Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Multiplicidad de soluciones para un problema elíptico semilineal con crecimiento crítico

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Eduardo HUERTO CAQUI

ASESOR

Dr. Jorge Alberto CORIPACO HUARCAYA

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Huerto, E. (2021). *Multiplicidad de soluciones para un problema elíptico semilineal con crecimiento crítico*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Eduardo Huerto Caqui.
DNI	41268865
URL de ORCID	
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
DNI	41075852
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-1927-0724
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales(Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: San Juan de Lurigancho A. A. H.H.: Huascar Manzana 38 y lote 2 Latitud: -11.9683 Longitud: -77.0043
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Agosto 2014 - Agosto 2015
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe- repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:00 horas del Sábado 08 de mayo del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (PRESIDENTE), Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (MIEMBRO) y el Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "MULTIPLICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA ELÍPTICO CON CRECIMIENTO CRÍTICO", presentado por el señor Bachiller Eduardo Huerto Caqui, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación SOBRESALIENTE....., con un calificativo promedio de 18 (DIECIOCHO)..(letras y números).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, manifestó que el señor Bachiller Eduardo Huerto Caqui, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 12.11 m. horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. EUGENIO CABANILLAS LAPA
PRESIDENTE

DR. ALFONSO PÉREZ SALVATIERRA
MIEMBRO

DR. JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA
MIEMBRO ASESOR

La Vicedecana (e) de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Mg. Zoraida Judith Huamán Gutiérrez, ccertifica virtualmente la participación del Jurado Evaluador, el titulando, el acto de instalación y el inicio, desarrollo y término del acto académico de sustentación, dejando constancia en el acta respectiva.

UNMSM
Firmado digitalmente por CABANILLAS LAPA Eugenio FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 08.05.2021 13:18:06 -05:00

Agradecimientos

A mis maestros por las enseñanzas que contribuyeron a mi formación.
A mis padres por su afecto incondicional, ánimo, enseñanzas, apoyo y por todo lo que siempre me han brindado.
A mis amigos.

A mi familia.

Resumen

En este trabajo, estudiamos la "existencia de soluciones de un problema semilineal."

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{2^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio suave y limitado, $N \geq 3$, $b > 0$, $1 < q < 2$, $u^+ = \max\{u, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$, $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$ y $2^* = 2N/(N-2)$ es el exponente crítico de Sobolev. Usando métodos variacionales, mostramos la existencia de almenos tres soluciones. Los dos primeros se obtuvieron a través del "Teorema de paso de la Montaña y el tercero a través del Teorema de Enlace."

Palabras claves: Ecuaciones diferenciales. Exponente crítico. Problema semi-lineal.

Abstract

"In this work, we study the existence of solutions for the semilinear elliptic problem"

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{2^*-1} & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain, $N \geq 3$, $b > 0$, $1 < q < 2$, $u^+ = \max\{u, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$, $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$ and $2^* = 2N/(N-2)$ is the critical exponent of Sobolev."Using variational methods, we show the existence of at least three solutions. The first two were obtained via the mountain pass theorem and the third via the linking Theorem."

Keywords: "Differential equations. Critical exponent. Semilinear problem."

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo exponer la parte crítica del problema encontrado en el artículo de F. O. de Paiva y A. E. Presoto [14], que se estudiará a lo largo de este trabajo. Estudiamos la existencia y multiplicidad del problema elíptico semilineal.

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{2^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio limitado con frontera regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, λ es un parámetro positivo, $1 < q < 2$, $u^+ = \max\{u, 0\}$ y $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Debido a que la inmersión de $H_0^1(\Omega)$ en $L^{2^*}(\Omega)$ no es compacta, este "problema" se transfiere al funcional. Esto crea una gran dificultad para mostrar la existencia de una solución distinta de cero. Los argumentos utilizados aquí para este caso crítico son adaptaciones de la técnica desarrollada por Brezis-Niremberg [5], en la que se demuestra que el funcional satisface Palais Smale por debajo de cierto nivel.

Mostraremos también que el problema (1) tiene tres soluciones. Las herramientas variacionales serán el teorema de Paso de la Montaña y el teorema de Linking.

"Em 1994, A. Ambrozetti, H. Brezis e G. Cerami [1] consideraron el problema

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= \lambda u^q + u^p & \text{en } \Omega, \\ u &> 0 & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde mostraron la existencia de un valor $\Lambda > 0$ de modo que halla al menos dos soluciones positivas cuando $\lambda \in (0, \Lambda)$, por lo menos uno para $\lambda = \Lambda$ y ninguna solución positiva cuando $\lambda > \Lambda$."Después de la aparición de este trabajo, ha habido una creciente preocupación por el estudio de la multiplicidad de soluciones para el problema elíptico semilineal:

$$-\Delta u = \mu |u|^{q-2}u + g(u) \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Cuando g es asimétrica y asintóticamente lineal, este problema se consideró en [11, 12, 13, 22]. Asimétrica aquí significa que g satisface una condición de Ambrosetti-Prodi, es decir, $g_- = \lim_{t\to-\infty} \frac{g(t)}{t} < \lambda_k < g_+ = \lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t}$. Cuando g es asimétrica y superlineal en $+\infty$, $g_+ = \infty$, este problema fue abordado en [11, 13, 19]. En [11] se consideró un problema con la condición de frontera de tipo Neumann y en [19] los autores estudiaron un problema relacionado con el operador p-laplaciano. En [13], se suponía que $\frac{g(t)}{t}$ cruza un autovalor de Laplacian cuando t varía de 0 a $-\infty$, es decir, $g'(0) < \lambda_k < g_-$. Hipótesis similares también aparecen en [22]. Suposiciones que involucran el primer autovalor, como $g'(0), g_- \leq \lambda_1$, fueron considerados en [11, 12, 19]. Se sabe que el cruce de autovalores, en particular, el primero, está relacionado con la existencia y la multiplicidad de soluciones a tales problemas. En este trabajo se observa que la no linealidad $g(t) = at + b(t^+)^{2^*-1}$, con $a > \lambda_1$, no está incluido en ninguno de los trabajos anteriores. "Además, se han estudiado problemas similares con $\mu = 0$ en [19] para problemas de Dirichlet y en [2, 21] para problemas de Neumann. Nuestro problema (1) también está estrechamente relacionado con la clase de problemas superlineales del tipo Ambrosetti-Prodi:

$$-\Delta u = au + (u^+)^p + f(u) \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{con} \quad f \in L^2(\Omega).$$

Como por ejemplo, en el caso donde $a = \lambda_1$, este problema tiene una solución, si $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ es lo suficientemente pequeño (vea [15])."

"Em 1986, B. Ruf e P. N. Srikanth [26] estudiaron el problema superlineal con el exponente subcrítico:

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= \lambda u + (u^+)^p + f(u) \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio limitado suave, $1 < p < 2^* - 1$ si $N \geq 3, h \in L^s(\Omega)$ con $s > N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Usando la descomposición $f = t\varphi_1 + f_1$ con $\int_\Omega f_1\varphi_1 = 0$ y la hipótesis de que $\lambda > \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, Ruf y Srikanth mostraron la existencia de una constante $T = T(f_1)$, tal que para $t > T$, el problema (3) tiene al menos dos soluciones."

Otros resultados y variaciones para el problema anterior se puede encontrar en [7, 8, 10, 16, 25]. La principal motivación para el problema (1) es el trabajo pionero de Brezis-Nirenberg [5], donde se consideró el problema crítico:

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= \lambda u + |u|^{2^*-2}u \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\lambda < \lambda_1$. Ellos se dieron cuenta de que el problema tenía una ruptura en la compacidad en el valor $\dfrac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$, de modo que construyeron niveles mínimax para el funcional de energía asociado con el problema (4). Tales ideas impregnaron muchos trabajos posteriores, dentro de los cuales el trabajo de Capozzi, Fortunato y Palmieri [9] que básicamente estudiaron el problema anterior, con λ entre dos autovalores. Ellos demostraron que el problema anterior tiene una solución no trivial para todos $\lambda > 0$ siempre que $N \geq 5$ y cuando λ no es el autovalor de Laplaciano para $N = 4$. Comenzamos el Capítulo 1 con resultados que se utilizarán en el siguiente capítulo. En el Capítulo 2 estudiamos el problema (1), donde usamos la técnica del teorema de Paso de la Montaña para obtener una solución negativa y una positiva. Además, utilizamos el teorema de Linking para obtener una tercera solución, con la compacidad satisfecha por debajo de cierto nivel.

Nomenclatura

Δu	$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$\langle , \rangle_E$	producto interno definido en E.
∇u	$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	subconjunto abierto y limitado.
$\overline{\Omega}$	es la cerradura de Ω.
$\partial\Omega$	frontera de Ω.
$\rightarrow$	convergencia fuerte.
$\rightharpoonup$	convergencia debil.
$\|.\|_{C^1}$	norma definida en $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$
$B_R(x_0)$	"bola de radio R centrada en el punto x_0."
$C(\Omega)$	espacio de las funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas en Ω.
$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	espacio de las funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas en $\overline{\Omega}$.
$C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	"espacio de las funciones $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que tienen derivadas contínuas en $\overline{\Omega}$."
$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	espacio de las funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciábles con soporte compacto.

$C_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ "espacio de las funciones $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possen derivadas contínuas en $\overline{\Omega}$ con soporte compacto."

E^* espacio dual topológico de E.

$f = O(g)$ cuando $x \to x_0$, significa que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$, $\forall\, x$ suficientemente próximo de x_0.

$f = o(g)$ cuando $x \to x_0$, significa que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

$H_0^1(\Omega)$ "cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ con respecto al espacio $H^1(\Omega)$ con norma $\|u\|_{H^1} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx\right]^{\frac{1}{2}}$. La norma que usaremos en $H_0^1(\Omega)$ es dada por

$$\|u\| = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

"

$H^k(\Omega)$ espacio de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.

$L^p(\Omega)$ "espacio de las funçiones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ con norma $L^p(\Omega)$ finita"

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty.$$

$L^\infty(\Omega)$ conjunto de las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ donde $\sup\limits_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty$ con norma

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ cuase siempre en } \Omega\}.$$

$med\,(A)$ "es la medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^N$."

$supp\, f$	soporte de la función f.
$U \hookrightarrow V$	inmersión contínua entre los espaços U y V.
$u^+ = max\{u, 0\}$	parte positiva de u.
$u^- = max\{-u, 0\}$	parte negativa de u.
$W^{k,p}(\Omega)$	espacio de Sobolev (ver Apendice A.1, Definición A.8).
q.t.p.	"cuase todo punto (al menos de un conjunto de medida de Lebesgue nula)."

Sumário

Introducción **v**

1 Resultados válidos para nuestro problema. **2**

1.1 Definición de solución debil 2

1.2 Regularidad del Funcional 3

1.3 Limitación de las sucesiones (PS) asociados al funcional I_λ 8

1.4 Compacidad del funcional I_λ 24

1.5 Minimización en C^1 versus Minimización en $H_0^1(\Omega)$ 35

2 Multiplicidad de soluciones **36**

2.1 Solución positiva del funcional I_λ 37

2.1.1 Compacidade do funcional I_λ^+ 38

2.1.2 Geometría del Teorema de Passo de la Montaña del funcional I_λ^+ 38

2.1.3 Solución positiva via el teorema de Passo da Montaña 42

2.2 Solución negativa del funcional I_λ 45

2.2.1 Geometría de Teorema de Paso de la Montaña del funcional I_λ^- 46

2.2.2 Solución negativa via el Teorema de Paso de la Montaña . . 48

2.3 Tercera solución. 50

2.3.1 Descomposición del espacio $H_0^1(\Omega)$ 50

2.3.2 Geometría del Teorema de Linking 53

2.3.3 Nível Mini-max 61
2.3.4 Solución via el Teorema de Linking 68
2.4 Prueba de Teorema 2.1 70

A Resultados auxiliares **71**
A.1 Resultados Generales 71
A.2 Algunos resultados del análisis funcional 76
A.3 Resultados da Teoria dos Pontos Críticos 79

Referências Bibliográficas **81**

Capítulo 1

Resultados válidos para nuestro problema.

En este capítulo, demostraremos los resultados que se utilizarán para el problema elíptico semilineal,

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{2^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio limitado con frontera regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$, $u^+ = \max\{u, 0\}$ y $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

1.1 Definición de solución debil

Definición 1.1 *Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución debil del problema (1.1) si*

$$0 = \int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u|^{q-2}uh\mathrm{d}x - a\int_\Omega uh\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}h\mathrm{d}x,$$

para todo $h \in H_0^1(\Omega)$.

Antes de comenzar el primer resultado, necesitaremos algunas notaciones que se utilizarán durante todo el trabajo. Denotamos los autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$

por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \cdots$, e por φ_j las autofunciones correspondientes. Las normas definidas en $H_0^1(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ son denotadas por $\|.\|$ e $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ respectivamente.

1.2 Regularidad del Funcional

Comenzamos mostrando que el funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} \mathrm{d}x,$$

es de clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y su derivada en u es

$$\langle I'_\lambda(u), h\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega |u|^{q-2}uh\mathrm{d}x - a\int_\Omega uh\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}h\mathrm{d}x, \quad (1.2)$$

para todo $h \in H_0^1(\Omega)$.

Note que las soluciones débiles del problema (1.1) corresponden a los puntos críticos del funcional I_λ.

Lema 1.2 *"El funcional I_λ es de clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y su derivada se muestra en (1.2)."*

Demostración: Tomamos $I_1, I_2 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, de la siguinte manera:

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x,$$
$$I_2(u) = \frac{1}{\gamma}\int_\Omega |u|^\gamma \mathrm{d}x, \quad \text{para } 1 < \gamma \leq 2^*,$$

e iremos a probar que I_1, I_2 son de clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmación 1.3 *I_1 es de clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

En efecto, en primer lugar mostraremos que I_1 es Gateaux diferenciable. Para esto,

encontraremos $\langle I_1'(u), h\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle I_1'(u), h\rangle =& \lim_{t\to 0} \frac{I_1(u+th) - I_1(u)}{t} \\ =& \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\|u+th\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2}{t} \\ =& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\|u\|^2}{2} + t\langle u, h\rangle_{H_0^1} + \frac{t^2\|h\|}{2} - \frac{\|u\|^2}{2}\right) \\ =& \langle u, h\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de Gateux existe en u con $\langle I_1'(u), h\rangle = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x$. Ahora mostraremos que I_1' es contínua, sea $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$. Queremos mostrar que $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$ en $(H_0^1(\Omega))^*$. Para todo $h \in H_0^1(\Omega)$ con $\|h\| \leq 1$, veamos que

$$\begin{aligned}\left|\langle I_1'(u_n) - I_1'(u), h\rangle\right| &= \left|\langle I_1'(u_n)h\rangle - \langle I_1'(u)h\rangle\right| \\ &= \left|\langle u_n, h\rangle_{H_0^1} - \langle u, h\rangle_{H_0^1}\right| \\ &= \left|\langle u_n - u, h\rangle_{H_0^1}\right| \\ &\leq \|u_n - u\|\|h\| \leq \|u_n - u\|.\end{aligned}$$

Esto implica que $\left|\langle I_1'(u_n) - I_1'(u), h\rangle\right| \leq \|u_n - u\|$ para todo $h \in H_0^1$ con $\|h\| \leq 1$, por consiguinte

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{(H_0^1)^*} = \sup_{\|h\|\leq 1} \left|\langle I_1'(u_n) - I_1'(u), h\rangle\right| \leq \|u_n - u\|.$$

Por la hipótesis, sigue que $\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{(H_0^1)^*} \to 0$, cuando $n \to \infty$, esto es, $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$ cuando $n \to \infty$. Deste modo, concluimos que I_1' es continuo y con el resultado (ver Apendice A.1, Teorema A.3), $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmación 1.4 *I_2 es de clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

En efecto, en primer lugar mostraremos que I_2 es Gateaux diferenciable. Para esto encontraremos $\langle I_2'(u), h\rangle$.

Consideremos la seguiente función "$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(s) = \frac{1}{\gamma}|u + sth|^\gamma$ donde $t \in \mathbb{R}$, $0 < |t| < 1$ y $u, h \in H_0^1(\Omega)$. Note que, f é diferenciable em $(0,1)$ y

(i) $f(1) = \frac{1}{\gamma}|u + th|^\gamma$,

(ii) $f(0) = \frac{1}{\gamma}|u|^\gamma$,

(iii) $f'(s) = |u + sth|^{\gamma-2}(u + sth)th$."

