, t_2)$ hasta $t \in I_{\text{máx}}$, obtenemos:

$$\|e(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^{t} L\|e(s)\|\, ds.$$

Por la desigualdad de Gronwall (ver página 8 de [9]), tenemos que

$$\|e(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{L(t-t_0)}.$$

Esto demuestra que si las condiciones iniciales (t_1, x_1) y (t_2, x_2) son cercanas, las soluciones correspondientes $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ también lo son para todo $t \in I_{\text{máx}}(t_0, x_0)$.

Finalmente, si $(t_n, t_k, x_k) \to (t, t_0, x_0)$ en Ψ, por la dependencia continua probada en el paso anterior, se tiene:

$$\varphi(t_n; t_k, x_k) \to \varphi(t; t_0, x_0).$$

Así, la aplicación $\varphi : \Psi \to \mathbb{R}^n$ es continua.

Por lo tanto, la solución global $\varphi(t; t_0, x_0)$ del PVI es continua respecto a las condiciones iniciales (t_0, x_0) en Ψ. ■

3 Problema principal

En esta sección presentamos el resultado principal, con el cual obtenemos el objetivo principal y los objetivos secundarios del presente trabajo monográfico, siguiendo esta línea, tenemos

3.1 Existencia y unicidad de la solución global

3.1.1 Existencia y unicidad de la solución local

Proposición 1. *Al redefinir el modelo (1.14) obtenemos el siguiente sistema:*

$$\frac{dS}{dt} = \alpha N - \frac{\beta SI}{N} - \alpha S = g_1(S, I, R), \tag{3.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \mu I - \alpha I = g_2(S, I, R), \tag{3.2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \mu I - \alpha R = g_3(S, I, R). \tag{3.3}$$

entonces, $g = (g_1, g_2, g_3)$ *es continuamente diferenciable en el espacio de fases* Ω *y en el intervalo máximal* $I_{máx}$ *existe solución local.*

Demostración:

Tomando las derivadas parciales de g_1, g_2 y g_3 con respecto a S, I y R, respectivamente

$$\frac{\partial g_1}{\partial S} = -\frac{\beta I}{N} - \alpha, \quad \frac{\partial g_1}{\partial I} = -\frac{\beta S}{N}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial R} = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial S} = \frac{\beta I}{N}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial I} = \frac{\beta S}{N} - \mu - \alpha, \quad \frac{\partial g_2}{\partial R} = 0,$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial g_3}{\partial I} = \mu, \quad \frac{\partial g_3}{\partial R} = -\alpha.$$

Se observa que todas las derivadas parciales de primer orden de g existen y son continuas en el espacio de fases Ω.

Por lo tanto, aplicando el Teorema A, concluimos que en el intervalo máximal $I_{\text{máx}}$ existe solución local para el sistema (3.1), (3.2) y (3.3). ■

Una vez comprobada la existencia de la solución, veamos que esta es una solución global, con condiciones iniciales en Ω y se mantiene positiva para $\forall t \geq 0$. Dado que, cualquier solución es continua en su intervalo de definición. Así, esta necesariamente deberá alcanzar el valor 0 antes de adoptar valores negativos.

3.1.2 Análisis cuando la solución es nula

1) Si $S = 0$ y $I, R \geq 0$, la EDO (3.1) se transforma en:

$$\frac{dS}{dt}\Big|_{S=0} = \alpha N = \alpha(I + R) \geq 0.$$

Por lo tanto, como la derivada de S con respecto a t cuando $S = 0$ es mayor o igual a 0, concluimos que $S \geq 0$.

2) Si $I = 0$ y $S, R \geq 0$, la EDO (3.2) se simplifica a:

$$\frac{dI}{dt}\Big|_{I=0} = 0.$$

Por lo tanto, la función nula es una solución, así tenemos que $I \geq 0$.

3) Si $R = 0$ y $S, I \geq 0$, la EDO (3.3) se convierte en:

$$\frac{dR}{dt}\Big|_{R=0} = \mu, \quad I \geq 0.$$

Por lo tanto, $R \geq 0$.

3.1.3 La solución es positiva

Hemos demostrado que toda solución del sistema (3.1), (3.2) y (3.3) que se origina en Ω permanece positiva en Ω y cumple las condiciones establecidas en el intervalo considerado, esto garantiza que las soluciones del sistema se mantienen dentro del dominio definido por Ω.

3.1.4 Existencia de la solución global

Proposición 2. *El sistema formado por las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) posee solución global y es única.*

Demostración:

Para demostrar esto, verificamos que las soluciones se mantienen acotadas para todo $t \geq 0$. En efecto:

(i) El sistema (3.1), (3.2) y (3.3) describe la dinámica de la población dividida en tres: susceptibles $S(t)$, infectados $I(t)$ y recuperados $R(t)$.

