Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

El teorema de Hahn–Banach en espacios normados asimétricos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jhoni Emerson UZURIAGA COTRINA

ASESOR

Dr. Carlos Alberto PEÑA MIRANDA

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Uzuriaga, J. (2026). *El teorema de Hahn–Banach en espacios normados asimétricos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Jhoni Emerson Uzuriaga Cotrina
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	76564790
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0007-7841-5352
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10699143
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-4339-4615
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Dr. Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10078450
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Mg. Carole Huamán Oriundo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10601400
Datos de investigación	
Línea de investigación	Optimización

Grupo de investigación	Matemáticas Aplicadas -. Métodos Numéricos (METNUM)
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2025
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 horas del miércoles 4 de febrero de 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Willy David Barahona Martínez (PRESIDENTE), Mg. Carole Huamán Oriundo (MIEMBRO) y el Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "EL TEOREMA DE HAHN - BANACH EN ESPACIOS NORMADOS ASIMÉTRICOS", presentado por el señor Bachiller JHONI EMERSON UZURIAGA COTRINA, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ...SOBRESALIENTE..... con un calificativo promedio de .....DIECIOCHO..... (18.).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Willy David Barahona Martínez, manifestó que el señor Bachiller JHONI EMERSON UZURIAGA COTRINA, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 16:40 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Willy David Barahona Martínez
PRESIDENTE

Mg. Carole Huamán Oriundo
MIEMBRO

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. Carlos Alberto Peña Miranda en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N.º 000380-2025-D-FCM de la tesis cuyo título es **‘‘EL TEOREMA DE HAHN - BANACH EN ESPACIOS NORMADOS ASIMÉTRICOS”**, presentado por el bachiller JHONI EMERSON UZURIAGA COTRINA para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 13% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Lima, 09 de febrero de 2026



Firma del Asesor

Nombres y Apellidos del asesor: Carlos Alberto Peña Miranda

DNI: 10699143

Dedicatoria

A mis padres, por su amor incondicional, apoyo constante y sacrificio a lo largo de toda mi formación académica. Gracias por ser mi mayor motivación para alcanzar este logro.

Agradecimientos

Agradezco sinceramente a mi asesor de tesis, Carlos Alberto Peña Miranda, por su orientación, paciencia y apoyo constante durante el desarrollo de este trabajo de Licenciatura. Sus conocimientos, dedicación y valiosos consejos fueron fundamentales para la realización y culminación de esta investigación.

Asimismo, expreso mi agradecimiento a los docentes de la Escuela Profesional de Matemática por la formación académica brindada a lo largo de estos años, la cual contribuyó de manera significativa a mi desarrollo profesional y personal.

De manera especial, agradezco a mi familia por su apoyo incondicional, comprensión y motivación permanente. Su confianza y acompañamiento fueron esenciales para alcanzar este importante logro académico.

Finalmente, agradezco a mis amigos y compañeros de estudio por el apoyo, la colaboración y el ánimo brindados a lo largo de este proceso.

RESUMEN

EL TEOREMA DE HAHN–BANACH EN ESPACIOS NORMADOS ASIMÉTRICOS

JHONI EMERSON UZURIAGA COTRINA

Asesor: Dr. Carlos Alberto Peña Miranda

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

El objetivo de esta tesis es demostrar que el Teorema de Hahn–Banach puede aplicarse en espacios vectoriales con seminorma asimétrica para construir funciones de utilidad que representen preferencias sobre loterías. A partir de los axiomas de consistencia, independencia y continuidad, se define el espacio de diferencias de loterías y una seminorma que cuantifica la relación de orden entre loterías de referencia. Se estudian las propiedades algebraicas de las loterías compuestas y, aplicando el Teorema de Hahn–Banach, se extiende un funcional lineal definido sobre las loterías de referencia a todo el espacio. Esta construcción permite definir una funcional de utilidad lineal que representa completamente las preferencias y respeta la estructura probabilística de las loterías, proporcionando un fundamento matemático riguroso para la forma de utilidad esperada.

Palabras clave: Teorema de Hahn–Banach, Seminorma asimétrica, Función de utilidad, Loterías.

ABSTRACT

THE HAHN–BANACH THEOREM IN ASYMMETRIC NORMED SPACES.

JHONI EMERSON UZURIAGA COTRINA

Advisor: Dr. Carlos Alberto Peña Miranda

Obtained Title: Degree in Mathematics

The aim of this thesis is to demonstrate that the Hahn–Banach Theorem can be applied to vector spaces endowed with an asymmetric seminorm in order to construct utility functions representing preferences over lotteries. Based on the axioms of consistency, independence, and continuity, the space of lottery differences and a seminorm quantifying the ordering relation among reference lotteries are defined. The algebraic properties of composite lotteries are examined, and by applying the Hahn–Banach Theorem, a linear functional defined on the reference lotteries is extended to the entire space. This construction yields a linear utility functional that fully represents preferences while preserving the probabilistic structure of the lotteries, thereby providing a rigorous mathematical foundation for the expected utility form.

Keywords: Hahn–Banach Theorem, Asymmetric seminorm, Utility function, Lotteries.

Índice general

Dedicatoria **i**

Agradecimientos **ii**

Resumen **iii**

Abstract **iv**

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

1.1. Espacios vectoriales 3

1.2. Espacios con seminorma asimétrica 10

1.3. Funcionales lineales continuos 11

1.4. Lema de Zorn 14

2. Teorema de Hahn–Banach **16**

2.1. Formulación clásica del Teorema de Hahn–Banach 16

2.2. Extensión del Teorema de Hahn–Banach a espacios con seminorma asimétrica 19

3. Aplicación del Teorema de Hahn–Banach en espacios con seminorma asimétrica **21**

3.1. Estructura del espacio de loterías y seminorma asimétrica 21

3.1.1. Construcción de la seminorma asimétrica 33

3.2. Aplicación en la construcción de funciones de utilidad esperada 39

3.3. Propiedades y consecuencias en economía y teoría de decisiones 40

Conclusión **44**

Bibliografía **45**

Introducción

La teoría de los espacios cuasimétricos y de los espacios normados asimétricos ha venido desarrollándose desde mediados del siglo pasado. Entre los principales contribuyentes en este campo destacan Alegre (2009), Romaguera (2003) y Cobzas (2010); este último es reconocido por su libro que compila diversos resultados análogos a los de la teoría clásica del análisis funcional. La variedad de estudios sobre estos espacios es tan amplia como en el caso simétrico; sin embargo, en este trabajo nos enfocamos específicamente en la demostración del Teorema de Hahn–Banach en el contexto asimétrico. Para ello, resulta imprescindible comprender la teoría básica de los espacios normados asimétricos, así como su relación con la estructura de seminormas no necesariamente simétricas.

Esta investigación se justifica teóricamente por abordar la extensión del Teorema de Hahn–Banach al caso asimétrico, haciendo uso de resultados fundamentales del análisis funcional desarrollados en espacios normados asimétricos. Asimismo, posee una justificación práctica, ya que la contribución realizada amplía conceptos del análisis funcional clásico, proporcionando herramientas adicionales para el estudio de problemas donde la asimetría es inherente, tales como fenómenos de decisión, optimización y modelado económico.

El objetivo principal de esta tesis es demostrar que el Teorema de Hahn–Banach puede aplicarse en espacios vectoriales dotados de una seminorma asimétrica y, a partir de ello, construir funciones de utilidad que representen preferencias sobre loterías. En la teoría clásica de la utilidad esperada, las preferencias se modelan mediante funcionales lineales definidos sobre espacios normados simétricos; sin embargo, en diversas situaciones de decisión bajo incertidumbre, la evaluación del riesgo y la comparación entre alternativas no presentan simetría. Las seminormas asimétricas permiten capturar esta característica, cuantificando de forma más flexible las relaciones de preferencia entre loterías.

A partir de axiomas de consistencia, independencia y continuidad, se define un espacio vectorial de diferencias de loterías y se construye una seminorma asimétrica que refleja las relaciones de orden entre loterías de referencia. Posteriormente, mediante la aplicación del Teorema de Hahn–Banach, se extiende un funcional lineal definido inicialmente en un subespacio a todo el espacio vectorial, permitiendo construir una función de utilidad lineal que representa completamente las preferencias y respeta la estructura probabilística de las loterías compuestas. Este enfoque establece un puente formal entre el análisis funcional asimétrico y la teoría de la decisión, mostrando que la utilidad esperada surge de manera natural como consecuencia de la estructura lineal de los espacios provistos de una seminorma asimétrica.

Finalmente, la tesis se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presentan los preliminares, con los conceptos y resultados fundamentales necesarios para comprender los desarrollos posteriores; en el Capítulo 2 se expone y demuestra el Teorema de Hahn–Banach en el contexto de espacios normados asimétricos; y en el Capítulo 3 se desarrolla una aplicación del teorema y se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales que se utilizarán a lo largo de esta tesis. Se comienza con la definición y las propiedades básicas de los espacios vectoriales, para posteriormente introducir el concepto de seminorma asimétrica, que resulta central en el desarrollo posterior. Finalmente, se definen los funcionales lineales continuos y se analiza su norma asociada en el contexto de espacios provistos de seminorma asimétrica.

1.1. Espacios vectoriales

Los espacios vectoriales constituyen la estructura algebraica básica sobre la cual se construyen los espacios funcionales que estudiaremos. En particular, estos espacios permiten definir operaciones lineales que preservan la estructura algebraica.

Definición 1.1 (Espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$)**.** *Un* ***espacio vectorial*** *sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *(de los números reales) es un conjunto* V *junto con dos operaciones:*

- *suma vectorial:* $+ : V \times V \to V$*,*
- *multiplicación escalar:* $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$*,*

que satisfacen las propiedades axiomatizadas para todos $u, v, w \in V$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$*:*

1. $u + v = v + u$ *(Conmutatividad),*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(Asociatividad),*
3. *existe un elemento neutro* $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$*,*

4. *para todo $u \in V$, existe un inverso aditivo $-u \in V$ con $u + (-u) = 0$,*

5. *$a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$ (Compatibilidad de escalares),*

6. *$1 \cdot u = u$ (Elemento neutro escalar),*

7. *$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ (Distributividad escalar sobre suma vectorial),*

8. *$(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ (Distributividad escalar sobre suma escalar).*

La estructura de espacio vectorial es la base para la definición de conceptos más avanzados como subespacios, combinaciones lineales y transformaciones lineales, que se detallan a continuación.

Ejemplo 1.1. El espacio $\mathbb{R}^n$, equipado con las operaciones de suma vectorial y multiplicación por un escalar, satisface todos los axiomas de un espacio vectorial. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales.