Por lo tanto, de acuerdo al teorema del "valor medio, existe $\delta \in (0,1)$ que verifica $f(1) - f(0) = f'(\delta)(1-0)$ sustituyendo los items (i), (ii), (iii) sigue que

$$\frac{1}{\gamma}|u + th|^\gamma - \frac{1}{\gamma}|u|^\gamma = |u + \delta th|^{\gamma-2}(u + \delta th)th.$$

Luego,

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u + th|^\gamma - |u|^\gamma}{t}\right) = |u + \delta th|^{\gamma-2}(u + \delta th)h.”$$

Entonces,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u + th|^\gamma - |u|^\gamma}{t}\right) = |u|^{\gamma-2}uh. \tag{1.3}$$

ademas de eso,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u + th|^\gamma - |u|^\gamma}{t}\right)\right| &= |u + \delta th|^{\gamma-1}|h| \\ &\leq (|u| + |h|)^{\gamma-1}|h|.\end{aligned}$$

Ahora, verificaremos que $(|u| + |h|)^{\gamma-1}|h| \in L^1(\Omega)$, Para eso por el Teorema A.14 (ver Apendice A.1), podemos observar que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$ para $\gamma \in (1, 2^*]$. Luego para $u, h \in H_0^1(\Omega)$ podemos deducir $u, h \in L^\gamma(\Omega)$ y $|u| + |h| \in L^\gamma(\Omega)$. Así, $(|u| + |h|)^{\gamma-1} \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$. Usando la desigualdad de Hölder (ver Apendice A.2,

Teorema A.20),

$$\text{"}\int_\Omega (|u|+|h|)^{\gamma-1}|h|\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |(|u|+|h|)^{\gamma-1}|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\int_\Omega |h|^\gamma \mathrm{d}x\right) < \infty.\text{"}$$

Por lo tanto, se sigue de Apendice A.2, Teorema A.21 y (1.3),

$$\text{"}\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u+th|^\gamma-|u|^\gamma}{t}\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u+th|^\gamma-|u|^\gamma}{t}\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{\gamma-2}uh\mathrm{d}x.\text{"}$$

Entonces,

$$\langle I_2'(u),h\rangle = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u+th|^\gamma-|u|^\gamma}{t}\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{\gamma-2}uh\mathrm{d}x,$$

y consecuentemente, existe la derivada de Gateaux en u, con

$$\langle I_2'(u),h\rangle = \int_\Omega |u|^{\gamma-2}uh\mathrm{d}x.$$

Ahora mostraremos que I_2' é contínua. Sea $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$. Queremos mostrar que $I_2'(u_n) \to I_2'(u)$ em $(H_0^1(\Omega))^*$, por el Teorema A.14 (ver Apendice A.1) sigue que $u_n \to u$ en $L^\gamma(\Omega)$, como $\gamma \in (1, 2^*]$. Luego, por el Teorema A.22 (ver Apendice A.2), tenemos una subsucesión, que aun denotamos por (u_n) y una función $g \in L^\gamma(\Omega)$ que verifica

$$u_n \to u, \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ y } |u_n| \leq g, \text{ q.t.p. en } \Omega. \tag{1.4}$$

Para todo $h \in H_0^1(\Omega)$ con $\|h\| \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\left|\langle I_2'(u_n)-I_2'(u),h\rangle\right| &= \left|\int_\Omega |u_n|^{\gamma-2}u_nh\mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{\gamma-2}uh\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_\Omega (|u_n|^{\gamma-2}u_n-|u|^{\gamma-2}u)h\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n-|u|^{\gamma-2}u||h|\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Por (1.4),

$$\Big||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u\Big||h| \to 0, \text{ q.t.p. en } \Omega, \tag{1.6}$$

también observamos por (1.4) que

$$\begin{aligned}\Big(||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\Big)^{\frac{2^*}{\gamma}} &= ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{2^*}{\gamma-1}} \\ &\leq (|u_n|^{\gamma-2}|u_n| + |u|^{\gamma-2}|u|)^{\frac{2^*}{\gamma-1}} \\ &\leq 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}}(|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*}) \\ &\leq 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}}(g^{2^*} + |u|^{2^*}).\end{aligned}$$

Como $(g^{2^*} + |u|^{2^*})^{\frac{\gamma}{2^*}} \leq 2^{\frac{\gamma}{2^*}}(g^\gamma + |u|^\gamma)$, entonces

$$\Big||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u\Big|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \leq M(g^\gamma + |u|^\gamma), \tag{1.7}$$

donde $M = 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{\gamma}{2^*}}$ es una costante positiva. Luego, del hecho que $g, u \in L^\gamma(\Omega)$, podemos concluir $||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u| \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Recordando tambiém que por el Teorema A.14 (ver Apendice A.1), podemos observar que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$ para $\gamma \in (1, 2^*]$, luego para $h \in H_0^1(\Omega)$ podemos deducir $h \in L^\gamma(\Omega)$. Ahora, usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\dfrac{\gamma}{\gamma-1}$ y γ en $||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h|$, obtenemos

$$\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h|\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\int_\Omega |h|^\gamma \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Note que existe $C > 0$ tal que $\left(\int_\Omega |h|^\gamma \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq C\|h\|$ para todo $h \in H_0^1(\Omega)$, pues esto sigue de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$, consecuentemente, como $\|h\| \leq 1$ obtenemos que

$$\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h|\mathrm{d}x \leq C\left(\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{1.8}$$

Resulta de (1.5) y (1.8) que

$$\left|\langle I_2'(u_n) - I_2'(u), h\rangle\right| \leq C\left(\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{1.9}$$

Observe que, por (1.6), (1.7) y $M(g^\gamma + |u|^\gamma) \in L^\gamma(\Omega)$ podemos aplicar el Teorema encontrada en el ver Apendice A.2, Teorema A.21,

$$\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\mathrm{d}x \to 0.$$

Concluimos que por (1.9)

$$I_2'(u_n) \to I_2'(u), \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto, I_2' es contínuo, luego $I_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (ver Apendice A.1, Teorema A.3).

Finalmente por las afirmaciones 1.3 y 1.4 sigue $I_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y para todo $u, h \in H_0^1(\Omega)$,

$$\text{"}\langle I_\lambda'(u), h\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega |u|^{q-2}uh\mathrm{d}x - a\int_\Omega uh\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}h\mathrm{d}x.\text{"}$$

■

1.3 Limitación de las sucesiones (PS) asociados al funcional I_λ

Recordemos que una sucesión $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ es de Palais-Smale (que abreviaremos simplemente por (PS)) asociada al funcional I_λ si satisface

(i) $I_\lambda(u_n)$ es limitada;

(ii) $I_\lambda'(u_n) \to 0$ en el dual de $H_0^1(\Omega)$ cuando $n \to \infty$.

Lema 1.5 *Sean $\lambda_1 < a$ y $\lambda > 0$, entonces cada sucesión (PS) de I_λ es limitada.*

Demostración: Por hipótesis $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ satisface las condiciones abajo

$$|I_\lambda(u_n)| = \left|\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega u_n^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x\right| \leq M, \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}|\langle I'_\lambda(u_n), h\rangle| &= \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla h \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n h\mathrm{d}x - a\int_\Omega u_n h\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}h\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \epsilon_n\|h\|, \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega), \text{ donde } \epsilon_n \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.\end{aligned} \tag{1.11}$$

De (1.10), (1.11) y $\left|I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle\right| \leq \left|I_\lambda(u_n)\right| + \left|\frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle\right|$ (desigualdad triangular), obtenemos

$$\begin{aligned}&M + \epsilon_n\|u_n\| \\ &\geq \left|\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n^2\mathrm{d}x - a\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}u_n\mathrm{d}x\right)\right|.\end{aligned}$$

Entonces, sigue que

$$\begin{aligned}&M + \epsilon_n\|u_n\| \\ &\geq \left|\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x + \frac{b}{2}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}u_n\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x + \frac{b}{2}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}(u_n^+ - u_n^-)\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{2}\right)\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2^*}\right)\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$, $b > 0$ y $1 < q < 2$, sigue que

$$M + \epsilon_n\|u_n\| \geq \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2^*}\right)\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x,$$

De $b > 0$, obtenemos

$$M\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{2^*}\right)^{-1}+\epsilon_n\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{2^*}\right)^{-1}\|u_n\|\geq\int_\Omega(u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x.$$

Sin perdida de generalidad, podemos considerar M en vez de $M\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{2^*}\right)^{-1}$ y ϵ_n en vez de $\epsilon_n\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{2^*}\right)^{-1}$, luego

$$M+\epsilon_n\|u_n\|\geq\int_\Omega(u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x. \tag{1.12}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\text{"}\left|\langle I'_\lambda(u_n),u_n^-\rangle\right| &= \left|\int_\Omega\nabla u_n\nabla u_n^-\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega|u_n|^{q-2}u_nu_n^-\mathrm{d}x-a\int_\Omega u_nu_n^-\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.-b\int_\Omega(u_n^+)^{2^*-1}u_n^-\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|\int_\Omega\nabla(u_n^+-u_n^-)\nabla u_n^-\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega|u_n|^{q-2}(u_n^+-u_n^-)u_n^-\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.-a\int_\Omega(u_n^+-u_n^-)u_n^-\mathrm{d}x-b\int_\Omega(u_n^+)^{2^*-2}u_n^+u_n^-\mathrm{d}x\right|.\text{"}
\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}
\text{"}\left|\langle I'_\lambda(u_n),u_n^-\rangle\right| &= \left|-\int_\Omega|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega|u_n|^{q-2}(u_n^-)^2\mathrm{d}x+a\int_\Omega(u_n^-)^2\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|-\int_\Omega|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega(u_n^++u_n^-)^{q-2}(u_n^-)^{q-2}(u_n^-)^{4-q}\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.+a\int_\Omega(u_n^-)^2\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|-\int_\Omega|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega((u_n^++u_n^-)u_n^-)^{q-2}(u_n^-)^{4-q}\mathrm{d}x+a\int_\Omega(u_n^-)^2\mathrm{d}x\right|.\text{"}
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\text{"}\left|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^-\rangle\right| &= \left|-\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega (u_n^-)^q \mathrm{d}x + a\int_\Omega (u_n^-)^2 \mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega (u_n^-)^q \mathrm{d}x - a\int_\Omega (u_n^-)^2 \mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\|u_n^-\|^2 + \lambda\|u_n^-\|^q_{L^q(\Omega)} - a\|u_n^-\|^2_{L^2(\Omega)}\right|\text{."}
\end{aligned}$$

Usando esta última igualdad y (1.11), obtenemos que

$$\epsilon_n\|u_n^-\| \geq \left|\|u_n^-\|^2 + \lambda\|u_n^-\|^q_{L^q(\Omega)} - a\|u_n^-\|^2_{L^2(\Omega)}\right| = \left|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^-\rangle\right|. \tag{1.13}$$

Note que (1.10) implica que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega u_n^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x \leq M. \tag{1.14}$$

Como $|u_n| \geq u_n^- \geq 0$, entonces $\frac{\lambda}{2}\left(\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega (u_n^-)^q \mathrm{d}x\right) \geq 0$ y por la estimativa (1.14), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |u_n|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x& \\
\leq \frac{\lambda}{2}\left(\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega (u_n^-)^q \mathrm{d}x\right) + M.&
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos la siguinte desigualdad

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x \leq& \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_n^-)^q \mathrm{d}x \\
&+ \frac{a}{2}\int_\Omega |u_n|^2 \mathrm{d}x + M.
\end{aligned}$$

Como $|\nabla u_n| = \nabla u_n^+ + \nabla u_n^-$ y $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_n^-)^q \mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^-)^2 \mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 \mathrm{d}x + M,\end{aligned}$$

y así,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\Big(\|u_n^-\|^2 + \lambda \|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q - a\|u_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2\Big) + M.\end{aligned}$$

Por la igualdad (1.13) sigue que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x \\ &\qquad\qquad \leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\Big|\langle I_\lambda'(u_n), u_n^-\rangle\Big| + M.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{q}\right)\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 \mathrm{d}x + \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\Big|\langle I_\lambda'(u_n), u_n^-\rangle\Big| \\ + M.\end{aligned}$$

De $\lambda > 0$ y $1 < q < 2$, entonces $\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\lambda}{q} < 0$ y consecuentemente

$$\text{“}\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 \mathrm{d}x + \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\Big|\langle I_\lambda'(u_n), u_n^-\rangle\Big| + M.\text{”} \tag{1.15}$$

Como $2^* > 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es abierto y limitado, tenemos $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Así, existe $T > 0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega (u_n^+)^2 \mathrm{d}x \leq T^2 \left(\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{2/2^*}$. Ahora por el Lema A.19 (ver

Apendice A.2) tenemos

$$T^2\left(\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{2/2^*} \leq \left(\frac{2^*-2}{2^*}\right)(T^2)^{2^*/(2^*-2)} + \frac{2}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x.$$

Por lo tanto

$$\int_\Omega (u_n^+)^2\mathrm{d}x \leq \left(\frac{2^*-2}{2^*}\right)(T^2)^{2^*/(2^*-2)} + \frac{2}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x.$$

Luego de (1.15),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq & \frac{a}{2}\left(\frac{2^*-2}{2^*}\right)(T^2)^{\frac{2^*}{2^*-2}} + \frac{a}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x + \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x \\ & + \frac{1}{2}\left|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^-\rangle\right| + M.\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, consideremos M en lugar de $\frac{a}{2}\left(\frac{2^*-2}{2^*}\right)(T^2)^{\frac{2^*}{2^*-2}} + M$, luego

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq \left(\frac{a+b}{2^*}\right)\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^-\rangle\right| + M.$$

Por lo tanto, sigue que,

$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq C\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^-\rangle\right| + M$, donde C es una constante positiva.

Ahora, reemplazando (1.12) y (1.13) en la última desigualdad, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq C\Big(M + \epsilon_n\|u_n\|\Big) + \frac{1}{2}\epsilon_n\|u_n^-\| + M. \tag{1.16}$$

Como ϵ_n es limitada, existe una costante positiva K tal que $C\epsilon_n < K$ y $\frac{1}{2}\epsilon_n < K$. Además, sin perder generalidad, consideremos M en vez de $CM + M$. Así, de (1.16)

se deduce

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq K\|u_n\| + K\|u_n^-\| + M. \tag{1.17}$$

Mostraremos que (u_n) es limitada en $H_0^1(\Omega)$.

Antes de eso, primero mostraremos que (u_n^+) es limitada en $H_0^1(\Omega)$.

De hecho, razonando por el absurdo suponemos que $\|u_n^+\| \to \infty$. Por (1.17) y la desigualdad triangular $\|u_n\| = \|u_n^+ - u_n^-\| \leq \|u_n^+\| + \|u_n^-\|$, sigue que

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq K\Big(\|u_n^+\| + \|u_n^-\|\Big) + K\|u_n^-\| + M.$$

Así,

$$\|u_n^+\|\left(\frac{1}{2}\|u_n^+\| - K\right) \leq 2K\|u_n^-\| + M.$$

Esto significa que como $\|u_n^+\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\|u_n^-\| \to \infty \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.18}$$

Además, como $\|u_n\|^2 = \|u_n^+\|^2 + \|u_n^-\|^2$ podemos deducir que

$$\|u_n\| \to \infty \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.19}$$

Ahora, defina

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Como (v_n) es limitada en $H_0^1(\Omega)$, entonces existe una subsecuencia (v_{n_j}) de (v_n) y $v \in H_0^1(\Omega)$ tales que $v_{n_j} \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$ y $v_{n_j} \to v$ q.t.p en Ω.

Sin perdida de generalidad, podemos sustituir (v_{n_j}) por (v_n), así $v_n \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$ y $v_n \to v$, q.t.p. en Ω. Por el Teorema A.15 (ver Apendice A.1,), $v_n \to v$ en $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2^*$ y $v_n \to v$, q.t.p en Ω.

Por otro lado, sigue de (1.17) y nuevamente por la desigualdad triangular

$\|u_n\| = \|u_n^+ - u_n^-\| \leq \|u_n^+\| + \|u_n^-\|$, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 &\leq K\|u_n\| + K\|u_n^-\| + M \\ &\leq K\Big(\|u_n^+\| + \|u_n^-\|\Big) + K\|u_n^-\| + M.\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq K\|u_n^+\| + 2K\|u_n^-\| + M.$$

Dividiendo ambos lados por $\|u_n^+\|^2$, sigue

$$\frac{1}{2} \leq \frac{K}{\|u_n^+\|} + \frac{2K\|u_n^-\|}{\|u_n^+\|^2} + \frac{M}{\|u_n^+\|^2}. \tag{1.20}$$

Como $\|u_n^+\| \to \infty$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{K}{\|u_n^+\|} + \dfrac{M}{\|u_n^+\|^2} < \dfrac{1}{4}, \ \forall\, n \geq n_0$. Así, por (1.20),

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2K\|u_n^-\|}{\|u_n^+\|^2} + \frac{1}{4}, \ \forall\, n \geq n_0$$

y consecuentemente

$$\frac{1}{8K} \leq \frac{\|u_n^-\|}{\|u_n^+\|^2}, \ \forall\, n \geq n_0.$$

Tomando $\delta = \dfrac{1}{8K}$, observamos que

$$\|u_n^-\| \geq \delta\|u_n^+\|^2, \ \forall\, n \geq n_0. \tag{1.21}$$

Por lo tanto, elevando ambos lados al cuadrado, se deduce que

$$\|u_n^-\|^2 \geq \delta^2\|u_n^+\|^4, \ \forall\, n \geq n_0.$$

Usando algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos

$$\Big(\|u_n^-\|^2 + \|u_n^+\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \Big(\|u_n^+\|^2 + \delta^2\|u_n^+\|^4\Big)^{\frac{1}{2}}, \ \forall\, n \geq n_0.$$

Luego $\dfrac{\|u_n^+\|}{\left(\|u_n^+\|^2+\delta^2\|u_n^+\|^4\right)^{\frac{1}{2}}} \geq \dfrac{\|u_n^+\|}{\|u_n\|}$, $\forall\, n \geq n_0$, o sea

$$\frac{\|u_n^+\|}{\left(\|u_n^+\|^2+\delta^2\|u_n^+\|^4\right)^{\frac{1}{2}}} \geq \|v_n^+\| \geq 0,\ \forall\, n \geq n_0. \tag{1.22}$$

Como $0 \leq \dfrac{\|u_n^+\|}{\left(\|u_n^+\|^2+\delta^2\|u_n^+\|^4\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \dfrac{1}{\delta\|u_n^+\|}$ y $\|u_n^+\| \to +\infty$, entonces

$$\frac{\|u_n^+\|}{\left(\|u_n^+\|^2+\delta^2\|u_n^+\|^4\right)^{\frac{1}{2}}} \to 0,\ \text{cuando } n \to \infty.$$

Así, por (1.22), $v_n^+ \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$, cuando $n \to \infty$ y sigue del Teorema A.14 (ver Apendice A.1), que

$$v_n^+ \to 0 \text{ en } L^2(\Omega),\ \text{cuando } n \to \infty. \tag{1.23}$$

recordando que $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)$ y $v_n^+ = \max\{0, v_n\} = \dfrac{v_n + |v_n|}{2}$, entonces $v_n^+ \to v^+$ en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto proviene de (1.23) que, $v^+ = 0$ e como $v = v^+ - v^-$, sigue que

$$v \leq 0. \tag{1.24}$$

Además, como $v_n^- = \dfrac{u_n^-}{\|u_n\|} = \dfrac{u_n^-}{(\|u_n^+\|^2 + \|u_n^-\|^2)^{\frac{1}{2}}}$, obtenemos

$$\|v_n^-\| = \frac{\|u_n^-\|}{(\|u_n^+\|^2 + \|u_n^-\|^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\|u_n^-\|}{(\|u_n^-\|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Así, podemos concluir que

$$\|v_n^-\| \leq 1. \tag{1.25}$$

Por (1.21), tenemos para $n \geq n_0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u_n^-\| \geq \delta \|u_n^+\|^2.$$

