

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Bases de Gröbner del Anillo Local de una Curva Algebroide lrreducible y de su Módulo de Diferenciales de Kähler

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

María del Carmen CÁCERES HUAMÁN

ASESOR

Dr. Mauro Fernando HERNÁNDEZ IGLESIAS

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Cáceres, M. (2025). *Bases de Gröbner del Anillo Local de una Curva Algebroide lrreducible y de su Módulo de Diferenciales de Kähler*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	María del Carmen Cáceres Huamán
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09773621
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-2153-205X
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Mauro Fernando Hernández Iglesias
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10453568
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-0026-157X
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Gabriel Armando Muñoz Márquez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	44444774
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Marco Antonio Rubio Gallarday
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	25612676
Miembro del jurado 3	
Nombres y apellidos	Frank Collantes Sánchez
Tipo de documento	DNI

Número de documento de identidad	10172488
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.3. Álgebra A.3.1.4. Matemática Aplicada
Grupo de investigación	Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis y Aplicaciones – GEDAAp
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos Edificio: Facultad de Ciencias Matemáticas País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Avenida: Germán Amézaga s/n Latitud: -12.05819215 Longitud: -77.0189181894387
Año o rango de años en que se realizó la investigación	setiembre 2021 - diciembre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 17:05 horas del día jueves diecisiete de julio de dos mil veinticinco, en el Aula 105 de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, el Jurado Examinador de tesis, presidido por el Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez e integrado por los siguientes miembros: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (Jurado Informante), Mg. Frank Collantes Sánchez (Jurado Evaluador), Mg. Marco Antonio Rubio Gallarday (Jurado Evaluador) y el Dr. Mauro Fernando Hernández Iglesias como Miembro Asesor; se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: **«Bases de Gröbner del Anillo Local de una Curva Algebroide Irreducible y de su Módulo de Diferenciales de Kähler»** presentada por la Br. María del Carmen Cáceres Huamán, para optar el Grado Académico de Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por la graduanda; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido la Bachiller **MARÍA DEL CARMEN CÁCERES HUAMÁN**, el calificativo de 18.. MUY BUENO.....

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Examinador recomienda que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional** a la Bachiller **MARÍA DEL CARMEN CÁCERES HUAMÁN.**

Siendo las 18:20 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez
Presidente

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Miembro

Mg. Frank Collantes Sánchez
Miembro

Mg. Marco Antonio Rubio Gallarday
Miembro

Dr. Mauro Fernando Hernández Iglesias
Miembro Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

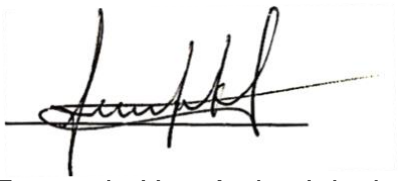
CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Mauro Fernando Hernández Iglesias en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°000917-2021-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es Bases de Gröbner del Anillo Local de una Curva Algebroide Irreducible y de su Módulo de Diferenciales de Kähler, presentado por la bachiller María del Carmen Cáceres Huamán para optar el grado de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional, CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el **18**% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado correspondiente.

Lima, 15 de abril de 2025

Firma del Asesor:





Nombres y Apellidos del asesor: Mauro Fernando Hernández Iglesias
DNI: 10453568

Dedicatoria

A mis padres, Marina y Rodrigo, de quienes recibí el legado del amor a Dios y la perseverancia.

A mi esposo Johnny y a nuestros hijos Flavio y Paulo, quienes con su amor, alegría y comprensión, me transmitieron fuerza y deseos de superación.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por estar siempre a mi lado en todo momento, quien con su infinito amor me sigue bendiciendo y me ha permitido la realización de esta tesis.

Agradezco a mi asesor, el Dr. Mauro Fernando Hernández Iglesias, por la orientación, paciencia y los consejos brindados en el desarrollo de esta tesis.

Agradezco a la Dra. Evelia García y al Dr. Marcelo Escudeiro, por sus consejos y aportes en diversos puntos que dieron forma a este trabajo.

Agradezco también a todos mis profesores por sus enseñanzas en las aulas que permitieron moldear mi formación académica.

Asimismo, quisiera agradecer a mis amigos y compañeros de aulas de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y a todas las personas que estuvieron apoyándome desde el inicio hasta el fin de este proyecto.

Un agradecimiento especial a mi familia y a mis amigos y colegas la Dra. Inés Gambini y el Dr. Víctor Osorio†, quienes a través de sus consejos me permitieron alcanzar mis objetivos profesionales.

RESUMEN

Bases de Gröbner del Anillo Local de una Curva Algebroide
Irreducible y de su Módulo de Diferenciales de Kähler
María del Carmen Cáceres Huamán
Abril, 2025

Asesor : Dr. Mauro Fernando Hernández Iglesias

Grado obtenido : Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

---

En este trabajo se presentan algoritmos para determinar bases estándar especiales de ideales, subálgebras y submódulos del anillo de series formales sobre un campo, para el caso de una curva algebroide irreducibe y de su módulo de diferenciales de Kähler, dichas bases representan importantes invariantes topológicos y analíticos.

Palabras clave: Series Formales, Topología M-ádica, Bases Estándar, Módulo de Diferenciales de Kähler.

ABSTRACT

Gröbner Bases of the Local Ring of an Irreducible Algebroid Curve and of its Kähler Differential Module

María del Carmen Cáceres Huamán

April, 2025

Adviser : Dr. Mauro Fernando Hernández Iglesias

Degree Obtained : Master in Applied Mathematics with mention in Computational Mathematics

---

In this work, algorithms are presented to determine special standard bases of ideals, subalgebras and submodules in the ring of formal series over a field, in the case of an irreducible algebroid curve and of its Kähler differential module, these bases represent important topological and analytical invariants.

Key words: Formal Series, M-adic Topology, Standard Bases, Kähler Differential Module.

Contenido

1 Preliminares **8**

1.1 Monoide 8

1.2 Monoideales y Monomódulos 12

1.3 Orden Monoidal 14

2 Bases estándar para ideales en $K[[X]]$ **17**

2.1 El anillo de las series formales sobre un campo 17

2.2 Reducciones y Algoritmo de División en $K[[\mathbf{X}]]$ 19

2.3 Bases estándar para Ideales 23

2.4 Algoritmo de Buchberger para ideales en $K[[\mathbf{X}]]$ 27

3 Aplicación de las bases estándar para ideales en $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$ **34**

3.1 La escalera asociada a un ideal 34

3.2 Ideales Jacobianos 35

4 Bases estándar para subálgebras en $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$ **42**

4.1 Proceso de Reducción para subálgebras en $K[[\mathbf{X}]]$ 42

4.2 Bases Estándar para Subálgebras 45

4.3 El algoritmo de Buchberger para subalgebras en $K[[\mathbf{X}]]$ 51

5 Aplicación de las bases estándar para subálgebras en $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$ **58**

5.1 Monoide de valores de una curva algebroide irreducible 58

5.2 Bases estándar del anillo local $\mathcal{O}$ 65

5.3 Invariantes numéricos de curvas algebroides 72

6 Bases Estándar Para Submódulos de $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$ **74**

6.1 El Algoritmo de Buchberger para submódulos en $K[[\mathbf{X}]]$ 78

6.2 Diferenciales de Kähler para una curva algebroide irreducible 83

Introducción

En este trabajo presentamos algoritmos para el cálculo de bases estándar en el contexto de series formales $K[[\mathbf{X}]]$ con coeficientes sobre un campo K, para esto seguiremos de cerca los trabajos de Hefez y Hernandes sobre curvas algebroides.

La teoría de bases estándar está inspiranda en las ideas usadas por Gröbner y Buchberger para determinar bases de Gröbner, esto en el contexto de anillos de polinomios.

Usaremos las ideas originales de Gröbner, Hironaka y Buchberger, para justificar la consistencia de los algoritmos que presentamos, los cuales ahora determinan bases estándar especiales, que nos permitirán calcular importantes invariantes numéricos de una curva algebroide.

En el Capítulo 1 presentamos los conceptos básicos para el mejor entendimiento de este trabajo.

Los capítulos 2 y 3 están dedicados al cálculo de bases estándar para ideales del anillo de las series formales así como su aplicación al cálculo de la codimensión de ideales que representan los números de Milnor y de Tjurina de una curva algebroide.

En el capítulo 4, presentaremos el análogo del algoritmo de Buchberger, para el cálculo bases estándar de subálgebras del anillo de series formales $K[[\mathbf{X}]]$. Para esto indicaremos el modo de realizar reducciones y los llamados S-procesos sobre estas subálgebras. Para poder mostrar la consistencia del proceso de reducción, pues éste podría realizarse un número infinito de veces, las algebras a considerar serán completas en la topología $\langle \mathbf{X} \rangle$-ádica.

En el capítulo 5, mostraremos como aplicación el cálculo de una base estándar especial del anillo local $\mathcal{O}$ de una curva algebroide irreducible $\mathcal{C}$, está base nos permitirá determinar un monoide o semigrupo asociado a la curva $\mathcal{C}$, este semigrupo constituye un invariante topológico completo para una curva plana irreducible.

En el capítulo 6, a partir de una subálgebra A completa de $K[[\mathbf{X}]]$, definimos bases estándar ahora para A-submódulos completos M de $K[[\mathbf{X}]]$. Para esto, a partir de una base estándar de A definimos los procesos de reducción en estos submódulos, garantizamos la existencia de bases estándar y varias formas de caracterizarlas. Además mostramos la consistencia del análogo del algoritmo de Buchberger para submódulos completos de $K[[\mathbf{X}]]$. Acabamos introduciendo el módulo de diferenciales de Kähler de una curva algebroide y

mostraremos que este puede ser considerado como un submódulo de $K[[\mathbf{X}]]$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos las estructuras algebraicas que serán tratadas a lo largo de este trabajo con sus principales propiedades y estableceremos la definición de un orden monoidal, los cuales serán aplicados en los siguientes capítulos.

1.1 Monoide

Sea S un conjunto, diremos que $(S, *, e)$ o abreviadamente que S es un monoide o *monoide conmutativo* , si la operación binaria $*$ es asociativa, conmutativa y además existe un elemento unitario e.

Un subconjunto B de S se denominará *generador* de S, si cualquier elemento de S puede obtenerse mediante un número finito de operaciones de elementos en B, en este caso usaremos la notación $S = \langle B \rangle$. Si el conjunto B es finito, diremos que S es un monoide *finitamente generado.*

Dados $s, t \in S$, decimos que s *divide a* t, escribiendo $s \mid t$, si existe $s' \in S$ tal que $t = s * s'$. La relación de divisibilidad es reflexiva y transitiva, pero no siempre es antisimétrica.

Un monoide S será denominado *positivo* si $s, t \in S : s * t = e$ entonces $s = t = e$.

Un monoide S será denominado *cancelativo* si $s, t, u \in S : s * u = t * u$ entonces $s = t$. En un monoide cancelativo y positivo, la relación de divisibilidad es antisimétrica.

Ejemplo 1.1 *El monoide* $(\mathbb{N}^n, +, 0)$ *es cancelativo y positivo.*
En este caso $s \mid t$ *si y sólo si existe* $s' \in \mathbb{N}^n$ *tal que* $t = s + s'$*; es decir* $s \mid t$ *si y sólo si* $(t - s) \in \mathbb{N}^n$.

Ejemplo 1.2 *Un monomio en las indeterminadas* $X_1, \ldots, X_n$ *es una expresión de la forma*

$$\mathbf{X}^{\alpha} = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n},\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Denotaremos por $\mathbf{T}^n$ *al conjunto de todos esos monomios con elemento unidad* $1 = X_1^0 X_2^0 \cdots X_n^0$ *y la operación usual de multiplicación de polinomios. Así,* $(\mathbf{T}^n, \cdot, 1)$ *es un monoide cancelativo y positivo.*

Observe que los monoides $(\mathbf{T}^n, \cdot, 1)$ y $(\mathbb{N}^n, +, 0)$ son isomorfos mediante el isomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \log & : & \mathbf{T}^n & \longrightarrow & \mathbb{N}^n \\ & & \mathbf{X}^\alpha = X_1^{\alpha 1} \cdots X_n^{\alpha n} & \longmapsto & \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{array}$$

Entonces en $\mathbb{N}^n$ y $\mathbf{T}^n$ la relación de divisibilidad es de orden parcial (reflexiva, transitiva, antisimétrica).

Definición 1.1 *Sea* S *un monoide y* $A \subset S$*. Un subconjunto* D *de* A *será denominado conjunto de divisores de* A *si para todo* $s \in A$*, existe* $t \in D$ *tal que* $t \mid s$*.*

Luego, si $D \subset C \subset A$ y D es un conjunto de divisores de A, entonces C es también un conjunto de divisores de A.

Definición 1.2 *Sea* S *un monoide y* $A \subset S$*, un conjunto* D *de divisores de* A *será denominado conjunto mínimo de divisores de* A *si para cualesquiera* $t, t' \in D$ *tal que* $t \mid t'$ *entonces* $t = t'$*.*

Observe que un conjunto mínimo de divisores de A, es un conjunto de divisores de A, el cual es mínimo con respecto a la relación de inclusión, en el sentido que no puede contener propiamente cualquier conjunto de divisores de A. En efecto, sea C un conjunto de divisores de A y D un conjunto mínimo de divisores de A, donde $C \subset D$; supongamos que existe $s \in D$ tal que $s \notin C$, como C es un conjunto de divisores de A entonces existe $t \in C$ tal que $t \mid s$ y como $C \subset D$ entonces $s, t \in D$ tal que $t \mid s$, así $t = s$, es decir $s \in C$, lo cual es una contradicción.

Proposición 1.1 *Sea* S *un monoide cancelativo y positivo. Si* A *es un subconjunto de* S *y existe un conjunto mínimo de divisores de* A*, entonces este conjunto es único.*

Prueba.

Sean D y D' dos conjuntos mínimos de divisores de A.
Veamos que $D \subset D'$: en efecto, sea $t \in D \subset A$ entonces por hipótesis sobre D' existe $t' \in D'$ tal que $t' \mid t$; de manera similar, si $t' \in D'$ entonces existe $s \in D$ tal que $s \mid t'$. Como $s, t \in D$ y $s \mid t$, luego $s = t$. por lo tanto $t \mid t'$. Como el monoide S es positivo, cancelativo y además $t' \mid t$ y $t \mid t'$ resulta que $t = t'$ pertenece a D'. Concluyendo así que $D \subset D'$. De forma similar se prueba que $D' \subset D$. □

Teorema 1.1 (Dickson) *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbf{T}^n$, entonces A tiene un único subconjunto finito mínimo de divisores.*

Prueba.

Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbf{T}^n$, como A es numerable podemos escribir $A = \{M_1, M_2, \ldots\}$ y consideremos la cadena de ideales propios de $R = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$: $\langle M_1\rangle \subset \langle M_1, M_2\rangle \subset \ldots$, ya que R es noetheriano, existe un entero r tal que, si I es el ideal $\langle M_1, M_2, \ldots, M_r\rangle$, entonces $I = \langle M_1, M_2, \ldots, M_s\rangle$, $\forall s \geq r$; por lo tanto, $A \subset I$.

Luego $D = \{M_1, \ldots, M_r\}$ es un conjunto de divisores de A. En efecto, sea $M \in A \subset I$, entonces existen $p_1, \ldots, p_r \in R$ tales que:

$$M = p_1M_1 + p_2M_2 + \cdots p_rM_r.$$

Por lo tanto, existe un monomio N y un índice i tal que $NM_i = M$, es decir $M_i \mid M$. Así D es un conjunto finito de divisores de A; luego puede obtenerse el conjunto finito mínimo de divisores de A, excluyendo si fuera necesario, algunos de los elementos de D. La unicidad es consecuencia de la Proposición (1.1) . □

Corolario 1.1 *Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{N}^n$ tiene un único subconjunto finito mínimo de divisores.*

Prueba.

Como $\mathbb{N}^n$ y $\mathbf{T}^n$ son isomorfos mediante el isomorfismo log definido en el Ejemplo 1.2, se concluye aplicando el Teorema 1.1. □

Un subconjunto S' de un monoide S, que contiene el elemento unitario de S y es cerrado bajo la operación de S, será denominado un *submonoide* de S. Cualquier elemento de $S\backslash S'$ será denominado una *laguna* de S'.

En general, un submonoide de $\mathbb{N}^k$ con $k \geq 2$ no es finitamente generado, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3 *El submonoide $S' = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2; b \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$ de $(\mathbb{N}^2, +, 0)$ no es finitamente generado.*

Efectivamente, pues cualquier conjunto generador de S' contiene al conjunto $D = \{(a, 1); a \in \mathbb{N}\}$. En este caso, $D' = \{(0, 1)\}$ es el conjunto mínimo de divisores de $S' \setminus \{(0, 0)\}$.

Ejemplo 1.4 *Cada submonoide S de $\mathbb{N}$ es finitamente generado.*

Efectivamente, si $m_1 = \min\{S \setminus \{0\}\}$ tendremos que $m_1\mathbb{N} \subset S$, pues S es submonoide de $\mathbb{N}$. Luego definimos $m_2 = \min\{S \setminus m_1\mathbb{N}\}$, donde $m_2 = k_1m_1 + r_1$, $k_1 \in \mathbb{N}$ y $0 < r_1 < m_1$; procediendo de modo inductivo tenemos:

$m_i = \min\{S \setminus (m_1\mathbb{N} + \cdots + m_{i-1}\mathbb{N})\}$; $i = 2, \ldots$, donde $m_i = k_{i-1}m_1 + r_{i-1}$, $k_{i-1} \in \mathbb{N}$, $r_0 = 0$, $r_{i-1} \neq r_{i-2}$ y $0 < r_{i-1} < m_1$. Finalmente, como el número de residuos módulo m_1 es finito se tiene que:

$$S = m_1\mathbb{N} + m_2\mathbb{N} + \cdots + m_i\mathbb{N}\,, \quad \text{para algún } i \leq m_1.$$

Luego, S es finitamente generado.

Así obtenidos, los enteros $m_1, \ldots, m_i$ deben estar contenidos en cualquier otro conjunto de generadores de S y se les denomina *sistema mínimo de generadores de* S. El número de elementos del sistema mínimo de generadores de un submonoide de $\mathbb{N}$ menos 1, es denominado *el género del submonoide.*

Definición 1.3 *Diremos que un entero c es el conductor de un submonoide S de $\mathbb{N}$ si $(c-1) \notin S$ y $n \in S$ para todo $n \geq c$.*

Ejemplo 1.5 *El submonoide $S' = 2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ no tiene conductor, pero el conductor del submonoide $S = 2\mathbb{N} + 5\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ es $c = 4$.*

Observación 1.1 *Si un submonoide S de $\mathbb{N}$ tiene conductor, entonces S tiene un número finito de lagunas, es decir el conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ es finito.*

Proposición 1.2 *Un submonoide de $\mathbb{N}$ tiene conductor si y sólo si el máximo común divisor de todos sus elementos es 1.*

Prueba.

Sea S un submonoide de $\mathbb{N}$.

($\Rightarrow$) Sea c el conductor de S. Entonces, si $a \geq c$ se tiene que: $a \in S$ y $a + 1 \in S$ por lo tanto $MCD(S) = 1$.

($\Leftarrow$) Si $MCD(S) = 1$, entonces hay elementos $s_1, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_m \in S$ y enteros positivos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ tales que:

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n = \mu_1 r_1 + \cdots + \mu_m r_m + 1\,,$$

es decir, los enteros consecutivos $a = \mu_1 r_1 + \cdots + \mu_m r_m$ y $a + 1$ pertenecen a S.

Como a y $a + 1$ son coprimos, el conjunto $\{0, a + 1, 2(a + 1), \ldots, (a - 1)(a + 1)\}$ es un sistema completo de residuos módulo a. Entonces cualquier entero $\alpha \geq (a-1)(a+1)$ es tal que $\alpha = ka + j(a + 1)$; $j = 0, 1, 2, \ldots, (a - 1)$ y $k \geq 0$; por lo tanto $\alpha \in S$, lo cual muestra que S tiene conductor. □

Definición 1.4 *Un submonoide S de $\mathbb{N}$ con conductor c, será denominado simétrico si* $\#(\mathbb{N}\backslash S) = \dfrac{c}{2}$.

Ejemplo 1.6 *El submonoide* $S_1 = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$ *es simétrico, pues* $c = 8 \quad y \quad \mathbb{N}\backslash S_1 = \{1, 2, 4, 7\}$. *Por otro lado el submoniode* $S_2 = \{0, 5, 6, 7, 10, 11, 12, \ldots\}$ *no es simétrico, pues* $c = 10 \quad y \quad \mathbb{N}\backslash S_2 = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$.

1.2 Monoideales y Monomódulos

Definición 1.5 *Un subconjunto no vacío* Δ *de un monoide* $S = (S, *, e)$ *será llamado monoideal de* S, *si*

$$\Delta * S := \{\delta * s;\ \delta \in \Delta\,,\ s \in S\} \subset \Delta.$$

Denotemos por $K[[\mathbf{X}]]$ al anillo de las series de potencias formales $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ en las indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ y coeficientes en el campo K.

Ejemplo 1.7 *Sea* I *un ideal generado por monomios, es decir* I *es un ideal monomial en* $K[[\boldsymbol{X}]]$; *entonces el conjunto* Δ *de todos los monomios en* I *es un monoideal del monoide* $\mathbf{T}^n$.

Definición 1.6 *Un subconjunto* B *de un monoideal* Δ *del monoide* S *es llamado un conjunto de generadores de* Δ, *si* $\quad \Delta = \langle \cdot B \cdot \rangle$, *donde* $\langle \cdot B \cdot \rangle := \{b * s\ ;\ b \in B,\ s \in S\}$.

Un conjunto de generadores B de un monoideal Δ será denominado *mínimo*, si es mínimo respecto a la relación de inclusión.

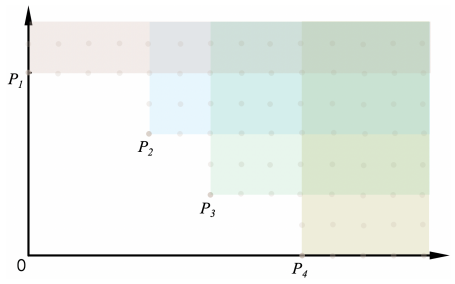
Proposición 1.3 *Todo monoideal* Δ *en* $\mathbb{N}^n$ *o en* $\mathbf{T}^n$ *tiene un conjunto de generadores mínimo finito.*

Prueba.

Dado un monoideal Δ en $\mathbf{T}^n$ o en $\mathbb{N}^n$, aplicando el Teorema 1.1 y el Corolario 1.1 respectivamente, $\Delta \setminus \{0\}$ tiene un subconjunto finito y mínimo de divisores, el cual es a su vez el conjunto de generadores mínimo finito del monoideal Δ. □

Ejemplo 1.8 *Sea* Δ *un monoideal de* $\mathbb{N}^2$, *tenemos que si* $(a, b) \in \Delta$ *entonces* $\{(a, b) + \mathbb{N}^2\} \subset \Delta$. *Así, podemos asociar a* Δ *una escalera, cerrada o no en* $\mathbb{N}^2$ *(donde cerrada significa que existen puntos* $(a_1, 0), (0, b_1) \in \Delta$*).*

En la figura adjunta, se muestra la escalera asociada a un monoideal, entonces el conjunto $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ *es un conjunto mínimo de generadores de* Δ.



Generalizando la definición de monoideal se tiene:

Definición 1.7 *Sea $(S, *, e)$ un monoide. Un conjunto $\Omega \neq \emptyset$ con una operación*

$$\begin{aligned} \circ \ : \ & S \times \Omega \longrightarrow \Omega \\ & (s, w) \longmapsto s \circ w \end{aligned}$$

será denominado un S-monomódulo, si:

1. *Para cualquier $w \in \Omega$: $e \circ w = w$.*
2. *Para cualesquiera $s_1, s_2 \in S$ y $w \in \Omega$: $(s_1 * s_2) \circ w = s_1 \circ (s_2 \circ w)$.*

En particular, todo monoideal de un monoide S es un S-monomódulo.
Diremos que el subconjuto B de Ω es un *conjunto de generadores* de Ω si

$$\Omega = S \circ B := \{s \circ w \, ; s \in S, \ \ w \in B\}.$$

En el caso de que B sea finito, diremos que el monomódulo Ω es *finitamente generado.*

Ejemplo 1.9 (Sistemas diofánticos lineales no homogéneos) *Sea S' el conjunto de las n-uplas de enteros no negativos, las cuales son soluciones del sistema de ecuaciones diofánticas lineales no homogéneas dado por:*

$$a_{i,1}X_1 + \cdots + a_{i,n}X_n = b_i \ ; \ i = 1, \ldots m, \tag{1.1}$$

donde los $a_{i,j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ y los b_i son elementos de $\mathbb{Z}$. En general, el conjunto S' no es un submonoide aditivo de $\mathbb{N}^n$. Por el Corolario 1.1, si D' es el conjunto finito mínimo de divisores de $S' \setminus \{0\}$ y si S es el monoide cuyos elementos son las soluciones del sistema diofántico homogéneo asociado a (1.1) con conjunto finito mínimo de divisores $D = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, entonces cualquier elemento $v' \in S'$ puede escribirse como

$$v' = \sum_{i=1}^{r} c_i \beta_i + w \ ; \ \ c_i \in \mathbb{N} \ \ y \ w \in D'.$$

Entonces S' es un S-monomódulo finitamente generado por D'.

Proposición 1.4 *Sea $\Omega \subset \mathbb{N}$ y $S \neq \{0\}$ un submonoide de $\mathbb{N}$. Si Ω es un S-monomódulo, entonces Ω es finitamente generado.*

Prueba.

Como S es submonoide de $\mathbb{N}$, entonces S es finitamente generado (ver ejemplo 1.4), entonces podemos escribir $S = \langle v_1, \cdots, v_g \rangle = v_1\mathbb{N} + \cdots + v_g\mathbb{N}$. Sea $d = MCD(S) \neq 0$, luego el monoide $S' = \langle \frac{v_1}{d}, \cdots, \frac{v_g}{d} \rangle$ es tal que $MCD(S') = 1$, luego por la Proposición 1.2 existe N conductor de S'; así para cada $n \geq N$, se tiene que $dn \in S$.

Consideremos la siguiente sucesión en $\mathbb{N}$:

$e_0 = min\ \Omega \setminus \{0\}$,

$e_1 = min\ \Omega \setminus \{(e_0 + S) \cup \{0\}\}$,

$e_2 = min\ \Omega \setminus \{(e_0 + S) \cup (e_1 + S) \cup \{0\}\}$,

$\cdots$

$e_j = min\ \Omega \setminus \{(e_0 + S) \cup \cdots \cup (e_{j-1} + S) \cup \{0\}\}$,

$\cdots$

Observe que $e_j \notin \{e_i + S\}$ para todo $i = 0, 1, ..., j-1$. Si Ω no se genera finitamente, habrían infinitos elementos en la sucesión anterior congruentes entre sí módulo d; es decir, existirían e_i y e_j, con $i < j$, tales que $(e_j - e_i) \geq Nd$ y $e_j \equiv e_i \, mod\, d$ y dado que N es el conductor de S' , tenemos que $(e_j - e_i) \in S$; por lo tanto $e_j \in \{e_i + S\}$, lo cual es una contradicción. $\square$

1.3 Orden Monoidal

Definición 1.8 *Sea $(S, *, e)$ un monoide, un orden monoidal $\preccurlyeq$ en S es una relación de orden total que satisface las siguientes propiedades:*

(i) Para cualquier $s \in S$, $e \preccurlyeq s$.

(ii) Para cualesquiera $s, s_1, s_2 \in S$, si $s_1 \preccurlyeq s_2$ entonces $s_1 * s \preccurlyeq s_2 * s$.

Un monoide junto con un orden monoidal será denominado *monoide ordenado.*

Observación 1.2 *Sea S un monoide ordenado. Para cualquier par de elementos s y t de S, si $s \mid t$ entonces $s \preccurlyeq t$.*

Efectivamente, pues si $s \mid t$ entonces existe $s' \in S$ tal que $t = s * s'$; por la definición de orden monoidal (i): $e \preccurlyeq s'$, luego por (ii) se concluye que $s * e \preccurlyeq s * s'$, es decir $s \preccurlyeq t$.

Si se tiene que $s \preccurlyeq s'$, pero $s \neq s'$, se denotará por $s \prec s'$ ó $s' \succ s$.

En los siguientes ejemplos se muestran diferentes ordenes monoidales asociados a $\mathbb{N}^n$.

Ejemplo 1.10 (El orden lexicográfico en $\mathbb{N}^n$) *Sean $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ elementos de $\mathbb{N}^n$. Diremos que $\alpha \leq_{\text{Lex}} \beta$ si y sólo si $\alpha = \beta$ ó $\alpha_{i_0} < \beta_{i_0}$, donde $i_0 = min\{j \in \{1, \cdots, n\} : \alpha_j \neq \beta_j\}$.*

Así, en $\mathbb{N}^3$ se tiene:
$(5, 0, 71) \leq_{\text{Lex}} (5, 9, 0) \leq_{\text{Lex}} (71, 0, 5)$ y $(0, 0, 1) \leq_{\text{Lex}} (0, 1, 0) \leq_{\text{Lex}} (1, 0, 0)$.

Ejemplo 1.11 (El orden lexicográfico graduado en $\mathbb{N}^n$) *Sean $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ elementos de $\mathbb{N}^n$. Diremos que $\alpha \leq_{\text{Glex}} \beta$ si se cumple:*

(i) $\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i$, *ó*

(ii) $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ *y* $\alpha \leq_{\text{Lex}} \beta$.

Así, en $\mathbb{N}^3$ se tiene:
$(5, 9, 0) \leq_{\text{Glex}} (5, 0, 71) \leq_{\text{Glex}} (71, 0, 5)$ y $(0, 0, 1) \leq_{\text{Glex}} (0, 1, 0) \leq_{\text{Glex}} (1, 0, 0)$.

Ejemplo 1.12 (El orden pesado en $\mathbb{N}^n$ asociado a un orden monoidal) *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ y sea $\preccurlyeq$ un orden monoidal en $\mathbb{N}^n$. Diremos que $\alpha \leq_\gamma \beta$ si*

(i) $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$, *ó*

(ii) $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ *y* $\alpha \preccurlyeq \beta$,

donde el punto $(\cdot)$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Observe que si $\gamma = (0, \ldots, 0)$ entonces $\leq_\gamma$ y $\preccurlyeq$ coinciden. Además, si $\gamma = (1, \ldots, 1)$ y $\preccurlyeq$ es $\leq_{\text{Lex}}$, entonces $\leq_\gamma$ coincide con $\leq_{\text{Glex}}$.