Definición 1.2 (Subespacio vectorial)**.** *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un subconjunto $W \subseteq V$ se denomina **subespacio vectorial** si cumple las siguientes propiedades:*

1. *Contiene el vector cero: $0 \in W$,*

2. *Es cerrado bajo la suma: si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$,*

3. *Es cerrado bajo la multiplicación por escalares: si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in W$, entonces $\lambda \cdot v \in W$.*

Ejemplo 1.2. Consideremos el plano $P : x + 2y + 3z = 0$ en $\mathbb{R}^3$. Vamos a verificar que P cumple las condiciones para ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

El plano puede reescribirse como:

$$P = \left\{ (x, y, z) : z = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y,\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

A continuación, verificamos que P cumple con las tres propiedades fundamentales de un subespacio vectorial (ver definición 1.2).

1. **Cerradura bajo la suma:** Sean $(x_1, y_1, z_1) \in P$ y $(x_2, y_2, z_2) \in P$. Por la ecuación del plano, tenemos que:

$$z_1 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}y_1 \quad \text{y} \quad z_2 = -\frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}y_2.$$

Al sumar ambos vectores:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

obtenemos:

$$z_1 + z_2 = \left(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}y_1\right) + \left(-\frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}y_2\right) = -\frac{1}{3}(x_1 + x_2) - \frac{2}{3}(y_1 + y_2).$$

Esto demuestra que la suma de los dos vectores también pertenece al plano P:

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, -\frac{1}{3}(x_1 + x_2) - \frac{2}{3}(y_1 + y_2)) \in P.$$

2. **Cerradura bajo la multiplicación por un escalar:** Sea $(x, y, z) \in P$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Según la ecuación del plano, tenemos:

$$z = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y.$$

Al multiplicar el vector por el escalar α, obtenemos:

$$\alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)).$$

Simplificando:

$$\alpha z = -\frac{1}{3}(\alpha x) - \frac{2}{3}(\alpha y),$$

lo que muestra que el vector resultante también pertenece a P:

$$(\alpha x, \alpha y, -\frac{1}{3}(\alpha x) - \frac{2}{3}(\alpha y)) \in P.$$

3. **El vector nulo:** El vector nulo en $\mathbb{R}^3$ es $(0, 0, 0)$. Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$0 + 2(0) + 3(0) = 0,$$

lo que confirma que $(0, 0, 0) \in P$.

Por lo tanto, hemos verificado que P cumple con todas las condiciones de un subespacio vectorial. En consecuencia, podemos concluir que P es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

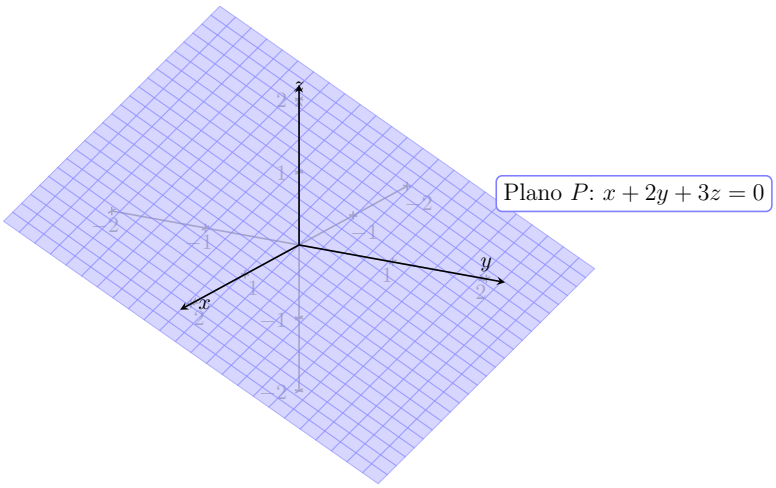

Figura 1.1: Gráfica del plano $P : x + 2y + 3z = 0$ en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 1.3. El plano $Q : x + 2y + 3z = 5$ no constituye un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, ya que no incluye el vector cero. Si evaluamos $(0, 0, 0)$ en la ecuación del plano, obtenemos

$$0 + 2(0) + 3(0) = 5,$$

lo cual es falso. Por lo tanto, Q no cumple la propiedad de contener al vector nulo y, en consecuencia, no puede considerarse un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.3 (Combinación lineal y espacio generado)**.** *Sea $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ un subconjunto de un espacio vectorial V. Se llama* ***combinación lineal*** *de los vectores de S a cualquier vector de la forma*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k.$$

El conjunto formado por todas las combinaciones lineales posibles de los elementos de S recibe el nombre de ***espacio generado*** *por S y se denota por*

$$\operatorname{span}(S) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{R},\ v_i \in S \Big\}.$$

Ejemplo 1.4. Consideremos el conjunto $G = \{(1, 2, 3), (2, 1, 0), (0, 1, 2)\}$ en $\mathbb{R}^3$. Queremos determinar el espacio generado por G, es decir, el subespacio vectorial $\operatorname{span}(G)$ de $\mathbb{R}^3$, el cual está formado por todas las combinaciones lineales de los vectores en G.

El espacio generado por G se define como el conjunto de todos los vectores que se pueden obtener mediante combinaciones lineales de los vectores $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 0)$ y $(0, 1, 2)$. Esto

se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\text{span}(G) = \{\alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (2,1,0) + \gamma \cdot (0,1,2) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$$

donde α, β, y γ son escalares reales.

Al realizar la combinación lineal de estos vectores, obtenemos la siguiente expresión para un vector genérico del espacio generado:

$$\alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (2,1,0) + \gamma \cdot (0,1,2) = (\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta + \gamma, 3\alpha + 2\gamma).$$

Cualquier vector (x, y, z) en $\text{span}(G)$ debe satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta + \gamma, 3\alpha + 2\gamma) = (x, y, z),$$

lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= x, \\ 2\alpha + \beta + \gamma &= y, \\ 3\alpha + 2\gamma &= z. \end{aligned}$$

Para resolver este sistema, aplicamos el método de eliminación de Gauss. Al escalonar la matriz aumentada correspondiente, llegamos a la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ 3 & 0 & 2 & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -3 & 1 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & z - 3x - 2(y - 2x) \end{bmatrix}.$$

Para que el sistema sea consistente, el último elemento del lado derecho debe ser cero:

$$z - 3x - 2(y - 2x) = 0.$$

Esto implica que todos los vectores (x, y, z) en $\text{span}(G)$ deben cumplir con la condición $x - 2y + z = 0$, que describe un plano en $\mathbb{R}^3$.

Por lo tanto, el espacio generado por G se puede escribir como:

$$\text{span}(G) = \{(x, y, z) : \ x - 2y + z = 0,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Este plano es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, ya que cumple con las propiedades de cerradura bajo la suma de vectores y la multiplicación por escalares, y contiene al vector nulo.

Finalmente, verificamos que los vectores de G cumplen con la restricción obtenida. Para cada uno de los vectores, sustituimos sus componentes en la ecuación $x - 2y + z = 0$:

- Para $(1, 2, 3)$:

$$1 - 2(2) + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1, 2, 3) \in \text{span}(G).$$

- Para $(2, 1, 0)$:

$$2 - 2(1) + 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2, 1, 0) \in \text{span}(G).$$

- Para $(0, 1, 2)$:

$$0 - 2(1) + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (0, 1, 2) \in \text{span}(G).$$

De esta manera, hemos comprobado que los vectores de G están contenidos en el espacio generado $\text{span}(G)$, el cual coincide con el plano

$$x - 2y + z = 0$$

en $\mathbb{R}^3$. Este plano constituye un subespacio vectorial, cuya representación gráfica se muestra en la figura 1.2.

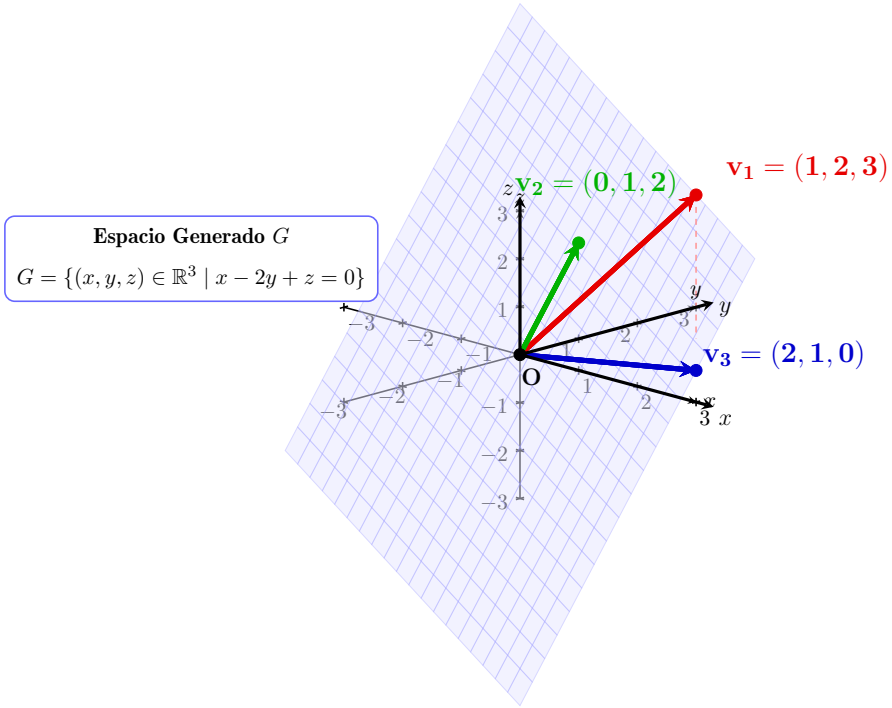

Figura 1.2: Representación gráfica del espacio generado por G en $\mathbb{R}^3$

Definición 1.4 (Aplicación lineal)**.** *Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Decimos que una función $T : V \to W$ es una* ***aplicación lineal*** *si cumple, para todos $u, v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \qquad T(\lambda v) = \lambda T(v).$$

En el caso particular de que $W = \mathbb{R}$, la aplicación T se denomina ***funcional lineal****.*

Ejemplo 1.5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación definida por:

$$T\left((x, y)\right) = (x + y, 2x, 3y).$$

Verifiquemos si T es una aplicación lineal. Sean $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. **Linealidad respecto a la suma de vectores:**

   Calculamos $T(u + v)$:

   $$\begin{aligned} T(u + v) &= T\left((u_1 + v_1, u_2 + v_2)\right) \\ &= ((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2), 2(u_1 + v_1), 3(u_2 + v_2)) \\ &= (u_1 + u_2 + v_1 + v_2, 2u_1 + 2v_1, 3u_2 + 3v_2). \end{aligned}$$

   Luego, calculamos $T(u) + T(v)$:

   $$\begin{aligned} T(u) + T(v) &= (u_1 + u_2, 2u_1, 3u_2) + (v_1 + v_2, 2v_1, 3v_2) \\ &= (u_1 + u_2 + v_1 + v_2,\ 2u_1 + 2v_1,\ 3u_2 + 3v_2) \end{aligned}$$

   Como $T(u + v) = T(u) + T(v)$, se cumple la propiedad de la linealidad respecto a la suma de vectores.