Así, sumando $\delta\|u_n^-\|^2$ a los dos miembros obtenemos,

$$\Big(\|u_n^-\| + \delta\|u_n^-\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \Big[\delta\Big(\|u_n^+\|^2 + \|u_n^-\|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Por conseguinte

$$\frac{\|u_n^-\|}{\Big(\|u_n^+\|^2 + \|u_n^-\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{\delta^{\frac{1}{2}}\|u_n^-\|}{\Big(\|u_n^-\| + \delta\|u_n^-\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\|v_n^-\| \geq \frac{\delta^{\frac{1}{2}}\|u_n^-\|}{\Big(\|u_n^-\| + \delta\|u_n^-\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Por lo tanto, por (1.25), obtenemos la siguinte estimativa para $\|v_n^-\|$:

$$1 \geq \|v_n^-\| \geq \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\left(\dfrac{1}{\|u_n^-\|} + \delta\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando la estimativa anterior, podemos deducir de (1.18) que

$$\|v_n^-\| \to 1, \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.26}$$

Por outro lado por la desigualdad obtenida en (1.13), sigue que

$$\epsilon_n \frac{1}{\|u_n^-\|} \geq \left|1 + \lambda \frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n^-\|^2} - a\frac{\|u_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n^-\|^2}\right|.$$

Como $\epsilon_n \to 0$, de (1.18) concluimos que

$$-\frac{\lambda\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n^-\|^2}+\frac{a\|u_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n^-\|^2}\to 1, \text{ cuando } n\to\infty. \tag{1.27}$$

Observe ahora que podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned}-\frac{\lambda\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n^-\|^2}+\frac{a\|u_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n^-\|^2} &= -\frac{\lambda\|u_n\|^2}{\|u_n^-\|^2}\frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|^2}+\frac{a\|u_n\|^2}{\|u_n^-\|^2}\frac{\|u_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n\|^2}\\ &= -\frac{\lambda}{\|v_n^-\|^2}\frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|^2}+\frac{a}{\|v_n^-\|^2}\|v_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Luego,

$$-\frac{\lambda\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n^-\|^2}+\frac{a\|u_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n^-\|^2}=\frac{1}{\|v_n^-\|^2}\left(-\lambda\frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|^2}+a\|v_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2\right). \tag{1.28}$$

Así, como $v_n \to v$ en $L^r(\Omega)$ para todo $1 \le r < 2^*$ y $1 < q < 2$, entonces $v_n \to v$ en $L^q(\Omega)$. Luego, (v_n) es limitada en $L^q(\Omega)$ y por lo tanto (v_n^-) es limitada en $L^q(\Omega)$. Como $\|u_n\| \to \infty$, usando la limitación de (v_n^-) tenemos que

$$-\lambda\frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|^2}=\frac{-\lambda}{\|u_n\|^{2-q}}\|v_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q\to 0, \text{ cuando } n\to\infty.$$

Entonces, por (1.26), (1.27) y (1.28), podemos concluir que

$$a\|v_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2\to 1, \text{ cuando } n\to\infty,$$

y así,

$$\|v_n^-\|_{L^2(\Omega)}\to\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}, \text{ cuando } n\to\infty.$$

Además, como $\|v_n\|_{L^2(\Omega)}=(\|v_n^+\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_n^-\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$, por (1.23), $\|v_n\|_{L^2(\Omega)}\to\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, cuando $n\to\infty$. Ahora, recordando que como $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)$, entonces $\|v\|_{L^2(\Omega)}=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, esto es,

$$v\neq 0. \tag{1.29}$$

Ahora, tomando $h = \varphi_1$ en (1.11) obtenemos,

$$\left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n \varphi_1 \mathrm{d}x - a\int_\Omega u_n \varphi_1 \mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x\right| \leq \epsilon_n \|\varphi_1\|.$$

Por lo tanto, podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente manera

$$\left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \int_\Omega \frac{|u_n|^{q-2}}{\|u_n\|^{q-2}} u_n \varphi_1 \mathrm{d}x - a\int_\Omega u_n \varphi_1 \mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x\right| \leq \epsilon_n \|\varphi_1\|.$$

Dividiendo ambos lados por $\|u_n\|$ e recordando que $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, resulta que

$$\left|\int_\Omega \nabla v_n \nabla \varphi_1 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n \varphi_1 \mathrm{d}x - a\int_\Omega v_n \varphi_1 \mathrm{d}x - \frac{b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x\right| \leq \frac{\epsilon_n \|\varphi_1\|}{\|u_n\|}.$$

Como φ_1 es autofunción asociada al autovalor λ_1, vemos que

$$\left|(\lambda_1 - a)\int_\Omega v_n \varphi_1 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n \varphi_1 \mathrm{d}x - \frac{b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x\right| \leq \frac{\epsilon_n \|\varphi_1\|}{\|u_n\|}.$$

Usando el hecho que $\epsilon_n \to 0$ y $\dfrac{1}{\|u_n\|} \to 0$, cuando $n \to \infty$, tenemos

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega v_n \varphi_1 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n \varphi_1 \mathrm{d}x - \frac{b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x \to 0. \quad (1.30)$$

Mostraremos que los dos últimos términos del límite anterior tienden a cero, cuando n tiende al infinito.

Afirmación 1.6 $\dfrac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n \varphi_1 \mathrm{d}x \to 0,$ *cuando* $n \to \infty$.

En efecto, bastará demostrar que $\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1 \mathrm{d}x$ es limitada. Note que

$$\left|\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1 \mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1 \mathrm{d}x\right| \leq \int_{\overline{\Omega}} |\ v_n|^{q-1}|\varphi_1|\mathrm{d}x.$$

Además, como φ_1 es regular y $\overline{\Omega}$ es compacto, tenemos que existe $M > 0$ tal que $|\varphi_1(x)| \leq M\ \forall\ x \in \overline{\Omega}$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1 \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1 \mathrm{d}x\right| \\ &\leq M\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-1}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Ahora usando la desigualdad de Hölder en la última integral,

$$\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-1}\mathrm{d}x \leq \left\||v_n|^{q-1}\right\|_{L^{\frac{1}{q-1}}(\Omega)}.\|1\|_{L^{\frac{1}{2-q}}(\Omega)}.$$

Luego de (1.31),

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1 \mathrm{d}x\right| &\leq M\left\||v_n|^{q-1}\right\|_{L^{\frac{1}{q-1}}(\Omega)}\|1\|_{L^{\frac{1}{2-q}}(\Omega)} \\ &= M\left(\int_{\overline{\Omega}} |v_n|\mathrm{d}x\right)^{q-1}(\mathrm{med}(\overline{\Omega}))^{2-q}.\end{aligned}$$

Así, la prueba de la afirmación se desprende de $v_n \to v$ en $L^1(\Omega)$ y $\overline{\Omega}$ es compacto.

Afirmación 1.7 $\dfrac{b}{\|u_n\|}\displaystyle\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Em efecto, de manera similar al procedimiento de la afirmación 1.6, podemos conseguir que

$$\begin{aligned}\text{”}\left|\frac{b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x\right| &= \left|\frac{b}{\|u_n\|}\int_{\overline{\Omega}} (u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{Mb}{\|u_n\|}\int_{\overline{\Omega}} (u_n^+)^{2^*-1}\mathrm{d}x.\text{”}\end{aligned} \tag{1.32}$$

Por otro lado, se deriva de (1.12) que

$$\frac{1}{\|u_n\|^{\frac{2^*}{2^*-1}}}\int_{\overline{\Omega}}(u^+)^{2^*}\mathrm{d}x \leq \frac{M}{\|u_n\|^{\frac{2^*}{2^*-1}}} + \frac{\epsilon_n\|u_n\|}{\|u_n\|^{\frac{2^*}{2^*-1}}}.$$

Luego, obtenemos

$$\int_{\overline{\Omega}}\left(\frac{(u^+)^{2^*-1}}{\|u_n\|}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}}\mathrm{d}x \leq \frac{M}{\|u_n\|^{\frac{2^*}{2^*-1}}} + \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|^{\frac{1}{2^*-1}}}.$$

Recordando que

$2^* > 1$ y $\|u_n\| \to \infty$ (por (1.19)), se concluye que $\dfrac{(u_n^+)^{2^*-1}}{\|u_n\|} \to 0$ en $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, como $1 < \dfrac{2^*}{2^*-1}$ y $\overline{\Omega}$ es un dominio limitado, entonces $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ y consecuentemente

$$\frac{1}{\|u_n\|}\int_{\overline{\Omega}}(u_n^+)^{2^*-1}\mathrm{d}x \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

De (1.32),

$$\frac{b}{\|u_n\|}\int_{\Omega}(u_n^+)^{2^*-1}\varphi_1\mathrm{d}x \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

A continuación mostraremos que el límite débil v de la sucesión (v_n) é nulo.

En efecto, por (1.30), por las afirmacionbes 1.6, 1.7 y como $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)$, podemos deducir que

$$(\lambda_1 - a)\int_{\Omega} v\varphi_1\mathrm{d}x = 0.$$

Por la hipótesi $\lambda_1 < a$, sigue que $\displaystyle\int_{\Omega}(-v)\varphi_1\mathrm{d}x = 0$. Así, $-v\varphi_1 = 0$ q.t.p en Ω porque, por (1.24), $-v \geq 0$.

Usando el hecho de que $\varphi_1 > 0$ es la autofunción asociada con el primer autovalor λ_1, obtenemos $v = 0$ q.t.p. en Ω, lo que es un absurdo, porque por (1.29), $v \neq 0$. Por lo tanto (u_n^+) es limitada.

Volviendo a nuestro objetivo, ahora mostraremos que la sucesión (u_n) es limi-

tada en $H_0^1(\Omega)$. Supongamos por el absurdo que $\|u_n\| \to \infty$, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ existe $k > 0$ tal que $\|u_n^+\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq k\|u_n^+\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|u_n^+\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq Ck$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque como fue probado arriba (u_n^+) es limitada en $H_0^1(\Omega)$. Esto significa que $\displaystyle\int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x < \infty$, por lo tanto

$$\frac{1}{\|u_n\|} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.33}$$

Por otro lado, tomando $h = v_n$ em (1.11), obtenemos

$$\left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla v_n \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n v_n \mathrm{d}x - a \int_\Omega u_n v_n \mathrm{d}x - b \int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v_n \mathrm{d}x \right| \leq \epsilon_n.$$

Por la definición de $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ y dividiendo la desigualdad anterior por $\|u_n\|$, sigue que

$$\left| \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x}{\|u_n\|^2} + \frac{\lambda}{\|u_n\|} \int_\Omega |u_n|^{q-2} \frac{u_n^2}{\|u_n\|} \mathrm{d}x - a \int_\Omega \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2} \mathrm{d}x - \frac{b}{\|u_n\|^2} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|}.$$

Así, "

$$\left| 1 + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \int_\Omega \frac{|u_n|^q}{\|u_n\|^q} \mathrm{d}x - a \int_\Omega v_n^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{\|u_n\|^2} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|},$$

"y consecuentemente

$$\left| 1 + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \|v_n\|_{L^q(\Omega)}^q - a|v_n|_2^2 - \frac{b}{\|u_n\|^2} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|}.$$

Sabemos que (v_n) es limitada en $L^q(\Omega)$ para $1 < q < 2$ y $\|u_n\| \to \infty$, cuando

$n \to \infty$, así por (1.33) y por la estimatia anterior, se deduce que

$$a\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)} \to 1, \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.34}$$

Ahora, recordando que $v_n \to v$ em $L^r(\Omega)$, para todo $1 \leq r < 2^*$; en particular, $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)$, usando (1.34), obtenemos que

$$v \neq 0. \tag{1.35}$$

Note que en (1.29), también mostramos que $v \neq 0$, pero en este caso tenemos hipótesis diferentes al caso en el que probamos que $v \neq 0$ en (1.29).

Ahora mostraremos que $v \leq 0$.

En efecto, como $v_n^+ = \dfrac{u_n^+}{\|u_n\|}$ y (u_n^+) es limitada en $H_0^1(\Omega)$, podemos afirmar que $v_n^+ \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$, cuando $n \to \infty$ y sigue del Teorema A.14 (ver Apendice A.1), que $v_n^+ \to 0$ en $L^2(\Omega)$, cuando $n \to \infty$. De la desigualdad $v_n = v_n^+ - v_n^- \leq v_n^+$ resulta que

$$v \leq 0. \tag{1.36}$$

Por otro lado, el resultado obtenido en (1.11) nos da que cada $h \in H_0^1(\Omega)$ verifica la estimativa

$$\left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla h \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n h \mathrm{d}x - a \int_\Omega u_n h \mathrm{d}dx - b \int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} h \mathrm{d}x \right| \leq \epsilon_n \|h\|.$$

Dividiendo esta desigualdad por $\|u_n\|$ sigue que

$$\left| \int_\Omega \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|} \nabla h \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} \frac{u_n}{\|u_n\|} h \mathrm{d}x - a \int_\Omega \frac{u_n}{\|u_n\|} h \mathrm{d}x - b \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{2^*-1}}{\|u_n\|} h \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} \|h\|.$$

Ahora, usando la definición de $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, obtenemos

$$\left|\int_\Omega \nabla v_n \nabla h \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{\|u\|^{2-q}}\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n h\mathrm{d}x - a\int_\Omega v_n h\mathrm{d}x - b\int_\Omega \frac{(u_n^+)^{2^*-1}}{\|u_n\|}h\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|}\|h\|. \tag{1.37}$$

Repetiendo los mismos argumentos hechos en las afirmaciones 1.6 y 1.7, tenemos $\dfrac{\lambda}{\|u\|^{2-q}}\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n h\mathrm{d}x \to 0$ y $b\displaystyle\int_\Omega \frac{(u_n^+)^{2^*-1}}{\|u_n\|}h\mathrm{d}x \to 0$ cuando $n \to \infty$, para todo $h \in H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, por (1.37) "

$$\int_\Omega \nabla v \nabla h \mathrm{d}x = a\int_\Omega v h \mathrm{d}x, \quad \forall\, h \in H_0^1(\Omega).$$

"

Ahora, haciendo $h = \varphi_1$ y φ_1 é autofunción asociada al autovalor λ_1, obtenemos

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega v\varphi_1 \mathrm{d}x = 0.$$

Por la hipótesi, $\lambda_1 < a$ y por (1.36), concluimos que $-v\varphi_1 = 0$ q.t.p. en Ω. Así usando el hecho de que $\varphi_1 > 0$ en Ω, podemos deducir que $v = 0$ q.t.p. en Ω, lo cual es absurdo, porque por (1.35), $v \neq 0$. Por lo tanto la sucesión (u_n) es limitada.

■

1.4 Compacidad del funcional I_λ

La mayor dificultad aquí es que el funcional I_λ definido anteriormente no cumple la condición (PS) (toda sucesión (PS) asociada al funcional I_λ posee una subsucesión convergente) en todos los niveles, debido a la falta de compacidad de la inmersión de $H_0^1(\Omega)$ en $L^{2^*}(\Omega)$. Este problema se resuelve utilizando la técnica desarrollada por Brézis-Nirenberg [4], que muestra que la compacidad se produce por debajo de

cierto nivel que se obtendrá en el siguiente lema.

Así, sea

$$S = \inf \left\{ \frac{\|u\|^2}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*}}} \; ; \; u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

S es la mejor constante de inmersión de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ el cual es alcanzado por la familia de funciones (ver [6]) $U_\epsilon(x) = \frac{[N(N-2)\epsilon^2]^{\frac{N-2}{4}}}{[\epsilon^2 + |x|^2]^{\frac{N-2}{2}}}$, donde $\epsilon > 0$ y $\|U_\epsilon\| = \|U_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} = S^{\frac{N}{2}}$; para todo $\epsilon > 0$ (ver [27]).

Lema 1.8 *Sea $\lambda_1 < a$, para cada $\lambda > 0$, el funcional I_λ satisface la condición de Palais Smale para cada nivel*

$$C < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

Demostración: Sea $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ una sucesión que satisface $I_\lambda(u_n) \to C$ y $\left| \langle I'_\lambda(u_n), v \rangle \right| \leq \epsilon_n \|v\|$, $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$ con $\epsilon_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Pelo Lema 1.5, tenemos que (u_n) es limitada en $H_0^1(\Omega)$, así, existe una subsección, todavía denotada por (u_n) y existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$. Luego, por la proposición A.15 (ver Apéndice A.1) podemos deducir que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq r < 2^*$ y $u_n \to u$ q.t.p. en Ω. De $1 < q < 2 < 2^*$, sigue

$$u_n \to u \text{ en } L^q(\Omega) \;\text{ y }\; u_n \to u \text{ en } L^2(\Omega). \tag{1.38}$$

Además, por el Teorema A.14 (ver Apendice A.1), existe una constante $K > 0$ tal que $\|u_n^+\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq K \|u_n^+\|$. Note que

$$\|u^+\| = \left\| \frac{u + |u|}{2} \right\| \leq \frac{\|u\| + \||u|\|}{2} \leq \|u\|,$$

entonces

$$\|u_n^+\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq K \|u_n\|.$$

Así, recordando que (u_n) es limitada en $H_0^1(\Omega)$, sigue

$$(u_n^+) \text{ es limitada en } L^{2^*}(\Omega). \tag{1.39}$$

Por otro lado, por la hipótesis $\langle I'_\lambda(u_n), v\rangle \to 0$, cuando $n \to \infty$, $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$. Así, si $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n v \mathrm{d}x - a\int_\Omega u_n v \mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v \mathrm{d}x \to 0, \tag{1.40}$$

quando $n \to \infty$. Ahora calculemos el límite para cada parcela y demostremos que u es solución de:

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{2^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.41}$$

En efecto, note que como $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$ y $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v \mathrm{d}x \to \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x \text{ y } \int_\Omega u_n v \mathrm{d}x \to \int_\Omega uv \mathrm{d}x;\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.42}$$

Observe que, como $u_n \to u$ en $L^q(\Omega)$, sigue por el Teorema A.22 (ver Apêndice A), existe una subsucesión de (u_n) todavía denotado por (u_n) y $h \in L^q(\Omega)$ tal que $|u_n| \le h$, q.t.p en Ω, entonces para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ se sigue que

$$\left||u_n|^{q-2}u_n v\right| = |u_n|^{q-1}|v| \le h^{q-1}|v|, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Ahora, debido a la desigualdad de Hölder, el hecho de que $h \in L^q(\Omega)$ y usando el Teorema A.14 (ver Apendice A.1), tenemos

$$\int_\Omega |h^{q-1}|v||\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega |h|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Por lo tanto,

$$h^{q-1}|v| \in L^1(\Omega) \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

También podemos concluir $u_n \to u$ q.t.p en Ω que $|u_n|^{q-2}u_n v \to |u_n|^{q-2}u_n v$ q.t.p en Ω. Por lo tanto, el teorema de convergencia dominado por Lebesgue (ver Teorema A.21 (ver Apéndice A) asegura que

$$\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n v \mathrm{d}x \to \int_\Omega |u|^{q-2}uv\mathrm{d}x, \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.43}$$

Del mismo modo podemos obtener que

$$\int_\Omega u_n v \mathrm{d}x \to \int_\Omega uv\mathrm{d}x, \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.44}$$

Finalmente, por (1.39), la sucesión $((u_n^+)^{2^*-1})$ es limitada en $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$. Notando también que $(u_n^+)^{2^*-1} \to (u^+)^{2^*-1}$ q.t.p en Ω, por el Lema A.25 (ver Apéndice A)) obtenemos que

$$(u_n^+)^{2^*-1} \rightharpoonup (u^+)^{2^*-1}, \text{ en } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega),$$

o sea ,

$$\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v \mathrm{d}x \to \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in L^{2^*}(\Omega),$$

en particular

$$\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v \mathrm{d}x \to \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.45}$$

reemplazando (1.42), (1.43), (1.44), (1.45) en (1.40), obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u|^{q-2}uv\mathrm{d}x - a\int_\Omega uv\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u^+)^{p_s^*-1}v\mathrm{d}x = 0, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Esto muestra que u es una solución débil al problema (1.41) .