Proposición 1.5 *Todo orden monoidal en $\mathbb{N}^n$ es un buen orden.*

Prueba.

Fijemos un orden monoidal en $\mathbb{N}^n$. Probaremos que cualquier subconjunto A de $\mathbb{N}^n$ tiene un elemento mínimo con respecto al orden monoidal fijado.
Aplicando el Teorema de Dickson 1.1, el conjunto A tiene un subconjunto finito mínimo de divisores, sea D dicho subconjunto. Luego por la Observación 1.2, el menor elemento de D es el menor elemento de A. □

Definición 1.9 *Un orden monoidal en $\mathbf{T}^n$ será denominado orden monomial.*

Usando el isomorfismo log del Ejemplo 1.2 y la Proposición 1.5 se tiene que todos los órdenes monomiales son buenos órdenes. Además, podemos transformar cualquier orden

monoidal en $\mathbb{N}^n$ en un orden monomial en $\mathbf{T}^n$; en particular, esto se puede hacer para los órdenes lexicográfico, lexicográfico graduado y el orden pesado, que conservarán sus nombres.

Observe que en $\mathbf{T}^n$ se tiene: $X_n \leq_{\text{Lex}} X_{n-1} \leq_{\text{Lex}} \ldots \leq_{\text{Lex}} X_1$. Cuando tratamos con el orden pesado en $\mathbf{T}^n$ con respecto a $\gamma \in \mathbb{N}^n$, definiremos el *peso* de un monomio $\mathbf{X}^\alpha$ como el número entero

$$w_\gamma(\mathbf{X}^\alpha) := \gamma \cdot \alpha.$$

Si $\gamma = (1, \ldots, 1)$, entonces $\deg(\mathbf{X}^\alpha) := w_\gamma(\mathbf{X}^\alpha) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, denominado el grado de $\mathbf{X}^\alpha$.

Observación 1.3 *En $\mathbf{T}^1$ sólo existe un orden monomial.*

En efecto, dado cualquier orden $\preccurlyeq$ en $\mathbf{T}^1$, por definición tenemos que $1 \preccurlyeq X$, y por la compatibilidad del orden respecto a la multiplicación se tiene que: $1 \preccurlyeq X \preccurlyeq X^2 \preccurlyeq X^3 \preccurlyeq \ldots$, lo cual prueba la afirmación.

Para familias infinitas de series de potencias formales, consideraremos un tipo particular de órdenes monomiales que tienen una propiedad adicional.

Definición 1.10 *Sea S un monoide ordenado con orden monoidal $\preccurlyeq$. Diremos que el orden monoidal $\preccurlyeq$ tiene la propiedad de finitud si para cada $t \in S$, $\#\{s \in S; s \preccurlyeq t\} < \infty$.*

Ejemplo 1.13 *Sea $\gamma \in \mathbb{N}^n$, consideremos un orden pesado $\leq_\gamma$ en $\mathbf{T}^n$ con respecto al peso γ y al orden lexicográfico $\leq_{\text{Lex}}$.*

Si todas coordenadas de γ son positivas, entonces se verifica que $\leq_\gamma$ tiene la propiedad de finitud. Así, $\leq_{\text{Glex}}$ tiene la propiedad de finitud.

Si se toma $\gamma = (0, \ldots, 0)$, entonces $\leq_\gamma$ coincide con $\leq_{\text{Lex}}$ el cual para $n \geq 2$ no tiene la propiedad de finitud, pues $X_1^0 X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3} \cdots X_n^{\alpha_n} \leq_{\text{Lex}} X_1$ para todo $\alpha = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Capítulo 2

Bases estándar para ideales en $K[[X]]$

En este capítulo presentaremos lo esencial de la teoría de Bases de Gröbner para ideales en el contexto de los anillos de series de potencias formales con coeficientes sobre un campo.

Para dar consistencia a los procesos de eliminación que daremos (S-procesos) introduciremos la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica en $K[[X]]$. Ver Hefez [10].

2.1 El anillo de las series formales sobre un campo

Sea K un campo. Si f es un elemento del anillo de las series formales $K[[\mathbf{X}]]$, entonces f puede representarse de la forma

$$f = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha \ , \ I \subset \mathbb{N}^n, \ a_\alpha \in K.$$

Si $f \in K[[\mathbf{X}]] \setminus \{0\}$, al conjunto de todos los de monomios de f lo denotaremos por

$$\mathbf{T}(f) = \{\mathbf{X}^\alpha; \ \alpha \in I \ , \ a_\alpha \neq 0\}.$$

Si B es un subconjunto de $K[[\mathbf{X}]]$, denotaremos por $\langle B \rangle$ al ideal generado por los elementos de B; así, $\mathcal{M}_{\mathbf{X}} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle = \{X_1 f_1 + \cdots + X_n f_n \, ; \, f_i \in K[[\mathbf{X}]], i = 1, \cdots, n\}$.

Presentamos algunas propiedades del anillo $K[[\mathbf{X}]]$:

Las unidades del anillo $K[[\mathbf{X}]]$ son de la forma $u = a + f$, donde $a \in K \setminus \{0\}$ y $f \in \mathcal{M}_{\mathbf{X}}$. Luego, u es invertible en $K[[\mathbf{X}]]$ si y sólo si $u \notin \mathcal{M}_{\mathbf{X}}$. Por lo tanto, $K[[\mathbf{X}]]$ es un anillo local cuyo ideal maximal es $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$.

Denotando la i-ésima potencia del ideal $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ con $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}^i$, donde $i \in \mathbb{N}$ y considerando $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}^0 = K[[\mathbf{X}]]$, podemos definr la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica en $K[[\mathbf{X}]]$, considerando alrededor de cualquier elemento fijo $f \in K[[\mathbf{X}]]$, la familia $\{f + \mathcal{M}_{\mathbf{X}}^i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ como un sistema fundamental de vecindades de f.

Como $\cap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{\mathbf{X}}^i = \{0\}$, la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica en $K[[\mathbf{X}]]$ resulta ser de Hausdorff.

Definamos una métrica en $K[[\mathbf{X}]]$. Para $f \in K[[\mathbf{X}]]$, definimos

$$mult(f) = sup\{i \ ; \ f \in \mathcal{M}_{\mathbf{X}}^{i}\}.$$

la cual será denominada multiplicidad de f.
Sea ρ un número real y fijo mayor que 1 y consideraremos $\rho^{-\infty} = 0$. Para $f, h \in K[[\mathbf{X}]]$, la función

$$d(f,h) = \rho^{-mult(h-f)},$$

define una métrica completa en $K[[\mathbf{X}]]$, ver Hefez [10] pag.5.

Una familia $\{f_\lambda \ ; \ \lambda \in \Lambda\} \subset K[[\mathbf{X}]]$ se denominará sumable si para cada $t \in \mathbf{T}^n$ se tiene que

$$\#\big\{\lambda \in \Lambda \ ; \ t \in \mathbf{T}(f_\lambda)\big\} < \infty.$$

El anillo $K[[\mathbf{X}]]$ con la métrica d resulta ser un espacio métrico completo, por lo tanto tenemos que para cualquier familia sumable en $K[[\mathbf{X}]]$, la suma $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ es un elemento de $K[[\mathbf{X}]]$. Ver Hefez [10] y Cáceres [6].

Teorema 2.1 (Teorema de Preparación de Weierstrass) .
Dada $f \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \subset K[[\boldsymbol{X}]]$, con $f \neq 0$, existe un automorfismo ϕ y una unidad u de $K[[\boldsymbol{X}]]$ y elementos $A_1, \cdots, A_r$ en el ideal maximal de $K[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ tal que

$$u(f \circ \phi) = X_n^r + A_1 X_n^{r-1} + \cdots + A_r.$$

Ver Hefez [10].

Ejemplo 2.1 *Para $f = XY - Y^3 + Y^4 \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, se tiene que*
$(-1 - X - Y - Y^2 + \cdots)f = Y^3 - (X + 2X^2 + \cdots)Y^2 - (X + X^2 + \cdots)Y.$

Ver Torres [21].

Una consecuencia del Teorema de Preparación de Weierstrass es el siguiente resultado:

Teorema 2.2 *El anillo $K[[\boldsymbol{X}]]$ es un dominio noetheriano de factorización única.*

Ver Hefez [10].

Como $K[[\mathbf{X}]]$ es noetheriano, cada ideal en $K[[\mathbf{X}]]$ es finitamente generado. Esto implica en particular que cada ideal es un conjunto cerrado con la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica.

2.2 Reducciones y Algoritmo de División en $K[[\mathbf{X}]]$

Fijemos un orden monomial en $\mathbf{T}^n$ denotado por $\preccurlyeq$.

Definición 2.1 *Sea $f \in K[[\boldsymbol{X}]] \setminus \{0\}$. La potencia lider de f es $lp(f) = mín\, \boldsymbol{T}(f)$, donde el mínimo es considerado respecto al orden monomial fijo $\preccurlyeq$.*

La buena definición de $lp(f)$ esta dada por la Proposición 1.5. Además si $G \subset K[[\mathbf{X}]]$, definiremos por $lp(G) := \{lp(g);\ g \in G \setminus \{0\}\}$ al conjunto de las potencias líderes de G.

Definición 2.2 *Sea $f \in K[[\boldsymbol{X}]] \setminus \{0\}$. Si $f = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \boldsymbol{X}^\alpha$, el término lider de f es $lt(f) = a_\beta \boldsymbol{X}^\beta$, donde $\boldsymbol{X}^\beta = lp(f)$.*

Definición 2.3 *Sea B un subconjunto finito de $K[[\boldsymbol{X}]]$. Dados $g \in K[[\boldsymbol{X}]] \setminus \{0\}$ y $r \in K[[\boldsymbol{X}]]$, entonces r será denominada reducción de g módulo B si existe una constante $a \in K$, un monomio $t \in \mathbf{T}^n$ y un elemento $f \in B$ tal que $r = g - atf$ donde $lp(r) \succ lp(g)$, si $r \neq 0$.*

Si r es una reducción de g módulo B, lo denotaremos por: $g \xrightarrow{B} r$.

Al considerar una cadena de reducciones

$$g \xrightarrow{B} r_1 \xrightarrow{B} r_2 \xrightarrow{B} \cdots \xrightarrow{B} r_m \xrightarrow{B} \cdots , \tag{2.1}$$

por definición de reducción existen $a_i \in K$, $t_i \in \mathbf{T}^n$ y $f_i \in B$, $i \geq 1$ tales que

$$r_1 = g - a_1 t_1 f_1\ ,\ \ r_2 = r_1 - a_2 t_2 f_2\ ,\ \ \cdots$$

donde $lp(r_1) \succ lp(g) = lp(t_1 f_1),\ \ lp(r_2) \succ lp(r_1) = lp(t_2 f_2),\ \ \cdots$
procediendo de esta manera, se tiene que $r_m = g - \sum_{i=1}^m a_i t_i f_i$, con

$$lp(t_1 f_1) \prec lp(t_2 f_2) \prec \cdots \tag{2.2}$$

Observación 2.1 *Si la cadena dada en (2.1) es una cadena infinita de reducciones, obtendremos la sucesión $\left(\sum_{i=1}^m a_i t_i f_i\right)_{m \geq 1}$ con las restricciones dadas en (2.2), luego la sucesión es convergente en $K[[\boldsymbol{X}]]$ con respecto a la topología $\mathcal{M}_{\boldsymbol{X}}$-ádica.*

En efecto, es suficiente verificar que la familia $\{t_i f_i\ ,\ i \geq 1\}$ es sumable. Veamos, si para algún $t \in \mathbf{T}^n$

$$\#\big\{i\ ;\ t \in \mathbf{T}(t_i f_i)\big\} = \infty,$$

Dado que B es finito, existiría un $f \in B$ e infinitos elementos $t_i \in \mathbf{T}^n$ tales que $t \in \mathbf{T}(t_i f)$, es decir $t_i \preccurlyeq t$ para infinitos valores de i; pero para este $f \in B$, de (2.2), se deduce que los

t_i tienen que ser distintos. Pero esto es una contradicción, pues t es fijo.

Denotaremos el límite de la suseción $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i t_i f_i\right)_{m\geq 1}$ por $\sum_{i\geq 1} a_i t_i f_i$.
Dado que todos los términos de la sucesión anterior estan en $\langle B\rangle$ y como cualquier ideal en $K[[\mathbf{X}]]$ es cerrado, tenemos que $\sum_{i\geq 1} a_i t_i f_i$ pertenece al ideal $\langle B\rangle$.

Como $r_m = g - \sum_{i=1}^{m} a_i t_i f_i$, extenderemos la definición de reducción para incluir todas las r_m y sus límites. De esa forma, en la extención dada sigue siendo cierto que si un elemento r es una reducción de g módulo B, entonces $g - r \in \langle B\rangle$.

Definición 2.4 *Sea B un subconjunto finito de $K[[\boldsymbol{X}]]$. Dados $g \in K[[\boldsymbol{X}]]\setminus\{0\}$ y $r \in K[[\boldsymbol{X}]]$, entonces r será denominada reducción final de g módulo B, si r es una reducción de g módulo B y además $lp(f) \nmid lp(r)$, $\forall f \in B$ ó $r = 0$; denotando este caso como $g \xrightarrow{B_+} r$.*

Definición 2.5 *Sea B un subconjunto finito de $K[[\boldsymbol{X}]]$. Dados $g \in K[[\boldsymbol{X}]]\setminus\{0\}$ y $r \in K[[\boldsymbol{X}]]$, entonces r será denominada reducción completa de g módulo B, si r es la reducción final de g módulo B tal que $r = 0$ ó ningún elemento de $\mathbf{T}(r)$ es divisible por cualquier $lp(f)$ con $f \in B$.*

Sean $B = \{f_1, \cdots, f_s\}$ un subconjunto de $K[[\mathbf{X}]]$ y $f \in K[[\mathbf{X}]]$, podemos obtener una reducción completa r de f módulo B y series $q_1, \cdots, q_s \in K[[\mathbf{X}]]$, tal que

$$f = \sum_{i=1}^{s} q_i f_i + r,$$

aplicando el siguiente algoritmo:

Algoritmo de División en $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$

Entrada : f , $B = \{f_1, \ldots, f_s\}$;
Defina : $q_1 := 0; \ldots; q_s := 0$; $r := 0$;
Mientras $f \neq 0$, Hacer
  Si existe f_i con $1 \leq i \leq s$ tal que $lp(f_i) \mid lp(f)$
    Entonces tome el menor entero i, y haga:
      $q_i := q_i + \dfrac{lt(f)}{lt(f_i)}$;
      $f := f - \dfrac{lt(f)}{lt(f_i)}\, f_i$;
  De lo contrario
      $r := r + lt(f)$;
      $f := f - lt(f)$;

Para obtener simplemente una reducción final de r de f, reemplazar las dos últimas filas del algoritmo anterior por

$$r := f \ ;$$
$$f := 0 \ ;$$

Como $B = \{f_1, \cdots, f_s\} \subset K[[\mathbf{X}]]$ y $f \in K[[\mathbf{X}]]$, el procedimento anterior puede no terminar después de un número finito de pasos, pero se pueden obtener sucesiones que son aproximaciones (en la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica de $K[[\mathbf{X}]]$) de r y de los q_i, $1 \leq i \leq s$.

Ejemplo 2.2 *Sean $f = X$, $f_1 = X + Y^2$, $f_2 = Y + X^2$ en $K[[X, Y]]$ y consideremos el orden lexicográfico graduado en $\mathbf{T}^2$. Aplicando el Algoritmo de División a f módulo $B = \{f_1, f_2\}$, obtenemos:*

Como $lp(f_1)|lp(f)$:
$q_1 := 0 + \frac{X}{X} = 1;$
$f := X - (X + Y^2) = -Y^2 = r_1;$ $\quad \Rightarrow f = f_1 + r_1, \quad r_1 = -Y^2.$

Como $lp(f_2)|lp(f)$:
$q_2 := 0 + \frac{-Y^2}{Y} = -Y;$
$f := -Y^2 - \frac{-Y^2}{Y}(Y + X^2) = X^2Y = \tilde{r}_1;$ $\quad \Rightarrow r_1 = -Yf_2 + \tilde{r}_1, \quad \tilde{r}_1 = X^2Y.$

Como $lp(f_1)|lp(f)$:
$q_1 := 1 + \frac{X^2Y}{X} = 1 + XY;$
$f := X^2Y - \frac{X^2Y}{X}(X + Y^2) = -XY^3 = r_2;$ $\quad \Rightarrow \tilde{r}_1 = XYf_1 + r_2, \quad r_2 = -XY^3.$
$\vdots \qquad\qquad \vdots$

Continuando con el proceso, se tiene:

$$\begin{array}{ll}
f = f_1 + r_1 \ , & r_1 = -Y^2 \ ; \\
r_1 = -Yf_2 + \tilde{r}_1 \ , & \tilde{r}_1 = X^2Y \ ; \\
\tilde{r}_1 = XYf_1 + r_2 \ , & r_2 = -XY^3 \ ; \\
r_2 = -Y^3f_1 + r_3 \ , & r_3 = Y^5 \ ; \\
r_3 = Y^4f_2 + \tilde{r}_2 \ , & \tilde{r}_2 = -X^2Y^4 \ ; \\
\tilde{r}_2 = -XY^4f_1 + r_4 \ , & r_4 = XY^6 \ ; \\
\vdots & \vdots \\
\tilde{r}_i = (-1)^{i+1}XY^{3i-2}f_1 + r_{2i} \ , & r_{2i} = (-1)^iXY^{3i} \ ; \\
r_{2i} = (-1)^iY^{3i}f_1 + r_{2i+1} \ , & r_{2i+1} = (-1)^{i+1}Y^{3i+2} \ ; \\
r_{2i+1} = (-1)^{i+1}Y^{3i+1}f_2 + \tilde{r}_{i+1} \ , & \tilde{r}_{i+1} = (-1)^iX^2Y^{3i+1} \ .
\end{array}$$

Donde los r_i corresponden a las veces que $lp(f_1)$ divide a los nuevos $lp(f)$ en el algoritmo, y los $\tilde{r}_i$ corresponden a las veces que $lp(f_2)$ divide a los nuevos $lp(f)$ en el algoritmo. En este ejemplo el algoritmo no termina, sin embargo permite concluir que 0 es una reducción final de f módulo $\{f_1, f_2\}$.

Observación 2.2 *Dado $f \in K[[\boldsymbol{X}]]$, si el algoritmo de división con respecto a algún conjunto finito B termina después de un número finito de pasos, entonces con el algoritmo se obtiene una reducción final ó completa de f módulo B.*

Observación 2.3 *Para el algoritmo es importante la elección de la ordenación en la que son considerados los elementos de B.*
Entonces para una ordenación dada de los elementos de B, tenemos un r y los q_i, $1 \leq i \leq s$ estan determiandas univocamente. Sin embargo, para una ordenación diferente de los elementos de B, podemos obtener diferentes reducciones finales o completas de f, módulo B.

Ejemplo 2.3 *Sean $f = Y^{12} - X^5Y^7 - X^7Y^6$, $f_1 = Y^7 - 2X^5Y^2 - X^9$, $f_2 = X^{10}$, $f_3 = Y^6 - X^5Y - X^7$ y $f_4 = Y^7 - X^5Y^2 - X^7Y + X^{10}$ en $\mathbb{Q}[[X, Y]]$. Consideremos $\mathbf{T}^2$ ordenado por el orden lexicográfico graduado.*

Aplicando el Algoritmo de División a f módulo $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, obtenemos:

Como $lp(f_1)|lp(f)$:
$q_1 := 0 + \frac{Y^{12}}{Y^7} = Y^5$;
$f := f - Y^5 f_1 = X^5Y^7 - X^7Y^6 + X^9Y^5$;

> *Como* $lp(f_1)|lp(f)$:
> $q_1 := Y^5 + \frac{X^5Y^7}{Y^7} = Y^5 + X^5$;
> $f := f - X^5 f_1 = 2X^{10}Y^2 - X^7Y^6 + X^9Y^5 + X^{14}$;
>
> > *Como* $lp(f_2)|lp(f)$:
> > $q_2 := 0 + \frac{2X^{10}Y^2}{X^{10}} = 2Y^2$;
> > $f := f - 2Y^2 f_2 = -X^7Y^6 + X^9Y^5 + X^{14}$;
> >
> > > *Como* $lp(f_3)|lp(f)$:
> > > $q_3 := 0 + \frac{-X^7Y^6}{Y^6} = -X^7$;
> > > $f := f - (-X^7) f_3 = -X^{12}Y + X^9Y^5$;
> > >
> > > > *Como* $lp(f_2)|lp(f)$:
> > > > $q_2 := 2Y^2 + \frac{-X^{12}Y}{X^{10}} = 2Y^2 - X^2Y$;
> > > > $f := f - (-X^2Y) f_2 = X^9Y^5$;

Luego, $r := 0 + X^9Y^5$ y $f := f - (X^9Y^5) = 0$.

Es decir, $r = X^9Y^5$ es una reducción completa de f módulo $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Mientras que la reducción completa de f módulo $B = \{f_3, f_2, f_4, f_1\}$ (B con un ordenamiento diferente) es $r = 0$, pues $f = Y^6 f_3$.

2.3 Bases estándar para Ideales

En esta sección presentamos las bases estándar para ideales en los anillos de series de potencias formales; uno de los conceptos principales de este trabajo. El nombre de bases estándar se debe a H. Hironaka, quien las introdujo en su famoso artículo [Hi] para estudiar ideales en el anillo de series de potencias convergente. Estos objetos se conocieron inicialmente en anillos polinomiales, donde se denominan bases de Gröbner.

Teniendo en cuenta que $\langle \cdot lp(B) \cdot \rangle = \{\ lp(f)X^\alpha\ ;\ f \in B \text{ y } X^\alpha \in \mathbf{T}^n\}$,

Definición 2.6 *Un subconjunto finito B de $K[[\boldsymbol{X}]]$ es base estándar para el ideal I, si $\langle B\rangle = I$ y además para cada $g \in \langle B\rangle$ existe un elemento $f \in B$ tal que $lp(f) \mid lp(g)$.*

Como el monoideal $\langle \cdot lp(B) \cdot \rangle$ verifica que $\langle \cdot lp(B) \cdot \rangle \subset lp\big(\langle B\rangle\big)$, entonces B es una base estándar para el ideal $\langle B\rangle$ de $K[[\mathbf{X}]]$ si:

$$lp\big(\langle B\rangle\big) = \langle \cdot lp(B) \cdot \rangle$$

Ejemplo 2.4 *Sea $F = \{f_1, f_2\} \subset K[[X,Y]]$ donde $f_1 = -2XY + X^4$, $f_2 = -2Y^2 + X + X^3Y$ y considerando el orden lexicográfico en $\mathbf{T}^2$ tenemos que $lp(F) = \{XY, Y^2\}$.*

Si $g = Y f_1 - X f_2 = -X^2$, entonces $g \in \langle F\rangle = I$ y $lp(g) = X^2$; es decir F no es base estándar de I, pues $lp(f_1)$ y $lp(f_2)$ no dividen a X^2.

Definición 2.7 *Dada $(f_l)_{l\in L}$ una familia sumable en $K[[\boldsymbol{X}]]$, con su suma de la forma $\sum_{l\in L} f_l$, definimos la altura de la suma como*

$$ht\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big) = \min\{\ lp(f_l)\ ; l \in L\}.$$

Observación 2.4 *Esta definición depende de la representación de $\sum_{l\in L} f_l$ como una suma y no del elemento que determina esta. En general se tiene que $ht\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big) \preccurlyeq lp\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big)$, donde $\preccurlyeq$ es el orden monomial que hemos fijado en $\mathbf{T}^n$.*

Diremos que f_{l_0} contribuye a la altura de $\sum_{l\in L} f_l$ si $lp(f_{l_0}) = ht\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big)$.

Definición 2.8 *La amplitud de la suma $\sum_{l\in L} f_l$ es definida como el número de sumandos f_l en $\sum_{l\in L} f_l$ que contribuyen a su altura.*

Observe que si $t = ht\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big)$, entonces $\#\big\{l \in L\ ;\ t \in \mathbf{T}(f_l)\big\} < \infty$, es decir, la definición de amplitud de la suma está bien dada.

Definición 2.9 *Un S-proceso de un par de elementos $f, g \in K[[\boldsymbol{X}]] \setminus \{0\}$, es una expresión de la forma*

$$S(f,g) = pf + qg,$$

donde $p, q \in K[[\boldsymbol{X}]]$, tal que $S(f,g) = 0$ ó $lp\big(S(f,g)\big) \succ ht(pf+qg)$.

Teorema 2.3 (Gröbner - Hironaka - Buchberger)

1. *Todo ideal I en $K[[\boldsymbol{X}]]$ tiene una base estándar.*
2. *Dado un conjunto $B = \{f_1, \cdots, f_s\} \subset K[[\boldsymbol{X}]]$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*
   (a) *El conjunto B es una base estándar del ideal $\langle B\rangle = I$.*
   (b) *Todas las reducciones finales módulo B de cualquier elemento de $\langle B\rangle$ son cero.*
   (c) *Cada S-proceso de cualquier par dado de elementos en B tiene una reducción final cero, o converge a cero módulo B.*
   (d) *Todo S-proceso distinto de cero de cualquier par de elementos en B tiene una representación como una suma $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$, donde $h_i \in K[[\boldsymbol{X}]]$ y $ht\Big(\sum_{i=1}^{s} h_i f_i\Big)$ es mayor que la altura del S-proceso considerado.*

Prueba de (1):

Sea I un ideal de $K[[\mathbf{X}]]$. Desde que $lp(I) \subset \mathbf{T}^n$, entonces por el Teorema de Dickson 1.1, existe un subconjunto finito mínimo G de divisores de $lp(I)$. Luego se puede elegir un subconjunto finito B de I tal que $lp(B) = G$. Así elegido, B es una base estándar para el ideal I; pues para cualquier $g \in I$, existe $f \in B$ tal que $lp(f) \mid lp(g)$.
La prueba de (1) no es constructiva, pues se basa en el Teorema de Dickson, que a su vez se basa en el Teorema de Hilbert.

Prueba de (2):

(a)⇒(b) Suponga que B es una base estándar del ideal $\langle B\rangle = I$ y sea $g \in \langle B\rangle$. Si r es una reducción final de g módulo B entonces $g - r \in \langle B\rangle$, por lo tanto tenemos que $r \in \langle B\rangle$. Si $r \neq 0$, como B es una base estándar para I, existirá un elemento $f \in B$ tal que $lp(f) \mid lp(r)$; lo cual es una contradicción, pues r es una reducción final módulo B. Por lo tanto $r = 0$.

(b)⇒(c) Dado que un S-proceso de cualquier par de elementos de B es un elemento de $\langle B\rangle$, entonces la hipótesis (b) implica que la afirmación (c) es correcta.

(c)⇒(d) Sea $h = pf_i + qf_j \neq 0$, un S-proceso de un par f_i, f_j de elementos de B, donde $p, q \in K[[\mathbf{X}]]$ entonces $lp\big(h\big) \succ ht(pf_i + qf_j)$.

Dado que cualquier reducción r módulo B de h es de la forma

$$r = h - \sum_{k\geq 1} a_k t_k f_{l_k},$$

donde $a_k \in K$, $t_k \in \mathbf{T}^n$ y $f_{l_k} \in B$ son tales que $\{lp(t_k f_{l_k})\}_{k\geq 1}$ es una sucesión estrictamente creciente en $\mathbf{T}^n$; y asumiendo (c), el elemento h tiene una reducción final cero (o que converge a cero) módulo B, entonces se tiene que

$$h = \sum_{k\geq 1} a_k t_k f_{l_k}.$$

Como la sucesión $\{lp(t_k f_{l_k})\}_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente y $h = pf_i + qf_j$ es un S-proceso, se tiene que

$$ht\Big(\sum_{k\geq 1} a_k t_k f_{l_k}\Big) = lp(h) \succ ht(pf_i + qf_j),$$

concluyendo así la prueba de (d).
Observe que h, en su segunda representación tiene amplitud uno.

(d) $\Rightarrow$ (a) Asumiendo (d), debemos demostrar que dado un $g \in \langle B\rangle \setminus \{0\}$, existe $f \in B$ tal que $lp(f) \mid lp(g)$. Veamos:

Sea $g \in \langle B\rangle \setminus \{0\}$, en el conjunto de todas las representaciones de g como una suma

$$g = \sum_{i=1}^{s} q_i f_i \ , \ \ q_1, \ldots, q_s \in K[[\mathbf{X}]],$$

elegimos entre las que tienen altura máxima una de menor amplitud, la cual denotaremos por $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ y la denominaremos representación original de g.

Si la amplitud de $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ es uno, no hay nada que probar porque en ese caso $lp(g) = lp(h_{i_0} f_{i_0}) = lp(h_{i_0}) lp(f_{i_0})$ para algún i_0, es decir existe $f_{i_0} \in B$ tal que $lp(f_{i_0}) \mid lp(g)$.

Supongamos que la amplitud de $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ es *mayor que uno*. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $h_1 f_1$ y $h_2 f_2$ contribuyen a la altura de la suma, entonces $lp(h_1 f_1) = lp(h_2 f_2)$; luego, existe $a \in K$ tal que $S = h_1 f_1 + a h_2 f_2$ es un S-proceso del par f_1, f_2.

Observe que si $S = 0$, entonces $g = (1-a)h_2 f_2 + \sum_{i=3}^{s} h_i f_i$, esta representación de g tiene la misma altura que la representación original de g pero de una amplitud menor, lo cual es una contradicción con las hipótesis sobre $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$.

Si $S \neq 0$, asumiendo (d) existen $g_1, \ldots, g_s \in K[[\mathbf{X}]]$ tales que:

$$S = \sum_{i=1}^{s} g_i f_i, \quad \text{con } ht\Big(\sum_{i=1}^{s} g_i f_i\Big) \succ ht(h_1 f_1 + a h_2 f_2).$$

Dado que, $h_1f_1 + h_2f_2 = (S - ah_2f_2) + h_2f_2 = (1-a)h_2f_2 + \sum_{i=1}^{s} g_if_i$,
podemos escribir

$$g = (1-a)h_2f_2 + \sum_{i=1}^{s} g_if_i + \sum_{i=3}^{s} h_if_i. \tag{2.3}$$

Supongamos que $a \neq 1$, como $ht\Big(\sum_{i=1}^{s} g_if_i\Big) \succ ht(h_1f_1 + ah_2f_2) = lp(h_2f_2)$, entonces la representación de g dada en (2.3) tendrá la misma altura que la representación original de g, pero de una amplitud menor, lo cual es una contradicción con la hipótesis sobre $\sum_{i=1}^{s} h_if_i$.