2. **Linealidad respecto al producto por escalar:**

   Calculamos $T(\lambda \cdot u)$:

   $$\begin{aligned} T(\lambda \cdot u) &= T\left((\lambda u_1, \lambda u_2)\right) = (\lambda u_1 + \lambda u_2, 2(\lambda u_1), 3(\lambda u_2)) \\ &= (\lambda(u_1 + u_2), \lambda(2u_1), \lambda(3u_2))\,. \end{aligned}$$

   También, calculamos $\lambda \cdot T(u)$:

   $$\lambda \cdot T(u) = \lambda(u_1 + u_2, 2u_1, 3u_2) = (\lambda(u_1 + u_2), \lambda(2u_1), \lambda(3u_2))\,.$$

   Como $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$, se cumple la propiedad de la linealidad respecto a la multiplicación por escalar.

Por lo tanto, la aplicación T es lineal, ya que satisface ambas propiedades de la linealidad: la linealidad respecto a la suma de vectores y la linealidad respecto al producto por escalar.

1.2. Espacios con seminorma asimétrica

Los espacios con seminorma asimétrica generalizan la noción clásica de espacio normado permitiendo que la seminorma no sea necesariamente simétrica. Este marco es útil para el estudio de espacios donde la asimetría es inherente, como en ciertos espacios funcionales y en análisis no simétrico.

Definición 1.5 (Seminorma asimétrica)**.** *Sea X un espacio vectorial real. Un funcional $p : X \to \mathbb{R}$ se llama* sublineal *si satisface las siguientes propiedades:*

1. ***Homogeneidad positiva:*** *Para todo $\lambda \geq 0$ y $x \in X$, se cumple*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

2. ***Subaditividad (desigualdad triangular):*** *Para todo $x, y \in X$, se tiene*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Si además $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, entonces p se denomina seminorma asimétrica.

Definición 1.6 (Espacio con seminorma asimétrica)**.** *Un* ***espacio con seminorma asimétrica*** *es un par (X, p), donde X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y p es una seminorma asimétrica definida en X.*

Observación 1.1. Si $p(x) = 0$ implica $x = 0$, entonces p se convierte en una **norma asimétrica**. Si además se cumple $p(x) = p(-x)$ para todo $x \in X$, p es una **norma usual**.

Ejemplo 1.6 (Seminorma Asimétrica en $\mathbb{R}^2$)**.** Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{si } x \geq 0, \\ 2|x| + |y| & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

A continuación, verificamos que p es una seminorma asimétrica al comprobar las propiedades fundamentales.

1. **Subaditividad (Desigualdad triangular):** Sean $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Consideramos los siguientes casos:

- **Caso 1:** $u_1 \geq 0$ **y** $v_1 \geq 0$:

$$p(u+v) = |u_1 + v_1| + |u_2 + v_2| \leq |u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2| = p(u) + p(v).$$

- **Caso 2:** $u_1 < 0$ **y** $v_1 < 0$:

$$p(u+v) = 2|u_1 + v_1| + |u_2 + v_2| \leq 2(|u_1| + |v_1|) + (|u_2| + |v_2|) = p(u) + p(v).$$

- **Caso 3:** $u_1 \geq 0$ **y** $v_1 < 0$:

$$p(u+v) \leq 2|u_1 + v_1| + |u_2 + v_2| \leq 2(|u_1| + |v_1|) + (|u_2| + |v_2|) = p(u) + p(v).$$

2. **Homogeneidad positiva:** Para todo $\lambda > 0$ y $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, se cumple:

   - Si $x \geq 0$, entonces

$$p(\lambda v) = p(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x| + |\lambda y| = \lambda(|x| + |y|) = \lambda p(v).$$

   - Si $x < 0$, se tiene

$$p(\lambda v) = p(\lambda x, \lambda y) = 2|\lambda x| + |\lambda y| = \lambda(2|x| + |y|) = \lambda p(v).$$

3. **No negatividad:** Para todo $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que $p(v) \geq 0$. Esto se debe a que $|x| \geq 0$ y $|y| \geq 0$, y las funciones involucradas son siempre no negativas.

4. **Asimetría:** El funcional p no es simétrico. Por ejemplo,

$$p(1, 0) = 1 \quad \text{mientras que} \quad p(-1, 0) = 2.$$

   Esto muestra que $p(x, y) \neq p(-x, y)$, confirmando que p es efectivamente asimétrica.

1.3. Funcionales lineales continuos

El estudio de los funcionales lineales continuos en espacios con seminorma asimétrica es fundamental para la extensión y análisis de aplicaciones lineales, como se ve reflejado en resultados como el teorema de Hahn-Banach.

Definición 1.7 (Funcional lineal)**.** *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $\varphi : X \to \mathbb{R}$ que sea lineal se denomina* ***funcional lineal****.*

Definición 1.8 (Continuidad respecto a una seminorma)**.** *Sea (X, p) un espacio vectorial con seminorma asimétrica p. Un funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{R}$ se dice* ***continuo*** *si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|\varphi(x)| \leq C\, p(x), \quad \forall x \in X.$$

Ejemplo 1.7. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y consideremos la siguiente seminorma asimétrica $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{si } x \geq 0, \\ 2|x| + |y| & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Consideremos el funcional lineal $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(x, y) = x + 2y.$$

A continuación, demostraremos que φ es continuo con respecto a la seminorma asimétrica p.

Para ello, nuestro objetivo es determinar si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\varphi(x, y)| \leq C\, p(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Caso 1: $x \geq 0$

Cuando $x \geq 0$, la seminorma p se define como:

$$p(x, y) = |x| + |y|.$$

En este caso, necesitamos comprobar que

$$|x + 2y| \leq C(|x| + |y|).$$

De hecho, podemos comprobar que esto es cierto con $C = 3$, ya que:

$$|x + 2y| \leq |x| + 2|y| \leq 3(|x| + |y|).$$

Por lo tanto, para $x \geq 0$, podemos tomar $C = 3$ y la desigualdad se cumple.

Caso 2: $x < 0$

Cuando $x < 0$, la seminorma p se define como:

$$p(x, y) = 2|x| + |y|.$$

En este caso, queremos demostrar la desigualdad

$$|x + 2y| \leq C(2|x| + |y|).$$

Podemos estimar lo siguiente:

$$|x + 2y| \leq |x| + 2|y| \leq 2|x| + |y| \leq 3(2|x| + |y|).$$

Así que, para $x < 0$, también podemos tomar $C = 3$, y la desigualdad se cumple.

Por lo tanto, existe una constante $C = 3$ tal que se cumple

$$|\varphi(x, y)| \leq 3p(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

lo que garantiza que el funcional lineal φ es continuo respecto a la seminorma asimétrica p.

Definición 1.9 (Norma de un funcional)**.** *La* ***norma*** *de un funcional lineal φ en (X, p) se define como*

$$\|\varphi\|_p = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X,\, p(x) \leq 1\}.$$

Esta norma es finita si y solo si φ es continuo.

Ejemplo 1.8. Consideremos el espacio $X = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana:

$$p(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definimos el funcional lineal $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(x, y) = 3x + 4y.$$

Queremos calcular la norma de φ en el espacio $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Es decir, buscamos:

$$\|\varphi\|_p = \sup\left\{|3x + 4y| : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}.$$

Para obtener una cota superior, aplicamos la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$|3x + 4y| \leq \left(\sqrt{3^2 + 4^2}\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dado que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, tenemos:

$$|3x + 4y| \leq 5\sqrt{x^2 + y^2} \leq 5.$$

Por lo tanto, el supremo de $|3x+4y|$ sobre el conjunto de x, y tales que $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ está acotado por 5, es decir:

$$\|\varphi\|_p \leq 5.$$

El valor máximo de $|3x+4y|$ se obtiene cuando el vector (x, y) está en la misma dirección que $(3, 4)$, es decir, cuando x y y son proporcionales a 3 y 4, respectivamente. Por lo tanto, podemos escribir

$$(x, y) = t \cdot (3, 4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sujeto a la restricción $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$, tenemos:

$$\sqrt{(3t)^2+(4t)^2} = \sqrt{9t^2+16t^2} = \sqrt{25t^2} = 5|t| \leq 1.$$

Esto implica que $|t| \leq \frac{1}{5}$, por lo que el vector (x, y) es:

$$(x, y) = \frac{1}{5} \cdot (3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Evaluamos el funcional φ en el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$:

$$\varphi\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = \frac{25}{5} = 5.$$

Por lo tanto, el valor máximo de $|\varphi(x, y)|$ sobre el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y) \leq 1\}$ es 5, y así:

$$\|\varphi\|_p = 5.$$

Como $\|\varphi\|_p = 5 < +\infty$, podemos concluir que el funcional φ es *continuo*. Además, para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos:

$$|\varphi(x, y)| = |3x+4y| \leq 5\sqrt{x^2+y^2} = 5p(x, y),$$

lo que muestra que la constante $C = 5$ es óptima y confirma que φ es continuo con constante de continuidad 5.

Observación 1.2. El conjunto de todos los funcionales lineales continuos sobre (X, p) se denota X_p^* y se llama el **dual asimétrico** de X.

1.4. Lema de Zorn

Lema 1.1 (Lema de Zorn)**.** *Sea $(P, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado no vacío. Si toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) en P posee una cota superior en P, entonces P contiene al menos un elemento maximal.*

Ejemplo 1.9 (Bases de Hamel)**.** Sea V un espacio vectorial no vacío sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces, V admite una base, es decir, un conjunto linealmente independiente maximal.

Para demostrarlo, consideremos el conjunto parcialmente ordenado

$$P = \{S \subset V : S \text{ es linealmente independiente}\},$$

con la relación de orden dada por inclusión: $S_1 \preceq S_2$ si y solo si $S_1 \subset S_2$.