Tomando $v = u$, en la igualdad anterior, se deduce que

$$\|u\|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - a \int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x - b \int_\Omega (u^+)^{2^*} \mathrm{d}x = 0,$$

esto es,

$$\langle I'_\lambda(u), u\rangle = 0. \tag{1.46}$$

Así, de (1.46),

$$I_\lambda(u) = I_\lambda(u) - \frac{1}{2}\langle I'_\lambda(u), u\rangle.$$

Por otro lado, tenemos que

$$I_\lambda(u) - \frac{1}{2}\langle I'_\lambda(u), u\rangle = \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{2}\right)\|u\|^q_{L^q(\Omega)} + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2^*}\right)\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)},$$

em que $1 < q < 2 < 2^*$ e $b > 0$. Por lo tanto,

$$I_\lambda(u) = \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{2}\right)\|u\|^q_{L^q(\Omega)} + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2^*}\right)\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \geq 0. \tag{1.47}$$

Como sabíamos $u_n \to u$ en $L^r(\Omega),\ 1 \leq r < 2^*$, sigue que $u_n^+ \to u^+$ en $L^r(\Omega),\ 1 \leq r < 2^*$ y consecuentemente (u_n^+) es limitada en $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2^*$. Por (1.39), (u_n^+) es limitada en $L^{2^*}(\Omega)$, en consecuencia

$$(u_n^+) \text{ es una sucesión limitada en } L^r(\Omega),\ \text{para } 1 \leq r \leq 2^*.$$

Además, como $u_n \to u$, q.t.p en Ω, entonces $u_n^+ \to u^+$, q.t.p en Ω. Luego por el Lema A.27 (ver Lema Apéndice A)), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n^+\|^r_{L^r(\Omega)} - \|(u-u_n)^+\|^r_{L^r(\Omega)}\right) = \|u^+\|^r_{L^r(\Omega)},\ \text{para } 1 \leq r \leq 2^*. \tag{1.48}$$

Denotando $v_n = u_n - u$, por (1.38), tenemos que $v_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$ y así,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ y } \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}) = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.49}$$

Del mismo modo, por (1.38), $v_n \to 0$ en $L^q(\Omega)$ y consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)} + \|u\|^q_{L^q(\Omega)}) = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}. \tag{1.50}$$

Recordando que $u_n \rightharpoonup u$ em H^1_0, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla u_n \nabla u dx = \int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \|u\|^2. \tag{1.51}$$

Nuevamente, como (u_n) es limitada en $H^1_0(\Omega)$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|u_n\| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, la sucesión $(\|u_n\|)$ de los números reales es limitado y, por lo tanto, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que

$$\text{existe} \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2. \tag{1.52}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n) =& \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\|u\|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{a}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{b}{2^*}\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &+ \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{\lambda}{q}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{a}{2}\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \frac{b}{2^*}\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n) =& \left(\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v_n\|^2\right) + \frac{\lambda}{q}\left(\|u\|^q_{L^q(\Omega)} + \|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}\right) \\ &- \frac{a}{2}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right) - \frac{b}{2^*}\left(\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (1.48), (1.49), (1.50) y (1.52), obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(I_\lambda(u)+I_\lambda(v_n)) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|u_n\|^2+\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{q}\left(\|u\|^q_{L^q(\Omega)}+\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}\right)\\
&\quad-\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\quad-\lim_{n\to\infty}\frac{b}{2^*}\left(\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}+\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right).\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|u_n\|^2+\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{q}\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}\\
&\quad-\lim_{n\to\infty}\frac{a}{p}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}-\lim_{n\to\infty}\frac{b}{2^*}\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2+\frac{\lambda}{q}\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\frac{a}{2}\|u_n\|^2_{L^p(\Omega)}-\frac{b}{2^*}\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}I_\lambda(u_n).
\end{aligned}$$

Ahora, recordando que (u_n) es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n)=C$, concluimos

$$\lim_{n\to\infty}(I_\lambda(u)+I_\lambda(v_n))=C. \tag{1.53}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^2+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2_{L^p(\Omega)}-b\lim_{n\to\infty}\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2+\lambda\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\|u\|^q_{L^q(\Omega)}\right)-a\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}-\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\quad -b\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}-\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\|v_n\|^2+\lambda\left(\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\|u\|^q_{L^q(\Omega)}\right)-a\left(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}-\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\quad -b\left(\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}-\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

e así,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^2+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\|v_n\|^2+\lambda\left(\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\|u\|^q_{L^q(\Omega)}\right)-a\left(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}-\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\quad -b\left(\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}-\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Ahora, como $v_n=u_n-u$ y

$$\|v_n\|^2=\|u_n\|^2+\|u\|^2-2\int_\Omega \nabla u_n\nabla u\mathrm{d}x,$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^2+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\|u_n\|^2-\|u\|^2-2\int_\Omega\nabla u_n\nabla u\mathrm{d}x+\lambda\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\lambda\|u\|^q_{L^q(\Omega)}\\
&\quad -a\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}+a\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}+b\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\Bigg]\\
&= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\left(\|u_n\|^2+\lambda\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\\
&\quad -2\int_\Omega\nabla u_n\nabla u dx+2\|u\|^2\\
&\quad -\left(\|u\|^2+\lambda\|u\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando la expresión de la derivada del funcional (para $v=u_n$ y $v=u$),

$$\langle I'_\lambda(u_n),u_n\rangle=\|u_n\|^2+\lambda\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|u_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \text{ y}$$

$$\langle I'_\lambda(u),u\rangle)=\|u\|^2+\lambda\|u\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)},$$

resultando que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\|v_n\|^2+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\Big)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\Big(\langle I'_\lambda(u_n),u_n\rangle-2\int_\Omega\nabla u_n\nabla u dx+2\|u\|^2-\langle I'_\lambda(u),u\rangle\Big).$$

Sabemos, por (1.46), que $\langle I'_\lambda(u),u\rangle=0$, en consecuencia, vale la equación

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\|v_n\|^2+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\Big)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\Big(\langle I'_\lambda(u_n),u_n\rangle-2\int_\Omega\nabla u_n\nabla u dx+2\|u\|^2\Big).$$

Ahora, como $I'_{\lambda,s}(u_n)\to 0$ en el dual de $H^1_0(\Omega)$ y (u_n) es limitada en $H^1_0(\Omega)$, tenemos que $\langle I'_{\lambda,s}(u_n),u_n\rangle\to 0$ y usando (1.51) sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\|v_n\|^2+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\Big)=0.$$

Por lo tanto, por (1.38), tenemos que $v_n\to 0$ en $L^q(\Omega)$ e $v_n\to 0$ en $L^2(\Omega)$, así, sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\|v_n\|^2-b\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\Big)=0. \tag{1.54}$$

Por otro lado, denotamos por $v_n=u-u_n$ y colocando $r=2^*$ en la ecuación (1.48), sigue que,

$$\lim_{n\to\infty}(\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}-\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}+\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)})=0. \tag{1.55}$$

Nuevamente recordando de (1.39) que (u_n^+) es limitada en $L^{2^*}(\Omega)$, existe $M>0$ tal que $\|u_n^+\|_{L^{2^*}}\le M$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego la sucesión $(\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)})$ de números reales es limitada, entonces al pasar a una sucesión si es necesario, tenemos que

$$\text{existe}\lim_{n\to\infty}\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{1.56}$$

De (1.55) e (1.56), tenemos

$$\lim_{n\to\infty}(\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}) = \lim_{n\to\infty}\|u_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{1.57}$$

Note que, por (1.57), existe $\lim_{n\to\infty}\|v_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}$, então por (1.54), existe $\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2$. Denotamos por

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2 = d \geq 0.. \tag{1.58}$$

Así, podemos tener dos situaciones

$$d > 0 \quad \text{o} \quad d = 0.$$

Inicialmente supongamos

$d > 0$, o sea (v_n) no converge a cero en $H_0^1(\Omega)$.

Por (1.54), como $b > 0$, resulta que $\lim_{n\to\infty}\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} = db^{-1}$, esto muestra que

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n^+\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} = (db^{-1})^{\frac{2}{2^*}}. \tag{1.59}$$

Como $S = \inf\left\{\dfrac{\|u\|^2}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}} \;;\; u \in H_0^1(\Omega),\, u \neq 0\right\}$, entonces

$$\|v_n^+\|^2 \geq S\|v_n^+\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Note que $\|v_n^+\| = \left\|\dfrac{v_n + |v_n|}{2}\right\| \leq \dfrac{\|v_n\| + \||v_n|\|}{2} \leq \|v_n\|$, entonces

$$\|v_n\|^2 \geq S\|v_n^+\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

De (1.59),

$$d \geq S(db^{-1})^{\frac{2}{2^*}}.$$

Luego, de $d > 0$, sigue $d^{1-\frac{2}{2^*}} \geq S.b^{\frac{-2}{2^*}}$ y consecuentemente

$$\frac{d}{N} \geq \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}. \tag{1.60}$$

Notando de (1.47), $I_\lambda(u) \geq 0$, segue que $I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n) \geq I_\lambda(v_n)$ y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(I_\lambda(u)+I_\lambda(v_n)\Big) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{\lambda}{q}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{a}{2}\|v_n\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{b}{2^*}\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right).$$

Como $v_n \to 0$ en $L^q(\Omega)$ y $v_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$ (por (1.38)) y $\lim_{n\to\infty}(I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n)) = C$ (por (1.53)), tenemos que

$$C \geq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2 - \frac{b}{2^*}\lim_{n\to\infty}\|v_n^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Así, por (1.59), sigue que

$$C \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) d.$$

Por otro lado, $\frac{1}{N} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}$, así, podemos reescribir la estimación anterior en el forma

$$C \geq \frac{d}{N}. \tag{1.61}$$

Así, por (1.60), (1.61) y por la hipótesis del lema, obtenemos que

$$\frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N} \leq \frac{d}{N} \leq C < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

esto es una **contradicción,** por lo tanto $d = 0$. De (1.58), $\lim_{n\to\infty}\|v_n\| = 0$, esto es, $v_n = u_n - u$ converge a cero en $H_0^1(\Omega)$ y consecuentemente (u_n) converge a u en $H_0^1(\Omega)$. Así, tenemos que existe una subsecuencia de (u_n) tal que converge en $H_0^1(\Omega)$. ■

1.5 Minimización en C^1 versus Minimización en $H_0^1(\Omega)$

Debido al hecho de que estamos estudiando un problema que involucra al operador laplaciano con no linealidad de tipo polinomial, en esta sección enunciamos un resultado de minimización local para los funcionales definidos en espacios Sobolev $H_0^1(\Omega)$ y que tiene crecimiento polinomial. Además, será de suma importancia para demostrar una de las condiciones de la geometría del Teorema de Paso de la Montaña. Este resultado puede ser encontrado en [6].

Proposición 1.9 *Sea* $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *un funcional definida por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x, \text{ donde } G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\mathrm{d}s$$

y g *satisface la condición de crecimiento* $|g(x,s)| \leq C(1+|s|^\sigma)$, *para* $\sigma \leq 2^* - 1$ *y alguna constante* $C > 0$.

Si existe $\epsilon_0 > 0$ *que verifica* $\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + w)$, $\forall\ \|w\|_{C^1} \leq \epsilon_0$. *Entonces existe* $\epsilon_1 > 0$ *que verifica* $\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + w)$, $\forall\ \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \epsilon_1$.

Capítulo 2

Multiplicidad de soluciones

"En este capítulo, provaremos la existencia de soluciones del siguiente problema semilineal:

$$\begin{cases} -\Delta u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{2^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio limitado con frontera regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$, $u^+ = \max\{u, 0\}$ y $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$."Así, considere el funcional de Euler-Lagrange

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx.$$

Recuerde que los puntos críticos de I_λ son soluciones débiles del problema (2.1). El principal resultado deste capítulo es:

Teorema 2.1 *Sean $N \geq 4$, $\lambda > 0$ y $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algun $k \in \mathbb{N}$, entonces para λ suficientemente pequeño, el problema (2.1) tiene al menos tres soluciones no triviales.*

La demostración de este teorema se dividirá en 3 partes: En la primera sección, usaremos el Teorema de Passo de la Montaña para obtener por lo menos una

solución pósitiva para el problema (2.1). De manera similar en la segunda sección obtenemos por lo menos uma solución negativa para el problema (2.1). En la tercera sección, usaremos o Teorema de Linking para encontrar una tercera solución no nula.

2.1 Solución positiva del funcional I_λ

En esta sección, definiremos la parte positiva del funcional I_λ para encontrar soluciones positivas. Considera lo funcional:

$$I_\lambda^+ : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^+(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |u^+|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*}\mathrm{d}x.$$

Por el mismo argumento utilizado anteriormente, el funcional I_λ^+ es de clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y para todo $u, h \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle (I_\lambda^+)'(u), h\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega |u^+|^{q-1}h\mathrm{d}x - a\int_\Omega u^+ h\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}h\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Tenga en cuenta que, encontrar un punto crítico para lo funcional I_λ^+ es equivalente a encontrar una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface la ecuación:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega |u^+|^{q-1}h\mathrm{d}x - a\int_\Omega u^+ h - b\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}h\mathrm{d}x = 0,\ \forall\ h \in H_0^1(\Omega),$$

o sea, obtener una solución débil para la ecuación:

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u^+|^{q-1} + au^+ + b(u^+)^{2^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

en que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.
Si u es un punto crítico de I_λ^+, entonces $\langle (I_\lambda^+)'(u), h\rangle = 0$, $\forall\, h \in H_0^1(\Omega)$, haciendo $h = u^-$, sigue

$$0 = \langle (I_\lambda^+)'(u), u^-\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla(u^-)dx = \int_\Omega \nabla(u^-)\nabla(u^-)dx = \|u^-\|$$

y consecuentemente, $u^- = 0$. Por lo tanto, el punto crítico u de I_λ^+ satisface $u = u^+ \geq 0$, o sea, es una función no negativa de $H_0^1(\Omega)$.

2.1.1 Compacidade do funcional I_λ^+

Lema 2.2 *Seja $\lambda_1 < a$, então I_λ^+ satisface la condición de Palais Smale para cada nivel*

$$C < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}, \text{ para cada } \lambda > 0.$$

Demostración: Utilice un razonamiento análogo como se hizo en la prueba del teorema 1.8. ■

2.1.2 Geometría del Teorema de Passo de la Montaña del funcional I_λ^+

Ahora mostraremos algunos resultados que serán útiles para obtener las condiciones geométricas del Teorema de Passo da Montanha. Para eso, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, sean

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &:= I_\lambda(u) - \frac{1}{2}\|u\|^2 \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |u^+|^{2^*} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

y

$$J_\lambda^+(u) := I_\lambda^+(u) - \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Lema 2.3 *Sean* $0 < a$ *y* $1 < q < 2$, *entonces la solución trivial* $u = 0$ *es un minimizador local estricto de* J_λ^+, *para todo* $\lambda > 0$.

Demostración: Por el Corolário 1.9, sera suficiente probar que $u = 0$ é um mínimo local estricto del funcional J_λ^+ en C^1. Sea $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} J_\lambda^+(u) &= I_\lambda^+(u) - \frac{1}{2}\|u\|^2 \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |u^+|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |u^+|^{2^*}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Usando $\|u\|_{C^1} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_0$, $\forall\, u \in C^1(\overline{\Omega})$, donde $\|u\|_0 = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$, $\forall\, u \in C(\overline{\Omega})$, obtenemos $0 \leq u^+ \leq |u| \leq \|u\|_{C^1}$. Como $1 < q < 2 < 2^*$ resulta que $(u^+)^{2-q} \leq \|u\|_{C^1}^{2-q}$ y consecuentemente

$$\int_\Omega |u^+|^2 dx \leq \|u\|_{C^1}^{2-q} \int_\Omega |u^+|^q dx.$$

Esta última desigualdad y el hecho de que $a > 0$, podemos concluir que

$$-\frac{a}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx \geq -\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\int_\Omega |u^+|^q dx. \tag{2.5}$$

Analogamente, obtenemos

$$-\frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx \geq -\frac{b}{2^*}\|u\|_{C^1}^{2^*-q}\int_\Omega |u^+|^q dx. \tag{2.6}$$

De (2.4), (2.5) e (2.6), sigue

$$\begin{aligned} J_\lambda^+(u) &\geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\|u\|_{C^1}^{2^*-q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} - \frac{b}{2^*}\|u\|_{C^1}^{2^*-q}\right)\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ahora, considere $R = \min\left\{ \left(\frac{2\lambda}{q(a+b)}\right)^{\frac{1}{2-q}}, \left(\frac{2^*\lambda}{q(a+b)}\right)^{\frac{1}{2^*-q}} \right\}$.
Si $\|u\|_{C^1} < R$, entonces

$$\|u\|_{C^1} < \left(\frac{2\lambda}{q(a+b)}\right)^{\frac{1}{2-q}} \quad , \quad \|u\|_{C^1} < \left(\frac{2^*\lambda}{q(a+b)}\right)^{\frac{1}{2^*-q}}$$

y consecuentemente

$$\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} < \frac{a\lambda}{q(a+b)} \quad \text{y} \quad \frac{b}{2^*}\|u\|_{C^1}^{2^*-q} < \frac{b\lambda}{q(a+b)}.$$

Sumando estas últimas desigualdades, tenemos $\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} + \frac{b}{2^*}\|u\|_{C^1}^{2^*-q} < \frac{\lambda}{q}$, o sea:

$$\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} - \frac{b}{2^*}\|u\|_{C^1}^{2^*-q} > 0, \ \forall \ 0 < \|u\|_{C^1} < R. \tag{2.8}$$

Finalmente (2.7) e (2.8) implicam que

$$J_\lambda^+(u) > 0 = J_\lambda^+(0), \ \forall \ 0 < \|u\|_{C^1} < R.$$

Por lo tanto, $u = 0$ es un mínimo local de J_λ^+ en C^1. ■

Lema 2.4 *Sean,* $\lambda_1 < a$, $1 < q < 2$ *y* $b > 0$, *entonces fijando* $\Lambda > 0$ *existe* $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ *tal que*

$$I_\lambda^+(t\varphi_1) < 0,$$

para todo $t \geq t_0$ *y* $\lambda < \Lambda$.