Supongamos que $a = 1$, en este caso:

$$g = \sum_{i=1}^{s} g_if_i + \sum_{i=3}^{s} h_if_i. \tag{2.4}$$

(i) Si la amplitud de la representación original de g fuera *dos*, entonces la altura de la representación de g en (2.4) sería mayor que la altura de la representación original de g, pues $ht\Big(\sum_{i=1}^{s} g_if_i\Big) \succ lp(h_2f_2)$, lo cual es una contradicción con las hipótesis sobre la representación original de g.
(ii) Si la amplitud de la representación original de g fuera *mayor que dos*, entonces la altura de la representación (2.4) sería igual a la altura de la representación original de g, pero la amplitud sería menor, lo que nuevamente es una contradicción. □

Observación 2.5 *Las bases estándar resuelven el problema de determinar si $f \in I$ ó $f \notin I$, donde $I = \langle f_1, \cdots, f_r\rangle$ es un ideal de $K[[\boldsymbol{X}]]$ y $f, f_1, \cdots, f_r \in K[[\boldsymbol{X}]]$.*

En efecto, si aplicamos el algoritmo de la división en $K[[\mathbf{X}]]$ a f con $B = \{f_1, \cdots, f_r\}$ y obtenemos que la reducción final de f módulo B es cero, entonces ciertamente $f \in I$. Pero si la reducción final de f módulo B no es cero, no se puede decir nada (ver ejemplo 2.3).
Sin embargo, si B es una base estándar para el ideal I, entonces del Teorema 2.3 tenemos que $f \in I$ si y sólo si la reducción final de f módulo B es cero.

Proposición 2.1 *Si B es una base estándar para el ideal $I = \langle B\rangle$ en $K[[\boldsymbol{X}]]$, entonces la reducción completa módulo B de cualquier elemento de $K[[\boldsymbol{X}]]$ es única.*

Prueba.

Sean r_1 y r_2 dos reducciones completas módulo B del mismo elemento $g \in K[[\mathbf{X}]]$, luego $(r_1 - r_2) \in \langle B\rangle$, pues B es una base estándar para el ideal $I = \langle B\rangle$ y del Teorema 2.3(b) tenemos que cualquier reducción final de $(r_1 - r_2)$ módulo B es cero.

Supongamos que $(r_1 - r_2) \neq 0$, como B es una base estándar para el ideal $I = \langle B\rangle$ entonces existiría un elemento f en B tal que $lp(f) \mid lp(r_1 - r_2)$. Como $lp(r_1 - r_2) \in \mathbf{T}(r_1) \cup \mathbf{T}(r_2)$, obtenemos una contradicción porque r_1 y r_2 son reducciones completas de g módulo B. Luego la reducción completa módulo B de g es única. □

Observación 2.6 *Cuando se verifica la condición (c) en el Teorema* 2.3*, decimos que B es cerrado bajo la formación de S-procesos. Entonces del Teorema* 2.3 *se tiene que: un conjunto B es una base estándar para el ideal $I = \langle B\rangle$ si y sólo si B es cerrado bajo la formación de S-procesos.*

2.4 Algoritmo de Buchberger para ideales en $K[[\mathbf{X}]]$

Del Teorema 2.3 se tiene que una condición necesaria y suficiente para que un conjunto finito B sea una base estándar del ideal $\langle B\rangle$, es que cada S-proceso de cualquier par de elementos de B tiene una reducción final cero, o converge a cero módulo B. Sin embargo, como cada par dado de elementos de B puede tener infinitos S-procesos, esta condición no siempre se puede comprobar en la práctica. En esta sección veremos que es suficiente verificar la condición sobre un determinado tipo de S-proceso. Ver Hefez [11].

Definición 2.10 *Sean f y g elementos diferentes en $K[[\boldsymbol{X}]]\setminus\{0\}$ tales que $lt(f) = a\,\boldsymbol{X}^{\alpha}$ y $lt(g) = b\,\boldsymbol{X}^{\beta}$. Definimos el S-proceso mínimo de f y g de la siguiente manera:*

$$S_{min}(f,g) = b\frac{mcm\big(\boldsymbol{X}^{\alpha},\boldsymbol{X}^{\beta}\big)}{\boldsymbol{X}^{\alpha}}f - a\frac{mcm\big(\boldsymbol{X}^{\alpha},\boldsymbol{X}^{\beta}\big)}{\boldsymbol{X}^{\beta}}g.$$

Lema 2.1 *Sean $\gamma,\ \delta \in \mathbb{N}^n$ y $f, g \in K[[\boldsymbol{X}]]\setminus\{0\}$, entonces existe $\epsilon \in \mathbb{N}^n$ tal que*

$$S_{\min}\big(\boldsymbol{X}^{\gamma} f, \boldsymbol{X}^{\delta} g\big) = \boldsymbol{X}^{\epsilon}\, S_{\min}(f,g).$$

Además, si $ht\big(\boldsymbol{X}^{\gamma} f + \boldsymbol{X}^{\delta} g\big) \prec lp\big(\boldsymbol{X}^{\gamma} f + \boldsymbol{X}^{\delta} g\big)$, entonces $\boldsymbol{X}^{\gamma} f + \boldsymbol{X}^{\delta} g$ es un múltiplo escalar del S-proceso mínimo del par $\boldsymbol{X}^{\gamma} f$, $\boldsymbol{X}^{\delta} g$.

Prueba.

Sean $a, b \in K$ tales que $lt(f) = a\,lp(f)$ y $lt(g) = b\,lp(g)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
S_{\min}(\mathbf{X}^{\gamma} f, \mathbf{X}^{\delta} g) &= b\,\frac{mcm\big(\mathbf{X}^{\gamma}\,lp(f), \mathbf{X}^{\delta}\,lp(g)\big)}{\mathbf{X}^{\gamma}\,lp(f)}\,\mathbf{X}^{\gamma} f - a\,\frac{mcm\big(\mathbf{X}^{\gamma}\,lp(f), \mathbf{X}^{\delta}\,lp(g)\big)}{\mathbf{X}^{\delta}\,lp(g)}\,\mathbf{X}^{\delta} g \\
S_{\min}(\mathbf{X}^{\gamma} f, \mathbf{X}^{\delta} g) &= \frac{mcm\big(\mathbf{X}^{\gamma}\,lp(f), \mathbf{X}^{\delta}\,lp(g)\big)}{mcm(lp(f), lp(g))}\,\Big(b\,\frac{mcm(lp(f), lp(g))}{lp(f)} f - a\,\frac{mcm(lp(f), lp(g))}{lp(g)} g\Big) \\
S_{\min}(\mathbf{X}^{\gamma} f, \mathbf{X}^{\delta} g) &= \mathbf{X}^{\epsilon} S_{\min}(f,g)
\end{aligned}$$

Además, si $ht\big(\mathbf{X}^{\gamma} f + \mathbf{X}^{\delta} g\big) \prec lp\big(\mathbf{X}^{\gamma} f + \mathbf{X}^{\delta} g\big)$ entonces $a\mathbf{X}^{\gamma}\,lp(f) = -b\mathbf{X}^{\delta}\,lp(g)$, es decir $a = -b$, luego se tendría que $S_{\min}(\mathbf{X}^{\gamma} f, \mathbf{X}^{\delta} g) = b(\mathbf{X}^{\gamma} f + \mathbf{X}^{\delta} g)$. □

Proposición 2.2 *Sea $B = \{f_1, \ldots, f_s\}$ un subconjunto finito de $K[[\boldsymbol{X}]]$. Si cada S-proceso mínimo del par f_i, f_j tiene una reducción final que converge a cero módulo B, entonces B es una base estándar para el ideal $\langle B\rangle$.*

Prueba.

Sea S un S-proceso arbitrario del par $f_i,\ f_j$, dado por $S = pf_i + qf_j$, con $p, q \in K[[\mathbf{X}]]$ entonces $S = 0 \quad$ ó $\quad ht\big(pf_i + qf_j\big) \prec lp\big(pf_i + qf_j\big)$; es decir $lt\big(pf_i\big) = -lt\big(qf_j\big)$.

Así, reescribiendo S de la siguiente manera:

$$S = lt(p)f_i + lt(q)f_j + \big(p - lt(p)\big)f_i + \big(q - lt(q)\big)f_j, \tag{2.5}$$

y dado que $\quad ht\big(lt(p)f_i + lt(q)f_j\big) \prec lp\big(lt(p)f_i + lt(q)f_j\big)$, por el Lema 2.1 tenemos que $lt(p)f_i + lt(q)f_j$ es un múltiplo escalar del S-proceso mínimo del par $lt(p)f_i,\ lt(q)f_j$; además existen $c, d \in K$ y $\epsilon \in \mathbb{N}^n$ tales que $\quad lt(p)f_i + lt(q)f_j = c\, S_{\min}(lt(p)f_i, lt(q)f_j)$, es decir

$$lt(p)f_i + lt(q)f_j = d\, X^{\epsilon} S_{\min}(f_i, f_j). \tag{2.6}$$

De la hipótesis, tenemos que $S_{\min}(f_i, f_j) \xrightarrow{B_+} 0$ y usando el mismo argumento de la demostración del Teorema 2.3 ((c) $\Rightarrow$ (d)), se tiene que

$$S_{\min}(f_i, f_j) = \sum_{k\geq 1} h_k f_{l_k} \tag{2.7}$$

donde $h_k \in K[[\mathbf{X}]], f_{l_k} \in B$ y $ht\big(\sum_k h_k f_{l_k}\big) \succ ht\big(S_{\min}(f_i, f_j)\big)$.

Ahora, sustituyendo (2.7) en (2.6), y sustituyendo la expresión resultante en (2.5), obtenemos para la suma S la siguiente representación

$$S = dX^{\epsilon} \sum_{k\geq 1} h_k f_{l_k} + \big(p - lt(p)\big)f_i + \big(q - lt(q)\big)f_j,$$

la cual tiene una altura mayor que $ht(pf_i + qf_j)$; así por el Teorema 2.3 ((d) $\Rightarrow$ (a)), se concluye la afirmación. □

Ejemplo 2.5 *Cualquier conjunto finito de monomios en $K[[\boldsymbol{X}]]$ es una base estándar para el ideal que generan.*

En efecto, sea B un conjunto finito de monomios en $K[[\boldsymbol{X}]]$, como $S_{\min}(f, g) = 0$ para todo $f, g \in B$ entonces por la Proposición 2.2, B es una base estándar para el ideal $\langle B\rangle$.

Aunque los objetos con los que estamos tratando (series de potencias) no son finitos, podemos, al menos teóricamente formular un algoritmo que permita encontrar una base estándar de un ideal $I \subset K[[\mathbf{X}]]$, comenzando con un conjunto finito de generadores A de I.

Teorema 2.4 (Algoritmo de Buchberger) *Supongamos que es posible determinar una reducción final de cualquier serie de potencias dada, módulo de cualquier subconjunto finito ordenado de $K[[\boldsymbol{X}]]$. Entonces existe un algoritmo para determinar una base estándar para cualquier ideal I en $K[[\boldsymbol{X}]]$, a partir de cualquier conjunto de generadores de I.*

Prueba.

Sea I un ideal en $K[[\mathbf{X}]]$ y A un conjunto finito de generadores de I ordenado de alguna manera. Definamos la sucesión creciente $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos ordenados de I de la siguiente manera:

1. $B_0 = A$.
2. Supongamos que para $0 \leq i \leq m$ los B_i estan definidos de la siguiente forma:

   Si para algún par $f, g \in B_m$ la reducción final r_m de $S_{\min}(f, g)$ módulo B_m no es cero, defina $B_{m+1} = B_m \cup \{r_m\}$; de lo contrario poner $B_{m+1} = B_m$.

La sucesión $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ así definida es estacionaria. En efecto, si no fuera estacionaria tendríamos una sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, $r_i \in B_{i+1}\backslash B_i$ y $lp(h)$ no divide $lp(r_i)$ para todo $h \in B_i$ donde $B_i \subset B_{i+1}$, lo cual contradice el Teorema de Dickson 1.1, ya que el conjunto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{lp(r_i)\} \subset \mathbf{T}^n$ no admitiría un subconjunto finito de divisores.

Sea $B = B_N$, donde $B_m = B_N$ para todo $m \geq N$. Así, B es cerrado bajo la formación de S-procesos mínimos, entonces de la Proposición 2.2 se tiene que B es una base estándar de I. □

Observe que el algoritmo contenido en la demostración del Teorema 2.4 es:

Algoritmo de Buchberger en $K[[\mathbf{X}]]$

Entrada : A;
Defina : $B_{-1} := \emptyset$; $B_0 := A$ y $i := 0$;
Mientras $B_i \neq B_{-1}$, Hacer
    Si existen $f, g \in B_i$ tal que una reducción final R
    módulo B_i de $S_{min}(f, g)$ es diferente de cero
        Entonces
            $B_{i+1} := B_i \cup \{R\}$;
        De lo contrario
            $B_{i+1} := B_i$;
    Fin Si
        $i := i + 1$;
Fin Mientras
Salida : B_i

El algoritmo de Buchberger, en cada etapa solicita verificar si algunos elementos (los S-procesos mínimos) de un conjunto finito de $K[[\mathbf{X}]]$ tienen o no una reducción final cero módulo un conjunto finito (B_i). Una forma sistemática de hacerlo es utilizar el algoritmo de

la división en $K[[\mathbf{X}]]$, el cual puede no terminar después de un número finito de pasos; sin embargo, en varias situaciones después de un número finito de pasos en el algoritmo de la división, es posible decidir si una reducción final de un elemento dado módulo algún conjunto finito es cero o no, haciendo efectivo el algoritmo de Buchberger.

El algoritmo de Buchberger puede proporcionar varias bases estándar diferentes para un ideal de $K[[\mathbf{X}]]$. Esta diversidad de bases estándar depende esencialmente del proceso de reducción. Sin embargo, veremos una forma de eliminar las redundancias, obteniendo una base reducida única.

Proposición 2.3 *Sea $B = \{f_1, \cdots, f_s\}$ una base estándar para un ideal en $K[[\boldsymbol{X}]]$. Si existen $i, j \in \{1, 2, \cdots, s\}$ con $i \neq j$, tal que $lp(f_j) \mid lp(f_i)$, entonces $B' = B \setminus \{f_i\}$ es una base estándar para un ideal y $\langle B' \rangle = \langle B \rangle$.*

Prueba.

Como $B' = B \setminus \{f_i\}$ entonces $\langle B' \rangle \subset \langle B \rangle$ y $lp(B') \subset lp(B)$, luego $\langle \cdot lp(B) \cdot \rangle = \langle \cdot lp(B') \cdot \rangle$ y como B es base estándar, se tiene que:

$$\langle \cdot lp(B') \cdot \rangle \subset lp\big(\langle B' \rangle\big) \subset lp\big(\langle B \rangle\big) = \langle \cdot lp(B) \cdot \rangle = \langle \cdot lp(B') \cdot \rangle,$$

es decir $lp\big(\langle B' \rangle\big) = \langle \cdot lp(B') \cdot \rangle$; por tanto, B' es una base estándar.

Ahora, sea $f \in \langle B \rangle$ y sea r la reducción final de f módulo B'. Si $r \neq 0$, como $r \in \langle B \rangle \backslash \langle B' \rangle$, se tiene que $lp(r) \in lp(\langle B \rangle) = \langle \cdot lp(B) \cdot \rangle = \langle \cdot lp(B') \cdot \rangle$, entonces existe un $f_{k_0} \in B'$ y $q \in \mathbf{T}^n$ tal que $lp(r) = lp(f_{k_0})q$, lo cual es una contradicción pues r es reducción final módulo B'; por lo tanto $r = 0$, luego $f \in \langle B' \rangle$, es decir $\langle B \rangle = \langle B' \rangle$. □

Definición 2.11 *Sea B una base estándar para un ideal. Si en B no hay elementos cuyas potencias lideres se dividen entre sí, entonces decimos que B es una base estándar mínima.*

Observe que la Proposición (2.3) proporciona un método para determinar una base estándar mínima, comenzando con cualquier base estándar B.

Ejemplo 2.6 *Sea I un ideal de $K[[\boldsymbol{X}]]$. El conjunto $lp(I)$ es un monoideal de $\mathbf{T}^n$. Una base estándar mínima del ideal I puede ser obtenida considerando A el conjunto mínimo de divisores del monoideal $lp(I)$ y siendo $B \subset I$ tal que $lp(B) = A$, entonces B es una base estándar mínima para el ideal I.*

Definición 2.12 *Sea B una base estándar mínima para un ideal, B será denominada base estándar reducida si todos sus elementos son mónicos y para cualesquiera $f, g \in B$ se tiene que $lp(g) \nmid p$, para cualquier $p \in \mathbf{T}(f) \setminus \{lp(f)\}$.*

Proposición 2.4 *Sea $I \subset K[[\boldsymbol{X}]]$ un ideal entonces I tiene una única base estándar reducida.*

Prueba.

Veamos la existencia, dada una base estándar para el ideal I, usando el método descrito en la Proposición (2.3) es posible obtener una base estándar mínima para el ideal. Por otro lado, si B es una base estándar mínima de I, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todos los elementos de B son mónicos.

Para cualesquiera $f \in B$, sea r_f la reducción completa de $[f - lt(f)]$ módulo B. Si $B_0 = \{lt(f) + r_f \ ; \ f \in B\}$ entonces los elementos de B_0 son mónicos y para cualquier $h = lt(f) + r_f \in B_0$ se tiene que $\mathbf{T}(h) \setminus \{lt(h)\} = \mathbf{T}(r_f)$, entonces B_0 es una base estándar reducida de I.

Para la unicidad, sean B y B' dos bases estándar reducidas de I. Para cualquier $f' \in B'$ existen $g, h \in B$ tal que $lp(g) \,|\, lp(f')$ y $lp(f') \,|\, lp(h)$. Como B es base estándar mínima tenemos que $lp(g) \nmid lp(h)$ si $g \neq h$, se deduce que $g = h$, luego $lp(f') = lp(g)$; lo cual establece una biyección entre B y B'. En particular, toda base estándar mínima de I tiene el mismo número de elementos.

Sean $f' \in B'$ y $g \in B$ tales que $lp(f') = lp(g)$. Si $f' \neq g$, entonces $(f' - g) \in I \setminus \{0\}$, por lo tanto $p = lp(f' - g) \succ lp(f') = lp(g)$, donde $p \in \mathbf{T}(f') \cup \mathbf{T}(g)$. Dado que $(f' - g) \in I \setminus \{0\}$ y además B y B' son bases estándar para I, entonces existe un elemento en B y un elemento en B' con la misma potencia líder que divide a p, pero esto no es posible ya que B y B' son bases estándar reducidas de I. Por lo tanto $B = B'$. □

La Proposición (2.4) muestra que la base estándar reducida depende sólo del orden monomial que se fije y del ideal I, pero no del conjunto particular de generadores con el que comenzamos. Además, en la prueba de la unicidad de una base estándar reducida, mostramos que si B y B' son dos bases estándar mínimas (no necesariamente reducidas) para un ideal I, tenemos que $lp(B) = lp(B')$; aunque posiblemente $B \neq B'$, ambas tienen la misma cantidad de elementos.

Ejemplo 2.7 *Sean $f = Z^2 - 4X^9Y - X^{13} \in \mathbb{C}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}]]$ y $\mathfrak{J}(f) = \langle f, f_X, f_Y, f_Z \rangle$. Considerando el orden lexicográfico graduado en $\mathbf{T}^3$ y como $f_X = -36X^8Y - 13X^{12}$, $f_Y = -4X^9$ y $f_Z = 2Z$, todos los S-procesos mínimos entre f, f_X, f_Y y f_Z son:*

$$S_{\min}(f, f_X) = -36\frac{X^8YZ^2}{Z^2}(Z^2 - 4X^9Y - X^{13}) - \frac{X^8YZ^2}{X^8Y}(-36X^8Y - 13X^{12})$$
$$S_{\min}(f, f_Y) = 16X^{18}Y + 4X^{22}$$
$$S_{\min}(f, f_Z) = -8X^9Y - 2X^{13}$$
$$S_{\min}(f_X, f_Y) = 52X^{13}$$
$$S_{\min}(f_X, f_Z) = -26X^{12}Z$$

$S_{\min}(f_Y, f_Z) = 0$.

Aplicando el algoritmo de la división módulo $B = \{f, f_X, f_Y, f_Z\}$ *tenemos:*

$S_{\min}(f, f_X) = (13X^{12})f + (-4X^9Y - X^{13})f_X$

$S_{\min}(f, f_Y) = (-\frac{4}{9}X^{10})f_X + (\frac{4}{9}X^{13})f_Y$

$S_{\min}(f, f_Z) = (\frac{2}{9}X)f_X + (-\frac{2}{9}X^4)f_Y$

$S_{\min}(f_X, f_Y) = (-13X^4)f_Y$

$S_{\min}(f_X, f_Z) = (-13X^{12})f_Z$.

Es decir todos los S-procesos mínimos tienen reducción final cero módulo B entonces por la Proposición (2.2) B es una base estándar para $\mathfrak{I}(f)$ *y por la Proposición (2.3)* $B' = \{X^8Y, X^9, Z\}$ *es la base estándar reducida y* $\mathfrak{I}(f) = \langle X^8Y, X^9, Z\rangle$.

El siguiente ejemplo nos muestra que las bases estándar mínimas no son únicas.

Ejemplo 2.8 *Sea* $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} \subset \mathbb{Q}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]$, *donde* $f_1 = Y^7 - 2X^5Y^2 - X^9$, $f_2 = X^{10}$, $f_3 = Y^6 - X^5Y - X^7$ *y* $f_4 = Y^7 - X^5Y^2 - X^7Y + X^{10}$.

Como existe $f = Y^{12} - X^5Y^7 - X^7Y^6 \in \mathbb{Q}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]$ *con diferentes reducciones completas módulo B (ver ejemplo 2.3), entonces por el Teorema (2.3) B no es una base estándar del ideal* $\langle B\rangle$.

Ahora, aplicaremos el Algoritmo de Buchberger para obtener una base estándar para el ideal $\langle B\rangle$. *Fijemos el orden monomial lexicográfico graduado en* $\mathbf{T}^2$*; para obtener la reducción final de un elemento en* $\mathbb{Q}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]$, *usaremos el algoritmo de división en* $K[[\boldsymbol{X}]]$, *fijando el siguiente ordenamiento para los elementos de B:* f_1, f_2, f_3, f_4.

Paso 1 : *Calculamos los S-procesos mínimos y sus reducciones finales módulo B, obteniendo:*

$S_{\min}(f_1, f_2) = -2X^{15}Y^2 - X^{19} \xrightarrow{(-2X^5Y^2 - X^9)f_2} 0$

$S_{\min}(f_3, f_1) = X^5Y^2 - X^7Y + X^9$

$S_{\min}(f_1, f_4) = -X^5Y^2 + X^7Y - X^9 - X^{10}$

$S_{\min}(f_2, f_3) = X^{15}Y + X^{17} \xrightarrow{(X^5Y + X^7)f_2} 0$

$S_{\min}(f_2, f_4) = X^{15}Y^2 + X^{17}Y - X^{20} \xrightarrow{(X^5Y^2 + X^7Y - X^{10})f_2} 0$

$S_{\min}(f_3, f_4) = -X^{10} \xrightarrow{(-1)f_2} 0$.

Observe que dos de los S-procesos mínimos calculados no tienen reducción final cero módulo B, entonces definimos: $S_{\min}(f_3, f_1) = X^5Y^2 - X^7Y + X^9 =: f_5$ *y* $S_{\min}(f_1, f_4) = -X^5Y^2 + X^7Y - X^9 - X^{10} =: f_6$.

En el siguiente paso podemos continuar de dos formas diferentes, es decir, con $B_1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ *o con* $B_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_6\}$.

Paso 2 : *Si elegimos B_1, considerando los cálculos anteriores se tiene que los S-procesos mínimos $S_{\min}(f_1, f_2)$, $S_{\min}(f_3, f_1), S_{\min}(f_1, f_4), S_{\min}(f_2, f_3), S_{\min}(f_2, f_4)$ y $S_{\min}(f_3, f_4)$, tienen reducción final cero módulo B_1. Además:*

$$S_{\min}(f_1, f_5) = -2X^{10}Y^2 + X^7Y^6 - X^9Y^5 - X^{14} \xrightarrow{(-2Y^2+X^2Y-XY^4+X^3Y^3)f_2+(X^7)f_3+(-X^4Y^3)f_5} 0$$

$$S_{\min}(f_2, f_5) = X^{12}Y - X^{14} \xrightarrow{(X^2Y-X^4)f_2} 0$$

$$S_{\min}(f_3, f_5) = -X^{10}Y + X^7Y^5 - X^{12} - X^9Y^4 \xrightarrow{(-Y-X^2-XY^3)f_2+(X^3Y^3)f_5} 0$$

$$S_{\min}(f_4, f_5) = -X^{10}Y + X^7Y^5 - X^{12} - X^9Y^4 \xrightarrow{(-Y^2+X^4-XY^4+X^5+X^3Y^3)f_2+X^7f_3-X^4Y^3f_5} 0$$

Entonces $B_1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ es cerrado bajo la formación de S-procesos mínimos, luego por la Proposición (2.2), se tiene que B_1 es una base estándar para el ideal $\langle B\rangle$.

Paso 2′ : *Si elegimos B_2, procediendo como en el Paso 2, como:*

$$S_{\min}(f_1, f_6) = 2X^{10}Y^2 - X^7Y^6 + X^9Y^5 + X^{14} + X^{10}Y^5 \xrightarrow{(2Y^2-X^2Y+XY^4-X^3Y^3-X^4Y^3)f_2+(-X^7)f_3+(-X^4Y^3)f_6} 0$$

$$S_{\min}(f_2, f_6) = -X^{12}Y + X^{14} + X^{15} \xrightarrow{(-X^2Y+X^4+X^5)f_2} 0$$

$$S_{\min}(f_3, f_6) = X^{10}Y - X^7Y^5 + X^{12} + X^9Y^4 + X^{10}Y^4 \xrightarrow{(Y+X^2+Y^4+XY^5+X^2Y^3)f_2+(X^2Y^3)f_6} 0$$

$$S_{\min}(f_4, f_6) = X^{10}Y^2 - X^7Y^6 + X^{12}Y + X^9Y^5 + X^{10}Y^5 - X^{15} \xrightarrow{(Y^2+X^2Y+Y^5+XY^4-X^5+X^2Y^4)f_2+(X^2Y^4)f_6} 0$$

Entonces $B_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_6\}$ también es una base estándar para $\langle B\rangle$.

Como $lp(f_1) = lp(f_4) = Y^7, lp(f_2) = X^{10}, lp(f_3) = Y^6$ y $lp(f_5) = lp(f_6) = X^5Y^2$, por la Proposición (2.3), tenemos que $B' = \{f_2, f_3, f_5\} \subset B_1$ y $B'' = \{f_2, f_3, f_6\} \subset B_2$ son bases estándar mínimas para $\langle B\rangle$ y por la Proposición (2.4), B' es la única base estándar reducida de este tipo del ideal $\langle B\rangle$.

Capítulo 3

Aplicación de las bases estándar para ideales en $K[[\mathbf{X}]]$

En este capítulo veremos una aplicación de la base estándar orientado al cálculo de la codimensión de un ideal. Esta es una información relevante sobre una curva algebroide.

Especificamente, veremos ejemplos donde analizaremos la variación de la codimensión del ideal Jacobiano y el ideal de Tjurina o ideal Jacobiano extendido, estas codimensiones juegan un papel importante en la teoría de singularidades.

3.1 La escalera asociada a un ideal

La codimensión del ideal $I \subset K[[\mathbf{X}]]$ es la dimensión del K-espacio vectorial

$$Q = \frac{K[[\mathbf{X}]]}{I}.$$

Sea B es una base estándar para el ideal I, entonces cada elemento de Q puede representarse de modo único como $(r + I)$, donde r coincide con su reducción completa módulo B. De esta manera, tenemos que los elementos de la forma $(p + I)$, donde p es un monomio en $\mathbf{T}^n \setminus lp(I)$ forman una base de Q como un K-espacio vectorial; entonces:

$$\dim_K Q = \#\big(\mathbf{T}^n \setminus lp(I)\big).$$

Daremos una interpretación de la ecuación anterior en términos de diagramas de Newton para el caso $n = 2$. Sea I un ideal de K$[[X, Y]]$ y $B = \{f_0, \ldots, f_s\}$ una *base estándar mínima* para I. Por el ejemplo (2.6), tenemos que $lp(B)$ es el conjunto mínimo de generadores del monoideal $lp(I)$.

Considerando $lp(f_i) = X^{a_i}Y^{b_i}$, $i = 0, \ldots, s$, y como para $i \neq j$, $lp(f_i) \nmid lp(f_j)$, podemos suponer después de posiblemente un reordenamiento de los elementos de B que:

$0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_s$ y $b_0 > b_1 > \cdots > b_s \geq 0$. La *escalera asociada al monoideal* $\langle \cdot lp(B) \cdot \rangle$ es:

$$E_I = \log\left(\langle \cdot lp(B) \cdot \rangle\right) = \bigcup_{i=0}^{s} [(a_i, b_i) + \mathbb{N}^2] \subset \mathbb{N}^2,$$

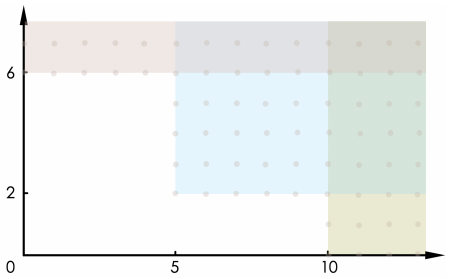
que es independiente de la base estándar mínima B, ya que $lp\big(\langle B \rangle\big) = lp(I)$. Luego, considerando $\Delta = \mathbb{N}^2 \setminus E_I$, tenemos que $\#\big(\mathbf{T}^2 \setminus lp(I)\big) = \#\Delta$; es decir, $\dim_K Q = \#\Delta$.