Primero, observamos que P no es vacío. De hecho, para cualquier vector $v \neq 0$, el conjunto $\{v\}$ es linealmente independiente, por lo que $\{v\} \in P$.

Ahora, tomemos una cadena de subconjuntos linealmente independientes en P, es decir, una colección $\{S_i\}_{i\in I}$ tal que, para cualesquiera dos índices $i, j \in I$, se cumple que $S_i \subset S_j$ o $S_j \subset S_i$. Definimos

$$S = \bigcup_{i\in I} S_i.$$

Queremos probar que S es linealmente independiente. Sea $v_1, \ldots, v_n \in S$ y supongamos que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Cada vector v_k pertenece a algún S_{i_k}, y dado que $\{S_i\}$ es una cadena, existe un índice i_0 tal que $S_{i_k} \subset S_{i_0}$ para todo k. Por lo tanto, $v_1, \ldots, v_n \in S_{i_0}$, que es linealmente independiente, lo que implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Así, S también es linealmente independiente.

Además, claramente $S_i \subset S$ para todo $i \in I$, por lo que S constituye una cota superior de la cadena $\{S_i\}_{i\in I}$.

Finalmente, aplicando el Lema de Zorn, el conjunto P posee un elemento maximal B. Este B es un conjunto linealmente independiente maximal, es decir, una base de V.

Capítulo 2

Teorema de Hahn–Banach

En este capítulo estudiaremos los teoremas fundamentales de extensión de funcionales lineales en espacios vectoriales reales. Comenzaremos con el Lema de Extensión Unidimensional, que permite extender funcionales a subespacios generados por un solo vector adicional. Posteriormente, desarrollaremos el Teorema de Hahn–Banach en su forma analítica y presentaremos su generalización al contexto de espacios con seminorma asimétrica.

2.1. Formulación clásica del Teorema de Hahn–Banach

Lema 2.1 (Lema de Extensión Unidimensional)**.** *Sea X un espacio vectorial real, $p : X \to \mathbb{R}$ una función sublineal, $M \subset X$ un subespacio, y $f : M \to \mathbb{R}$ un funcional lineal que cumple*

$$f(x) \leq p(x) \quad \textit{para todo } x \in M.$$

Si $x_0 \in X \setminus M$, entonces existe una extensión lineal

$$F : M \oplus \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$$

de f tal que

$$F(y) \leq p(y) \quad \textit{para todo } y \in M \oplus \mathbb{R}x_0.$$

Demostración. Sea $M_1 = \operatorname{span}\{M \cup \{x_0\}\} = M \oplus \mathbb{R}x_0$. Para $x \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos:

$$F(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ debe elegirse de modo que $F \leq p$ en M_1, es decir:

$$f(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda x_0) \quad \forall x \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esto se verifica en tres casos:

Caso $\lambda = 0$: Trivialmente, se tiene $F(x) = f(x) \leq p(x)$ por hipótesis.

Caso $\lambda > 0$: Sea $y = \dfrac{x}{\lambda} \in M$. Entonces, tenemos la siguiente desigualdad:

$$F(x + \lambda x_0) \leq p(x + \lambda x_0) \implies f(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda x_0) \implies c \leq p(y + x_0) - f(y).$$

Caso $\lambda < 0$: Sea $\mu = -\lambda > 0$, y $z = \dfrac{x}{\mu} \in M$. Entonces, la desigualdad se convierte en:

$$F(x + \lambda x_0) \leq p(x + \lambda x_0) \implies f(x) + \lambda c \leq p(x - \mu x_0) \implies c \geq -p(z - x_0) + f(z).$$

Por lo tanto, para que $F \leq p$ en M_1, debe cumplirse:

$$-p(z - x_0) + f(z) \leq c \leq p(y + x_0) - f(y) \quad \forall y, z \in M.$$

Definimos:

$$a = \sup_{z \in M} \{-p(z - x_0) + f(z)\}, \qquad b = \inf_{y \in M} \{p(y + x_0) - f(y)\}.$$

Para todo $z, y \in M$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(z) + f(y) &= f(z + y) \\ &\leq p(z + y) \\ &\leq p(z - x_0) + p(x_0 + y), \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$-p(z - x_0) + f(z) \leq p(y + x_0) - f(y).$$

Tomando el supremo en z y el ínfimo en y, obtenemos que $a \leq b$. Por lo tanto, existe $c \in [a, b]$, lo cual garantiza la existencia de F como extensión lineal de f en M_1 que satisface $F \leq p$. □

Teorema 2.1 (Teorema de Extensión de Hahn-Banach, Forma Analítica)**.** *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal, $M \subset X$ un subespacio, y $f : M \to \mathbb{R}$ un funcional lineal que satisface*

$$f(x) \leq p(x) \quad \textit{para todo } x \in M.$$

Entonces, existe un funcional lineal $F_b : X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. *F_b extiende a f, es decir, $F_b|_M = f$,*

2. *$F_b(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Definimos el conjunto

$$S := \{(g, M_g) \mid M \subseteq M_g \subseteq X,\ g : M_g \to \mathbb{R} \text{ lineal},\ g|_M = f,\ g(x) \leq p(x)\ \forall x \in M_g\}.$$

Notemos que $S \neq \emptyset$, ya que $(f, M) \in S$.

Definimos un orden parcial en S por

$$(g, M_g) \preceq (h, M_h) \iff M_g \subseteq M_h \text{ y } h|_{M_g} = g.$$

Sea $\{(F_i, M_i)\}_{i \in I}$ una familia totalmente ordenada en S. Definimos el conjunto

$$M_b = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad F_b(x) = F_i(x) \text{ si } x \in M_i.$$

Es fácil verificar que F_b está bien definido: si $x \in M_i \cap M_j$, como la familia $\{(F_i, M_i)\}$ es totalmente ordenada, se cumple $(F_i, M_i) \preceq (F_j, M_j)$ o viceversa, por lo que $F_i(x) = F_j(x)$.

Ahora verificamos las propiedades:

1. F_b es lineal: Para $x, y \in M_b$, existen $i, j \in I$ con $x \in M_i$ y $y \in M_j$. Como la familia es totalmente ordenada, existe $k \in I$ tal que $M_i, M_j \subseteq M_k$. Entonces:

   $$F_b(x + y) = F_k(x + y) = F_k(x) + F_k(y) = F_b(x) + F_b(y).$$

   Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in M_b$, con $x \in M_i$, tenemos:

   $$F_b(\alpha x) = F_i(\alpha x) = \alpha F_i(x) = \alpha F_b(x).$$

2. $(F_b, M_b) \in S$: Verificamos que:

   - M_b es un subespacio de X (la unión de una cadena de subespacios es subespacio),
   - F_b es lineal,
   - $F_b|_M = f$,
   - $F_b(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M_b$.

3. $(F_b, M_b) \succeq (F_i, M_i)$ para todo $i \in I$.

Aplicando el Lema de Zorn, existe un elemento maximal (F_b, M_b) en S. Supongamos, por contradicción, que $M_b \neq X$. Entonces, existe $x_0 \in X \setminus M_b$. Por el Lema de Extensión Unidimensional, existe una extensión lineal $F_{b1} : M_b \oplus \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ de F_b tal que $F_{b1} \leq p$ en $M_b \oplus \mathbb{R}x_0$. Entonces, $(F_{b1}, M_b \oplus \mathbb{R}x_0) \in S$ y

$$(F_b, M_b) \prec (F_{b1}, M_b \oplus \mathbb{R}x_0),$$

lo que contradice la maximalidad de (F_b, M_b). Por lo tanto, $M_b = X$ y $F_b : X \to \mathbb{R}$ es la extensión deseada. □

2.2. Extensión del Teorema de Hahn–Banach a espacios con seminorma asimétrica

Teorema 2.2 (Hahn-Banach para espacios con seminorma asimétrica)**.** *Sea (X, p) un espacio vectorial real provisto de una seminorma asimétrica. Sea $M \subset X$ un subespacio y $f : M \to \mathbb{R}$ un funcional lineal que cumple*

$$f(x) \leq p(x) \quad \textit{para todo } x \in M.$$

Entonces, existe un funcional lineal $F_b : X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. *F_b extiende a f, es decir, $F_b|_M = f$,*
2. *$F_b(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. La demostración sigue la estructura clásica del Teorema de Extensión de Hahn–Banach en su forma analítica, utilizando que toda seminorma asimétrica es un funcional sublineal. Definimos el conjunto

$$S := \{(g, M_g) \mid M \subset M_g \subset X,\ g : M_g \to \mathbb{R} \text{ lineal},\ g|_M = f,\ g(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in M_g\}.$$

Este conjunto no es vacío, ya que $(f, M) \in S$.

Definimos un orden parcial en S de la siguiente manera:

$$(g, M_g) \preceq (h, M_h) \quad \text{si y solo si} \quad M_g \subseteq M_h \text{ y } h|_{M_g} = g.$$

Sea $\{(F_i, M_i)\}_{i \in I}$ una familia totalmente ordenada en S. Definimos el conjunto

$$M_b := \bigcup_{i \in I} M_i, \quad F_b : M_b \to \mathbb{R} \quad \text{mediante} \quad F_b(x) = F_i(x) \text{ si } x \in M_i.$$

F_b está bien definido y verificamos las siguientes propiedades:

1. F_b es lineal: Para $x, y \in M_b$, existen $i, j \in I$ con $x \in M_i$ y $y \in M_j$. Dado que la familia es totalmente ordenada, existe $k \in I$ tal que $M_i, M_j \subseteq M_k$. Entonces,

$$F_b(x+y) = F_k(x+y) = F_k(x) + F_k(y) = F_b(x) + F_b(y),$$

   y para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$F_b(\alpha x) = F_i(\alpha x) = \alpha F_i(x) = \alpha F_b(x).$$

2. $(F_b, M_b) \in S$: Verificamos que:

   - M_b es un subespacio de X,
   - F_b es lineal,
   - $F_b|_M = f$,
   - $F_b(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M_b$.

3. $(F_b, M_b) \succeq (F_i, M_i)$ para todo $i \in I$.

Aplicando el Lema de Zorn, existe un elemento maximal (F_b, M_b) en S. Supongamos, por contradicción, que $M_b \neq X$. Entonces, existe $x_0 \in X \setminus M_b$. Por el Lema de Extensión Unidimensional, existe una extensión lineal

$$F_{b1} : M_b \oplus \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$$

de F_b tal que $F_{b1} \leq p$ en $M_b \oplus \mathbb{R}x_0$.