Demostración: Para $t > 0$, sigue que :

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(t\varphi_1) &= \frac{\|t\varphi_1\|^2}{2} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(t\varphi_1)^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |(t\varphi_1)^+|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega ((t\varphi_1)^+)^{2^*} \mathrm{d}x \\ &= \frac{|t|^2}{2}\|\varphi_1\|^2 + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{a|t|^2}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x - \frac{b|t|^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\varphi_1|^{2^*} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Recordando que φ_1 es la autofunción positiva asociada con λ_1, obtenemos

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(t\varphi_1) &= \frac{\lambda_1|t|^2}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2\mathrm{d}x + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q\mathrm{d}x - \frac{a|t|^2}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2\mathrm{d}x - \frac{b|t|^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\varphi_1|^{2^*}\mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a)\int_\Omega |\varphi_1|^2\mathrm{d}x + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q\mathrm{d}x - \frac{bt^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\varphi_1|^{2^*}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Luego, para todo $t > 0$

$$I_\lambda^+(t\varphi_1) = t^{2^*}\left[\frac{(\lambda_1 - a)}{2}\frac{1}{t^{2^*-2}}\int_\Omega |\varphi_1|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{2^*-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q\mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |\varphi_1|^{2^*}\mathrm{d}x\right]. \tag{2.9}$$

Ahora fijando $\Lambda > 0$, sigue de los hechos $\lambda_1 < a$, $1 < q < 2 < 2^*$ y $\varphi_1 > 0$ en Ω podemos escojer $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que

$$\frac{(\lambda_1 - a)}{2}\frac{1}{t_0^{2^*-2}}\int_\Omega |\varphi_1|^2\mathrm{d}x + \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{2^*-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q\mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |\varphi_1|^{2^*}\mathrm{d}x < 0.$$

Se $t \geq t_0$ e $\lambda < \Lambda$, nosotros tenemos que

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda_1 - a)}{2}\frac{1}{t^{2^*-2}}\int_\Omega |\varphi_1|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{2^*-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q\mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |\varphi_1|^{2^*}\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{(\lambda_1 - a)}{2}\frac{1}{t_0^{2^*-2}}\int_\Omega |\varphi_1|^2\mathrm{d}x + \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{2^*-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q\mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |\varphi_1|^{2^*}\mathrm{d}x \\ &< 0. \end{aligned}$$

De estas desigualdades y por (2.9), sigue $I_\lambda^+(t\varphi_1) < 0$, para todo $t \geq t_0$ e $\lambda < \Lambda$.

■

2.1.3 Solución positiva via el teorema de Passo da Montaña

Proposición 2.5 *Suponga que* $\lambda > 0$, $1 < q < 2$, $\lambda_1 < a$ *y* $b > 0$. *Entonces existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que, si*

$$0 < \lambda < \lambda_0, \tag{2.10}$$

entonces el problema (2.1) tiene al menos una solución positiva.

Demostración: Tenga en cuenta que cualquier solución débil no negativa al problema (2.1) satisface la ecuación:

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u^+|^{q-1} + au^+ + b(u^+)^{2^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

en que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$ y $u^+ = \max\{u, 0\}$.
Ahora, encontrar una solución débil al problema (2.11) es equivalente a encontrar un punto crítico del funcional

$$I_\lambda^+ : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^+(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega (u^+)^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} \mathrm{d}x.$$

Nuestro objetivo es mostrar que I_λ^+ satisface las hipótesis del teorema de Passo de la Montanha, como $I_\lambda^+(0) = 0$, entonces comenzamos probando las siguientes condiciones:

(a) existen $\rho, \alpha > 0$ tales que $I_\lambda^+\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ y

(b) existe $e \in H_0^1(\Omega)\backslash\overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$.

Prueba del item (a): Recordando que por el Lema 2.3, tenemos que existe $R > 0$ tal que

$$I_\lambda^+(u) > \frac{1}{2}\|u\|^2, \ \forall \ 0 < \|u\| < R. \tag{2.12}$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{2}\|u\|^2$, obtenemos que existen $\rho, \alpha > 0$ tales que

$$I_\lambda^+(u) > \alpha, \ \forall \ \|u\| = \rho,$$

probando así, el item (a).

Prueba del item (b): Fijando $\Lambda > 0$, por el Lema 2.4, tenemos que existe $e = t_0\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ con $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ que verifica $I_\lambda^+(e) < 0 = I_\lambda^+(0)$, $\forall \quad \Lambda > \lambda > 0$. Usando esta última desigualdad y por (2.12), sigue que $\|e\| \geq R > \rho$. Por lo tanto, podemos deducir que $\|e\| > \rho$, esto es, $e \in H_0^1(\Omega)\backslash\overline{B_\rho}$. Así, existe $e \in H_0^1(\Omega)\backslash\overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$. Esto prueba el item (b).

Ahora, mostraremos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que si $0 < \lambda < \lambda_0$, tenemos que el funcional I_λ^+ satisface la condición (PS), en el nivel C_λ^+ definido por

$$C_\lambda^+ = \inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u),$$

siendo $\Gamma^+ = \{g \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = t_0\varphi_1\}$ y con t_0 obtenido en el Lema 2.4. En efecto, inicialmente note que

$$0 \leq \inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) = C_\lambda^+ < \infty.$$

Defina $g_0 : [0,1] \to H_0^1(\Omega)$ dado por $g_0(t) = t(t_0\varphi_1)$. Sigue que $g_0 \in \Gamma^+$ y además, para $\lambda > 0$

$$I_\lambda^+(g_0(t)) = \frac{1}{2}\|tt_0\varphi_1\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(tt_0\varphi_1)^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |(tt_0\varphi_1)^+|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega \left[(tt_0\varphi_1)^+\right]^{2^*} \mathrm{d}x.$$

Como φ_1 es la autofunción positiva asociada al autovalor λ_1, tenemos

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(g_0(t)) &= \frac{(tt_0)^2\lambda_1}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda(tt_0)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x - \frac{a(tt_0)^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 \mathrm{d}x - \frac{b(tt_0)^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \varphi_1^{2^*} \mathrm{d}x \\ &= \frac{(tt_0)^2(\lambda_1 - a)}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda(tt_0)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x - \frac{b(tt_0)^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \varphi_1^{2^*} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

De las condiciones $\lambda_1 < a <, b > 0$, $t_0 > 0$ y $0 \leq t \leq 1$ resultan que

$$I_\lambda^+(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}\|\varphi_1\|_{L^q(\Omega)}^q, \text{ para todo } 0 \leq t \leq 1.$$

Como consecuencia de la estimativa anterior, concluimos

$$\max_{u \in g_0([0,1])} I_\lambda^+(u) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}\|\varphi_1\|_{L^q(\Omega)}^q.$$

Ahora, observando que

$$\inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) \leq \max_{u\in g_0([0,1])} I_\lambda^+(u) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g_0(t)),$$

obtenemos

$$\inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}\|\varphi_1\|_{L^q(\Omega)}^q,$$

esto es,

$$0 \leq C_\lambda^+ \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}\|\varphi_1\|_{L^q(\Omega)}^q, \quad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{2.13}$$

Por lo tanto existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$C_\lambda^+ < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}, \text{ para todo } 0 < \lambda < \lambda_0 < \Lambda \quad (\Lambda \text{ obtido no Lema 2.4}).$$

Luego, por el Lema 2.2 el funcional I_λ^+ satisface la condición (PS) en el nivel

$$C_\lambda^+ < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}, \text{ para todo } 0 < \lambda < \lambda_0.$$

Por lo tanto, el Teorema A.28 de Passo de la Montanha (ver Apêndice A) garantisa que existe $u \neq 0$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que $I_\lambda^+(u) = C_\lambda^+$ y $(I_\lambda^+)'(u) = 0$, esto es, u es un punto crítico de I_λ^+ y consecuentemente, una solución positiva al problema (2.1).

■

2.2 Solución negativa del funcional I_λ

En esta sección, definiremos la parte negativa del funcional I_λ para encontrar soluciones negativas. Considera lo funcional.

$$I_\lambda^- : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^-(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |u^-|^2 \mathrm{d}x.$$

"Por el mismo argumento utilizado anteriormente, el funcional I_λ^- es de clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y

$$\langle (I_\lambda^-)'(u), h\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u^-|^{q-1} h \mathrm{d}x - a\int_\Omega u^- h \mathrm{d}x, \ \forall\ u, h \in H_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Tenga en cuenta que, encontrar un punto crítico para lo funcional I_λ^- es equivalente a encontrar una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface la ecuación:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla h \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u^-|^{q-1} h \mathrm{d}x - a\int_\Omega u^- h \mathrm{d}x = 0, \ \forall\ h \in H_0^1(\Omega),$$

o sea, se obtiene una solución débil para la equación:

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u^-|^{q-1} + au^- & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

en que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$ e $u^- = \min\{u, 0\}$.
Si u fuera un punto crítico de I_λ^-, entonces $\langle (I_\lambda^-)'(u), h\rangle = 0,\ \forall\ h \in H_0^1(\Omega)$, haciendo $h = u^+$,

$$0 = \langle (I_\lambda^+)'(u), u^+\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla (u^+) dx = \int_\Omega \nabla (u^+) \nabla (u^+) dx = \|u^+\|$$

y consecuentemente, $u^+ = 0$. Por lo tanto, el punto crítico u de I_λ^- satisface $u = u^- \geq 0$, o sea, es una función no positiva de $H_0^1(\Omega)$."

2.2.1 Geometría de Teorema de Paso de la Montaña del funcional I_λ^-

Ahora mostraremos algunos resultados que serán útiles para obtener las condiciones geométricas de Teorema de Passo de la Montanha. Para eso sea $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J_\lambda^-(u) &:= I_{\lambda,s}^-(u) - \frac{1}{2}\|u\|^2 \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |u^-|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Lema 2.6 *Seam $0 < a$ y $1 < q < 2$, entonces la solución trivial $u = 0$ es un minimizador local estricto de J_λ^-, para todo $\lambda > 0$.*

Demostración: Por el Corolario 1.9, es suficiente probar que $u = 0$ es un mínimo local estricta de J_λ^- en C^1. Sea $u \in C^1(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$, Usando $\|u\|_{C^1} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_0$, $\forall\ u \in C^1(\overline{\Omega})$, donde $\|u\|_0 = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$, $\forall\ u \in C(\overline{\Omega})$, obtenemos $0 \leq |u^-| \leq |u| \leq \|u\|_{C^1}$. Como $1 < q < 2$ resulta que $(u^-)^{2-q} \leq \|u\|_{C^1}^{2-q}$ y consecuentemente

$$\int_\Omega |u^-|^2 \mathrm{d}x \leq \|u\|_{C^1}^{2-q} \int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x.$$

Esta última desigualdad y el hecho de que $a > 0$, podemos concluir que

$$-\frac{a}{2}\int_\Omega (u^-)^2 \mathrm{d}x \geq -\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} \int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x. \tag{2.17}$$

De (2.16) e (2.17), sigue

$$\begin{aligned} J_\lambda^-(u) &> \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\right)\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ahora, fijando $\lambda > 0$, considere $R = \dfrac{\lambda}{q}\dfrac{2}{a}$. Si $\|u\|_{C^1} < R$, entonces

$$\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} < \frac{\lambda}{q},$$

o sea,

$$\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} > 0, \ \forall \ 0 < \|u\|_{C^1} < R. \tag{2.19}$$

Finalmente (2.18) y (2.19) implican que

$$J_\lambda^-(u) > 0 = J_\lambda^-(0), \ \forall \ 0 < \|u\|_{C^1} < R$$

y así, $u = 0$ es un mínimo local de J_λ^- en C^1. ■

El siguiente lema se utilizará para demostrar una de las condiciones geométricas requeridas por el Teorema de Paso de la Montaña.

Lema 2.7 *Seam $a > \lambda_1$, $1 < q < 2$ e $b > 0$, entonces fijando $\Lambda > 0$ existe $t_0' = t_0'(\Lambda) > 0$ tal que*

$$I_{\lambda,s}^-(-t\varphi_1) < 0,$$

para todo $t \geq t_0'$ y $\lambda < \Lambda$.

Demostración: Para $t > 0$, sigue que :

$$\begin{aligned} I_\lambda^-(-t\varphi_1) &= \frac{\|-t\varphi_1\|^2}{2} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(-t\varphi_1)^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega |(-t\varphi_1)^-|^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{|t|^2}{2}\|\varphi_1\|^2 + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{a|t|^2}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Recordando que φ_1 es la autofunción positiva asociada con λ_1, obtenemos

$$\begin{aligned} I_\lambda^-(-t\varphi_1) &= \frac{\lambda_1|t|^2}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{a|t|^2}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a)\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Luego, para todo $t > 0$

$$I_\lambda^-(-t\varphi_1) = t^2\left[\frac{(\lambda_1 - a)}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{2-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x\right]. \tag{2.20}$$

Ahora fijando $\Lambda > 0$, sigue de los hechos $\lambda_1 < a$, $1 < q < 2$ y $\varphi_1 > 0$ en Ω, podemos escojer $t_0' = t_0'(\Lambda) > 0$ tal que

$$\frac{(\lambda_1 - a)}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x + \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{2-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x < 0.$$

Si $t \geq t_0'$ y $0 < \lambda < \Lambda$, tenemos que

$$\frac{(\lambda_1 - a)}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{2-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x \leq \frac{(\lambda_1 - a)}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 \mathrm{d}x + \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{2-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x < 0$$

Luego, por (2.20), sigue que $I_\lambda^-(-t\varphi_1) < 0$, para todo $t \geq t_0'$, y $\lambda < \Lambda$. ■

2.2.2 Solución negativa via el Teorema de Paso de la Montaña

Proposición 2.8 *Suponga que $\lambda > 0$, $1 < q < 2$, $\lambda_1 < a$ y $b > 0$. Entonces el problema (2.1) tiene por lo menos una solución negativa para $0 < \lambda < \Lambda$, siendo Λ una constante fijada en el Lema 2.7.*

Demostración: Tenga en cuenta que cualquier solución débil no positiva al pro-

blema (2.1) satisface la ecuación:

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u^-|^{q-1} + au^- & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.21}$$

en que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$, $1 < q < 2$ y $u^- = \min\{u, 0\}$.

Ahora, encontrar una solución débil al problema (2.21) es equivalente a encontrar un punto crítico de lo funcional

$$I^-_\lambda : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$I^-_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_\Omega (u^-)^2 \mathrm{d}x.$$

Nuestro objetivo es mostrar que I^-_λ verifica las hipótesis del Teorema de Paso de la Montaña, como $I^-_\lambda(0) = 0$, entonces comenzamos probando las siguientes condiciones:

(a) existen $\rho, \alpha > 0$ tales que $I^-_\lambda\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ y

(b) existe $e \in H^1_0(\Omega)\backslash\overline{B_\rho}$ tal que $I^-_\lambda(e) < 0$.

Proba del item (a): Recordando que por el Lema 2.6 tenemos que existe $R > 0$ tal que

$$I^-_\lambda(u) > \frac{1}{2}\|u\|^2, \ \forall \ 0 < \|u\| < R. \tag{2.22}$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{2}\|u\|^2$, existen constantes $\rho, \alpha > 0$ tales que

$$I^-_\lambda(u) > \alpha, \ \forall \ \|u\| = \rho,$$

probando así, el item (a).

Prova del item (b): Fijando $\lambda > 0$, por el Lema 2.7, tenemos que existe $e = t'_0\varphi_1 \in H^1_0(\Omega)$ con $t'_0 = t'_0(\Lambda) > 0$ que verifica $I^-_\lambda(e) < 0 = I^-_\lambda(0)$, $\forall \quad \Lambda > \lambda > 0$. Usando esta última desigualdad y por (2.22) sigue $\|e\| \geq R > \rho$. Por lo tanto,

podemos deducir que $\|e\| > \rho$, esto es, $e \in H_0^1(\Omega)\backslash\overline{B_\rho}$. Assim, existe $e \in H_0^1(\Omega)\backslash\overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$. Esto prueba el item (b).