Así, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

Lema 3.1 *Sea $I \subset \mathrm{K}[[X, Y]]$ un ideal y $E_I = \bigcup_{i=0}^{s} \big\{(a_i, b_i) + \mathbb{N}^2\big\}$ su escalera asociada. La codimensión de I es finita si y sólo si $a_0 = b_s = 0$. En este caso,*

$$\dim_K \frac{\mathrm{K}[[X, Y]]}{I} = \sum_{i=1}^{s} a_i(b_{i-1} - b_i) = \sum_{i=1}^{s} b_{i-1}(a_i - a_{i-1}).$$

Ejemplo 3.1 *En el ejemplo (2.8) vimos que $\{X^{10}, Y^6 - X^5Y - X^7, X^5Y^2 - X^7Y + X^9\}$ es la base estándar reducida para el ideal generado por $B = \{Y^7 - 2X^5Y^2 - X^9, X^{10}, Y^6 - X^5Y - X^7, Y^7 - X^5Y^2 - X^7Y + X^{10}\}$. Por lo tanto, la escalera asociada a $\langle B \rangle$ es:*



donde $E_I = \{(0, 6) + \mathbb{N}^2\} \cup \{(5, 2) + \mathbb{N}^2\} \cup \{(10, 0) + \mathbb{N}^2\}$; en consecuencia, del Lema (3.1), la codimensión de $I = \langle B \rangle$ es:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbb{Q}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]}{I} = \sum_{i=1}^{2} a_i(b_{i-1} - b_i) = 5(6 - 2) + 10(2 - 0) = 40.$$

3.2 Ideales Jacobianos

En esta sección consideraremos K un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria, además utilizaremos los algoritmos desarrollados hasta ahora para realizar cálculos explícitos sobre los ideales Jacobianos asociados a una serie de potencias $f \in K[[\mathbf{X}]] \setminus K$ sin factores múltiples.

Denotaremos por f_{X_i} la derivada parcial de f con respecto a X_i.

Definición 3.1 *Sea $f \in K[[\boldsymbol{X}]] \setminus K$ sin factores múltiples.*

- *El ideal Jacobiano asociado a f, es el ideal*

$$J(f) = \left\langle f_{X_1}, \ldots, f_{X_n} \right\rangle \subset K[[\boldsymbol{X}]],$$

  y su codimensión se denomina número de Milnor de f, denotado por $\mu(f)$.

- *El ideal Jacobiano extendido asociado a f, es el ideal*

$$\mathcal{J}(f) = \left\langle f, f_{X_1}, \ldots, f_{X_n} \right\rangle \subset K[[\boldsymbol{X}]],$$

  y su codimensión se denomina número de Tjurina de f, denotado por $\tau(f)$.

Los números de Milnor y Tjurina no son necesariamente finitos, pues en el ejemplo (2.7) consideramos $f = Z^2 - 4X^9Y - X^{13} \in \mathbb{C}[[\mathrm{X,Y,Z}]]$, entonces $\mathcal{J}(f) = \langle f, f_X, f_Y, f_Z \rangle = \langle X^8Y, X^9, Z \rangle$ y $dim_{\mathbb{C}}\big(\frac{\mathbb{C}[[\mathrm{X,Y,Z}]]}{\mathcal{J}(f)}\big) = \#\big(\mathbf{T}^3 \setminus lp(\mathcal{J}(f)\big) = \infty$.

Cuando la característica del campo K es cero y $f \in \mathrm{K}[[X, Y]]$ no tiene factores multiples, se sabe que estos números son siempre finitos (ver por ejemplo [16]). Estos valores son importantes invariantes en la teoría de singularidades.

En los siguientes ejemplos describiremos la variación de $\tau(f)$ y $\mu(f)$ para f que varia en una familia de series de potencias en $\mathbb{C}[[\mathrm{X,Y}]]$.

Ejemplo 3.2 *Estudiaremos la familia*

$$F_a = Y^n + X^m + \sum_{in+jm>nm} a_{ij} X^i Y^j,$$

donde $a = (a_{ij})$ con $a_{ij} \in \mathbb{C}$ y $MCD(n, m) = 1$. Esta familia de series de potencias formales puede pensarse como una deformación del polinomio $F_0 = Y^n + X^m$.

Vamos a calcular $\mu(F_a) = \dim_{\mathbb{C}} \dfrac{\mathbb{C}[[\mathrm{X,Y}]]}{\left\langle (F_a)_X, (F_a)_Y \right\rangle}$, usando una base estándar para el ideal $\left\langle (F_a)_X, (F_a)_Y \right\rangle$ relativa al orden monomial ponderado en $\boldsymbol{T}^2$ dado por el vector $\gamma = (n, m)$ y el orden lexicográfico. Desde que:

$$(F_a)_X = mX^{m-1} + \sum_{(i-1)n+jm>n(m-1)} i a_{ij} X^{i-1} Y^j$$

y

$$(F_a)_Y = nY^{n-1} + \sum_{in+(j-1)m>(n-1)m} j a_{ij} X^i Y^{j-1},$$

el único S-proceso mínimo a considerar es

$S_{\min}\big((F_a)_X, (F_a)_Y\big) = nY^{n-1}(F_a)_X - mX^{m-1}(F_a)_Y$

$$S_{\min}\big((F_a)_X,(F_a)_Y\big) = \sum_{(i-1)n+(j+n-1)m>2nm-n-m} ia_{ij}X^{i-1}Y^{j+n-1} \quad - \sum_{(i+m-1)n+(j-1)m>2nm-n-m} ja_{ij}X^{i+m-1}Y^{j-1},$$

cuya potencia líder tiene un peso mayor que $\nu = 2nm - n - m$.

Observe que $lp\big((F_a)_X\big) = X^{m-1}$ *y* $lp\big((F_a)_Y\big) = Y^{n-1}$, *entonces cualquier monomio cuyo peso sea mayor que* ν *tiene una reducción módulo* $\big\{(F_a)_X,(F_a)_Y\big\}$. *En efecto, suponga que para el monomio* $X^\alpha Y^\beta$ *se tiene que*

$$w_\gamma\big(X^\alpha Y^\beta\big) > \nu\,, \tag{3.1}$$

analizando para α, *tenemos:*

1. *Si* $\alpha \geq m-1$, *el monomio tiene una reducción módulo* $\{(F_a)_X\}$.

2. *Si* $\alpha < m-1$, *podemos escribir* $\alpha = (m-1-i)$ *con* $i > 0$. *Por lo tanto la condición (3.1) implica que*
$$\beta > (n-1) + i\frac{n}{m} > n-1,$$
entonces el monomio tiene una reducción módulo $\{(F_a)_Y\}$.

Entonces el S-proceso tiene una reducción cero módulo el conjunto $\big\{(F_a)_X,(F_a)_Y\big\}$. *Por la Proposición (2.2), el conjunto* $B = \big\{(F_a)_X,(F_a)_Y\big\}$ *es una base estándar para* $J(F_a)$ *y consecuentemente del Lema (3.1) se sigue que*

$$\mu(F_a) = (n-1)(m-1).$$

Este ejemplo muestra que en particular para esta familia $\mu(F_a)$ es independiente de a, tales familias con esta característica se denominarán familias μ-constante.

Ejemplo 3.3 *Analizaremos todos los valores posibles de*

$$\tau(F_a) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[\mathrm{X},\mathrm{Y}]]}{\big\langle F_a,(F_a)_X,(F_a)_Y\big\rangle},$$

donde $F_a = Y^4 + X^9 + a_1X^7Y + a_2X^5Y^2 + a_3X^6Y^2 + a_4X^7Y^2$. *La cual es una familia particular del tipo que consideramos en el ejemplo 3.2 (con* $n = 4$ *y* $m = 9$*).*
Tenemos que

$$\begin{aligned}(F_a)_X &= 9X^8 + 7a_1X^6Y + 5a_2X^4Y^2 + 6a_3X^5Y^2 + 7a_4X^6Y^2 \quad y\\ (F_a)_Y &= 4Y^3 + a_1X^7 + 2a_2X^5Y + 2a_3X^6Y + 2a_4X^7Y\end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo de Buchberger (Teorema 2.4) al ideal Jacobiano extendido $\big\langle F_a,(F_a)_X,(F_a)_Y\big\rangle$, *tenemos:*

Paso 1 : *El S-proceso mínimo de* $B_0 = \big\{F_a,(F_a)_X,(F_a)_Y\big\}$, *así como sus reducciones finales módulo* B_0 *son:*

$$
\begin{aligned}
S_{\min}\big(F_a,(F_a)_X\big) &= 9X^{17}+9a_1X^{15}Y-7a_1X^6Y^5+\cdots+9a_4X^{15}Y^2 \xrightarrow{\{F_a,(F_a)_X,(F_a)_Y\}} 0\\
S_{\min}\big((F_a)_X,(F_a)_Y\big) &\xrightarrow{\{F_a,(F_a)_X,(F_a)_Y\}} 0\\
S_{\min}\big(F_a,(F_a)_Y\big) &= 4F_a-Y(F_a)_Y\\
&= 4X^9+3a_1X^7Y+2a_2X^5Y^2+2a_3X^6Y^2+2a_4X^7Y^2\\
&\xrightarrow{\frac{4}{9}X(F_a)_X} F_a' := -\tfrac{1}{9}a_1X^7Y-\tfrac{2}{9}a_2X^5Y^2-\tfrac{6}{9}a_3X^6Y^2-\tfrac{10}{9}a_4X^7Y^2
\end{aligned}
$$

Observe que $S_{\min}\big(F_a,(F_a)_X\big)$ *tiene reducción final cero módulo* B_0*, dado que todos sus monomios tienen peso mayor que* $\nu = 2mn-n-m = 59$ *y* $S_{\min}\big((F_a)_X,(F_a)_Y\big)$ *tiene reducción final cero como se analizó en el ejemplo (3.2).*

Paso 2 : *Analizaremos algunos casos particulares para el cálculo de* $\tau(F_a)$*:*

1. *Si* $a_1=a_2=a_3=a_4=0$*, entonces* $F_a'=0$*. Por lo tanto* B_0 *es una base estándar para* $\mathcal{J}(F_a)=\langle F_a,(F_a)_X,(F_a)_Y\rangle$ *y* $B=\{(F_a)_X,(F_a)_Y\}$ *es base estándar mínima para* $\mathcal{J}(F_a)$ *en este caso, por el Lema (3.1) tenemos* $\tau(F_a)=\mu(F_a)=24$*.*

2. *Si* $a_1=a_2=a_3=0$ *y* $a_4\neq 0$*, entonces* $F_a'=-\frac{10}{9}a_4X^7Y^2$*. Empleando el Algoritmo de Buchberger, consideremos el conjunto*

$$B_1=\big\{F_a,(F_a)_X,(F_a)_Y,F_a'\big\}$$

Los S-procesos mínimos en B_1 *son:*

$S_{min}(F_a',F_a)=\frac{10}{9}a_1X^{16}+\frac{10}{9}a_4^2X^{14}Y^2$,

$S_{min}\big(F_a',(F_a)_X\big)=\frac{70}{9}a_4^2X^6Y^4$ *y*

$S_{min}\big(F_a',(F_a)_Y\big)=\frac{20}{9}a_4^2X^{14}Y$,

los cuales tienen reducción final cero módulo B_1*, dado que sus monomios tienen pesos superiores a 59. Por lo tanto,* B_1 *es una base estándar para* $\mathcal{J}(F_a)$*. En este caso,* $\big\{(F_a)_X,(F_a)_Y,F_a'\big\}$ *es una base estándar mínima para* $\mathcal{J}(F_a)$*, consecuentemente* $\tau(F_a)=\mu(F_a)-1=23$*.*

3. *Si* $a_1=a_2=0$ *y* $a_3\neq 0$*, entonces* $F_a'=-\frac{2}{3}a_3X^6Y^2-\frac{10}{9}a_4X^7Y^2$*.*
En este caso, los S-procesos mínimos en B_1 *son:*

$S_{min}(F_a',F_a)=\frac{6}{9}a_3X^{15}-\frac{10}{9}a_4X^7Y^4+\frac{6}{9}a_3^2X^{12}Y^2+\frac{6}{9}a_3a_4X^{13}Y^2$,

$S_{min}\big(F_a',(F_a)_X\big)=-\frac{10}{9}a_4X^9Y^2+\frac{36}{9}a_3^2X^5Y^4+\frac{42}{9}a_3a_4X^6Y^4$ *y*

$S_{min}\big(F_a',(F_a)_Y\big)=-\frac{40}{9}a_4X^7Y^3+\frac{18}{9}a_3^2X^{12}Y+\frac{12}{9}a_3X^{13}Y$,

Observe que en este caso, $lp\big((F_a)_X\big)=X^8$*,* $lp\big((F_a)_Y\big)=Y^3$ *y* $lp\big(F_a'\big)=X^6Y^2$ *entonces cualquier monomio cuyo peso sea mayor que* 50 *tiene una reducción módulo* B_1*. En*

efecto, suponga que para el monomio $X^\alpha Y^\beta$ *se tiene que* $w_\gamma\big(X^\alpha Y^\beta\big) > 50$ *, analizando para* α*, tenemos:*

(a) *Si* $\alpha \geq 7$ *entonces el monomio tiene una reducción módulo* $\{F_a'\}$.

(b) *Si* $\alpha < 7$*, podemos escribir* $\alpha = 7 - i$ *con* $i > 0$ *y como el monomio tiene peso* $4\alpha + 9\beta > 50$ *entonces* $\beta \geq 3$*. Por tanto el monomio tiene una reducción módulo* $\{(F_a)_Y\}$.

Entonces B_1 *es cerrado bajo S-procesos mínimos. En este caso* $\{(F_a)_X, (F_a)_Y, (F_a')\}$ *es una base estándar mínima para* $\mathcal{J}(F_a)$*, entonces* $\tau(F_a) = \mu(F_a) - 2 = 22$.

4. *Si* $a_1 = 0$ *y* $a_2 \neq 0$*, entonces* $F_a' = -\frac{2}{9}a_2X^5Y^2 - \frac{2}{3}a_3X^6Y^2 - \frac{10}{9}a_4X^7Y^2$.
En este caso, el peso más pequeño de un S-proceso mínimo que involucra a F_a' *es mayor que 47 y cada monomio cuyo peso es mayor que 47 tiene una reducción módulo* B_1 *(para su verificación, proceder de manera similar al caso anterior), por tanto* B_1 *es una base estándar para* $\mathcal{J}(F_a) = \big\langle F_a, (F_a)_X, (F_a)_Y \big\rangle$ *y* $\tau(F_a) = \mu(F_a) - 3$.

5. *Queda analizar el caso* $a_1 \neq 0$*, es decir, cuando*

$$F_a' = -\frac{1}{9}a_1X^7Y - \frac{2}{9}a_2X^5Y^2 - \frac{6}{9}a_3X^6Y^2 - \frac{10}{9}a_4X^7Y^2$$

Los S-procesos mínimos $S_{min}(F_a', F_a)$*, y* $S_{min}\big(F_a', (F_a)_Y\big)$ *de* B_1 *tienen pesos mayores que* $\nu = 55$*, por lo que tienen reducciones finales cero módulo* $\big\{(F_a)_X, (F_a)_Y\big\}$.
Por lo tanto, es suficiente analizar el siguiente S-proceso de B_1

$$S_{min}((F_a)_X, F_a') = F_a'' := (-7a_1^2 + 18a_2)X^6Y^2 - 5a_1a_2X^4Y^3 + 54a_3X^7Y^2 - 6a_1a_3X^5Y^3 + 90a_4X^8Y^2 - 7a_1a_2X^6Y^3.$$

Tenemos ahora las siguientes posibilidades:

(a) *Si* $a_2 = \frac{7}{18}a_1^2$*, entonces el peso de este S-proceso es mayor o igual que 43.*
Observe que todo monomio de peso mayor o igual a 43 tiene una reducción final cero módulo $\big\{(F_a)_X, (F_a)_Y, F_a'\big\}$*. Entonces,* B_1 *es una base estándar para el ideal bajo consideración y tenemos* $\tau(F_a) = \mu(F_a) - 2$.

(b) *Si* $a_2 \neq \frac{7}{18}a_1^2$*, entonces en el siguiente paso del algoritmo para producir una base estándar para* $\big\langle F_a, (F_a)_X, (F_a)_Y \big\rangle$ *debe considerarse*
$F_a'' = (-7a_1^2 + 18a_2)X^6Y^2 - 5a_1a_2X^4Y^3 + 54a_3X^7Y^2 - 6a_1a_3X^5Y^3 + 90a_4X^8Y^2 - 7a_1a_2X^6Y^3$.
En este caso, cada uno de los cuatro S-procesos mínimos que involucran a F_a''

tiene un peso mayor que 46, entonces se puede verificar que tienen una reducción cero módulo $B_2 = \{F_a, (F_a)_X, (F_a)_Y, F_a', F_a''\}$, *mostrando que* B_2 *es una base estándar para el ideal* $\mathcal{J}(F_a)$, *por tanto* $\{(F_a)_X, (F_a)_Y, F_a', F_a''\}$ *es una base estándar mínima y* $\tau(F_a) = \mu(F_a) - 3$.

En el ejemplo (3.2) analizamos una familia de series de potencias en dos indeterminadas cuyo número de Milnor μ fué constante a lo largo de toda la familia (esto no es casualidad, se debe a que toda la familia de curvas tiene el mismo tipo topológico) y para esta familia en el ejemplo (3.3) analizamos la variación del número de Tjurina τ.

En el siguiente ejemplo tendremos una familia de varios números de Milnor para los cuales estudiaremos la variación del número de Tjurina en cada estrato de μ-constante.

Ejemplo 3.4 *Considerando la familia*

$$F_a = (Y^2 - X^3)^3 + \sum_{i\geq 10} a_i X^i \ \in \mathbb{C}[[X, Y]],$$

calcularemos todos los números posibles de Milnor y Tjurina para F_a *en términos de* a, *utilizando bases estándar para los ideales Jacobianos y Jacobianos extendidos de* F_a.

Fijemos en $\boldsymbol{T^2}$ *el orden ponderado dado por el vector* $\gamma = (6, 9)$, *junto con el orden lexicográfico. De esta manera tenemos:*

$$\begin{aligned} F_a &= Y^6 - 3X^3Y^4 + 3X^6Y^2 - X^9 + \sum_{i\geq 10} a_i X^i \\ (F_a)_X &= -9X^2Y^4 + 18X^5Y^2 - 9X^8 + \sum_{i\geq 10} i a_i X^{i-1} \\ (F_a)_Y &= 6Y^5 - 12X^3Y^3 + 6X^6Y \end{aligned}$$

Para calcular una base estándar para el ideal $\langle (F_a)_X, (F_a)_Y \rangle$ *usando la Proposición (2.2) sólo necesitaremos calcular reducciones finales de los* S*-procesos mínimos.*

Encontraremos ahora la base estándar del ideal jacobiano $J(F_a) = \langle (F_a)_X, (F_a)_Y \rangle$ *a partir del conjunto* $B_0 = \{(F_a)_X, (F_a)_Y\}$.

Paso 1 : *El único* S*-proceso mínimo de los elementos en* B_0 *es* F_a', *donde*
$F_a' := S_{\min}\big((F_a)_X, (F_a)_Y\big) = 6Y(F_a)_X + 9X^2(F_a)_Y = \ 6\sum_{i\geq 10} i a_i X^{i-1} Y$,
como $lp(F_a') = X^{i-1}Y$ *donde* $(i-1) \geq 9$, *por lo tanto ya no es posible realizar más reducciones módulo* B_0*; es decir* F_a' *es una reducción final módulo* B_0.

En el caso que $a_i = 0$, *para todo* $i \geq 10$, *entonces* F_a *tiene factor múltiple* $Y^2 - X^3$, *por lo tanto* $\mu(F_a) = \infty$.

Sea $j := min\big\{i \geq 10 \ ; a_i \neq 0\big\}$, *entonces para el siguiente paso en el algoritmo sería considerar el conjunto* $B_1 = \{(F_a)_X, (F_a)_Y, F_a'\}$.

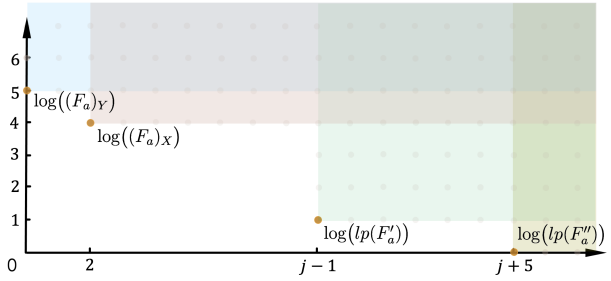
Paso 2 : *En este caso es suficiente considerar los S-procesos mínimos:* $S_{\min}\big((F_a)_X,(F_a')\big)$ *y* $S_{\min}\big((F_a)_Y,(F_a')\big)$. *Veamos,*

$$S_{\min}\big((F_a)_X,(F_a')\big)=6ja_jX^{j-3}(F_a)_X+9Y^3F_a'\xrightarrow{-18X^3YF_a'}-54ja_jX^{j+5}+\underbrace{\cdots}_{\text{términos de orden}\geq 6j+30}=:F_a''$$

Sea $X^\alpha Y^\beta$ *un monomio con orden mayor o igual a* $6j+30$, *veremos ahora que siempre es posible realizar reducciones módulo* B_1, *en efecto, supongamos que* $w_\gamma(X^\alpha Y^\beta)=6\alpha+9\beta\geq 6j+30$, *analizaremos todos los posibles casos en relación a* α *y* β*:*

1. *Si* $\beta\geq 5$, *entonces el monomio* $X^\alpha Y^\beta$ *tiene reducción módulo* $\{(F_a)_Y\}$.
2. *Si* $\beta=0$, *entonces* $\alpha\geq j+5$, *luego el monomio* $X^\alpha Y^\beta$ *tiene reducción módulo* $\{F_a''\}$.
3. *Si* $0<\beta<5$,*entonces* $\alpha\geq j+5-\frac{3}{2}\beta\geq j-1$ *por lo tanto el monomio tiene reducción módulo* $\{F_a'\}$.

Además, $S_{\min}\big((F_a)_Y,(F_a')\big)=6ja_jX^{j-1}(F_a)_Y-6Y^4F_a'$ *y los demás S-procesos mínimos que involucran a* F_a'' *tienen peso mayor o igual a* $6j+30$. *Por lo tanto de la Proposición (2.2), el conjunto* $B_2=\{(F_a)_X,(F_a)_Y,F_a',F_a''\}$ *es una base estándar para* $J(F_a)$. *Por tanto la escalera asociada al ideal* $J(F_a)$ *es:*



Un cálculo usando el Lema (3.1) muestra que el número de Milnor de F_a *es:*

$$\mu(F_a)=4(j+1).$$

Procediendo de manera análoga se muestra que el número de Tjurinauna de F_a *es:*

$$\tau(F_a)=4j-1.$$

Capítulo 4

Bases estándar para subálgebras en $K[[\mathbf{X}]]$

La teoría de bases estándar y el algoritmo de Buchberger para determinar conjuntos distinguidos de generadores de ideales en el anillo de polinomios pueden extenderse con éxito a otros sistemas algebraicos.

En [18], Robbiano y Sweedler introducen el concepto de las bases de Gröbner para subálgebras del anillo de polinomios, como una extensión del concepto bases de Gröbner para ideales en el anillo de polinomios.

El objetivo principal de este capítulo es extender los resultados de [18] al anillo de series de potencias formales sobre un campo y obtener algoritmos para calcular bases distinguidas para subálgebras completas de estos anillos. Estas bases distinguidas se denominarán bases estándar y nos permitirán calcular algunos valores numéricos asociados a este tipo de subalgebras.

4.1 Proceso de Reducción para subálgebras en $K[[\mathbf{X}]]$

Fijado un orden monomial $\preccurlyeq$ en $\mathbf{T}^n$. Empezaremos definiendo las subálgebras que consideraremos en $K[[\mathbf{X}]]$.

Sea $F = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\mathbf{X}} \setminus \{0\}$ y considere el homomorfismo sustitución:

$$\begin{aligned} S_{(f_1,\ldots,f_m)} : K[[Y_1, \ldots, Y_m]] &\longrightarrow K[[\mathbf{X}]] \\ g &\longmapsto g(f_1, \ldots, f_m) \end{aligned}$$

se tiene que $S_{(f_1,\ldots,f_m)}$ está bien definido, pues $F \subset \mathcal{M}_{\mathbf{X}} \setminus \{0\}$.

Definamos $K[[F]] := S_{(f_1,\ldots,f_m)}\big(K[[Y_1, \ldots Y_m]]\big)$, resulta que $K[[F]]$ es una K-álgebra de $K[[\mathbf{X}]]$ pues $S_{(f_1,\ldots,f_m)}$ es un morfismo de K-álgebras.

Un F-producto es un elemento de la forma

$$F^{\alpha} = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_i},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$. Si $a \in K$, entonces $a := aF^0 = a\prod_{i=1}^{m} f_i^0$; mostrando que cualquier constante es un múltiplo escalar de un F-producto.

Sea G cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{M}_{\mathbf{X}} \setminus \{0\}$. Un G-producto es un F-producto para algún subconjunto finito F de G.
Definamos $K[[G]] := \bigcup_{\substack{F \subset G \\ F \, finito}} K[[F]]$, así definido $K[[G]]$ es una K-álgebra.

De ahora en adelante, sólo llamaremos K-subálgebras de $K[[\mathbf{X}]]$ a las subálgebras completas de la forma $K[[G]]$, para algún subconjunto G de $\mathcal{M}_{\mathbf{X}} \setminus \{0\}$. Es sabido que cuando G es finito, $K[[G]]$ es ciertamente una subálgebra completa.

Definición 4.1 *Sea $G \subset \mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$, dados dos elementos $g, r \in K[[\boldsymbol{X}]]$, diremos que g se reduce a r, o que r es una reducción de g módulo G, si existen un G-producto F^{α} y $a \in K$ tales que*

$$r = g - aF^{\alpha}\ , \quad \textit{donde } r = 0 \quad o \quad lp(g) \prec lp(r).$$

En este caso escribiremos $g \xrightarrow{G} r$, y tenemos que $g - r \in K[[G]]$.

Considere ahora una cadena de reducciones

$$g \xrightarrow{G} r_1 \xrightarrow{G} r_2 \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} r_m \xrightarrow{G} \cdots$$

esto implica que existen G -productos $F_i^{\alpha^{(i)}}$ y $a_{\alpha^{(i)}} \in K \setminus \{0\}$, de manera que

$$r_m = g - \sum_{i=1}^{m} a_{\alpha^{(i)}} F_i^{\alpha^{(i)}},$$

donde, debido a la definición de reducción, tendremos que:

$$lp\big(a_{\alpha^{(1)}} F_1^{\alpha^{(1)}}\big) \prec lp\big(a_{\alpha^{(2)}} F_2^{\alpha^{(2)}}\big) \prec \cdots \tag{4.1}$$

Si la cadena en (4.1) es infinita, obtenemos la siguiente sucesión de sumas parciales en $K[[\mathbf{X}]]$ dada por:

$$s_m = \sum_{i=1}^{m} a_{\alpha^{(i)}} F_i^{\alpha^{(i)}}\ ;\ m \geq 1. \tag{4.2}$$

Cuando el conjunto G es finito, la sucesión (4.2) pasa a ser convergente en $K[[\mathbf{X}]]$, con respecto a la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica; de hecho, el conjunto $\{a_{\alpha^{(i)}} F_i^{\alpha^{(i)}},\ i \geq 1\}$ es sumable y la suma de sus elementos es el límite de la sucesión.
Cuando G es infinito, es posible que esto ya no sea cierto, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 *Fijemos el orden lexicográfico en* $\mathbf{T}^2$ *y consideremos el conjunto*

$$G = \{Y^i + X^2 \ , \ i \geq 1\}.$$

Ahora consideraremos reducciones para $g = \sum_{i\geq 1} Y^i$ *módulo* G*:*

$$g \xrightarrow{G} \Big(\sum_{i\geq 2} Y^i - X^2\Big) \xrightarrow{G} \Big(\sum_{i\geq 3} Y^i - 2X^2\Big) \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} \Big(\sum_{i\geq m} Y^i - (m-1)X^2\Big) \xrightarrow{G} \cdots$$

la cual es una cadena infinita de reducciones.

En este caso tenemos que la familia $\{Y^i + X^2 \ , \ i \geq 1\}$ *es no sumable, pues* X^2 *está presente en todos los conjuntos* $T(Y^i + X^2)$*.*

El ejemplo anterior muestra que hay que tener cuidado cuando el conjunto G es infinito, esta dificultad se evita fijando un orden en $\mathbf{T}^n$ que tenga la propiedad de finitud (ver definición 1.10), en el caso del ejemplo anterior consideramos el orden lexicográfico el cual no tiene la propiedad de finitud.

Lema 4.1 *Si el orden fijado en* $\mathbf{T}^n$ *tiene la propiedad de finitud, entonces cualquier familia* $\big\{a_{\alpha^{(i)}} F_i^{\alpha^{(i)}} \ ; \ i \geq 1\big\}$ *que satisfaga (4.1) es sumable.*

Prueba.

Sea $t \in \mathbf{T}^n$, como $lp\big(F_i^{\alpha^{(i)}}\big)$ es una sucesión estrictamente monótona en $\mathbf{T}^n$, y el orden tiene la propiedad de finitud, existen un número finito de términos que son menores que t. Esto implica que $\#\big\{i \in \mathbb{N} \ , \ t \in T\big(a_{\alpha^{(i)}} F_i^{\alpha^{(i)}}\big)\big\} < \infty$, en particular $s_m = \sum_{i=1}^m a_{\alpha^{(i)}} F_i^{\alpha^{(i)}} \ ; \ m \geq 1$ es convergente.

Por tanto, a partir de ahora asumimos que el orden fijo en $\mathbf{T}^n$ tiene la propiedad de finitud, siempre que tengamos que reducir módulo conjuntos infinitos.

Denotaremos el límite en $K[[\mathbf{X}]]$ de la sucesión $(s_m)_{m\geq 1}$, en (4.2) por s. Dado que todos los términos de la sucesión anterior están en la subálgebra completa $K[[G]]$, se tiene que $s \in K[[G]]$.

Ahora, como en el caso de los ideales, ampliaremos la noción de reducción para incluir todas las $r_m = g - s_m$ anteriores y sus límites.

De la definición de reducción, tenemos que si r es una reducción de g módulo G, entonces $g - r \in K[[G]]$.

