Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Aplicación del teorema de punto fijo de Schaefer a un problema elíptico no lineal

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Nelly Mariel BARAHONA OLIVARES

ASESOR

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Barahona, N. (2021). *Aplicación del teorema de punto fijo de Schaefer a un problema elíptico no lineal*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	**Nelly Mariel , Barahona Olivares**
DNI	40110856
URL de ORCID	**No aplica**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	**Willy David, BARAHONA MARTÍNEZ**
DNI	**10078450**
URL de ORCID	**https://orcid.org/0000-0001-9177-1561**
Datos de investigación	
Línea de investigación	**A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Análisis Funcional**
Grupo de investigación	**EDOACBI**
Agencia de financiamiento	**PTPGRADO -VRIP.**
Ubicación geográfica de la investigación	País: **Perú** Departamento: **Lima** Provincia: **Lima** Distrito: **Villa María del Triunfo** Latitud: **-12.9862** Longitud: **-76.92211**
Año o rango de años en que se realizó la investigación	**2019-2020**
URL de disciplinas OCDE	Matemática Aplicada. https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 horas del jueves 06 de mayo del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Jesús Virgilio Luque Rivera (PRESIDENTE), Lic. Víctor Emilio Carrera Barrantes (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: **"APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE SCHAEFER A UN PROBLEMA ELÍPTICO NO LINEAL",** presentado por la Bachiller Nelly Mariel Barahona Olivares, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **sobresaliente** con un calificativo promedio de **DIECIOCHO (18**) (letras y números).

A continuación, el Presidente del Jurado, Mg. Jesús Virgilio Luque Rivera, manifestó que la Bachiller Nelly Mariel Barahona Olivares, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 17:05 horas se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Mg. Jesús Virgilio Luque Rivera
PRESIDENTE

Lic. Víctor Emilio Carrera Barrantes
MIEMBRO

Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR

La Vicedecana (e) de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Mg. Zoraida Judith Huamán Gutiérrez, ccertifica virtualmente la participación del Jurado Evaluador, el titulando, el acto de instalación y el inicio, desarrollo y término del acto académico de sustentación, dejando constancia en el acta respectiva.

FICHA CATALOGRÁFICA

Nelly Mariel, Barahona Olivares

Aplicación del Teorema de Punto Fijo de Schaefer a un Problema Elíptico No Lineal, (Lima) 2021
VIII.,67p.,29.7cm (UNMSM, Titulo, Matemática, 2021) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
Matemática, UNMSM/FCM II. Título.(Serie).

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE SCHAEFER A UN PROBLEMA ELÍPTICO NO LINEAL

Por

Nelly Mariel, Barahona Olivares

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Licenciada en Matemática.

Aprobado por:

....

Mg. Jesús Virgilio, Luque Rivera

Presidente del Jurado Evaluador de Tesis

....

Lic. Víctor Emilio, Carrera Barrantes

Miembro del Jurado Evaluador de Tesis

....

Mg. Willy David, Barahona Martínez

Miembro Asesor de Tesis

LIMA - PERÚ

Diciembre - 2020

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres Mauro Barahona e Isabel Olivares y hermanos que siempre me apoyaron e incentivaron a seguir adelante con mis objetivos a pesar de las dificultades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por guiar mis pasos día a día, ser el apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y de debilidad.

A mis padres Mauro Barahona e Isabel Olivares quienes son mi mayor fortaleza y brindarme su apoyo incondicional.

A mis hermanos que siempre estuvieron presentes.

A mi asesor el Mg. Willy David Barahona Martínez por haber dedicado tiempo orientándome con sus conocimientos sobre el tema en la elaboración de mi tesis.

A mis maestros por sus enseñanzas y haberme brindado todos sus conocimientos.

A mis amigos y personas que siempre me apoyaron.

El agradecimiento al Vicerectorado de Investigación y Posgrado (VRIP) de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por el apoyo financiero que hizo posible culminar este trabajo.

INDICE GENERAL

1. Preliminares **5**

1.1. Espacios Métricos 5

1.1.1. Noción de distancia y métrica 5

1.2. Espacios de Banach 13

1.3. Los espacios $L^p(\Omega)$ 14

1.3.1. La Integral de Lebesgue 15

1.4. Espacios de Hilbert 23

1.5. Espacio de Sobolev 27

1.5.1. Distribuciones 27

1.5.2. Derivada de una distribución 29

1.5.3. Espacios de Sobolev 31

1.6. Teoremas de Inmersión. 34

2. Teoremas de Punto Fijo **38**

2.1. Teorema de punto fijo de Banach 38

2.2. Teorema de punto fijo de Brouwer 38

2.3. Teorema de punto fijo de Schauder 39

2.4. Teorema de punto fijo de Schaefer 39

3. Problema Principal **43**

3.1. Existencia de soluciones débiles del problema 44

3.2. Unicidad de la Solución débil del problema (P) 49

3.3. Otra alternativa para resolver el problema (P) 50

4. Conclusiones y/o Sugerencias **58**

5. Bibliografía **58**

RESUMEN

Aplicación del Teorema de Punto Fijo de Schaefer a un Problema Elíptico No Lineal

Nelly Mariel, Barahona Olivares

Diciembre, 2020

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciada en Matemática.

En este trabajo de tesis, consideramos el problema elíptico no lineal con una condición de frontera de Dirichlet homogénea, dado por

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} -\Delta u(x) + u^5(x) = g(x), \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado bien regular.

El objetivo de este trabajo, es demostrar la existencia de soluciones débiles utilizando el Teorema de Punto Fijo de Schaefer.

Además se presenta otra alternativa de solución, a través de la formulación variacional.

Palabras claves: Ecuación elíptica no lineal, Solución débil, Espacios de Sobolev, Teorema de punto fijo de Schaefer, Formulación variacional.

ABSTRACT

Application of Schaefer's Fixed Point Theorem to a Nonlinear Elliptic Problem

Barahona, Nelly

December, 2020

Adviser	: Mg. Willy David, Barahona Martínez.
Obtained	: Graduate in Mathematics.

In this thesis work, we consider the non-linear elliptical problem with a homogeneous Dirichlet boundary condition, given by

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} -\Delta u(x) + u^5(x) = g(x), \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ is a very regular bounded domain.

The objective of this work is to prove the existence of weak solutions using Schaefer's Fixed Point Theorem.

In addition, another alternative solution is presented, through the variational formulation.

Keywords: Nonlinear elliptic equation, Weak solution, Sobolev spaces, Schaefer's fixed point theorem, Variational formulation.

Introducción

El estudio de las EDP es muy importante en el modelamiento matemático y en la descripción de fenómenos físicos en la mecánica de los medios continuos, Química, Biología, teoría de la relatividad, dinámica poblacional entre otras, parte importante de estas ecuaciones son del tipo elíptico no lineal. Obtener aproximaciones a priori así como la imposibilidad de obtener una estructura variacional, proporcionan un obstáculo natural a la aplicación de las técnicas más sencillas para determinar la existencia de la solución débil de este tipo de ecuaciones.

Una gran ventaja es obtener una solución débil, desde soluciones clásicas con derivadas continuas, a soluciones débiles con derivadas débiles, resultando así, más fácil probar la existencia de soluciones débiles, para luego estudiar sus propiedades, tales como singularidad y regularidad.

En nuestro caso, demostramos la existencia de soluciones débiles utilizando el Teorema de Punto Fijo de Schaefer, a su vez presentamos otra alternativa de solución. El presente trabajo lo realizamos con el objetivo de mostrar una alternativa poco utilizada mediante el teorema de punto fijo de Schaefer y a vez una forma didactica del metodo variacional; hemos dividido el trabajo en 4 capitulos: En el capitulo 1 hacemos un recuento de las propiedades básicas del análisis funcional y tópicos inherentes al problema objeto de estudio, en el capitulo 2 mencionamos los teoremas de punto fijo, haciendo énfasis en el Teorema de Punto Fijo de Schaefer ya que resolveremos nuestro problema aplicando dicho teorema. En el capitulo 3 resolvemos el problema planteado a través del teorema de punto fijo de Schaefer y se adiciona una alternativa mediante la formulación variacional y el método de Galerkin y finalmente en el capitulo 4 mostramos nuestras conclusiones y recomendaciones.

1 Preliminares

Comencemos introduciendo algunas nociones básicas del análisis funcional, que son indispensables en el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Espacios Métricos

En la geometría del espacio tridimensional donde convivimos, definimos la distancia, longitud, ángulo, perpendicularidad pues utilizados frecuente. En matemáticas es cotidiano agrupar ciertos elementos en espacios abstractos y establecer relaciones semejantes entre ellos, similares a las de los puntos del espacio ordinario. Entre los espacios abstractos y el euclideano se establece el paralelismo que nos permite observar y lograr un análisis profundo de estos elementos. Para el estudio de esta aplicaciones, la manera más sencilla que se puede abordar es utilizar las propiedades del espacio métrico.

Para definir un espacio métrico no es necesario contar con una estructura algebraica definida en él. Es muy frecuente el uso de espacios métricos que son a su vez espacios vectoriales, con una métrica que proviene de una norma, estos son llamados espacios normados.

El concepto de métrica es importante en el contexto de los espacios de Banach, pues la propiedad de completitud, que veremos mas adelante, depende de la noción de métrica. Sin embargo, una métrica se define en un conjunto arbitrario no vacío y, no requiere ser definida en un conjunto con estructura algebraica, como por ejemplo en un espacio vectorial; pero si además dicho conjunto posee una estructura de espacio vectorial, ciertas métricas darán lugar a la noción de norma.

1.1.1. Noción de distancia y métrica

Sea X un subconjunto no vacío y sea d una función o aplicación de $X \times X$ en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Definición 1. *La función d es una métrica en X si, y solo si las siguientes propiedades se cumplen para cada x, y, z de X.*

M1) $d(x, y) \geq 0$; *(d es real no negativa)*

M2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$; *(d es una identidad)*

M3) $d(x, y) = d(y, x)$; *(d es simétrica)*

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$; *(propiedad de desigualdad triangular)*

La función d se denonomina distancia y $d(x, y)$ se lee *distancia de x a y*. Las métricas se denotan por diferentes letras o por una combinación de diversos símbolos. Si fuese necesario distinguir entre varias funciones distancia lo denotaremos por

$$d^X \quad \text{ó} \quad d_X$$

y para casos específicos, usaremos

$$d_p, \quad d_\infty, \quad d_f, \quad \overline{d}, \quad \widetilde{d}, ..., \quad etc$$

cuando sea necesario usaremos la notación completa (X, d).
Si $Y \subseteq X$ definimos:

$$d\,|_{Y\times Y} = \widetilde{d}$$

El par $(Y, \widetilde{d})$ se llama **subespacio métrico** de X, donde $\widetilde{d}$ es llamada **Métrica Inducida** en Y por d.

Observación 1. *Los elementos del conjunto X se llaman puntos.*

A continuación daremos unos ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 1. *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, donde d es una función determinada por*

$$d \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = |x - y|.$$

Entonces d, es una métrica en $\mathbb{R}$, ***llamada métrica usual o fundamental*** *de $\mathbb{R}$ y se representará por $d = d_u$.*

Ejemplo 2. *Si X es un conjunto cualquiera y la función d se define mediante*

$$\begin{aligned} d \ : \ & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto d(x,y) = \begin{cases} 0, & si \quad x = y \\ 1, & si \quad x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

entonces, d es una métrica en X, llamada también **métrica discreta o trivial**.

Ejemplo 3. *Sea $C[a,b]$ la clase de todas las funciones reales continuas definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$. Si f, g son elementos de $C[a,b]$ y si d es una función definida por*

$$\begin{aligned} d \ : \ & C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (f,g) \qquad \longmapsto d(x,y) = \max_{a \leq x \leq b} \big| f(x) - g(x) \big|. \end{aligned}$$

Entonces, d es una métrica en $C[a,b]$.

Ejemplo 4. *Sea $B(A) = \Big\{ f / f : A \longrightarrow \mathbb{R} \ f \text{ es acotada} \Big\}$ y sea d la función definida por:*

$$\begin{aligned} d \ : \ & B(A) \times B(A) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (f,g) \qquad \longmapsto d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Entonces d es una métrica en $B(A)$.