Observación 2.9 *Tenga en cuenta que en este caso, el funcional I_λ^- satisface la condición de Palais Smale (o condición (PS)) en todos los niveles para todo $\lambda > 0$, debido al hecho de que la no linealidad de la ecuación diferencial (2.21) no tiene potencia crítica.*

Luego, el Teorema A.28 (ver Apêndice A) garantisa que existe $u \neq 0$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que $I_{\lambda,s}^-(u) = C_\lambda^-$ y $(I_{\lambda,s}^-)'(u) = 0$, esto es, u es un punto crítico de $I_{\lambda,s}^-$ y consecuentemente, una solución negativa para el problema (2.1). En este caso, de manera similar a lo que hicimos en (2.13), también obtenemos la siguiente desigualdad que será útil para controlar los niveles mínimax.

$$0 \leq C_\lambda^- \leq \frac{\lambda(t_0')^q}{q}\|\varphi_1\|_{L^q(\Omega)}^q, \quad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{2.23}$$

■

2.3 Tercera solución.

La herramienta variacional que usaremos en esta sección es el Teorema de Linking (ver Apêndice A, Teorema A.29). El principal resultado que vamos a obtener es

Proposición 2.10 *Sean $N \geq 4$ y $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algun $k \in \mathbb{N}$, entonces para λ suficientemente pequeño, el problema (2.1) tiene al menos una solución no trivial, distinta de las soluciones positivas y negativas ya encontradas.*

2.3.1 Descomposición del espacio $H_0^1(\Omega)$

En esta subsección, haremos una elección de una descomposición del espacio $H_0^1(\Omega)$. Así, tomando $k \in \mathbb{N}$ fijo sea $E = H_0^1(\Omega) = V_k \oplus W_k$, donde $V_k = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ es el espacio generado por las autofunciones correspondientes a los autovalores

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, y $W_k = V_k^{\perp}$. Aunque la descomposición anterior es natural, es difícil estimar el funcional I_λ aplicado en terminos como $u + v$, con $u \in V_k$ y $v \in W_k$, especialmente cuando necesitamos probar las condiciones geométricas del Teorema de Linking.

Así, utilizaremos una "nueva" descomposición del espacio $H_0^1(\Omega)$ (ver [18]), para eso, necesitamos definir algunos conceptos de la siguiente manera:

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $0 \in \Omega$, y tome $m \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de forma que $B_{\frac{2}{m}} \subset \Omega$. Consideramos también las funciones $\xi_m : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\xi_m = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in B_{\frac{1}{m}} \\ m|x| - 1, & \text{si} \quad x \in A_m = B_{\frac{2}{m}} \backslash B_{\frac{1}{m}} \\ 1, & \text{si} \quad x \in \Omega \backslash B_{\frac{2}{m}}. \end{cases}$$

Luego definimos las siguientes autofunciones aproximadas

$$\varphi_i^m = \xi_m \varphi_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots, k$$

y el espacio generado por ellos, es decir, $V_k^m = \text{span}\{\xi_m\varphi_1, \cdots, \xi_m\varphi_k\}$. Además, defina $W_k^m = (V_k^m)^{\perp}$ y

$$\varphi_{k+1}^m = \eta\varphi_{k+1}, \tag{2.24}$$

donde $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{m}}, \mathbb{R})$ es una función cut-off tal que $0 \leq \eta \leq 1$ en $\mathbb{R}^N$, $\eta = 1$ en $B_{\frac{1}{2m}}$ y $\eta = 0$ en $\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{1}{m}}$.

Lo que se hizo anteriormente fue crear "agujeros" en las autofunciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ obteniendo aproximaciones cuyos soportes se separan del soporte de la función φ_{k+1}^m. Note que

$$supp\, u \cap supp\, \varphi_{k+1}^m = \phi; \ \forall\ u \in V_k^m. \tag{2.25}$$

"Este hecho se deduce fácilmente, señalando que $supp\, u \subseteq supp\ \xi_m$ y como

$supp\ \varphi_{k+1}^m = supp\ (\eta\varphi_{k+1}) \subseteq supp\ \eta \cap supp\ \varphi_{k+1}$, esto implica que $supp\ \varphi_{k+1}^m \subseteq supp\ \eta$, tenemos que (2.25) es satisfecha, notando que $supp\ \xi_m \cap supp\ \eta = \phi$."

La demostración del siguiente Lema puede ser encontrado en [18]. El lema nos garantiza que podemos descomponer el espacio $E = H_0^1(\Omega)$ de la siguiente manera

$$H_0^1(\Omega) = V_k^m \oplus W_k \ \text{ para } m \text{ suficientemente grande.}$$

Lema 2.11 *Si $m \to \infty$, tenemos $\varphi_i^m \to \varphi_i$ en $H_0^1(\Omega)$, para $i = 1, \ldots k$ Además obtenemos*

$$\max_{\{u \in V_k^m \,/\, \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|^2 \leq \lambda_k + C_k m^{2-N}.$$

Una consecuencia de este resultado es la siguiente descomposición del espacio. $H_0^1(\Omega)$.

Corolario 2.12 *Para m suficientemente grande tenemos, $V_k^m \oplus W_k = H_0^1(\Omega)$.*

Demostración: Por el Lema (2.11), tenemos que $\varphi_i^m \to \varphi_i$ en $H_0^1(\Omega)$ para $i = 1 \ldots, k$ y así $P(\varphi_i^m) \to P(\varphi_i) = \varphi_i$ cuando $m \to \infty$, donde $P : H_0^1(\Omega) \to V_k$ es la proyección de $H_0^1(\Omega)$ sobre V_k. De esta manera, obtenemos que $P(V_k^m) \subseteq P(H_0^1(\Omega)) = V_k$. Ahora probaremos $P(V_k^m) = V_k$, con m suficientemente grande. comensamos probando que $\{P(\varphi_i^m)\}_{i=1}^k$ es un conjunto linealmente independente cuando m es grande.

Supongamos que esto no sucede, es decir, que existe $(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_k^m) \neq (0, \ldots, 0)$ tal que

$$\alpha_1^m P(\varphi_1^m) + \ldots + \alpha_k^m P(\varphi_k^m) = 0.$$

Normalizando $(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_k^m) \neq (0, \ldots, 0)$, podemos suponer que $(\alpha_1^m)^2 + \ldots + (\alpha_k^m)^2 = 1$ e así, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos que existe uma subsucesión $(\alpha_1^{m_j}, \ldots, \alpha_k^{m_j})$ convergente para $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Luego,

$$0 = \alpha_1^{m_j} P(\varphi_1^{m_j}) + \ldots + \alpha_k^{m_j} P(\varphi_k^{m_j}) \to \alpha_1 P(\varphi_1) + \ldots + \alpha_k P(\varphi_k) = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_k\varphi_k,$$

cuando $m \to \infty$, esto es, $\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_k\varphi_k = 0$ con $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 = 1$, contradiciendo el hecho de que $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$ es una base de V_k. Por lo tanto, obtenemos que $P(V_k^m) = V_k$ e así, $V_k^m \oplus W_k = H_0^1$. ■

2.3.2 Geometría del Teorema de Linking

La proposición siguiente será útil para estimar el funcional I_λ aplicado en términos del tipo $u + v$, con $u \in V_k^m$ y $v \in W_k$.

Proposición 2.13 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitado y $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una función continua tal que $f(0) = 0$. Si $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones medibles de modo que $med(supp\, u \cap supp\, v) = 0$, entonces*

$$\int_\Omega f(u+v)dx = \int_\Omega f(u)dx + \int_\Omega f(v)dx.$$

Demostración: "Como f es continuo y u, v son medibles, entonces $f(u), f(v)$ y $f(u+v)$ también son medibles. Sean

$$A = supp\, u \cap supp\, v \quad \text{y} \quad B = \Omega \setminus (supp\, u \cup supp\, v)$$

tenemos,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u+v)dx = &\int_{supp\, u \setminus A} f(u+v)dx + \int_A f(u+v)dx \\ &+ \int_{supp\, v \setminus A} f(u+v)dx + \int_B f(u+v)dx. \qquad (2.26)\end{aligned}$$

De $v = 0$ en $supp\, u \setminus A$ y $med(A) = 0$,

$$\int_{supp\, u \setminus A} f(u+v)dx = \int_{supp\, u \setminus A} f(u+0)dx = \int_{supp\, u} f(u)dx = \int_\Omega f(u)dx,$$

pues, $f(u) = f(0) = 0$ en $(supp\, u)^c$. De manera similar,

$$\int_{supp\, v \setminus A} f(u+v)dx = \int_{\Omega} f(v)dx.$$

Además, de $med(A) = 0$ sigue

$$\int_{A} f(u+v)dx = 0$$

y también de $u = v = 0$ en B, obtenemos

$$\int_{B} f(u+v)dx = \int_{B} f(0)dx = 0.$$

Por lo tanto, reemplazando en (2.26) sigue

$$\int_{\Omega} f(u+v) = \int_{\Omega} f(u) + \int_{\Omega} f(v).\text{"}$$

■

Los siguientes dos lemas se utilizarán para mostrar las condiciones geométricas del teorema de Linking.

Lema 2.14 *Sea $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, para algun $k \in \mathbb{N}$. Entonces, existen β, $\rho > 0$ tales que $I_\lambda(u) \geq \beta$ siempre que $u \in W_k$ y $\|u\| = \rho$.*

Demostración: Seja $u \in W_k = V_k^{\perp} = \left\{ v \in H_0^1 \ / \ \langle \varphi_i, v \rangle_{L^2} = 0, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, k \right\}$. Recordando que $\lambda > 0$ y $q > 0$, se tiene

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{a}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{b}{2^*} \int_{\Omega} |u^+|^{2^*} dx. \tag{2.27}$$

Ahora, por la definición de $\lambda_{k+1} = \inf_{u \in W_k} \dfrac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}$, obtenemos

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Entonces, usando la desigualdad previa y el hecho de que $a > 0$, sigue que

$$-\frac{a}{2}\int_\Omega u^2 dx \geq -\frac{a}{2\lambda_{k+1}}\|u\|^2. \tag{2.28}$$

Ahora, como $|u| \geq u^+$, entonces $|u|^{2^*} \geq (u^+)^{2^*}$, y consecuentemente,

$$-\frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx \geq -\frac{b}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx. \tag{2.29}$$

Por otro lado, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $p \in [2, 2^*]$, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|$. Luego,

$$-\frac{b}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx \geq -\frac{bC^{2^*}}{2^*}\|u\|^{2^*}. \tag{2.30}$$

Así, por (2.29) Y (2.30), tenemos

$$-\frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx \geq -\frac{bC^{2^*}}{2^*}\|u\|^{2^*}. \tag{2.31}$$

reemplazando (2.28) , (2.31) en (2.27), obtenemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{a}{2\lambda_{k+1}}\|u\|^2 - \frac{bC^{2^*}}{2^*}\|u\|^{2^*} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2 - \frac{bC^{2^*}}{2^*}\|u\|^{2^*}. \end{aligned}$$

Ahora, como $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ y definiendo $A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{2\lambda_{k+1}} > 0$ e $B = \dfrac{bC^{2^*}}{2^*} > 0$,

sigue que

$$I_\lambda(u) \geq A\|u\|^2 - B\|u\|^{2^*}.$$

Por lo tanto,

$$I_\lambda(u) \geq \|u\|^2(A - B\|u\|^{2^*-2}).$$

Así, si $\|u\| = \rho$ es suficientemente pequeno $\left(0 < \rho < \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\right)$, tenemos que

$$I_\lambda(u) \geq \rho^2(A - B\rho^{2^*-2}) = \beta > 0.$$

Por lo tanto, acabamos de mostrar que existen $0 < \rho < \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ y $\beta = \rho^2(A - B\rho^{2^*-2})$ tales que $I_\lambda(u) \geq \beta$ siempre que $u \in W_k$ y $\|u\| = \rho$. ■

Podemos escojer $e = \varphi_{k+1}^m$ en el Teorema de Linking (ver Apêndice A, Teorema A.29). Seam $R > 0$ y la función φ_{k+1}^m definida en (2.24), así introducimos el siguiente conjunto

$$Q_m := \left\{u \in H_0^1(\Omega) \,:\, u = u_1 + r\varphi_{k+1}^m,\, u_1 \in V_k^m \cap \overline{B}_R(0),\, 0 \leq r \leq R_2\right\}. \quad (2.32)$$

Denote por ∂Q_m la frontera (relativa) de Q_m en el espacio de dimension finita $\text{span}\{\varphi_1\} \oplus \mathbb{R}\varphi_{k+1}^m$. El resultado a continuación es fundamental para la existencia de una tercera solución no trivial al problema (2.1). A continuación, el símbolo $O(\varepsilon^\omega)$ para algun $\omega \geq 0$ designa una función satisfaciendo $|O(\varepsilon^\omega)| \leq C\varepsilon^\omega$ para algun $C > 0$ independente de $\varepsilon > 0$. Tal símbolo no siempre es positivo.

Lema 2.15 *Sea $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, para algun $k \in \mathbb{N}$. Entonces, dado $\lambda_0 > 0$, existen $m_0 \in \mathbb{N}$ y $R > \rho$, tales que*

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x,$$

siempre que $u \in \partial Q_m$, con $m \geq m_0$ y $\lambda \leq \lambda_0$.

Demostración: Para todo $r \geq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) =& \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi_{k+1}^m|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda r^q}{q}\int_\Omega |\varphi_{k+1}^m|^q \mathrm{d}x - \frac{ar^2}{2}\int_\Omega (\varphi_{k+1}^m)^2 \mathrm{d}x \\ & - \frac{r^{2^*}b^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left[(\varphi_{k+1}^m)^+\right]^{2^*} \mathrm{d}x \\ \leq & \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi_{k+1}^m|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda r^q}{q}\int_\Omega |\varphi_{k+1}^m|^q \mathrm{d}x - \frac{r^{2^*}b^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left[(\varphi_{k+1}^m)^+\right]^{2^*} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Así, para $0 < \lambda \leq \lambda_0$, la desigualdad anterior, asegura que

$$I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{r^2}{2}\|\varphi_{k+1}^m\|^2 + \frac{\lambda_0 r^q}{q}\|\varphi_{k+1}^m\|_{L^q(\Omega)}^q - \frac{r^{2^*}b^{2^*}}{2^*}\|(\varphi_{k+1}^m)^+\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*}. \tag{2.33}$$

Como $\varphi_{k+1}^m \to \varphi_{k+1}$ en $H_0^1(\Omega)$ cuando $m \to \infty$ y notando que valen las inmersiones $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $\forall\ p \in [2, 2^*]$, $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ e $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, pois $1 < q < 2 \leq 2^*$ y Ω es dominio limitado, concluimos por (2.33) que

$$\lim_{m\to\infty} I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{r^2}{2}\|\varphi_{k+1}\|^2 + \frac{\lambda_0 r^q}{q}\|\varphi_{k+1}^m\|_{L^q(\Omega)}^q - \frac{r^{2^*}b^{2^*}}{2^*}\|(\varphi_{k+1}^m)^+\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*}.$$

Como $1 < q < 2 \leq 2^*$, se deduce que la suma a la derecha de la desigualdad anterior, se escribe como un polinomio de grado 2^*, esto es, $P(r) = Ar^2 + Br^q - Cr^{2^*}$ donde $A > 0$, $B > 0$ y $C > 0$, consecuentemente existe $R_1 > \rho$, suficientemente grande y $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_\lambda(R\varphi_{k+1}^m) \leq 0, \text{ para todo } m \geq m_1, R \geq R_1 \text{ y } 0 < \lambda \leq \lambda_0. \tag{2.34}$$

Además, existe $m_0 \geq m_1$ e $\beta > 0$ tal que

$$I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) \leq \beta, \text{ para todo } m \geq m_0, r \geq 0 \text{ y } 0 < \lambda \leq \lambda_0. \tag{2.35}$$

Sabemos que $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, sea $a_k < a$ tal que $\lambda_k < a_k < \lambda_{k+1}$. Luego, como $N > 2$ considere m suficientemente grande tal que $\dfrac{C_k}{m^{N-2}} < a_k - \lambda_k$, donde $C_k > 0$ fue obtenido en el Lemma 2.11. Así,

$$\lambda_k + C_k m^{2-N} < a_k < a. \tag{2.36}$$

Ahora, para $v \in V_k^m$, usando el Lema 2.11, obtenemos que

$$\left| \frac{v}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \right|^2 \leq \lambda_k + C_k m^{2-N}$$

y consecuentemente por (2.36), sigue

$$\left\| \frac{v}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \right\| < a_k.$$

Por lo tanto, tenemos la siguinte estimativa

$$-\frac{a}{2a_k} \int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x > -\frac{a}{2} \int_\Omega v^2 \mathrm{d}x. \tag{2.37}$$

Así, por la definición del fumcional I_λ, tenemos que para cada $v \in V_k^m$,

$$I_\lambda(v) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a_k}\right)\|v\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |v|^q \mathrm{d}x - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (v^+)^{2^*} \mathrm{d}x. \tag{2.38}$$

Como $a > a_k$, sigue $1 - \dfrac{a}{a_k} < 0$ y consecuentemente consideramos $R \geq R_1$ muy grande de tal manera que si $\|v\| = R$, obtenemos $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{a_k}\right)\|v\|^2 \leq -\beta$, esto es,

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a_k}\right)\|v\|^2 \leq -\beta, \text{ para todo } v \in \partial(B_R \cap V_k^m) \text{ e } R \geq R_1. \tag{2.39}$$

Seam $R \geq R_1$, $m \geq m_0$, $0 < \lambda \leq \lambda_0$. y denotamos la frontera de Q_m por $\partial Q_m = \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i$, donde

(1) $\Gamma_1 = \overline{B_R} \cap V_k^m$,

(2) $\Gamma_2 = \Big\{ v \in H_0^1(\Omega) \quad : \quad v = u + R\varphi_{k+1}^m, \;\; u \in B_R(0) \cap V_k^m \Big\}$,

(3) $\Gamma_3 = \Big\{ v \in H_0^1(\Omega) \quad : \quad v = u + r\varphi_{k+1}^m, \;\; u \in V_{k+1}^m, \|u\| = R, \;\; 0 \leq r \leq R \Big\}$.

Mostraremos que em cada Γ_i, tenemos $I_\lambda\Big|_{\Gamma_i} \leq \dfrac{\lambda}{q}\displaystyle\int_\Omega |u|^q$, donde $i = 1, 2, 3$.