Diremos que r es una **reducción final de** g *módulo* G si r es una reducción de g y r no tiene más reducción módulo G; es decir, $lp(r) \neq lp(F^\alpha)$ para todo G-producto F^α. En este caso denotaremos $g \xrightarrow{G_+} r$.

Si una reducción r de g es cero o $lp(F^\alpha) \notin T(r)$ para todo G-producto F^α, entonces r será denominada una **reducción completa de** g *módulo* G.

Observación 4.1 *Note que un elemento de $K[[\boldsymbol{X}]]$ se puede reducir de varias formas diferentes respecto del orden de los elementos del conjunto G.*

Por ejemplo, sea $G = \left\{ f_1 = Y^2, f_2 = Y^5 + \sum_{i=6}^{\infty} X^i \right\} \subset \mathrm{K}[[X, Y]]$ y sea el orden monomial fijado en $\mathbf{T}^2$ el orden lexicográfico graduado, el cual tiene la propiedad de finitud.
Se puede obtener dos reducciones distintas de $f = Y^{10}$ módulo G, como se muestra a continuación:

$$r_1 = f - f_1^5 = 0 \quad y \quad r_2 = f - f_2^2.$$

Por esta razón necesitamos a veces indicar por cual G-producto hemos reducido un elemento. Entonces, para este ejemplo usaremos una notación como,

$$f \xrightarrow{f_1^5} r_1 \quad y \quad f \xrightarrow{f_2^2} r_2.$$

Cuando el conjunto G es finito podemos dar una especie de algoritmo de división.

De hecho, dado un elemento $f \in K[[\mathbf{X}]]$, los G-productos que pueden reducir f módulo G son soluciones de la ecuación $lp(f) = lp(G^\alpha)$.

Desde que la ecuación anterior es equivalente a un sistema de n ecuaciones diofánticas lineales con coeficientes no negativos en las $\#G$ variables correspondientes a las entradas de α, y como estamos interesados en las soluciones no negativas, estas serán un número finito. Entonces podemos elegir, por ejemplo, la reducción de f por G^β, con

$$\beta = \min \left\{ \alpha;\, lp(G^\alpha) = lp(f) \right\},$$

donde el mínimo es tomado con respecto a un orden monomial fijo en $\mathbb{N}^{\#G}$. En nuestro ejemplo anterior $\beta = (0, 2)$.

Observación 4.2 *Nótese que una condición necesaria y suficiente para que un elemento $f \in K[[\boldsymbol{X}]]$ tenga una reducción, módulo $F = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$, es que $\mathbf{X}^\alpha = lp(f)$ pertenesca al monoide multiplicativo $\langle \mathbf{X}^{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{X}^{\alpha_m} \rangle$, donde $\mathbf{X}^{\alpha_i} = lp(f_i)$; para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, esto a su vez equivale a decir que $\alpha \in \Gamma = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$.*

En particular, si $\mathbb{N}^n \setminus \Gamma$ es finito, entonces es posible decidir después de un número finito de pasos si una reducción final de f módulo F, es cero o no.

4.2 Bases Estándar para Subálgebras

Continuaremos denotando el submonoide de $\mathbf{T}^n$ generado por $B \subset \mathbf{T}^n$ por $\langle B \rangle$, donde $\langle B \rangle = \{ b_1 \cdot b_2 \cdots b_s;\ b_i \in B \text{ y } s \geq 1 \}$.

Tenga en cuenta que si G es un subconjunto del ideal maximal $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ de $K[[\mathbf{X}]]$, que no contiene al 0, por definición tendremos que $lp(K[[G]])$ es un submonoide de $\mathbf{T}^n$ y $\langle lp(G)\rangle := \{lp(g_1)\cdot lp(g_2)\cdots lp(g_s);\ g_i \in G \text{ y } s \geq 1\ \}$ es un submonoide de $lp(K[[G]])$, en particular $\langle lp(G)\rangle \subset lp(K[[G]])$. Sin embargo, la inclusión inversa no siempre es cierta, motivando así la siguiente definición.

Definición 4.2 *Sea $A = K[[H]]$ una K-subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$, con $H \subset \mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$. Decimos que $G \subset \mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$ es una base estándar de A si*

$$K[[G]] = A \ \text{ y además } \ \big\langle lp(G)\big\rangle = lp\big(\, K[[G]]\,\big).$$

La siguiente proposición nos da un modo equivalente a la definición anterior.

Proposición 4.1 *Dada $G \subset K[[\boldsymbol{X}]]$, G es una base estándar para $K[[G]]$ si y sólo sí para todo $f \in K[[G]] \setminus \{0\}$, $lp(f) = lp\big(F^\alpha\big)$, para algún G-producto F^α.*

Prueba.

($\Leftarrow$) Será suficiente verificar que $lp(K[[G]]) \subset \langle lp(G)\rangle$, en efecto:
Sea $\mathbf{X}^\alpha \in lp\big(\, K[[G]]\,\big)$ entonces existe $h \in K[[G]]$ tal que $lp(h) = \mathbf{X}^\alpha$, luego por hipótesis existe un G-producto $F^\alpha = \prod_{i=1}^{s}(g_i)^{\alpha_i}$ tal que $lp(h) = lp\big(F^\alpha\big)$.
Entonces $\mathbf{X}^\alpha = lp\big(F^\alpha\big) = \prod_{i=1}^{s}[lp(g_i)]^{\alpha_i}$, por tanto $\mathbf{X}^\alpha \in \langle lp(G)\rangle$.

($\Rightarrow$) Es evidente de la definición de base estándar.

En este capítulo, bases estándar siempre significará base estándar de álgebras completas.

Ejemplo 4.2 *El conjunto $G = \{X_1, \ldots, X_n\}$ es una base estándar para $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ respecto a cualquier orden monomial.*

Esto es así, ya que la potencia líder de cualquier elemento en $K[[X_1, \ldots, X_n]] \setminus \{0\}$ es un G-producto.

Ejemplo 4.3 *El conjunto $G = \Big\{X^2, \sum_{i=3}^{\infty} X^i\Big\} \subset K[[X]]$ es una base estándar de $K[[G]]$.*

En efecto, si $f \in K[[G]] \setminus \{0\}$, entonces $lp(f) = 1$ o $\ lp(f) = X^\alpha$, para algún $\alpha \geq 2$. Luego,

$$lp(f) \in \big\langle X^2, X^3\big\rangle = \big\langle lp(G)\big\rangle.$$

Ejemplo 4.4 *El conjunto $G = \{X^3, X^6 + X^8\} \subset K[[X]]$ no es una base estándar de la subálgebra $K[[G]]$.*

En efecto, $f = 2X^{14} + X^{16} = (X^6 + X^8)^2 - (X^3)^4 \in K[[G]]$, pero $lp(f) = X^{14} \notin \langle X^3, X^6\rangle = \langle lp(G)\rangle$ pues $14 \notin \langle 3, 6\rangle$.

Con la definición que dimos para la base estándar, siempre existirá una base estándar para cada subálgebra completa A de $K[[\mathbf{X}]]$; dado que, toda subálgebra es una base estándar para sí misma.
Una pregunta interesante es sobre la existencia de bases estándar finitas.

En el caso que la subálgebra A no se genera de manera finita, entonces no habrá una base estándar finita para ella, restando la pregunta ¿qué se puede decir si la subálgebra es finitamente generada?, el siguente ejemplo mostrará que las bases estándar finitas no siempre existen inclusive en este caso.

Ejemplo 4.5 *Sea K cualquier campo y considere en $\mathbf{T}^2$ el orden lexicográfico graduado. Sean $B = \{Y + X, XY, X^2Y\} \subset \mathrm{K}[[X, Y]]$ y $A = K[[B]]$, veremos que A no posee ninguna base estándar finita. Ver [18].*

Afirmamos que $X^kY \in A$ para todo $k \geq 1$.

En efecto, para $k = 1$ y $k = 2$ esto es obvio; ahora si la afirmación es verdadera para $i \leq k$ con $k \geq 2$, entonces tenemos que:

$$X^{k+1}Y = (Y + X)X^kY - (XY)X^{k-1}Y \in A,$$

lo que demuestra la afirmación para todo $k \geq 1$.

Por otro lado, es fácil verificar que si $lp(f) = X^i$ para algún $i > 0$, entonces $f \notin A$, pues como $Y <_{Glex} X$, no habria forma de escribir X^i como una serie en las variables $Y + X$, XY, X^2Y.

Si A tuviera una base estándar finita F, entonces podríamos elegir un número entero j suficientemente grande tal que X^jY no sea la potencia líder de ningún elemento de F.

Dado que $X^jY \in A$ y F es una base estándar para A, existirían elementos en F tales que sus potencias líderes serían $X^{j-s}Y$ y X^i para algún $s > 0$ y algún $i > 0$. Pero, como observamos anteriormente, ningún elemento de A tiene una potencia líder de la forma X^i para $i > 0$. Por lo que, no existe una base estándar finita para A. □

Observación 4.3 *Sea A una subalgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$, tendremos que A tiene una base estándar finita como subálgebra de $K[[\boldsymbol{X}]]$ sí y sólo si el submonoide $lp(A)$ de $\mathbf{T}^n$ es finitamente generado.*
En particular, dado que cada submonoide de $\mathbf{T}^1$ es finitamente generado (ver ejemplo 1.4), se deduce que cada subálgebra de $K[[X]]$ tiene una base estándar finita.

Como en el caso de los ideales, tendremos los conceptos de base estándar mínima y reducida para subalgebras de $K[[\mathbf{X}]]$.

Definición 4.3 *Una base estándar $G \subset \mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$ de la subálgebra $K[[G]]$ se llamará mínima si para todo $g \in G$, se tiene que $lp(g) \notin \langle\, lp(G \backslash \{g\})\, \rangle$.*

Es decir $\forall g \in G : lp(g) \neq lp(F^{\alpha})$, para todo $(G - \{g\})$ producto F^{α}.

Definición 4.4 *Una base estándar mínima G se llamará reducida si todo $g \in G$ es mónico (es decir, $lt(g) = lp(g)$) y ningún elemento en $T(g) \backslash \{lp(g)\}$ es la potencia líder de un G-producto.*

Ejemplo 4.6 *El conjunto G en el ejemplo (4.2) y el ejemplo (4.3) anteriores, son bases estándar mínimas, mientras que sólo en el ejemplo (4.2) es reducida.*

Proposición 4.2 *Sea $G \subset \mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$ una base estándar para una subálgebra de $K[[\boldsymbol{X}]]$. Si $g \in G$ es tal que $lp(g) \in \big\langle lp(G')\big\rangle$, donde $G' = G \setminus \{g\}$, entonces G' es una base estándar y $K[[G']] = K[[G]]$.*

Prueba.

Está claro que $\big\langle lp(G')\big\rangle \subset \big\langle lp(G)\big\rangle$ y como $lp(g) \in \big\langle lp(G')\big\rangle$, entonces $\big\langle lp(G)\big\rangle \subset \big\langle lp(G')\big\rangle$. Así se tiene: $\big\langle lp(G')\big\rangle = \big\langle lp(G)\big\rangle = lp(K[[G]])$ (la última igualdad se tiene porque G es una base estándar). Luego

$$\big\langle lp(G')\big\rangle \subset lp\big(K[[G']]\big) \subset lp\big(\, K[[G]]\,\big) = \big\langle lp(G')\big\rangle.$$

Es decir, $\big\langle lp(G')\big\rangle = lp\big(K[[G']]\big)$; así, G' es una base estándar.

Ahora, sea $f \in K[[G]]$ y sea r la reducción final de f módulo G'. Si $r \neq 0$, entonces como $r \in K[[G]]$, de esta manera $lp(r) \in lp\big(\, K[[G]]\,\big) = \big\langle lp(G)\rangle = \big\langle lp(G')\rangle = lp\big(K[[G']]\big)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $r = 0$, luego $f \in K[[G']]$; esto muestra que $K[[G']] = K[[G]]$.

Proposición 4.3 *Cada subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$ tiene una única base estándar reducida.*

Prueba.

Veamos primero la existencia. Como toda subálgebra $K[[G]]$ es una base estándar para sí misma, por la proposición 4.1 es posible obtener una base estándar mínima. Por otro lado si G es una base estándar mínima de la subálgebra $K[[G]]$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos elementos de G son mónicos. Sea r_f la reducción completa de $f - lt(f)$ módulo G, para todo $f \in G$; entonces $G_0 = \{lt(f) + r_f : f \in G\}$ es una base estándar reducida de $K[[G]]$.

Observe que, como en la prueba de la Proposición (2.3), tenemos que todas las bases estándar mínimas de una subálgebra de $K[[\mathbf{X}]]$ tiene el mismo número de elementos y el conjunto de valores de los elementos de cualesquiera dos bases mínimas es el mismo.

Para obtener caracterizaciones para bases estándar de álgebras, similares a las de ideales, necesitamos definir los S-procesos en el contexto de las álgebras.

Definición 4.5 *Sea G cualquier subconjunto de $K[[\boldsymbol{X}]]$. Un S-proceso de G es un elemento de la forma*

$$r = aF^{\alpha} + bF^{\beta},$$

donde $a, b \in K \setminus \{0\}$ y F^{α}, F^{β} son G-productos, tal que $r = 0$ o bien

$$min\{lp(F^{\alpha}), lp(F^{\beta})\} = ht\big(aF^{\alpha} + bF^{\beta}\big) \prec lp\big(aF^{\alpha} + bF^{\beta}\big),$$

siempre que $aF^{\alpha} + bF^{\beta} \neq 0$.

Notemos que la desigualdad anterior es válida cuando $lp(F^{\alpha}) = lp(F^{\beta})$.

Ejemplo 4.7 *Sea $G = \{f = X, g = XY^3, h = Y^4 + Y^5, p = Y^6 + Y^7\} \subset \mathrm{K}[[X, Y]]$.*
Consideremos el orden lexicográfico graduado en $\mathbf{T}^2$.
Las expresiones $r_1 = h^3f^4 - g^4$ y $r_2 = p^2f^4 - g^4$ son ejemplos de S-procesos de G.

En efecto, $r_1 = h^3f^4 - g^4 = (Y^4 + Y^5)^3(X)^4 - (XY^3)^4 = 3X^4y^{13} + 3X^4y^{14} + 3X^4y^{15}$, de donde $lp(r_1) = X^4Y^{13}$ y $ht(r_1) = min\{X^4Y^{12}, X^4Y^{12}\}$, por tanto r_1 es un S-proceso de G.

Además, para el caso $r_2 = p^2f^4 - g^4 = 2X^4Y^{13} + X^4Y^{14}$, se tiene que $ht(r_2) \prec lp(r_2)$.

El siguiente teorema es el análogo para el caso de subálgebras de $K[[\mathbf{X}]]$ del Teorema (2.3) y es una adaptación al anillo de series de potencias, de los resultados dados en [18], en el contexto de anillos polinomiales.

Teorema 4.1 (Gröbner - Hironaka - Buchberger)

1. *Cada subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$ tiene una base estándar.*
2. *Dado $G \subset \mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
   (a) *G es una base estándar de subálgebras.*
   (b) *Toda reducción final módulo G de cualquier elemento de $K[[G]]$ es cero.*
   (c) *G es cerrado bajo S-procesos de G; es decir, cada S-proceso de G tiene una reducción final cero módulo G.*

(d) Todo S-proceso de G distinto de cero tiene una representación como una suma de múltiplos escalares de G-productos con amplitud uno y con una altura mayor que la altura del S-proceso mismo.

Prueba de (1).

Esto es obvio porque, como se vio anteriormente, cualquier subálgebra de $K[[\mathbf{X}]]$ es una base estándar para sí misma.

Prueba de (2).

(a)⇒(b) Suponga que G es una base estándar de álgebras y sea $f \in K[[G]]$.
Si r es una reducción final de f módulo G, entonces de la definición de reducción se sigue que $r \in K[[G]]$. Supongamos que $r \neq 0$. Dado que G es una base estándar, existe un G-producto F^α tal que $lp(r) = lp(F^\alpha)$, lo que contradice el hecho de que r es una reducción final módulo G. Por lo tanto $r = 0$.

(b)⇒(c) Sea h un S-proceso de G.
$h \in K[[G]]$, tenemos que h tiene una reducción final cero módulo G.

(c)⇒(d) Sea $h = aF^\alpha + bF^\beta \neq 0$ un S-proceso de G, por hipótesis tenemos que h tiene una reducción final cero módulo G.
Recuerde que cualquier reducción de un elemento f consiste en restar de f una suma de múltiplos escalares de G-productos, obteniendo un elemento que es cero o tiene una potencia líder mayor que la potencia líder de f. Por lo tanto, dado que h tiene una reducción final cero, podemos escribir

$$h = \sum_\gamma c_\gamma H_\gamma^\gamma,$$

donde H_γ^γ son G-productos, $c_\gamma \in K \setminus \{0\}$ y la representación anterior por construcción es de amplitud 1.
Entonces se tiene que $ht\Big(\sum_\gamma c_\gamma H_\gamma^\gamma\Big) = lp(h) > ht\big(aF^\alpha + bF^\beta\big)$, probando la afirmación.

(d)⇒(a) Será suficiente probar que todo elemento $f \in K[[G]] \setminus \{0\}$ tiene una representación como una suma de múltiplos escalares de G-productos con amplitud 1, pues esto implicaría que para cada elemento $f \in K[[G]] \setminus \{0\}$ existe un G-producto F^α tal que $lp(f) = lp(F^\alpha)$, lo que significa precisamente que G es una base estándar.

Sea $f \in K[[G]] \setminus \{0\}$ y tome una representación

$$f = \sum_\delta a_\delta F_\delta^\delta \tag{4.3}$$

donde $a_\delta \in K \setminus \{0\}$ y F_δ^δ son G-productos, de menor amplitud λ, entre aquellas representaciones con máxima altura.

Supongamos por el absurdo que $\lambda \geq 2$. Podemos suponer que $lp\big(a_\alpha F_\alpha^\alpha\big)$ y $lp\big(a_\beta F_\beta^\beta\big)$ son iguales a la altura de la suma en (4.3).

Por lo tanto, existe $b \in K$ tal que

$$h := a_\alpha F_\alpha^\alpha + b a_\beta F_\beta^\beta \tag{4.4}$$

es un S-proceso de G.

Dado que por hipótesis existen $c_\gamma \in K \setminus \{0\}$ y G-productos H_γ^γ tales que

$$h = \sum c_\gamma H_\gamma^\gamma, \tag{4.5}$$

con

$$ht\Big(\sum_\gamma c_\gamma H_\gamma^\gamma\Big) = lp(h) > ht\big(a_\alpha F_\alpha^\alpha + b a_\beta F_\beta^\beta\big).$$

Ahora, de (4.4) y (4.5), tenemos

$$a_\alpha F_\alpha^\alpha + b a_\beta F_\beta^\beta = (1-b) a_\beta F_\beta^\beta + \sum_\gamma c_\gamma H_\gamma^\gamma.$$

Entonces podemos escribir

$$f = (1-b) a_\beta F_\beta^\beta + \sum_\gamma c_\gamma H_\gamma^\gamma + \sum_{\delta \neq \alpha,\beta} a_\delta F_\delta^\delta \tag{4.6}$$

Suponga $b \neq 1$. Entonces la representación de f dada en (4.6) tendrá la misma altura que la de (4.3), pero una amplitud menor, lo cual es una contradicción.

Suponga que $b = 1$. Si la amplitud de la representación de f en (4.3) fuera dos, entonces la altura de la representación (4.6) sería mayor que la altura de (4.3), lo cual es una contradicción.

$$f := \sum_\gamma c_\gamma H_\gamma^\gamma + \sum_{\delta \neq \alpha,\beta} a_\delta F_\delta^\delta$$

Si la amplitud de la representación (4.3) de f fuera mayor que dos, entonces la altura de la representación (4.6) sería igual a la altura de (4.3), pero la amplitud sería menor, lo que nuevamente es una contradicción. □

4.3 El algoritmo de Buchberger para subalgebras en $K[[X]]$

Las caracterizaciones para bases estándar dadas en el Teorema 4.1, aunque importantes teoricamente, no sugieren ningún algoritmo para calcularlas.

Ahora vamos a presentar un criterio que conducirá a un algoritmo para determinar en un número finito de pasos, una base estándar finita para una subálgebra A, admitiendo que existe al menos una de tales bases para A.

Para hacerlo, veremos mas de cerca los S-procesos de un conjunto $G \subset K[[\mathbf{X}]]$.
Definamos

$$ord_{X_j}(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_n^{\alpha_n}) := \alpha_j.$$

Como un S-proceso de G es de la forma $S = aF^{\alpha} + bF^{\beta}$, donde $a, b \in K$ y $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ es un subconjunto finito de G, salvo constantes la existencia de un S proceso equivale a la existencia de vectores α y $\beta \in \mathbb{N}^m$, soluciones del siguiente sistema lineal de ecuaciones diofánticas homogéneas:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j ord_{X_1}\big(lp(f_j)\big) & = & \sum_{j=1}^{m} \beta_j ord_{X_1}\big(lp(f_j)\big) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j ord_{X_n}\big(lp(f_j)\big) & = & \sum_{j=1}^{m} \beta_j ord_{X_n}\big(lp(f_j)\big) \end{cases} \tag{4.7}$$

El conjunto de todas las soluciones de (4.7) es un submonoide aditivo de $\mathbb{N}^{2m}$, que por el Teorema de Dickson es generado por un conjunto finito minimal D de divisores, **estas soluciones son denominadas soluciones mínimas del sistema.**

Definición 4.6 *Dado un subconjunto finito $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ de $K[[\boldsymbol{X}]]$, los S-procesos correspondientes a las soluciones mínimas de (4.7), es decir, al conjunto D, se denominarán S-procesos mínimos de F.*

Si G es un subconjunto arbitrario de $K[[\mathbf{X}]]$, entonces definimos un S-proceso mínimo de G como un S-proceso mínimo de algún subconjunto finito F de G.

Observación 4.4 *Sean $H \subset F$ subconjuntos finitos de G. Cada S-proceso mínimo de H es también un S-proceso mínimo de F, esto se sigue de la definición de S-proceso mínimo. Lo cual muestra que la definición anterior es consistente.*

El corolario del siguiente resultado mostrará que cuando las bases estándar se caracterizan a través de propiedades de S-procesos sólo tenemos que considerar los S-procesos mínimos, que son finitos cuando tratamos con conjunto finitos.

Proposición 4.4 *Sea G un subconjunto de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$. Si cada S-proceso mínimo de G tiene una reducción final cero, entonces cada S-proceso de G tiene una representación como una suma de múltiplos escalares de G-productos con altura mayor que la altura del S-proceso.*

Prueba.

Fijemos un S-proceso de G. Sin perder generalidad, podemos suponer que módulo un factor constante, este S-proceso de G es de la forma $F^\alpha + aF^\beta$, para algún subconjunto finito F de G y donde $a \in K$ está únicamente determinado por F, α y β.

Supongamos que $S_{\delta,\theta} = F^\delta + a_{\delta,\theta}F^\theta$ representa el S-proceso mínimo de F.
Como asumimos que $S_{\delta,\theta} \xrightarrow{G_+} 0$ para algún proceso de reducción,del teorema (1), podemos escribir

$$S_{\delta,\theta} = \sum_\gamma b_\gamma F_\gamma^\gamma,$$

con amplitud 1, donde F_γ^γ son G-productos y $b_\gamma \in K$.

Entonces

$$F^\delta = -a_{\delta,\theta}F^\theta + \sum_\gamma b_\gamma F_\gamma^\gamma,$$

con

$$ht\Big(\sum_\gamma b_\gamma F_\gamma^\gamma\Big) > ht\big(F^\delta + a_{\delta,\theta}F^\theta\big).$$

Dado que la solución (α, β) del sistema (4.7) puede escribirse de la forma

$$(\alpha, \beta) = \sum_{\delta,\theta} \eta_{\delta,\theta}(\delta, \theta),$$

donde (δ, θ) son las soluciones mínimas del sistema y $\eta_{\delta,\theta} \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$F^\alpha = \prod_{\delta,\theta} \big(F^\delta\big)^{\eta_{\delta,\theta}} \quad \text{y} \quad F^\beta = \prod_{\delta,\theta} \big(F^\theta\big)^{\eta_{\delta,\theta}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F^\alpha &= \prod_{\delta,\theta} \big(F^\delta\big)^{\eta_{\delta,\theta}} = \prod_{\delta,\theta} \big(- a_{\delta,\theta}F^\delta + \sum_\gamma b_\gamma F_\gamma^\gamma\big)^{\eta_{\delta,\theta}} \\ F^\alpha &= \prod_{\delta,\theta} \big(- a_{\delta,\theta}F^\theta\big)^{\eta_{\delta,\theta}} + \sum_w b_\gamma d_w F_w^w \\ F^\alpha &= \Big(\prod_{\delta,\theta} \big(- a_{\delta,\theta}F^\delta\big)^{\eta_{\delta,\theta}}\Big)F^\beta + \sum_w b_\gamma d_w F_w^w \end{aligned}$$

donde $ht\Big(\sum_w b_\gamma d_w F_w^w\Big) > ht\big(F^\alpha + aF^\beta\big)$

Dado que la constante a está determinada de forma única, tenemos que

$$-\prod_{\delta,\theta}(-a_{\delta,\theta})^{\eta_{\delta,\theta}} = a$$

lo que implica que el S-proceso, con el que comenzamos, tiene una representación como una suma de múltiplos escalares de G-productos cuya altura es mayor que la altura del S-proceso en sí. □

De la Proposición (4.3) y del Teorema (4.1) obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 4.1 *Sea G cualquier subconjunto de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$. Entonces G es una base estándar para $K[[G]]$ si y sólo sí cada S-proceso mínimo de G tiene una reducción final cero módulo G.*

Teorema 4.2 (Algoritmo de Buchberger para Subálgebras) *Sea B un subconjunto de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{X}} \setminus \{0\}$. Entonces siempre obtendremos (teóricamente) una base estándar para* K[[B]] *de la siguiente manera:*

$Entrada:$ B;

$Defina$ $F_0 := B;\ y\ i := 0;$

$Hacer$

$S := \{s;\ s\ es\ un\ S\text{-}proceso\ mínimo\ de\ F_i\};$

$R := \{r;\ s \xrightarrow{F_{i+}} r,\ s \in S\ y\ r \neq 0\};$

$F_{i+1} := F_i \cup R;$

$i := i + 1;$

$Fin\ hacer$ $(caso\ exista)$

$Salida:$ $G := \cup_{i \geq 0} F_i$

Además, si K[[B]] *admite una base estándar finita, entonces el procedimiento anterior producirá una base estándar después de un número finito de pasos.*

Prueba.

El conjunto de salida $G = \bigcup_{i \geq 0} F_i$ es una base estándar para K[[B]].

En efecto, del Corolario (4.1), será suficiente verificar que cada S-proceso mínimo de G tiene una reducción final.

Sea S un S-proceso mínimo de G, entonces s es un S-proceso mínimo de algún subconjunto finito F de G.

Dado que F es finito, tenemos que $F \subset F_i$ para algún i. Ahora, debido a la observación (3), tenemos que s es un S-proceso mínimo de F_i. Si s se reduce a cero módulo F_i, no tenemos nada que demostrar. Si s no se reduce a cero módulo F_i, entonces por construcción de F_{i+1}, su reducción final es un elemento de F_{i+1}, por lo que se reduce a cero módulo F_{i+1}, entonces con mayor razón se reduce a cero módulo G. Esto prueba que G es una base estándar para K[[B]].

Supongamos ahora que K[[B]] tiene una base estándar finita F. Queremos mostrar que para algunos j, el conjunto finito F_j es una base estándar para K[[B]] y esto sirve para mostrar que tenemos $F_{j+1} = F_j$, para algunos j.

Sea

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_i \subset \cdots \subset G$$

Mientras $F_i \setminus F_{i-1} \neq \emptyset$, tome $r \in F_i \setminus F_{i-1}$ que es la reducción final módulo F_{i-1} de un S-proceso mínimo de F_{i-1} de menor orden. De la construcción de los conjuntos F_i, debemos tener $lp(r_i) < lp(r_{i+1})$.

Sea $m = \max\{lp(f); f \in F\}$, entonces existe un índice j tal que la potencia líder de cualquier elemento de $E := G \backslash F_j$ es mayor que m.
Luego

$$\langle lp(F)\rangle = \langle lp(G)\rangle = \langle lp(F_j) \cup lp(E)\rangle$$

Si $f \in F$, entonces de las igualdades anteriores tenemos que $lp(f) = lp\big(F_j^{\alpha} H^{\beta}\big)$, donde F_j^{α} es un F_j-producto y H^{β} es un E-producto. Pero $lp\big(H^{\beta}\big) > m$, a menos que H^{β} sea una constante. La condición $lp\big(H^{\beta}\big) > m$ no puede sostenerse por que $lp\big(H^{\beta}\big) \leq m$. Por tanto H^{β} es una constante, lo que implica que $lp(f)$ es un F_j-producto.

Hasta ahora hemos demostrado que $lp(f) \subset \langle lp(F_j)\rangle$.
Dado que F es una base estándar de K[[B]], tenemos

$$lp\big(\,\mathrm{K[[B]]}\,\big) = \langle lp(F)\rangle \subset \langle lp(F_j)\rangle \subset \langle lp\big(\,\mathrm{K[[B]]}\,\big)\rangle$$

y esto muestra que F_j es una base estándar para K[[B]]. □

Ejemplo 4.8 *Sea* $G = \{X^4, X^6 + X^7, 2X^{13} + X^{14}\}$, *el sistema correspondiente (4.7) se reduce a la ecuación:*

$$4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13\alpha_3 - 4\beta_1 - 6\beta_2 - 13\beta_3 = 0.$$

Sabiendo que el conjuto minimal de soluciones es dado por:

$$\begin{aligned} D \;=\; & \{(1,0,0,1,0,0),(3,0,0,0,2,0),(13,0,0,0,0,4),(0,2,0,3,0,0) \\ & (0,1,0,0,1,0),(0,13,0,0,0,6),(0,0,4,13,0,0),(0,0,6,0,13,0) \\ & (0,0,1,0,0,1),(2,3,0,0,0,2),(8,0,0,0,1,2),(1,0,2,0,5,0) \\ & (0,0,2,2,3,0),(0,1,2,8,0,0),(0,5,0,1,0,2),(5,1,0,0,0,2) \\ & (1,8,0,0,0,4),(0,0,2,5,1,0),(0,0,4,1,8,0)\}. \end{aligned}$$

Veremos que G es una base estándar mínima de la subalgebra $K[[G]]$.