Proposición 1. ***(Desigualdad de Cauchy – Schwarz).*** *Si $a_i, b_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, ..., n$, entonces:*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. En efecto para todo a_i, b_i, λ de $\mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i - \lambda b_i \big)^2 \geq 0$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i^2 - 2\lambda a_i b_i + \lambda^2 b_i^2 \big) \geq 0$$

luego

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq 0$$

lo que entraña

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0$$

ordenando el polinomio en λ, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) \lambda^2 - \left(2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) \lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \geq 0. \tag{1.1}$$

Luego, para que la ecuación (1.1), tenga solución para cualquier valor real λ, el discriminante debe ser menor o igual que cero, es decir:

$$\left[2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right]^2 - 4 \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right] \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right] \leq 0$$

entonces

$$4 \left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right]^2 \leq 4 \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right] \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right].$$

Por lo tanto

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \blacksquare$$

Ejemplo 5. *Sea* $\mathbb{R}^n = \Big\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ tal que } x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, ..., n \Big\}$ *y sea* e_n *una aplicación determinada por:*

$$\begin{aligned} e_n \quad : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \quad \longmapsto e_n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

La función e_n *es una métrica en* $\mathbb{R}^n$, ***llamada métrica Euclideana***.

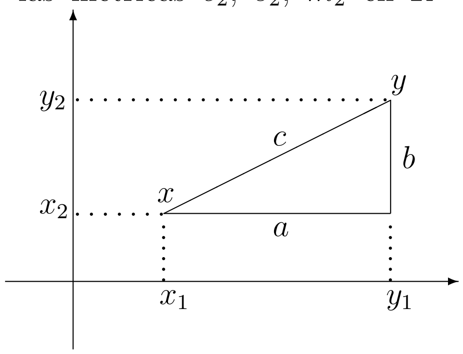
Ejemplo 6. *Dado* $\mathbb{R}^n = \Big\{ x/x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ tal que } x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, ..., n \Big\}$ *y sean* s_n, m_n *aplicaciones definidas por:*

$$\begin{aligned} s_n \quad : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \quad \longmapsto s_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_n \quad : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \quad \longmapsto m_n(x, y) = \text{máx}\{|x_i - y_i|/i = 1, 2, ..., n\}. \end{aligned}$$

Entonces, tanto s_n *como* m_n *son métricas en* $\mathbb{R}^n$, *llamadas métrica de la suma y del máximo respectivamente.*

Para $n = 2$ las métricas e_2, s_2, m_2 en $\mathbb{R}^2$ tienen la interpretación geométrica:



$Figura\,01$

En el triángulo rectángulo: el valor de la hipotenusa es la distancia euclideana de x a y; el valor de la suma de los catetos es la distancia suma entre x e y; el mayor valor de los catetos es la distancia del máximo de x a y; es decir,

$$e_2(x, y) = c \quad ; \quad s_2(x, y) = a + b \quad ; \quad m_2(x, y) = a.$$

Ejemplo 7. *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sea d una aplicación caracterizada por*

$$\begin{aligned} d \ : \ & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto d(x, y) = (x - y)^2. \end{aligned}$$

Entonces, d no es una métrica en $\mathbb{R}$, puesto que la función d no cumple la desigualdad triangular.

Ejemplo 8. *Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos y sea $\boldsymbol{c}$ una función definida por*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} \ : \ & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto \boldsymbol{c}(x, y) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}, \end{aligned}$$

donde $x = a + bi$, $y = c + di$, $i = \sqrt{-1}$. Entonces $\boldsymbol{c}$ es una métrica en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 9. *Sea (X, d) un espacio métrico, k un número real positivo y la función kd caracterizada por:*

$$\begin{aligned} kd \ : \ & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto kd(x, y) = k[d(x, y)]. \end{aligned}$$

Entonces (X, kd) es un espacio métrico.

Ejemplo 10. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea m una función definida mediante*

$$\begin{aligned} m \ : \ & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto m(x,y) = \text{mín}\{1, d(x,y)\}. \end{aligned}$$

Entonces (X,m) es un espacio métrico.

Ejemplo 11. *Dado el espacio métrico (X,d) y la aplicación*

$$\begin{aligned} e \ : \ & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto e(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \end{aligned}$$

entonces se tiene que (X,e) también es un espacio métrico.

Proposición 2. *Sean X un conjunto no vacío, el par (E,d_2) un espacio métrico y $f : X \longrightarrow (E,d_2)$ una aplicación inyectica, tal que para todo x, y de X se cumple*

$$d_1(x,y) = d_2\big(f(x), f(y)\big).$$

Entonces, d_1 es una métrica en X.

Demostración. Ver [17]pag. 05.

La aplicación d_1 se llama también métrica inducida en el conjunto X por la función f.

Proposición 3. *Sea (X,d) un espacio métrico cualquiera. Para todo x, y, x, w puntos de X, se cumple que:*

$$\Big| d(x,y) - d(z,w) \Big| \le d(x,z) + d(y,w).$$

Demostración. Ver [12]pag. 27.

Corolario 1. *Si el par (X,d) es un espacio métrico, entonces para todo x, y, z de X, se cumple :*

$$\Big| d(x,y) - d(z,y) \Big| \le d(x,z).$$

Demostración. Ver [13]pag. 49.

Definición 2. *Si (X,d) es un espacio métrico y A es un subconjunto de X, el subconjunto A dotado de la misma distancia (A,d) se denomina subespacio métrico de (X,d).*

Ejemplo 12. *Sea* $(\mathbb{R}, d)$ *espacio métrico, donde* d *es la métrica usual, es decir,* $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = |x - y|$*; y sea* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$*. Entonces:*

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 : d(p, q) = |p - q|,$$

luego $(\mathbb{Z}, d)$ *es un espacio métrico.*

Definición 3. ***(Isometría).*** *Sean* (X, d) *y* (X', d') *dos espacios métricos. Llamamos Isometría de* X *sobre* X' *a toda biyección* I *de* X *en* X' *tal que:*

$$\forall (x, y) \in X \times X : d'(I(x), I(y)) = d(x, y).$$

Entonces dice que los espacios métricos X *y* X' *son isométricos o que* I *preserva distancias.*
Por lo tanto, dos espacios métricos (X, d) *y* (X', d') *son isométricos, si, y solo si, existe una función biyectiva:*

$$I : X \longrightarrow X'$$

tal que

$$\forall (x, y) \in X \times X : d'(I(x), I(y)) = d(x, y).$$

Proposición 4. *Sean los espacios métricos* $(\mathbb{C}, \boldsymbol{c})$ *y* $(\mathbb{R}^2, e_2)$*, donde:*

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{c}: & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a + bi, c + di) & \longmapsto & \boldsymbol{c}(a + bi, c + di) = \Big[(a - c)^2 + (b - d^2)\Big]^{\frac{1}{2}}; \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} e_2: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & e_2\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = \Big[\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}}; \end{array}$$

Entonces $\mathbb{C}$ *es isométrico a* $\mathbb{R}^2$*.*

Demostración. Basta aplicar la definición de isometría.

Definición 4. ***(Limite de una Sucesión)***
Sea $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *una sucesión en un espacio métrico* (X, d)*;* $x \in X$ *decimos que* $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *converge a* x*, denotado por* $x_\nu \to x$ *si* $\nu \to +\infty$*, cuando* $d(x_\nu, x) \to 0$ *si* $\nu \to +\infty$*, es decir:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ /\ d(x_\nu, x) < \varepsilon; \forall \nu > N_0.$$

Notación 1.

$$x_\nu \to x \;\equiv\; \lim_{\nu\to+\infty} x_\nu = x.$$

Sea $p \geq 1$ un número real, definimos el conjugado de p como $p^* = q$ mediante la igualdad

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

y observamos que también $1 < q < \infty$, así la relación entre p y q es simétrica: $q^* = p$.

Lema 1. ***(Desigualdad de Young).*** *Sea* $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ *entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q};\ \forall a,b \in \mathbb{R}^+$$

Más generalmente, para cada $\varepsilon > 0$ *se verifica*

$$ab \leq \frac{a^p}{p\varepsilon}+\frac{\varepsilon b^q}{q} \tag{1.2}$$

Demostración. Ver [09]pag. 09.

En los espacios $L^p(\Omega)$ tenemos la siguiente desigualdad

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p) \tag{1.3}$$

que se cumple para $1 \leq p < \infty$ y $a, b \geq 0$.

Demostración. Ver [14]pag. 220.

Ahora enunciaremos las desigualdades clásicas de Hölder y Minkowski.

Lema 2. ***(Desigualdad de Hölder).*** *Sean* $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$ *números reales arbitrarios,* $p, q > 1$ *conjugados, entonces se satisface*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \tag{1.4}$$

Demostración. Ver [09]pag. 10.

Lema 3. ***(Desigualdad de Minkowski).*** *Si* x_i, y_i *son números reales, para cada* $i \in \mathbb{N}$ *y* $p \geq 1$, *entonces se satisface la siguiente desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{1.5}$$

Demostración. Ver [09]pag. 12.

Definición 5. *(**Sucesión de Cauchy**). Una sucesión $(X_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ sobre el espacio métrico (X,d); es llamada sucesión de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N = N\,(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,/\,d\,(x_\nu, x_m) < \varepsilon;\, \forall\nu, m > N.$$

Definición 6. *(**Espacio Completo**). Un espacio métrico (X,d) es completo, si cada sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X.*

1.2. Espacios de Banach

Definición 7. *Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice **normado** si, y sólo si, existe una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (denominada norma en $\mathbb{V}$) tal que, para todo $u, v \in \mathbb{V}$ satisface:*

(i) (Positividad) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0$ si, y sólo si, $u = 0_{\mathbb{V}}$.

(ii) (Producto por un escalar) $\|\alpha\, u\| = |\alpha|\,\|u\|$ para cualquier escalar α.

(iii) (Desigualdad triangular) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in \mathbb{V}$.

*Al par $(\mathbb{V}, \|.\|)$ se le denomina **Espacio vectorial normado.***

Observación 2. *Si en (i) no se exige la segunda parte, la función $\|.\|$ se llama **semi-norma.***

La distancia asociada a una norma $\|\cdot\|$ es

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Se verifica que efectivamente d es una métrica.

Definición 8. ***(Espacio de Banach).****Decimos que el espacio vectorial normado X es un espacio de Banach, si X es un espacio métrico completo, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente en X.*

$$\forall (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq X: \qquad \lim_{\nu,m\to\infty} d(x_\nu, x_m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in X: \quad \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x.$$

Lema 4. *Sea d una métrica en X inducida por una norma $\|\cdot\|$ en X, entonces:*

1. *i)* $d(x+a, y+a) = d(x,y), \quad \forall x, y, a \in X$

2. *ii)* $d(\beta x, \beta y) = |\beta| d(x,y), \quad \forall x, y \in X, \ \forall \beta \in \mathbb{K}$.

1.3. Los espacios $L^p(\Omega)$

Definición 9. ***(Función escalonada).*** *Sea Ω un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, decimos que la función*

$$s : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es escalonada en Ω, si existe una partición $\mathfrak{P}$ de Ω tal que

$$s(x) = c_k, \ x \in \Omega_k$$

Si s es escalonada en Ω, decimos que $s \in S(\Omega)$

Definición 10. ***(Función medible).*** *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se dice que f es medible en Ω, si existe una sucesión de funciones escalonadas en Ω, si $(s_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$s_\nu(x) \to f(x), \ c.t.p. \ x \in \Omega$$

Si f es medible en Ω, decimos que $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$

Definición 11. ***(Función simple).****Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$; se llama* ***función simple*** *en Ω a una función medible $s : \Omega \to \mathbb{R}$ que sólo toma un número finito de valores, es decir, tal que $s(\Omega) = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. En este caso s puede expresarse de la forma*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{A_i}(x)$$

donde $A_i = s^{-1}(\{a_i\}) = \{x \in \Omega : \ s(x) = a_i\}$ y χ_{A_i} es la función característica del conjunto A_i.

Teorema 1. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Existe una sucesión de funciones simples de Ω en $\mathbb{R}$ tales que*

1) $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ *para todo* $x \in \Omega$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{n} s_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Demostración. Ver [06]pag.63.