Caso (1): Sea $u \in \Gamma_1 \subset V_k^m$. Luego, por (2.38) y usando las condiciones $a_k < a$ y $b > 0$ podemos concluir que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x, \;\; \forall \; u \in \Gamma_1 \subset V_k^m.$$

Caso (2): Sea $v \in \Gamma_2$. Así, obtenemos $v = u + R\varphi_{k+1}^m$, donde $u \in B_R(0) \cap V_k^m$. Recordando que, por (2.25), tenemos que $supp\, u \cap supp\, \varphi_{k+1}^m = \phi$, $\forall \; u \in V_k^m$, por la Proposição 2.13 se sigue

$$I_\lambda(u + R\varphi_{k+1}^m) = I_\lambda(u) + I_\lambda(R\varphi_{k+1}^m).$$

Ahora, por (2.38), $a_k < a$ y $b > 0$, podemos obtener

$$I_\lambda(u + R\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x + I_\lambda(R\varphi_{k+1}^m),$$

desde que $m \geq m_0 \geq m_1$ e $R \geq R_1$. Así, por (2.34) sigue que

$$I_\lambda(u + R\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{q}\int\limits_{supp\, u} |u|^q \mathrm{d}x.$$

Nuevamente de $supp\, u \cap supp\, \varphi_{k+1}^m = \phi$, concluimos

$$\frac{\lambda}{q}\int\limits_{supp\, u}|u|^q \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{q}\int\limits_{supp\, u}|u+R\varphi_{k+1}^m|^q \mathrm{d}x \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u+R\varphi_{k+1}^m|^q \mathrm{d}x,$$

y por lo tanto,

$$I_\lambda(v) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |v|^q dx,\ \forall\ v \in \Gamma_2.$$

Caso (3): Sea $v \in \Gamma_3$, tenemos que existe $u \in \partial(B_R \cap V_k^m)$ y $r \in [0, R]$ que verifican $v = u + r\varphi_{k+1}^m$. De nuevo de $supp\, u \cap supp\, \varphi_{k+1}^m = \phi,\ \forall\ u \in V_k^m$, la Proposição 2.13 asegura que

$$I_\lambda(u + r\varphi_{k+1}^m) = I_\lambda(u) + I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m). \tag{2.40}$$

De $b > 0$ y (2.38) sigue

$$I_\lambda(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a_k}\right)\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x.$$

Ahora, de $u \in \partial(B_R \cap V_k^m)$, por (2.39), tenemos

$$I_\lambda(u) \leq -\beta + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x.$$

Usando la estimativa (2.35),

$$I_\lambda(u) + I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx. \tag{2.41}$$

Luego por (2.40), (2.41) y estimando la última integral anterior, por (2.25) , obtenemos

$$I_\lambda(u + r\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx = \frac{\lambda}{q}\int\limits_{supp\, u}|u|^q dx. \tag{2.42}$$

Entonces,

$$\frac{\lambda}{q}\int\limits_{supp\, u}|u|^q dx = \frac{\lambda}{q}\int\limits_{supp\, u}|u+R\varphi_{k+1}^m|^q dx \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u+R\varphi_{k+1}^m|^q dx.$$

Luego, por (2.42) concluimos que

$$I_\lambda(v) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |v|^q dx, \ \forall\ v \in \Gamma_3$$

■

2.3.3 Nível Mini-max

Comensamos recordando que

$$S = \inf\left\{ \frac{\|u\|^2}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}} \ ;\ u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

es la mejor constante de inmersión de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ y alcanzado por la familia de funciones (veja [6]) $U_\epsilon(x) = \frac{[N(N-2)\epsilon^2]^{\frac{N-2}{4}}}{[\epsilon^2 + |x|^2]^{\frac{N-2}{2}}}$, donde $\epsilon > 0$ y $\|U_\epsilon\| = \|U_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} = S^{\frac{N}{2}}$; para todo $\epsilon > 0$ (ver [27]). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $0 \in \Omega$. Defina también

$$U_\epsilon^m = \eta U_\epsilon \text{ donde } \eta \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{m}}, \mathbb{R}) \text{ y } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } B_{\frac{1}{m}} \subset \Omega. \tag{2.43}$$

El lema que enunciaremos a continuación es un resultado bien conocido en la literatura matemática, por lo tanto, no lo demostraremos, pero se utilizará en esta subsección.

Lema 2.16 *(ver [27]) Cuando* $\epsilon \to 0^+$ *obtenemos:*

(1) $\|U_\epsilon^m\|^2 = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2})$,

(2) $\|U_\epsilon^m\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N)$,

(3) $\|U_\epsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \begin{cases} d\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2), & si\ N = 4 \\ d\epsilon^2 + O(\epsilon^{N-2}), & si\ N \geq 5 \end{cases}$, *donde* $d > 0$ *es constante.*

Lema 2.17 *Seam $A > 0$ y $B > 0$ constantes positivas, entonces*

$$\max_{t\geq 0}\left(\frac{At^2}{2}-\frac{Bt^{2^*}}{2^*}\right)=\frac{1}{N}\left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Demostración: Defina la función $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dado por $f(t)=\dfrac{At^2}{2}-\dfrac{Bt^{2^*}}{2^*}$. El punto crítico $t_0=\left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ es punto de máximo global para f ■

Nuestro propósito en esta subsección es mostrar que podemos mantener los valores del funcional I_λ restringido al conjunto

$$Q_m^\varepsilon:=\Big\{u\in H_0^1(\Omega)\,:\,u=u_1+rU_\epsilon^m,\,u_1\in V_k^m\cap\overline{B}_R(0),\,0\leq r\leq R\Big\}.$$

debajo del nivel permitido para la condición (PS) dado en el Lema 1.8. El lema a continuación es el paso principal en esa dirección. Continuaremos usando las mismas anotaciones de la subsección 2.3.1, es decir, $V_k^m\oplus W_k=H_0^1(\Omega)$, donde $W_k=V_k^\perp$, $V_k=\text{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\}$ y $V_k^m=\text{span}\{\xi_m\varphi_1,\cdots,\xi_m\varphi_k\}$. Además, se verifican las siguientes estimativas

$$\|u\|^2\leq\lambda_k\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,,\forall u\in V_k^m\quad\text{ y }\quad\|u\|^2\geq\lambda_{k+1}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,,\forall u\in W_k. \tag{2.44}$$

Lema 2.18 *Si $N\geq 4$ y $\lambda_k<a<\lambda_{k+1}$ para algun $k\in\mathbb{N}$, entonces existen $m_0>0$, $\lambda_0>0$ y $\epsilon_0>0$ tales que*

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}}I_\lambda(u)<\frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

para todo $m\geq m_0$, $0<\lambda<\lambda_0$ y $0<\epsilon<\epsilon_0$.

Demostración: Sea $I_\lambda(u)=J(u)+\dfrac{\lambda}{q}\|u\|^q_{L^q(\Omega)}$, donde

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{a}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{b}{2^*}\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Afirmación 2.19 *Para $N \geq 4$ existen $m_0 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que*

$$\sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} J(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}, \quad \textit{para } m \geq m_0 \textit{ y } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

En efecto, sea $u = v + tU_\epsilon^m \in \overline{Q_m^\epsilon}$, con $t \geq 0$. Luego

$$\begin{aligned} J(tU_\epsilon^m) &= \frac{t^2}{2}\|U_\epsilon^m\|^2 - \frac{at^2}{2}\|U_\epsilon^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{bt^{2^*}}{2^*}\|U_\epsilon^m\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} \\ &= \frac{\left(\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|_{L^2(\Omega)}^2\right) t^2}{2} - \frac{b\|U_\epsilon^m\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} t^{2^*}}{2^*}. \end{aligned}$$

Para $A = \|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0$ (observe (2.44)) y $B = b\|U_\epsilon^m\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*}$, por el Lema 2.17 obtenemos

$$\max_{t \geq 0} J(tU_\epsilon^m) = \frac{b^{\frac{2-N}{2}}}{N} \left(\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|U_\epsilon^m\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2} \right)^{\frac{N}{2}}. \tag{2.45}$$

Como $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, tenemos $\delta > 0$ que verifica $\lambda_k < \delta < a$. Luego $\delta - \lambda_k > 0$ y consecuentemente existe $m_0 > 0$ suficientemente grande tal que $\dfrac{C_k}{m_0^{N-2}} < \delta - \lambda_k$, donde C_k fue obtenido en el Lemma 2.11.

Por lo tanto,

$$\lambda_k + C_k m_0^{2-N} < \delta < a. \tag{2.46}$$

Así, para todo $m \geq m_0$, se tiene $\dfrac{C_k}{m_0^{N-2}} \geq \dfrac{C_k}{m^{N-2}}$. Luego usando el Lema 2.11 podemos deducir que para $v \in V_k^m \setminus \{0\}$ obtenemos

$$\lambda_k + C_k m_0^{2-N} \geq \lambda_k + C_k m^{2-N} \geq \max_{\{u \in V_k^m / \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|^2 \geq \left\| \frac{v}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \right\|^2.$$

Entonces,

$$\lambda_k + C_k m_0^{2-N} \geq \left\| \frac{v}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \right\|^2. \tag{2.47}$$

Luego, por (2.46) y (2.47), se sigue que

$$\frac{\delta\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}{2} \geq \frac{\|v\|^2}{2};\ \text{para todo } v \in V_k^m \ \text{ y } \ m \geq m_0 \tag{2.48}$$

Así, de (2.48), para todo $m \geq m_0$, $b > 0$ y $v \in V_k^m \cap B_R$, tenemos

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{a}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - b\frac{1}{2^*}\|v^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{a}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\delta}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{a}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}{2}(\delta - a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\delta < a$, concluimos que

$$J(v) < 0;\ \forall\ v \in V_k^m \cap B_R \ \text{ y } \ m \geq m_0. \tag{2.49}$$

Usando ideas similares a las que usamos en (2.25), tenemos

$$supp\ v \cap supp\ U_\epsilon^m = \phi,\ \forall\ v \in V_k^m.$$

Luego por la Proposição 2.13, para $u = v + tU_\epsilon^m \in (B_R \cap V_k^m) \oplus [0, RU_\epsilon^m]$ obtenemos

$$J(u) = J(v) + J(tU_\epsilon^m). \tag{2.50}$$

Ahora por (2.45), (2.49) y (2.50) podemos deducir que

$$J(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}}{N}\left(\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|U_\epsilon^m\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{2}},\ \forall\ u \in (B_R \cap V_k^m) \oplus [0, RU_\epsilon^m] \ \text{ con } m \geq m_0.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) \leq \frac{b^{\frac{2-N}{2}}}{N}\left(\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|U_\epsilon^m\|_{L^{2^*}(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{2}} \quad \text{con } m \geq m_0 \tag{2.51}$$

Para estimar la desigualdad (2.51) usaremos el Lemma 2.16, por lo que dividimos la prueba en dos casos:

Caso (1): Si $N = 4$.

Así,

$$\begin{aligned}\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|U_\epsilon^m\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} &= \frac{S^2 - ad\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2)}{(S^2 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{S^2(1 - a\frac{d}{S^2}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2))}{(S^2(1 + \frac{O(\epsilon^4)}{S^2}))^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{S(1 - a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2))}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{onde } \widehat{d} = \frac{d}{S^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|U_\epsilon^m\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} \leq S\left[\frac{1}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} - \frac{a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon|}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} + \frac{O(\epsilon^2)}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{2.52}$$

Note ahora que, como $\dfrac{\dfrac{O(\epsilon^2)}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}}{\epsilon^2} = \dfrac{O(\epsilon^2)}{\epsilon^2}\dfrac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}$ es limitado, para ϵ suficientemente pequeño,

$$\frac{O(\epsilon^2)}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} = O(\epsilon^2). \tag{2.53}$$

También tenga en cuenta que $\dfrac{1}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} \to 1^-$, cuando $\epsilon \to 0$, entonces podemos obtener para ϵ suficientemente pequeño de forma que $\dfrac{1}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} \geq \dfrac{1}{2}$. Luego,

$$-\frac{a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon|}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} \leq -\frac{a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon|}{2} = -a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon|, \quad \text{donde } \widetilde{d} = \frac{\widehat{d}}{2}. \tag{2.54}$$

Por último, definir la función $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$, por el teorema del valor medio, obtenemos que

$$\frac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2}(1+\theta)^{\frac{-3}{2}}O(\epsilon^4), \quad \text{donde} \quad \theta \in (0, O(\epsilon^4)).$$

Así,

$$\frac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} = 1 - O(\epsilon^4). \tag{2.55}$$

Ahora, reemplazando (2.53), (2.54) y (2.55) en (2.52) sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|U_\epsilon^m\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} &\leq S\left[\frac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} - \frac{a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon|}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} + \frac{O(\epsilon^2)}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}\right] \\ &\leq S\left[1 - O(\epsilon^4) - a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2)\right] \quad \text{y}\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|U_\epsilon^m\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} \leq S(1 - a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2)) = S\left(1 - a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + \frac{\epsilon^2 O(\epsilon^2)}{\epsilon^2}\right).$$

Ahora, de la limitación de $\dfrac{O(\epsilon^2)}{\epsilon^2}$ y $a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| \to \infty$, cuando $\epsilon \to 0$, sigue, si ϵ es muy pequeño tenemos, $-a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2) < 0$, así, concluimos ,

$$\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a\|U_\epsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|U_\epsilon^m\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} \leq S\left[1 - a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2)\right] < S, \quad \text{donde } \epsilon \approx 0.$$

Luego, para $N = 4$, sigue de (2.51) que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} J(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N} \quad \text{para } m \geq m_0 \text{ e } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Caso (2): Si $N \geq 5$ la demostración para este caso, sigue de manera similar a lo que hicimos en el caso anterior lo que demuestra nuestra afirmación.

Finalmente usando la afirmación 2.19 tenemos,

$$\frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N} - \sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) > 0, \text{ para todo } m \geq m_0 \text{ y } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Por lo tanto, existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\frac{\lambda}{q}\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} \|u\|^q_{L^q(\Omega)} < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N} - \sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u),$$

$\forall\ m \geq m_0$, $0 < \epsilon < \epsilon_0$ y $0 < \lambda < \lambda_0$. Luego,

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) \leq \sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) + \frac{\lambda}{q}\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} \|u\|^q_{L^q(\Omega)} < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

$m \geq m_0$, $0 < \epsilon < \epsilon_0$ y $0 < \lambda < \lambda_0$, lo que demuestra el lema. ■

Lema 2.20 *Si $N \geq 4$ y $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algun $k \in \mathbb{N}$, entonces existen $m_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que*

$$C_\lambda := \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u)) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

donde $\Gamma = \{h \in C(\overline{Q_m^\epsilon}, H_0^1)\ ;\ h = id \text{ em } \partial Q_m^\epsilon\}$, para todo $m \geq m_0$, $0 < \lambda < \lambda_0$ y $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Demostración: El Lema 2.18 asegura que existen $m_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N}, \text{ para todo } m \geq m_0,\ 0 < \lambda < \lambda_0 \text{ y } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Así, para m_0, λ_0 y ϵ_0 dado arriba tenemos,

$$\inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u)) \leq \sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

■

2.3.4 Solución via el Teorema de Linking

Proposición 2.21 *Seam $N \geq 4$ y $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algun $k \in \mathbb{N}$, entonces para λ suficientemente pequeño, el problema (2.1) tiene al menos una solución no trivial, distinta de las soluciones positivas y negativas ya encontradas.*

Demostración: Vamos a obtener una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que sea un punto crítico del funcional

$$I_\lambda : H_0^1 \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx.$$

Para esto, usaremos el teorema de Linking con la condición $(P.S)_C$ (ver Apéndice Teorema) con $C < \dfrac{S^{\frac{N}{2}} b^{\frac{2-N}{2}}}{N}$, donde S es la mejor constante de la inmersión de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Recuerde por la subsección 2.3.1 que $V_k^m \oplus W_k = H_0^1$, donde $W_k = V_k^\perp$, $V_k = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ y $V_k^m = \text{span}\{\xi_m\varphi_1, \cdots, \xi_m\varphi_k\}$. Ahora mostraremos la geometría exigida por el teorema de Linking. En efecto, nuestro objetivo es obtener una esfera. $S_\rho = \partial B_\rho \cap W_k$ y un rectángulo $Q_m^\epsilon = (B_R \cap V_k^m) \oplus ([0, RU_\epsilon^m])$, donde $U_\epsilon^m = \eta U_\epsilon$ con $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{m}}, \mathbb{R})$ tales que:

(a) $I_\lambda\Big|_{S_\rho} \geq \alpha > 0$,

(b) $I_\lambda\Big|_{\partial Q_m^\epsilon} < \beta < \alpha; \quad 0 < \rho < R.$

Prueba del item (a)**:** Por el Lema 2.14, existe $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ tal que $I_\lambda\Big|_{S_\rho} \geq \alpha$, probando así, el item (a)

Prueba do item (b)**:** Sea $m \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|U_\epsilon^m\| = 1$. Reemplazando U_ϵ^m por φ_{k+1}^m en el Lema 2.15, para $\delta > 0$ existen $m_0 \in \mathbb{N}$ y $R > \rho$ tales que,

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx, \ \forall\ u \in \partial Q_m^\epsilon, \tag{2.56}$$

para todo $m \geq m_0, \lambda \leq \delta$ y $\epsilon > 0$. Como las normas $\|.\|_{L^q(\Omega)}$ y $\|.\|$ en el espacio de dimensión finita $V_k^m \oplus < U_\epsilon^m >$ son normas equivalentes, entonces existe $K_0 > 0$ tal que $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq K_0\|u\|$, $\forall\ u \in \partial Q_m^\epsilon$ y por lo tanto, como Q_m^ϵ es limitada en $H_0^1(\Omega)$, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq K_1,\ \forall\ u \in \partial Q_m^\epsilon. \tag{2.57}$$

Por lo tanto, por (2.56) , (2.57) y tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, obtenemos que existe $\beta > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) < \beta < \alpha,$$

para todo $u \in \partial Q_m^\epsilon$, com $Q_m^\epsilon = (B_R \cap V_k^m) \oplus ([0, RU_\epsilon^m])$, probando así, el item (b) de la geometría de Linking.

Por otro lado, el Lema 2.20 asegura que existen $m_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que

$$\sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N},\ \text{ para todo } m \geq m_0,\ 0 < \lambda < \lambda_0 \text{ y } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Así, para m_0, λ_0 y ϵ_0 dado arriba,

$$\inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u)) \leq \sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

Por lo tanto, por el Lema 1.8 para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño I_λ satisface la condición Palais Smale $(P.S)_{C_\lambda}$, donde $C_\lambda = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u))$. Luego, tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, por el teorema de Linking con la condición $(P.S)_C$ (ver Apéndice A.3, Teorema A.29) obtenemos que $C_\lambda = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u))$ es un valor crítico del funcional I_λ con $C_\lambda \geq \alpha$, esto es, existe $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema 2.1 tal que $0 < \alpha \leq I_\lambda(u_\lambda)$. Luego u_λ no es nulo, porque $I_\lambda(0) = 0$.