Entonces, $(F_{b1}, M_b \oplus \mathbb{R}x_0) \in S$ y

$$(F_b, M_b) \prec (F_{b1}, M_b \oplus \mathbb{R}x_0),$$

lo que contradice la maximalidad de (F_b, M_b).

Por lo tanto, $M_b = X$ y $F_b : X \to \mathbb{R}$ es la extensión deseada que cumple

$$F_b(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

□

Capítulo 3

Aplicación del Teorema de Hahn–Banach en espacios con seminorma asimétrica

En este capítulo presentamos de manera detallada cómo construir la utilidad esperada como representación de preferencias sobre loterías. Partimos de los axiomas de consistencia, independencia y continuidad, para luego construir formalmente el espacio vectorial de diferencias de loterías y definir una seminorma asimétrica que refleja la relación de orden entre loterías de referencia.

Aplicando el Teorema de Hahn–Banach en este espacio, extendemos un funcional lineal a todo el espacio vectorial, lo que permite definir una función de utilidad lineal que representa completamente las preferencias y respeta la estructura probabilística de las loterías compuestas. Este formalismo proporciona un marco riguroso para el análisis de decisiones bajo incertidumbre y justifica matemáticamente la aditividad de la utilidad esperada.

3.1. Estructura del espacio de loterías y seminorma asimétrica

Definición 3.1 (Espacio de resultados y Loterías simples)**.** *Sea $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ un conjunto finito de resultados posibles. Una* ***lotería simple*** *sobre C es un vector de probabilidades*

$$L = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$$

que cumple:

1. $p_k \geq 0$ *para todo* $k = 1, \ldots, n$,

2. $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

El conjunto de todas las loterías simples se conoce como el ***simplex*** $(n-1)$***-dimensional:***

$$\Delta = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\}.$$

Ejemplo 3.1 (Espacio de resultados y Loterías en $\mathbb{R}^3$)**.** Supongamos que tenemos tres posibles resultados:

$$C = \{c_1, c_2, c_3\}$$

donde:

$$\begin{aligned} c_1 :&\quad \text{“Recibir \$100 con certeza”,} \\ c_2 :&\quad \text{“Recibir \$50 con certeza”,} \\ c_3 :=&\quad \text{“Recibir \$0 con certeza”.} \end{aligned}$$

Entonces:

- Una lotería simple es un vector de probabilidades $L = (p_1, p_2, p_3)$ que cumple

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ y } p_i \geq 0.$$

- El conjunto de todas las loterías simples forma el**simplex 2-dimensional**:

$$\Delta = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3_+ : p_1 + p_2 + p_3 = 1\}.$$

- Los vértices del simplex corresponden a las **loterías degeneradas**:

$$\begin{aligned} \delta_1 = (1,0,0) &\quad \text{“Recibir \$100 con certeza”,} \\ \delta_2 = (0,1,0) &\quad \text{“Recibir \$50 con certeza”,} \\ \delta_3 = (0,0,1) &\quad \text{“Recibir \$0 con certeza”.} \end{aligned}$$

Desde un punto de vista geométrico, el simplex Δ corresponde a un triángulo equilátero situado en el plano $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

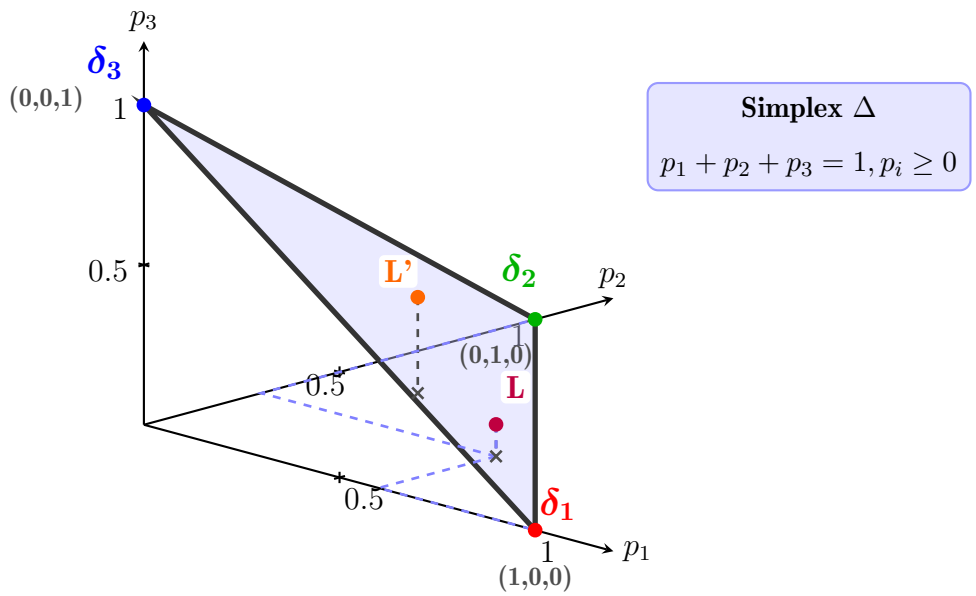

Figura 3.1: El Simplex de probabilidades Δ en $\mathbb{R}^3$.

Proposición 3.1 (Propiedades geométricas del simplex)**.** *El conjunto Δ posee las siguientes propiedades:*

1. *Δ es un conjunto convexo y compacto en $\mathbb{R}^n$.*

2. *La dimensión afín de Δ es $n-1$.*

3. *Los vértices de Δ corresponden a las loterías degeneradas:*

$$\delta_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad k = 1, \ldots, n,$$

   donde el 1 ocupa la k-ésima posición.

4. *Cualquier lotería $L \in \Delta$ puede expresarse como combinación convexa de los vértices:*

$$L = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta_k.$$

Demostración.

1. **Convexidad:** Sean $L = (p_1, \ldots, p_n)$ y $L' = (p'_1, \ldots, p'_n)$ elementos de Δ, y $\alpha \in [0,1]$. Entonces,

$$\alpha L + (1-\alpha)L' = (\alpha p_1 + (1-\alpha)p'_1, \ldots, \alpha p_n + (1-\alpha)p'_n).$$

Es evidente que $\alpha p_k + (1-\alpha)p'_k \geq 0$ para todo k, y además

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha p_k + (1-\alpha)p'_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} p_k + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{n} p'_k = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Por lo tanto, $\alpha L + (1-\alpha)L' \in \Delta$.

2. **Compacidad:** Mostramos que Δ es cerrado y acotado:

   - **Cerrado:** Consideremos las funciones continuas

     $$f(p) = \sum_{k=1}^{n} p_k - 1, \quad g_k(p) = -p_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

     Entonces,

     $$C_1 = f^{-1}(\{0\}) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\}, \quad C_{2,k} = g_k^{-1}((-\infty, 0]) = \{p \in \mathbb{R}^n : p_k \geq 0\}.$$

     El conjunto C_1 es cerrado por ser la preimagen de un conjunto cerrado bajo una función continua. Asimismo, cada conjunto $C_{2,k}$ también es cerrado.

     Por lo tanto, el simplex

     $$\Delta = C_1 \cap \bigcap_{k=1}^{n} C_{2,k}$$

     es cerrado, ya que es la intersección finita de conjuntos cerrados.

   - **Acotado:** Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$

     $$0 \leq p_i \leq \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

     Considerando la norma euclidiana:

     $$\|p\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

     pues $p_i^2 \leq p_i$ cuando $p_i \in [0, 1]$. Luego,

     $$\|p\|_2 \leq 1 \quad \text{para todo } p \in \Delta.$$

     Por lo tanto, Δ es acotado.

   Por el Teorema de Heine-Borel, dado que Δ es cerrado y acotado, se concluye que Δ es compacto.

3. **Dimensión:** La dimensión afín de Δ es $n - 1$.

Consideremos el hiperplano afín

$$H = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}.$$

Sea

$$p_0 = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right) \in H$$

y definamos el espacio de direcciones

$$V = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \right\}.$$

Para cualquier $p \in H$, se tiene $p = p_0 + (p - p_0)$ con $p - p_0 \in V$, luego

$$H = p_0 + V,$$

es decir, H es un espacio afín.

El espacio V es el núcleo de la forma lineal

$$\phi(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

que es sobreyectiva. Por el teorema de la dimensión,

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(V) + \dim(\mathrm{im}(\phi)),$$

se obtiene $\dim(V) = n - 1$.

Una base de V puede construirse a partir de los vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, -1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, -1, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ e_{n-1} &= (0, \ldots, 0, 1, -1), \end{aligned}$$

y los vértices $\delta_1, \ldots, \delta_n$ cumplen que los vectores $\delta_2 - \delta_1, \ldots, \delta_n - \delta_1$ son linealmente independientes en V. Esto confirma que la dimensión afín del simplex Δ es $n - 1$.

4. **Vértices:** Cada δ_n es un punto extremo. Por ejemplo, supongamos $\delta_1 = \alpha L + (1-\alpha)L'$ con $0 < \alpha < 1$ y $L, L' \in \Delta$. Entonces

$$(1, 0, \ldots, 0) = \alpha(p_1, \ldots, p_n) + (1 - \alpha)(p'_1, \ldots, p'_n),$$

lo que implica $p_1 = p'_1 = 1$ y $p_k = p'_k = 0$ para $k > 1$, luego $L = L' = \delta_1$.

5. **Combinación convexa de vértices:** Sea $L = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta$. Entonces claramente

$$L = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta_k,$$

pues cada coordenada del lado derecho coincide con la correspondiente coordenada de L y $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

□

Definición 3.2 (Espacio vectorial subyacente)**.** *Definimos el espacio de* ***diferencias de loterías*** *como*

$$X = \{L - L' : L, L' \in \Delta\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Proposición 3.2 (Caracterización de X)**.** *El espacio X coincide exactamente con el hiperplano*

$$Y = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}.$$

Además, Y es un espacio vectorial real de dimensión $n - 1$.

Demostración. Primero, mostramos que cualquier diferencia de loterías pertenece a Y. Sea $x = L - L'$ con $L, L' \in \Delta$. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (p_k - p'_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} p'_k = 1 - 1 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\{L - L' : L, L' \in \Delta\} \subseteq Y.$$

Ahora, sea $x \in Y$, es decir, $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

Si $x = 0$, entonces $x = L - L$ para cualquier $L \in \Delta$, y por tanto $x \in X$. Supongamos $x \neq 0$. Definimos

$$M = \max\{0, -x_1, \ldots, -x_n\}.$$

Entonces $M > 0$ y $x_k + M \geq 0$ para todo k. Consideramos las loterías

$$L = \left(\frac{x_1 + M}{nM}, \ldots, \frac{x_n + M}{nM} \right), \quad L' = \left(\frac{M}{nM}, \ldots, \frac{M}{nM} \right) = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right).$$

Además,

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + M) = \sum_{k=1}^{n} x_k + nM = nM,$$

por lo que $L, L' \in \Delta$. Como X es un subespacio vectorial, se sigue que

$$x = nM(L - L') \in X.$$

Por lo tanto,

$$Y \subseteq X.$$

En consecuencia, $X = Y$.