1.3.1. La Integral de Lebesgue

Ante la existencia de dificultades en algunos problemas con la integral de Riemann, estos aparecen cuando se hace interactuar a la integral de Riemann con operaciones de límites. Es así que es necesario ampliar el concepto de integral. La generalización de la integral es conocida como integral de Lebesgue.

Definición 12. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $s : \Omega \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa, $s = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.*
Se define la integral de s en Ω por

$$\int_{\Omega} s := \sum_{i=1}^{k} a_i \, m(A_i)$$

con el convenio de que $0 \cdot \infty = 0$.

Algunos resultados importantes:

1) La integral es no negativa, y puede ser infinita:

$$0 \leq \int_{\Omega} s \leq \infty.$$

2) Geométricamente en $\mathbb{R}^3$, la integral de s es la suma de los volúmenes de los prismas de base A_i y altura a_i.

Proposición 5. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $s_1, s_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones simples no negativas. Entonces*

1) $\displaystyle\int_{\Omega} (s_1 + s_2) = \int_{\Omega} s_1 + \int_{\Omega} s_2.$

2) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\Omega} \alpha s_1 = \alpha \int_{\Omega} s_1.$

3) Si existe $E \subseteq \Omega$ con $m(E) = 0$, tal que $s_1(x) \leq s_2(x)$ para todo $x \in \Omega - E$, entonces

$$\int_{\Omega} s_1 \leq \int_{\Omega} s_2.$$

Demostración. Ver [07]pag.16.

Definición 13. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible, con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Se define la integral de f en Ω por*

$$\int_\Omega f := \sup \left\{ \int_\Omega s : \, s \quad \textit{función simple}, \quad 0 \leq s \leq f \right\}$$

Definición 14. *Definimos la parte positiva f^+ y la parte negativa f^- de una función f por*

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}.$$

Así, $f = f^+ - f^-$, donde f^+ y f^- son funciones no negativas.

Definición 15. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible. Se define la integral de f en Ω por*

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-.$$

Una función u definida en casi todas partes (c.t.p.) en Ω es llamada localmente integrable en Ω siempre que $u \in L^1(U)$ para cada abierto $U \Subset \Omega$, en este caso denotaremos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Observación 3. *Si las integrales de f^+ y f^- son ambas ∞ no tiene sentido la expresión $\infty - \infty$. Decimos en este caso que la función f no es integrable.*

Definición 16 (Integral en un subconjunto). *Sea $H \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, se define la integral de f en H por*

$$\int_H f(x)\, dx := \int_\Omega f \, \chi_H.$$

Teorema 2 (Propiedades básicas de la integral). *Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones medibles, entonces:*

(a) (Linealidad) Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega c\,(f+g)\,(x)\, dx = c \int_\Omega f(x)\, dx + c \int_\Omega g(x)\, dx.$$

(b) (Monotonía) Sea $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \Omega$,

$$\int_\Omega f(x)\, dx \leq \int_\Omega g(x)\, dx.$$

(c) (Monotonía) Si E,F son conjuntos medibles y $E \subseteq F$, entonces

$$\int_E f(x)\, dx \leq \int_F f(x)\, dx.$$

(d) $|f|$ *es integrable y*

$$\left|\int_\Omega f(x)\,dx\right| \le \int_\Omega |f|(x)\,dx.$$

(e) Si $\displaystyle\int_\Omega |f|(x)\,dx = 0$*, entonces* $f = 0$ *en casi todas partes.*

Demostración. Ver [07]pag.17

Teorema 3. ***(Convergencia Monótona).*** *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones integrables no negativas, entonces*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dx.$$

Demostración. Ver [05]pag.55.

Teorema 4. ***(Convergencia Dominada de Lebesgue).*** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones integrables; supongamos que:*

1. *i)* $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p. en* Ω.

2. *ii) Existe una función* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que, para todo n;* $|f(x)| \le g(x)$ *c.t.p. en* Ω *entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Demostración. Ver [18]pag.18.

Teorema 5. *Sea* $f : \mathbb{R}^{m+k} \to [0, +\infty]$ *medible, entonces:*

(i) La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f(x,\cdot) : y \longmapsto f(x,y)$*, es medible para casi todo* $x \in \mathbb{R}^m$.

(ii) La función g, definida para casi todo x por $g(x) = \displaystyle\int f(x,y)\,dy$ *es medible.*

(iii) $\displaystyle\int g\,dx = \int f$*, es decir la integral de f coincide con sus integrales iteradas.*

Demostración. Ver [11]pag. 18.

Teorema 6. ***(Teorema de Fubini).*** *Sea* $f : \mathbb{R}^{m+k} \to [0, +\infty]$ *integrable. Entonces:*

(i) *La función de la variable* $y \in \mathbb{R}^k$*,* $f(x, \cdot) : y \longmapsto f(x, y)$*, es integrable para casi todo* $x \in \mathbb{R}^m$*.*

(ii) *La función* g*, definida para casi todo* x *por* $g(x) = \int f(x, y)\, dy$ *es integrable.*

(iii) $\int g\, dx = \int f$*.*

Demostración. Ver [11]pag.19.

Teorema 7. ***(Teorema de Lusin).*** *Si* f *es una función medible,* $f(x) = 0$ *para* $x \notin A$ *donde* $m(A) < \infty$ *y* $\varepsilon > 0$*, entonces existe una función* $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad y \quad m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Demostración. Ver [07]pag.15.

Diremos que dos funciones son equivalentes, si ellas son iguales casi todo punto de Ω.

Definición 17. ***(Espacio*** $L^p(\Omega)$***).*** *Sea* Ω *un subconjunto abierto en* $\mathbb{R}^n$ *no vacío y* $1 \leq p < \infty$*. Denotamos por* $L^p(\Omega)$ *a la clase de funciones medibles* u *definidas en* Ω *para la cual*

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty. \tag{1.6}$$

Los elementos de $L^p(\Omega)$ son clases de equivalencia de funciones medibles cumpliendo (1.6). Para $1 \leq p < \infty$ se define

$$L^p(\Omega) = \frac{\mathfrak{L}^p(\Omega)}{\mathfrak{R}} = \Big\{[u]/u \in \mathfrak{L}^p(\Omega)\Big\}.$$

El funcional $\|\cdot\|_p$ definido por:

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

es una norma en $L^p(\Omega)$.

Definición 18. ***(Espacio*** $L^\infty(\Omega)$***).*** *Una función* u *medible en* Ω *es llamada esencialmente acotada en* Ω *si existe una constante* $K > 0$ *tal que* $|u(x)| \leq K$ *c.t.p en* Ω*. La mayor de las cotas inferiores* K *es llamada* ***supremo esencial*** *de* $|u|$ *en* Ω *y se denota por* $ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$*.*

Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ *el espacio vectorial de todas las funciones* u *que son esencialmente acotadas en* Ω*.*

La funcional $\|u\|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$ define una norma en $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 8. ***(Desigualdad de Hölder para integrales).*** *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p^* = q$ y $p > 1$, entonces:*

(I) $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

(II) $\int_\Omega |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Demostración. Ver [10]pag. 28.

A partir de la desigualdad de Hölder obtenemos una desigualdad para integrales equivalente a la de Minkowski:

$$\left(\int_\Omega |u(x) + v(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \tag{1.7}$$

Se verifica que, si $u \in L^p(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $cu \in L^p(\Omega)$.
Definimos las operaciones suma y producto por un escalar en $L^p(\Omega)$ por

$$(cf)(x) := cf(x), \quad \text{y} \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

es conveniente verificar que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Para verificar que la suma de dos funciones en $L^p(\Omega)$, hacemos uso de la desigualdad (1.7) con la cual tendremos que si $u, v \in L^p(\Omega)$

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p). \tag{1.8}$$

Así de esta última desigualdad (1.8) y (1.5) se concluye que $u + v \in L^p(\Omega)$; de hecho $L^p(\Omega)$ es un espacio normado."

Teorema 9. *Si $1 \leq p < \infty, u, v \in L^p(\Omega)$, entonces*

$$u + v \in L^p(\Omega),$$

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Demostración. Ver [11]pag. 08.

Teorema 10. *El espacio vectorial normado $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach, para $1 \leq p \leq +\infty$.*

Demostración. Ver [05]pag. 57.

Definición 19. ***(Soporte).*** *El soporte de una función $f : X \to \mathbb{R}$, denotado por $Sop(f)$, es la clausura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.*

Así, el soporte de f es el complemento del conjunto abierto más grande donde f se anula.
Denotaremos por $C_0(X)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de todas las funciones

$$f : X \to \mathbb{K} \text{ que tiene soporte compacto.}$$

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas sobre Ω y, si k es un entero no negativo, hacemos

$$C^k(\Omega) := \{u/\, u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad D^\alpha u \in C^0(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

$$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap \{u/\, sop(u) \quad \text{es compacto} \quad sop(u) \subseteq \Omega\}$$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega).$$

Sobre $C(\Omega)$ se define la norma de convergencia uniforme, como

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

con la cual es un espacio de Banach.

Proposición 6. *Sea $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $C_0(\Omega)$, que converge puntualmente a una función $f \in C_0(\Omega)$. Entonces $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.*

Demostración. Ver [11]pag.14.
Notemos que, si X, Y son espacio vectoriales sobre un mismo campo, la función

$$T : X \to Y$$

que satisface

$$T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z)$$

para escalares α, β y $x, z \in X$, es llamado **operador lineal.**

Dados X, Y dos espacio normados, damos la noción de un operador lineal acotado, y concluiremos que su acotación es equivalente a su continuidad.

Definición 20. *Sean X, Y dos espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ es acotado, si existe una constante $M \geq 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Definición 21. *Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, definimos la norma del operador T mediante*

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|}; \qquad \|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|; \qquad \|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Teorema 11. *Todo operador lineal, es continuo si, y sólo si, es acotado.*

Demostración: Ver [10]pag.64.

A $L(X, Y)$ lo denotamos como el conjunto de todos los operadores lineales que aplican de X en Y, y a $B(X, Y)$ como el conjunto de todos los operadores en $L(X, Y)$ que son acotados. $L(X, Y)$ es un espacio de Banach, siempre que Y sea un espacio de Banach.

Definición 22. ***(Inmersión).*** *Sean V, W espacios de Banach tales que $V \subseteq W$ como espacios vectoriales, probablemente con normas diferentes. Si la aplicación de inclusión*

$$\begin{array}{rccl} i: & V & \longrightarrow & W \\ & x & \mapsto & i(x) = x. \end{array}$$

es continua, se dice que V está inmerso continuamente en W, y se denota $V \hookrightarrow W$.

Esta definición es equivalente a

$$\exists C > 0 : \|v\|_W \leq C\|v\|_V, \forall v \in V. \tag{1.9}$$

Teorema 12. ***(Desigualdad de interpolación).*** *Sean $1 \leq p < q < r < \infty$ tales que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{r}$ para algún θ, $0 < \theta < 1$. Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ entonces $u \in L^q(\Omega)$ y*

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}.$$

Demostración. Ver [14]pag. 238.

Teorema 13. ***(Teorema de inmersión para los espacio L^p).*** *Sea Ω acotado de $\mathbb{R}^n$ $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ y $u \in L^{p_2}(\Omega)$, entonces $u \in L^{p_1}(\Omega)$ y*

$$\|u\|_{p_1} \leq Vol(\Omega)^{\frac{1}{q \cdot p_1}} \|u\|_{p_2}. \tag{1.10}$$

esto es,

$$L^{p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega). \tag{1.11}$$

Demostración. Ver [07]pag.28.

Aproximaciones por funciones continuas

Lema 5. *Sean:* $1 \leq p < \infty$ *y* S *la clase de todas las funciones simples reales definidas sobre* Ω*. Entonces* S *es denso en* $L^p(\Omega)$*.*

Demostración. Ver [11]pag. 27.

Teorema 14. *Si* $1 \leq p < \infty$*, entonces* $C_0(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$*.*

Demostración. Ver [10]pag.332.

Teorema 15. *Si* $1 \leq p < \infty$ *entonces,* $L^p(\Omega)$ *es separable.*

Demostración. Ver [05]pag.62.