La solución $(1,0,0,1,0,0)$ representa el S-proceso trivial $(X^4) - (X^4) = 0$, un razonamiento análogo indica que los elementos primero, quinto y noveno del conjunto D nos dan S-procesos triviales, por lo que pueden ser ignorados.

Por otro lado los elementos segundo y cuarto representan los S-procesos:

$$(X^4)^3 - (X^6 + X^7)^2 \;y\; (X^6 + X^7)^2 - (X^4)^3,$$

continuando con este razonamiento tenemos que, basta considerar un elemento de cada uno de los siguientes pares del conjunto D:

El segundo y el cuarto, el tercero y el séptimo, el sexto y el octavo, el décimo y el decimotercero, el decimoprimero y el decimocuarto, el decimosegundo y el decimoquinto, el decimosexto y el decimoctavo, el decimoséptimo y el decimonoveno.

Por lo tanto, sólo tenemos que considerar los siguientes S-procesos mínimos:

$$\begin{aligned}
(X^4)^3-(X^6+X^7)^2 &= -(2X^{13}+X^{14}) \xrightarrow{(2X^{13}+X^{14})} 0\\
16(X^4)^{13}-(2X^{13}+X^{14})^4 &= -32X^{53}-24X^{54}-8X^{55}-X^{56}\\
64(X^6+X^7)^{13}-(2X^{13}+X^{14})^6 &= 640X^{79}+4752X^{80}+18144X^{81}+\cdots+64X^{91}\\
4(X^4)^2(X^6+X^7)^3-(2X^{13}+X^{14})^2 &= 8X^{27}+11X^{28}+4X^{29}\\
4(X^4)^8-(X^6+X^7)(2X^{13}+X^{14})^2 &= -8X^{33}-5X^{34}-X^{35}\\
(X^4)(2X^{13}+X^{14})^2-4(X^6+X^7)^5 &= -16X^{31}-39X^{32}-40X^{33}-20X^{34}-4X^{35}\\
4(X^4)^5(X^6+X^7)-(2X^{13}+X^{14})^2 &= -X^{28}\\
16(X^4)(X^6+X^7)^8-(2X^{13}+X^{14})^4 &= 96X^{53}+424X^{54}+888X^{55}+\cdots+16X^{60}
\end{aligned}$$

Los cuales corresponden a los vectores : $(3,0,0,0,2,0), (13,0,0,0,0,4), (0,13,0,0,0,6), (2,3,0,0,0,2)(8,0,0,0,1,2), (1,0,2,0,5,0), (5,1,0,0,0,2), (1,8,0,0,0,4)$.

Dado que $lp(X^4)=X^4$, $lp(X^6+X^7)=X^6$ *y* $lp(2X^{13}+X^{14})=X^{13}$, *entonces cualquier potencia de* X *por encima de 15 puede obtenerse mediante G-productos, por lo tanto tenemos que todo S-proceso mínimo tiene una reducción final cero módulo* G, *de esta manera del Corolario (4.1) concluimos que* G *es una base estándar de* $\mathbb{C}[[\mathrm{G}]]$, *además por la propia defición de* G, *será una base estándar mínima.*

Ejemplo 4.9 *Sea* $A=K[[B]]\subset K[[X,Y]]$, *donde:*

$$B=\left\{f_1=X^2, f_2=\sum_{i=4}^{\infty}X^i, f_3=X^7, f_4=Y^2, f_5=Y^3+X^8\right\},$$

y considere el orden lexicográfico graduado en $\mathbf{T}^2$. *Aplicando a* B *el algoritmo de Buchberger, se tiene que todo monomio de la forma* $X^\alpha Y^\beta$ *con* $\alpha\in\langle 2,7\rangle$ *y* $\beta\in\langle 2,3\rangle$ *pertenece a* A.
De esta forma, todos los S-procesos mínimos de $F_0=B$ *tienen una reducción final cero, excepto* $f_2-f_1^2=\sum_{i=5}^{\infty}X^i$, *que coincide con su reducción final, módulo* F_0.

Por tanto para el siguiente paso, del algoritmo de Buchberger consideramos además $f_6:=f_2-f_1^2$ *y tendremos*

$$F_1=\left\{f_1=X^2, f_2=\sum_{i=4}^{\infty}X^i, f_3=X^7, f_4=Y^2, f_5=Y^3+X^8, f_6=\sum_{i=5}^{\infty}X^i\right\},$$

una simple verificación muestra que cada S-proceso mínimo de F_1 *se reduce a cero módulo* F_1. *Por lo tanto,* F_1 *es una base estándar para* A.
De acuerdo a la Proposición (4.1), tenemos que $G=\{f_1,f_4,f_5,f_6\}$ *es una base estándar*

mínima para A.
Como $X^5 = f_6 - f_1^3 - f_1 f_6 \quad y \quad Y^3 = f_5 - f_1^4$, *entonces por definición tenemos que:*
$H = \{X^2, X^5, Y^2, Y^3\}$ *es la base estándar reducida de* A.

Capítulo 5

Aplicación de las bases estándar para subálgebras en $K[[X]]$

En este capítulo usaremos la teoría de las bases estándar de subálgebras para obtener información tanto del anillo local $\mathcal{O}$ como del monoide Γ asociado a una curva algebroide irreducible.

Específicamente calcularemos un conjunto mínimo de generadores del monoide Γ y una base estándar para el anillo $\mathcal{O}$.

5.1 Monoide de valores de una curva algebroide irreducible

Definición 5.1 *Una curva algebroide irreducible o rama en $K[[\boldsymbol{X}]]$, es un ideal primo $\mathcal{C}$ de $K[[\boldsymbol{X}]]$ tal que el dominio local completo*

$$\mathcal{O} = \frac{K[[\boldsymbol{X}]]}{\mathcal{C}}, \tag{5.1}$$

tiene dimensión de Krull uno.

El anillo $\mathcal{O}$ se denominará el anillo local asociado a la curva $\mathcal{C}$, cuyo ideal maximal será denotado por $\mathcal{M}$.

Un conjunto de generadores $f_1(\mathbf{X}), \ldots, f_r(\mathbf{X})$ del ideal $\mathcal{C}$ es una ***representación cartesiana o implícita de*** $\mathcal{C}$.

Por razones de dimensión cualquier representación cartesiana de una rama $\mathcal{C}$ en $K[[\mathbf{X}]] = K[[X_1, \cdots, X_n]]$ tiene al menos $n-1$ elementos.

Definición 5.2 *Las ramas en $K[[\boldsymbol{X}]]$ que tienen al menos una representación cartesiana con exactamente $n-1$ elementos serán denominadas ramas de intersección completa*

En este trabajo a menos que se indique lo contrario las ramas siempre serán de intersección completa.

Ejemplo 5.1 (Curvas monomiales) *Una curva monomial en* $K[[\boldsymbol{X}]] = K[[X_1, \ldots, X_n]]$ *es una curva que admite una parametrización de la forma*

$$\begin{cases} x_1 &= T^{s_1} \\ \vdots & \\ x_n &= T^{s_n}. \end{cases}$$

Ejemplo 5.2 (Ramas planas) *En* $\mathrm{K}[[X, Y]]$ *una* ***rama plana*** $\mathcal{C}$ *es generada por una serie de potencias irreducible* f*; es decir, es de intersección completa.*

En el caso de curvas planas dos generadores f y g de $\mathcal{C}$ son siempre asociados, es decir existe una unidad $u \in \mathrm{K}[[X, Y]]$ tal que $g = u.f$, la relación anterior es una relación de equivalencia.

En particular, una rama plana puede ser considerada como una clase de equivalencia módulo la relación de asociado en el anillo $\mathrm{K}[[X, Y]]$.

Dada una rama $\mathcal{C}$ en $K[[\mathbf{X}]]$, puede suceder que podamos encontrar una forma lineal homogénea $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ contenida en el ideal que define la rama. **En este caso, diremos que $\mathcal{C}$ es degenerada.**

En adelante asumimos que todas las ramas son no degeneradas.

La clausura integral del anillo $\mathcal{O} = K[[x_1, \ldots, x_n]]$ en su campo de fracciones denotada por $\overline{\mathcal{O}}$, donde x_i representa la clase residual de X_i módulo $\mathcal{C}$, es isomorfo al anillo $K[[T]]$, de la inclusión de $\mathcal{O}$ en $\overline{\mathcal{O}}$ ($\simeq K[[T]]$), tenemos un monomorfismo de K-álgebras

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O} &\longrightarrow K[[T]] \\ x_i &\longmapsto p_i(T) \end{aligned} \tag{5.2}$$

La representación

$$\begin{cases} x_1 &= p_1(T) \\ \vdots & \\ x_n &= p_n(T) \end{cases}$$

se denominará *parametrización* de la rama $\mathcal{C}$, donde identificamos x_i con su imagen $\varphi(x_i) = p_i(T)$. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{O} = K[[x_1, \ldots, x_n]] \simeq \varphi(\mathcal{O}) = K[[p_1(T), \ldots, p_n(T)]] \subset K[[T]]$.

2. El campo de fracciones de $K[[p_1(T),\ldots,p_n(T)]]$ es igual a $K\big((T)\big)$ (campo de fracciones de $K[[T]]$, denominado Campo de Laurent).

Para $\overline{g}$ en $\mathcal{O}\setminus\{0\}$, $\varphi\big(\overline{g}\big)=\varphi\big(\sum_{i\geq 1} a_i\, {x_1}^{\alpha_1^i}\ldots {x_n}^{\alpha_n^i}\big)=\sum_{i\geq 1} a_i\, p_1^{\alpha_1^i}(T)\ldots p_n^{\alpha_n^i}(T)$ de este modo se da una valoración para $\overline{g}$ a partir de la valoración usual en $K[[T]]$.

Denotaremos por v la valoración usual en $K[[T]]$, es decir si $p(T)\in K[[T]]\setminus\{0\}$, escribiremos $p(T)=T^m u(T)$, donde $u(0)\neq 0$, tenemos $v\big(p(T)\big)=m$.

Dado un subanillo B de $K[[T]]$ le podemos asociar el monoide $v(B\setminus\{0\})\subset\mathbb{N}$, denominado *monoide de valores* de B. Dado que cualquier submonoide de $\mathbb{N}$ tiene un único sistema mínimo de generadores $\{v_0,v_1,\cdots,v_g\}$, el número de generadores está determinado únicamente por el submonoide, en este caso g es llamado el **género del submonoide.**

Observación 5.1 *El valor $v(\overline{g})$ como acaba de ser definido, necesita una parametrización de $\mathcal{C}$. Sin embargo, existe otra definición usando solo la representación cartesiana $f_1,\ldots,f_r$ de la rama.*

Usando álgebra lineal, es posible demostrar que $v(\varphi(\overline{g}))$ es la codimensión en $K[[\boldsymbol{X}]]$ del ideal $\langle g,f_1,\ldots,f_r\rangle$ es decir:

$$v(\varphi(\overline{g}))=dim_K\frac{K[[\boldsymbol{X}]]}{\langle g,f_1,\ldots,f_r\rangle}.$$

Con esta formulación, $v(\overline{g})$ se puede calcular usando bases estándar de ideales (ver lema 3.1).

Definición 5.3 *Definimos el **monoide de valores** de la rama $\mathcal{C}$ como*

$$v\big(\mathcal{O}\setminus\{0\}\big):=v\big(\varphi(\mathcal{O})\setminus\{0\}\big),$$

donde $\mathcal{O}$ es el anillo local de coordenadas de $\mathcal{C}$.

El género de este monoide será denominado el género de $\mathcal{C}$.

De la observación 5.1, tenemos que el monoide de valores no depende de ninguna parametrización de la curva $\mathcal{C}$, sino que está intrínsecamente asociado a ella.

Definición 5.4 *Diremos que una rama es Gorenstein si su monoide de valores es simétrico.*

Ver Definición 1.4

Definición 5.5 *Un submonoide $\langle s_1,\ldots,s_r\rangle$ de $\mathbb{N}$ será denominado monoide de una intersección completa, si la curva monomial asociada*

$$\begin{cases} x_1 &= T^{s_1}\\ \vdots & \vdots\\ x_r &= T^{s_r}\end{cases}$$

es de intersección completa en $K[[X_1, \ldots, X_r]]$.

De la Definición 5.5, si el monoide de valores de una curva es un monoide de una intersección completa, entonces la curva en sí es una intersección completa. Lo contrario de esta afirmación no es cierto, (ver Herzog [13]).

Definición 5.6 *Sea* $\Gamma = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{g} a_i v_i \ ; \ a_i \in \mathbb{N} \right\}$ *un submnoide de* $\mathbb{N}$*, donde* $v_0, \ldots, v_g$ *es su sistema mínimo de generadores. Sean* $n_0 = 1$*,* $e_0 = v_0$*,* $e_i = MCD(v_0, \ldots, v_i)$*,* $e_g = 1$ *y* $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$ *,* $i = 1, \ldots, g$*; diremos que* Γ *es fuertemente creciente si*

$$n_i v_i \in \langle v_0, \ldots, v_{i-1} \rangle \text{ y } v_i > n_{i-1} v_{i-1} \ ; \ i = 1, \ldots, g.$$

Azevedo en [1] fué el primero en observar que el monoide de valores de una rama plana es fuertemente creciente. Reciprocamente se sabe que si un submonoide Γ de $\mathbb{N}$ es fuertemente creciente, entonces existe una rama plana cuyo monoide de valores es Γ (ver Bresinsky [4], Teissier [20]).

Ejemplo 5.3 *Considere los siguientes submonoides de* $\mathbb{N}$*:*

$$\Gamma_1 = \langle 3, 4, 5 \rangle \ , \ \Gamma_2 = \langle 6, 9, 19 \rangle \ , \ \Gamma_3 = \langle 4, 6, 7 \rangle.$$

El monoide Γ_1 *tiene conductor* $c_1 = 3$*.*

En efecto para cualquier número $n \geq 6$ *tenemos que:*

$n = 5q + r$ *donde* $0 \leq r \leq 4$*,* $q \geq 1$*, es claro que si* $r \in \{0, 3, 4\}$ *tendremos que* $n \in \Gamma_1$*.*

Si $r = 1$ *consideramos* $n = 5(q-1) + 6 \in \Gamma_1$*.*

Si $r = 2$ *consideramos* $n = 5(q-1) + 7 \in \Gamma_1$*.*

Además en claro que $2 \notin \Gamma_1$*, por tanto como* $\#(\mathbb{N} \setminus \Gamma_1) = 2$ *se tiene que el monoide* Γ_1 *no es simétrico. Por lo tanto, cualquier rama cuyo monoide de valores sea* Γ_1 *no es Gorenstein.*

El monoide Γ_2 *es fuertemente creciente.*

En efecto, considerando $v_0 = 6, v_1 = 9, v_2 = 19$ *y* $n_0 = 1, e_0 = v_0 = 6$*. A partir de un cálculo, usando la definición (5.6) se obtienen los valores* $e_1 = 3, e_2 = 1, n_1 = 2$ *y* $n_2 = 3$*, verificandose que:* $n_1 v_1 \in \langle v_0 \rangle$ *,* $n_2 v_2 \in \langle v_0, v_1 \rangle$*,* $n_0 v_0 < v_1$ *y* $n_1 v_1 < v_2$*.*

Por lo tanto Γ_2 *es fuertemente creciente.*

El monoide Γ_3 *tiene conductor* $c_3 = 10$*.*

En efecto para cualquier número $n \geq 10$ *tenemos que:*

$n = 7q + r$ *donde* $0 \leq r \leq 6$*,* $q \geq 1$*, es claro que si* $r \in \{0, 4, 6\}$ *tendremos que* $n \in \Gamma_1$

Si $r = 1$ *consideramos* $n = 7(q-1) + 8 \in \Gamma_3$*.*

Si $r = 2$*, como* $n = 7q + 2 \geq 10$ *consideramos* $n = 7(q-2) + 16 \in \Gamma_3$*.*

Si $r = 3$ *consideramos* $n = 7(q-1) + 10 \in \Gamma_3$*.*

Si $r = 5$ consideramos $n = 7(q-1) + 12 \in \Gamma_3$.
Además en claro que $9 \notin \Gamma_3$, así el conductor es $c_3 = 10$.
Por tanto como $\#(\mathbb{N} \setminus \Gamma_3) = 5 = \frac{c_3}{2}$ se tiene que el monoide Γ_3 es simétrico.

Definición 5.7 *Dado un submonoide de S de $\mathbb{N}$, el entero $mult(S) := \min\{S \setminus \{0\}\}$ se denominará multiplicidad de S. La multiplicidad de una rama $\mathcal{C}$ se define como la multiplicidad de su monoide de valores y se denotará por $mult(\mathcal{C})$.*

Determinar el monoide $\Gamma = v\big(\mathcal{O} \setminus \{0\}\big)$ puede no ser sencillo, ya que en principio se debe calcular $v(\overline{g})$ para todo $\overline{g} \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$. Pero como Γ se genera finitamente, tenemos que $\mathcal{O}$, es decir, $\varphi(\mathcal{O})$, admite una base estándar finita como una subálgebra de $K[[T]]$. Luego, los valores de los elementos de una base estándar mínima de $\mathcal{O}$ forman el sistema mínimo de generadores de Γ. El Teorema (4.2) contiene un algoritmo general que permite determinar Γ.

Un ejemplo importante de un monoide con conductor lo da un monoide S de valores de una rama $\mathcal{C}$. De hecho, dado que el campo de fracciones de $\mathcal{O}$ es igual al campo de fracciones de $K[[T]]$, hay elementos f y g en $\mathcal{O}$, tal que $\frac{f}{g} = T$. Por lo tanto $v(g)$ y $v(g) + 1 = v(f)$ están en S; luego, por la Proposición 1.2, concluimos que S tiene un conductor.

Observación 5.2 *No todos los conjuntos de series de potencias $p_1(T), \ldots, p_n(T)$ tiene la propiedad que dice que el campo de fracciones de $K[[p_1(T), \ldots, p_n(T)]]$ es $K\big((T)\big)$. El conjunto T^3, T^6 es un ejemplo porque $K[[T^3, T^6]] \subset K[[T^3]] \subset K\big((T^3)\big)$.*

Un conjunto de series de potencias que tenga la propiedad anterior se denominará *conjunto primitivo.*

Recíprocamente, dado un conjunto primitivo $p_1(T), \ldots, p_n(T)$ de series de potencias, podemos asociarle la rama $\ker(\Phi)$, donde

$$\begin{aligned} \Phi : K[[X_1, \ldots, X_n]] &\longrightarrow K[[T]] \\ X_i &\longmapsto p_i(T) \end{aligned}$$

en estas condiciones tenemos que $\varphi(\mathcal{O})$ es igual al anillo $K[[p_1(T), \ldots, p_n(T)]]$, cuyo campo de fracciones es $K((T))$.

En general, puede resultar difícil verificar que un determinado conjunto de series de potencias sea primitivo, Pero si trabajamos con un tipo restringido de conjuntos, es posible obtener un criterio para decidir la primitividad o no, como veremos a continuación.

Los K-isomorfismos de $K[[T]]$ sobre $K[[T']]$ son de la forma

$$\begin{aligned} \tau : K[[T]] &\longrightarrow K[[T']] \\ p(T) &\longmapsto q(T') = p\big(\tau(T)\big) \end{aligned}$$

donde $\tau(T) = aT' + \cdots \in K[[T']]$ y $a \neq 0$.
Por tanto, desde nuestro punto de vista algebraico, vamos a permitir reparametrizar series de potencias mediante isomorfismos τ.

Entonces, dado un conjunto primitivo $p_1(T), \ldots, p_n(T)$ y τ como antes, tenemos que el conjunto

$$\begin{aligned} q_1(T') &= p_1\big(\tau(T)\big) \\ &\vdots \\ q_n(T') &= p_n\big(\tau(T)\big) \end{aligned}$$

es también primitivo. Como el par de ideales determinados en $K[[\mathbf{X}]]$ por este par de conjuntos primitivos son iguales, entonces definen la misma rama.

Proposición 5.1 *Si char(K) no divide a $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (este es siempre el caso cuando $char(K) = 0$) y u es una unidad de $K[[T]]$, entonces existe w una unidad en $K[[T]]$ tal que $w^m = u$.*

Sea $p_1(T), \ldots, p_n(T) \notin K$ un conjunto primitivo dado de series de potencias. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que el valor m de $p_1(T)$ es mínimo entre los valores de las $p_i(T)$, $i = 1, ..., n$. Así podemos escribir $p_1(T) = T^m u$, donde u es una unidad en $K[[T]]$.

Luego si $char(K)$ no divide a m, existe una unidad w en $K[[T]]$ tal que $u = w^m$.

Entonces podemos escribir $p_1(T) = (Tw)^m = [\tau(T)]^m = (T')^m$, donde $T' = \tau(T) = Tw$ con τ un isomorfismo de $K[[T]]$ sobre $K[[T']]$.

Como $p_1(T) = p_1\big(\tau^{-1}(T')\big) =: q_1(T)$, podemos transformar nuestro conjunto primitivo original en el conjunto primitivo

$$q_1(T') = p_1\big(\tau^{-1}(T')\big)\ ,\ q_2(T') = p_2\big(\tau^{-1}(T')\big)\ ,\ldots,\ q_n(T') = p_n\big(\tau^{-1}(T')\big).$$

Por tanto, si $char(K) = 0$, cualquier conjunto primitivo puede ser reparametrizado obteniendo un conjunto primitivo de la forma $q_1(T') = T'^m\ ,\ q_2(T')\ ,\ldots,\ q_n(T')$, denominado *conjunto de Puiseux*.

Un subanillo de $K[[T]]$ determinado por un conjunto de Puiseux se denomina **anillo de Puiseux** y al conjunto primitivo se le llama un **parametrización de Puiseux**.

Observación 5.3 *De lo anterior, en característica cero, el anillo local de una rama siempre se puede realizar como un anillo de Puiseux.*

Proposición 5.2 *Un conjunto de series de potencias $q_1(T) = T^m\ ,\ p_2(T)\ ,\ldots,\ p_n(T)$ es un conjunto de Puiseux si y sólo si el MCD de los valores de todos los términos de todas las series de potencias del conjunto es uno.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Si el MCD de los valores de todos los términos de la serie en el conjunto dado no es uno, entonces claramente el conjunto no es primitivo.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que el MCD es uno. Si mostramos que hay dos elementos en $\mathcal{A} = K[[p_1(T), \ldots, p_n(T)]]$ con valores consecutivos, la demostración estará terminada ya que esto implica que T pertenece al campo de fracciones de $\mathcal{A}$. Una consecuencia del próximo lema mostrará que estos dos elementos existen, concluyendo la prueba de la proposición. □

Lema 5.1 *Dado un anillo de Puiseux $\mathcal{A} = K[[p_1(T), \ldots, p_n(T)]]$, el siguiente algoritmo determina, después de un mínimo finito de pasos, elementos de $\mathcal{A}$ tales que el MCD de sus valores es uno.*

Entrada : T^m , $p_2(T), \ldots, p_n(T)$
Defina : $\{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$ = *conjunto de divisores primos de* m *y* $h_0 := T^m$;
Para j *de 1 a* r, *Hacer:*
  Elija $p_i(T)$ *con* $2 \leq i \leq n$ *tal que* π_j *no divida el valor*
    de algún término de $p_i(T)$;
  $S_k := p_i(T)$ *y* $k := 0$;
  Mientras $\pi_j \mid v(S_k)$, *Hacer*
    $S_{k+1} := S_k^\alpha - aT^{\beta m}$;
      donde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ *y* $a \in K^*$ *se determinan unívocamente de tal*
      manera que α *es mínimo y* $v(S_{k+1}) > v(S_k^\alpha) = \beta m$;
    $k := k + 1$;
  $h_j := S_k$;
Salida : $\{h_j \,; j = 0, \ldots, r\}$ *con* $MCD\big(v(h_0), v(h_1), \ldots, v(h_r)\big) = 1$

Prueba.

La existencia de $p_i(T)$, tal que π_j es coprimo con el valor de algún término de $p_i(T)$, así como la existencia de $k < \infty$ tal que $\pi_j \nmid v(s_k)$, están garantizadas pues el conjunto dado por de series de potencias es un conjunto primitivo. □

Corolario 5.1 *Dado un anillo de Puiseux $\mathcal{A} = K[[T^m, p_2(T), \ldots, p_n(T)]]$, existen dos elementos en $\mathcal{A}$ con valores consecutivos.*

Prueba.

Tome los elementos $h_0, h_1, \ldots h_r$ de $\mathcal{A}$ determinados en el Lema 5.1 y sea $w_i = v(h_i)$ para $i = 0, \ldots, r$, entonces $MCD(w_0, w_1, \ldots, w_r) = 1$ y podemos encontrar enteros α_i para $i = 0, \ldots, r$, tal que $\sum_{i=0}^{r} \alpha_i w_i = 1$.

Definamos $P = \{i\ ;\ \alpha_i \geq 0\}$ y $N = \{i\ ;\ \alpha_i < 0\}$. Podemos escribir

$$v\Big(\prod_{i\in P} h_i^{\alpha_i}\Big) = 1 + v\Big(\prod_{i\in N} h_i^{-\alpha_i}\Big),$$

y el resultado se obtiene directamente. □

Corolario 5.2 *El monoide de valores de un anillo de Puiseux tiene conductor, que es mayorizado por* $\Big(v(\prod_{i\in N} h_i^{-\alpha_i}) - 1\Big)\Big(v(\prod_{i\in N} h_i^{-\alpha_i}) + 1\Big)$*, donde los* h_i *son como en el Lema 5.1*

Prueba.

Este resultado se deriva del Corolario 5.1 y del argumento utilizado en la prueba de la Proposición 1.2. □

5.2 Bases estándar del anillo local $\mathcal{O}$

El semigrupo o monoide de valores de un germen de curva analítica plana irreducible fue tratado ya por Zariski ([23]), quien lo reconoció como un invariante discreto completo para la clasificación topológica de tales gérmenes. Es decir, dos ramas analíticas planas son topológicamente equivalentes si y sólo si sus monoides de valores son iguales.

Existen varios métodos clásicos para determinar el monoide (de valores) de una rama plana. Por ejemplo, el monoide puede determinarse mediante una resolución mínima de la singularidad de la rama. Este es un método geométrico y es el único método conocido que funciona en características arbitrarias y puede requerir cálculos prolongados. En característica cero, el monoide puede determinarse mediante la parametrización de Puiseux de la rama (ver [22]).

El algoritmo del Teorema 4.2, no sólo proporciona el monoide sino que también proporciona la base estándar para el anillo $\mathcal{O}$ que es muy importante en muchas aplicaciones.

En el caso concreto de las ramas, se demostrará la eficacia del algoritmo y se mejorará su eficiencia al eliminar varias verificaciones innecesarias.

Recordemos que en la aplicación del algoritmo del teorema (4.2), los S-procesos se obtienen mediante las soluciones mínimas de una ecuación diofántica lineal homogénea, que se puede determinar utilizando, por ejemplo, el algoritmo en [8].

Todas las ecuaciones diofánticas que tendremos que considerar son de la siguiente forma particular

$$\sum_{i=1}^{s} a_i W_i = \sum_{i=1}^{s} a_i Z_i$$

Para todo $j = 1, \ldots, s$, tenemos una solución mínima de la forma

$$(0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

donde las únicas entradas diferentes de cero están en las posiciones j y $s+j$.
Estas soluciones determinarán S-procesos que son idénticamente cero y, por lo tanto, irrelevantes.

Por otro lado, si (α, β) es una solución mínima, también lo es (β, α). Pero, estas soluciones determinan, módulo de un factor constante, mismo S-proceso. Entonces, es suficiente considerar solo uno de ellos. Entonces a partir de ahora, cuando mencionemos los S-procesos mínimos, excluiremos los triviales y las redundancias descritas anteriormente.

El algoritmo comienza tomando una representación de $\mathcal{O}$ como un subanillo $K[[F_0]]$ de $K[[T]]$ con F_0 un conjunto finito.

En el paso i, el algoritmo produce un conjunto finito F_i tal que $K[[F_0]] = K[[F_i]]$. Suponga que ese puede obtener por algún medio un mayorante c_i para el conductor c de $v(\mathcal{O})$. Por la observación (4.2) se descartará todo S-proceso mínimo de F_i que después de un número finito de reducciones tenga un valor mayor o igual a c_i, pues cualquier reducción final de estos, módulo F_i será cero.

En general esto reduce drásticamente el número de reducciones finales de S-procesos a realizar para producir el conjunto finito F_{i+1}.

Algoritmo para determinar una base estándar de $\mathcal{O}$

Entrada : $F_0 = \{p_1(T), \ldots, p_n(T)\}$
Defina : $F_{-1} := \emptyset$; $i := 0$;
Mientras $F_i \neq F_{i-1}$ Hacer
$c_i :=$ mayorante para el conductor de $\langle v(F_i) \rangle$;
$S := \{s;\ s$ es un S-proceso mínimo de F_i no calculado en el paso anterior con $v\big(ht(s)\big) < c_i - 1\}$;
$R := \{r;\ s \xrightarrow{F_{i+}} r, \forall s \in S \quad y \quad r \neq 0\}$
$F_{i+1} := F_i \cup R$;
$i := i + 1$;
Salida : $F = F_i$

Los mayorantes c_i mencionados en el algoritmo anterior deben determinarse, si es posible, independiente del algoritmo por cualquier forma no especificada (por inspección, por ejemplo); si esto no es posible, simplemente ponga $c_i = \infty$.
Si $\mathcal{O}$ tiene una representación como un anillo de Puiseux $K[[F_0]]$, con F_0 un conjunto de Puiseux, los mayorantes c_i pueden determinarse sistemáticamente usando la proposición (5.1), lema 5.1 el corolario (5.2). En muchas situaciones, como lo mostrarán los ejemplos, las c_i así obtenidas son decrecientes, lo que hace que el algoritmo sea aún más eficiente.

Ejemplo 5.4 *Sea $\mathcal{C}$ la curva monomial*

$$\begin{cases} x_1 &= T^{S_1} \\ \vdots & \\ x_n &= T^{S_n} \end{cases}$$

Dado que $G = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es cerrado bajo la formación de S-procesos, se deduce que G es una base estándar para $\mathcal{O}$.