Finalmente, para la dimensión, observamos que Y es el núcleo de la forma lineal no nula

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

por lo que $\dim(Y) = n - 1$. □

Ejemplo 3.2. Consideremos el caso $n = 3$ y el simplex

$$\Delta = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \geq 0\}.$$

Definimos dos loterías específicas:

$$L = (0.6, 0.3, 0.1), \quad L' = (0.2, 0.5, 0.3).$$

Construcción del espacio de diferencias

Calculamos la diferencia:

$$x = L - L' = (0.6 - 0.2, 0.3 - 0.5, 0.1 - 0.3) = (0.4, -0.2, -0.2).$$

Verificamos que $x \in X$:

$$\sum_{k=1}^{3} x_k = 0.4 + (-0.2) + (-0.2) = 0.$$

Caracterización del espacio X

Para cualquier $L = (p_1, p_2, p_3)$ y $L' = (p'_1, p'_2, p'_3) \in \Delta$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{3} (p_k - p'_k) = (p_1 + p_2 + p_3) - (p'_1 + p'_2 + p'_3) = 1 - 1 = 0.$$

Por tanto,

$$L - L' \in \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{k=1}^{3} x_k = 0 \right\}.$$

Ahora, consideremos un ejemplo concreto. Sea

$$x = (2, -1, -1) \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_{k=1}^{3} x_k = 0.$$

Definimos

$$M = \text{máx}\{0, -x_1, -x_2, -x_3\} = \text{máx}\{0, -2, 1, 1\} = 1,$$

y construimos las loterías

$$L = \left(\frac{x_1 + M}{3M}, \frac{x_2 + M}{3M}, \frac{x_3 + M}{3M}\right) = \left(\frac{2+1}{3}, \frac{-1+1}{3}, \frac{-1+1}{3}\right) = (1, 0, 0),$$

$$L' = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Verificamos que $L, L' \in \Delta$ (suma de coordenadas $= 1$, todas ≥ 0), y además

$$L - L' = \left(1 - \frac{1}{3}, 0 - \frac{1}{3}, 0 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Finalmente, notamos que

$$x = (2, -1, -1) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 3(L - L') \in X.$$

Estructura de espacio vectorial

El conjunto

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2.

Para demostrar que X es un espacio vectorial, verificamos que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$:

1. **Vector cero:** El vector $0 = (0, 0, 0)$ pertenece a X ya que

   $$0 + 0 + 0 = 0.$$

2. **Cerrado bajo suma:** Sean $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$ y $y = (y_1, y_2, y_3) \in X$. Como

   $$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{y} \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

   la suma

   $$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

   satisface

   $$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0,$$

   por lo que $x + y \in X$.

3. **Cerrado bajo multiplicación por escalares:** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$.

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

tiene suma de sus coordenadas es

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$

por lo que $\alpha x \in X$.

Finalmente, para la dimensión, notamos que X es el núcleo de la forma lineal

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Dado que φ es no nula y lineal, $\dim(X) = \dim(\ker \varphi) = 3 - 1 = 2$.

Definición 3.3 (Loterías compuestas)**.** *Dadas K loterías simples*

$$L_k = (p_1^k, \ldots, p_n^k) \in \Delta, \quad k = 1, \ldots, K,$$

y probabilidades $\alpha_k \geq 0$ con $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$, la lotería compuesta $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ tiene como lotería reducida:

$$L = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k = \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_1^k, \ldots, \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_n^k \right).$$

Proposición 3.3 (Consistencia Algebraica)**.** *La operación de formar loterías compuestas corresponde exactamente a tomar combinaciones convexas en $\mathbb{R}^n$. Además:*

1. *$L \in \Delta$ (la combinación convexa de puntos del simplex está en el simplex).*

2. *La operación de formar loterías compuestas es asociativa y conmutativa.*

3. *Las loterías degeneradas son elementos neutros para mezclas triviales.*

Demostración.

1. Sea
$$L = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k, \quad L_k \in \Delta,\ \alpha_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1,$$
una combinación convexa de loterías L_k.

   Para cada coordenada $j = 1, \ldots, n$, se tiene
$$L_j = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_j^k.$$

Como $\alpha_k \geq 0$ y $p_j^k \geq 0$ para todo $k = 1, \ldots, K$ y todo $j = 1, \ldots, n$, se concluye que $L_j \geq 0$. Además, la suma de las coordenadas de L es

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} L_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_i^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Por tanto, L cumple que todas sus coordenadas son no negativas y su suma es 1, lo que demuestra que $L \in \Delta$.

2. Las loterías compuestas son asociativas y conmutativas.

   Asociatividad: Dadas tres loterías L, M, N y tres conjuntos de pesos $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ con suma uno, se cumple que

   $$(\alpha(L + \beta M)) + \gamma N = \alpha L + \alpha\beta M + \gamma N = \alpha L + (\beta M + \gamma N).$$

   Esto se sigue directamente de la asociatividad de la suma vectorial en $\mathbb{R}^n$ y la distributividad del producto por escalar. Por lo tanto, el resultado final de una lotería compuesta no depende de cómo agrupemos las combinaciones de loterías.

   Conmutatividad: Sea σ cualquier permutación de los índices $\{1, \ldots, K\}$. Entonces

   $$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{\sigma(k)} L_{\sigma(k)}.$$

   Esto se sigue directamente de la conmutatividad de la suma vectorial en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, la operación también es conmutativa, lo que significa que el orden en que combinamos las loterías no altera la lotería compuesta resultante.

   Por lo tanto, gracias a estas propiedades, la formación de loterías compuestas hereda completamente la estructura algebraica de $\mathbb{R}^n$, lo que garantiza que podamos combinar múltiples loterías de manera consistente sin importar el orden ni la agrupación.

3. Elementos neutros para mezclas triviales.

   Sea $L_1 \in \Delta$ y consideremos los pesos $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_k = 0$ para $k = 2, \ldots, K$. Entonces, la lotería compuesta L es:

   $$L = 1 \cdot L_1 + 0 \cdot L_2 + \cdots + 0 \cdot L_K = L_1.$$

De las propiedades del vector cero y la multiplicación por escalar en $\mathbb{R}^n$ resulta que:

$$L = 1 \cdot L_1 + 0 \cdot L_2 + \cdots + 0 \cdot L_K = L_1 + (0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0) = L_1.$$

Las loterías degeneradas δ_n actúan como elementos neutros en el sentido de que cualquier mezcla en la que una lotería tenga peso 1 y las demás tengan peso 0 reproduce exactamente esa lotería. Esto refleja el hecho de que, al asignar todo el peso a una sola lotería, se obtiene exactamente esa misma lotería sin alteraciones.

□

Ejemplo 3.3 (Loterías Compuestas para $n = 3$)**.** Consideremos $n = 3$ y las siguientes tres loterías simples:

$$L_1 = (0.6, 0.3, 0.1), \quad L_2 = (0.2, 0.5, 0.3), \quad L_3 = (0.4, 0.4, 0.2).$$

Asimismo, sean las probabilidades de mezcla:

$$\alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 0.3, \quad \alpha_3 = 0.2, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

La lotería compuesta $(L_1, L_2, L_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tiene como lotería reducida:

$$L = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k L_k = 0.5 \cdot (0.6, 0.3, 0.1) + 0.3 \cdot (0.2, 0.5, 0.3) + 0.2 \cdot (0.4, 0.4, 0.2) = (0.44, 0.38, 0.18).$$

Verificación de las propiedades

Propiedad 1: $L = (0.44, 0.38, 0.18) \in \Delta$

Cada coordenada es no negativa y la suma de coordenadas es

$$0.44 + 0.38 + 0.18 = 1,$$

por lo que $L \in \Delta$.

Propiedad 2: Asociatividad

Si primero mezclamos L_1 y L_2 con pesos relativos

$$\beta_1 = \frac{0.5}{0.8} = 0.625, \quad \beta_2 = \frac{0.3}{0.8} = 0.375,$$

obtenemos

$$L_{12} = 0.625 L_1 + 0.375 L_2 = (0.45, 0.375, 0.175).$$

Luego mezclando L_{12} con L_3 con pesos 0.8 y 0.2:

$$L' = 0.8L_{12} + 0.2L_3 = (0.44, 0.38, 0.18) = L,$$

lo que demuestra que el orden de agrupación no afecta el resultado.

Propiedad 3: Conmutatividad Mezclando en orden diferente: $(L_2, L_3, L_1; \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$.

La lotería compuesta L'' se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L'' &= 0.3 \cdot (0.2, 0.5, 0.3) + 0.2 \cdot (0.4, 0.4, 0.2) + 0.5 \cdot (0.6, 0.3, 0.1) \\ &= (0.06 + 0.08 + 0.30, \quad 0.15 + 0.08 + 0.15, \quad 0.09 + 0.04 + 0.05) \\ &= (0.44, 0.38, 0.18) = L. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L'' = L$, lo que demuestra que el orden en el que mezclamos las loterías no afecta el resultado final. Esto refleja la propiedad de conmutatividad de la mezcla de loterías.

Propiedad 4: Elemento neutro

Si $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, entonces

$$L = 1 \cdot L_1 + 0 \cdot L_2 + 0 \cdot L_3 = L_1,$$

mostrando que las loterías degeneradas actúan como elementos neutros.

Interpretación probabilística La lotería compuesta representa un proceso de dos etapas:

1. Se elige $k \in \{1, 2, 3\}$ con probabilidades α_k.
2. Dado k, se juega la lotería L_k.

La probabilidad final de obtener el resultado c_n es

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_k p_n^k.$$

Por ejemplo, para c_1:

$$0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.44.$$

se verifican todas las propiedades: cerradura, asociatividad, conmutatividad y elemento neutro.

3.1.1. Construcción de la seminorma asimétrica

Axioma 3.1 (Preferencias y elección de loterías de referencia)**.** *Sea $\succsim$ una relación de preferencia completa y transitiva sobre Δ que satisface el axioma de continuidad. Elegimos $\overline{L}, \underline{L} \in \Delta$ tales que*

$$\overline{L} \succsim L \succsim \underline{L}, \quad \forall L \in \Delta,$$

y asumimos que $\overline{L} \succ L$ (preferencia estricta).