La clausura o cerradura de un conjunto G es denotado por $\overline{G}$.

Definición 23. ***(Continuamente compacto).*** *Si* $G \subset \mathbb{R}^n$ *es no vacío, diremos que* $G \Subset \Omega$ *si, y sólo si,* $\overline{G} \subset \Omega$ *y* $\overline{G}$ *es compacto.*

Definición 24. ***(Convolución).****La convolución de dos funciones* u *y* v *sobre* $\mathbb{R}^n$ *es la función*

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, v(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.12}$$

Para probar que, $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ utilizamos la convolución.

La convolución

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy, \tag{1.13}$$

definida para una función u para la cual (1.12) tenga sentido, es llamada **regularización de u**.

Corolario 2. J_ε *aproxima al Delta de Dirac, por lo cual se espera que la convolución en (1.12) aproxime a* u*.*

El siguiente teorema resume algunas propiedades de Regularización.

Teorema 16. ***(Propiedades de Regularización).****Sea* u *una función definida en* $\mathbb{R}^n$ *y nula en el exterior de* Ω*.*

1) *Si* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

2) Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *y* $Sopp(u) \Subset \Omega$, *entonces* $J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$; *si* $\varepsilon < dist(Sopp(u), \partial\Omega)$.

3) Si $u \in L^p(\Omega)$, *para* $1 \leq p < \infty$, *entonces* $J_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$. *Además*

$$\|J_\varepsilon * u\|_p \leq \|u\|_p \quad y \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|J_\varepsilon * u - u\|_p = 0.$$

4) Si $u \in C(\Omega)$ *y si* $G \Subset \Omega$ *entonces* $\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ *uniformemente en* G.

5) Si $u \in C(\overline{\Omega})$ *entonces* $\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ *uniformemente en* Ω.

Demostración. Ver [07]pag.36.

1.4. Espacios de Hilbert

Definición 25. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$). *Un* ***producto escalar*** *o* ***producto interno*** *definido en* X *es una aplicación*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$$

que verifica:

(i) (Aditiva) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *para todo* $u, v, w \in X$.

(ii) (Homogénea) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ *para todo* $u, v \in X$ *y todo* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(iii) (Hermítica) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ *para todo* $u, v \in X$.

(iv) (Definida positiva) $\langle u, u \rangle \geq 0$ *y* $\langle u, u \rangle = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

Toda aplicación que verifica (i), (ii) y (iii) se llama forma ***sesquilineal hermítica.*** *En este caso* X *es llamado espacio con* ***producto interno*** *o* ***Pre-Hilbert.***

Note que todo espacio Pre-Hilbert es normado, con la norma

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

y por tanto es también métrico, con la distancia

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno. Para cualquier $u, v \in \mathbb{V}$, se cumple

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

estas desigualdad es conocida como **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

De donde resulta natural, estudiar el caso en que un espacio Pre-Hilbert es completo.

Definición 26. ***(Espacio de Hilbert).*** *Un Espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo con respecto a la métrica asociada. Equivalentemente todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interno.*

Teorema 17. *El espacio $L^2(\Omega)$ con el producto interno dado por*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)\, \overline{v}(x)\, dx$$

es un espacio de Hilbert.

Demostración. Ver [11]pag.27.

Definición 27. *Una sucesión $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado, es convergente a un elemento f del espacio sí, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\nu > N$ tenemos $\|f - f_\nu\| < \varepsilon$.*

Observación 4. *Si $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge a f escribimos $f = \lim f_\nu$ ó $f_\nu \to f$.*

Definición 28. *Un espacio normado es completo, si toda sucesión de Cauchy en el espacio es convergente; es decir, si para toda sucesión de Cauchy $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ en el espacio normado, existe f en el espacio tal que, $f_\nu \to f$.*

Definición 29. *Una serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ en un espacio normado, es llamada convergente a la suma s, si s está en el espacio y la sucesión de sumas parciales de la serie converge, esto es,*

$$\left\| s - \sum_{i=1}^{n} f_i \right\| \to 0.$$

En este caso se escribe $s = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

La serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ es llamada absolutamente convergente si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\| < \infty,\ n \to +\infty.$$

Proposición 7. *Un espacio normado lineal X es completo si, y solo si, cada serie absolutamente convergente, es convergente en X.*

Demostración. Ver [09]pag.30.

Definición 30. ***(Espacio dual algebráico).*** *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; llamamos espacio dual algebráico de X, que denotamos por, X^*, al $\mathbb{R}$ espacio vectorial*

$$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{R}/\, x^* \quad \textit{es lineal y continuo}\}.$$

En este espacio disponemos de una norma que se puede expresar de varias formas, como son

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \min\{K > 0 : \, |x^*(x)| \leq K \, \|x\| \quad \textit{para todo} \quad x \in X\} \\ &= \sup\{|x^*(x)| : \, x \in X, \; \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

para $x^* \in X^*$.

La completitud de $\mathbb{R}$ permite que X^* sea un espacio completo, al espacio de Banach X^* para diferenciarlo del dual algebráico lo llamaremos **Espacio dual topológico** del espacio normado X.

Teorema 18. ***(Teorema de representación de Riesz).*** *Sea X un espacio de Hilbert y un funcional lineal $x^* \in X^*$ entonces existe un único $y \in X$ tal que*

$$x^*(x) = \langle x, y \rangle, \, \forall x \in X$$

y en este caso $\|x^*\|_{X^*} = \|y\|_X$.

Demostración. Ver [05] pag.81.

Teorema 19. *Sea X un espacio de Banach, $(u_\nu)_{\nu \geq 1} \subseteq X$, $u \in X$. La sucesión $(u_\nu)_{\nu \geq 1}$ converge a u según la topología débil τ si y sólo si*

$$f(u_\nu) \to f(u), \forall f \in X'.$$

Demostración. Ver [10]pag.266.

En este caso denotamos $u_\nu \rightharpoonup u$, y decimos que (u_ν) converge débil a u (en X).

Corolario 3. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces*

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad \textit{en} \quad H \quad \Leftrightarrow \quad \langle u_\nu, v \rangle_H \to \langle u, v \rangle_H, \quad \forall v \in H.$$

Demostración. Ver [05]pag. 40.

Teorema 20. ***(Teorema de Hanh Banach, 1927).*** *Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Si $y^* \in Y^*$ entonces existe $x^* \in X^*$ tal que*

$$\|x^*\|_{X^*} = \|y^*\|_{Y^*} \quad y \quad x^*(y) = y^*(y) \, \forall y \in Y$$

Demostración. Ver [10]pag.43

Podemos inferir que, todo funcional continuo sobre un subespacio de X admite una extensión lineal y continua a todo X.

Teorema 21. *Sea H un espacio de Banach $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, entonces se cumple:*

1. *$u_n \rightharpoonup u$ en H si, y solamente si, $F(u_n) \to F(u)$, $\forall \ F \in H'$.*

2. *Si $u_n \rightharpoonup u$ en H, entonces $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$.*

Demostración. Ver [05],pag.35.

Teorema 22. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Para toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, con*

$$u_n \rightharpoonup u \quad en \quad X$$
$$\limsup \|u_n\| \leq \|u\|.$$

Se sigue que

$$u_n \to u \quad en \quad X.$$

Demostración. Ver [05],pag.52.

Teorema 23. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)_{n_j\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad en \quad E.$$

Demostración. Ver [05],pag.50.

Teorema 24. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión sobre* $L^p(\Omega)$ *y* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Entonces existe una subsucesión* $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subseteq (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que:*

(i) $f_{n_k} \to f(x)$ *c.t.p en* Ω.

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *c.t.p en* Ω, *para todo* k, *con* $h \in L^p(\Omega)$.

Demostración. Ver [01],pag.58.

1.5. Espacio de Sobolev

1.5.1. Distribuciones

Consideramos a Ω como un conjunto abierto en el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ como el conjunto nulo o vacío.

Definición 31. *A la n-upla* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *la llamaremos* ***multi-índice*** *si* α *es una n-upla de enteros no negativos. Además, denotaremos por* X^α *el monomio*$x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n}$, *de grado* $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, *la suma de dos multi-índices,* α, β *es* $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$. *Decimos que* $\beta \leq \alpha$ *si* $\beta_j \leq \alpha_j$ *para todo* $j = 1, 2, ..., n$. *Para denotar la derivada parcial haremos*

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

conviniendo que $D^{(0,0,...,0)}\phi = \phi$.

Por otra parte, el gradiente de una función de valores reales ϕ es denotado por

$$D\phi(x) := (D_1\phi(x), D_2\phi(x), ..., D_n\phi(x)).$$

Definición 32. *El espacio formado por las funcionales infinitamente diferenciables con soporte compacto es dado por*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left\{\phi : \Omega \to \mathbb{R}/\phi \textit{es infinitamente diferenciable con soporte compacto en}\Omega\right\}$$

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$, una sucesión $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ es llamada convergente en el sentido del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ a la función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si satisface las siguientes propiedades:

1. Existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j.

2. $\lim\limits_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformemente en K para cada multi-índice α.

Observación 5. *Notemos la siguiente inmersión continua*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\, 1 \leq p < +\infty.$$

Al espacio dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ lo llamaremos **espacio de distribuciones** en Ω, a sus elementos se les conoce como **distribuciones**.

Notación 2. ***Espacio de Schwartz ó de Distribuciones***

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \Big\{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} / T\, \textit{es lineal y continua}\Big\}$$

Este espacio es dotado con la topología débil estrella, así que una sucesión (T_ν) converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si $T_\nu(\phi) \to T(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
En este caso, se dice que (T_ν) converge a T **en el sentido distribucional.**
Para $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces se define las operaciones

- $(S + T)(\phi) = S(\phi) + T(\phi)$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- $(cT)(\phi) = cT(\phi)$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ejemplo 13. *Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, el funcional*

$$T_u(\phi) := \int_\Omega u(x)\, \phi(x)\, dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.14}$$

es una distribución.

Corolario 4. *No todas las distribuciones $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tienen la forma T_u definida en (1.14) para algún $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

Demostración. Ver [11],pag.40.

Notación 3. *Se cumple la siguiente inmersión*

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

1.5.2. Derivada de una distribución

Definición 33. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución. Dado un multi-índice α definimos la $\alpha-$ ésima derivada de T*

$$\begin{array}{rccc} D^\alpha : & \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ & T & \mapsto & D^\alpha T. \end{array}$$

donde

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

o equivalentemente a

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposición 8. *Para toda $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se cumple que*

$$D^\alpha T$$

es una distribución

Demostración. Ver [11],pag.42.

Veamos los siguientes ejemplos:“

1. Si $0 \in \Omega$ y $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es la distribución de Dirac entonces, $D^\alpha \delta$ viene dada por:

$$D^\alpha \delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(0).$$

2. Si $\Omega = \mathbb{R}$ y $H \in L^1_{loc}(\Omega)$ es una función escalonada definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte compacto en $[-a, a]$ entonces

$$\begin{aligned}
(TH)'\phi &= (-1)^{|1|} TH(\phi') \\
&= -TH(\phi') \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{0} H(x)\,\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} \phi'(x)\,dx \\
&= -\phi(x)\Big|_{0}^{a} \\
&= -(\phi(a) - \phi(0)) \\
&= \phi(0) = \delta(\phi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(TH)'$ es la distribución de Dirac por lo que $(TH)'$ es una distribución."

Definición 34. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multi-índice. Si existe una función $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ de tal manera que*

$$T_{v_\alpha}(\phi) = D^\alpha T_u(\phi) \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces v_α es llamada la $\alpha-$ésima derivada distribucional o débil de T_u.

Lema 6. *Sea $(u_\nu) \subseteq L^p(\Omega)$, $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ talque*

$$u_\nu \to u, \, en \, L^p(\Omega)$$

entonces

$$u_\nu \to u, \, en \, \mathcal{D}'(\Omega)$$

Demostración. Ver [05],pag.37.

Observación 6. *Recuerde que estamos identificando*

$$Tu \equiv u.$$

Observación 7. *Decimos que si* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *entonces :*

$$T \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow \exists v \in L^2(\Omega) / \, T(\phi) = v(\phi), \, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Aquí tenemos $T \equiv v$.