(ii) La población total $N = S(t) + I(t) + R(t)$ se mantiene constante a lo largo del tiempo, ya que la tasa de cambio total satisface:

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = 0.$$

(iii) Por lo tanto, para todo $t \geq 0$, se cumple que:

$$S(t) \leq N, I(t) \leq N y R(t) \leq N.$$

Las condiciones iniciales (S_0, I_0, R_0) pertenecen al conjunto de estados factibles Γ, definido como:

$$\Gamma = \Big\{(S, I, R) : \ S, I, R \geq 0, S + I + R = N\Big\}$$

Esto garantiza que las variables del sistema inician dentro de un dominio acotado y físicamente consistente, probando así, que la solución es global. ■

3.2 Teorema principal

Teorema 9. *Dado un valor inicial $x_0 = (S_0, I_0, R_0) \in \Gamma$, el sistema (3.1), (3.2) y (3.3) tiene una solución global positiva y única.*

Demostración:

Consideremos que $x_0 = x(0; 0, x_0)$ representa la solución del SEDO en el instante inicial, cuando $S_0 = S(0; 0, x_0)$, $I_0 = I(0; 0, x_0)$ y $R_0 = R(0; 0, x_0)$. Como las soluciones permanecen acotadas para todo tiempo $t \geq 0$, además tenemos que

$$x(\cdot; 0, x_0) = \Big(S(\cdot; 0, x_0), I(\cdot; 0, x_0), R(\cdot; 0, x_0)\Big) \in C^1([0, +\infty), \Gamma),$$

Debido a que la población total dada por N permanece inalterable (constante), para todo $t \geq 0$ y con $(S_0; I_0, R_0) \in \Gamma$ tenemos que:

$$S(t; 0, S_0), I(t; 0, I_0), R(t; 0, R_0) \leq N,$$

de donde obtenemos un sistema dinámico autónomo, también conocido como semigrupo, $\{T(t) : t \geq 0\}$, definido de la siguiente manera:

$$T(t) : \Gamma \to \Gamma, \quad x_0 \mapsto T(t)x_0.$$

De este modo, el valor de la solución del SEDO, que parte de un tiempo inicial $t_0 = 0$ y un punto inicial x_0, se expresa como

$$T(t)x_0 = x(t; 0, x_0).$$

Al aplicar el Teorema B, se garantiza que las soluciones del sistema (3.1), (3.2) y (3.3) no se vuelven infinitas en un tiempo finito. Por lo que, el intervalo solución puede crecer indefinidamente, asegurando la existencia de una única solución global para todo $t \geq 0$. ■

4 Conclusiones y/o Sugerencias

Este trabajo ha demostrado ser útil en contextos epidemiológicos que a menudo requieren de la dinámica vital más compleja y aqui se enuncian algunas conclusiones y/o sugerencias finales:

1. Se ha propuesto un modelo que incluye un parámetro relacionado con la vacunación, el cual ha demostrado ser clave para favorecer la erradicación de la epidemia.

2. El impacto de la vacunación en la disminución de la propagación de enfermedades es fundamental. En el contexto actual, es crucial respaldar estos hallazgos con estudios y pruebas científicas que faciliten su aceptación por parte.

3. Se han desarrollado bases teóricas que permiten describir la evolución de una enfermedad en función de ciertos parámetros. Esto ha facilitado el análisis del comportamiento del sistema y la identificación de las condiciones necesarias para erradicar o convertir una epidemia en endémica.

4. En la actualidad, la vacunación salva millas de vidas cada año en Perú. Ante el inicio de epidemias, es común vacunar a una proporción de la población susceptible para frenar su propagación y lograr la erradicación de la enfermedad.

5. Se espera que este trabajo impulse el desarrollo de métodos más precisos que ayuden a alcanzar los objetivos establecidos, como la erradicación y el control de la epidemia.

Bibliografía

[1] Nicolau, J. (2011). Equações diferenciais e equações às diferenças.

[2] Spivak, M. (1965). Calculus on manifolds: A modern approach to advanced calculus. Westview Press.

[3] Medeiros, E. F. (2016). Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível (Tesis de licenciatura).

[4] Amster, P. (2017). Ecuaciones diferenciales con retardo. Cursos y seminarios de matemática Serie B.

[5] Zill, D. G., Edwards Jr, C. H., & Penney, D. E. (2022). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Ed. Thomson Learnig.

[6] Maroto Sánchez, D. (2023). Modelos matemáticos en epidemiología para estudiar diferentes estrategias de vacunación.

[7] J. Hale, Ordinary Differential Equations. Wiley-Interscience, 1969.

[8] García Piñera, A. (2014). Modelos de ecuaciones diferenciales para la propagación de enfermedades infecciosas.

[9] Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA,1979.

[10] Figueiredo, D. G. & NEVES, A. F., Equações Diferenciais Aplicadas, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1997.

[11] Piskounov, N. (1992) Cálculo Diferencial e Integral, Vol. II, Edições Lopes da Silva.

[12] Perko, L. (2001) Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag.

[13] Rao, M. (1981) Ordinary Differential Equations, Edward Arnold.

[14] Martínez León, V. A. (2009). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.