Definición 3.4 (Funcional sublineal)**.** *Definimos el funcional $p : X \to \mathbb{R}$ por:*

$$p(x) = \text{ínf} \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(\overline{L} - \underline{L}) \succsim x \right\},$$

donde la relación $\succsim$ se extiende a X, identificando $x \in X$ con la diferencia de loterías correspondiente $\overline{L} - \underline{L}$.

Teorema 3.1 (p es una seminorma asimétrica)**.** *El funcional $p : X \to \mathbb{R}$ definido anteriormente cumple las siguientes propiedades:*

i) ***Subaditividad:*** *Para todo $x, y \in X$ se tiene*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

ii) ***Homogeneidad positiva:*** *Para todo $\alpha \geq 0$ y $x \in X$ se cumple*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

iii) ***No-negatividad:*** *Para todo $x \in X$ se verifica*

$$p(x) \geq 0.$$

Demostración.

i) **Subaditividad.** Sean $x, y \in X$, y definamos $p(x) = \lambda$, $p(y) = \alpha$, $p(x + y) = \beta$. Por definición, β es el ínfimo de los números reales tales que

$$\beta(\bar{L} - L) \succeq x + y.$$

Si $\lambda(\overline{L} - \underline{L}) \succsim x$ y $\alpha(\overline{L} - \underline{L}) \succsim y$, entonces, aplicando el axioma de independencia, se tiene

$$(\lambda + \alpha)(\overline{L} - \underline{L}) = \lambda(\overline{L} - \underline{L}) + \alpha(\overline{L} - \underline{L}) \succsim x + y.$$

Esto significa que $\lambda + \alpha$ pertenece al conjunto

$$\left\{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma(\overline{L} - \underline{L}) \succsim x + y\right\}.$$

Como β es el ínfimo de dicho conjunto, se sigue que

$$\beta \leq \lambda + \alpha,$$

es decir,

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

ii) **Homogeneidad positiva.** Sea $\alpha \geq 0$ y $x \in X$. Debemos probar que

$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Caso $\alpha > 0$:

Sea $p(\alpha x) = \lambda_0$. Por definición de ínfimo, para todo $\varepsilon > 0$ existe λ_ε tal que:

$$\lambda_\varepsilon(\overline{L} - \underline{L}) \succsim \alpha x \quad \text{con} \quad \lambda_\varepsilon < \lambda_0 + \varepsilon.$$

Dividiendo por $\alpha > 0$ y usando la homogeneidad de $\succsim$, obtenemos:

$$\frac{\lambda_\varepsilon}{\alpha}(\overline{L} - \underline{L}) \succsim x.$$

Por la definición del funcional $p(x)$, se deduce que

$$p(x) \leq \frac{\lambda_\varepsilon}{\alpha}.$$

Luego:

$$\lambda_\varepsilon \geq \alpha p(x).$$

Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$, obtenemos:

$$\lambda_0 \geq \alpha p(x),$$

es decir,

$$p(\alpha x) \geq \alpha p(x).$$

Ahora, sea $p(x) = \lambda_1$. Por definición, para todo $\varepsilon > 0$ existe μ_ε tal que:

$$\mu_\varepsilon(\overline{L} - \underline{L}) \succsim x \quad \text{con} \quad \mu_\varepsilon < \lambda_1 + \varepsilon.$$

Multiplicando por $\alpha > 0$ y usando la homogeneidad:

$$\alpha\mu_\varepsilon(\overline{L} - \underline{L}) \succsim \alpha x.$$

De acuerdo con la definición de $p(\alpha x)$, esto implica que

$$\alpha\mu_\varepsilon \geq p(\alpha x).$$

Luego:

$$\mu_\varepsilon \geq \frac{p(\alpha x)}{\alpha}.$$

Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$, obtenemos:

$$\lambda_1 \geq \frac{p(\alpha x)}{\alpha},$$

es decir:

$$\alpha p(x) \geq p(\alpha x).$$

Combinando ambas desigualdades, tenemos:

$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Caso $\alpha = 0$:

Consideremos el valor de $p(0 \cdot x) = p(0)$. Por definición:

$$p(0) = \text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda(\overline{L} - \underline{L}) \succsim 0\right\}.$$

Dado que $0(\overline{L} - \underline{L}) = 0 \sim 0$, se deduce inmediatamente que $p(0) \leq 0$.

Supongamos ahora que existe un escalar $\lambda < 0$ tal que

$$\lambda(\overline{L} - \underline{L}) \succsim 0.$$

En tal caso,

$$\lambda(\overline{L} - \underline{L}) = (-\lambda)(\underline{L} - \overline{L}) \succsim 0.$$

Pero como $\overline{L} \succ \underline{L}$, se tiene que $\underline{L} - \overline{L} \prec 0$, y por la propiedad de monotonía de la relación $\succsim$, resulta $(-\lambda)(\underline{L} - \overline{L}) \prec 0$ cuando $-\lambda > 0$, lo que lleva a una contradicción.

Por lo tanto, $p(0) \geq 0$. Combinando ambas desigualdades, concluimos que

$$p(0) = 0 = 0 \cdot p(x).$$

iii) No-negatividad. Por demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Procedamos por contradicción y supongamos que existe algún $x \in X$ tal que $p(x) < 0$.

Por definición de ínfimo, existe $\lambda < 0$ tal que:

$$\lambda(\overline{L} - \underline{L}) \succsim x.$$

Observemos que podemos reescribir:

$$\lambda(\overline{L} - \underline{L}) = (-\lambda)(\underline{L} - \overline{L}).$$

Dado que, por hipótesis, se cumple $\overline{L} \succ \underline{L}$, se deduce que

$$\underline{L} - \overline{L} \prec 0.$$

Dado que $-\lambda > 0$ (pues $\lambda < 0$), por la monotonía de las preferencias, se cumple que:

$$(-\lambda)(\underline{L} - \overline{L}) \prec 0.$$

Combinando las relaciones anteriores, obtenemos:

$$x \succsim \lambda(\overline{L} - \underline{L}) = (-\lambda)(\underline{L} - \overline{L}) \prec 0.$$

Esto implica que $x \prec 0$, lo cual es una contradicción, pues 0 representa la indiferencia entre loterías equivalentes.

Por lo tanto, nuestra suposición inicial es falsa, y debemos concluir que:

$$p(x) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

□

Teorema 3.2 (Propiedades adicionales de p)**.** *El funcional p también satisface las siguientes propiedades:*

1. $p(\overline{L} - \underline{L}) = 1$,
2. $p(\underline{L} - \overline{L}) > 0$,
3. *Si* $x \succsim 0$, *entonces* $p(-x) \geq 0$.

Demostración.

1. Observamos que $1 \cdot (\overline{L} - \underline{L}) \succsim \overline{L} - \underline{L}$, lo cual implica

$$p(\overline{L} - \underline{L}) \leq 1.$$

Por otro lado, si $\lambda < 1$, se tiene

$$\lambda(\overline{L} - \underline{L}) \prec \overline{L} - \underline{L},$$

lo que conduce a una contradicción. En consecuencia,

$$p(\overline{L} - \underline{L}) = 1.$$

2. Supongamos que $p(\underline{L} - \overline{L}) = 0$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\lambda < \varepsilon$ tal que $\lambda(\overline{L} - \underline{L}) \succsim \underline{L} - \overline{L}$. Pero para ε suficientemente pequeño, esto contradice $\overline{L} \succ \underline{L}$. Por lo tanto, $p(\underline{L} - \overline{L}) > 0$.

3. Sea $x \succsim 0$ y supongamos que $p(-x) < 0$. Entonces, existiría $\lambda < 0$ tal que $\lambda(\overline{L} - \underline{L}) \succsim -x$, lo que implicaría que:

$$x \succsim (-\lambda)(\overline{L} - \underline{L}) \succ 0,$$

lo cual es una contradicción, ya que $x \succsim 0$. Por lo tanto, $p(-x) \geq 0$.

□

Proposición 3.4 (Estructura algebraica completa)**.** *El par (X, p), donde*

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

y $p : X \to \mathbb{R}$ es una seminorma asimétrica, es un espacio vectorial topológico.

Demostración. Para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la bola abierta

$$B_\varepsilon(x) = \{ y \in X : p(y - x) < \varepsilon \}.$$

La colección $\{B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ forma una base para la topología τ_p sobre X. Por lo tanto, la topología inducida por p es la topología en la que las bolas abiertas definen la estructura topológica de X.

Ahora demostraremos que la operación de suma en X es continua con respecto a la topología inducida por p. Dado $x_0, y_0 \in X$ y un $\varepsilon > 0$, necesitamos encontrar un $\delta > 0$ tal que si $x \in B_\delta(x_0)$ e $y \in B_\delta(y_0)$, entonces $x + y \in B_\varepsilon(x_0 + y_0)$. Es decir, queremos que la suma de x y y esté contenida en una bola abierta centrada en $x_0 + y_0$.

Usando la subaditividad de p, se obtiene

$$p\left((x+y)-(x_0+y_0)\right) = p\left((x-x_0)+(y-y_0)\right) \leq p(x-x_0)+p(y-y_0).$$

Si elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces de $p(x-x_0) < \delta$ y $p(y-y_0) < \delta$ se sigue que

$$p\left((x+y)-(x_0+y_0)\right) < \delta + \delta = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $x+y \in B_\varepsilon(x_0+y_0)$, lo que prueba que la suma es una aplicación continua en X.

A continuación, demostraremos que el producto por escalar es continuo en X.

Sea $(\alpha_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$ y sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un $\delta > 0$ tal que, si

$$|\alpha - \alpha_0| < \delta \quad \text{y} \quad p(x-x_0) < \delta,$$

entonces se cumple

$$p(\alpha x - \alpha_0 x_0) < \varepsilon.$$

Para ello, notamos que la diferencia puede escribirse como

$$\alpha x - \alpha_0 x_0 = \alpha(x-x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0.$$

Usando la *subaditividad* y la *homogeneidad positiva* de p, obtenemos:

$$p\left(\alpha x - \alpha_0 x_0\right) \leq |\alpha|\, p(x-x_0) + |\alpha - \alpha_0|\, p(x_0).$$

Para garantizar que la expresión sea menor que ε, podemos acotar $|\alpha|$. Si tomamos $\delta_1 = 1$, entonces, para $|\alpha - \alpha_0| < 1$, tenemos $|\alpha| < |\alpha_0| + 1$. Así, definimos:

$$M = |\alpha_0| + 1.$$

A continuación, elegimos δ de manera que:

$$\delta < \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{2M}, \frac{\varepsilon}{2(p(x_0)+1)}\right\}.$$

Suponiendo que $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ y $p(x-x_0) < \delta$, tenemos:

$$p(\alpha x - \alpha_0 x_0) \leq |\alpha|\, p(x-x_0) + |\alpha - \alpha_0|\, p(x_0) < M \cdot \delta + \delta \cdot p(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, la operación de producto por un escalar es continua en X.