1.5.3. Espacios de Sobolev

A continuación introducimos los espacio de Sobolev de orden entero y establecemos algunas de sus más importantes propiedades.

Definición 35. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* m *es un entero no negativo,* $u \in L^p(\Omega)$ *y existe la derivada distribucional* $D^\alpha u$ *para cualquier* α *con* $0 \leq |\alpha| \leq m$, *tal que*

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \textit{para todo} \quad |\alpha| \leq m.$$

Entonces se dice que $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ T : \Omega \to \mathbb{R} / u, D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \, \text{en el sentido distribucional} \Big\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ es llamado **Espacio de Sobolev sobre Ω.** cuyos elementos son clases de equivalencia ($u \Re v \Leftrightarrow u = v c.t.p \, en \Omega$). En el espacio de Sobolev definimos la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty. \tag{1.15}$$

Teorema 25. *El espacio de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) \textit{ es un espacio de Banach.}$$

Demostración. Ver [05]pag.121

Proposición 9. *Sea* α *un multi-índice,* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega)$ *y* $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ *tal que* $u_n \to u$ *y* $D^\alpha u_n \to v_\alpha$ *en* $L^p(\Omega)$. *Entonces* $v_\alpha = D^\alpha u$.

Demostración. Ver [11],pag.47.

Teorema 26. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $m \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Se tiene*

(a) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $p \in (1, \infty)$.

(b) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $p \in [1, \infty)$.

Demostración. Ver [07]pag.121.

Observación 8. *Los espacios $W^{m,1}(\Omega)$ y $W^{m,\infty}(\Omega)$ no son reflexivos.*

Definición 36. *Sea $m \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Definimos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \equiv \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

Cuando $p = 2$, denotamos $H_0^m(\Omega) \equiv W_0^{m,2}(\Omega)$.

Observación 9. *Se cumple que:*

1. *$\mathcal{D}(\Omega)$ es siempre denso en $H_0^m(\Omega)$.*

2. *$H_0^m(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^m(\Omega)$.*

3. *Si $u \in H^m(\Omega)$ con soporte compacto en Ω, entonces $u \in H_0^m(\Omega)$.*

4. *$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega)$.*

Definición 37. *Denotamos con $H^{-m}(\Omega)$ al dual topológico (y algebráico) de $H_0^m(\Omega)$*

$$H^{-1}(\Omega) = \Big(H_0^m(\Omega)\Big)^* = \Big\{T : H_0^m(\Omega) \to \mathbb{R} \,/ T \text{ lineal y continua}\Big\}$$

Si $T : H_0^m(\Omega) \to \mathbb{R}$ es un operador lineal continuo, definimos la norma del operador T mediante

$$\|T\|_{H^{-m}(\Omega)} := \sup_{x \in H_0^m(\Omega)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Observación 10. *Se cumple que:*

1. *$H_0^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, entonces*

$$H_0^m(\Omega) = \Big(H_0^m(\Omega)\Big)^* = H^{-m}(\Omega).$$

2. $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

3. $H^{-m}(\Omega)$, *define un espacio de distribuciones.*

4. Se define el operador Laplaciano

$$\begin{aligned} \Delta : H_0^1(\Omega) &\to H^{-1}(\Omega) \\ u &\mapsto \Delta u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) \end{aligned}$$

Por otro lado consideremos las siguientes observaciones

Observación 11. *$u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ si, y solo si, existe una sucesión $(\varphi)_\nu \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to u$ en $W^{m,p}(\Omega)$, esto es, existe $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que $D^\alpha\varphi_\nu \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$.*

Observación 12. *Utilizando la convolución con una sucesión regularizante, podemos comprobar que $C_0^m(\Omega) \subseteq W_0^{m,p}(\Omega)$, para todo $m \geq 1$, $p \in [1,\infty)$.*

1) Uno de los espacios de Sobolev muy importante es el de funciones cuadrado integrable, es decir los $W^{m,2}(\Omega)$, los que serán denotados $H^m(\Omega)$. Estos son espacios de Hilbert separables.

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall|\alpha| \leq m\Big\}$$

Entre los espacios $H^m(\Omega)$ más importantes tenemos $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$

2) $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ toda la función de $L^2(\Omega)$ es derivable en el sentido de las distribuciones. En general esta derivada no está en $L^2(\Omega)$.

3) Se llama Espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ a la siguiente expresión.

$$H^1(\Omega) = \left\{\nu \in L^2(\Omega) : \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\right\}$$

y se define en $H^1(\Omega)$ el producto escalar:

$$\langle u, \nu\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \nu}{\partial x_i} + u\nu\right) dx$$

y la norma correspondiente:

$$\|\nu\|_{H^1(\Omega)} = \langle \nu, \nu\rangle_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n}\Big(\Big\|\frac{\partial \nu}{\partial x_i}\Big\|_2\Big)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.6. Teoremas de Inmersión.

Teorema 27. *Sean $m \geq 1$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces:*

1. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.*
2. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para $q \in [p, \infty)$.*
3. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Ver [02],pag.79.

Observación 13. *$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega)$.*

Teorema 28. ***(Teorema de Inmersión continua de Sobolev)****.Sea Ω un dominio regular en $\mathbb{R}^n$, $m > 0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces, para cualquier $j \geq 0$ las inmersiones de abajo son continuas:*

1. *Si $m < \frac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq p \leq \frac{np}{n-mp} = p^*$.*
2. *Si $m = \frac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \infty$.*
3. *Si $m > \frac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_\beta(\Omega)$.*
4. *Si $m - 1 < \frac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq m - \frac{n}{p}$*

donde denotamos por $C^j_\beta(\Omega)$ al espacio de Banach de funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^j tales que u y todas sus derivadas de orden j son acotadas con la norma:

$$\|u\|_{C^j_\beta(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Así mismo, $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$, es el espacio de Banach de las funciones $u \in C^k_\beta(\mathbb{R}^n)$ tales que u y todas sus derivadas de orden k son Hölder continuas (Holderiana) con exponente λ ($\lambda-$Hölder continuas), esto es:

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty.$$

La norma de $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ es dada por

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Demostración. Ver [03],pag.102.

Observación 14. *Dada la inyección canónica, entonces:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$$

es una inmersión continua.

Teorema 29. ***(Teorema de Inmersión Compacta de Rellich-Kondrachov).****Sea Ω un dominio acotado con frontera regular en $\mathbb{R}^n$, $j \geq 0$, $m \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces para cualquier $j \geq 0$, las inmersiones de abajo son compactas:*

1. *Si* $m < \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq p \leq \dfrac{np}{n-mp} = p^*$.
2. *Si* $m = \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \infty$.
3. *Si* $m > \dfrac{n}{p}$;

   $$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ 1 \leq q \leq \infty;\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega);\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}).$$

4. *Si* $m - 1 < \dfrac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}(\Omega)$, $0 < \mu < m - \dfrac{n}{p}$.

Demostración. Ver [03],pag.103.

Observación 15. *Dadas las siguientes inyecciones canónicas, entonces:*

1. $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *es una inmersión compacta.*
2. $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *es una inmersión compacta.*

Afirmación 1. $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$

Ahora enunciaremos los principales resultados que utilizaremos.

Teorema (T.1)(Lax-Milgram) Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal verificando:

1. $a(\cdot,\cdot)$ es continua, esto es, existe $M > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall \ u,v \in H;$$

2. $a(\cdot,\cdot)$ es coercivo, osea, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall \ u \in H;$$

Sea $T : H \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo, existe un único $u \in H$ satisfaciendo:

$$a(u,v) = T(v), \quad \forall \ v \in H.$$

Demostración. Ver [10],pag.139.

Teorema (T.2)(Desigualdad de Poincaré.) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe una constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Demostración. Ver [07],pag.183.

Teorema (T.3) Sea L un operador elíptico estricto en Ω con $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c^i \in L^\infty(\Omega)$. Si $\partial\Omega \in C^{k+2}$ y existe $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$ con $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Entonces $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ y:

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C \Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \Big).$$

Demostración. Ver [04],pag.177.

Teorema (T.4) (**Desigualdad de Markov**). Supongamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par positiva; $g(x) > 0$ si $x > 0$ y decreciente en $[0, \infty >$. Si f es función medible finita sobre (Ω, A, a) entonces para todo $a > 0$

$$u[|f| \geq a] \leq \frac{\int_{\Omega} (g \circ f)\ du}{g(a)}$$

Demostración. Ver [11],pag.81.

Teorema (T.5) (**Eberlein-Smulian**). Un subconjunto de un espacio de Banach es relativamente débilmente compacto si y solo si es relativamente débilmente secuencialmente compacto. En particular, un subconjunto de un espacio de Banach es débilmente compacto si y solo si es débilmente secuencialmente compacto.
Demostración. Ver [11],pag.287.

Teorema (T.6)(Teorema de la Divergencia). Sea Ω un dominio acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una Hiperficie de clase C^1 y ν es el vector unitario normal a $\partial\Omega$. Para cualquier función $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $F \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ tenemos que:

$$\int_{\Omega} div\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle\, dS.$$

Demostración. Ver [08],pag.17.

2 Teoremas de Punto Fijo

En lo que sigue consideraremos a X un espacio de Banach.

2.1. Teorema de punto fijo de Banach

Definición 38. ***(Punto fijo).*** *Un punto fijo de la aplicación $T : X \to X$ es un punto $x \in X$, tal que $T(x) = x$.*

Definición 39. ***(Contracción).*** *Sean $X = (X, d)$ e $Y = (Y, d)$ espacios métricos. Una aplicación $T : X \to X$ es llamada contracción,si existe un número real $0 < c < 1$ tal que para todo $x, y \in X$ se tiene: $d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$*

Teorema 30. ***(Teorema del Punto Fijo de Banach).****Sean (X, d) un espacio métrico completo, M no vacío y cerrado $M \subset X$ y $T : M \to M$ una contracción, entonces T posee un único punto fijo $x \in M$.*

Demostración. Ver [15]pag.2.

2.2. Teorema de punto fijo de Brouwer

Llamaremos bola $n - dimensional$ unitaria al conjunto:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

y la esfera $n - dimensional$ unitaria al conjunto:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

y $B_r(c)$ denotará la bola de radio $r > 0$ centrada en $c \in \mathbb{R}^n$

$$B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c| \leq r\}$$

Teorema 31. ***(Teorema del Punto Fijo de Brouwer).***
Cada funcion continua $T : B^n \to B^n$ tiene un punto fijo. Es decir existe $x \in B^n$ tal que $T(x) = x$.

Demostración. Ver [15]pag.07.

2.3. Teorema de punto fijo de Schauder

Definición 40. *Sea $Y \subseteq X$ llamaremos envoltura convexa de Y, y denotamos por $conv(Y)$, al menor convexo que contiene Y.*

El teorema que a continuación presentamos, es un resultado sobre envoltoria convexa de conjuntos compactos.

Teorema 32. *En un espacio métrico localmente convexo, la cerradura de la envoltoria convexa de un conjunto compacto es compacto.*

Demostración. Ver [16]pag.50.

Teorema 33. ***(Teorema del Punto Fijo de Schauder).***
Suponga que $K \subset X$, es compacto y convexo. Si $T : K \to K$ es continua, entonces T posee por lo menos un punto fijo.

Demostración. Ver [16]pag.52.

Corolario 5. *Sea $C \subset X$ un subconjunto convexo y cerrado. Si $T : C \to C$ es una aplicación continua con $T(C) \subset K \subset C$, donde K es un conjunto compacto, entonces T posee un punto fijo.*

Demostración. Ver [16]pag.53.

2.4. Teorema de punto fijo de Schaefer

Definición 41. *Sea X un espacio de Banach, $T : X \to X$ es una aplicación compacta si para toda sucesión acotada $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión $(T(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\left(T\left(x_{k_j}\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente en X.*

Teorema 34. ***(Teorema del Punto Fijo de Schaefer).***
Suponga que $T : X \to X$, es una aplicación continua y compacta. Si el conjunto

$$F = \Big\{\mu \in X : \mu = \lambda\,(T(\mu))\,,\ \textit{para algún}\ \lambda \in [0,1]\Big\}$$

es acotado, entonces T posee por lo menos un punto fijo.