Más tarde demostraremos que u_λ es diferente de las soluciones positivas y ne-

gativas ya encontradas. ■

2.4 Prueba de Teorema 2.1

Demostración: Basta mostrar que u_λ es distinto de los otros puntos críticos encontrados para los funcionales I_λ^+ y I_λ^-.

Para eso, sigue de (2.13) y (2.23), que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, obtenemos que $0 < C_\lambda^+, C_\lambda^- < \alpha \leq C_\lambda$. Por lo tanto, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, el problema 2.1 tiene al menos tres soluciones no triviales. ■

Apêndice A

Resultados auxiliares

Para facilitar la lectura, presentamos resultados utilizados en los capítulos anteriores.

A.1 Resultados Generales

El propósito de esta sección es presentar las definiciones del diferencial Gateaux y Frechet y algunos resultados. Además, las nociones de derivada débil, espacios de Sobolev y algunas de sus propiedades. también se presentarán sin el rigor que merecen estos conceptos, pero indicaremos en la bibliografía dónde puede recurrir el lector si lo desea.

Definición A.1 *Sea $F : U \subset V \to \mathbb{R}$ una función, donde U es un abierto en V. El limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

si existe, se llamará derivada de Gateaux de F en u_0 en la dirección $h \in V$ y será denotada por $\langle F'(u_0), h\rangle$.

Definición A.2 *Se dice que F es diferenciable en u_0 en el sentido de Frechet o Frechet diferenciable en u_0 si existe una aplicación lineal continua $L : V \to \mathbb{R}$ tal*

que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(u_0+h)-F(u_0)-L(h)}{\|h\|}=0.$$

Teorema A.3 *(Ver [27, Proposição 1.3]). Sea $\phi : E \to \mathbb{R}$ donde E es un subconjunto abierto de un espacio vectorial normado X. Si ϕ tiene una derivada de Gateaux continua en E, entonces $\phi \in C^1(E,\mathbb{R})$.*

Definición A.4 *"Decimos que un conjunto A está contenido de forma compacta en Ω, y denotamos por $A \subset\subset \Omega$ si $A \subset \bar{A} \subset \Omega$ y $\bar{A}$ es compacto en $\mathbb{R}^N$."*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un abierto no vacío y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función.

Definición A.5 *El conjunto $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ se denomina **Soporte** de la funcion f denotada por supp f.*

Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto no vacío. La función definida por

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in K \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin K \end{cases}$$

Se llama función característica de K

Definición A.6 *"Sea $1 \leq p \leq \infty$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ perteneciente a $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f1_K \in L^p(\Omega)$, para todo compacto $K \subset \Omega$. Sea un vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, donde α_i es un entero no negativo. Entonces α es llamado um multi-índice de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.*
Sea um multi-índice α, se define

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}."$$

Definición A.7 *"Seam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, α un multi-índice y $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. La función g es la α-ésima derivada debil de f en Ω y escrivimos $D^\alpha f = g$, si*

$$\int_\Omega f(x).D^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x).\phi dx, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)."$$

Definición A.8 *Sea k un entero no negativo y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, como el espacio de funciones $v \in L^p(\Omega)$ tal que cualquier derivada débil de v, hasta el orden k, es una función de $L^p(\Omega)$. Esto es,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k\}.$$

Definición A.9 *Sea p que verifica $1 \leq p \leq \infty$,*

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega). \tag{A.1}$$

Además, para cada p, $W^{k_1,p} \subset W^{k_2,p}$ si $k_1 \geq k_2$. Para $1 \leq p \leq \infty$, tenemos que $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach unido con la norma $||.||_{W^{k,p}} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que es dada por

$$||v||_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |||D^\alpha v||_{L^p}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha v|^p \right)^{1/p}, \qquad \text{se } 1 \leq p < \infty. \tag{A.2}$$

Una norma equivalente a (A.2) en el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es

$$||v||_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v||_{L^p}.$$

Note, si $p = 2$, el espacio $W^{k,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, para k no negativo, unido del produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \quad \forall\, u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Por lo general, denotamos H^k el espacio $W^{k,2}(\Omega)$, así de (A.1) tenemos $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Definición A.10 *"Seam (u_n) y $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Decimos que (u_n) converge a u en*

$W^{k,p}(\Omega)$ *y denotamos por* $u_n \to u$ *en* $W^{k,p}(\Omega)$, *si*

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{W^{k,p}} = 0.\text{"}$$

Definición A.11 *"Definimos el espacio* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *como siendo la cerradura de* $C_0^\infty(\Omega)$ *en* $W^{k,p}(\Omega)$. *Analogamente, denotemos por* $H_0^k(\Omega)$ *la cerradura de* $C_0^\infty(\Omega)$ *en* $H^k(\Omega)$.
Por lo tanto, una función $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *es equivalente a decir, tenemos* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *que verifica* $u_n \to u$ *en* $W^{k,p}(\Omega)$.
El espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ *se interpreta como el conjunto de funciones* $u \in W^{k,p}(\Omega)$. *que verifican*

$$D^\alpha u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ para todo } |\alpha| \leq k-1$$

Note que, para k *no negativo,* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach con la norma inducida de* $W^{k,p}(\Omega)$. *También se observa que , cuando* $p = 2$, $H_0^k(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert con la norma inducida de* $H^k(\Omega)$.

Una norma en $W_0^{k,p}(\Omega)$ *es equivalente a la norma dada en* (A.2) *puede ser definido como*

$$||u||_{W_0^{k,p}} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}.$$

Así, $H^k(\Omega)$ *y* $H_0^k(\Omega)$ *son espacios de Hilbert entonces son espacios reflexivos."*

Definición A.12 ***(Inmersión)***. *Seam* U *y* V *dos espacios normados. Decimos que* U *está inmerso en el espacio* V, *y denotamos por* $U \hookrightarrow V$, *se cumplen las siguientes condiciones:*

(*i*) U *es un subespacio de* V.

(*ii*) *"la aplicación identidad* $I : U \to V$ *definida por* $Ix = x$, $\forall\ x \in U$, *es continuo.*

Recuerda que si U y V son espacios normados. Decimos que un operador linear

$T : U \to V$ es compacto cuando T es continuo y T lleva conjuntos limitados en conjuntos relativamente compactos, esto es, si $A \subseteq U$ es limitado entonces $\overline{T(A)} \subseteq V$ es compacto.

Como I es lineal, (ii) equivale a decir que tenemos una constante c que verifica

$$\|Ix\|_V \leq c\|x\|_U, \quad \forall\, x \in U.$$

Si $U \hookrightarrow V$ y el operador identidad $I : U \to V$ en la inmersión es compacta, por eso decimos que la inmersión de U em V é compacta e la escribimos como $U \overset{c}{\hookrightarrow} V$".

Teorema A.13 *(Ver [3, corolario 9.14]). "Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^1 con frontera limitada y $1 \leq p \leq \infty$. Luego,*

(i) *Si $1 \leq p < N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.*

(ii) *Si $p = N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [p, +\infty)$.*

(iii) *Si $p > N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$."*

Teorema A.14 *(Ver [3, observación 17, p.287]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un dominio limitado con frontera suave, entonces*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$con \quad 1 \leq q \leq 2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2} & si \quad N \geq 3; \\ \\ \infty & si \quad N = 1, 2. \end{cases}$$

Teorema A.15 *(Ver [3, Teorema 9.16]) (**Rellich-Kondrachov**). "$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y limitado de clase $C^1(\Omega)$ y $N \geq 2$. Entonces,*

(i) *Si $p < N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*[$, donde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.*

(ii) *Si $p = N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$.*

(iii) Si $p > N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left(\overline{\Omega}\right)$."

Observación A.16 *Note que, si $p = 2$, entonces para (i) y (ii) del teorema anterior, tenemos que*

$$H^1(\Omega) = W^{1,2} \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

donde $q \in [1, p^*[$ con $p^* = \dfrac{2N}{N-2}$ si $N > p = 2$, y $q \in [1, +\infty[$ si $N = p = 2$.
Ahora, como $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, entonces

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega).$$

"efecto, sea el operador identidade $I : H_0^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Tenemos que probar que I es un operador compacto.
En efecto, sea $A \subset H_0^1(\Omega)$ limitado, entonces $\|u\|_{H_0^1} \leq k$, $\forall\, u \in A$. De $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces por la equivalencia de las normas, tenemos $\|u\|_{H^1} \leq c\|u\|_{H_0^1} \leq ck$, $\forall\, u \in A$, así A es limitada en $H^1(\Omega)$. Ya que $H^1(\Omega)$ está inmerso compactamente en $L^q(\Omega)$, obtenemos que $IA = A$ es relativamente compacto en $L^q(\Omega)$ luego I es un operador compacto. Así, si $q = 2$ tenemos,

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)."$$

Observación A.17 *Una consecuencia importante de la inmersión compacta. $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ es que si $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ y $\|u_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) y $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que $u_{n_k} \to u$ en $L^2(\Omega)$ y $u_{n_k} \to u$, q.t.p. en Ω.*

A.2 Algunos resultados del análisis funcional

Proposición A.18 *(Ver [3, Proposición 3.5]) .Sea X un espacio de Banach y (x_n) uma sucesión en X. Si (x_n) converge debilmente para $x \in X$, entonces $\|x_n\|_X$ es*

limitada y

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

Lema A.19 *(Ver [17, Lema 6.1]) (**Desigualdad de Yung**). Supomga que* $a \geq 0$, $b \geq 0$ *y* $0 < \lambda < 1$, *entonces*

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b,$$

con igualdad si y solamente si $a = b$.

Teorema A.20 *(ver [3, Teorema 4.6])(**Desigualdad de Hölder**). Seam* $f \in L^p(\Omega)$ *y* $g \in L^q(\Omega)$, *con* $0 < p < \infty$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Entonces*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ y } \int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema A.21 *(Ver [3, Teorema 4.2])(**Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue**). "Sean* $(f_n) \subset L^1(\Omega)$, *satisfaciendo:*

(a) $f_n \to f$ *q.t.p. em* Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Luego, $f \in L^1(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx\text{"}$$

Teorema A.22 *(Ver [3, Teorema 4.9]). "Sea* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ *y* $u \in L^p(\Omega)$ *tal que* $u_n \to u$. *Luego existe uma subsucesión* (u_{n_k}) *de* (u_n) *y existe* $h \in L^p(\Omega)$ *tales que*

(i) $u_{n_k} \to u$, *q.t.p. en* Ω,

(ii) $|u_{n_k}| \leq h$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ *y q.t.p en* Ω. "

Teorema A.23 *(Ver [3, Teorema 4.11])(**Teorema de la representación de Riesz**). "Sean* $p, p' > 1$ *con* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ *y* $\phi \in (L^p(\Omega))'$. *Entonces existe una única*

función $u \in L^{p'}(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega ufdx \quad \forall\, f \in L^p(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}.\text{"}$$

Definición A.24 *(Ver [20, Definição 1.1.1]). Seam* $1 < p < \infty$ *y* $q = p/(p-1)$. *Una sucesiòn* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ *converge debilmente para* $u \in L^p(\Omega)$, *escribimos*

$$u_n \rightharpoonup u, \quad en \;\; L^p(\Omega),$$

cuando

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v = \int_\Omega uv, \quad para\ toda \;\; v \in L^q(\Omega).$$

Lema A.25 *(Ver [27, p. 22])(**Brézis-Lieb, primera versión**). Sean* $(u_n) \subset \mathbb{R}^N$, *abierto y* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Si*

(a) u_n *es limitada en* $L^p(\Omega)$;

(b) $u_n \to u$ *q.t.p. en* Ω.

Entonces

$$u_n \rightharpoonup u \quad en \;\; L^p(\Omega).$$

Lema A.26 *(Ver [4, Teorema 1])(**Brézis-Lieb, segunda versión**).*
Seam $1 \le p < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ *y* (f_n) *una sucesión limitada de funciones en* $L^p(\Omega)$ *que converge en quase todo punto para* f, *entonces*

$$f \in L^p(\Omega) \quad y \quad \lim_{n\to\infty} (|f_n|_p^p - |f - f_n|_p^p) = |f|_p^p.$$

Lema A.27 *(Ver [4, Teorema 2])(**Brézis-Lieb, mas general**).*
Seam $1 \le p < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ *y* $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es una función continua con* $j(0) = 0$ *que*

satisface la siguiente hipótesis: para cada $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeño, existen dos funciones continuas,* φ_ϵ *e* ψ_ϵ *no negativas tales que*

$$|j(a+b) - j(a)| \leq \epsilon\varphi_\epsilon(a) + \psi_\epsilon(b), \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{C}.$$

Sea $f_n = f + g_n$ *una sucesión de funciones en* $L^p(\Omega)$ *tal que*

(a) $g_n \to 0$ *q.t.p en* Ω.

(b) $j(f) \in L^1$.

(c) $\int_\Omega \varphi_\epsilon(g_n(x))dx \leq C < \infty$, *para alguna constante* C, *independiente de* ϵ *y* n.

(d) $\int_\Omega \psi_\epsilon(f(x))dx < \infty$, *para todo* $\epsilon > 0$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} \int [j(f+g_n) - j(g_n) - j(f)]dx = 0$, *cuando* $n \to \infty$

A.3 Resultados da Teoria dos Pontos Críticos

Teorema A.28 *(Ver [27, Teorema 2.10]) "Sean* X *un espacio de Banach,* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ *y* $\rho > 0$ *tales que* $\|e\| > \rho$ *y*

$$b = \inf_{\|u\|=\rho} \Phi(u) > \Phi(0) \geq \Phi(e).$$

Si Φ *satisface* $(P.S)_C$ *con*

$$C = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \Phi(u),$$

$$\text{donde } \Gamma = \{g \in C([0,1], X) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = e\},$$

entonces C *es un valor crítico de* Φ*."*

Teorema A.29 *(Ver [27, Teorema 2.12]) "E un espacio de Banach con* $E = V \oplus W$, *donde* V *es un espacio de dimension finita,* $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, *suponga que*

(a) existen $\rho, \alpha > 0$ *tales que* $\Phi\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$ *y*

(b) existen $e \in (\partial B_1) \cap W$, $0 < \beta < \alpha$ *y una constante real* $R > \rho$ *tal que* $\Phi\Big|_{\partial Q} < \beta$ *donde* $Q = (B_R \cap V) \oplus (0, Re)$.

Si Φ *satisface* $(P.S)_C$ *con*

$$C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)),$$

$$\textit{onde } \Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \ ; \ \gamma = I_d \ \textit{ em } \ \partial Q\}.$$

Entonces Φ *tiene un valor crítico* $C \geq \alpha$ *"*

Referências Bibliográficas

[1] AMBROSETTI, A., BREZIS, H., CERAMI, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*. J. Funct. Anal 122 (1994), 519-543.

[2] ARCOYA, D., VILLEGAS, S. *Nontrivial solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically linear at $-\infty$ and superlinear at $+\infty$*, Math.Z. 219 (1995) 499-513.

[3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations*. Springer-NewYork. Math, 2010.

[4] BREZIS, H., LIEB, E. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 3, 486-490.

[5] BREZIS, H., NIRENBERG, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

[6] BREZIS, H., NIRENBERG, L. *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci., Paris I 317 (1993) 465-472.

[7] CALANCHI, M. ; RUF, B. *Elliptic equations with one-sided critical growth*, Electron. J. Differential Equations 89 (2002) 21 (electronic).

[8] CALANCHI, M. ; RUF, B. ; ZHANG, Z. *Elliptic equations in R^2 with one-sided exponential growth*, Commun. Contemp. Math. 6 (2004) 947-971.

[9] CAPOZZI, A. ; FORTUNATO, D. ; PALMIERI, G. *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2 (1985) 463-470.

[10] CUESTA, M. ; DE FIGUEIRIDO, D.G. ; SRIKANTH, P.N. *On a resonant-superlinear elliptic problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations 17 (2003) 221-233.

[11] CHABROWSKI, J., YANG, J. *On the Neumann problem with combined nonlinearities*, Ann. Polon. Math. 85 (2005) 239-250.

[12] CHANG, X. *Multiplicity of solutions for semilinear elliptic problems with combined nonlinearities*, Commun. Contemp. Math. 13 (2011) 389-405.

[13] DE PAIVA, F.O., MASSA, E. *Multiple solutions for some elliptic equations with a nonlinearity concave at the origin*, Nonlinear Anal. 66 (2007) 2940-2946.

[14] DE PAIVA, F.O., PRESOTO, A. E. *Semilinear elliptic problems with asymmetric nonlinearities*.J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), no. 1, 254-262.

[15] DE FIGUEIREDO, D. G., YANG. J. *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems*. Topol. Methods Nonlinear Anal., 14(1), 59-80, 1999.

[16] DE MORAIS FILHO, D.C. ; PEREIRA, F.R. *Critical Ambrosetti-Prodi type problems for systems of elliptic equations*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 194-207.

[17] FOLLAND G.*Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[18] GAZZOLA, F. ; RUF, B. *Lower-order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Adv. Differential Equations 2 (1997) 555-572.

[19] MOTREANU, D., MOTREANU, V.V., PAPAGEORGIOU, N.S. *p-Laplacian equations with concave terms and asymmetric perturbations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 141 (2011) 171-192.

[20] LAWRENCE, C. E. *Weak convergence methods for nonlinear partial diferential equations.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[21] PAPAGEORGIOU, N.S., SMYRLIS, G. *A multiplicity theorem for Neumann problems with asymmetric nonlinearities*. Ann. Mat. Pura Appl. 189 (2010) 253-272.

[22] PERERA, K., AGARWAL, R. P., O'REGAN, D. Mao, Anmin. and Li, Yang . *Morse theoretic aspects of p-Laplacian operators.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 161. American Math- ematical Society, Providence (2010).

[23] PERERA, K. *Multiplicity results for some elliptical problems with concave nonlinearities*, J. Differential Equations 140 (1997) 133-141.

[24] PERERA, K. *Critical groups of pairs of critical points produced by linking subsets.* J. Differential Equations 140 no.1 (1997), 142-160.

[25] RIBEIRO, B. *The Ambrosetti-Prodi problem for gradient elliptic systems with critical homogeneous nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. 363 (2010) 606-617.

[26] RUF, B., SRIKANTH, P.N. *Multiplicity results for superlinear elliptic problems with partial interference with the spectrum*, J. Math. Anal. Appl. 118 (1986) 15-23.

[27] WILLEM, M. *Minimax Theorems: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, vol. 24, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1996.