Ejemplo 5.5 *Sea $\mathcal{C}$ una rama plana dada por la siguiente parametrización*

$$\begin{cases} x &= T^8 \\ y &= T^{10} + T^{13} \end{cases}$$

Tomando $F_0 = \{x, y\}$, el único S-proceso mínimo a considerar es $z = y^4 - x^5$.
Considerando su reducción final módulo F_0 y $char(K) = 0$, tenemos que $z = 4T^{43} + 6T^{46} + 4T^{49} + T^{52}$, entonces $F_1 = \{x, y, z\}$, así el conductor del semigrupo $\langle v(F_1)\rangle$ es 66, entonces analizando la ecuación diofántica

$$8\alpha_1 + 10\alpha_2 + 43\alpha_3 = 8\beta_1 + 10\beta_2 + 43\beta_3,$$

tendremos que cualquier reducción final de los S-procesos que genera es cero. Por lo tanto, $F_1 = \{x, y, z\}$ es una base estándar mínima para $\mathcal{O}$. Luego, el monoide de valores de la curva $\mathcal{C}$ es $\Gamma = \langle 8, 10, 43\rangle$, con su conductor 66.

Ejemplo 5.6 *Supongamos que $char(k) = 0$, y sea $\mathcal{C}$ la rama dada paramétricamente por*

$$\begin{cases} x &= T^8 + aT^{13} \\ y &= T^{10} + T^{15} \end{cases}$$

Considerando $F_0 = \{x, y\}$, el único S-proceso mínimo a considerar en el primer paso del algoritmo es $z = y^4 - x^5$.
Las posibles reducciones finales módulo F_0, según los valores de parámetro a, son

$$z = \begin{cases} (4-5a)T^{45} + (6-10a^2)T^{50} + (4-10a^3)T^{55} + (1-5a^4)T^{60} - a^5T^{65} & ; si\ a \neq \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5}T^{50} - \frac{28}{25}T^{55} - \frac{131}{125}T^{60} - \frac{1024}{3125}T^{65} \xrightarrow{\frac{2}{5}y^5} \frac{22}{25}T^{55} + \frac{369}{125}T^{60} + \frac{11476}{3125}T^{65} + 2T^{70} + \frac{2}{5}T^{75} & ; si\ a = \frac{4}{5} \end{cases}$$

En cualquier caso, no existirá ningún S-proceso mínimo relevante para ser considerado en el siguiente paso del algoritmo. De esta forma, el algoritmo termina dando la base estándar mínima $F_1 = \{x, y, z\}$ para $\mathcal{O}$. Así, los posibles monoides Γ y sus respectivos conductores son:

	Γ	c
$a \neq \frac{4}{5}$	$\langle 8, 10, 45\rangle$	68
$a = \frac{4}{5}$	$\langle 8, 10, 55\rangle$	78

Es interesante notar que el monoide Γ de la rama $\mathcal{C}$ depende de los valores del coeficiente de la parametrización. Esto solo puede suceder si la parametrización no es de Puiseux, ya que para una parametrización de Puiseux, Zariski observó que Γ es independiente de sus coeficientes (ver teorema 3.9 de [22]).

Ejemplo 5.7 *Supongamos que* $char(k) = 0$*, y sea* $\mathcal{C}$ *la siguiente parametrización de Puiseux*

$$\begin{cases} x &= T^8 \\ y &= T^{10} + T^{13} \\ z &= T^{12} + aT^{15} \end{cases}$$

Considerando $F_0 = \{x, y, z\}$ *y usando el procedimiento que describimos anteriormente para determinar una cota superior para el conductor* c*, obtenemos* $c_0 = 58$*, independientemente del valor de* a*.*

Los S-procesos mínimos y sus reducciones finales, módulo F_0, son respectivamente:

$$y^4 - x^5 = 4T^{43} + 6T^{46} + 4T^{49} + T^{52}$$

$$y^2 - xz = \begin{cases} (2-a)T^{23} + T^{26} & ; \text{si } a \neq 2 \\ T^{26} \xrightarrow{x^2y} -T^{29} & ; \text{si } a = 2 \end{cases}$$

$$z^2 - x^3 = \begin{cases} 2aT^{27} + a^2T^{30} & ; \text{si } a = 0 \\ 0 & ; \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$y^2x - x^4 = \begin{cases} (2+a)T^{35} + (1+2a)T^{38} + aT^{41} & ; \text{si } a \neq -2 \\ -3T^{38} - 2T^{41} \xrightarrow{-3xy^3} 7T^{241} + 9T^{44} + 3T^{47} & ; \text{si } a = -2 \end{cases}$$

$$z^3 - x^2y^2 = \begin{cases} (3a-2)T^{39} + (3a^2-1)T^{42} + a^3T^{45} & ; \text{si } a \neq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}T^{42} + \frac{8}{27}T^{45} \xrightarrow{\frac{1}{3}x^4y} -\frac{1}{27}T^{45} & ; \text{si } a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$z^5 - y^6 = \begin{cases} (5a-6)T^{63} + \cdots & ; \text{si } a \neq \frac{6}{5} \\ \xrightarrow{\frac{15}{25}x^2y^2} -\frac{15}{25}T^{66} + \cdots & ; \text{si } a = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Ahora analizamos todas las posibilidades de acuerdo con los valores de a.

Si $a = 0$, se tiene:

$$F_1{}^0 = \{T^8, T^{10} + T^{13}, T^{12} + aT^{15}, 4T^{43} + \cdots, 2T^{23} + T^{26}, 2T^{35} + \cdots, \\ -2T^{39} + \cdots, -4T^{51} + \cdots\}$$

Por lo tanto, $F_1 = \{T^8, T^{10} + T^{13}, T^{12}, 2T^{23} + T^{26}\}$ es una base estándar mínima para $\mathcal{O}$; en este caso, $\Gamma = \langle 8, 10, 12, 23\rangle$ y $c = 38$.

Si $a = 2$, se tiene:

$$F_1{}^0 = \{T^8, T^{10}+T^{13}, T^{12}+2T^{15}, -T^{29}, 4T^{27}+4T^{30}, 4T^{35}+5T^{38}+2T^{41}, 4T^{39}+\cdots, 4T^{51}+\cdots\}$$

$F_1 = \{T^8, T^{10} + T^{13}, T^{12} + 2T^{15}, 4T^{27} + 4T^{30}, -T^{29}\}$ es una base estándar mínima para $\mathcal{O}$; con $\Gamma = \langle 8, 10, 12, 27, 29\rangle$ y $c = 34$.

Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, entonces: $F_1 = \{T^8, T^{10} + T^{13}, T^{12} + aT^{15}, (2 - a)T^{23} + T^{26}, 2aT^{27} + a^2T^{30}\}$ es una base estándar mínima para $K[[T^8, T^{10} + T^{13}, T^{12} + aT^{15}]]$; en este caso $\Gamma = \langle 8, 10, 12, 23, 27\rangle$ y $c = 30$.

Este ejemplo ilustra el hecho conocido de que el monoide de valores Γ de una rama espacial no depende exclusivamente de los términos de una parametrización de la rama, sino que también de los coeficientes de la parametrización, incluso cuando la parametrización es un conjunto de Puiseux, en contraste con el caso plano como se observa en el ejemplo (5.6) Como vimos en el Teorema 4.1, las bases estándar para álgebras resuelven el problema de pertenencia de las subálgebras, esto se ilustra a continuación.

Ejemplo 5.8 *Supongamos que char$(K) = 0$ y sea $\mathcal{C}$ la rama del ejemplo (5.5). En este caso, $F = \{x, y, z\}$ es una base estándar mínima para $\mathcal{O}$, donde $x = T^8$, $y = T^{10} + T^{13}$ y $z = 4T^{43} + 6T^{46} + 4T^{49} + T^{52}$.*
Queremos saber si las series $g = 4T^{43}-14T^{49}-17T^{52}-6T^{55}$ y $h = 4T^{43}-13T^{49}-17T^{52}-6T^{55}$ pertenecen o no a $\mathcal{O}$. Para poder responder, es suficiente calcular una reduccion final de g y de h módulo el conjunto F. De hecho, tenemos

$$g \xrightarrow{z} -6T^{46} - 18T^{49} - 18T^{52} - 6T^{55} \xrightarrow{6x^2y^3} 0$$
$$h \xrightarrow{z} -6T^{46} - 17T^{49} - 18T^{52} - 6T^{55} \xrightarrow{6x^2y^3} T^{49}$$

por lo tanto, $g \in \mathcal{O}$ y $h \notin \mathcal{O}$.

Los ejemplos 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 anteriores muestran como calcular Γ para las ramas dadas en forma paramétrica. Cuando la rama viene dada por una representación cartesiana, también es posible realizar los cálculos como veremos a continuación.

Sea $\mathcal{C}$ una rama en $K[[\mathbf{X}]] = K[[X_1, \ldots, X_n]]$, dada por una representación cartesiana $f_1, \ldots, f_r$. Como el valor de un elemento $\overline{g} \in \mathcal{O}$ es la codimension en $K[[\mathbf{X}]]$ del ideal $I = \langle g, f_1, \ldots, f_r \rangle$, entonces se puede calcular mediante una base estándar para el ideal I. Sea $F = \{\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_s}\}$ un subconjunto de $\mathcal{M} \setminus \{0\}$, y sea $H = \{h_1, \ldots, h_s\} \subset K[[\mathbf{X}]]$. Como sabemos calcular los valores de los elementos en $\mathcal{O}$, podemos determinar todas las soluciones mínimas de la ecuación diofántica asociada a la igualdad $v(F^\alpha) = v(F^\beta)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\#F}$.

Ahora para producir el S-proceso mínimo de F, asociado a una solución mínima (α, β) de la ecuación diofántica, debemos encontrar la única $a \in K$ tal que

$$v\big(F^\alpha - aF^\beta\big) > v\big(F^\alpha\big) = v\big(F^\beta\big).$$

La constante a se puede determinar calculando una base estándar para el ideal $\big\langle f_1, \ldots, f_r, H^\alpha - aH^\beta \big\rangle$ y determinando para qué valores de a podemos tener

$$\dim_K \frac{K[[\mathbf{X}]]}{\langle f_1, \ldots, f_r, H^\alpha - aH^\beta \rangle} > \dim_K \frac{K[[\mathbf{X}]]}{\langle f_1, \ldots, f_r, H^\alpha \rangle}.$$

De la misma manera se puede realizar la reducción de un elemento de $\mathcal{O}$ módulo F. Esto es todo lo que necesitamos para aplicar el algoritmo y obtener una base estándar para $\mathcal{O}$.

Observe que, dado que solo podemos controlar los valores de los elementos, eventualmente podemos determinar una base estándar mínima para el anillo de coordenadas de una curva $\mathcal{C}$ dada por una representación cartesiana, pero no una base estándar reducida.

Ejemplo 5.9 *Suponga que* $char(K) = 0$ *y sea* $\mathcal{C}$ *la rama plana definida por*

$$f(X,Y) = Y^8 - 4X^3Y^6 - 8X^5Y^5 + (6X^6 - 26X^7)Y^4 + (16X^8 - 24X^9)Y^3 + (-4X^9 + 36X^{10} - 20X^{11})Y^2 + (-8X^{11} + 16X^{12} - 8X^{13})Y + X^{12} + 6X^{13} + 21X^{14} - X^{15}$$

Si $\overline{g} \in \mathcal{O}$, *se sabe que (ver teorema 21.19 en [19]) que*

$$v(\overline{g}) = \dim_K \frac{\mathrm{K}[[X,\, Y]]}{\langle f, g \rangle} = ord_X(R_Y(f,g)),$$

donde $R_Y(f,g)$ *es la resultante con respecto a* Y *de* f *y* g.

Aplicamos el algoritmo para obtener una base estándar para $\mathcal{O}$, *comenzando con* $F_0 = \{x, y\}$. *Como* $v(x) = 8$ *y* $v(y) = 12$, *tomaremos* $c_0 = \infty$.
El único S-proceso mínimo no trivial en este paso es de la forma $y^2 - ax^3$.
Como

$$R_Y(f, Y^2 - aX^3) = (a-1)^8 X^{24} + (a-1)^4(-52a^2 + 8a + 12)X^{25} + (-40a^5 + 494a^4 - 1256a^3 + 500a^2 + 480a + 78)X^{26} + \cdots$$

la única opción para que a obtenga un S-proceso es $a = 1$*, y de esta forma* $v(y^2 - x^3) = 26$*.*

Para el siguiente paso tomamos $F_1 = \{x, y, z = y^2 - x^3\}$*. Desde que el monoide* $\langle v(F_1)\rangle = \langle 8, 12, 26\rangle \subset v(\mathcal{O})$ *no tiene conductor, tomamos* $c_1 = \infty$*, y por lo tanto analizamos todos los S-procesos mínimos de* F_1*. Las resultantes de cada S-procesos con* f *son:*

$$\begin{aligned}
R_Y(f, Z^2 - a_1X^2Y^3) &= (a_1 - 4)^8X^{52} + (18a_1^8 + 632a_1^7 - 13156a_1^6 + 17248a_1^5 + 457280a_1^4 + \\
&\quad -1078272a_1^3 - 2153472a_1^2 - 1417216a_1 - 16384)X^{53} + \cdots \\
R_Y(f, Z^2 - a_2X^5Y) &= (a_2 - 4)^8X^{52} + (6a_2^8 - 128a_2^7 + 796a_2^6 - 2336a_2^5 + 11840a_2^4 \\
&\quad -130048a_2^3 - 384000a_2^2 - 1122304a_2 - 16384)X^{53} + \cdots \\
R_Y(f, XZ^2 - a_3Y^5) &= (a_3 - 4)^8X^{60} + (30a_3^8 + 4272a_3^7 - 44260a_3^6 - 149536a_3^5 + 2287168a_3^4 \\
&\quad -3451904a_3^3 - 7003136a_3^2 - 1712128a_3 - 16384)X^{61} + \cdots \\
R_Y(f, YZ^2 - a_4X^8) &= (a_4 - 4)^8X^{64} + (-120a_4^7 - 9956a_4^6 + 42592a_4^5 + 9792a_4^4 \\
&\quad -590848a_4^3 + 1614848a_4^2 - 2138112a_4 + 376832)X^{65} + \cdots \\
R_Y(f, Z^4 - a_5XY^8) &= (a_5 - 16)^8X^{104} + (48a_5^8 + 94584a_5^7 - 8764800a_5^6 - 55822336a_5^5 \\
&\quad +13521551360a_5^4 - 143702622208a_5^3 - 1500629696512a_5^2 \\
&\quad -929189330944a_5 - 2147483648)X^{105} + \cdots \\
R_Y(f, Z^4 - a_6X^{13}) &= (a_6 - 16)^8X^{104} + \cdots \\
R_Y(f, Z^6 - a_7Y^{13}) &= (a_7 - 64)^8X^{156} + \cdots
\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que para que las expresiones anteriores definan S-procesos, tenemos que tomar $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4$, $a_5 = a_6 = 16$ *y* $a_7 = 64$*, pero de esta forma* $v(z^2 - 4x^5y) = 53$*, y como el conductor del monoide* $\langle 8, 12, 26, 53\rangle$ *es 84, podemos descartar los tres últimos S-procesos porque sus valores superan* 84*. En el siguiente paso no habrá ningún S-proceso no trivial con una altura menor a* 84*. Entonces se deduce que*

$$F_2 = \{x, y, z = y^2 - x^3, w = z^2 - 4x^5y, u_1 = z^2 - 4x^2y^3, u_2 = xz^2 - 4y^5, u_3 = yz^2 - 14x^8\}$$

es una base estándar para $\mathcal{O}$*.*

Como $v(u_1) = v(w)$*,* $v(u_2) = v(xw)$ *y* $v(u_3) = v(yw)$*, tenemos que* $\{x, y, z, w\}$ *es una base estándar mínima para* $\mathcal{O}$*. Así el monoide de valores de* $\mathcal{C}$ *es* $\Gamma = \langle 8, 12, 26, 53\rangle$ *y* $c = 84$*.*

El método anterior puede usarse sin restricción para cualquier rama (no necesariamente plana, y en cualquier característica).

Las bases estándar mínimas del anillo local $\mathcal{O}$ de una rama $\mathcal{C}$ dependen de la representación cartesiana de $\mathcal{C}$ con la que comenzamos, pero el conjunto de valores de los elementos de una base estándar mínima para $\mathcal{C}$ no lo hace, como observamos inmediatamente

después de la proposición (4.2). Esto implica que el monoide de valores de $\mathcal{C}$ depende solo de $\mathcal{C}$ y no de la representación cartesiana de $\mathcal{C}$.

5.3 Invariantes numéricos de curvas algebroides

En esta sección, $\mathcal{C}$ será una rama plana con anillo local de coordenadas $\mathcal{O}$, monoide de valores Γ y con conductor c. Al igual que el monoide asociado a una curva algebroide irreducible $\mathcal{C}$ que representa un conjuto de valores con información de la curva podemos definir otros invariantes numéricos a sociados a $\mathcal{C}$ que además están relacionados con Γ.

Sea $\mathcal{C}$ una rama plana definida por la serie de potencias $f \in \mathrm{K}[[X, Y]]$, tiene sentido hablar de los números de Milnor y Tjurina asociados a f (ver sección 3.2). Estos números dependen de $\mathcal{C}$ y representan información topológica y analítica de la curva.

Para el caso de curvas planas se cumple que

$$\mu(f) = \dim_K \frac{\mathrm{K}[[X, Y]]}{\langle f_X, f_Y \rangle} = c.$$

Además si u es una unidad en $K[[\mathbf{X}]]$, se tiene que $\mu(f) = \mu(uf)$. Entonces la ecuación anterior muestra que $\mu(f)$ depende sólo de $\mathcal{C}$, y se llamará el **número de Milnor de** $\mathcal{C}$ y se denotará por $\mu(\mathcal{C})$.

Por otro lado, si $g = uf$, con u una unidad en $K[[\mathbf{X}]]$, entonces

$$\langle f, f_X, f_Y \rangle = \langle g, g_X, g_Y \rangle$$

y por lo tanto

$$\tau(f) = \dim_K \frac{\mathrm{K}[[X, Y]]}{\langle f, f_X, f_Y \rangle} = \dim_K \frac{\mathrm{K}[[X, Y]]}{\langle g, g_X, g_Y \rangle} = \tau(g)$$

permitiéndolos definir $\tau(\mathcal{C}) = \tau(f)$, que será llamado el **número de Tjurina** de $\mathcal{C}$.

De la observación (5.1), podemos ver a $\mathcal{O}$ como un anillo de Puiseux

$$\mathrm{K}[[X, Y]] = K[[T^{v_0}, \sum_{i \geq v_0} a_i T^i]] \subset K[[T]]$$

donde v_0 es la multiplicidad de $\mathcal{C}$.
Definamos, para $j \in \mathbb{N}$, los siguientes enteros:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= e_0 = v_0 \ , \ \eta_0 = 1, \\ \beta_j &= \min\{i \ ; \ a_i \neq 0 \ \ , \text{ y } e_{j-1} \nmid i\} \\ e_j &= MCD(e_{j-1}, \beta_j) \\ \eta_j &= \frac{e_{j-1}}{e_j} \end{aligned}$$

Como el MCD de todos los exponetes de la parametrización es 1, se sigue que existe $g \geq 1$, tal que $e_g = 1$.

El conjunto $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ es denominado **conjunto de exponentes característicos de $\mathcal{C}$**.

El monoide de valores Γ de una rama plana en característica cero está relacionado con el conjuto de exponentes característicos.

Si la rama está dada en su forma paramétricamente, Zariski en [Z4] muestra que el conjunto mínimo de generadores de Γ dado por $v_0, \ldots, v_g$ equivale al conjunto de los exponentes característicos $\beta_0, \ldots \beta_g$, como sigue:

$$v_0 = \beta_0 \ , \ v_{i+1} = \eta_i v_i + \beta_{i+1} - \beta_i \ ; \ i = 0, \ldots, g-1 \tag{5.3}$$

Si la rama $\mathcal{C}$ está dada por una representación cartesiana, entonces Dickenstein y Sessa en [DS] muestran que

$$\beta_0 = v_0 = v(X) \ , \ \beta_1 = v\big(f_Y^{(v_0-1)}\big) \ \text{ y } \ \beta_{j+1} = v\big(f_Y^{(e_j-1)}\big) - v\big(f_Y^{(e_j)}\big) \ ; \ j = 1, \ldots, g-1$$

donde

$$f = Y^{v_0} + \sum_{i=1}^{v_0} A_i(X) Y^{(v_0-i)}$$

es un polinomio de Weierstrass asociado a la curva $\mathcal{C}$ y $f_Y^{(r)}$ es la r-ésima derivada parcial de f con respecto a Y.

Capítulo 6

Bases Estándar Para Submódulos de $K[[\mathbf{X}]]$

En este capítulo presentaremos la teoría de bases estándar para submódulos en el anillo de series formales con coeficientes en un campo K.

Sea A una subálgebra completa de $K[[\mathbf{X}]]$ y sea M un A-submódulo completo de $K[[\mathbf{X}]]$.

Para el caso del anillo de polinomios $R[X_1, \ldots, X_n]$ sobre R, Miller en [15] introduce el concepto de Bases de Gröebner para subálgebras e ideales. Aquí generalizamos el resultado de Miller al caso en el que M sea un submódulo del anillo de series formales sobre un campo, a partir de ahora A denotará una subálgebra completa de $K[[\mathbf{X}]]$ con una base estándar G y M un A-submódulo completo de $K[[\mathbf{X}]]$.

En lo que sigue, continuaremos trabajando con el orden monomial en $\mathbf{T}^n$ que se usó para calcular la base estándar G de A, es decir que el orden tiene la propiedad de finitud.

Con estas condiciones tenemos que $lp(M)$ es un $lp(A)$-monomódulo.

Definición 6.1 *Si el A módulo M es generado por un conjunto H. Diremos H es una base estándar para M si para todo $m \in M \setminus \{0\}$ se tiene que $lp(m) = lp(ag)$, para algunos $a \in A$ y $g \in H$.*

Observe que, H es una base estándar para el A-módulo M si el $lp(A)$-monomódulo $lp(M)$ es generado por $lp(H)$.

Dado que G es una base estándar para A, podemos escribir cualquier $a \in A$ como $\sum_\alpha b_\alpha F_\alpha^\alpha$, donde $b_\alpha \in K$, F_α^α es un G-producto y la suma tiene amplitud uno.

Si F_α^α es el G-producto de orden mínimo en la suma anterior tendremos que $lp(a) = lp(F_\alpha^\alpha)$, por lo tanto, si G es base estándar del álgebra A, podemos reformular nuestra definición de la siguiente manera:

Un conjunto H de generadores de M sobre A es una base estándar para M, si para todo $m \in M \setminus \{0\}$,

$$lp(m) = lp(F_\alpha^\alpha g)$$

para algún G-producto F_α^α y algún $g \in H$.

Observación 6.1 *Si $M = A$, una base estándar es dada por $\{1\}$.*

Definición 6.2 *Decimos que $h \in K[[\boldsymbol{X}]]$ se reduce a r módulo (G, H) si existe $b \in K$, un G-producto F^α y $g \in H$ tal que*

$$r = h - bF^\alpha g,$$

con $lp(r) > lp(h)$, siempre que $r \neq 0$.

En este caso escribimos $h \xrightarrow{(G,H)} r$, y decimos que r es una reducción de h módulo (G, H).

Cuando r se obtiene de h a través de una cadena (posiblemente infinita) de reducciones, módulo (G, H), y no tiene más reducciones, decimos que r es una *reducción final* de h módulo (G, H) y escribiremos

$$h \xrightarrow{(G,H)_+} r.$$

Tenga en cuenta que como M es completo tenemos que $h - r \in M$, para toda r obtenida de h por cualquier cadena de reducciones. Recuerde que para tener una reducción final este bien definida cuando H es infinito debemos tomar un orden monomial en T^n que tenga la propiedad de finitud.

Como en los contextos anteriores, una reducción final r módulo (G, H) se llamará **reducción completa**, si para todo $t \in T(r)$, no podemos reducir t módulo (G, H).

Definición 6.3 *Sea A una subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con una base estándar G. Un S-proceso sobre G de un par de elementos g, h en $K[[\boldsymbol{X}]]$ es una expresión de la forma*

$$S(g, h) = aF^\alpha g + bF^\beta h,$$

donde $a, b \in K$ y F^α, F^β son G-productos, tales que:

$$lp(S(g, h)) > \min\{lp(F^\alpha g), lp(F^\beta h)\} = ht(aF^\alpha g + bF^\beta h), \text{ siempre que } S(g, h) \neq 0.$$

Definición 6.4 *Sea A una subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con base estándar G y M un A-submódulo completo de $K[[\boldsymbol{X}]]$, con base estándar H. La base H es denominada mínima si para todo $h \in H$ tenemos que:*

$$lp(h) \neq lp(F^\alpha g) \text{ para todo } g \in (H \setminus \{h\}) \text{ y } G\text{-producto } F^\alpha.$$

Definición 6.5 *Una base estándar mínima H de M será denominada reducida si todo elemento $h \in H$ es mónico y además cualquier $t \in (T(h) \setminus lp(h))$ no tiene reducciones módulo (G, H).*

Es decir, la base estándar mínima H será reducida si todo $g \in H$ es mónico y además para $t \in (T(g) \setminus lp(g))$ se tiene que $t \neq lp(F^\alpha h)$ para todo $h \in H$ y todo G-producto F^α.

El siguiente teorema garantizará la existencia de bases estándar para los módulos y al mismo tiempo dará varias caraterizaciones para los mismos.

Teorema 6.1 (Gröbner - Hironaka - Buchberger) *Sea A una subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con base estándar G.*

1. *Todo A-submódulo completo M de $K[[\boldsymbol{X}]]$ tiene una base estándar.*
2. *Dado un subconjunto no vacío H de $K[[\boldsymbol{X}]]$, tal que el A-submódulo $M = \langle H \rangle$ es completo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   a) *H es una base estándar para M.*
   b) *Toda reducción final módulo (G, H), de cualquier elemento de M es cero.*
   c) *H es cerrado bajo S-procesos sobre G, es decir, todo S-proceso sobre G de cualquier par de elementos de H tiene una reducción final nula módulo (G, H).*
   d) *Todo S-proceso sobre G diferente de cero de cualquier par de elementos de H tiene una representación de la forma $\sum_\alpha b_\alpha F_\alpha^\alpha h_\alpha$, donde $b_\alpha \in K$, F_α^α es un G-producto y $h_\alpha \in H$, con altura mayor que la altura del propio S-proceso.*

Prueba de (1).

Como M es una base estándar para sí misma, (1) es cierto.

Prueba de (2).

(a)⇒(b) Suponga que H es una base estándar para M. Sea $m \in M$ y r una reducción final de m módulo (G, H), entonces de la definición de reducción se sigue que $r \in M$. Supongamos que $r \neq 0$, dado que H es una base estándar para M, existe un G-producto F^α y $h \in H$ tal que $lp(r) = lp(F^\alpha h)$, lo que contradice el hecho de que r es una reducción final módulo (G, H); por lo tanto $r = 0$.

(b)⇒(c) Sea s un S-proceso de un par de elementos de H sobre G. Como $s \in M$, tenemos que s tiene una reducción final cero módulo (G, H).

(c)⇒(d) Sea $s = aF^\alpha h + bF^\beta g \neq 0$ un S-proceso del par de elementos h, g de H sobre G, con una reducción final cero módulo (G, H).

Como cualquier reducción de un elemento f consiste en restar de f un múltiplo escalar de un G-producto por un elemento de H, obteniendo un elemento que es cero o tiene una potencia líder mayor que la potencia líder de f. Por lo tanto, dado que s tiene una reducción final cero, podemos escribir

$$s = \sum_{\gamma} c_\gamma L_\gamma^\gamma h_\gamma,$$

donde los $c_\gamma \in K \setminus \{0\}$, L_γ^γ son G-productos y $h_\gamma \in H$, con amplitud uno.
Entonces se tiene que $ht\Big(\sum_{\gamma} c_\gamma L_\gamma^\gamma h_\gamma\Big) = lp(s) > ht\big(aF^\alpha h + bF^\beta g\big)$; así, (d) queda demostrado.

(d)⇒(a) Será suficiente probar que todo elemento $m \in M \setminus \{0\}$ tiene una representación de la forma $\sum_\alpha b_\alpha F_\alpha^\alpha h_\alpha$, con amplitud uno, donde $b_\alpha \in K \setminus \{0\}$, los F_α^α son G-productos y $h_\alpha \in H$. Es decir que para cada elemento $m \in M \setminus \{0\}$ existe un G-producto F^α y $h \in H$ tal que $lp(m) = lp(F^\alpha h)$, esto significa que H es una base estándar para M.

Sea $m \in M \setminus \{0\}$, como M es generado por H, tomemos una representación

$$m = \sum_{\delta} a_\delta F_\delta^\delta h_\delta, \tag{6.1}$$

de menor amplitud λ, entre aquellas representaciones con máxima altura, donde $a_\delta \in K \setminus \{0\}$ y F_δ^δ son G-productos y $h_\delta \in H$.

Supongamos que $\lambda \geq 2$. Podemos suponer que $lp\big(a_\alpha F_\alpha^\alpha h_\alpha\big)$ y $lp\big(a_\beta F_\beta^\beta h_\beta\big)$ son iguales a la altura de la suma en (6.1). Por lo tanto, existe $b \in K$ tal que

$$s := a_\alpha F_\alpha^\alpha h_\alpha + b\ a_\beta F_\beta^\beta h_\beta \tag{6.2}$$

es un S-proceso del par $h_\alpha,\ h_\beta$ en H sobre G.
Por hipótesis existen $c_\gamma \in K \setminus \{0\}$, G-productos L_γ^γ y elementos g_γ en H, tales que

$$s = \sum_{\gamma} c_\gamma L_\gamma^\gamma g_\gamma, \tag{6.3}$$

con $ht\Big(\sum_\gamma c_\gamma L_\gamma^\gamma g_\gamma\Big) = lp(s) > ht\big(a_\alpha F_\alpha^\alpha h_\alpha + b\ a_\beta F_\beta^\beta h_\beta\big)$. Ahora, de (6.2) y (6.3), tenemos que

$$a_\alpha F_\alpha^\alpha h_\alpha + a_\beta F_\beta^\beta h_\beta = a_\alpha F_\alpha^\alpha h_\alpha + b\, a_\beta F_\beta^\beta h_\beta - b\, a_\beta F_\beta^\beta h_\beta + a_\beta F_\beta^\beta h_\beta = (1-b) a_\beta F_\beta^\beta h_\beta + \sum_{\gamma} c_\gamma L_\gamma^\gamma g_\gamma.$$

de (6.1)

$$m = \sum_{\delta=\alpha,\beta} a_\delta F_\delta^\delta h_\delta + \sum_{\delta\neq\alpha,\beta} a_\delta F_\delta^\delta h_\delta,$$

luego podemos escribir

$$m = (1-b) a_\beta F_\beta^\beta h_\beta + \sum_{\gamma} c_\gamma L_\gamma^\gamma g_\gamma + \sum_{\delta\neq\alpha,\beta} a_\delta F_\delta^\delta h_\delta. \tag{6.4}$$

Supongamos $b \neq 1$, entonces la representación de m dada en (6.4) tendrá la misma altura que la representación en (6.1), pero una amplitud menor; lo cual es una contradicción.