Demostración:

Supongamos que F es acotado, entonces $\exists M > 0$ tal que:

$$\|\mu\| < M \text{ si} \mu = \lambda\left(T(\mu)\right) \text{para algún} \lambda \in [0,1]$$

Definimos: $\widetilde{T} : X \to X$, de la siguiente manera:

$$\widetilde{T}\left(\mu\right) = \begin{cases} T\left(\mu\right); & \text{si} \quad \|T\left(\mu\right)\| \leq M \\ \dfrac{MT\left(\mu\right)}{\|T\left(\mu\right)\|}; & \text{si} \quad \|T\left(\mu\right)\| \geq M \end{cases}$$

Afirmación 1. Si T es una aplicación compacta, entonces $\widetilde{T}$ es compacta.

En efecto: Sea $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión acotada en X entonces existe $\left(T\left(\mu_{k_j}\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a $\upsilon \in X$, esto es $T\left(\mu_{k_j}\right) \longrightarrow \upsilon \in X$; $j \to +\infty$.

1. Si $\|\upsilon\| > M$, $\exists M > 0$ tal que:$\|\mu\| > M$, si $j > N$; por lo que la subsucesión $\left(\widetilde{T}\left(\mu_{k_j}\right)\right)_{j>N}$ converge a $\dfrac{M\upsilon}{\|\upsilon\|} \in X$ esto es
   $\left(\widetilde{T}\left(\mu_{k_j}\right)\right)_{j>N} \longrightarrow \dfrac{M\upsilon}{\|\upsilon\|} \in X; j > N, j \to +\infty.$
2. Si $\|\upsilon\| < M$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que:
   $\left(\widetilde{T}\left(\mu_{k_j}\right)\right)_{j>N} \longrightarrow \upsilon \in X, \quad j \to +\infty.$
3. Si $\|\upsilon\| = M$, existe una subsucesión $\left(T\left(\mu_{k_j}\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que:

   (i) $\|\upsilon\| < M, \forall j \in \mathbb{N}$ ó

   (ii) $\|\upsilon\| > M, \forall j \in \mathbb{N}$ ó

   (iii) $\|\upsilon\| = M, \forall j \in \mathbb{N}$

Los caso (i) y (ii) recaen en las casos (1) y (2) dados anteriormente. Para el caso (iii), bastará observar que

$$T\left(\mu\right) = \widetilde{T}\left(\mu\right)$$

De la definición de $\widetilde{T}$, tenemos que

$$\widetilde{T}\left(\mu\right) \subseteq B\left[0, M\right] \subset X$$

Así podemos considerar la aplicación

$$\widetilde{T} : B\left[0, M\right] \to B\left[0, M\right]$$

Sea K la cerradura del menor convexo que contiene $\widetilde{T}\left(B\left[0,M\right]\right)$; como toda bola cerrada es convexa y cerrada, entonces

$$K=\overline{conv\left(\widetilde{T}\left(B\left[0,M\right]\right)\right)}\subseteq B\left[0,M\right]$$

Afirmación②. K es compacto y convexo.

Dada una sucesión $\left(\mu_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq X$, tal que las preimagenes de $\widetilde{T}$ forman una sucesión acotada asi

$$\widetilde{T}\left(\mu\right)=\begin{cases} T\left(\mu_k\right) & \text{si} \quad \left\|T\left(\mu_k\right)\right\|\leq M \\ \dfrac{MT\left(\mu_k\right)}{\left\|T\left(\mu_k\right)\right\|} & \text{si} \quad \left\|T\left(\mu_k\right)\right\|\geq M \end{cases}$$

luego toda sucesión $\left(\widetilde{T}\left(\mu_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq B\left[0,M\right]$ con $\left(\mu_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq B\left[0,M\right]$; posee una subsucesión $\left(\widetilde{T}\left(\mu_{k_j}\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente en $B\left[0,M\right]$; por lo tanto la aplicación $\widetilde{T}$ es compacta. Como $\widetilde{T}\left(B\left[0,M\right]\right)$ es compacto, tenemos que la cerradura de la envoltura convexa del compacto $\widetilde{T}\left(B\left[0,M\right]\right)$ es compacto es decir

$$\overline{Conv\widetilde{T}\left(B\left[0,M\right]\right))}=K \text{ } es \text{ } compacto$$

La convexidad de K se dá, por ser K la cerradura de un conjunto convexo.

Consideremos la restricción de $\widetilde{T}$ sobre K

$$\widetilde{T}_{/K}:K\to K,\ K\text{es compacto y convexo}$$

y $\widetilde{T}:B\left[0,M\right]\to B\left[0,M\right]$ continua; por el teorema del punto fijo de Shauder, existe un punto $\mu_0\in K$ tal que $\mu_0=\widetilde{T}\left(\mu_0\right)$.

Afirmación③. μ_0 es un punto fijo de T

Por el absurdo, supongamos que $\mu_0\neq T\left(\mu_0\right)$, $\mu_0\in K$ luego, $\left\|T\left(\mu_0\right)\right\|>M$, pués si $\left\|T\left(\mu_0\right)\right\|\leq M$, por la definición de $\widetilde{T}$ y $\widetilde{T}\left(\mu_0\right)=\mu_0$, tenemos que

$$\mu_0=\widetilde{T}\left(\mu_0\right)=T\left(\mu_0\right)$$

además, por definición de $\widetilde{T}$ y F, tenemos

$$\mu_0=\frac{MT\left(\mu_0\right)}{\left\|T\left(\mu_0\right)\right\|}=\lambda T\left(\mu_0\right);\ para\ \lambda=\frac{M}{\left\|T\left(\mu_0\right)\right\|}<1$$

pero

$$\|\mu_0\|=\|\widetilde{T}(\mu_0)\|=\|\frac{MT(\mu_0)}{\|T(\mu_0)\|}\|$$

es decir $\|\mu_0\| = M$; lo cual es una contradicción con

$$\|\mu\| < M \text{ si} \mu = \lambda\left(T(\mu)\right) \text{para algún} \lambda \in [0,1]$$

asi mismo con

$$\mu_0 = \frac{MT\left(\mu_0\right)}{\|T\left(\mu_0\right)\|} = \lambda T\left(\mu_0\right);\ para\ \lambda = \frac{M}{\|T\left(\mu_0\right)\|} < 1$$

Por lo tanto, concluimos que $\mu_0 = T\left(\mu_0\right)$, así μ_0 es punto fijo de T.

Corolario 6. ***(Teorema de punto fijo para conjuntos Convexos).***
Sea K un subconjunto convexo de un espacio de Banach X, con $0 \in K$.
Si $T : K \to K$ es una aplicación continua compacta para el conjunto

$$F = \Big\{\mu \in K : \mu = \lambda\left(\mu\right),\ para\ algún\ \lambda \in [0,1]\Big\}$$

es acotado, entonces T tiene un punto fijo.

Para demostrar este corolario, observemos que si $0 \in K$ y $0 \in B\left[0,M\right]$ entonces $K \cap B\left[0,M\right]$ es no vacío y convexo $\forall M > 0$, así mismo definimos

$$\widetilde{T} : K \cap B\left[0,M\right] \to K \cap B\left[0,M\right]$$

como $K \cap B\left[0,M\right]$ es convexo, y además

$$\overline{Conv\widetilde{T}\left(K \cap B\left[0,M\right]\right)} \subseteq K \cap B\left[0,M\right]$$

aplicando el teorema de punto fijo de de Schaefer se obtiene lo requerido.

3 Problema Principal

En este capítulo presentamos el resultado principal del trabajo de tesis, partimos considerando un problema elíptico abstracto.
Sean X, Y dos espacios de Banach con inmersiones densas y compactas

$$Y \hookrightarrow X \hookrightarrow Y^*$$

Asumimos un operador lineal acotado, dado por:

$$A : Y \to Y^*$$

y una aplicación continua (no lineal)

$$B : X \to Y^*$$

que lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados, tal que satisfacen

$$\langle Au, u \rangle \geq \varepsilon \|u\|_Y^2, \forall u \in Y \tag{3.1}$$

y

$$\langle Bu, u \rangle \geq -c(1 + \|u\|_Y^\alpha), \forall u \in X \tag{3.2}$$

para algún $\varepsilon > 0$, $c > 0$ y $\alpha \in [0, 2[$; donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad de Y^* con Y, donde Y^* es el espacio dual de los funcionales lineales y acotados definidos en Y.

La ecuación abstracta, está dada por

$$Au + B(u) = g \tag{3.3}$$

Dada $g \in Y^*$, buscamos probar la existencia de al menos una solución débil de la ecuación (3.3).

3.1. Existencia de soluciones débiles del problema

Consideramos el problema elíptico no lineal:

Problema:

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} -\Delta u(x) + u^5(x) = g(x), \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado bien regular.
Utilizaremos el **teorema de punto fijo de Schaefer** para mostrar la existencia de soluciones débiles del problema (P).

Para conseguir nuestro objetivo, seguiremos la siguiente estrategia

(I) **Identificación de los espacios, operadores e inmersiones:**

Los espacios de Banach, estan definidos sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; asi tenemos

$$X := L^6(\Omega), \qquad Y := H_0^1(\Omega)$$

$$Y^* := (H_0^1(\Omega))^* := H^{-1}(\Omega)$$

también los siguientes operadores: Δ Operador Laplaciano

$$\begin{array}{rcl} \Delta : H_0^1(\Omega) & \to & H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto & \Delta u(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A := -\Delta : H_0^1(\Omega) & \to & H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto & -\Delta u \\ B := h : L^6(\Omega) & \to & H^{-1}(\Omega) \\ v & \mapsto & h(v) = v^5 \end{array}$$

Además las inmersiones continuas, densas y compactas en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Para $v \in L^6(\Omega)$, sea ω una solución de la ecuación

$$-\Delta\omega = g - h(v) = g - v^5 \tag{3.4}$$

Afirmación 1   El operador $-\triangle$ define una isometría lineal suryectiva de $H_0^1(\Omega)$ en $H^{-1}(\Omega)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\mapsto \Delta u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) \end{aligned}$$

1. INYECTIVIDAD:

   Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $-\Delta u = 0$

   como $(-\Delta)$ es lineal, debemos probar que $u = \theta$, vector nulo.

   En efecto, tomando $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos:

   $$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle_{H^1(\Omega)} = 0 \ \ \forall \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

   así tenemos que, para $u \in H_0^1(\Omega)$, existe una sucesión

   $$(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$$

   tal que:

   $$\varphi_k \rightarrow u \text{ en } H^1(\Omega), \text{ cuando } k \rightarrow +\infty$$

   por la densidad y continuidad del producto interno y, como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es acotado, $\overline{(D)(\overline{\Omega})} = H^1(\Omega)$ tenemos que

   $$\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} = 0$$

   por lo tanto

   $$u = \theta.$$

2. SURYECTIVIDAD:

   Sea $z \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$, por el teorema de la representación de Riesz, existe un único

   $$v_z \in H^1(\Omega)$$

   tal que:

   $$\langle z, v \rangle = \langle v_z, v \rangle = \langle -\Delta v_z, v \rangle, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

   entonces

   $$-\Delta v_z = z \ \text{ en } \ H^{-1}(\Omega)$$

además

$$\|z\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|v_z\|_{H_0^1(\Omega)}$$

luego

$$\| -\Delta v_z\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|v_z\|_{H_0^1(\Omega)},$$

así de 1 y 2 tenemos que:

$-\Delta$ es una **isometría lineal** de $H_0^1(\Omega)$ a $H^{-1}(\Omega)$.

Luego debido a la inyectividad de $(-\Delta)$ sobre $H^{-1}(\Omega)$ y, como $(-\Delta)^{-1}$ es un operador lineal acotado de $H^{-1}(\Omega)$ sobre $H_0^1(\Omega)$, por el teorema de la aplicación abierta, tenemos:

$$\omega = (-\Delta^{-1})(-\Delta\omega) = (-\Delta)^{-1}(g - v^5)$$

es decir,

$$\omega = (-\Delta)^{-1}(g - v^5) \in H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

Así, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} f : L^6(\Omega) &\rightarrow L^6(\Omega) \\ v &\mapsto f(v) = (-\Delta)^{-1}(g - v^5) \end{aligned}$$

Afirmación 2 f es una aplicación continua y compacta.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} f : L^6(\Omega) &\rightarrow L^6(\Omega) \\ v &\mapsto f(v) = (-\Delta)^{-1}(g - v^5) \end{aligned}$$

con $g \in H^{-1}(\Omega)$ y $v \in L^6(\Omega)$.