Hemos demostrado que el par (X, p), donde $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ y p es la seminorma definida, forma un *espacio vectorial topológico* con seminorma asimétrica. $\square$

Observación 3.1. *Interpretación económica* La seminorma asimétrica p captura la "disposición a pagar" en términos de la lotería de referencia:

- $p(x)$ es el mínimo múltiplo de la lotería premium $\bar{L} - \underline{L}$ que el decisor considera al menos tan bueno como x.
- La subaditividad refleja que combinar riesgos no aumenta la disposición a pagar más que la suma de las disposiciones individuales.
- La homogeneidad positiva refleja que escalar un riesgo escala proporcionalmente la disposición a pagar.

3.2. Aplicación en la construcción de funciones de utilidad esperada

Definición 3.5 (Subespacio y funcional inicial)**.** *Sea* $M = \{\lambda(\overline{L} - \underline{L}) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset X$ *y definimos un funcional* $f : M \to \mathbb{R}$ *por:*

$$f(\lambda(\overline{L} - \underline{L})) = \lambda.$$

Proposición 3.5. *El funcional* f *es lineal y satisface* $f(x) \leq p(x)$ *para todo* $x \in M$*.*

Demostración. La linealidad es inmediata, ya que f está definido de forma lineal en términos de λ, el cual es el coeficiente frente a $(\overline{L} - \underline{L})$, y esto respeta la adición y homogeneidad de los escalares.

Para la acotación, supongamos que $x = \lambda(\overline{L} - \underline{L})$:

- Si $\lambda \geq 0$, entonces $p(x) = \lambda = f(x)$.
- Si $\lambda < 0$, entonces $p(x) > 0 \geq \lambda = f(x)$.

En consecuencia, en ambos casos se verifica que $f(x) \leq p(x)$, lo que completa la demostración.. □

Observación 3.2. Dado que f es lineal en el subespacio M y $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$, el teorema de Hahn-Banach garantiza la existencia de un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ que extiende a f y satisface $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Este funcional F nos permite definir la siguiente función de utilidad:

Definición 3.6 (Función de utilidad)**.** *Definimos la función de utilidad como*

$$U(L) = F(L - \underline{L}),$$

donde L es una lotería, $\underline{L}$ es una lotería de referencia, y F es el funcional lineal extendido garantizado por el teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.3 (Forma de utilidad esperada)**.** *La función U tiene la forma:*

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i,$$

donde $u_n = U(\delta_n)$ para las loterías degeneradas δ_n.

Demostración. Dado que $L = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_i$, tenemos:

$$L - \underline{L} = \sum_{i=1}^{n} p_i (\delta_i - \underline{L}).$$

Aplicando la linealidad del funcional F, obtenemos:

$$U(L) = F(L - \underline{L}) = F\left(\sum_{i=1}^{n} p_i (\delta_i - \underline{L}) \right).$$

Por la linealidad de F, se puede descomponer la suma:

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i F(\delta_i - \underline{L}).$$

Dado que $F(\delta_i - \underline{L}) = U(\delta_i)$ por definición de U, obtenemos:

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(\delta_i).$$

□

3.3. Propiedades y consecuencias en economía y teoría de decisiones

La siguiente proposición representa la relación de preferencia entre loterías, de manera que preserva el orden de las preferencias del individuo.

Proposición 3.6 (Representación de preferencias)**.** *La función U representa la relación de preferencia $\succeq$, es decir:*

$$L \succeq L' \iff U(L) \geq U(L').$$

Demostración. Supongamos que $L \succeq L'$, es decir, que L es preferido o indiferente a L'. Según la observación 3.2, el funcional F extiende a f de manera lineal y satisface la desigualdad $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Dado que $L - L' \succeq 0$, se sigue que

$$F(L - L') \geq 0.$$

Por lo tanto:

$$U(L) - U(L') = F(L - L') \geq 0,$$

lo que implica que $U(L) \geq U(L')$.

Recíprocamente, supongamos que $U(L) \geq U(L')$ pero que $L \prec L'$. Entonces $L' - L \succ 0$, lo que implica que

$$p(L' - L) > 0,$$

ya que se requiere una cantidad estrictamente positiva de $\bar{L} - \underline{L}$ para dominar un vector estrictamente preferido a 0.

Por otra parte, $U(L) \geq U(L')$ implica que

$$F(L - L') \geq 0,$$

y por lo tanto

$$F(L' - L) = -F(L - L') \leq 0.$$

Pero como $L' - L \succ 0$, se tiene necesariamente $F(L' - L) \geq 0$, lo cual contradice la desigualdad anterior.

Esta contradicción demuestra que no puede ocurrir $L \prec L'$, por lo que necesariamente se tiene

$$L \succeq L'.$$

□

Axioma de Independencia: Para todas las loterías $L_1, L_2, L_3 \in \Delta$, y para todo $\alpha \in [0, 1]$, se cumple que:

$$L_1 \succeq L_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha L_1 + (1 - \alpha)L_3 \succeq \alpha L_2 + (1 - \alpha)L_3,$$

es decir, si un individuo prefiere L_1 sobre L_2, entonces la mezcla de L_1 con L_3 será preferida de la misma forma que la mezcla de L_2 con L_3, sin importar el valor de $\alpha \in [0, 1]$.

Proposición 3.7. *La linealidad de U es equivalente al axioma de independencia.*

Demostración. Supongamos que U es lineal. Sea $\alpha \in [0,1]$ y $L, L', L'' \in \Delta$ con $L \succsim L'$. Por la proposición 3.6, se obtiene

$$U(L) \geq U(L').$$

Por linealidad de U, se tiene que

$$U(\alpha L+(1-\alpha)L'') = \alpha U(L)+(1-\alpha)U(L''), \quad U(\alpha L'+(1-\alpha)L'') = \alpha U(L')+(1-\alpha)U(L'').$$

Como $U(L) \geq U(L')$, se obtiene:

$$\alpha U(L) + (1-\alpha)U(L'') \geq \alpha U(L') + (1-\alpha)U(L''),$$

lo que implica:

$$\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L'',$$

cumpliéndose así el axioma de independencia.

Recíprocamente, supongamos que la relación de preferencia $\succsim$ satisface los axiomas de independencia y continuidad. Por el teorema de representación de Von Neumann–Morgenstern (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995, Cap. 6), existe una función de utilidad $U : \Delta \to \mathbb{R}$ que representa a $\succsim$ y que es afín respecto a combinaciones convexas de loterías, es decir, para todo $L, L' \in \Delta$ y todo $\alpha \in [0,1]$,

$$U(\alpha L + (1-\alpha)L') = \alpha U(L) + (1-\alpha)U(L').$$

Por lo tanto, la función de utilidad U es lineal (en el sentido de loterías). □

A continuación, presentamos una proposición que formaliza la propiedad de afinidad o linealidad de la utilidad esperada, que está estrechamente relacionada con la consistencia de las loterías compuestas.

Proposición 3.8 (Consistencia con loterías compuestas)**.** *Para loterías compuestas, se cumple la siguiente igualdad*

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k),$$

donde $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$ *y* $L_k \in \Delta$.

Demostración. Sea $L = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k$ la lotería compuesta, con los coeficientes α_k sumando 1. Por la definición de la función de utilidad U, sabemos que la utilidad de la lotería compuesta L está dada por:

$$U(L) = F(L - \underline{L}),$$

donde $F : X \to \mathbb{R}$ es la extensión lineal de la función de utilidad, y $\underline{L}$ es la lotería de referencia (la lotería con el menor valor posible en el espacio Δ).

Ahora, podemos reescribir la diferencia $L - \underline{L}$ como una combinación lineal de las diferencias $L_k - \underline{L}$:

$$L - \underline{L} = \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k \right) - \underline{L} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k (L_k - \underline{L}),$$

ya que $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$.

Utilizando la linealidad de F, podemos descomponer la expresión de la utilidad de L de la siguiente manera:

$$U(L) = F\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k (L_k - \underline{L}) \right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k F(L_k - \underline{L}).$$

Finalmente, como $U(L_k) = F(L_k - \underline{L})$ para cada lotería L_k, obtenemos que:

$$U(L) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k).$$

□

Observación 3.3. La interpretación económica de la construcción de la utilidad esperada puede resumirse en los siguientes puntos:

1. $p(x)$ representa la *disposición a pagar* en términos de la lotería de referencia.

2. La subaditividad refleja que combinar riesgos no incrementa la disposición a pagar más que la suma de las disposiciones individuales.

3. La construcción vía Hahn-Banach muestra que la utilidad esperada es una consecuencia natural de la estructura lineal del espacio de diferencias y la consistencia con la preferencia.

Conclusión

La tesis confirma que el Teorema de Hahn–Banach es una herramienta adecuada para extender funcionales lineales en espacios con seminorma asimétrica, garantizando la construcción de una utilidad esperada que cumple con los axiomas clásicos de la teoría de la decisión bajo incertidumbre. La utilidad obtenida conserva la linealidad y la aditividad sobre loterías compuestas, reflejando de manera consistente las preferencias del decisor. Este enfoque ofrece un marco matemático sólido que conecta la teoría de espacios normados asimétricos con la teoría económica de la elección bajo riesgo, justificando formalmente la estructura de la utilidad esperada y su aplicabilidad en el análisis de decisiones probabilísticas.

Bibliografía

Alegre, C. (2009). Continuous operators on asymmetric normed spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 122(4), 357–372. https://doi.org/10.1007/s10474-009-0015-0

Altun, I., Altun, I., & Olgun, M. (2020). An existence and uniqueness theorem for a fractional boundary value problem via new fixed point results on quasi metric spaces. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 91, 105462. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105462

Cobza, S. (2013). *Functional analysis in asymmetric normed spaces*. Springer.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). Microeconomic theory. Oxford University Press.

Romaguera, S., Sapena, A., & Tirado, P. (2007). The Banach fixed point theorem in fuzzy quasi-metric spaces with application to the domain of words. *Topology and its Applications*, 154(10), 2196–2203. https://doi.org/10.1016/j.topol.2006.09.018