Suponiendo que $b = 1$, para el caso que la representación de m en (6.1) tenga amplitud dos, entonces la altura de la representación (6.4) sería mayor que la altura de la representación (6.1), lo cual es una contradicción, ahora si la amplitud de la representación de m en (6.1) fuera mayor que dos, entonces la altura de la representación (6.4) sería igual a la altura de la representación (6.1), pero la amplitud sería menor, lo que nuevamente es una contradicción. □

Los siguientes resultados serán considerados de modo directo pues tienen una prueba análoga a las descritas en las proposiciones 4.2 y 4.3.

Proposición 6.1 *Sea A una subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con base estándar G, y sea M un A-submódulo completo de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con base estándar H. Si $h \in H$ es tal que $lp(h) = lp(F^{\alpha}g)$ para algún $g \in H \setminus \{h\}$ y para algún G-producto F^{α}, entonces $H' = H \setminus \{h\}$ es también una base estándar para M.*

Proposición 6.2 *Sea A una subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con base estándar G. Cualquier A-submódulo completo M de $K[[\boldsymbol{X}]]$ tiene una única base estándar reducida.*

Observación 6.2 *La unicidad en la proposición 6.2 depende del orden monomial fijado en $\mathbf{T}^n$. Si cambiamos el orden monomial, podemos encontrar diferentes bases reducidas.*

6.1 El Algoritmo de Buchberger para submódulos en $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$

En esta sección presentaremos el análogo al algoritmo de Buchberger para determinar las bases estándar de A-submódulos completos de $K[[\mathbf{X}]]$, donde A es una subálgebra completa de $K[[\mathbf{X}]]$ con base estándar G.

Para este propósito vamos a describir mediante ecuaciones diofánticas los S-procesos sobre G de pares de elementos en $K[[\mathbf{X}]]$.

Un S-proceso $aF^{\alpha}g + bF^{\beta}h$ sobre G de un par de elementos g, h en $K[[\mathbf{X}]]$, donde $F = \{f_1, \cdots, f_s\} \subset G$, está determinado, salvo producto por un escalar por un vector $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2s}$, que es solución del sistema diofántico

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \, ord_{X_j}\big(lp(f_i)\big) + ord_{X_j}\big(lp(g)\big) = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \, ord_{X_j}\big(lp(f_i)\big) + ord_{X_j}\big(lp(h)\big), \tag{6.5}$$

donde $j = 1, \cdots, n$.

Denotaremos por D'_F al conjunto mínimo de soluciones del sistema (6.5), y por D_F al conjunto mínimo de soluciones del sistema homogéneo asociado.

Definición 6.6 *Un S-proceso mínimo del par $g,\ h \in K[[\boldsymbol{X}]]$ sobre G es un S-proceso mínimo relativo a algún subconjunto finito F de G.*

Aquí nuevamente, como en el caso de las subálgebras, tenemos que si $F \subset E \subset G$ y E es finito, entonces cualquier S-proceso mínimo relativo a F es también un S-proceso mínimo relativo a E.

El siguiente resultado nos dice que es suficiente verificar la condición (c) del Teorema (6.1) para S procesos mínimos.

Proposición 6.3 *Sea A una subálgebra de $K[[\boldsymbol{X}]]$, con base estándar G y M un A-submódulo de $K[[\boldsymbol{X}]]$ tal que $M = \langle H \rangle$. Supongamos que para todo subconjunto finito F de G, y todo par de elementos $g,\ h$ en H cada S-proceso mínimo de $g,\ h$ relativo a F, tiene una reducción final cero módulo (G, H). Entonces todo S-proceso de cualquier par de elementos de H sobre G, tiene una representación de la forma $\sum_\lambda b_\lambda F_\lambda^\lambda h_\lambda$, donde $b_\lambda \in K$, F_λ^λ es un G-producto y $h_\lambda \in H$, con altura mayor que la altura del propio S-proceso.*

Prueba:

Módulo un múltiplo escalar, podemos suponer que un S-proceso de un par $g,\ h \in H$ sobre G está dado por $F^\alpha g + aF^\beta h$, donde F^α y F^β son G-productos y $a \in K$ está determinada unívocamente.

Sea $S_{\delta,\theta} = F^\delta g + a_{\delta,\theta} F^\theta h$ un S-proceso mínimo del par $g,\ h \in H$ relativo a F. Dado que $S_{\delta,\theta}$ tiene una reducción final cero módulo (G, H), de la prueba del Teorema 6.1, $(c) \Rightarrow (d)$, podemos escribir

$$S_{\delta,\theta} = \sum_\gamma c_\gamma F_\gamma^\gamma h_\gamma,$$

donde $c_\gamma \in K$, F_γ^γ es un G-producto, $h_\gamma \in H$ y $ht(\sum_\gamma c_\gamma F_\gamma^\gamma h_\gamma) > ht(F^\delta g + a_{\delta,\theta} F^\theta h)$.

Por definición de S-proceso, $ht(F^\delta g + a_{\delta,\theta} F^\theta h) = lp(F^\delta g) = lp(F^\theta h)$.

Sea $S = F^\alpha g + aF^\beta h$ cualquier S-proceso distinto de cero del par $g,\ h$, relativo a F, como la solución (α, β) del sistema (6.5) se puede escribir de la forma

$$(\alpha, \beta) = (\delta, \theta) + \sum_{\rho,\epsilon} n_{\rho,\epsilon}(\rho, \epsilon),$$

donde (δ, θ) es una solución minimal del sistema (6.5), (ρ, ϵ) es una solución minimal del sistema homogéneo asociado y $n_{\rho,\epsilon}$ es un número entero no negativo, entonces podemos escribir

$$F^\alpha g = F^\delta g\Big(\prod_{\rho,\epsilon} (F^\rho)^{n_{\rho,\epsilon}}\Big) \quad \text{y} \quad F^\beta h = F^\theta h\Big(\prod_{\rho,\epsilon} (F^\epsilon)^{n_{\rho,\epsilon}}\Big)$$

observe que existe una constante $d \in K$, tal que

$$\prod_{\rho,\epsilon}(F^{\rho})^{n_{\rho,\epsilon}} + d\prod_{\rho,\epsilon}(F^{\epsilon})^{n_{\rho,\epsilon}}$$

es un S-proceso de G. Luego, usando el argumento del Teorema 4.1 (c)⇒(d), podemos escribir

$$\prod_{\rho,\epsilon}(F^{\rho})^{n_{\rho,\epsilon}} = -d\prod_{\rho,\epsilon}(F^{\epsilon})^{n_{\rho,\epsilon}} + \sum_{\nu} e_{\nu}F_{\nu}^{\nu},$$

donde $e_\nu \in K$, los F_ν^ν son G-productos y $ht\big(\sum_\nu e_\nu F_\nu^\nu\big) > lp\Big(\prod_{\rho,\epsilon}(F^\rho)^{n_{\rho,\epsilon}}\Big) = lp\Big(\prod_{\rho,\epsilon}(F^\epsilon)^{n_{\rho,\epsilon}}\Big)$.

Así se tiene:

$F^\alpha g = \Big(-d\prod_{\rho,\epsilon}(F^\epsilon)^{n_{\rho,\epsilon}} + \sum_\nu e_\nu F_\nu^\nu\Big)\, F^\delta g$

Considerando las igualdades anteriores para $F^\delta g$, tenemos que:

$F^\alpha g = \Big(-d\prod_{\rho,\epsilon}(F^\epsilon)^{n_{\rho,\epsilon}} + \sum_\nu e_\nu F_\nu^\nu\Big)\Big(-a_{\delta,\theta}F^\theta h + \sum_\gamma c_\gamma F_\gamma^\gamma h_\gamma\Big)$

Después de un cálculo y considerando la representación de $F^\beta h$ dada arriba, tenemos que:

$F^\alpha g = \; d\, a_{\delta,\theta}\Big(\prod_{\rho,\epsilon}(F^\epsilon)^{n_{\rho,\epsilon}}\Big)F^\theta h \; + \; \sum_\lambda b_\lambda F_\lambda^\lambda h_\lambda$

$F^\alpha g = \; d\, a_{\delta,\theta}\, F^\beta h \;\; + \;\; \sum_\lambda b_\lambda F_\lambda^\lambda h_\lambda,$

donde $ht\big(\sum_\lambda b_\lambda F_\lambda^\lambda h_\lambda\big) > lp(F^\alpha g) = lp(F^\beta h)$. Ahora, como la constante a está determinada univocamente entonces $a = -d\, a_{\delta,\theta}$; por lo tanto,

$$S = \sum_\lambda b_\lambda F_\lambda^\lambda h_\lambda.$$

□

Como una consecuencia directa de la Proposición 6.3 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.1 *Sea A una subálgebra completa de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con base estándar G y M un A submódulo completo de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con $M = \langle H\rangle$. Entonces H es una base estándar de M si y sólo si todo S-proceso mínimo de H sobre G tiene una reducción final nula módulo (G, H).*

Observación 6.3 *Un S-proceso $aF^\alpha h + bF^\beta h$ sobre G, con $h \in H$, donde $a, b \in K$ y F^α, F^β son G-productos, no necesariamente es el trivial; porque el sistema asociado (6.5), siendo homogéneo puede tener soluciones mínimas no triviales, sin embargo tiene reducción final nula módulo (G, H).*

En efecto, sea $S = (aF^\alpha + bF^\beta)h$, donde $aF^\alpha + bF^\beta \in A$ y G es una base estándar para A, entonces por el Teorema (4.1): $(aF^\alpha + bF^\beta) \xrightarrow{G_+} 0$. Luego, si reducimos $(aF^\alpha + bF^\beta)$ por $c_\gamma F_\gamma^\gamma$, podemos reducir S por $c_\gamma F_\gamma^\gamma h$. Así, $S \xrightarrow{(G,H))_+} 0$.

Observación 6.4 *Si A es una subálgebra de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con base estándar G, entonces un A-módulo completo M tiene una base estándar finita si solo si el $lp(A)$-monomódulo $lp(M)$ es finitamente generado sobre $lp(A)$; o mas explícitamente, $lp(M)$ es finitamente generado sobre el monoide $\langle \cdot lp(G) \cdot \rangle$; esto quiere decir que existen $g_1, \cdots, g_r \in M$, tales que para todo $m \in M$, tenemos que $lp(m) = lp(F^\alpha g_i)$, para algún G-producto F^α y algún i.*

Como aplicación de la observación 6.4 y de la Proposición 6.3, tenemos que cualquier A-módulo completo M, donde $M \subset K[[X]]$ y A es una K-subálgebra de $K[[X]]$, tiene una base estándar finita.

Teorema 6.2 *(Algoritmo de Buchberger para submódulos de $K[[\boldsymbol{X}]]$)*
Sea A una subálgebra de $K[[\boldsymbol{X}]]$ con base estándar G. Si M es un A-módulo completo generado por $B \subset K[[\boldsymbol{X}]]$, entonces siempre obtenemos (teóricamente) una base estándar H para M mediante el siguiente algoritmo:

$Entrada:$ G, B;
$Defina$ $H_0 := B$; *y* $i := 0$;
$Hacer$
$S := \{s;\ s \text{ es un } S\text{-proceso mínimo de } H_i \text{ sobre } G\}$;
$R := \{r;\ s \xrightarrow{(G,H_i)_+} r,\ s \in S \text{ y } r \neq 0\}$;
$H_{i+1} := H_i \cup R$;
$i := i + 1$;
$Salida:$ $H := \cup_{i \geq 0} H_i$

Además, si M tiene una base estándar finita, entonces el procedimiento anterior producirá una base estándar después de un número finito de pasos.

Prueba.

Considere $H = \cup_{i \geq 0} H_i$. Un S-proceso mínimal de un par $g, h \in H$ sobre G es, en particular, un S-proceso mínimal de un par de elementos de H_i para algún i.
Por la defición del algoritmo, este S-proceso tiene una reducción final nula, módulo (G, H_{i+1}) y en consecuencia también tiene una reducción final nula módulo (G, H_i). Así H es una base estándar para M.

Supongamos que M tiene una base estándar finita L. Mostraremos la existencia de una índice j tal que H_j es una base estándar para M.

Sea $H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_i \subset \cdots \subset H$. Mientras que $H_i \setminus H_{i-1} \neq \emptyset$, consideramos $r_i \in H_i \setminus H_{i-1}$, que es una reducción final módulo (G, H_{i-1}) de menor orden para un S-proceso minimal de un par de elementos en H_{i-1} sobre G.

Del algoritmo tenemos que $lp(r_i) < lp(r_{i+1})$. Sea $q = max\{lp(h); h \in L\}$. Existe un índice j tal que la potencia lider de cualquier elemento de $P := H \setminus H_j$ es mayor que q.

Si $h \in H$ entonces $lp(h) = lp(F^\alpha g)$, donde F^α es un G-producto y $g \in H$, pues H es base estándar de M. Dado que $lp(h) \leq q$ se tiene que $g \in H \setminus P$, es decir $g \in H_j$. Por lo tanto para todo $h \in L$ tenemos que $lp(h) = lp(F^\alpha_\alpha g)$ para algún g-producto F^α_α y $g \in H_j$.

De esta forma tendremos que:

$lp(m) = lp(F^\alpha_\alpha h) = lp(F^\beta_\beta F^\alpha_\alpha g) = lp(F^\gamma_\gamma g)$, donde $F^\gamma_\gamma := F^\beta_\beta F^\alpha_\alpha$, $h \in H$ y $g \in H_j$. Por lo tanto H_j es una base estándar de M.

Ejemplo 6.1 *Considere la subálgebra $A = K[[X^4, X^9 + X^{15}]] \subset K[[\boldsymbol{X}]]$ cuya base reducida es $G = \{X^4, X^9 + X^{15}\}$.*
Si $a \in A$ entonces el $ord_X(a) \in \langle 4, 9\rangle$ cuyo conductor es 24. Además si $f \in K[[\boldsymbol{X}]]$ es tal que $ord_X(f) \geq 24$, entonces $f \in A$.

Consideremos ahora el A-módulo M, generado por el conjunto $B = \{X^3, X^8 - X^{14}\}$, el cual es completo pues B es finito. Sabemos que M tiene una base estándar finita la cual vamos a determinar.

Sea $f \in K[[\boldsymbol{X}]]$, tenemos las siguientes consideraciones:

1. *Si $ord_X(f) \geq 27$, entonces $lp(f) = lp(X^3)lp(a)$, para algún $a \in A$.*
2. *Si $ord_X(f) = 26$, entonces $lp(f) = lp(X^8 - X^{14})lp(X^9 + X^{15})^2$, para algún $a \in A$.*
3. *Si $ord_X(f) \in \{23, 24, 25\}$, entonces $lp(f) = lp(X^3)lp(a)$, para algún $a \in A$.*

Luego si $ord_X(f) \geq 23$, tenemos que $f \in M$, pues f se puede reducir módulo (G, B) a un elemento de M. Aplicamos el algoritmo anterior al conjuto $G = \{X^4, X^9 + X^{15}\}$ y $H_0 = B = \{X^3, X^8 - X^{14}\}$.

Paso 1 : *Tenemos que S es la unión de conjuntos obtenidos de los S-procesos minimales sobre G de los pares $(x^3, X^3), (X^8 - X^{14}, X^8 - X^{14})$ y $(X^3, X^8 - X^{14})$.*
De la observación 1 vemos que para los dos primeros pares los S-procesos se reducen a cero, para el tercer par módulo constantes tenemos dos S-procesos

$$S_1 = (X^4)^8 X^3 (x^9 + X^{15})^3 (X^4 - X^{14})$$

con $ord_X(S_1) > 35$ que tendrá una reducción final cero módulo (G, H_0).
El segundo S-proceso es;

$$S_2 = (X^9 + X^{15})X^3 - X^4(X^8 - X^{14}) = 2X^{18}.$$

Si $char(K) = 2$, el algoritmo se detiene.
Si $char(K) \neq 2$ procedemos con el siguiente paso del algoritmo para $H_1 := \{X^3, X^8 - X^{14}, 2X^{18}\}$.

Paso 2 : *Además de los S-procesos minimales del paso anterior, que tendrán reducciones finales cero, también tenemos los S-procesos sobre G de los pares* $(2X^{18}, 2X^{18})$ $(X^3, 2X^{18})$ *y* $(X^8 - X^{14}, 2X^{18})$. *el primer par no dará S-procesos relevantes, el segundo y tercer par tiene los siguientes conjuntos de S-procesos minimales:*
$\{2(x^4)^6X^8 - (X^9 + X^{15})2X^{18}, (X^9 + X^{15})^8X^3 - (X^4)^3 2X^{18}\}$.
$\{2(x^4)^7(X^8 - X^{14}) - (X^9 + X^{15})^2 2X^{18}, 2(X^9 + X^{15})^2(X^8 - X^{14}) - (X^4)^2 2X^{18}\}$.
Dado que las alturas de éstos S-procesos tienen órdenes superiores a 25, éstos tendrán reducción final nula módulo (G, H_1), *por tanto el algoritmo termina. Así, el conjunto:*

$$H := H_1 = \{X^3, X^8 - X^{14}, 2X^{18}\}$$

es una base estándar minimal de M *en cualquier característica.*

6.2 Diferenciales de Kähler para una curva algebroide irreducible

Sea K un campo algebraicamente cerrado de característica cero y $\mathcal{C}$ una curva algebroide irreducible *con intersección completa* , es decir $\mathcal{C} = \langle P \rangle$ es un ideal primo en $K[[X_1, \cdots, X_n]]$ con $n-1$ generadores, tal que el anillo local $\mathcal{O} = \frac{[[X_1, \cdots, X_n]]}{\langle P \rangle}$ tiene dimensión de Krull 1.

Definición 6.7 *El módulo de diferenciales de Kähler sobre* $\mathcal{O}$ *es dado por:*

$$\mathcal{O}\, d\, \mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}^n}{\langle \sum_{i=1}^n e_i f_{x_i}; f \in C \rangle}, \text{ donde } \{e_1, \cdots, e_n\} \text{ es la base canónica en } \mathcal{O}^n$$

Aquí denotaremos por dx_i a las imágenes de los e_i en $\mathcal{O}\, d\, \mathcal{O}$

Observación 6.5 *Los* dx_i *no son necesariamente generadores libres del* $\mathcal{O}$ *módulo* $\mathcal{O}\, d\, \mathcal{O}$ *pues están sugetos a las relaciones* $\sum_{i=1}^n f_{X_i} dx_i = 0, \ \ f \in C$.

Definición 6.8 *El submodulo de torsión* $\mathcal{T}$ *de* $\mathcal{O}\, d\, \mathcal{O}$ *es dado por*

$$\mathcal{T} = \{w \in \mathcal{O}\, d\, \mathcal{O} \ \text{ tal que existe } g \neq 0 \text{ con } gw = 0\}$$

Observación 6.6 *El módulo* $\mathcal{O}\, d\, \mathcal{O}$ *no es libre de torsión, en efecto consideremos la curva plana algebroide irreducible* $C = \langle Y^n - X^m \rangle$, *con* $mcd\{n, m\} = 1$, $m > n > 1$. *Si* $w = nxdy - mydx$ *tendremos que* $y^{n-1}w = ny^{n-1}xdx - my^n dx = ny^{n-1}xdx + mx^m dx = xdf = 0$, *así* $w \in \mathcal{T}$

Vamos ahora a identificar el $\mathcal{O}$ módulo $\frac{\mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}}{\mathcal{T}}$ como un submódulo del anillo de series formales $K[[t]]$, para esto definimos ahora un morfismo Φ a partir del monomorfismo φ definido en 5.2 del modo siguiente:

$$\Phi : \mathcal{O}\,d\,\mathcal{O} \to K[[t]].$$

$$\Phi(\sum_{i=1}^{n} g_i dx_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(g_i) p_i^{'}(t)$$

donde los p_i son los que definen el monomorfismo φ de 5.2.

En las condiciones anteriores tenemos la siguiente

Proposición 6.4 *El núcleo del morfismo Φ es el submódulo de torsión $\mathcal{T}$.*

Prueba.

De la definición tenemos que si $g \in \mathcal{O}$ entonces $\Phi(gw) = \varphi(g)\Phi(w)$, así si $w \in \mathcal{T}$ y $g \in \mathcal{O} - \{0\}$ con $gw = 0$ tendremos que $0 = \Phi(gw) = \varphi(g)\Phi(w)$ ahora como φ es un monomorfismo y $K[[t]]$ un dominio resulta que $\Phi(w) = 0$. Así $w \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Consideremos ahora $w = \sum_{i=1}^{n} \varphi(g_i) p_i^{'}(t) \in \ker(\Phi)$, y denotemos por $\mathcal{K}$ como el campo de fracciones de $\mathcal{O}$. Además como la curva es de intersección completa resulta que la matrix

$$\mathrm{Jac}(f_i)_{1\leq i\leq n} = \left((f_i)_{X_j}\right)_{i,j} \tag{6.6}$$

tiene rango $n-1$ (ver [7] página 376), así podemos suponer que las $n-1$ primeras filas son linealmente independientes. Consideremos ahora la matriz M de orden $n \times n$, determinada al adjuntar la fila $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ a las $n-1$ primeras filas de la matriz dada en (6.6).

En nuestras condiciones tenemos que las filas de M verifican el sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi((f_i)_{X_j}) \frac{dp_j(t)}{dt} = \Phi(\sum_{i=1}^{n} (f_i)_{X_j}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(g_j) \frac{dp_j(t)}{dt} = 0.$$

Ahora puesto que el sistema anterior considerado sobre el campo $\mathcal{K}$ tiene solución no trivial $(p_1^{'}(t), \cdots p_n^{'}(t))$ y además el morfismo φ es inyectivo tendremos que $\det M = 0$.

Como las $n-1$ primeras filas son linealmente independientes tendremos que la ultima es una combinación sobre $\mathcal{K}$ de las otras, así existe $h \in \mathcal{O} - \{0\}$ y $h_1, \cdots h_{n-1} \in \mathcal{O}$ tal que

$$h \sum_{j=1}^{n} g_j dx_j = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \sum_{j=1}^{n} (f_i)_{X_j} dx_j = 0.$$

□.

Observación 6.7 *De lo anterior tenemos que* $\frac{\mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}}{\mathcal{T}} \approx Im(\Phi) := \Omega \subset K[[t]]$.

De este modo se puede transferir todos los procesos de reducción para submódulos vistos en $K[[t]]$ para el módulo de diferenciales Ω asociado a la curva C.

El módulo de diferenciales Ω nos permite definir un importante conjunto discreto Λ asociado a la curva algebroide C.

Definición 6.9 *Dado* $w \in \mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}\setminus\{\mathcal{T}\}$ *definimos el valor de* w *como:*

$\mathbf{v}(w) = v(\Phi(w)) + 1$, *donde* v *es la valoración usual en* $K[[t]]$.

$$\Lambda = \{\mathbf{v}(\mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}\setminus\mathcal{T})\} = \mathbf{v}(\Omega\setminus\{0\}) + 1$$

El conjunto Λ es llamado el conjuto de valores de diferenciales de la curva C, este es un importante invariante analítico de la curva.

Observación 6.8 *El semigrupo de valores de una curva algebroide es un subconjuto del conjunto de los valores de difereciales, es decir* $\Gamma \subset \Lambda$.

Observación 6.9 *El conjunto* Λ *tiene estructura de monomódulo sobre el monoide* Γ.

En efecto si $\lambda \in \Lambda$, $k \in \Gamma$, *entonces existen* $w \in \mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}$ *y* $h \in \mathcal{O}$ *con* $\mathbf{v}(w) = \lambda, v(h) = k$ *de donde tendremos que* $\mathbf{v}(hw) = k + \lambda$

Definición 6.10 *Diremos que* $w \in \mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}$ *es una diferencial exacta si existe* $g \in \mathcal{O}$ *tal que* $w = dg$, *caso contrario diremos que* w *es una diferencial no exacta.*

Proposición 6.5 *Sea* Γ *es el semigrupo de valores de la curva* C *y* c *su conductor, si* $w \in \mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}$ *es tal que* $\mathbf{v}(w) \geq c$ *entonces existe una diferencial exacta* dh *tal que* $w - dh \in \mathcal{T}$.

Prueba.

Como $\mathbf{v}(w) \geq c$ entonces existe $h_1 \in \mathcal{O}$ tal que $\mathbf{v}(w)\mathbf{v}(dh_1)$ por tanto existe $a_1 \in K$ tal que podemos realizar una reducción es decir $\mathbf{v}(w - a_1dh_1) > \mathbf{v}(w)$, de este modo procediendo inductivamente obtenemos una familia sumable $\{a_idh_i; a_i \in K,\ dh_i \in \mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}\}$ con la condición $\mathbf{v}(w - \sum a_idh_i) = \infty$, así $\Phi(w - \sum a_idh_i) = 0$ por tanto $w - d(\sum a_ih_i) \in \mathcal{T}$. □

El conjunto Λ tiene una estructura de Γ- momomódulo finitamente generado.

Proposición 6.6 *Existe un conjuto finito* $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\} \subset \Lambda$, *tal que para cualquier elemento* $\lambda \in \Lambda$ *existe* λ_i *con* $i \in \{1, \cdots, r\}$ *y* $\gamma \in \Gamma$ *tal que* $\lambda = \gamma + \lambda_i$.

Prueba.

Consideraremos la siguiente sucesión de valores de diferenciales:

$$\lambda_1 = \min\Lambda,\ \lambda_2 = \min\Lambda\backslash(\lambda_1+\Gamma), \cdots, \lambda_i = \min\Lambda\backslash\bigcup_{j=1}^{i-1}(\lambda_j+\Gamma), \cdots,$$

por la definición de la sucesión (λ_i) es suficiente mostrar que esta es finita. En efecto si fuera infinita del hecho que (λ_i) es una sucesión creciente estricta tendremos que existe n tal que $\lambda_n - \lambda_1 > c$ por tanto $\lambda_n \in \lambda_1 + \Gamma$, lo que es absurdo por la construcción de la sucesión $\square$.

Como una aplicación directa de la proposición tenemos que existe una base estándar finita para el módulo de diferenciales de una curva algebroide irreducible.

Corolario 6.2 *Existe una base estándar finita para* Ω.

Prueba. Es suficiente considerar elementos $w_1, \cdots, w_r \in \mathcal{O}\,d\,\mathcal{O}$ tal que $\mathbf{v}(w_i) = \lambda_i$, luego el conjunto $\{\Phi(w_1), \cdots, \Phi(w_r)\}$ forma una base estándar de Ω. $\square$

Bibliografía

[1] Azevedo, A.(1967). The Jacobian Ideal of a Plane Algebroid Curve. *Ph. D. Thesis, Prudue Univ.*

[2] Becker, T. (1990). Standard Bases and Some Computations in Rings of Power Series. *Journal of Symbolic Computation, 10*, 165-178.

[3] Becker, T. (1993). Standard Bases in Power Series Rings: Uniqueness and Superfluous Critical Pairs. *Journal of Symbolic Computation, 15*, 251-265.

[4] Bresinsky, H. (1972). Semigroups Corresponding to Algebroid BRanches in the Plane. *Proc. Amer.Math.Soc,32,(2)* 381-384.

[5] Buchberger B.(2006), Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. (M. Abramson, Trad.) *Journal of Symbolic Computation, 41* (3), 475-511. (Trabajo original publicado 1965).

[6] Cáceres, M. (2023). Bases Estándar para Ideales en el Anillo $K[[\mathbf{X}]]$. *Pesquimat, 26(1)*, 18-31.

[7] Carbonne, P. (1998). Sur les Différentielles de Torsion, J. Algebra 202, 367- 403.

[8] Clausen, M. and Fortenbacher, A. (1989). Efficient Solution of Linear Diofantine Equations, *Journal of Symbolic Computation, 8*, 201-216 .

[9] Cox, D., Little, J. y O'Shea, D. (1996-2007). Ideals, Varieties and Algorithms. An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. *Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer.

[10] Hefez, A. (2003). Irreducible plane curve singularities in Real and Complex Singularities, *Dekker Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Volume 232*, D. Mond and M. J. Saia, Editors.

[11] Hefez, A. y Hernandes, M. E. (2001). Computational Methods in the Local Theory of Curves. *23º Colóquio Brasileiro de Matemática,* IMPA.

[12] Hironaka, H. (1964). Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero. *Annals of Mathematics, 79*, 109-326.

[13] Herzog, J. and Kunz, E. (1971). Die Wertihalbgruppe eines Lokalen Rings der Dimension 1. *Ber. Heidelberg Akad. Wiss. 2*, 1-46.

[14] Matsumura, H. (2022). Commutative Algebra. Second edition. *Revised and modernized edition by TEXromancers.*

[15] Miller , J.L. (1996). Analogs of Groebner Bases in polinomial Rings over a Ring. *Journal of Symbolic Computation, 21*, 139-153 .

[16] Risler, J.J., Sur L'ideal Jacobien D'une Courbe Plane, Bull. Soc . Math. France, 99, 305-311 (1971)

[17] Robbiano, L. and Sweedler, M. (1988). Subalgebra bases, Proc. Commutative Algebra Salvador, 61-87, Springer-Verlag.

[18] Robbiano, L. and Sweedler, M. (1988). Subalgebra bases, Proc. Commutative Algebra Salvador, 61-87, Springer-Verlag.

[19] Seidenberg, A., (1968) Elements of the Theory of Algebraic curves, *Addison-Wesley Pub. Co.*

[20] Teissier, B. *Apéndice de [22]*

[21] Torres, F. (2018) El teorema de Merle para foliaciones [Tesis para optar el título de Maestro en Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú]. *Repositorio de la Pontificia Universidad Católica del Perú* https://tesis.pucp.edu.pe/server/api/core/bitstreams/962d8f1c-d74d-4a7d-b235-0fad3fa8a384/content

[22] Zariski, O. (1973). Le Problème des Modules pour les Branches Planes. *Cours donné au Centre de Mathématiques de L'École Polytechnique.*

[23] Zariski, O. (2006). The moduli problem for plane branches. *University lecture series, Volume 39,* American Mathematical Society.