En efecto, tenemos que $(-\Delta)^{-1}$ es continua de $L^2(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega)$, como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se tienen las inmersiones compactas:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

y por composición de aplicaciones continuas, tenemos que

$$(-\Delta)^{-1}(g - v^5) = f(v)$$

es una función continua de $L^6(\Omega)$ a $L^6(\Omega)$.

Supongamos que, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, existe un u_λ tal que

$$u_\lambda = \lambda f(u_\lambda)$$

Esto nos dice que u_λ es solución de la ecuación

$$-\Delta u_\lambda + \lambda u_\lambda^5 = \lambda g \tag{3.6}$$

Tomando el producto de dualidad, en ambos miembros de (3.6) con u_λ, tenemos;

$$\langle -\Delta u_\lambda + \lambda u_\lambda^5, u_\lambda \rangle = \langle \lambda g, u_\lambda \rangle$$

entonces

$$\langle -\Delta u_\lambda, u_\lambda \rangle + \lambda \langle u_\lambda^5, u_\lambda \rangle = \lambda \langle g, u_\lambda \rangle \tag{3.7}$$

de (3.1) y (3.2) tenemos que:

$$\langle -\Delta u_\lambda, u_\lambda \rangle \geq \varepsilon \|u_\lambda\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para algún } \varepsilon > 0 \text{ y } \forall u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \tag{3.8}$$

$$\langle u_\lambda^5, u_\lambda \rangle \geq -c(1 + \|u_\lambda\|^\alpha_{H_0^1(\Omega)}), \text{ para algún } c > 0, \alpha \in [0, 2[\text{ y } \forall u_\lambda \in L^6(\Omega) \tag{3.9}$$

reemplazando convenientemente, (3.8), (3.9) en (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda \langle g, u_\lambda \rangle &= \langle -\Delta u_\lambda, u_\lambda \rangle + \lambda \langle u_\lambda^5, u_\lambda \rangle \\ &\geq \varepsilon \|u_\lambda\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda c(1 + \|u_\lambda\|^\alpha_{H_0^1(\Omega)}) \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \varepsilon \|u_\lambda\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \lambda c(1 + \|u_\lambda\|^\alpha_{H_0^1(\Omega)}) + \lambda \langle g, u_\lambda \rangle \\ &\leq \lambda c + \lambda c \|u_\lambda\|^\alpha_{H_0^1(\Omega)} + \lambda \langle g, u_\lambda \rangle \end{aligned}$$

por la desigualdad de Holder, tenemos

$$\varepsilon \|u_\lambda\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \lambda c + \lambda c \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} + \lambda |g|_{H^{-1}(\Omega)} \cdot \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.10}$$

(II) El Conjunto F es acotado.

$$F = \left\{ u_\lambda \in H_0^1(\Omega) : u_\lambda = \lambda f(u_\lambda), \text{para algún}\, \lambda \in [0, 1] \right\}$$

Tomando $\lambda \in [0, 1]$ y usando la desigualdad de Young, conveniente y adecuadamente, tenemos

$$\varepsilon \|u_\lambda\|^2 \leq \lambda c + \lambda c \|u_\lambda\|^\alpha + \lambda |g| \|u_\lambda\| \leq c + c \|u_\lambda\|^\alpha + |g| \|u_\lambda\| \tag{3.11}$$

Consideramos: $0 \leq \alpha < 2$; $p = \frac{2}{\alpha} > 1$, entonces

$$1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{q} \Rightarrow q = \frac{2}{2 - \alpha} > 1$$

además para $\varepsilon > 0$ y $a, b \geq 0$ se cumple que $ab \leq \dfrac{a^2}{2\varepsilon} + \dfrac{\varepsilon b^2}{2}$. Entonces, aplicando esta propiedad generalizada de la desigualdad de Young, tenemos:

$$\text{(a)} \quad : \quad c\|u_\lambda\|^\alpha \leq \frac{c^{2/2-\alpha}}{2/2-\alpha} + \frac{(\|u_\lambda\|^\alpha)^{2/\alpha}}{2/\alpha} = \left(\frac{2-\alpha}{2}\right) c^{2/2-\alpha} + \frac{\alpha}{2}\|u_\lambda\|^2$$

$$\text{(b)} \quad : \quad |g|\|u_\lambda\|^2 \leq \frac{|g|^2}{2\nu} + \nu\frac{\|u_\lambda\|^2}{2}, \text{ para } \nu > 0$$

Reemplazando (a) y (b) en (3.11), se tiene:

$$\varepsilon\|u_\lambda\|^2 \leq c + \frac{(2-\alpha)}{2}c^{2/2-\alpha} + \frac{|g|^2}{2\nu} + \frac{\alpha}{2}\|u_\lambda\|^2 + \frac{\nu}{2}\|u_\lambda\|^2 \tag{3.12}$$

tomando $\frac{\varepsilon}{2} = \nu > \alpha$ en (3.12), entonces

$$\frac{\varepsilon\|u_\lambda\|^2}{2} \leq c + \left(\frac{2-\alpha}{2}\right) c^{2/2-\alpha} + \frac{|g|^2}{\varepsilon} = k_0;\ k_0 > 0$$

luego:

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}(k_0)} = M, \forall u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$$

Por lo tanto: $\exists M > 0$ tal que $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$, $\forall u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$, para algún $\lambda \in [0,1]$; así tenemos que el conjunto F es acotado.

III Aplicación del teorema de punto fijo de Schaefer al problema (P).

Dado que el conjunto

$$F = \{u \in H_0^1(\Omega) : u = \lambda f(u);\ \text{para algún } \lambda \in [0,1]\}$$

$$F = \{u \in H_0^1(\Omega) : u = \lambda(-\Delta)^{-1}(g - u^5);\ \text{para algún } \lambda \in [0,1]\}$$

o equivalentemente

$$F = \Big\{u \in H_0^1(\Omega) : -\Delta u + \lambda u^5 = \lambda g;\ \text{para algún } \lambda \in [0,1]\Big\} \tag{3.13}$$

es acotado en $H_0^1(\Omega)$, y de acuerdo a las condiciones del teorema de punto fijo de Schaefer, concluimos que f tiene un punto fijo $u \in H_0^1(\Omega)$ que es solución débil del problema (P). Por lo tanto, existe por lo menos una solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del

Problema:

$$(P) \quad \left|\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u^5(x) = g(x), \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array}\right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado bien regular.

3.2. Unicidad de la Solución débil del problema (P)

Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$ dos soluciones del problema (P), es decir

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u(x) + u^5(x) = g(x), \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

y

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v(x) + v^5(x) = g(x), \quad x \in \Omega \\ \\ v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

hacemos $w = u - v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta(u(x) - v(x)) + (u^5(x) - v^5(x)) = 0, \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) - v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

entonces

$$-\Delta(u - v)(x) + (u^5 - v^5)(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

multiplicando por $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ y aplicando el Teorema de Green, como se muestra en el desarrollo variacional que se presenta después en (3.3), tenemos

$$\int_\Omega \nabla(u - v)\nabla\varphi dx + \int_\Omega (u^5 - v^5)\varphi dx = 0, \, \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

en particular para $\varphi = u - v$ tenemos

$$\int_\Omega \nabla(u - v)\nabla(u - v)dx + \int_\Omega (u^5 - v^5)(u - v)dx = 0, \, \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

como

$$\int_\Omega (u^5 - v^5)(u - v)dx \geq 0 \quad \text{y} \int_\Omega \nabla(u - v)\nabla(u - v)dx = \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 dx$$

entonces

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 dx \leq 0$$

luego

$$0 \leq \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 0$$

así

$$\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

entonces

$$u = v, c.t.p.$$

por lo tanto se tiene la unicidad de la solución débil del problema (P).

3.3. Otra alternativa para resolver el problema (P)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado bien regular. Determine la existencia y unicidad de la solución débil del problema elíptico no lineal

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta u(x) + u^5(x) = g(x), \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Demostración :

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ una función de prueba (arbitraria y fija), entonces de (P) se tiene que:

$$-\Delta u(x)\varphi(x) + u^5(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x), \; x \in \Omega,$$

e integrando respecto a Ω:

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega u^5(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx \tag{3.14}$$

y aplicando el Teorema de Gauss, para el Laplaciano (Teorema de Green), obtenemos:

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}\varphi(x)d\Gamma \tag{3.15}$$

luego, por la condición de frontera del problema (P) y de (3.14) y (3.15) deducimos la igualdad:

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi dx + \int_\Omega u^5(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.16}$$

Ahora, definimos el operador:

$$\begin{array}{rcl} A : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & A(u, v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\nabla(x)dx \end{array}$$

A es una forma bilineal, pues $A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \int_\Omega \nabla(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(x)\nabla v(x)dx$

$$\begin{array}{rcl} A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) & = & \displaystyle\int_\Omega \nabla(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(x)\nabla v(x)dx \\ & = & \displaystyle\int_\Omega (\alpha_1 \nabla u_1(x) + \alpha_2 \nabla u_2(x))\nabla v(x)dx \\ & = & \alpha_1 \displaystyle\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v(x)dx + \alpha_2 \int_\Omega \nabla u_2 \nabla v(x)dx \\ & = & \alpha_1 A(u_1, v) + \alpha_2 A(u_2, v), \forall u_1, u_2, v \in H_0^1(\Omega), \forall\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Análogamente, $A(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A(u, v_1) + \alpha_2 A(u, v_2)$.
Luego, de (3.16) y teniendo en cuenta que $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} = H_0^1(\Omega)$ y el producto interno en $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) g(x) dx \end{aligned}$$

se obtiene que:

$$A(u, v) + \langle u^5, v \rangle = \langle g, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.17}$$

de esta manera, u es llamada una solución débil de (P) si $u \in H_0^1(\Omega)$ y verifica (3.17).

A continuación, probaremos la existencia de $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil para (P). En efecto, siendo $H_0^1(\Omega)$ un espacio de Hilbert separable, entonces existe una base de Hilbert $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (numerable), esto es
Dado $v \in H_0^1(\Omega)$, existe una sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$v = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \omega_n,$$

y definiendo $\widetilde{W_n} = \langle \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \rangle$, se tiene que:

1. $\widetilde{W_1} \subseteq \widetilde{W_2} \subseteq ... \subseteq \widetilde{W_n} \subseteq \widetilde{W_{n+1}} \subseteq ...$
2. $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{W_n}}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} = H_0^1(\Omega)$

Para cada $S \subseteq \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y finito, se tiene que S es L.I. Ahora, sea

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \omega_j$$

tal que

$$A(u_n, \omega_j) + \langle u_n^5, \omega_j \rangle = \langle g, \omega_j \rangle, \ j \in \{1, 2, ..., n\} \tag{3.18}$$

En forma algebraica (o matricial) obtenemos:

$$A_n C_n + \begin{pmatrix} \langle u_n^5, \omega_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n^5, \omega_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g, \omega_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle g, \omega_n \rangle \end{pmatrix} = J_n,$$

Asi, tenemos

$$A_nC_n + G(C_n) = J_n$$

donde $A_n = (A_{ij})_{n\times n}$, $A_{ij} = \int_\Omega \omega_i(x)\omega_j(x)dx$ y $C_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ En consecuencia, como $\{\omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base, se tiene que A_n es invertible (filas L.I). Luego,

$$C_n = A_n^{-1}[J_n - G(C_n)] \tag{3.19}$$

y por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe un C_n que verifica (3.19) y es única. Por lo tanto, existe un único

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}\omega_j$$

que verifica (3.18).

Dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$A(u_n, \omega_j) + \langle u_n^5, \omega_j\rangle = \langle g, \omega_j\rangle,\ j \in \{1, 2, ..., n\},$$

entonces

$$\begin{aligned} A(u_n, \alpha_{1n}\omega_1)+ \quad \langle u_n^5, \alpha_{1n}\omega_1\rangle \quad &= \langle g, \alpha_{1n}\omega_1\rangle \\ A(u_n, \alpha_{2n}\omega_2)+ \quad \langle u_n^5, \alpha_{2n}\omega_2\rangle \quad &= \langle g, \alpha_{2n}\omega_2\rangle \\ &\vdots \\ A(u_n, \alpha_{nn}\omega_n)+ \quad \langle u_n^5, \alpha_{nn}\omega_n\rangle \quad &= \langle g, \alpha_{nn}\omega_n\rangle \end{aligned}$$

Además, como

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}\omega_j$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} A(u_n, \alpha_{jn}\omega_j) + \sum_{j=1}^{n} \langle u_n^5, \alpha_{jn}\omega_j \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle g, \alpha_{jn}\omega_j \rangle \\
A(u_n, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}\omega_j) + \langle u_n^5, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}\omega_j \rangle &= \langle g, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}\omega_j \rangle \\
A(u_n, u_n) + \langle u_n^5, u_n \rangle &= \langle g, u_n \rangle \\
\int_\Omega \nabla u_n(x) \nabla u_n(x) dx + \int_\Omega u_n^5(x) u_n(x) dx &= \int_\Omega g(x) u_n(x) dx \\
\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx + \int_\Omega |u_n(x)|^6 dx &= \int_\Omega g(x) u_n(x) dx
\end{aligned}$$

entonces

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_n\|^6_{L^6(\Omega)} = \int_\Omega g(x) u_n(x) dx \tag{3.20}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Holder, se obtiene que:

$$\int_\Omega g(x) u_n(x) dx \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.21}$$

Luego, de (3.20) y (3.21):

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_n\|^6_{L^6(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

Así,

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.22}$$

Debido a la inmersión compacta de

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

y aplicando las inmersiones continuas, convenientemente

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega),\ L^6(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

obtenemos:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Por lo tanto, existe

$$i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

lineal y compacto. Luego, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, existe $C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En particular, tomando $u_n \in H_0^1(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y obtenemos la desigualdad:

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.23}$$

Por consiguiente, de (3.22) y (3.23):

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq C(\Omega)\|g\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \\ \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} &\leqslant C(\Omega)\|g\|_{L^2(\Omega)} = R < +\infty. \end{aligned}$$

En consecuencia, hemos probado que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H_0^1(\Omega)$ es acotada. Además, como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, entonces $H_0^1(\Omega)$ es reflexivo y esto implica gracias al Teorema de Eberlein-Smulian, que existe una subsucesión $(u_{nj})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que

$$u_{nj} \rightharpoonup u$$

$$\tau(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) - \lim_{j\to+\infty} u_{nj} = u \tag{3.24}$$

Por otro lado, dado $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ y de (3.24) aplicando un resultado de la convergencia débil en $H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{j\to+\infty} \psi(u_{nj}) = \psi(u)$$

También, podemos aplicar el Teorema de Representación de Riesz y asegurar que: $\exists z_\psi \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$\psi(u_{nj}) = \langle u_{nj}, z_\psi\rangle,$$

de esta manera,

$$\lim_{j\to+\infty} \psi(u_{nj}) = \lim_{j\to+\infty} \langle u_{nj}, z_\psi\rangle = \psi(u) = \langle u, z_\psi\rangle,$$

para todo $\psi \in H_0^1(\Omega)$.

Como $\psi \in H_0^1(\Omega)$ es arbitrario, z_ψ también lo es y hemos obtenido la convergencia en producto interno:

$$\lim_{j\to+\infty} \langle u_{nj}, v\rangle = \langle u, v\rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.25}$$

Ahora, veamos la parte no lineal de (P):

<u>Afirmación:</u>

$$\lim_{j\to+\infty}\langle u_{nj}^5, v\rangle = \langle u^5, v\rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En efecto, definimos la función:

$$\begin{aligned} G:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto G(z) = z^5 \end{aligned}$$

y así, podemos considerar la sucesión $\Big(G(u_{nj})\Big)_{j\in\mathbb{N}}$, con $G(u_{nj}) = u_{nj}^5$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

1. (i) Veamos que $\Big(G(u_{nj})\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega)$.

   Sea
   $$\int_\Omega |(G(u_{nj}))(x)|^2 dx = \int_\Omega |u_{nj}^5(x)|^2 dx = \int_\Omega |u_{nj}(x)|^{10} dx \tag{3.26}$$
   luego de (3.26) aplicamos la inmersión continua y compacta dada por

   $$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{10}(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

   y en consecuencia, existe $\widetilde{C}(\Omega) > 0$ tal que

   $$\|u_n\|_{L^{10}(\Omega)} \leq \widetilde{C}(\Omega)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.27}$$

   Por lo tanto, de (3.26) y (3.27):

   $$\begin{aligned} \int_\Omega |G(u_{nj})(x)|^2 dx &\leq (\widetilde{C}(\Omega))^{10}\cdot \|u_{nj}\|_{H_0^1(\Omega)}^{10} \\ &\leq (\widetilde{C}(\Omega))^{10}(C(\Omega))^{10}\|g\|_{L^2(\Omega)} = R_1 \end{aligned}$$

   Esto es, $\|G(u_{nj})\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{R_1} < +\infty$. Así, $G(u_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega)$.

2. (ii) Veamos que $G(u_{nj}(x)) \to G(u(x))$ c.t.p $x \in \Omega$. En efecto, aplicando la inmersión compacta:

   $$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \tag{3.28}$$

   y como $(u_{nj})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq H_0^1(\Omega)$ es acotada, entonces de (3.28) se infiere que, existe una subsucesión $\Big(u_{nj_m}\Big)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq (u_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$ y un $z_0 \in L^2(\Omega)$ tales que:

   $$\lim_{m\to+\infty} u_{nj_m} = z_0 \tag{3.29}$$

Luego, de (3.24) y (3.29), como $\tau(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ es de Hausdorff, se deduce que $u = z_0$, es decir, como

$$\tau(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) - \lim_{m\to+\infty} u_{nj_m} = u,$$

y

$$\lim_{m\to+\infty} u_{nj_m} = z_0 \text{en} L^2(\Omega),$$

implica

$$\tau(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) - \lim_{m\to+\infty} u_{nj_m} = z_0$$

así, por la unicidad del limite tenemos que $u = z_0$.

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, aplicando la **desigualdad de Markov** y teniendo en cuenta la inmersión continua $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$:

$$\lambda\Big(\{x \in \Omega : |u_{nj_m}(x) - u(x)| \geq \varepsilon\}\Big) \leq \frac{\int_\Omega |u_{nj_m}(x) - u(x)|dx}{\varepsilon}$$

de donde se obtiene la convergencia

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{m\to+\infty} \lambda\Big(\{x \in \Omega : |u_{nj_m}(x) - u(x)| \geq \varepsilon\}\Big) \\ &\leq \lim_{m\to+\infty} \Big(\frac{\int_\Omega |u_{nj_m}(x) - u(x)|dx}{\varepsilon}\Big) = 0 \end{aligned}$$

Así, hemos probado

$$\lim_{m\to+\infty} \lambda\Big(\{x \in \Omega : |u_{nj_m}(x) - u(x)| \geq \varepsilon\}\Big) = 0$$

es decir, $u_{nj_m} \to u$ (convergencia en medida), entonces por un resultado de teoría de la medida:

$$\exists \left(u_{nj_{m_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_{nj_m})_{m\in\mathbb{N}}$$

tal que

$$\lim_{k\to+\infty} u_{nj_{m_k}}(x) = u(x), \text{ c.t.p}\, x \in \Omega.$$

Luego,

$$\lim_{k\to+\infty} u^5_{nj_{m_k}}(x) = u^5(x) \,\text{c.t.p}\, x \in \Omega.$$

Por consiguiente, de (i) y (ii), aplicando el **Lema de Lions**: con

$$\tau(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) - \lim_{k\to+\infty} u^5_{nj_{m_k}}(x) = u^5$$

En consecuencia, obtenemos:

$$\langle u^5_{nj_{m_k}}, v\rangle \to \langle u^5, v\rangle, \forall v \in L^2(\Omega) \tag{3.30}$$

y siendo: $A\Big(u^5_{nj_{m_k}}, v\Big) + \langle u^5_{nj_{m_k}}, v\rangle = \langle g, v\rangle, \forall v \in H^1_0(\Omega)$ de (3.30) se tiene que:

$$\lim_{k\to+\infty} A\Big(u^5_{nj_{m_k}}, v\Big) + \lim_{k\to+\infty} \langle u^5_{nj_{m_k}}, v\rangle = \langle g, v\rangle$$

$$A(u, v) + \langle u^5, v\rangle = \langle g, v\rangle, \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

es decir,

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_\Omega u^5(x)v(x)dx = \int_\Omega g(x)v(x)dx, \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

y por lo tanto existe una solución débil $u \in H^1_0(\Omega)$ que verifica (P).

4 Conclusiones y/o Sugerencias

1. El problema (P) planteado, fue adaptado sin ninguna dificultad a las hipótesis del teorema de punto fijo de Schaefer, logrando el objetivo.

2. Al investigar la unicidad de la solución, se concluye que la solución es única, debido a las condiciones y el espacio de definición del problema.

3. La formulación variacional es una herramienta de gran utilidad y fácil adaptabilidad a una variedad de problemas, pues nos permite estudiar las soluciones en un contexto general.

4. El Método de Galerkin es una técnica muy aplicada para probar la existencia de soluciones débiles de problemas no locales, por lo que mostramos como una alternativa.

5. Se pueden estudiar diversos casos relacionados al problema (P). Por ejemplo cuando el operador Laplaciano Δ es reemplazado por el p-laplaciano Δ_p para $1 < p < +\infty$, con condiciones de frontera no homogéneas, sobre el espacio $\mathbb{R}^n$.

Bibliografía

[1] Brezis, H.,“Analyse Fonntionelle Theorie et Aplications”. Dunod (1999)

[2] Kesavan,I.,“Topics in Functional Analysis and applications”. John Wiley & Sons (1989)

[3] De Figueiredo, D.G, “Equações Elípticas não lineares”, 11° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas (1977).

[4] Gilbarg, D., Trudinger, N.,“Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”. Springer-Verlag.(2001)

[5] Brezis, H.,“Analisis Funcional teoria y Aplicaciones”. Alianza Editorial.S.A. Madrid.(2001)

[6] De Guzman, Rubio.,“Integración: Teoría y Técnicas”. Editorial Alhambra. S.A., Madrid(1979)

[7] Adams, R., Fournier, J.,“Sobolev Space”. Elsevier.Second edition.(2003)

[8] De Figueiredo, D.G, “Equações Direrenciais Parciais Elípticas”, 10° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas (1975).

[9] Rosas Cruz, J.C., “Una aplicación del análisis funcional a las ecuaciones diferenciales ”. Tesis(2005)

[10] Gatica, Gabriel.,“Introducción al Análisis Funcional: teoría y Aplicaciones”. Editorial Reverté., España(2014)

[11] Gatica, Massiel., “Espacios de funciones: una introducción a los espacios de Sobolev”. Tesis(2011)

[12] Macho,Stladler., “Topologías de Espacios Métricos ”; Pais Vasco. (2010)

[13] Herrero,Pedro., “Topología de Espacios Métricos ”; Murcia.(2020).

[14] Chamorro,D., “. Espacio de Lebesgue y de Lorentz ”. Volumen 1.,Cuaderno de matemática N° 4.(2010)

[15] Smith, Z.,“Fixed point methods in nonlinear analysis”. Chicago. (2014).

[16] Castelli. M.,“Teoremas de ponto fixo”. Maringa (2016)

[17] Guiccione,J., “Espacios Métricos ”. Universidad de Buenos Aires., Texto.(2018)

[18] Restrepo,G., “Introducción al Análisis Funcional ”. Universidad del Valle . Cali., Texto.(2010)

[19] Evans. L.C.,“Partial differential equations, Amer Math Soc, Providence”. (1998)

[20] Botelho,G., Pellegrino,D.,and Texeira, E.,“Fundamentos de Análise Funcional”. Textos Universitarios. SBM. 2° edicao (2015)